OBSERVATORIO ASTRONÓMICO DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
DIRECTOR : ING° FÉLIX AGUILAR
SERIE ASTRONÓMICA (Antes Publicaciones). — Tomo XVIII

LA ACELERACION SECULAR

DE

LOS EJES MAYORES DE LAS ORBITAS PLANETARIAS

POR

ALEXANDER WILKENS

LA PLATA
OBSERVATORIO ASTRONÓMICO
—
1942

Imprenta y Casa Editora CONI, Perú 684, Buenos Aires

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

(1942)

PRESIDENTE

DOCTOR ALFREDO L. PALACIOS

VICEPRESIDENTE

INGENIERO GABRIEL DEL MAZO

SECRETARIO GENERAL

ABOGADO BERNARDO ROCHA

Consejeros titulares : Doctor Joaquín Frenguelli, Ingeniero Félix Aguilar, Doctor Max Birabén, Doctor Orestes E. Adorni, Doctor José Belbey, Doctor Jorge E. Durrieu, Ingeniero Juan C. Lindquist, Ingeniero Gabriel del Mazo, Ingeniero Julio R. Castiñeiras, Ingeniero Aquiles Martínez Civelli, Doctor Carlos A. Sagastume, Doctor Hércules Corti, Doctor Juan E. Cassani, Doctor Alfredo D. Calcagno, Doctor Luis R. Longhi y Doctor Ricardo de Labougle.

Guarda Sellos : Ingeniero Alejandro Botto.

Representantes de los alumnos : Señor Mario E. Ochoa y Señor Ramón E. Arigós.

OBSERVATORIO ASTRONÓMICO

DIRECTOR

INGENIERO FÉLIX AGUILAR

SECRETARIO

AGRIMENSOR CARLOS ALBARRACÍN SARMIENTO

PERSONAL DOCENTE

Profesores Extraordinarios de la Escuela Superior de Ciencias Astronómicas y Conexas : Ingeniero Félix Aguilar, Doctor Bernhard H. Dawson, Ingeniero Virginio Manganiello, Ingeniero Numa Tapia, Señor Juan José Nissen y Doctor Alexander Wilkens.

Extraordinario-Adjunto : Ingeniero Simón Gershánik.

PERSONAL CIENTÍFICO Y TÉCNICO

Jefes de Departamento : Doctor Bernhard H. Dawson, Ingeniero Virginio Manganiello, Señor Juan José Nissen, Ingeniero Numa Tapia y Doctor Alexander Wilkens.

Astrónomo de Primera : Agrimensor Hugo A. Martínez.

Geofísicos de Segunda : Ingeniero Enrique Levin, Ingeniero Simón Gershánik.

Astrónomo de Tercera : Ingeniero Miguel A. Agabios.

Astrónomo de Cuarta : Doctor Reinaldo P. Cesco.

Astrónomo de Quinta : Señor Silvio Mangariello.

Geofísico de Quinta : Doctor Carlos U. Cesco.

Ayudantes Astrónomos de Primera : Señor Angel A. Baldini, Señor Miguel Itzigsohn y Doctor Herbert Wilkens.

Calculista de Tercera : Señor Jorge A. Garbarino.

Ayudantes Astrónomos de Segunda : Señor Ricardo Luis Lassalle y Señor Juan Carlos Griffin.

Calculistas Ayudantes : Señora María del Carmen Guillén de Baldini y Señor Omar Jorge Rizzo.

Ayudante Geofísico de Segunda : Señor Julio Lenzi.

Auxiliar Geofísico : Señor Juan Carlos Natale.

Mecánico Especialista : Señor Gregorio Plotnikoff.

LA ACELERACION SECULAR DE LOS EJES MAYORES DE LAS ORBITAS PLANETARIAS
DIE SÄKULARBESCHLEUNIGUNG DER GROSSEN ACHSEN DER PLANETENBAHNEN

PARTE I. FUNDAMENTOS TEORICOS
TEIL I. DIE THEORETISCHEN GRUNDLAGEN

§ 1. Einleitung

Die Frage nach den Säkularstörungen der grossen Achsen der Planetenbahnen hat sich mit der Zeit vom theoretischen wie praktischen Gesichtspunkt aus zu einem akuten Problem entwickeln müssen. Denn die Genauigkeit der weiter zurückliegenden wie der neueren Beobachtungen fordert zwecks Darstellung der Abweichungen zwischen Beobachtung und Theorie — insbesondere bei einer neuerlichen Prüfung des Gravitationsgesetzes — die dringliche und exakte Berücksichtigung der Störungen mindestens bis zur 3. Ordnung der Massen, sowohl bei den öfter und viel länger beobachteten grossen Planeten, wie auch schon bei den Planetoiden; insbesondere ist eine scharfe Darstellung des Ortes der Erde resp. der Sonne als dem Basispunkt für alle Messungen im Sonnensystem notwendig.

Theoretisch und praktisch wertvoll war der, wie Jacobi sich ausdrückte, «mit einen Federstrich» erbrachte allgemeine Beweis von Lagrange bezüglich des Laplaceschen Theorems zur Nichtexistenz säkularer Gleider 1. Ordnung der störenden Masse bei den großen Achsen der Planetenbahnen. Ebenso überraschend war der spätere von Poisson erbrachte Nachweis der Nichtexistenz rein säkularer Glieder

§ 1. Introducción

El estudio de las perturbaciones seculares de los semiejes mayores de las órbitas planetarias, había de convertirse con el correr de los años en un delicado problema desde el doble punto de vista práctico y teórico. Pues la exactitud de las observaciones, tanto antiguas como modernas, exige imperiosamente que se tome en cuenta — con el fin de poder interpretar las discordancias entre la observación y la teoría, y particularmente para una nueva prueba de la ley de gravitación — el efecto de las perturbaciones por lo menos hasta el 3er orden respecto de las masas, no sólo en el caso de los grandes planetas observados durante muchísimo tiempo, sino también en el de los asteroides. En especial es necesario representar rigurosamente la posición de la tierra respecto del sol, punto fundamental éste para todas las mediciones del sistema solar.

La demostración general del teorema de Laplace hecha por Lagrange, de « una plumada » — según la expresión de Jacobi —, sobre la inexistencia de términos seculares de 1er orden de la masa perturbadora en los ejes mayores de las órbitas planetarias, fué de valor, desde luego, teórica y prácticamente. Por igual asombrosa resultó la comprobación posterior de Poisson en cuanto a la inexistencia de térmi-

2. Ordnung der störenden Massen. Viel umständlicher war dann der nach einer Methode von Tisserand durch S. Haretu erbrachte Beweis der Existenz von säkularen der einfachen Potenz der Zeit t proportionalen Glieder 3. Ordnung der Massen (s. *Annales de l'Observatoire de Paris,* Bd. 18, und *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris,* Bd. 82).

In Bezug auf dieses Ergebnis bedeutete aber eine ausserordentliche Ueberraschung der im Jahre 1937 von Sundmann erbrachte Zusatz, daß gegenüber der großen Achse ihre Quadratwurzel keine der einfachen Potenz der Zeit proportionale Säkularstörung besitzt, soweit es sich um die 3. Ordnung der Massen handelt (s. *Vierteljahrsschrift der Astron. Gesellschaft, Jahrgg. 1937,* Helft 4, pág. 311-312); in der Quadratwurzel aus der Achse haben sich die Säkularglieder in t^1 weggehoben.

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, dass die Säkularglieder der 3. Ordnung der Massen in der großen Achse mit den der Zeit t^1 proportionalen Gliedern noch nicht erschöpft sind, dass vielmehr auch noch rein säkulare Glieder in t^2 existieren und dass diese neuen Glieder gegenüber denen in t^1 als die Hauptglieder zu betrachten sind, da gezeigt werden kann, daß die Glieder in t^1 wie die in t^2 von demselben, nämlich 2. Grade der Exzentrizitäten sind. Haretu hat in seiner oben zitierten Abhandlung aus dem Jahre 1878 nur die theoretische Existenz der der Zeit t^1 proportionalen Glieder 3. Ordnung der Massen erwiesen, ohne weder eine explizite analytische Darstellung noch auch nur eine Angabe über die Größenordnung dieser Terme zu geben. Erst 11 Jahre später wurde eine analytische Ableitung der t^1 Glieder von Eginitis gegeben, und zwar im 19. Bande der *Annales de l'Observatoire de Paris* (1889) in einer Ablandlung mit dem Titel: *Mémoire sur la stabilité du système solaire,* aber auch hier ist die letzte klare und einfache Form der analytischen Ordnung der Säkularstörung in t^1 nicht ausgesprochen worden. Auffällig ist ferner, dass Eginitis noch nicht

nos seculares puros de 2° orden en las masas perturbadoras. Mucho más complicada venía a ser la comprobación de la existencia de términos seculares proporcionales a la simple potencia de t en el 3er orden de la masa, hecha por Haretu según un método de Tisserand (Véase: *Annales de l'Observatoire de Paris,* tomo 18, y *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* tomo 82).

Pero, por lo que se refiere a este resultado, significa una sorpresa extraordinaria el siguiente agregado hecho por Sundmann en 1937: la raíz cuadrada del eje mayor, no posee perturbaciones seculares proporcionales a la simple potencia t^1 tratándose del 3er orden de las masas (Véase: *Vierteljahrsschrift der Astron. Gesellschaft, Jahrgang 1937,* tomo 4, págs. 311-12); los términos seculares han sido eliminados en la raíz cuadrada del semieje.

Se demostrará en lo siguiente que los términos seculares de 3er orden de las masas no se han agotado aún con los términos proporcionales al tiempo t^1, sino que existen también términos seculares puros en t^2. Además hay que considerar estos nuevos términos en t^2 como principales en comparación a los en t^1, puesto que se puede demostrar que los términos en t^1 son del mismo grado que los en t^2, es decir, por lo menos del 2° grado en las excentricidades. Haretu sólo comprobó en su memoria del año 1878 antes citada, la existencia teórica de términos de 3er orden en las masas proporcionales al tiempo t^1, sin dar ni una explícita demostración analítica ni tampoco un solo dato del orden de magnitud de estos términos. Sólo 11 años después, Eginitis publicó una deducción analítica de los términos en t^1 en el tomo 19 de los *Annales de l'Observatoire de Paris* (1889), en un trabajo titulado: *Mémoire sur la stabilité du système solaire;* pero tampoco acá se dió a conocer la última forma, clara y sencilla, del orden analítico de la perturbación secular en t^1. Además, es notable que Eginitis no pensara aún en la existencia de términos seculares en t^2, que por ser del an eine Existenz von Säkulargliedern in t^2 gedacht hat, die wegen derselben Ordnung in Bezug auf die Exzentrizitäten viel rascher als die in t^1 anwachsen müssen.

Die Existenz von t^2 Säkulargliedern zieht bei der Anwendung auf die Erde unmittelbar zwei weitere neue Probleme nach sich, und zwar in Bezug auf die Mondbewegung. Die erste Frage ist die, ob die Säkularstörungen der großen Achse der Erdbahn in ihrem indirekten Einfluss auf die grosse Achse der Bahn des Mondes und damit auf seine Länge einen neuen Beitrag zur Darstellung der beobachteten Säkularbeschleunigung der Mondlänge zu liefern vermögen, da die Laplacesche Erklärung auf Grund der säkularen Änderung der Excentrizität der Erdbahn nur einen Teil der beobachteten Säkularbeschleunigung darzustellen vermag. Zweitens ergibt sich die Aufgabe, die direkte Säkularstörung der großen Achse der Mondbahn durch die Störung der Sonne im System Erde-Mond-Sonne zu ermitteln, in Analogie zum Säkular-Problem bei den Planeten; entscheidend ist dann die Feststellung, ob die Summe der genannten beiden Säkularstörungen die notwendige positive Vergrosserung des bisher nach der Laplaceschen Annahme abgeleiteten Betrages der Säkularbeschleunigung des Mondes in Länge herbeizuführen vermag. Wenn auch die Veröffentlichung der Bearbeitung dieser Fragen in der vorliegenden Publikation noch nicht erfolgen wird, so ist doch schon hier das Folgende vorwegzunehmem. Nach der numerischen Rechnung von Eginitis (s. pág. *H 15* seiner oben zitierten Abhandlung) ist die t^1-Säkularstörung der großen Achse der Erdbahn negativ, was, wie man leicht zeigen kann, nicht eine Säkularbeschleunigung, sondern eine Verzögerung der Mondlänge zur Folge hat, sodaß der Laplacesche Betrag noch zu verkleinern ist. Während nun die t^1 Säkularstörungen der großen Erdbahnachse Säkularänderungen der Mondlänge von der Form $c\,t^2$ hervorbringen, entstehen durch die t^2 Säkularstörungen der Erdbahnachse Änderungen der Mond-

mismo orden respecto de las excentricidades, deben crecer mucho más rápidamente que los en t^1.

Por lo que respecta a la Tierra, la existencia de términos seculares en t^2, implica inmediatamente otros nuevos problemas en relación con el movimiento de la Luna :

1° Se trata de saber si la perturbación secular del eje mayor de la órbita de la Tierra con su influencia indirecta sobre el de la órbita lunar y su longitud, podría contribuir nuevamente a una demostración de la aceleración secular de la longitud de la Luna, puesto que la explicación de Laplace basada en la variación secular de la excentricidad de la órbita de la Tierra, sólo es capaz de demostrar una parte de la aceleración secular observada;

2° Hay que investigar la perturbación secular directa del semieje mayor de la órbita lunar por la atracción del sol en el sistema Tierra-Luna-Sol, análogamente al problema secular de los planetas.

Decisivo es, entonces, conocer si la suma de las dos perturbaciones seculares implica el necesario aumento positivo del valor de la aceleración secular de la longitud de la Luna, calculado hasta ahora según la teoría de Laplace.

Aunque no se publicará todavía la elaboración de estas cuestiones, anticiparé aquí, sin embargo, lo siguiente. Según el cálculo numérico de Eginitis (véase pág. *H15* de su mencionado trabajo), la perturbación secular en t^1 del eje mayor de la órbita de la Tierra, es negativa, por lo que no resulta, como es fácil demostrarlo, una aceleración secular, sino una disminución de la longitud de la Luna; luego el valor de Laplace debe ser reducido aún más.

Mientras que las perturbaciones seculares en t^1 del eje mayor de la órbita de la Tierra, producen alteraciones seculares en la longitud de la Luna de la forma ct^2, resultan, a causa de las perturbaciones seculares en t^2 del eje de la órbita de la Tierra, alteraciones de la longitud de la Luna de la forma $f\,.\,t^3$.

länge von der Form $f \cdot t^3$. Die entscheidende Frage ist die, ob der Koeffizient f positiv ist, wie es sein müsste, wenn der Sinn der beobachteten Längenänderung des Mondes dargestellt werden soll. Dabei kann f bereits die Summe der Wirkungen, die aus der Säkularänderung der großen Erdbahnachse durch die großen Planeten und einer Säkularänderung der Mondbahnachse durch die Sonnenstörung entsteht, mit einschliessen. Deshalb ist die analytische Darstellung der planetaren t^2 Säkularglieder die erste dringliche Aufgabe, die in der vorliegenden Publication zuerst zu behandeln ist.

Als Sundmann sein Theorem bezüglich der Wurzel aus der großen Achse veröffentlichte (Herbst 1937), war meine vorliegende Untersuchung bereits weit vorgeschritten, sodaß etwa die Verwendung von $\sqrt{a}$ anstelle von a für mich nicht mehr in Frage kam, aber auch rein sachlich besteht bei den t^2 Säkulargliedern der 3. Ordnung der Massen kein prinzipieller Unterschied in der Behandlung von a oder $\sqrt{a}$, weil beide Parameter mit t^2-Säkulargliedern behaftet sind. Vom praktischen Gesichtspunkt aus dürfte die Darstellung von a nützlicher als die von $\sqrt{a}$ sein, weil a eine Größe einfacher geometrischer Bedeutung ist, deren unmittelbar ersichtlicher Verlauf mit der Zeit, besonders in kosmogonischer Beziehung, von Interesse ist. Wenn man deshalb die t^1 proportionalen Säkularglieder von a zu ermitteln sucht, nachdem man $\sqrt{a}$ nach Potenzen der Massen dargestellt hat, so ist der folgende Weg zu beschreiten. Man habe $\sqrt{a}$ in der folgenden Form erhalten: $\sqrt{a} = \alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ wo die α_i die Störungen i. Ordnung der Masse darstellen; dabei ist α_0 eine Konstante, α_1 enthält als Störung 1. Ordnung nur rein periodische Glieder, während α_2 außer solchen Gliedern wie sogleich gezeigt werden wird auch noch Poisson-Terme enthält, also Glieder der gemischt-säkularen Form $t \cdot \cos \Lambda$ und $t \cdot \sin \Lambda$, wo Λ eine lineare Funktion der Zeit bedeutet, während α_3 nach dem Sundmannschen Theorem keine t^1-Säkularglieder enthält. Bildet man dann a durch Quadrieren der Reihe

La cuestión decisiva es, pues, saber si el coeficiente f es positivo, como debe ser, cuando se quiere representar el sentido de la alteración observada en la longitud de la Luna. Con esto f ya puede contener la suma de los efectos que resultan de la alteración secular del eje de la órbita por los grandes planetas y de la alteración secular del eje lunar por la acción del sol.

Por lo tanto, la primera tarea urgente es la deducción analítica de los términos seculares en t^2 en el caso de los planetas, y de ella trata la presente publicación.

Cuando Sundmann publicó su teorema (1937) sobre la raíz cuadrada del semieje mayor, la presente investigación estaba muy adelantada, de modo que el uso de $\sqrt{a}$ en vez de a ya no venía al caso; pero desde el punto de vista práctico, tampoco hay ninguna diferencia esencial tratándose de los términos seculares t^2 de 3er orden en las masas en el empleo de a o de $\sqrt{a}$, porque los dos parámetros contienen términos seculares t^2.

Prácticamente parece ser más útil representar a en vez de $\sqrt{a}$, puesto que a es una magnitud de significación geométrica sencilla, cuyo cambio, directamente visible con el tiempo es de interés, en especial, desde el punto de vista cosmogónico. Si se quieren deducir los términos seculares de a proporcionales a t^1 después de haber desarrollado $\sqrt{a}$ según potencias de las masas perturbadoras, hay que seguir el siguiente método. Obtendremos $\sqrt{a}$ en la forma siguiente: $\sqrt{a} = \alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ donde los α_i representan las perturbaciones de i-ésimo orden en la masa; α_0 es una constante, α_1 contiene como perturbación de 1er orden sólo términos periódicos puros, mientras que α_2, aparte de tales términos contiene términos de Poisson, como demostraré inmediatamente, es decir, términos de la forma secular mixta $t \cdot \cos \Lambda$ y $t \cdot \operatorname{sen} \Lambda$, donde Λ representa una función lineal del tiempo, mientras que α_3, según el teorema de Sundmann, no contiene ningún término secular en t^1. Al formar entonces a cuadrando la serie de $\sqrt{a}$, für $\sqrt{a}$, so lauten die uns allein interessierenden Glieder 3. Ordnung: $a_3 = 2\varkappa_0\alpha_3 + 2\varkappa_1\alpha_2$. Der erste Term enthält wegen des konstanten Faktors $\varkappa_0$ keine Glieder neuer Form, wohl aber der 2. Term, $\varkappa_1\varkappa_2$, der auf Grund der Zusammensetzung von α_1 und $\varkappa_2$ zu Gliedern vom Poisson-Typ der Form $P = t \cos A \cos A'$ führt, wie man folgendermaßen leicht zeigen kann. Aus der bekannten Differentialgleichung von a:

los términos de 3er orden, únicos de interés para nosotros, son: $a_3 = 2\varkappa_0\alpha_3 + 2\varkappa_1\alpha_2$.

El primer término no contiene otros de nueva forma por ser constante el factor α_0, pero sí el 2° término, $\alpha_1\alpha_2$, que a causa de la composición de $\varkappa_1$ y α_2 da términos del tipo Poisson de la forma $P = t \cos A \, . \cos A'$, lo que se puede comprobar fácilmente por lo que sigue.

De la ya conocida ecuación diferencial para a:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2\sqrt{a}}{K}\frac{\partial R}{\partial l},$$

wo R die Störungsfunktion, l die mittlere Länge und $K = k\sqrt{1+m}$ (k^2 = Gaußsche Konstante), folgt direkt die Differentialgleichung für $\varkappa = K\sqrt{a}$:

donde R es la función perturbadora, l la longitud media y $K = k\sqrt{1+m}$ (k^2 = constante de Gauß), resulta inmediatamente la ecuación diferencial para

$$\frac{d\varkappa}{dt} = \frac{\partial R}{\partial l},$$

bekannt auch aus der kanonischen Form der Differentialgleichungen. Setzt man dann neben $\varkappa = \alpha_0 + \Delta\varkappa$, wo $\Delta\varkappa = \varkappa_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots$, die entsprechenden analogen Ausdrücke: $e = e_0 + \Delta e$, $l = l_0 + \Delta l$ und $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0 + \Delta\tilde{\omega}_1$ wo e die Exzentrizität und $\tilde{\omega}$ die Perihellänge fixieren, und $\Delta e = e_1 + e_2 + e_3$, $\Delta l = l_1 + l_2 + l_3$, $\Delta\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2 + \tilde{\omega}_3$, in Analogie zu $\varkappa$, so ergibt die Potenzentwicklung der Störungsfunktion R bis zu den linearen Termen in den $\Delta\varkappa$, etc.:

conocida también por la forma canónica de las ecuaciones diferenciales. Poniendo, pues, junto a $\varkappa = \alpha_0 + \Delta\alpha$, donde $\Delta\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \alpha_3 + \ldots$, las correspondientes expresiones análogas: $e = e_0 + \Delta e$, $l = l_0 + \Delta l$ y $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0 + \Delta\tilde{\omega}$, siendo e la excentricidad y $\tilde{\omega}$ la longitud del perihelio, y $\Delta e = e_1 + e_2 + e_3$, $\Delta l = l_1 + l_2 + l_3$, $\Delta\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2 + \tilde{\omega}_3$, resulta el desarrollo de la función perturbadora R en serie de potencias hasta los términos lineales en los $\Delta\varkappa$ etc.:

$$R = R_0 + \left(\frac{\partial R}{\partial \varkappa}\right)_0 \Delta\varkappa + \left(\frac{\partial R}{\partial e}\right)_0 \Delta e + \left(\frac{\partial R}{\partial l}\right)_0 \Delta l + \left(\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}}\right)_0 \tilde{\omega}\Delta.$$

Folglich ergibt die Gleichsetzung der Störungen 2. Ordnung auf beiden Seiten der Differentialgleichung, wobei R von der 1. Ordnung der Masse ist:

Por consiguiente, igualando las perturbaciones de 2° orden en ambos miembros de la ecuación diferencial, donde R es de 1er orden en la masa, resulta:

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = \left(\frac{\partial^2 R}{\partial l \partial \varkappa}\right)_0 \alpha_1 + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial l \partial e}\right)_0 e_1 + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial l^2}\right)_0 l_1 + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial l \partial \tilde{\omega}}\right)_0 \cdot \tilde{\omega}_1.$$

Nun enthält die Störung α_1, wie unmittelbar aus der entsprechenden Differerentialgleichung folgt, nur periodische Terme, ebenso auch l_1, wenn die säku-

La perturbación $\varkappa_1$ contiene, como resulta directamente de la ecuación diferencial correspondiente, sólo términos periódicos, lo mismo que l_1, si la perlare Längenstörung mit der mittleren Bewegung vereinigt gedacht und diese letztere direkt den Beobachtungen entnommen wird. Dagegen sind e_1 und $\tilde{\omega}_1$ mit t^1-Säkulargliedern behaftet, sodaß folglich bei Substitution derselben in die Differentialgleichung für α_2 in dem 2. und 4. Gliede rechts Poisson-Terme zum Vorschein kommen, da die Ableitungen $\left(\frac{\partial^2 R}{\partial l \partial e}\right)_0$ und $\left(\frac{\partial^2 R}{\partial l \partial \tilde{\omega}}\right)_0$ wegen der Differentiation nach l nur rein periodische Faktoren sind. Folglich treten bei der Integration dieser Poisson-Glieder neben rein periodischen Störungen auch wieder Poisson-Glieder in α_2 auf, die sich nicht wegheben, ebensowenig wie in a_2. In dem Produkte $\alpha_1 . \alpha_2$ mit Gliedern der Form :

$P = t \cos A \cos A'$ geht dann bei denjenigen Termen, deren Argumente A und A' in Bezug auf die Längen allein gleich sind, das Produkt der Cosinusse in eine Konstante und folglich P in einen der Zeit allein proportionalen Säkularterm von a über, den wir suchten. Um denselben also aus $\sqrt{a}$ ableiten zu können, ist die Kenntnis der Terme α_2 bezüglich ihrer Poisson-Anteile nötig, weshalb es ebenso zweckmässig ist, das t^1-Säkularglied von a direkt mit Hilfe der Differentialgleichung für a resp. a_3 abzuleiten, wobei auch hier vorher a_2, entsprechend α_2, bekannt sein muß, wie aus dem Folgenden hervorgehen wird.

Im Zusammenhang mit der Existenz von t^2-Säkulargliedern in a_3 steht die in ihrer praktischen Auswirkung ebenso wichtige Tatsache, daß, so wie die Glieder 2. Ordnung bereits Poisson-Terme enthalten, auch in a_3 Poisson-Glieder auftreten und zwar von der Form $t . \cos A$ und auch $t^2 . \cos A$, wie man aus den folgenden Darlegungen unmittelbar ersehen kann. Diese Poisson-Glieder verschwinden in kleineren wie größeren Perioden und wachsen mit der Zeit stark an, sodaß auch sie einer genauen Darstellung bedürfen, insbesondere auch in Bezug auf die Mondbahn. Denn nach Newcomb weist die Mondbahn noch Abweichungen auf, die allerdings rein

turbación secular de la longitud está considerada junto con el movimiento medio, sacándose este último directamente de las observaciones. En cambio, e_1 y $\tilde{\omega}_1$ contienen términos seculares en t^1; por consiguiente, al sustituir éstos en la ecuación diferencial de α_2 aparecen términos de Poisson para α_2 en el 2° y 4° *términos* del 2° miembro, porque las derivadas derechas $\left(\frac{\partial^2 R}{\partial l \partial e}\right)_0$ y $\left(\frac{\partial^2 R}{\partial l \partial \tilde{\omega}}\right)_0$ a causa de la diferenciación respecto de l sólo son factores periódicos puros. Por consiguiente, al integrar estos términos de Poisson, aparte de perturbaciones periódicas puras, aparecen también de nuevo términos de Poisson en α_2 que no pueden ser eliminados, lo mismo que en a_2.

El producto $\alpha_1\alpha_2$ contiene términos de la forma $P = t \cos A \cos A'$, cuyos productos de cosenos dan una constante, si los argumentos A y A' son iguales en las longitudes, resultando por tanto en P un término secular de a, sólo proporcional al tiempo como queríamos demostrar. Para poder deducir dicho término pormedio de $\sqrt{a}$, es necesario conocer los términos de Poisson de α_2 y para ello conviene deducir directamente el término secular en t^1 de a por medio de la ecuación diferencial para a_3, debiéndose conocer antes a_2 lo mismo que α_2, como veremos en seguida.

Junto a la existencia de términos seculares en t^2 aparecen en a_3 términos de Poisson en la forma $t \cos A$, que aparecen también en a_2, y también términos de la forma $t^2 . \cos A$, como veremos inmediatamente en las demostraciones que siguen, lo cual es importante por su efecto práctico. Estos términos desaparecen después de periodos más o menos largos y van creciendo tanto con el tiempo, que necesitan ser conocidos exactamente, especialmente con relación a la órbita lunar. Pues, según Newcomb, la órbita lunar muestra todavía desviaciones, que parecen ser periódicas puras con un período de varios siglos y que no han podido ser aclaradas aún. Por periodischer Natur mit einer Periode mehrerer Jahrhunderte zu sein scheinen und bisher nicht aufklärbar waren. Es erscheint aber auch nötig, deshalb den Einfluß der Poisson-Glieder mit Faktoren langer Periode der großen Achse der Erdbahn auf die Mondbahn bezüglich einer eventuellen Erklärung der Newcomb-Terme zu untersuchen, aber in einer späteren Publikation.

Zum Schluß möchte ich dem Direktor des Observatoriums, Herrn Ing. Félix Aguilar, meinen herzlichsten Dank zum Ausdruck bringen für sein stets lebhaftes Interesse an der vorliegenden Untersuchung, besonders inBezug auf den möglichst exakten castellanischen Text, im Hinblick auf die künftigen praktischen Anwendungen, die seine Erwartung besonders anregen. Ebenso nöchte ich den Herrn Dr. R. Cesco und A. Guillén, deren ständiger treuer Mitarbeit an der Redaktion des castellanischen Texte sich mich erfreuen durfte, meinen tiefsten Dank, insbesondere für ihre unerschöpfliche Ausdauer, zum Ausdruck bringen.

eso mismo parece ser necesario, investigar la influencia de los términos de Poisson del eje de la Tierra, con factores de períodos largos, sobre la órbita lunar, con miras a una aclaración eventual de los términos de Newcomb; pero esto lo haremos en una publicación futura.

Deseo exteriorizar mi más cordial agradecimiento hacia el señor director del Observatorio ingeniero Félix Aguilar, por el vivísimo interés que ha manifestado en todo momento por nuestra investigación y especialmente por que el texto castellano resultara lo más exacto posible, con miras a las aplicaciones prácticas futuras, cosa que le preocupa de modo señalado.

Al doctor R. Cesco y al señor A. Guillén, con cuyo concurso decidido he contado durante la redacción castellana, deseo también expresarles mi profundo agradecimiento por su perseverancia inagotable.

§ 2. Die allgemeine Entwickelung der Bahnelemente nach Potenzen der störenden Massen und die Differentialgleichung des Gliedes 3. Ordnung der grossen Achse.

In der vorliegenden Untersuchung werden Potenzreihen nach kleinen Parametern, den störenden Planetenmassen, als die Lösungen simultaner Differentialgleichungen mit 6 Variablen angesehen, weshalb eine Bemerkung zur Konvergenzfrage angebracht ist. Die Entwickelungen unterliegen in jedem Falle gemäß den Theoremen von Cauchy-Poincaré einer Konvergenzgrenze in Bezug auf die Zeit. Diese Grenze kann unendlich sein, ist aber bis heute allgemein nicht sicher angebbar. Die Konvergenzgrenze ist in Anbetracht der kleinen Planetenmassen im Sonnensystem sicher sehr weit entfernt, um so ferner, je kleiner allgemein die Massen sind, sodaß die Potenzentwickelungen auch ein um so genaueres

§ 2. Desarrollo general de los elementos de la órbita según potencias de las masas perturbadoras y ecuación diferencial del término de 3^er^ orden del semieje mayor.

En la presente investigación se consideran las soluciones de ecuaciones diferenciales simultáneas con 6 variables, desarrolladas en series de potencias de pequeños parámetros, las masas perturbadoras, siendo por tanto oportuno, hacer una advertencia respecto de la cuestión de la convergencia.

Los desarrollos están siempre sujetos a un límite de convergencia referente al tiempo según los teoremas de Cauchy-Poincaré. Dicho límite puede ser infinito, pero hasta hoy no ha sido posible fijarlo con seguridad. Por ser pequeñas las masas de los planetas del sistema solar el límite de convergencia es ciertamente muy grande, tanto más, cuanto menor sean las masas. Luego las soluciones serán

Resultat ergeben, je höher die noch mitgenommene Ordnung ist, solange man sich innerhalb der Konvergenzgrenze bewegt.

Ferner sei bemerkt, daß ich die folgenden Entwickelungen auch auf die gegenseitigen Neigungen und Knotenlängen ausgedehnt habe; in der vorliegenden Publikation werden aber nur die von den Knoten und Neigungen unabhängigen Teile der Störungen, d. h. die Hauptbestandteile der Variationen wiedergegeben.

Ist a die halbe große Achse, e die Exzentrizität, $l = \varepsilon + \int n\,dt$ die mittlere Länge, wobei ε die mittlere Länge der Epoche und n die mittlere tägliche Bewegung und schliesslich $\tilde{\omega}$ die Perihellänge des gestörten Körpers, zur Abkürzung mit E (Erde), bezeichnet, so lauten die Differentialgleichungen der Elemente, wie sie im Folgenden immer gebraucht werden sollen, mit R als Störungsfunktion:

tanto más exactas cuanto mayor sea el orden que se ha empleado, en tanto que se esté dentro del límite de convergencia.

Además, quiero advertir que he extendido los desarrollos siguientes también a las inclinaciones y a las longitudes de los nodos correspondientes; pero en la publicación presente serán reveladas sólo aquellas partes de las perturbaciones que son independientes de los nodos y de las inclinaciones, es decir, las partes principales de las perturbaciones.

Sea a el semieje mayor, e la excentricidad, $l = \varepsilon + \int ndt$, la longitud media (donde ε representa la longitud media de la época y n el movimiento medio diario) y finalmente, $\tilde{\omega}$ la longitud del perihelio del cuerpo perturbado. Con E designaremos la Tierra. Las ecuaciones diferenciales de los elementos, tal como serán empleados en adelante, con R como función perturbadora, son:

$$\frac{da}{dt} = \dot{a} = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_\varepsilon, \quad \dot{e} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{e} R_{\tilde{\omega}} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}} \frac{1-\sqrt{1-e_2}}{e} R_\varepsilon$$

$$\dot{l} = \dot{\varepsilon} + \dot{\rho}, \quad \text{wo } \dot{\varepsilon} = -\frac{2\sqrt{a}}{K} R_a + \frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}} \cdot \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e} R_e \tag{1}$$

$$\dot{\tilde{\omega}} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}} \frac{1}{e} R_e, \quad \ddot{\rho} = \frac{dn}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{n}{a} \cdot \frac{da}{dt} = -\frac{3n}{K\sqrt{a}} R_\varepsilon$$

wo $R_\varepsilon = \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$ etc., und wobei k^2 die Gaußsche Konstante, m die Planetenmasse fixieren und $K^2 = k^2(1+m)$ bedeutet. Die Störungsfunktion R verwenden wir in der Laplace-Le Verrierschen Form. Da wir die Säkularglieder 3. Ordnung der störenden Masse bis zu den Gliedern 2. Grades der Exzentrizitäten ableiten wollen, ist die Entwickelung von R bis zu den Termen 2. Grades mindestens darzustellen; Andererseits werden wir noch sehen, daß die Entwickelung wegen der Differentiationen nach den Exzentrizitäten und wegen des in den Differentialgleichungen teilweise auftretenden Nenners e vielfach eine Berücksichtigung auch noch der Terme 3.

siendo $R_\varepsilon = \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$ etc., y representando k^2 la constante de Gauß, m la masa del planeta, y $K^2 = k^2(1 + m)$. Empleamos la función perturbadora R en la forma de Laplace-Le Verrier. Ya que deseamos deducir los términos seculares de 3^{er} orden de la masa perturbadora hasta los de 2^{o} orden en las excentricidades, debemos escribir el desarrollo de R por lo menos hasta los términos de 2^{o} orden. Por otra parte veremos que el desarrollo que aparece parcialmente en las ecuaciones exige considerar también los términos de 3^{er} orden a causa del denominador e y de las derivadas respecto de e, para poder conseguir la demostración exacta de la perturbación secular hasta el 2^{o}

Grades notwendig macht, um die exakte Darstellung der Säkularstörung bis zum 2. Grade der Exzentrizitäten zu erreichen. Werden die Elemente des störenden Körpers J (Jupiter, etc.) dann noch mit a', e', l' und $\tilde{\omega}'$ bezeichnet, so lautet die Funktion R folgendermaßen :

orden en las excentricidades. Si se designan además con a', e', l' y $\tilde{\omega}'$, los elementos del cuerpo perturbador J (Júpiter, etc.) la función R resulta :

$$
\begin{aligned}
R = k^2 \Big\{ & A_i \cos i(l'-l) + \frac{1}{4} B_i (e^2 + e'^2) \cos i(l'-l) + \frac{1}{2} C_i e \cos[il' - (i-1)l - \tilde{\omega}] \\
& + \frac{1}{2} D_i e' \cos[il' - (i-1)l - \tilde{\omega}] + \frac{1}{4} E_i e^2 \cos[il' - (i-2)l - 2\tilde{\omega}] + \frac{1}{4} F_i e e' \cos[\\
& i(l'-l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}] + \frac{1}{4} F_{-i} e e' \cos[i(l'-l) + \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}] + \frac{1}{4} G_i e e' \cos[il' \\
& - (i-2)l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}] + \frac{1}{4} H_i e'^2 \cos[il' - (i-2)l - 2\tilde{\omega}'] + \frac{1}{8} J_i e^3 \cos[il' - (i-1)l - \tilde{\omega}] + \qquad (2) \\
& + \frac{1}{8} N_i e e'^2 \cos[il' - (i-1)l - \tilde{\omega}] + \frac{1}{8} K_i e^2 e' \cos[il' - (i-1)l - \tilde{\omega}'] + \frac{1}{8} P_i e'^3 \times \\
& \times \cos[il' - (i-1)l - \tilde{\omega}'] + \frac{1}{8} L_i e^2 e' \cos[il' - (i-1)l + \tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}] + \frac{1}{8} M_i e e'^2 \times \\
& \times \cos[il' - (i-1)l - 2\tilde{\omega}' + \tilde{\omega}] \Big\}.
\end{aligned}
$$

Der Index i läuft bei den Koeffizienten A_i, B_i, F_{+i} und F_{-i} nur von O bis $+\infty$, dagegen bei allen anderen von $i = -\infty$ bis $i = +\infty$, weil man bei den A_i und B_i infolge des Argumentes $i(l'-l)$ die Koeffizienten mit negativem Index vermeiden kann und diese Vereinfachung auch bei den F_i eintreten lassen kann, weil das Argument in Bezug auf die l' und l dasselbe ist u. bei der später notwendigen Produktbildung der A_i, B_i und $F_{\pm i}$-Glieder untereinander die Beschränkung auf nur positives i eine Vereinfachung bedeutet, wenn dann auch notwendigerweise die beiden Koeffizienten F_{+i} und F_{-i}, beide für nur positives i auftreten müssen.

Die Koeffizienten A_i, B_i, etc., sind den *Annalen der Pariser Sternwarte*, Bd. 1, 2, etc., in direkter Form am einfachsten dem 10. Bande zu entnehmen, wobei auch auf die Mitnahme der aus dem Nebenteil von R folgenden Glieder zu achten ist. Auf die Berechnung der Transcendenten A_i, B_i, etc., und ihrer Ableitungen brauche ich hier zunächst nicht weiter einzugehen.

El índice i varía en los coeficientes A, B_i, F_{+i} y F_{-i} sólo desde o hasta $+\infty$; en cambio en todos los demás, desde $i = -\infty$ hasta $i = +\infty$, porque en los A_i y B_i, en razón del argumento $i(l'-l)$, se pueden evitar los coeficientes con índice negativo y simplificar también los F_i, puesto que el argumento es el mismo respecto de los l' y l, y, al tener que formar después los productos de los términos A_i, B' y $F_{\pm i}$ entre sí, la restricción a i sólo positivo, significa una simplificación, aunque entonces los coeficientes F_{+i} y F_{-i} deben aparecer, ambos, para i solamente positivo.

Los coeficientes A_i, B_i, etc., pueden verse en los *Anales del Observatorio de París*, tomo 1, 2, etc., y más detalladamente, en el tomo 10, debiéndose considerar que hay que tomar en cuenta, también, los términos resultantes de la parte secundaria de R. No debemos mencionar por el momento el cálculo de las trascendentes A_i, B_i, etc., y de sus derivadas.

Zur Vereinfachung der Bezeichnung der Ableitungen von R für den Druck werde weiter allgemein gesetzt:

Además, con el fin de simplificar para la imprenta la representación de las derivadas de R, pondremos, en general:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a \partial e} = R_{ae}, \quad \frac{\partial^3 R}{\partial a \partial \varepsilon \partial e} = R_{a\varepsilon e} \text{ u.s.w.}$$

Allgemein setzen wir dann die folgenden Potenzentwickelungen an:

Adoptamos, en general, los siguientes desarrollos en series de potencias:

$$a = a_0 + a_1 + a_2 + \dots, \qquad e = e_0 + e_1 + e_2 + \dots$$

$$l = l_0 + l_1 + l_2 + \dots, \qquad \tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2 + \dots$$

wo die a_i, e_i, l_i und $\tilde{\omega}_i$ die Störungen i. Ordnung der Elemente fixieren.

Da $\dot{a}$ nach (1) der Größe R_ε proportional ist, also schon mit der 1. Potenz der störenden Masse m' behaftet ist, so bedarf der Faktor R_ε wie auch der Faktor $\sqrt{a}$ in $\dot{a}$ nur noch der Potenzentwickelung bis zur 2. Ordnung der Masse d. h. bis einschließlich a_2, e_2, l_2, $\tilde{\omega}_2$ resp. $(a_1)^2$, $(e_1)^2$, etc., resp. $a_1 e_1$, etc., bis $l_1 . \tilde{\omega}_1$, damit auf den rechten Seiten der Gleichungen (1) allgemein die Glieder 3. Ordnung der Massen erscheinen. Folglich ist deshalb allgemein:

representando los a_i, e_i, l_i y $\tilde{\omega}_i$ las perturbaciones de orden i de los elementos.

Por ser $\dot{a}$, según (1), proporcional al término R_ε, es decir, como ya contiene la primera potencia de la masa perturbadora m', el factor R_ε, lo mismo que el factor $\sqrt{a}$ en $\dot{a}$ debe ser desarrollado en serie de potencias solamente hasta el 2º orden de la masa, es decir, incluso hasta a_2, e_2, l_2, $\tilde{\omega}_2$, $(a_1)^2$, $(e_1)^2$, etc., $a_1 . e_1$, etc., hasta $l_1 . \tilde{\omega}_1$, para que, en los 2os miembros de las ecuaciones (1) aparezcan en general los términos de 3er orden en las masas.

Por consiguiente, resulta en general:

$$\dot{a}_i = \Lambda_i (a_0, \; a_1 \dots a_{i-1}, \; e_0, \; e_1 \dots l_{i-1}, \; \dots \; \tilde{\omega}_{i-1})$$

mit analoger Darstellung der $\dot{e}_i$, $\dot{l}_i$ und $\dot{\tilde{\omega}}_i$, sodaß die a_i, e_i, etc., bis zur Ordnung i bekannt werden, sobald vorher alle a_1, a_2 bis a_{i-1}, e_1 e_2 bis e_{i-1}, etc., ermittelt worden sind.

Unsere Aufgabe ist deshalb die Entwickelung der Λ_i bis $i = 3$, d. h. in Bezug auf die Entwickelung nach den a_i, e_i, etc., bis zur 2. Ordnung, einschließlich der Kombinationen derselben bis $l_1 . \tilde{\omega}_1$. Führt man die abkürzende Bezeichnung ein:

con análogas representaciones para $\dot{e}_i$, $\dot{l}_i$ y $\dot{\tilde{\omega}}_i$, luego los a_i, e_i, etc., serán conocidos hasta el orden i, tan pronto como hayan sido calculados todos los a_1, a_2 hasta a_{i-1}, e_1, e_2 hasta e_{i-1}, etc.

Luego nuestra tarea consiste en desarrollar los Λ_i hasta $i = 3$, es decir, según los a_i, e_i, etc., hasta el 2º orden, incluso las combinaciones de los mismos hasta $l_1 . \tilde{\omega}_1$.

Introduciendo como abreviatura:

$$a = a_0 + \Delta a, \; e = e_0 + \Delta e, \text{ etc.}$$

wo

donde

$$\Delta a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i, \; \Delta e = \sum_{i=1}^{\infty} e_i \text{ etc.}$$

die Summen der Störungen aller Ordnungen fixieren, so ist zum Zwecke der Ableitung der Säkularstörungen 3. Ordnung der großen Halbachse auf der rechten Seite der Definitionsgleichung :

representan las sumas de las perturbaciones de todos los órdenes, es necesario, a fin de poder deducir las perturbaciones seculares de 3er orden del semieje mayor a, desarrollar las funciones R_ε y ψ que aparecen en el 2° miembro de la ecuación de definición :

$$\dot{a} = \psi \,.\, R_\varepsilon \tag{3}$$

die Funktion R_ε wie ψ bis zur 2. Ordnung der Δa, Δe, Δl und $\Delta\tilde{\omega}$ zu entwickeln. Diese Entwickelungen nach dem Taylorschen Satze ergeben dann die folgenden der erforderlichen Ausdehnung entsprechenden Darstellungen von R_ε und ψ :

hasta el 2° orden en los Δa, Δe, Δl y $\Delta\tilde{\omega}$.

Por el teorema de Taylor se obtienen, en las extensiones necesarias, las siguientes representaciones de R_ε y ψ :

$$\begin{aligned}
R_\varepsilon = {} & (R_\varepsilon)_0 + (R_{\varepsilon a})_0\,\Delta a + \ldots + (R_{\varepsilon\tilde{\omega}})_0 + \Delta\tilde{\omega} \\
& + \frac{1}{2!}\left[(R_{\varepsilon aa})_0\,(\Delta a)^2 + (R_{\varepsilon ee})_0\,(\Delta e)^2 + \ldots + (R_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}})\,(\Delta\tilde{\omega})^2\right. \\
& \left. + 2\,(R_{\varepsilon ae})_0\,\Delta a\Delta e + 2\,(R_{\varepsilon a\lambda})_0\,\Delta a\Delta l + \ldots + 2\,(R_{\varepsilon\lambda\tilde{\omega}})_0\,\Delta l\Delta\tilde{\omega}\right] \\
\psi = {} & \psi_0\left[1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta a}{a_0} - \frac{1}{8}\left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^2 + \ldots\right], \text{ wo} \\
\psi_0 = {} & \frac{2\sqrt{a_0}}{K}
\end{aligned} \tag{4}$$

wobei der Index 0 den betreffenden Funktionswert auf Grund der ungestörten Elemente a_0, e_0, etc., fixiert.

Bei weiterer Entwickelung der rechten Seiten von R_ε und ψ infolge der notwendigen Zerlegung der Koeffizienten Δa, $(\Delta a)^2$, Δe, $(\Delta e)^2$, etc., nach den a_1, e_1, etc., ergibt sich dann die folgende Differentialgleichung für a_3 in der für die Anwendung zweckmäßigen Form :

donde el índice 0 representa el valor respectivo de la función para los valores de los elementos sin perturbación a_0, e_0, etc.

Reemplazando en los 2os miembros de R_ε y ψ los coeficientes Δa, $(\Delta a)^2$, Δe, $(\Delta e)^2$, etc., en función de a_1, e_1, etc., resulta, pues, la siguiente ecuación diferencial para a_3 en la forma adecuada al uso.

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_3 = \frac{2\sqrt{a_0}}{K}\Big[& R_{\varepsilon a} \cdot a_2 + R_{\varepsilon e} \cdot e_2 + R_{\varepsilon\varepsilon} \cdot l_2 + R_{\varepsilon\tilde{\omega}} \cdot \tilde{\omega}_2 + R_{\varepsilon\varphi} \cdot \varphi_2 + R_{\varepsilon\theta} \cdot \theta_2 + \\
& + \frac{1}{2} R_{\varepsilon aa} \cdot a_1^2 + \frac{1}{2} R_{\varepsilon ee} \cdot e_1^2 + \frac{1}{2} R_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} \cdot l_1^2 + \frac{1}{2} R_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}} \cdot \tilde{\omega}_1^2 + \frac{1}{2} R_{\varepsilon i}\varphi_1^2 + \frac{1}{2} R_{\varepsilon\theta\theta} \cdot \theta_1^2 + \\
& + R_{\varepsilon ae} a_1 \cdot e_1 + R_{\varepsilon a\varepsilon} a_1 \cdot l_1 + R_{\varepsilon a\tilde{\omega}} a_1 \cdot \tilde{\omega}_1 + R_{\varepsilon a\varphi} a_1 \cdot \varphi_1 + R_{\varepsilon a\theta} \cdot a_1 \cdot \theta_1 + \\
& + R_{\varepsilon e\varepsilon} e_1 l_1 + R_{\varepsilon e\tilde{\omega}} e_1 \cdot \tilde{\omega}_1 + R_{\varepsilon e\varphi} e_1 \cdot \varphi_1 + R_{\varepsilon e\theta} e_1 \theta_1 + \\
& + R_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}} l_1 \tilde{\omega}_1 + R_{\varepsilon\varepsilon\varphi} l_1 \varphi_1 + R_{\varepsilon\varepsilon\theta} l_1 \theta_1 + R_{\varepsilon\tilde{\omega}\varphi} \tilde{\omega}_1 \varphi_1 + \qquad (5) \\
& + R_{\varepsilon\tilde{\omega}\theta} \tilde{\omega}_1 \theta_1 + R_{\varepsilon\varphi\theta} \varphi_1 \theta_1 + \frac{1}{2a_0} \cdot R_{\varepsilon a} \cdot a_1^2 + \frac{1}{2a_0} R_{\varepsilon} a_2 + \\
& + \frac{1}{2a_0} \cdot R_{\varepsilon e} a_1 e_1 + \frac{1}{2a_0} R_{\varepsilon\varepsilon} a_1 l_1 + \frac{1}{2a_0} R_{\varepsilon\tilde{\omega}} a_1 \tilde{\omega}_1 + \frac{1}{2a_0} R_{\varepsilon\varphi} a_1 \cdot \varphi_1 + \\
& + \frac{1}{2a_0} R_{\varepsilon\theta} a_1 \theta_1 - \frac{1}{8a_0^2} R_{\varepsilon} a_1^2 \Big]
\end{aligned}
$$

wobei alle Ableitungen von R mit den ungestörten Elementen zu berechnen sind; der Einfachheit halber wurde der Index o unterdrückt.

Zur Erweiterung der Entwickelung auf die Berücksichtigung der von den Bahnneigungen abhängigen Terme sind diese hier von vorneweg hinzugefügt worden.

Der konstante Teil der rechten Seite von (5) liefert bei Integration die in der Zeit t rein säkularen Störungen der großen Halbachse; falls dieselbe rechte Seite auch der Zeit t proportionale Glieder enthalten sollte, entstehen in der Achse Säkularglieder in t^2, was nachzuweisen bleibt.

Zu diesen Zwecke sind die einzelnen Glieder von (5) in Bezug auf ihren Beitrag zu den soeben gestellten Fragen zu untersuchen, nachdem die Glieder 1. und 2. Ordnung aller Elemente allgemein integriert und eine Feststellung ihrer Brauchbarkeit zur Erzeugung konstanter oder der Zeit t proportionaler Glieder in a_3 erfolgt ist.

Leitet man deshalb analog zu (5) die Glieder 2. Ordnung in a, e, etc:, ab, so erhält man die Differentialgleichungen:

debiéndose calcular todas las derivadas de R con los elementos sin perturbaciones; para simplificar, el índice o ha sido suprimido.

El desarrollo se ha extendido a los términos dependientes de las inclinaciones de las órbitas, incluyendo desde ya los términos correspondientes para el caso que se quiera hacer aplicación de ellos.

La parte constante del 2º miembro de (5), suministra, por integración, las perturbaciones seculares puras en el tiempo t del semieje mayor; en caso de que el mismo miembro contuviera también términos proporcionales al tiempo t, aparecerían en el eje términos seculares en t^2, lo que queda por comprobar.

Para este objeto hay que examinar el aporte de cada uno de los términos de (5), a las cuestiones recién mencionadas, después de haber integrado en general los términos de 1er y de 2º orden de todos los elementos y haber comprobado que pueden producir términos en a_3 constantes o proporcionales al tiempo t.

Al deducir análogamente a (5) los términos de 2º orden en a, e, etc., resultan las ecuaciones diferenciales:

$$\dot{a}_2 = \frac{2\sqrt{a_0}}{K}\left[a_{2a} \cdot a_1 + a_{2e}e_1 + a_{2\varepsilon}l_1 + a_{2\tilde{\omega}}\tilde{\omega}_1\right]$$

$$\dot{e}_2 = -\frac{\sqrt{1 - e_0^2}}{K\sqrt{a_0}}\left[e_{2a1} + e_{2e}e_1 + e_{2\varepsilon}l_1 + e_{1\tilde{\omega}}\tilde{\omega}_1\right]$$

$$\dot{l}_2 = \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\rho}_2 = \dot{\varepsilon}_2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{n_0}{a_0} a_2 + \frac{15}{3}\frac{n_0}{a_0^2} a_1^2 = \tag{6}$$

$$\varepsilon_{2a}a_1 + \varepsilon_{2e}e_1 + \varepsilon_{2\varepsilon}l_1 + \varepsilon_{2\tilde{\omega}}\tilde{\omega}_1 - \frac{3}{2}\frac{n_0}{a_0} a_2 + \frac{15}{8} \cdot \frac{n_0}{a_0^1} a_1^2$$

$$\dot{\tilde{\omega}}_2 = \frac{\sqrt{1 - e_2}}{K\sqrt{a_0}e_0}\left[\tilde{\omega}_{2a} \cdot a_1 + \tilde{\omega}_{2e} \cdot e_1 + \tilde{\omega}_{2\varepsilon}l_1 + \tilde{\omega}_{2\tilde{\omega}} \cdot \tilde{\omega}_1\right]$$

wobei die Koeffizienten von a_{2a}, a_{2e}, etc., die folgende Bedeutung haben:

donde los coeficientes de a_{2a}, a_{2e}, etc., significan:

$$a_{2a} = \frac{1}{2a_0} R_\varepsilon + R_{\varepsilon a}, \quad a_{2e} = R_{\varepsilon e}, \quad a_{2\varepsilon} = R_{\varepsilon\varepsilon}, \quad a_{2\omega} = R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$$

$$e_{2a} = \frac{1}{e_0} R_{\tilde{\omega} a} - \frac{1}{2a_0}\frac{1}{e_0} R_{\tilde{\omega}} + \frac{1}{2} e_0\left(1 + \frac{1}{4} e_0^2\right) R_{\varepsilon a} - \frac{1}{4a_0} \cdot e_0\left(1 + \frac{1}{4} e_0^2\right) R_\varepsilon$$

$$e_{2e} = \frac{1}{e_0} R_{\tilde{\omega} e} - \frac{1}{e_0^2\,(1 - e_0^2)} R_{\tilde{\omega}} + \frac{1}{2} e_0\left(1 + \frac{1}{4} e_0^2\right) R_{\varepsilon e} + \frac{1}{2}\left[1 - \frac{e_0^2}{1 - e_0^2}\left(1 + \frac{1}{4} e_0^2\right) + \frac{3}{4} e_0^2\right] R_\varepsilon$$

$$e_{2\varepsilon} = \frac{1}{e_0} R_{\tilde{\omega}\varepsilon} + \frac{1}{2} e_0\left(1 + \frac{1}{4} e_0^2\right) R_{\varepsilon\varepsilon}, \quad e_{2\tilde{\omega}} = \frac{1}{e_0} R_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}} + \frac{1}{2} e_0\left(1 + \frac{1}{4} e_0^2\right) R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$$

$$\varepsilon_{2a} = -\frac{2\sqrt{a_0}}{K}\left[R_{aa} + \frac{1}{2a_0} R_a\right] + \frac{\sqrt{1 - e_0^2}}{2K\sqrt{a_0}}\left[e_0\left(1 + \frac{1}{4} e_0^2\right) R_{ea} - \frac{1}{2a_0} e_0\left(1 + \frac{1}{4} e_0^2\right) R_e\right] \tag{6a}$$

$$\varepsilon_{2e} = -\frac{2\sqrt{a}}{K} R_{ae} + \frac{\sqrt{1 - e^2}}{2K\sqrt{a}}\left[e\left(1 + \frac{1}{4} e^2\right) R_{ee} + \left\{1 - \frac{e^2}{1 - e^2}\left(1 + \frac{1}{4} e^2\right) + \frac{3}{4} e^2\right\} R_e\right.$$

$$\varepsilon_{2\varepsilon} = -\frac{2\sqrt{a_0}}{K} R_{a\varepsilon} + \frac{\sqrt{1 - e_0^2}}{2K\sqrt{a_0}} e_0\left(1 + \frac{1}{4} e_0^2\right) \cdot R_{e\varepsilon}, \quad \varepsilon_{2\tilde{\omega}} = -\frac{2\sqrt{a}}{K} R_{a\tilde{\omega}} + \frac{\sqrt{1 - e_0^2}}{2K\sqrt{a_0}} e_0\left(1 + \frac{1}{4} e_0^2\right) R_{e\tilde{\omega}}$$

$$\tilde{\omega}_{2a} = R_{ea} - \frac{1}{2a_0} R_e, \quad \tilde{\omega}_{2e} = R_{ee} - \frac{1}{e_0\,(1 - e_0^2)} R_e$$

$$\tilde{\omega}_{2\varepsilon} = R_{e\varepsilon}, \quad \omega_{2\tilde{\omega}} = R_{e\tilde{\omega}}.$$

Man erhält durch einfache Quadratur auf Grund dieser Formeln unmittelbar die Koeffizienten a_2, e_2 und $\tilde{\omega}_2$, sobald die Terme erster Ordnung a_1, e_1, l_1, $\tilde{\omega}_1$ aus den Formeln (1) abgeleitet worden sind, wenn rechter Hand alle Funktionen mit Hilfe der Anfangselemente a_0, e_0, ε_0, $\tilde{\omega}_0$ und der sonst expliziten Zeit t berechnet worden sind, Der Koeffizient

Los coeficientes a_2, e_2 y $\tilde{\omega}_2$ se obtienen directamente en base a estas fórmulas por una simple cuadratura, tan pronto como se hayan deducido los términos de 1er orden a_1, e_1, l_1, $\tilde{\omega}_1$, mediante las fórmulas (1), teniendo en cuenta que todas las funciones del 2º miembro han sido calculadas por medio de los elementos iniciales a_0, e_0, ε_0, $\tilde{\omega}_0$ y del tiempo t,

l_2 ergibt sich erst, nachdem gemäß (6) der Koeffizient a_2 integriert worden ist.

Analog zu (5) läßt sich die analoge Differentialgleichung für e_3, l_3 und $\tilde{\omega}_3$ aufstellen, deren Integration in gleicher Weise für die Praxis von Wichtigkeit ist; da ich mich in der vorliegenden Arbeit aber auf die Behandlung der säkularen Veränderungen der großen Achse beschränke, ist eine Darstellung der Differentialgleichungen der e_3 etc., im Augenblick unnötig, liegt aber schon für eine andere Publikation fertig vor.

generalmente explícito. El coeficiente l_2 se obtiene después de haber integrado el coeficiente a_2 por medio de la (6).

Se pueden establecer ecuaciones diferenciales análogas a (5) para e_3, l_3 y $\tilde{\omega}_3$ cuya integración es de igual importancia para el uso práctico; pero concretándonos en esta memoria a tratar de las alteraciones seculares del semieje mayor, no necesitamos demostrar las ecuaciones diferenciales de los e_3, etc., por el momento, si bien las tenemos ya terminadas para una próxima publicación.

§ 3. Die Methode der Aufsuchung der den Zeitpotenzen t und t^2 proportionalen Säkularglieder 3. Ordnung der grossen Achse des gestörten Körpers, durch äussere störende Körper.

Um nun auf Grund der Gleichung (5) die konstanten resp. die der Zeit t proportionalen Terme zu erhalten, ist das folgende Verfahren einzuschlagen. Dabei soll zuerst das allgemeine Verhalten der der Zeit t proportionalen Säkularglieder in a festgestellt werden, in Bezug auf die analytische Form und den Grad in den Exzentrizitäten, um dann nach der analogen Untersuchung bei den t^2-Gliedern in a eine Entscheidung über die größere praktische Wichtigkeit der einen oder anderen Glieder gruppe treffen zu können.

Da die Störungsfunktion eine Cosinus-Reihe aller Winkelargumente ist, so ist $\dot{a} = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_\varepsilon$ eine Sinusreihe, sodaß auch jedes Glied in $\dot{a}_3$ eine Reihe von Sinus-Termen ist. Folglich erhält man aus dem 1. Gliede in (5): $R_{\varepsilon\dot{a}}\, a_2$ als Produkt einer Sinus — mit einer Cosinus — Reihe, einen konstanten Term nur aus der Kombination derjenigen Glieder von $R_{\varepsilon a}$ und a_2, deren Argument A resp. A′ in Bezug auf die beiden Variablen l und l' dasselbe ist, während die Agregate in $\tilde{\omega}'$ und $\tilde{\omega}$ verschieden sind. Es muß also,

§ 3. Método para hallar los términos seculares de tercer orden del semieje mayor, proporcionales a las potencias t y t^2 del tiempo, en caso de ser las órbitas de los planetas perturbadores exteriores a la del cuerpo perturbado.

Para obtener, pues, a base de la ecuación (5) los términos constantes, y los términos proporcionales al tiempo t, hay que emplear el siguiente método. En primer lugar, es preciso determinar el comportamiento general de los términos seculares en a, proporcionales al tiempo t, o sea la forma analítica y el grado en las excentricidades, después de haber hecho análoga averiguación con los términos en t^2 de a, y decidir acerca de cuál de los grupos de términos tiene más importancia práctica.

Por ser la función perturbadora una serie de cosenos de todos los argumentos angulares, resulta $\dot{a} = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_\varepsilon$ una serie de senos; de modo que cada término en $\dot{a}_3$ es también una serie de senos. Del 1er término del 2° miembro de (5) obtenemos por consiguiente, como producto de una serie de senos por una de cosenos, un término constante como resultado de combinar aquellos términos de $R_{\varepsilon a}$ y a_2 cuyos argumentos A y A′ son los mismos en las dos variables l y l', pero distintos en los términos que contienen wenn von nun ab (f) die Ordnung resp. nur die Form der Funktion f fixiert, und deshalb die belanglosen Koeffizienten der Abkürzung halber unterdrückt werden, sein :

$\tilde\omega$ y $\tilde\omega'$. Si desde ahora (f) representa el orden, es decir, solamente la forma de la función f y si se suprimen para abreviar los coeficientes sin importancia, tendremos

$$(R_{\varepsilon a}) = \sin \Lambda = \sin(\alpha l + \beta l' + \gamma\tilde\omega + \delta\tilde\omega')$$

$$(a_2) = \cos \Lambda' = \cos(\alpha l + \beta l' + \gamma'\tilde\omega + \delta'\tilde\omega')$$

indem nur in diesem Falle bei der Produktbildung und Zerlegung in 2 Sinusglieder ein konstanter Term : $\frac{1}{2}\sin(\gamma-\gamma')\omega+(\delta-\delta')\omega'$ entsteht, während der andere periodische Term nicht weiter zu beachten ist, weil er für unser Ziel nicht in Frage kommt. Im speziellen Falle, wo $\Lambda = \Lambda'$, entsthen nur rein periodische, also nicht in Betracht kommende Glieder.

Resulta solamente en este caso — al formar el producto y descomponerlo en suma de dos senos — un término constante $\frac{1}{2}$ sen $(\gamma-\gamma')\tilde\omega+(\delta-\delta')\tilde\omega'$ mientras que el otro término es periódico y nada tiene que ver con nuestro propósito. En el caso especial, en que $\Lambda = \Lambda'$, resultan sólo términos periódicos puros que, por eso mismo, no vienen al caso.

Sollen ferner in (5) Glieder zum Vorschein kommen, die t^1 proportional sind, so muß, da R infolge der Abhängigkeit von ε stets eine periodische Reihe ist, aus dem 2. Faktor a_2 ein Glied der gemischt-säkularem Form $t \,.\, \sin\Lambda'$ resp. $t \,.\, \cos\Lambda'$ ausgesucht werden, um dann im Produkt einen rein säkularen Term in t^1 zu erhalten. Solche Glieder, bekanntlich Poisson-Glieder genannt, da Poisson sie zuerst nachgewiesen hat, existieren in a_2, während die rein säkularen t-Glieder in a_2 nach Poissons Theorem nicht existieren. Die Integration $\int R_{\varepsilon a} \,.\, a_2 \,.\, dt$ führt dann unmittelbar auf Glieder in t^2, falls die Argumente Λ und Λ' so gewählt werden, daß die Glieder in l und l' in der Differenz der Argumente verschwinden.

Además, para que en (5) aparezcan términos proporcionales a t^1, hay que elegir del 2° factor a_2 un término de la forma secular mixta $t \,.\,$ sen Λ' o $t \,.\, \cos\Lambda'$ (pues R es siempre, por depender de ε, una serie periódica), para obtener después en el producto un término en t^1 secular puro. Tales términos (conocidos como de Poisson, puesto que él los ha comprobado por primera vez) existen en a_2 mientras que según el teorema del mismo autor no existen en a_2 términos en t seculares puros. La integración $\int R_{\varepsilon a} \,.\, a_2 dt$ produce inmediatamente términos en t^2, si los argumentos Λ y Λ' se eligen de tal modo que las variables l y l' desaparezcan en la diferencia de los mismos.

In Bezug auf die t^1 proportionalen Glieder der Achse a kann nun auf Grund der allgemeinen Eigenschaften der Störungsfunktion der folgende Satz abgeleitet werden. Allgemein ist die Form eines beliebigen Gliedes von $\dot a_3$, wenn c und d zwei beliebige der 4 Elemente a, e, ε und $\tilde\omega$ $R_{\varepsilon cd}$ u. c_1 u. d_1 Störungen 1. Ordnung fixieren : $R_{\varepsilon cd} \,.\, c_1 \,.\, d_1$. Allgemein ist dann bei Auswahl beliebiger Glieder :

Con referencia a los términos del semieje a, proporcionales a t^1, se puede deducir ahora, en virtud de las propiedades generales de la función perturbadora el resultado siguiente. En general, la forma de cualquier término de $\dot a_3$ es la siguiente, si c y d representan dos cualesquiera de los 4 elementos a, e, ε y $\tilde\omega$ y c_1 y d_1 las perturbaciones de 1er orden : $R_{\varepsilon cd}$ $c_1 \,.\, d_1$. Al elegir términos arbitrarios resulta, entonces, en general :

$$c_1 = f_1 {}^{\sin}_{\cos} (\alpha_1 l + \beta_1 l' + \gamma_1 \tilde{\omega} + \delta_1' \tilde{\omega})$$

$$d_1 = f_2 {}^{\sin}_{\cos} (\alpha_2 l + \beta_2 l' + \gamma_2 \tilde{\omega} + \delta_2 \tilde{\omega}')$$

also folglich : — y por consiguiente :

$$c_1 \, . \, d_1 = f_3 {}^{\sin}_{\cos} A_3,$$

wo — donde

$$A_3 = \alpha_3 l + \beta_3 l' + \gamma_3 \tilde{\omega} + \delta_3 \tilde{\omega}' ;$$

da nach den Eigenschaften der Störungsfunktion sowohl — Como, según las propiedades de la función perturbadora, no sólo es

$$s_1 = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 0$$

wie auch — sino también

$$s_2 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \delta_2 = 0$$

so ist folglich auch — resulta

$$s_3 = \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 + \delta_3 = 0.$$

Soll nun das Produkt aus $c_1 \, . \, d_1$ und $R_{scd} = f_4 {}^{\sin}_{\cos} A_4$, wo

Si el producto de $c_1 \, . \, d_1$ y $R_{scd} = f_4 {}^{\text{sen}}_{\cos} A_4$ donde

$$A_4 = \alpha_4 l + \beta_4 l' + \gamma_4 \tilde{\omega} + \delta_4 \tilde{\omega}',$$

zu einem konstanten Gliede führen, unabhängig von den mit der Zeit t linear Veränderlichen l_1 und l_2, so muß sein : $\alpha_3 = \alpha_4$ und $\beta_3 = \beta_4$, sodaß A_4 die Form erhält :

debe dar como resultado un término constante, independiente de las variables l y l' lineales en el tiempo t, entonces se tiene $\alpha_3 = \alpha_4$ y $\beta_3 = \beta_4$; luego A_4 es de la forma :

$$A_4 = \alpha_3 l + \beta_3 l' + \gamma_4 \tilde{\omega} + \delta_4 \tilde{\omega}',$$

sodaß alsdann — por lo que resulta :

$$R_{scd} c_1 \, . \, d_1 = \frac{1}{2} f_3 f_4 {}^{\sin}_{\cos} [(\gamma_3 - \gamma_4) \tilde{\omega} + (\delta_3 - \delta_4) \tilde{\omega}'] = \text{const.}$$

Da $\dot{a}_3$ eine Sinusreihe sein muß, wird folglich, wenn $c\ (x)$ den konstanten Teil von x fixiert : $c\ (R_{scd}\, c_1 \, . \, d_1)$ proportional der Sinusfunktion. Da

Como $\dot{a}_3$ debe ser una serie de senos, resultará, si $c\ (x)$ representa la parte constante de x : $c\ (R_{scd}\ c_1 \, . \, d_1)$ proporcional a una función seno. Puesto que auf Grund der Eigenschaften von R die Summe :

de acuerdo con las propiedades de R las sumas deben ser como sigue :

$$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 + \delta_3 = 0,$$

ebenso auch :

lo mismo que :

$$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_4 + \delta_4 = 0$$

sein müssen, so folgt :

resulta :

$$\gamma_3 - \gamma_4 = -(\delta_3 - \delta_4),$$

sodaß das Argument A in $R_{\varepsilon cd} \cdot c_1 \cdot d_1$:

de manera que el argumento en $R_{\varepsilon cd} \cdot c_1 \cdot d_1$ es :

$$(\gamma_3 - \gamma_4)\,\tilde\omega + (\delta_3 - \delta_4)\,\tilde\omega' = (\delta_3 - \delta_4)(\tilde\omega' - \tilde\omega)$$

und somit :

y por eso :

$$c\,(R_{\varepsilon id} \cdot c_1 \cdot d_1) = \frac{1}{2} f_3 f_4 \sin i\,(\tilde\omega' - \tilde\omega),$$

wo $i = \pm 1 \pm 2, \ldots$, während $i = 0$ zu keiner von 0 verschiedenen Konstanten führt. Folglich ist die der Zeit proportionale Säkularstörung 3. Ordnung stets proportional $\sin i\,(\tilde\omega' - \tilde\omega)$ $(i = 1, 2, 3, \text{etc.})$. Aber auch über den Minimalgrad des Koeffizienten in Bezug auf die Exzentrizitäten ist eine Aussage möglich. Hat das Produkt $c_1 \cdot d_1$ den Minimalgrad 0 in Bezug auf die Exzentrizitäten e und e', und hat es in Bezug auf die Längen die Form :

donde $i = \pm 1 \pm 2, \ldots$, mientras que para $i = 0$ no se obtiene ninguna constante distinta de 0. Por consiguiente, la perturbación secular de 3[er] orden proporcional al tiempo t es siempre proporcional a $\operatorname{sen} i\,(\tilde\omega' - \tilde\omega)$ $(i = 1, 2, 3 \text{ etc.})$. Pero también es posible determinar el grado mínimo del coeficiente respecto de las excentricidades. Si el producto $c_1 \cdot d_1$ tiene, respecto de las excentricidades e y e', el grado mínimo 0, y respecto de las longitudes, la forma :

$$c_1 \cdot d_1 = f_3 \mathop{}^{\cos}_{\sin}\, i\,(l' - l),$$

so bedingt die Erscheinung einer Konstanten im Produkt $R_{\varepsilon cd} \cdot c_1 \cdot d_1$, daß $R_{\varepsilon cd}$ von der Form sein muß :

debe resultar, a causa de la aparición de una constante en el producto $R_{\varepsilon cd} \cdot c_1 \cdot d_1$, que $R_{\varepsilon cd}$ tiene la siguiente forma :

$$R_{\varepsilon cd} = f_4 \cdot \mathop{}^{\sin}_{\cos}\, i\,(l' - l) \pm i\,(\tilde\omega' - \tilde\omega) \qquad (i = 1, 2 \ldots)$$

Folglich muß der Grad des Koeffizienten f_4 wegen der Eigenschaften von R gleich $2i$ sein; folglich ist f_4 mindestens vom 2. Grade der Exzentrizitäten. Da das Argument aber bei $i = 1$ die Form $l' - l \pm \tilde\omega' \mp \tilde\omega$

Por consiguiente, el grado del coeficiente f_4 debe ser $2i$ debido a las propiedades de R ; o sea f_4 es a lo menos del 2° grado en las excentricidades. Ya que para $i = 1$, el argumento tiene la forma $l' - l$

hat, so ist der Koeffizient eines solchen Gliedes von der Form $e \cdot e'$ und das Argument des säkularen Teils: $\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}$. Das Resultat ist also, daß die der Zeit t proportionalen Säkularglieder der großen Achse von der Form sind:

$\pm \tilde{\omega}' \mp \tilde{\omega}$, el coeficiente de tal término es de la forma $e \cdot e'$ y el argumento de la parte secular: $\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}$. Resulta entonces que los términos seculares del semieje mayor proporcionales al tiempo t, son de la forma:

$$s(a_3) = te \cdot e' \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$$

wo $s(f)$ von nun ab immer den säkularen, der Zeit t^1 oder t^2 proportionalen Teil der Funktion f fixiert.

donde $s(f)$, representará desde ahora, la parte secular de la función f proporcional al tiempo t^1 o t^2.

Die Glieder des nächst höheren Grades der Störung von a_3 sind infolge Ansteigens der Grades des Koeffizienten eines Störungsgliedes resp. eines Gliedes der Störungsfunktion desselben Winkelargumentes um eine grade Potenz der Exzentrizitäten der Form $e^3 \cdot e'$, $e^2 \cdot e'^2$ und $e \cdot e'^3$ und so fort zu höheren Gliedern.

A causa del mayor grado del coeficiente de un término de perturbación, o de un término de la función perturbadora del mismo argumento angular, los términos de grado inmediato superior de la perturbación de a_3 son potencias de las excentricidades de grado par, de la forma $e^3 \cdot e'$, $e^2 \cdot e'^2$, y $e \cdot e'^3$, y así sucesivamente para los términos superiores.

In der Praxis erfolgt die Aufsuchung der in Betracht kommenden Glieder in der Weise, daß man in c die Glieder niedrigsten Grades in den Exzentrizitäten e und e' sukzessive mit den korrespondierenden Gliedern niedrigsten Grades in d_1 combiniert, um dann nach Ableitung der Integrale c_1 und d_1 dasjenige Glied $R_{\varepsilon cd}$ mit dem entsprechenden Winkelargument auszusuchen, das im Produkte mit $c_1 d_1$ zu einer Konstanten in $R_{\varepsilon cd} \cdot c_1 \cdot d_1$ führt.

Darüber hinaus sind nun und das ist unser Hauptziel, auch die t^2 proportionalen Säkularglieder von a_3 abzuleiten. Zu dem Zwecke sind zuerst die in dem entsprechenden Ausdrucke von a_3 auftretenden Störungen 2. Ordnung der Masse und der Poisson-Form von a_2, e_2, l_2 und $\tilde{\omega}_2$ aufzusuchen; denn nur diese Glieder können, bei passender Auswahl der Argumente zu den gesuchten Gliedern in t^2 in a_3 führen wenn der Faktor $R_{\varepsilon cd}$, der stets periodisch ist, hinzutritt. Daß a_2 solche Poisson-Glieder der Form $t \cdot {\cos \atop \sin} A$ besitzt, folgt aus der 1. Gleichung (6) in Verbindung mit (6a). Aber das 1. Glied rechter Hand von

En la práctica, se descubren los términos en cuestión combinando sucesivamente en c los términos de menor grado en las excentricidades e y e', con los términos correspondientes de menor grado en d_1, y eligiendo después de haber deducido las integrales c_1 y d_1, aquél término $R_{\varepsilon cd}$ con el argumento angular correspondiente, que da como resultado en el producto por $c_1 \cdot d_1$, una constante en $R_{\varepsilon cd} \cdot c_1 \cdot d_1$.

A más de esto, lo que es nuestro fin principal, también hay que deducir de a_3 los términos seculares proporcionales a t^2. Con este objeto debemos hallar primero las perturbaciones de 2° orden de la masa y del tipo Poisson de a_2, e_2, ε_2 y $\tilde{\omega}_2$, pues sólo éstos términos pueden dar en a_3, si se eligen bien los argumentos, los términos requeridos en t^2, ya que el factor $R_{\varepsilon cd}$ siempre resulta periódico. De la 1ª ecuación (6) junto con la (6"), resulta que a_2 contiene tales términos de Poisson de la forma $t \cdot {\cos \atop \mathrm{sen}} A$. Mas, siendo, por una parte, R_t y $R_{\varepsilon a}$, y por otra, a_1 funciones periódicas puras, el 1er tér-

$\dot{a}_2$ kann, da R_ε und $R_{\varepsilon a}$ einerseits und a_1 andererseits nur periodische Funktionen sind, nicht zu Gliedern der Form $t \, {}^{\cos}_{\sin} \, A$ führen, ebensowenig wie das 3. Glied in l_1 da es nur periodische Glieder enthält; denn die der Zeit t proportionalen Säkularglieder von ε_1 sind von vorneweg in die mittlere Bewegung n einbezogen gedacht, indem n direkt aus den Beobachtungen entnommen und in die Störungsfunktion und ihre Ableitungen substituiert gedacht wird. Nur das 2. und 4. Glied von $(6a)$ liefern Poisson-Glieder, weil e_1 und $\tilde{\omega}_1$ der Zeit t proportionale Säkularstörungen besitzen. Wie aus (5) ersichtlich ist, ergeben sich insgesamt 20 derartige Glieder, die zu Poisson-Termen führen, wobei die Glieder a_2, e_2, l_2 und ω_2 je 2 entsprechende Glieder liefern, proportional e_1 und ω_1, wozu auch der Term mit dem Produkt $e_1\tilde{\omega}_1$ gehört, wenn der eine Faktor als periodisch, der andere aber als säkular betrachtet wird. Dabei kann man den Gliedern niedrigsten Grades in dem Säkularteil von e_1 und $\tilde{\omega}_1$ die Form geben:

mino del 2° miembro no puede dar términos de la forma $t \, {}^{\cos}_{\text{sen}} \, A$, ni tampoco el 3er término de l_1, puesto que contiene sólo términos periódicos; desde un principio, pues, los términos seculares de ε_1 proporcionales al tiempo t, se suponen incluídos al movimiento medio n, considerándose n deducido directamente de las observaciones y sustituído en la función perturbadora y sus derivadas. Sólo el 2° y 4° término de (6_a) dan términos de Poisson, porque e_1 y ω_1 contienen perturbaciones seculares proporcionales al tiempo t. Como se puede ver en (5), resultan en total veinte términos tales, que dan términos de Poisson, suministrando cada uno de los a_2, e_2, l_2 y $\tilde{\omega}_2$ dos términos correspondientes, proporcionales a e_1 y $\tilde{\omega}_1$, incluso el término con el producto $e_1\tilde{\omega}_1$, considerándose aquí como secular un factor, cuando el otro sea periódico. Se puede, pues, dar a los términos de menor grado en la parte secular de e_1 y $\tilde{\omega}_1$ la forma siguiente:

$$e_1 = cte' \sin(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}) = \bar{e}_1 nt$$

und / y

$$\tilde{\omega}_1 = d \cdot \frac{1}{e}(\alpha e + \beta e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})) = \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e} nt,$$

indem $s\,(e_1)$ u. $s\,(\tilde{\omega}_1)$ stets der Längenänderung $\Delta 1 = nt$ proportional und die Koeffizienten c, d, α u. β nur von a und a' abhängige Konstanten sind.

Wenden wir uns nun der Integration des 1. Gliedes von (5) zu, so ist das erste Integral: $\int R_{\varepsilon a} \cdot \dot{a}_2 dt$, wobei $\dot{a}_2$ durch die 1. Gleichung von (6) definiert ist. Da nur die den Koeffizienten $\dot{e}_1$ und $\dot{\tilde{\omega}}_1$ proportionalen Glieder zu berücksichtigen sind, so ist dementsprechend zuerst $a_{2e}e_1 = R_{\varepsilon e}e_1$ zu behandeln. Da im Gliede niedrigsten d. h. o. Grades:

siendo $s\,(e_1)$ y $s\,(\tilde{\omega}_1)$ proporcionales a la variación de la longitud $\Delta\, l = nt$ y siendo los coeficientes c, d, α y β constantes que sólo dependen de a y a'.

Al integrar ahora el 1er término de (5), resulta la primera integral: $\int R_{\varepsilon a} \cdot a_2 dt$, donde a_2 está definida por la primera de las ecuaciones (6). Como sólo hay que tomar en cuenta los términos proporcionales a $\dot{e}_1$ y $\dot{\tilde{\omega}}_1$, debemos ocuparnos primero de estos últimos: $a_{2e}e_1 = R_{\varepsilon}e_1$.

Como término de menor grado, es decir, de grado o, es:

$$R_{e\varepsilon} = \frac{1}{2} C_i (i - 1) \sin[il' - (i - 1)\, l - \tilde{\omega}],$$

so folgt in Bezug auf das 2. Glied von $(6a)$ als Poisson-Term von $\dot{a}_2$, im Folgenden immer mit P bezeichnet:

resulta con respecto al 2° término de (6_a) el de Poisson de $\dot{a}_2$ (designado en general con P):

$$P(\dot{a}_2) = e' \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\, t \sin[il' - (i-1)l - \tilde{\omega}],$$

sodaß

Por consiguiente es:

$$a_2 = e' \sin(\tilde{\omega}' -)\, \tilde{\omega} \left[-\frac{t \cos A}{in' - (i-1)n} + \frac{\sin A}{[in' - (i-1)n]^2} \right].$$

Folglich ist zur Gewinnung eines in t säkularen Gliedes in $R_{\varepsilon a} \,.\, a_2$ der folgende Term aus R auszusuchen:

Por lo tanto, para obtener en $R_{\varepsilon a} \,.\, a_2$ un término secular, hay que elegir el siguiente término en R:

$$R = e' \sin[il' - (i - 1\, l - \tilde{\omega}'],$$

sodaß folglich:

por lo que resulta:

$$s(\dot{a}_3) = te'^2 \sin^2(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$$

mithin ist die Säkularstörung von a_3 in t^2 vom 2. Grade der Exzentrizität, ebenso wie die in t^1.

Setzt man in $\dot{a}_2$ im 2. Gliede $R_{\varepsilon e} = e \sin i(l' - l)$, also einen Term 1. Grades ein, so ist zu wählen:

Luego la perturbación secular en t^2 es de 2° grado en las excentricidades, lo mismo que la perturbación en t^1.

Si se introduce en el 2° miembro de $\dot{a}_2$: $R_{\varepsilon e} = e \operatorname{sen} i(l' - l)$ o sea, un término de 1er grado, debe elegirse:

$$R_{\varepsilon a} = e \,.\, e' \sin[i(1' - 1) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}].$$

Folglich entsteht dann in a_3 ein Term der Form: $t^2 e^2 e'^2 \sin^2(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$, und so fort.

Wenn

Por consiguiente, resultará en a_3 un término de la forma: $t^2e^2e'^2 \operatorname{sen}^2(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$, y así sucesivamente:

$$R_{\varepsilon e} = e' \sin[i(l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}]$$

und folglich $R_{\varepsilon a} = \sin i(l' - l)$, so entsteht auch ein Term der Form $t^2 e'^2 \sin^2(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$, sodaß also ein Verschwinden der t^2-Glieder eintritt, wenn e oder e' verschwinden oder $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}' = 0$ oder 180° ist. Im asteroidischen Falle ist demnach bei kreisförmiger Bahn des störenden Körpers bei diesen Gliedern weder eine t^1 – noch t^2 – Säkularstörung vorhanden.

y por consiguiente $R_{\varepsilon a} = \operatorname{sen}(i(l' - l)$, resulta también un término de la forma $t^2e'^2 \operatorname{sen}^2(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$, de tal suerte que los términos en t^2 desaparecen, si se anulan e ó e', ó si $\tilde{\omega}' - \tilde{\omega} = 0$ ó 180°. En el caso de asteroides y en la hipótesis de un cuerpo perturbador de órbita circular (Júpiter), no hay perturbaciones seculares en t ni en t^2.

Gehen wir jetzt zu dem 4. Gliede von $(6a)$ über, d. h. zu $R_{\varepsilon\tilde{\omega}} \,.\, \tilde{\omega}_1$, so entsteht ein Poisson-Term nur,

Ahora, pasando al 4° término de (6_a), es decir a $R_{\varepsilon\tilde{\omega}} \,.\, \tilde{\omega}_1$, resulta un término de Poisson, solamente wenn in $\tilde{\omega}_1$ der säkulare Teil $\tilde{\omega}_1 = s\left(\frac{1}{e} R_e\right)$ gewählt wird und die Kombination mit einem beliebigen der stets periodischen Glieder von $R_{\varepsilon\omega}$ stattfindet. Da nun das Glied niedrigsten Grades im Säkularteil von $\tilde{\omega}_1$ die Form hat:

si se elige de $\tilde{\omega}_1$, la parte secular $\tilde{\omega}_1 = s\left(\frac{l}{e} R_e\right)$ y si tiene lugar una combinación con cualquiera de los términos de $R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ siempre periódicos. El de menor grado en la parte secular de $\tilde{\omega}_1$ tiene, entonces, la forma:

$$s(\tilde{\omega}_1) = \frac{\tilde{\omega}_1}{e} nt = \frac{1}{e}[\alpha e + \beta e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})]\, nt$$

so ergibt die Kombination mit dem Term niedrigsten Grades von $R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$:

La combinación de este término con el de menor grado de $R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ es decir:

$$R_{\varepsilon\tilde{\omega}} = e \cos[il' - (i-1)l - \tilde{\omega}]$$

nach der Integration, abgesehen von dem rein periodischen Teil, das P-Glied:

da como resultado, después de la integración, sin contar la parte periódica pura, el término de Poisson:

$$P(a_2) = t \sin[il' - (i-l)l - \tilde{\omega}]\, s(\tilde{\omega}_1).$$

Folglich ist zur Erzeugung eines säkularen t^2-Gliedes in a_3 das folgende Glied in $R_{\varepsilon a}$ herauszusuchen:

Por consiguiente, para poder producir un término en a_3 proporcional al tiempo t^2, hay que elegir el siguiente término de $R_{\varepsilon a}$:

$$R_{\varepsilon a} = e \sin[il' - (i-1)l - \tilde{\omega}] + e' \sin[il' - (i-1)l - \tilde{\omega}'],$$

sodaß die t^1 proportionalen Glieder allein die folgende Form erhalten:

de modo que los términos proporcionales a t^1 solamente pueden tener la forma

$$\dot{a}_3 = [e + \alpha e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})][\alpha e + \beta e' \cos(\tilde{\omega}^1 - \tilde{\omega})]\, t,$$

sodaß a_3 von der Form:

luego se obtiene la expresión:

$$a_3 = [\alpha e^2 + \beta e e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \gamma e'^2 \cos^2(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})]\,.\, t^2$$

wobei der Maßenfaktor m'^3 ist, als allgemeine Form der Säkularstörungen 3. Ordnung in t^2 in den Termen niedrigsten Grades. Die Glieder höheren Grades wachsen dann, analog wie bei den Gliedern in t^1, stets um 2 weitere Einheiten auf e^1, $e.e'^3$, etc., an. Folglich ergibt sich aus den bisher abgeleiteten Gliedern, daß die Glieder in t^2 die in t^1 allgemein an Größe übertreffen müßen, da diese Glieder bei-

(siendo m'^3 el factor de las masas) como forma general de las perturbaciones seculares de 3er orden en t^2 en los términos del menor grado. Los de grado superior crecen entonces, análogamente a los términos en t^1, siempre de dos unidades en dos a partir de e^1, $e\,.\,e'^3$, etc. Por consiguiente, de los términos hasta ahora deducidos resulta que el valor de los términos en t^2 debe en general superar al de los en de vom gleichen 2. Grade der Exzentrizitäten sind. Wir müssen aber prüfen, ob nicht die weiteren Glieder in a_3 noch zu Gliedern niederen Grades in den Exzentrizitäten führen können.

Gemäß der Formel (5) ist der nächste Term, der zu untersuchen ist, das 2. Glied $p_2(a_3) = R_{\varepsilon e} \cdot \dot{e}_2$, wobei $\dot{e}_2$ oben in (6) definiert worden ist. Da deshalb das 1. und das 3. Glied in $\dot{e}_2$ infolge Multiplikation mit a_1 resp. l_1 d. h. mit rein periodischen Funktionen im Produkt mit den konstanten oder periodischen Koeffizienten nur wieder zu rein-periodischen oder konstanten Gliedern führen, so fallen diese Teile von $\dot{e}_2$ wegen ihres Mangels an Poisson-Termen für die Erseugung von Säkulargliedern in t^2 in a_3 fort, während aber die rein periodischen Teile bei Kombination mit passend ausgewählten periodischen Gliedern von $R_{\varepsilon e}$ zu reins äkularen Gliedern in t^1 in a_3 führen.

Die gewünschten gemischt-säkularen Glieder in e_2 können nur aus dem 2. und 4. Teil von $\dot{e}_2$ entstehen, und zwar nur in Verbindung mit den rein säkularen Teilen von e_1 und $\tilde{\omega}_1$. Der Koeffizient e_{2e} (s. die Formel unter (6a)) bedarf noch einer näheren Untersuchung, weil die Nenner e resp. e^2 im 1. und 2. Gliede zu negativen Potenzen in $\dot{e}_2$ zu führen scheinen. Wählt man deshalb das niedrigst mögliche, die Perihellänge ω enthaltende Glied aus der Störungsfunktion aus:

t^1 puesto que ambos términos son del mismo grado (segundo) en las excentricidades. Pero todavía debemos examinar, si los otros términos en a_3 pueden dar o no, otros de menor grado en las excentricidades.

Según la fórmula (5) el próximo término que hay que examinar es el 2°: $p_2(a_3) = R_{\varepsilon e} \cdot \dot{e}_2$, donde $\dot{e}_2$ ya ha sido definido en (6). Por ser los términos 1° y 3° de $\dot{e}_2$ productos de a_1 y l_1 respectivamente, que son funciones periódicas puras, por coeficientes constantes o periódicos puros, son términos constantes o periódicos puros, es decir no son términos de Poisson y no vienen al caso en a_3 para producir términos seculares en t^2, mientras que las partes periódicas puras al combinarlas con adecuados términos periódicos de $R_{\varepsilon e}$, dan en a_3 términos seculares puros en t^1.

Los términos seculares mixtos deseados en e_2 sólo pueden lograrse de la 2ª y 4ª parte de $\dot{e}_2$, y esto únicamente en combinación con las partes seculares puras de e_1 y $\tilde{\omega}_1$. El coeficiente e_{2e} (véase la fórmula (6_a)) debe examinarse más exactamente todavía, porque los denominadores e y e^2 parecen originar en el 1er y el 2° término respectivamente potencias negativas en $\dot{e}_2$. Al elegir, pues, de la función perturbadora, el término de menor grado posible que contenga la longitud $\tilde{\omega}$ del perihelio:

$$R = e \cos [il' - (i-1) l - \tilde{\omega}]$$

so wird, wenn im 2. Gliede von e_{2e} nach Potenzen der als klein angenommenen planetaren Exzentrizitäten entwickelt wird, erhalten:

se obtiene, desarrollando el 2° término de e_{2e} según potencias de las excentricidades planetarias, supuestas pequeñas:

$$\frac{1}{e} R_{\tilde{\omega} e} = \frac{1}{e} \cdot \sin A \text{ und } \frac{1}{e^2(1-e^2)} \cdot R_{\tilde{\omega}} = \frac{1}{e}(1+e^2) \sin A,$$

sodaß die kritische Differenz

luego la diferencia crítica es:

$$\frac{1}{e} R_{\tilde{\omega} e} - \frac{1}{e^2} \frac{1}{(1-e^2)} R_{\tilde{\omega}} = -e \sin A,$$

womit also die Glieder mit dem Pole $e = 0$ eliminiert worden sind. Zum gleichen 1. Grade führen nun aber auch alle R-Glieder 3. Grades, soweit sie mit den Faktoren e^2e' und e^3 versehen sind. Ist zuerst $R = e^2e' \cos A$, wo $A = i'l' + il - 2\tilde{\omega} \pm \tilde{\omega}'$ und i' und i so zu wählen sind, daß $i' + i - 2 \pm 1 = 0$, so wird das kritische Glied in e_2:

y, los términos con el polo $e = 0$ han sido, pues, eliminados.

A este mismo grado — 1° — conducen también todos los términos de R de 3er grado siempre que posean los factores e^2e' y e^3. Siendo, en primer lugar, $R = e^2e' \cos A$ donde $A = i'l^1 + il - 2\tilde{\omega} \pm \tilde{\omega}'$, y teniendo que elegir i' e i de tal modo que $i' + i - 2 \pm 1 = 0$ resulta el término crítico en e_2:

$$e_2 = 2e' \sin A \left(2 - \frac{1}{1 - e^2}\right) = 2e' \sin A,$$

also vom 1. Grade; analog wird im 2. Falle, wenn $R = e^3 \cos A$, wo jetzt

es decir de 1er grado. Análogamente resulta en el 2° caso, cuando es $R = e^3 \cos A$ donde es ahora

$$A = i'l' + il - 3\tilde{\omega} \qquad \text{und} \qquad i' + i - 3 = 0,$$

sein muß:

$$e_{2e} = 3\left(3e - \frac{e}{1 - e^2}\right) \sin A = 6e \,.\, \sin A,$$

also ebenfalls vom 1. Grade, während in dem noch fehlenden Falle, wo $R = e \,.\, e'^2 \cos A$ und $A = i'l' + il + \tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}'$, analog wie im allerersten Falle, wo R vom 1. Grade in e, infolge des Faktors e'^2 nun ein Glied 3. Grades mit dem Faktor $e \,.\, e'^2$ in e_{2e} entsteht.

Andererseits entstehen durch den 3. und 4. Term in e_{2e}:

es decir, también de 1er grado; mientras que en el caso restante, en que $R = ee'^2 \cos A$ y $A = i'l' + il + \tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}'$, resulta ahora en e_{2e} análogamente al primer caso, en que era R de primer grado en e, a causa del factor e'^2, un término de 3er grado con el factor $e \,.\, e'^2$.

Por otra parte en base al 3er y 4° término de e_{2e}, es decir:

$$\text{pars } e_{2e} = \frac{1}{2} e R_{\varepsilon e} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4} e^2\right) R_{\varepsilon}$$

Glieder vom bereits 0. und auch 1. Grade, wenn im 1. Falle $R = \cos(l' - l)$ gesetzt wird.

Die Integration des oben berechneten 1. Teiles von e_{2e} führt nun mit dem säkularen Teil von e_1 als Faktor zu einem Term der Form: $\int e \sin A \,.\, t \,.\, dt$, sodaß mit Rücksicht auf $A = il' - (i - l)\, l - \tilde{\omega}$ und nur auf den Poisson-Teil des Integrals entsteht:

resultan ya términos de grado 0, poniendo $R = \cos(l' - l)$, y también términos en 1er grado.

La integración de la 1^a parte de e_{2e}, antes calculada, da ahora, con la parte secular de e_1 como factor, un término de la forma: $\int e \operatorname{sen} A \,.\, t \,.\, dt$, de modo que, por ser $A = il' - (i - 1)\, l - \tilde{\omega}$ resulta, considerando solamente la parte de Poisson de la integral:

$$\int e \sin \Lambda \, . \, t \, . \, dt = -\frac{e \cos \Lambda}{in' - (i-1)n} \cdot t.$$

Folglich führt der 2. Term in a_3 zu einem konstanten Term, nur wenn das eben abgeleitete Integral mit einem Gliede aus $R_{\varepsilon e}$ kombiniert wird, das nur den folgenden 3. Termen 3. Grades von R zu entnehmen ist:

Por consiguiente, el 2° término da en a_3 solamente un término constante, si la integral recién deducida se combina con un término de $R_{\varepsilon e}$ que debemos tomar de entre los tres siguientes términos de 3er grado de R:

$$R = e' . e^2 \cos[il' - (i-1)l + \tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}] + e'e^2 \cos[il' - (i-1)l - \tilde{\omega}'] + ee'^2 \cos[il' - (i-1)l + \tilde{\omega} - \tilde{\omega}2'].$$

Alsdann ergeben die beiden ersten Terme:

Resulta, entonces, de los dos primeros términos:

$$R_{\varepsilon e} . e_2 = e^2 e'^2 \sin^2(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') . t,$$

während der 3. Term ergibt:

mientras que del tercero:

$$R_{\varepsilon e} . e_2 = ee'^3 \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \sin(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) . t,$$

sodaß diese Glieder alle vom 4. Grade sind. Nur im Falle des 4. Gliedes von e_{2e} folgen Terme niedrigeren Grades, indem sich unter Integration des schon oben fixierten Gliedes ergibt:

de tal suerte que todos ellos son de 4° grado. Sólo en el caso del 4° término de e_{2e} hay otros de menor grado, que resultan de la integración del término antes definido:

$$\int R_\varepsilon . t . dt = \int t \sin i(l' - l) . dt = -\frac{t \cos i(l' - l)}{i(n' - n)},$$

bei Unterdrückung des rein periodischen Teils, sodaß bei Kombination mit der aus

prescindiendo de la parte periódica pura, de modo que combinando con la derivada $R_{\varepsilon e}$; obtenida de

$$R = ee' \cos[i(l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}]$$

folgenden Ableitung $R_{e\varepsilon}$ als Poisson-Teil von a_3 erhalten wird:

resulta como parte de Poisson de a_3:

$$R_{\varepsilon e} . e_2 = e'^2 t \sin^2(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}),$$

d. h. ein Term 2. Grades.

Ferner ergibt sich, wenn im Falle der beiden ersten Glieder in e_{2e} $|i' + i| = 1$, also $\Lambda = i'l + il - 2\tilde{\omega} + \tilde{\omega}'$ gesetzt wird:

es decir, un término de 2° grado. Además, si en el caso de los dos primeros términos de e_{2e} se pone $|i' + i| = 1$, es decir, $\Lambda = i'l' + il - 2\tilde{\omega} + \tilde{\omega}'$ resulta:

$$\int e_{2e} e_1 dt = \frac{e'^2 \cos \Lambda}{i'n' + i.n} \cdot t,$$

in Bezug auf das Poisson-Glied allein; folglich ist $R_{\varepsilon e}$ zu entnehmen aus $R = e \cos(i'l' + il - \tilde{\omega})$, sodaß schliesslich

refiriéndonos al término de Poisson solamente; por consiguiente, hay que deducir $R_{\varepsilon e}$ de $R = e \cos(i'l' + il - \tilde{\omega})$, de manera que finalmente se tiene

$$R_{\varepsilon \,.\, e} \,.\, e_2 = e'^2 t \sin^2(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \,.\, t.$$

Wenn ferner im selben Falle der ersten beiden Glieder von e_{2e} R die Form erhält: $R = e^3 \cos A$, so muß $A = i'l' + il - \tilde{\omega}$ oder $i'l + il - 3\omega$ sein, d. h. $|i' + i| = 1$ oder $= 3$. Dann ist in Bezug auf das Poisson-Glied allein, im 1. Falle:

Además, si en el mismo caso de los primeros términos de e_{2e}, R tiene la forma: $R = e^3 \cos A$, debe ser $A = i'l' + il - \tilde{\omega}$ ó $A = i'l' + il - 3\tilde{\omega}$, es decir $|i' + i| = 1$ ó 3. Resulta, pues, en el 1[er] caso, refiriéndonos sólo al término de Poisson:

$$\int e_{2e} \,.\, e_1 \,.\, dt = -\frac{ee' \,.\, t \cos A}{i'n' + in},$$

sodaß $R_{\varepsilon e}$ aus $R = e'e^2 \cos(i'l' + il - \tilde{\omega}')$ entnommen werden muß, und alsdann als entsprechendes Säkularglied in $\dot{a}_3$ erhalten wird: $R_{\varepsilon e} \,.\, e^2 = e^2 e'^2 t \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$. Im 2. Falle wird:

luego $R_{\varepsilon e}$ debe deducirse de: $R = e'e^2 \,.\, \cos(i'l' + il - \tilde{\omega}')$, por lo que se obtiene finalmente en $\dot{a}_3$ como término secular: $R_{\varepsilon e} \,.\, e_2 = e^2 e'^2 t \operatorname{sen}(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$.

En el 2º caso resulta:

$$\int e_{2e} \,.\, e_1 \,.\, dt = -\frac{ee't \cos(i'l' + il - 3\tilde{\omega})}{i'n' + in}$$

(nur Poissonglied), sodaß $R_{\varepsilon e}$ aus

(sólo término de Poisson) de modo que hay que deducir $R_{\varepsilon e}$ de

$$R = e^2 e' \cos[i'l' + il - 2\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'] + ee'^2 \cos[i'l' + il - \tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}']$$

zu entnehmen und somit schliesslich als t-Glied in $\dot{a}_3$ erhalten wird:

obteniéndose, finalmente, en $\dot{a}_3$ como término en t:

$$R_{\varepsilon e} \,.\, e_2 = e^2 e'^2 \,.\, t \,.\, \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + e \,.\, e'^3 t \sin(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}),$$

sodaß in diesen beiden letzteren Fällen nur Glieder 4. Grades in den Exzentrizitäten erlangt werden.

Das nächste in $\dot{e}_2$ zu berücksichtigende Glied ist $e_{2\varepsilon} \,.\, l_1$. Da beide Faktoren nur aus periodischen Gliedern aufgebaut sind, so können aus diesem Teile von e_2 keine Poisson-Glieder entstehen und deshalb auch keine rein-säkularen Glieder in $R_{\varepsilon e} \,.\, e_2$, also auch keine t^2 — Glieder in a_3.

Anders verhält sich nun das letzte Glied von $\dot{e}_2$:

luego solamente se obtienen términos de 4º grado en las excentricidades en estos dos últimos casos.

El término que ahora debemos tomar en cuenta en $\dot{e}_2$, es $e_{2\varepsilon} \,.\, l_1$. Ya que los dos factores constan solamente de términos periódicos, no pueden resultar de esta parte de e_2, términos de Poisson, y por tanto, tampoco se han de originar términos seculares puros en $R_{\varepsilon e} \,.\, e_2$, ni términos en t^2 en a_3.

Distinto es lo que acontece con el último término de $\dot{e}_2$:

$$\dot{e}_2 = -\frac{\sqrt{1 - e_0^2}}{K\sqrt{a_0}} \cdot e_{2\tilde{\omega}} \cdot \tilde{\omega}_1,$$

wenn $e_{2\tilde{\omega}}$ rein periodisch ist, sodaß t^2-Glieder in a_3 nur in Verbindung mit den rein-säkularen Störungen von $\tilde{\omega}_1$ möglich sind. In

si $e_{2\tilde{\omega}}$ es periódico puro, en cuyo caso sólo pueden aparecer en a_3 términos en t^2 junto con las perturbaciones seculares puras de $\tilde{\omega}_1$. En

$$e_{2\tilde{\omega}} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}}\left[\frac{1}{e}R_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}} + \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{4}e^3\right)R_{\varepsilon\tilde{\omega}}\right]$$

wird das 1. Glied $\frac{1}{e}R_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$ vom niedrigst-möglichen 0. Grade, wenn für R das Glied 1. Grades angesetzt wird: $R = e\cos[il' - (i-l)l - \tilde{\omega}]$; dagegen ist das 2. Glied: $eR_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ mindestens vom 2. Grade. Mithin führt das 1. Glied allein zu dem folgenden Poisson-Term:

el 1er término $\frac{1}{e}R_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$ resulta ser del menor grado posible, — cero — si se reemplaza R por el término de 1er grado $R = e\cos[il' - (i-l)l - \tilde{\omega}]$; en cambio, el 2°: $eR_{\varepsilon\tilde{\omega}}$, es por lo menos de 2° grado. De manera, que solamente del 1er término resulta un término de Poisson, a saber:

$$P(e_{2\tilde{\omega}} \cdot \tilde{\omega}_1) = \frac{1}{e}(\alpha e + \beta e')\, t \cos[il' - (i-1)l - \tilde{\omega}],$$

sodaß:

de modo que:

$$P(e_2) = \frac{1}{e}(\alpha e + \beta e')\, t \sin[il' - (i-1)l - \tilde{\omega}]$$

Der gewünschte rein-säkulare Term in $\dot{a}_3$ entsteht dann, wenn R ein Term 1. Grades in e entnommen wird, sodaß $R_{\varepsilon e} = \sin[il' - (i-l)l - \tilde{\omega}]$, sodaß alsdann:

El término secular puro requerido en a_3, se obtiene cuando R se deduce de un término de 1er grado en e, luego $R_{\varepsilon e} = \sin[il' - (i-l)l - \omega]$, y por consiguiente:

$$s(\dot{a}_3) = \frac{1}{e}(\alpha e + \beta e')\, t.$$

Folglich entstehen in a_3 Glieder in t^2, die auch Pole zu haben scheinen, indem wir a_3 nach dem letzten Ausdruck auch die Form geben können:

Por tanto resultan en a_3 términos en t^2 que parecen tener también polos, pues podemos dar a a_3 según la última fórmula, la forma:

$$s(a_3) = \left(\alpha + \beta\frac{e'}{e}\right)t^2,$$

sodaß teils von den Exzentrizitäten unabhängige, teils aber mit einem Pole $e = 0$ behaftete Glieder erscheinen. Diese letzteren Glieder erregen aber Bedenken, da bei kleinen Exzentrizitäten ein Anwachsen der Säkularstörungen schon nach kurzer Zeit über alle Grenzen stattfinden könnte. Es ist deshalb

donde aparecen términos ya sea independientes de las excentricidades, o bien afectados del polo $e = 0$. Pero estos últimos términos suscitan duda, puesto que pequeñas excentricidades producirían perturbaciones seculares tan grandes como se quiera en poco tiempo. Por lo tanto investigaremos si estos térmizu untersuchen, ob diese Glieder sich nicht gegen andere wegheben, ebenso wie die von den Exzentrizitäten unabhängigen Glieder.

In der Entwickelung von a gemäß den Formeln (4), (6) und (6a) nach Potenzen von Δa, Δe, Δl und $\Delta\varpi$ sind die Glieder in Δe und $\Delta\varpi$ die kritischen Glieder, die mit Polen $e = 0$ behaftet sein könnten, nämlich: $R_{\varepsilon e} \,.\, \Delta e + R_{\varepsilon\varpi} \,.\, \Delta\varpi$. Führen wir aber statt e und ϖ neue Variable ein: $e \sin\varpi = \xi$ und $e\cos\varpi = \eta$, so geht der genannte Ausdruck leicht in eine Funktion von ξ und η über, indem zunächst:

nos como asimismo los términos independientes de las excentricidades pueden eliminarse con otros.

En el desarrollo de a según potencias de Δa, Δe, Δl y $\Delta\omega$ de acuerdo con la fórmula (4), (6) y (6a), los términos en Δe y en $\Delta\varpi$, a saber $R_{\varepsilon e} \,.\, \Delta e + R_{\varepsilon\varpi} \,.\, \Delta\omega$ son críticos pues pueden contener polos ($e = 0$). Pero si en vez de e y ϖ introducimos nuevas variables: $e \sin\varpi = \xi$ y $e\cos\varpi = \eta$, dicha fórmula se transforma fácilmente en una función de ξ y η, siendo por ahora:

$$R_{\varepsilon e} = R_{\varepsilon\xi} \sin\varpi + R_{\varepsilon\eta} \cos\varpi$$

$$R_{\varepsilon\varpi} = R_{\varepsilon\xi} \,.\, \eta - R_{\varepsilon\eta} \,.\, \xi$$

u. ferner:

y además:

$$\Delta e = \frac{\xi}{w}\Delta\xi + \frac{\eta}{w}\Delta\eta$$

$$\Delta\varpi = \frac{\eta}{w^2}\cdot\Delta\xi - \frac{\xi}{w^2}\Delta\eta$$

wo noch $w = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$. Folglich wird:

donde: $w = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$. Se tiene entonces

$$R_{\varpi\varepsilon} \,.\, \Delta e + R_{\varepsilon\varpi}\Delta\varpi = R_{\varepsilon\xi} \,.\, \Delta\xi + R_{\varepsilon\eta} \,.\, \Delta\eta,$$

wo die Ableitungen $R_{\varepsilon\xi}$ u. $R_{\varepsilon\eta}$ keine Pole in ξ und η besitzen, weil R keine solchen besitzt, wie aus der Potenzentwickelung von R nach Potenzen von ξ und η folgt (s. die Entwicklung von Charlier, in seinem Buche: *Die Mechanik des Himmels*, Bd. 1, pag. 296, etc.). Die Koeffizienten sind dann nur noch von den Achsen und mittleren Längen abhängig, die als restliche Variable beibehalten werden. Andererseits folgen aus der Definition von ξ und η als deren zeitlichen Ableitungen:

y estas derivadas $R_{\varepsilon\xi}$ y $R_{\varepsilon\eta}$ carecen de polos en ξ y η, puesto que R no los contiene, como resulta del desarrollo de R según las potencias de ξ y η (véase el desarrollo de Charlier en su libro: *Die Mechanik des Himmels*, t. I, pág. 296, etc.). Los coeficientes, no dependen, pues, nada más que de los ejes y de las longitudes medias, variables que se mantienen, como las restantes. Por otra parte, de la definición de ξ y η resulta derivando respecto de t:

$$\dot{\xi} = \sin\varpi \frac{de}{dt} + e\cos\varpi \frac{d\varpi}{dt}$$

$$\dot{\eta} = \cos\varpi \frac{de}{dt} - e\sin\varpi \frac{d\varpi}{dt}$$

also folgt bei Substitution der Ausdrücke für $\dot{e}$ und $\dot{\varpi}$ nach (1) unter Transformation der Ableitungen R_e

Luego, reemplazando $\dot{e}$ y $\dot{\varpi}$ por sus expresiones (1), y transformando R_e y R_ϖ, mediante las fórmulas und R_ω auf Grund obiger Formeln in solche nach ξ ud η, unter teilweiser Potenzentwickelung der Faktoren nach e:

anteriores en derivadas respecto de ξ y η, y desarrollando en parte los factores según potencias de e, tenemos:

$$\dot{\xi} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2} R_\eta - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}e^2 + \dots\right)\xi R_\varepsilon$$

$$\dot{\eta} = -\frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2} R_\xi - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}e^2 + \dots\right)\eta R_\varepsilon$$

Aus der Form der rechten Seiten folgt, daß hier nur positive Potenzen von ξ und η auftreten können. Folglich ergibt die Potenzentwickelung der rechten Seiten nach $\Delta\xi$ und $\Delta\eta$, wenn $\xi = \xi_0 + \Delta\xi$ und $\eta = \eta_0 + \Delta\eta$, die neuen Gleichungen:

De la forma de los 2os miembros resulta que aquí sólo pueden aparecer potencias positivas de ξ y η. Por consiguiente, desarrollando los 2os miembros según potencias de $\Delta\xi$ y $\Delta\eta$, resultan las nuevas ecuaciones: donde $\xi = \xi_0 + \Delta\xi$ y $\eta = \eta_0 + \Delta\eta$:

$$\dot{\xi} = \Xi_0 + [\Xi_a\Delta a + \Xi_\varepsilon\Delta\lambda + \Xi_\xi\Delta\xi + \Xi_\eta\Delta\eta] + \frac{1}{2!}[\dots]^2 + \dots$$

$$\dot{\eta} = H_0 + [H_a\Delta a + H_\varepsilon\Delta\lambda + H_\varepsilon\Delta\xi + H_\eta\Delta\eta] + \frac{1}{2!}[\dots]^2 + \dots$$

Substituieren wir folglich weiter:

Si seguimos sustituyendo: $\xi = \xi_1 + \xi_2$ y $\eta = \eta_1 + \eta_2$,

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \cdots$$
$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \cdots$$

wo ξ_i und η_i die Störungen i. Ordnung bezeichnen, so ergibt sich:

donde ξ_i y η_i representan las perturbaciones de i-ésimo orden, resulta:

$$\dot{\xi}_1 = \Xi_0,\ \dot{\xi}_2 = \Xi_a a_1 + \dots + \Xi_\eta \eta_1$$
$$\dot{\eta}_1 = H_0,\ \dot{\eta}_2 = H_a a_1 + \dots + H_\eta \cdot \eta_1,$$

wobei wieder höhere Ableitungen von ξ und η nicht benötigt werden, um die Störungen 3. Ordnung in a zu erhalten. Analog zu (4) folgt unter Potenzentwickelung nach Δa, Δl, $\Delta\xi$ und $\Delta\eta$:

no siendo necesarias las derivadas superiores de ξ y η para obtener las perturbaciones de 3er orden en a. Análogamente a (4) resulta, al desarrollar según potencias de Δa, Δl, $\Delta\xi$ y $\Delta\eta$:

$$a = A_1 + [A_a \cdot \Delta a + A_2\Delta l + A_\xi\Delta\xi + A_\eta\Delta\eta] + \frac{1}{2!}[\dots]^2 + \dots,$$

wobei das Quadrat wie schon oben in bekannter Weise nur als ein symbolisches zu betrachten u. entsprechend aufzulösen ist. Unter Zerlegung der Δa, etc., folgt dann für a_3:

debiéndose considerar el cuadrado, como de costumbre, solamente simbólico — como ya vimos anteriormente — y en consecuencia desarrollarlo. Descomponiendo los Δa, etc. resulta, entonces, para a_3:

$$\dot{a}_3 = A_a a_2 + \dots A_{\eta}\eta_2 + \frac{1}{2}[A_{aa}a_1^2 + \dots + A_{\eta\eta}\eta_1^2 + 2A_{a\xi}a_1 l_1 + \dots + 2A_{a\eta}\eta_1 a_1\eta_1 +$$
$$+ 2A_{\varepsilon\xi}l_1\xi_1 + 2A_{\varepsilon\eta}l_1\eta_1 + 2A_{\xi\eta}\xi_1\eta_1].$$

Nun sind die Koeffizienten Ξ_0, $\Xi_a \dots \Xi_\eta$ und ebenso die H_0, H_e, ..., H_η, wie aus den Gleichungen (20) für $\dot{\xi}$ und $\dot{\eta}$ hervorgeht, frei von Polen $\xi = \eta = 0$, sodaß zuerst ξ_1 und η_1 bei Integration frei von Polen sind, ebenso wie auch a_1 und l_1, da A_0 frei von Polen auf Grund der Gleichungen:

De las ecuaciones para ξ' y η' resulta ahora que los coeficientes Ξ_0, $\Xi_a \dots \Xi_\eta$ lo mismo que los H_0, $H_a \dots H_\eta$, carecen del polo $\xi = \eta = 0$, de modo que, en primer lugar, al integrar, ξ_1 y η_1 carecen de polos, y en segundo lugar también a_1 y l_1, puesto que A_0 no los tiene, según las ecuaciones:

$$\dot{a}_1 = A_0, \ \dot{l}_1 = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\rho}_1,$$

wo

donde

$$\dot{\rho}_1 = -\frac{3}{2}\frac{n_0}{a_0}\dot{a}_1$$

und nach (1):

y según (1):

$$\dot{\varepsilon}_1 = E_0 + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1 - e_0^2}}{n_0 a_0^2}(\xi R_\xi + \eta R_\eta),$$

sodaß es sich folglich in beiden Fällen um Potenzreihen nach positiven Potenzen von ξ und η handelt, frei von Polen in $\xi = 0$ und $\eta = 0$. Dann aber ergibt auch die Substitution der Reihen für a_1, l_1, ξ_1 und η_1 in die Ausdrücke für $\dot{\xi}_2$ u. $\dot{\eta}_2$ aufs neue Reihen nach ξ und η, die ebenfalls frei von Polen sind; schliesslich ergeben sich auch bei der Substitution von ξ_2 und η_2 nebst ξ_1 und η_1 in $\dot{a}_3$ eine von Polen freie Potenzreihe nach ξ und η, also endlich in a_3 selbst. Durch die Verwendung der neuen Variablen ξ und η haben sich also die Pole, die die Lösung bedrohten, weggehoben. Deshalb erscheint es zwechmässig, wenn von vornherein sowohl bei der Berechnung von a_3 wie bei allen anderen Elementen die Entwickelung der Störungsfunktion nach Potenzen der Variablen ξ und η vorgenommen worden wäre. Dazu wäre aber die fertige Entwickelung von R nötig gewesen oder aber ihre Ableitung aus der bekannten Entreicklung von Le Verrier. Die Char-

tratándose, pues, en los dos casos de series de potencias positivas de ξ y η, libres de polos en $\xi = 0$ y $\eta = 0$. Además por la sustitución de $a_1 l_1$, ξ_1 y η_1 por sus series, en las fórmulas para $\dot{\xi}_2$ y $\dot{\eta}_2$ resultan nuevamente series según ξ y η también libres de polos; finalmente, al sustituir en $\dot{a}_3$ ξ_2 y η_2 y también ξ_1 y η_1 resulta una serie de potencias en ξ y η, libre de polos ξ y η y por último, en a_3 mismo. Con el empleo, pues, de las nuevas variables ξ y η, se han eliminado los polos que dificultaban la solución. Por lo tanto, parece útil, para el cálculo de a_3 y demás elementos, haber desarrollado previamente la función perturbadora según potencias de las variables ξ y η. Pero, para este objeto hubiera sido necesario poseer el desarrollo completo de R, o su deducción del conocido desarrollo de Le Verrier. El desarrollo de Charlier, según elementos canónicos que coinciden con nuestros elementos, salvo series de potencias de e y un factor dependiente del semiliersche Entwickelung nach kanonischen Elementen, die bis auf Potenzreihen nach e und ferner bis auf von der großen Achse abhängige Faktoren mit den obigen ξ und η übereinstimmen, ist aber unfertig, weil noch die Fourierreihen für die negativen ungraden Potenzen der gegenseitigen Entfernungen der Planeten zu substituieren sind, um dann unter Multiplikation mit den schon vorhandenen Faktoren der Form $\frac{\sin}{\cos}(i'l' + i \,.\, l)$ die definitive Form zu erhalten, aus der man dann die partikulären Glieder zur Bestimmung der Säkularteile von a_3 etc., heraussuchen kann. Aus diesem Grunde habe ich die Benutzung der Le Verrierschen Entwickelung in den *Annales de l'Observatoire de Paris*, Bd. 1, 2 und 10 vorgezogen.

eje mayor, no está completo, puesto que para obtener la forma definitiva hay que desarrollar todavía en series de Fourier las potencias impares negativas de las distancias mutuas de los planetas que aparecen en dicho desarrollo, multiplicando finalmente con los factores $\frac{\text{sen}}{\cos}(il' + il)$. De la serie así obtenida se pueden elegir los términos particulares que permiten determinar las partes seculares de a_3, etc. Para eludir estas dificultades hemos preferido hacer uso del desarrollo de Le Verrier *Annales de l'Observatoire de Paris*, tomo 1, 2 y 10.

Betrachten wir nun in Fortsetzung des 4. Gliedes in $\dot{e}_2$ dessen 2. Teil :

Consideremos ahora el 4° término de $\dot{e}_2$, cuya segunda parte es :

$$p_4(e_2) = -\frac{\sqrt{1 - e_0^2}}{K\sqrt{a_0}} \cdot \frac{1}{2}(e_0 + e_0^3)\, R_{\varepsilon\tilde{\omega}} \cdot \tilde{\omega}_1,$$

so ist $\dot{e}R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ mindestens vom 2. Gliede, da $R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ mindestens vom 1. Grade :

resulta entonces $eR_{\varepsilon\omega}$ por lo menos de 2° grado, puesto que $R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ es por lo menos de 1er grado :

$$R_{\varepsilon\tilde{\omega}} = e \,.\, \cos\,[il' - 1)\,l - \tilde{\omega}],$$

sodaß also der gemischt-säkulare Teil :

de modo que la parte mixta secular es :

$$P\,(p_4(e_2)) = t\dot{e}\,(\alpha e + \beta e') \,.\, \sin\,[il' - (i - l)\,l - \tilde{\omega}]\;;$$

da deshalb zur Erzeugung eines Säkulargliedes in $\dot{a}_3$: $R_{\varepsilon e} = \sin\,[il' - (i - l)\,l - \tilde{\omega}]$ sein muß, wird alsdann :

y como para poder formar un término secular en a_3, debe ser : $R_{\varepsilon e} = \sin\,[il' - (i - 1)\,l - \tilde{\omega}]$ resulta :

$$s\,(R_{\varepsilon e} \,.\, e_2) = e\,(\alpha e + \beta e')\,t,$$

und folglich :

y por consiguiente :

$$s\,(a_3) = e\,(\alpha e + \beta e') \,.\, t^2$$

sodaß mithin auch Glieder der Form $e^2 \,.\, t^2$ und $e \,.\, e' \,.\, t^2$ in a_3 auftreten können, womit die Haupt-

Luego pueden aparecer en a_3 también términos de la forma $e^2 t^2$ y $e \,.\, e' \,.\, t^2$, con lo cual quedan deterformen der Glieder in $\dot{p}_2$ (a_3) infolge der Terme p_4 (e_2) festgestellt worden sind.

Das nächste Glied von (5) lautet nun :

minadas las formas principales de los términos de $\dot{p}_2$ (a_3) en base a los de p_4 (e_2).

El término siguiente de (5), es, ahora :

$$p_3\,(a_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon\varepsilon}\,(\varepsilon_2 + \rho_2)$$

wobei gemäß (6) :

siendo según (6) :

$$\dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_{2a} a_1 + \varepsilon_{2e} e_1 + \varepsilon_{2\varepsilon} l_1 + \varepsilon_{2\tilde{\omega}} \tilde{\omega}_1$$

$$\dot{\rho}_2 = -\frac{3}{2}\frac{n_0}{a_0} a_2 + \frac{15}{8}\frac{n_0}{a_0^{\,2}} a_1^{\,2}.$$

Aus der Form der Koeffizienten $\varepsilon_{2a} \ldots \varepsilon_{2\tilde{\omega}}$ nach $(6a)$ folgt mit Rücksicht auf das Nichtvorhandensein eines Poles $e = 0$ in a_1, e_1 und l_1, dass die entsprechenden Terme von $\dot{\varepsilon}_2$ frei von solchen Polen sind; in Bezug auf das letzte Glied von $\dot{\varepsilon}_2$:

De la forma de los coeficientes $\varepsilon_{2a} \ldots \varepsilon_{2\tilde{\omega}}$ según (6_a), y de la inexistencia del polo $e = 0$ en a_1, e_1 y l_1, resulta que los términos correspondientes de $\dot{\varepsilon}_2$ carecen de dicho polo. Por ser el último término de $\dot{\varepsilon}_2$:

$$\varepsilon_{2\tilde{\omega}} \cdot \tilde{\omega}_1 = \left[-\frac{2\sqrt{a}}{K} R_{a\tilde{\omega}} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{2K\sqrt{a}}\, e\left(1 + \frac{1}{4}e^2\right) R_{e\tilde{\omega}}\right] \tilde{\omega}_1$$

folgt, da $R_{a\tilde{\omega}}$ infolge der Ableitung nach $\tilde{\omega}$ stets mit e als Faktor versehen ist, daß $\tilde{\omega}_1 \,.\, R_{a\tilde{\omega}}$ frei von Polen ist, und daß ferner auch $\tilde{\omega}_1 \,.\, e \,.\, R_{e\tilde{\omega}}$ polfrei ist, weil das Produkt $e\tilde{\omega}_1$ polfrei ist.

Zur Erzeugung von t_2-Gliedern in a_3 ist dann, da die Ableitung $R_{\varepsilon\varepsilon}$ in p_3 (a_3) eine rein periodische Funktion ist, die Aufsuchung der Poisson-Glieder in $\varepsilon_2 + \rho_2 = l_2$ erforderlich, und zwar in den mit e_1 und $\tilde{\omega}_1$ als Faktoren behafteten Gliedern in l_2. Diese Glieder sind in (6) ersichtlich und ihre Faktoren in $(6a)$ dargestellt. Sofort erledigist ρ_2, da $\dot{\rho}_2 = c_1 a_2 + c_2\,(a_1)^2$ (c_1 und c_2 Konstanten) wegen a_2 Poissonglieder enthält, während $(a_1)^2$ als Quadrat einer reinperiodischen Funktion nur aus Konstanten und reinperiodischen Gliedern zusammengesetzt bleibt. Wie schon früher ausgeführt, werden die Poisson-Glieder von a_2 im Falle niedrigsten Grades von der Form :

y por aparecer $R_{a\tilde{\omega}}$, siempre con el factor e, a causa de la derivación respecto de $\tilde{\omega}$ sigue que $\tilde{\omega}_1 R_{a\tilde{\omega}}$ carece de polos, y también $\omega_1 e R_{e\tilde{\omega}}$, porque el producto $e \,.\, \tilde{\omega}_1$ no contiene polos.

Para hallar en a_3 términos en t^2, es necesario buscar en $\varepsilon_2 + \rho_2 = l_2$ los términos de Poisson, (pues el factor $R_{\varepsilon\varepsilon}$ que aparece en $p_3\,(a_3)$ es una función periódica pura), y esto debe hacerse en los términos de l_2 que contengan e_1 y $\tilde{\omega}_1$ como factores. Estos términos son evidentes en (6) y sus factores están representados en (6_a). Por lo que se refiere a ρ_2 no hay dificultad ya que $\dot{\rho}_2 = c_1 a_2 + c_2\,(a_1)^2$ (siendo c_1 y c_2 constantes) contiene términos de Poisson por a_2, mientras que $(a_1)^2$ o sea cuadrado de una función periódica pura, consta solamente de constantes y términos periódicos puros. Como ya lo habíamos explicado, los términos de Poisson de a_2, en el caso del grado más bajo, son de la siguiente forma :

$$P\,(a_2) = te' \sin\,[il' - (i - l)\,l - \tilde{\omega}] + t\,(\alpha e + \beta e') \cos\,[il' - (i - l)\,l - \tilde{\omega}],$$

d. h. vom 1. Grade in den Exzentrizitäten. Von derselben Form sind die entsprechenden Glieder in ε_2. Folglich muß $R_{\varepsilon\varepsilon}$ aus

es decir, de 1er grado en las excentricidades. Los términos correspondientes de ε_2 son de la misma forma. Por consiguiente, debemos sacar $R_{\varepsilon\varepsilon}$ de

$$R = e' \cos [il' - (i - l) l - \tilde{\omega}'] + e \cos [il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}]$$

entnommen werden, sodaß folglich a_3 durch diese Glieder insgesamt die Form erhält:

de modo que, por medio de estos términos a_3 obtiene, en suma, la forma:

$$a_3 = e'^2 t^2 + e \,.\, e' t^2.$$

Der nächste Term von a_3 folgt aus der Gleichung:

El subsiguiente término de a_3 resulta de la ecuación:

$$p_4 (\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}_2},$$

wobei die Koeffizienten wieder in (6) resp. (6a) dargestellt sind. Aus den schon bekannten Grüuden sind eventuelle Pole $e = 0$ nur in den Koeffizienten $\tilde{\omega}_{2e} \,.\, e_1$ und $\tilde{\omega}_{2\tilde{\omega}} \,.\, \tilde{\omega}_1$ von $\tilde{\omega}_2$ möglich.

Der Koefficient

estando representados de nuevo los coeficientes en (6) y (6a). Por razones ya conocidas, sólo puede haber polos $e = 0$ en los coeficientes $\tilde{\omega}_{2e} \,.\, e_1$ y $\tilde{\omega}_{2\tilde{\omega}} \,.\, \tilde{\omega}_1$ de $\tilde{\omega}_2$.

El coeficiente

$$\tilde{\omega}_{2e} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{K\sqrt{a}} \left[\frac{1}{e} R_{ee} - \frac{1}{e^2} \frac{1}{(1 - e^2)} R_e \right] \cdot e_1$$

hat an den Stellen Pole $e = 0$, wo die Glieder $\frac{1}{e} R_{ee}$ und $\frac{1}{e^2} R_e$ solche Pole besitzen, was der Fall ist, wenn schon nur der 1. Grad in den Exzentrizitäten berücksichtigt wird. Dann ist nur ein Glied dieser Form möglich; $R = e \cos [il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}]$, sodaß folglich:

tiene polos en los puntos en que los tienen los términos $\frac{1}{e} R_{ee}$ y $\frac{1}{e^2} R_e$, lo que ocurre solamente cuando se considera el primer grado en las excentricidades. Entonces, hay un sólo término de esta forma: $R = e \cos [il' - (i - l) l - \tilde{\omega}]$, por consiguiente:

$$\frac{1}{e^2 (1 - e^2)} R_e = \frac{1}{e^2 (1 - e^2)} \cos [il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}],$$

also:

luego:

$$P(\tilde{\omega}_2) = \frac{e'}{e^2} t \sin [il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}).$$

Folglich muß dann weiter also zur Ableitung von $R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ sein:

Por tanto, para poder deducir $R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$, debe ser:

$$R = e \,.\, e'^2 \cos [il' - (i - 1) l - 2\tilde{\omega}' + \tilde{\omega}] + e^2 e' \cos [il' - (i - 1) l + \tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}]$$

Folglich wird dann das t-Glied in $p_4(\dot{a}_3)$ von der Form:

Por consiguiente, en $p_4(a_3)$, el término en t resulta de la forma:

$$s(\dot{a}_3) = \frac{e'^3}{e} t \cos(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) + e'^2 . t \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}),$$

sodaß hier also neben einem Gliede mit dem Pole $e = 0$ auch ein Glied mit dem Faktor e'^2 auftritt.

de modo que aquí, al lado de un término con el polo $e = 0$ aparece también otro con el factor e'^2.

Bei der Wahl eines Gliedes 2. Grades in R muß unter Wegfall der Glieder in e'^2, weil nur Differentiationen nach e in Frage kommen, gesetzt werden:

Al elegir un término de 2° grado en R, eliminando los términos en e'^2 que no interesan al derivar respecto de e, hay que poner:

$$R = e^2 \cos[il' - (i-2)l - 2\tilde{\omega})] + ee' . \cos[il' - (i-2)1 - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}] + e^2 \cos i[l' - l) + ee' \cos[i(l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}]$$

sodaß

de manera que

$$\frac{1}{e} R_{ee} - \frac{1}{e^2(1-e^2)} R_e = \left[\frac{2}{e} - \frac{2}{e(1-e^2)}\right] \cos[il' - (i-2)l - 2\tilde{\omega}] - \frac{e'}{e^2(1-e^2)} \cos[il - (i-2)l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}] + \left[\frac{2}{e} - \frac{2}{e(1-e^2)}\right] \cos i(l' - l) - \frac{e'}{e^2(1-e^2)} \cos[i(l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}].$$

Unter Potenzentwickelung des Nenners $1 - e^2$ entsteht dann:

Al desarrollar el cociente $1/(1 - e^2)$ según potencias de e resulta:

$$\tilde{\omega}_{2e} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}} \left[-2e(\cos[il' - (i-2)l - 2\tilde{\omega}] + \cos i(l' - l)) - \left(\frac{e'}{e^2} + e'\right) \cos(il' - (i-2)l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega})) + \cos(i(l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}) \right]$$

sodaß

luego

$$P(\tilde{\omega}_2) = e' . t \left[e \sin[il' - (i-2)l - 2\tilde{\omega}] + e \sin i(l' - l) - \left(\frac{e'}{e^2} + e'\right) (\sin[i(l' - (i-2)l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}]) + \sin[i(l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}]. \right.$$

Folglich muß zur Ableitung des Faktors $R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ sein:

Por consiguiente, para poder deducir el factor $R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$, debe ser:

$$R = e . e' \cos[il' - (i-2)l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}] + ee' \cos[i(l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}] + e^2 \cos[i(l' - (i-2)l - 2\tilde{\omega})] +$$

+ 4. Grad für das letzte Glied in $P(\tilde{\omega}_2)$, sodaß sich nach Bildung der Ableitung $R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ ergibt:

+ 4° grado para el último término de $P(\tilde{\omega}_2)$, de suerte que después de haber formado $R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$, resulta:

$$s(a_3) = (e^2 e'^2 + e'^2) t^2 \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}).$$

Es verbleibt jetzt die Untersuchung des 2. Terms in $\dot{\tilde{\omega}}_2$:

Queda por investigar ahora el 2° término de $\dot{\tilde{\omega}}_2$:

$$\dot{\tilde\omega}_2 = \frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{e} R_{\tilde\omega e} \cdot \tilde\omega_1 .$$

Die Funktion $R_{e\tilde\omega}$ erfordert, dass im Falle niedrigsten Grades der folgende Term zu betrachten ist:

La función $R_{e\tilde\omega}$ exige que en el caso de menor grado se considere el siguiente término:

$$R = e \cos [il' - (i-l) l - \tilde\omega]$$

sodaß mit Rücksicht auf den Säkularteil von $\tilde\omega_1$ folgt:

de modo que, atendiendo a la parte secular de $\tilde\omega_1$, resulta:

$$R_{e\tilde\omega} \cdot \tilde\omega_1 = \frac{\alpha e + \beta e'}{e} t \sin [il' - (i-1) l - \tilde\omega]$$

also ist weiter:

y además:

$$P(\tilde\omega_2) = \frac{\alpha e + \beta e'}{e'^2} t \cos [il' - (i-1) l - \tilde\omega];$$

folglich ist $R_{\varepsilon\tilde\omega}$ zu entnehmen aus demselben R wie oben, womit das zugehörige Säkularglied von a_3 wird:

por consiguiente, debemos formar $R_{\varepsilon\tilde\omega}$ del mismo R, como antes, resultando el siguiente término secular correspondiente a a_3:

$$s[p_4(a_3)] = \frac{\alpha e + \beta e'}{e} \cdot t^2 = \left(\alpha + \beta \frac{e'}{e}\right) t^2,$$

sodaß hier ein neues von den Exzentrizitäten unabhängiges t^2-Glied zu dem Gliede mit einem scheinbaren Pol hinzutritt. Die nächsthöheren Glieder in $R_{e\tilde\omega}$ führen in a_3 zu Gliedern der Form: $e'^2 t$, $ee' t^2$ $e^2 t^2$ und $\frac{e'^3}{e} \cdot t^2$, d. h. nicht zu neuen Termen.

Como se ve, se añade aquí al término con un polo aparente, un nuevo término en t^2 independiente de las excentricidades. Los términos inmediatos superiores en $R_{\varepsilon\tilde\omega}$, dan, en a_3, términos de la forma $e'^2 . t^2$, $e . e' t^2$, $e'^2 t^2$ y $\frac{e'^3}{e} t^2$, es decir, no dan términos de nueva forma.

Nunmehr müssen wir zu den in a_1, e_1, l_1 und $\tilde\omega_1$ quadratischen Gliedern in $\dot a_3$ übergehen, zuerst also zu:

Ahora tenemos que ocuparnos de los términos de $\dot a_3$, cuadráticos en a_1, e_1, l_1 y $\tilde\omega_1$; en primer lugar es:

$$p_5(\dot a_3) = \frac{\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon aa} \cdot a_1^2 .$$

Da a_1, also auch a_1^2 frei von Polen $e = 0$ wie auch die Ableitung $R_{\varepsilon aa}$, so bleibt auch $\dot a_3$ frei von Polen. Da $R_{\varepsilon aa}$ wie auch a_1 reinperiodische Funktionen der Zeit sind und in a_1^2 nur noch Konstanten hinzutreten, so treten in $\dot a_3$ konstante Glieder, in a_3 also sä-

Como a_1, y por consiguiente a_1^2, lo mismo que $R_{\varepsilon aa}$, carecen de polos $e = 0$, también carece de polos $\dot a_3$. Siendo $R_{\varepsilon aa}$ lo mismo que a_1, funciones periódicas puras del tiempo, y apareciendo constantes en a_1^2, figuran términos constantes en $\dot a_3$, es decir, términos kulare t^1-Glieder auf, aber keine Glieder in t^2. Deshalb können wir auf das nächste Glied übergehen :

seculares en t^1, pero ningún término en t^2. Por tanto, podemos pasar a considerar el término siguiente, a saber :

$$p_6(\dot{a}_3) = \frac{\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon ee} \cdot e_1^2;$$

da e_1 aus periodischen und reinsäkularen Gliedern zusammengesetzt ist, sodaß :

ya que e_1 consta de términos periódicos y seculares puros, o sea

$$e_1 = p(t) + e't,$$

wo $p(t)$ die periodischen Glieder fixiert, so wird :

representando $p(t)$ los términos periódicos, resulta :

$$e_1^2 = p_1(t) + \text{const.} + 2e'tp(t) + e'^2 \cdot t^2,$$

sodaß infolge der Periodizität von $R_{\varepsilon ee}$ nur der Term : $2e'tp(t) \cdot R_{\varepsilon ee}$ zu reinen t-Gliedern in $\dot{a}_3$, also t^2-Gliedern in a_3 führen kann; wegen der doppelten Ableitung nach e muß $R_{\varepsilon ee}$ mindestens vom 2. Grade in e sein.

Setzen wir zuerst zur Darstellung von e_1 unter Absehen zunächst vom 2. Grade in $\dot{e}_1$:

de modo que a causa de la periodicidad de $R_{\varepsilon ee}$, sólo el término $2e'tp(t) \cdot R_{\varepsilon ee}$ puede dar en $\dot{a}_3$ términos seculares puros en t, es decir, términos en t^2 en a_3. Debido a la doble derivación respecto de e, $R_{\varepsilon ee}$ debe ser por lo menos de 2° grado en e.

Si al representar e_1 — dejando aparte por el momento el 2° término en $\dot{e}_1$ — ponemos :

$$R = e\cos[il' - (i-1) \cdot 1 - \tilde{\omega}],$$

sodaß :

de modo que

$$e_1 = \cos[il' - (i-1) \cdot l - \tilde{\omega}]$$

so muß $R_{\varepsilon ee}$ aus dem folgenden Gliede 3. Grades entnommen werden :

y por consiguiente debemos formar $R_{\varepsilon ee}$ del término de 3er grado siguiente :

$$R = e^2 \cdot e' \cos[il' - (i-1) \cdot l - \tilde{\omega}'],$$

sodaß folglich das entsprechende Poisson-Glied :

de donde, el término correspondiente de Poisson es :

$$P(R_{\varepsilon ee} \cdot e_1^2) = e'^2 t \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$$

also

luego

$$p_6(a_3) = e'^2 t^2 \cdot \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}).$$

Gehen wir zu einem Term 2. Grades über, zwecks Berechnung von e_1, so muss R sein :

Pasemos ahora a un término de 2° grado, a fin de poder calcular e_1. Debe ser entonces :

1° $$R = e \cdot e' \cos[il' - (i-2)l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}],$$

sodaß folglich : y por consiguiente :

$$e_1 = e' \cos [il' - (i - 2) l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}]$$

also ist zur Berechnung von $R_{\varepsilon ee}$ zu wählen : y para calcular $R_{\varepsilon ee}$:

$$R = e^2 \cos [il' - (i - 2) l - 2\tilde{\omega}],$$

sodaß der Säkularteil : de modo que la parte secular será :

$$s (R_{\varepsilon ee} \, . \, e_1^2) = e'^2 t \sin (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}),$$

also ist auch $p_6 (a_3)$ von der Form : y por tanto es también $p_6 (a_3)$ de la forma :

$$p_6 (a_3) = e'^2 t^2 \, . \, \sin (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}).$$

Im Falle 2) ist zur Bastimmung von e_1 zu setzen : En el 2° caso, para poder calcular e_1, hay que poner :

2° $$R = e^2 \, . \, \cos [il' - (i - 2) l - 2\tilde{\omega}]$$

folglich wird dann : por consiguiente, resulta :

$$e_1 = e \, . \, \cos [il' - (i - 2) l - 2\tilde{\omega}],$$

sodaß in Bezug auf $R_{\varepsilon ee}$ sein muß : y para el cálculo de $R_{\varepsilon ee}$, debe ser :

$$R = 4 \, . \, \text{Grad} = e^3 e' \cos [il' - (i - 2) l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}]$$

folglich wird dann $s\ (a_3)$ von der Form : $e^2 e'^2 t^2$. sin $(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) = 4$. Grad. de donde resulta ser $s (a_3)$ de la forma : $e^2 e'^2 t^2$. sen $(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) = 4°$ grado.

3° $$R = ee' \cos [i (l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}] ;$$

dann ist resulta, pues :

$$e_1 = e' \sin [i (l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}],$$

sodaß in Bezug auf $R_{\varepsilon ee}$ sein muß : de manera que ahora debe ser :

$$R = e^2 \cos i (l' - l)$$

also : es decir :

$$s (R_{\varepsilon ee} \, . \, e_1^2) = e'^2 \, . \, t \sin (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega},$$

also : por tanto :

$$p_6 (a_3) = e'^2 t^2 \sin (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}.$$

Jetzt bleibt noch die Betrachtung des Einflusses des 2. Gliedes in $\dot{e}_1$ auf die Säkularglieder in a_3, d. h. von

Queda todavía por averiguar la influencia del 2° término de $\dot{e}_1$ sobre los seculares en a_3, es decir, de

$$\dot{e}_1 = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \cdot e \cdot R_\varepsilon.$$

Berücksichtigen wir zuerst den allgemeinen Term 0. Grades in R, also $R = \cos i\,(l' - l)$, sodaß $e_1 = e \cos i\,(l' - l)$, so muss zur Kombination mit $R_{\varepsilon ee}$ R dem 4. Grade entnommen werden, da Terme 2. Grades in e mit dem Argument $i\,(l' - l)$ nebst einem Agregat in $\tilde{\omega}'$ und $\tilde{\omega}$ nicht existieren, wohl aber bei weiterem Faktor $e \,.\, e'$ d. h.

Tomando primeramente en cuenta el término general de grado 0 de R, es decir $R = \cos i\,(l' - l)$, de manera que $e_1 = e \cos i\,(l' - l)$, hay que sacar R del 4° grado para poder combinarlo con $R_{\varepsilon ee}$, puesto que no existen términos de 2° grado en e con el argumento $i\,(l' - l)$ salvo términos en $\tilde{\omega}'$ y $\tilde{\omega}$, pero sí con el factor $e \,.\, e'$, es decir

$$R = e^3 e' \cos\left[i\,(l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}\right];$$

dann wird

resulta, pues:

$$R_{\varepsilon ee} e_1{}^2 = e^2 e'^2 t \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}),$$

sodaß der entsprechende Teil von a_3:

de manera que la parte correspondiente de a_3:

$$s\,(a_3) = e^2 e'^2 t^2 \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$$

vom 4. Grade in den Exzentrizitäten ist.

es de 4° grado en las excentricidades.

Wählt man ein Glied 1. Grades in R in Bezug auf e_1 aus, sodaß

Si se escoge un término de 1er grado de R respecto de e, de modo que

$$e_1 = e^2 \,.\, \cos\left[il' - (i - 1)\,l - \tilde{\omega}\right]$$

oder

o

$$e \,.\, e' \cos\left[i1' - (i - 1)\,1 - \tilde{\omega}'\right],$$

so ist entsprechend in Bezug auf $R_{\varepsilon ee}$ zu wählen:

debemos elegir correspondientemente $R_{\varepsilon ee}$ de:

$$R = e^2 \,.\, e' \cdot \cos\left[il' - (i - 1)\,.\,l - \tilde{\omega}'\right]$$

resp.

y

$$R = e^3 \,.\, \cos\left[il' - (i - 1)\,.\,l - \tilde{\omega}\right].$$

In beiden Fällen ist folglich $s\,(a_3)$ von der Form:

respectivamente. En ambos casos resulta, por consiguiente, $s\,(a_3)$, de la forma:

$$s\,(a_3) = e^2 \,.\, e'^2 \,.\, t^2 \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}).$$

Wird R so gewählt, dass $R_{\varepsilon ee}$ vom o. Grade wird, sodaß

Al elegir R de tal modo que $R_{\varepsilon ee}$ resulte de grado o, de modo que

$$R = e^2 \cos [i (l' - l)],$$

also

y

$$\dot{R}_{\varepsilon ee} = \sin [i (l' - l],$$

so ist R in Bezug auf R_ε zu entnehmen aus dem Term 2. Grades:

habrá que sacar R, para el cálculo de R_ε del término de 2° grado:

$$R = ee' \cos [i (l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}].$$

Folglich wird a_3 auch in diesem Falle vom 4. Grade:

Por consiguiente, resulta a_3 también en este caso de 4° grado:

$$s (a_3) = e^2 e'^2 t^2 \sin (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}).$$

Der nächste Term:

El próximo término

$$p_7 (\dot{a}_3) = \frac{\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} \cdot l_1^2$$

ist frei von Polen $e = 0$, weil beide Faktoren von solchen frei sind, und ferner können in $\dot{a}_3$ keine säkularen t-Glieder entstehen, weil (l_1^2) eine mit einer Konstanten behaftete periodische Reihe ist, und $R_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}$ rein periodisch ist, sodass $p_7 (a_3)$ frei von t^2-Gliedern ist.

carece del polo $e = 0$, porque los dos factores carecen de él, y además no pueden formarse en $\dot{a}_3$ términos seculares en t, puesto que $(l_1)^2$ es una serie periódica más una constante, y $R_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}$ es periódico puro, de manera que $p_7 (a_3)$ está libre de términos en t^2.

Der nächste Term:

El siguiente término

$$p_8 (\dot{a}_3) = \frac{\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}} \cdot \tilde{\omega}_1^2$$

besitzt einen Pol $e = 0$, aber nicht $e^2 = 0$, weil der Faktor $R_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$ mindestens e^1 als Faktor enthalten muß, während $(\tilde{\omega}_1)^2$ höchstens den Nenner e^2 enthalten kann. Ein gemischt-säkularer Teil in $(\tilde{\omega}_1)^2$ entsteht analog wie bei e_1^2 nur aus dem in $\tilde{\omega}_1^2$ auftretenden Summanden:

contiene el polo $e = 0$, pero no $e^2 = 0$, porque $R_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$ debe contener al menos el factor e_1, mientras que $\tilde{\omega}_1^2$ puede contener a lo sumo el denominador e^2. Resulta ahora una parte secular mixta en $\tilde{\omega}_1^2$, análogamente a e_1^2, sólo del siguiente término de $\tilde{\omega}_1^2$:

$$2p (\tilde{\omega}_1) s (\tilde{\omega}_1) = 2 \frac{\alpha e + \beta e'}{e} \cdot t \cdot p (\tilde{\omega}_1).$$

Ein quadratischer oder einfach säkularer Term $(\tilde{\omega}_1)^2$ würde mit dem rein-periodischen Term $R_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$ als

Un término secular cuadrático simple de $\tilde{\omega}_1^2$, con el término periódico puro de $R_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$ como factor, pro-

Faktor nur zu Poissongliedern der Form $t^2 \cos A$ und $t \sin A$ führen.

Wird der periodische Teil von $\tilde{\omega}_1$ zuerst zur Vermeidung von Polen aus dem allgemeinen Gliede 2. Grades in R abgeleitet, also aus $R = e^2 \cos i(l' - l)$, sodaß $p(\tilde{\omega}_1) = \sin i(l' - l)$, so muß $R_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$ aus

duce solamente términos de Poisson de la forma $t^2 . \cos A$ y $t . \operatorname{sen} A$.

Al deducir primeramente, para evitar polos, la parte periódica de $\tilde{\omega}_1$ del término general de 2° grado de R, es decir, de $R = e^2 \cos i(l' - l)$, de manera que $p(\tilde{\omega}_1) = \operatorname{sen} i(l' - l)$, debemos sacar $R_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$ de

$$R = e . e' . \cos[i(l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}]$$

entnommen werden, sodaß

de modo que resulta :

$$s(R_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}} . \tilde{\omega}_1{}^2) = (\alpha e + \beta e') . e' t \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$$

also dementsprechend :

y correspondientemente :

$$s(a_3) = (\alpha e + \beta e') . e' . t^2 \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$$

frei von Polen $e = 0$.

Wird $p(\tilde{\omega}_1)$ aus einem Gliede 1. Grades bestimmt, so ist dies nur aus

carece de polos $e = 0$.

Si se deduce $p(\tilde{\omega}_1)$ de un término de 1er grado, lo cual sólo es posible del siguiente

$$R = e . \cos[il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}]$$

möglich, womit erhalten wird :

resultará :

$$p(\tilde{\omega}_1) = \frac{1}{e} \sin[il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}].$$

Folglich wird der gemischt-säkulare Teil von $(\tilde{\omega}_1)^2$:

Por consiguiente, la parte secular mixta de $\tilde{\omega}_1{}^2$ es :

$$P(\tilde{\omega}_1{}^2) = \frac{(\alpha e + \beta e')}{e^2} t . \sin[il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}].$$

Folglich kann $R_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$, da dieser Faktor ein Sinus-Term ist, und ferner $P(\tilde{\omega}_1{}^2)$ einem Sinus proportional ist, aus demselben R wie im Falle von $p(\tilde{\omega}_1)$ entnommen werden, um einen Säkularterm zu erzeugen, sodaß

Ya que $R_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$, es un término seno, y además, $P(\tilde{\omega}_1{}^2)$ es proporcional a un seno, puede obtenerse $R_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$, a fin de poder producir un término secular del mismo, R que en el caso de $p(\tilde{\omega}_1)$, de modo que

$$R_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}} = e . \sin[i1' - (i - 1) l - \tilde{\omega}]$$

und somit

y por consiguiente

$$s(a_3) = \frac{(\alpha e + \beta e')}{e} t^2,$$

sodaß hier ein Glied o. Grades in den Exzentrizitäten neben einem Gliede mit dem Pole $e = 0$ erscheint, wobei aber später an anderer Stelle ein Wegheben der Glieder stattfinden muß.

Wählt man nun wieder ein Glied 2. Grades zwecks Ableitung von $p(\tilde{\omega}_1)$, indem

Aparece pues aquí un término de grado o en las excentricidades junto a un término con el polo $e = 0$, y ambos serán eliminados más adelante.

Elijamos ahora para deducir $p(\tilde{\omega}_1)$ un término de 2° grado. Sea por ejemplo

$$R = e^2 . \cos[il' - (i-2)l - 2\tilde{\omega}],$$

sodaß

de modo que

$$\tilde{\omega}_1 = \sin[il' - (i-2)l - 2\tilde{\omega}],$$

so muß $R_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$ aus 2 gleichwertigen Termen von R entnommen werden, nämlich:

Debemos sacar $R_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$ de dos términos adecuados de R, a saber:

$$R = e^2 \cos[il' - (i-2)l - 2\tilde{\omega}] + e . e' \cos[il' - (i-2)l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}],$$

sodaß:

de modo que:

$$P(R_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}} . \tilde{\omega}_1^2) = (\alpha e + \beta e') . e . t + (\alpha e + \beta e') e' t \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega});$$

folglich wird:

resultando pues:

$$p_8(a_3) = e^2 . t^2 + ee't^2 + (e . e' . t^2 + e'^2 t^2) \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}),$$

eine Lösung ohne Pole.

es decir una solución sin polo.

Hieran schliesst sich nun der Fall, wo $\tilde{\omega}_1$ aus dem folgenden Term 2. Grades von R ableitbar ist, nämlich:

Sigue ahora el caso en que $\tilde{\omega}_1$ puede deducirse del siguiente término de 2° grado de R:

$$R = e . e' \cos[il' - (i-2)l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}].$$

Alsdann ist $R_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$ wie im vorhergehenden Falle wieder aus 2 Termen 2. Grades von R zu entnehmen, nämlich:

Entonces como en el caso anterior, hay que sacar $R_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$ otra vez de dos términos de 2° grado de R, a saber:

$$R = ee' \cos[il' - (i-2)l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}] + e^2 \cos[il' - (i-2)l - 2\tilde{\omega}],$$

sodaß jetzt:

de manera que ahora es:

$$P(R_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}} . \tilde{\omega}_1^2) = \frac{\alpha e + \beta e'}{e} e'^2 t + (\alpha e + \beta e') e' t \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}),$$

sodaß folglich:

resultando

$$p_8(a_3) = e'^2 t^2 + \frac{e'^3}{e} t^2 + (ee' t^2 + e'^2 t^2)\cos(\tilde\omega' - \tilde\omega),$$

also behaftet mit einem Pole $e = 0$, ohne im Übrigen neue Formen der Koeffizienten.

Wird $\tilde\omega_1$ schliesslich aus der letzten Form der Terme 2. Grades abgeleitet, nämlich aus

$$R = e \,.\, e' \cos[i(l' - l) - \tilde\omega' + \tilde\omega],$$

sodaß

$$\tilde\omega_1 = \frac{e'}{e}\sin[i(l' - l) - \tilde\omega' + \tilde\omega],$$

so wird notwendigerweise in Bezug auf den Faktor $R_{\varepsilon\tilde\omega\tilde\omega}$ auf Grund desselben soeben fixierten R ;

$$R_{\varepsilon\tilde\omega\tilde\omega} = e \,.\, e' \sin[i(l' - l) - \tilde\omega' + \tilde\omega],$$

also

$$s(R_{\varepsilon\tilde\omega\tilde\omega} \,.\, \tilde\omega_1^2) = \frac{\alpha e + \beta e'}{e} t \,.\, e'^2,$$

folglich :

$$p_8(a_3) = e'^2 t^2 + \frac{e'_3}{e'} t^2.$$

Insgesamt sind also die säkularen t^2-Glieder mit Koeffizienten der folgenden Formen behaftet: e^2, e'^2, ee', $\frac{e'}{e}$ $\frac{e'^3}{e}$ und schliesslich mit von den Exzentrizitäten unabhängigen Faktoren.

Das nächste Glied von $\dot a_3$ lautet :

$$p_9(\dot a_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon a e} \,.\, a_1 \,.\, e_1,$$

worin die Ableitung von R wie auch a_1 und e_1 frei von Polen $e = 0$ sind, sodass folglich auch $p_9(a_3)$ frei von Polen ist. Nur die Kombination der stets periodischen Terme von $R_{\varepsilon a e}$ und a_1 mit den Säkulargliedern von e_1 führt zu den gesuchten t^2-Gliedern

es decir, con un polo $e = 0$, pero sin nuevas formas de los coeficientes.

Deduciendo finalmente $\tilde\omega_1$ de la última forma de los términos de 2° grado, es decir, de

de modo que

debe resultar necesariamente para el factor $R_{\varepsilon\tilde\omega\tilde\omega}$ en base del mismo R recién determinado, la expresión :

por consiguiente es

resultando :

En definitiva, pues, los términos seculares en t^2 contienen coeficientes de las siguientes formas : e^2, e'^2, ee', $\frac{e'}{e}$, $\frac{e'^3}{e}$ y finalmente, factores independientes de las excentricidades.

El término siguiente de $\dot a_3$ es :

y puesto que la derivada de R, lo mismo que a_1 y e carecen de polos $e = 0$, también carece de polos $p_9(a_3)$. Solamente la combinación de los términos siempre periódicos de $R_{\varepsilon a e}$ y a_1 con los términos seculares de e_1 nos dará los términos en t^2 de a_3 que in a_3. Da $R_{\varepsilon ae}$ mindestens vom o. Grade in e, so hat hier R erstens die Form :

nos interesan. Como $R_{\varepsilon ae}$ es, por lo menos, de grado o en e, R es en primer lugar de la forma :

$$R = e \cos [il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}];$$

folglich muß, da $R_{\varepsilon ae}$ ein Sinus-Ferm, der Cosinus-Term a_1 aus

por consiguiente, puesto que $R_{\varepsilon ae}$ es un seno, el término coseno de a_1 debe resultar de :

$$R = e' \cos [il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}']$$

hervorgehen, also

es decir

$$a_1 = e' \cos [il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}'].$$

Folglich ist mit Rücksicht darauf, dass $e_1 = e'l \, . \sin (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$, schliesslich :

Por lo tanto, ya que $e_1 = e'l \sin (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$, resulta finalmente :

$$s (R_{\varepsilon ae} \, . \, a_1 \, . \, e_1) = le'^2 \sin^2 (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}),$$

also

es decir

$$p_9 (a_3) = l^2 e'^2 \sin^2 (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}).$$

Wählt man jetzt in a_1 das Glied o. Grades, also allgemein $a_1 = \cos i (l' - l)$, so ist R in Bezug auf $R_{\varepsilon ae}$ zu entnehmen aus :

Al elegir entonces en a_1 el término de grado o, es decir $a_1 = \cos i (l' - l)$, hay que tomar R para calcular $R_{\varepsilon ae}$ de la forma :

$$R = e \, . \, e' \cos [i (1' - 1) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}]$$

Folglich wird

Por consiguiente, resulta

$$s (R_{\varepsilon ae} \, . \, a_1 \, . \, e_1) = le'^2 \sin^2 (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}),$$

und somit auch

y por lo tanto también

$$p_9 (a_3') = l^2 e'^2 \sin^2 (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$$

womit dieselbe Form wie im ersten Falle erhalten worden ist.

habiéndose, pues, obtenido la misma forma que en el primer caso.

Entnehmen wir jetzt $R_{\varepsilon ae}$ aus den Termen 2. Grades von $R = e^2 \cos i (l' - l)$, so muß a_1 folgen mittels

Si calculamos ahora $R_{\varepsilon ae}$ de los términos de 2° grado de $R = e^2 \cos i (l' - l)$ debe resultar a mediante

$$R = e \, . \, e' \cos [i (l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}];$$

folglich ist

por consiguiente es

$$s (R_{\varepsilon ae} a_1 \, . \, e_1) = e^2 e'^2 l^2 \sin^2 (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$$

sodaß

de modo que

$$p_9(a_3) = e^2e'^2t^2 \sin^2(\tilde\omega' - \tilde\omega),$$

d. h. von jetzt ab ergeben sich Glieder 4. Grades, ohne daß weitere Glieder zu untersuchen sind.

Das nächstfolgende Glied ist:

es decir, resultan ya términos de 4° grado de manera que no hay que examinar otros.

El término siguiente es:

$$p_{10}(\dot a_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon a\varepsilon} a_1 \,.\, l_1\,;$$

dieser Ausdruck ist frei von Polen, weil die 3 Faktoren $R_{\varepsilon a\varepsilon}$, a_1 und l_1 von solchen Polen frei sind, ferner sind auch keine rein säkularen t_1-Glieder möglich, weil a_1 wie l_1 keine solchen Terme enthalten. Deshalb können wird sogleich zu dem nächsten Gliede übergehen:

y carece de polos, porque no los tienen los tres factores $R_{\varepsilon ae}$, a_1 y l_1; además, no puede haber términos seculares puros en t^1, por no contener términos tales ni a_1 ni l_1. Por lo tanto podemos considerar inmediatamente el próximo, que es:

$$p_{11}(\dot a_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon a\tilde\omega} a_1 \tilde\omega_1.$$

Dieser Ausdruck hat keinen Pol, weil der Pol $e = 0$ von $\tilde\omega_1$ durch den e-Faktor in $R_{\varepsilon a\tilde\omega}$, der mindestens vom 1. Grade ist, aufgehoben wird. Ein säkulares t^1-Glied in $\dot a_3$ ist nur möglich, wenn die Säkularstörung von $\tilde\omega_1$ verwendet wird. Wird für $R_{\varepsilon a\tilde\omega}$ der Mindestterm 1. Grades in e substituiert, sodass das Argument also $A = il' - (i - l)\,l - \tilde\omega$, so darf zur Entstehung eines konstanten Termes im Produkt $R_{\varepsilon a\tilde\omega} \cdot a_1$ wegen der Cosinusform beider Glieder in Bezug auf a_1 auch dasselbe Argument neben dem immer zulässigen verschiedenen Argument gewählt werden, sodaß also:

Este término no tiene ningún polo, porque el polo $e = 0$ de $\tilde\omega_1$ se elimina por medio del factor en e de $R_{\varepsilon a\tilde\omega}$, que es por lo menos de 1^er^ grado. En a_3 sólo puede haber un término secular en t^1, si se aplica la perturbación secular de $\tilde\omega_1$. Sustituyendo en $R_{\varepsilon a\tilde\omega}$ el término de grado mínimo (1°) en e, de modo que el argumento es $A = il' - (i - 1)\,l - \tilde\omega$, se puede elegir también el mismo argumento para a_1 a fin de que se forme un término constante en el producto $R_{\varepsilon a\tilde\omega} \cdot a_1$; pero por ser un producto de cosenos, también pueden ser distintos los argumentos de modo que:

$$a_1 = e\cos[il' - (i - 1)\,l - \tilde\omega] + e'\cos[il' - (i - 1)\,l - \tilde\omega'].$$

Folglich erhält man als Säkularterm von $\dot a_3$:

Por consiguiente, se obtiene como término secular de $\dot a_3$:

$$s(\dot a_3) = [\alpha e + \beta e' \sin(\tilde\omega' - \tilde\omega)]\,(e + e'\cos(\tilde\omega' - \tilde\omega'),$$

sodaß also a_3 von der Form

resultando a_3 de la forma

$$s(a_3) = [e^2 + ee'\sin(\tilde\omega' - \tilde\omega) + ee'\cos(\tilde\omega' - \tilde\omega) + e'^2 \sin(2\tilde\omega' - 2\tilde\omega)]\, t^2.$$

Entnimmt man weiter a_1 aus einem Gliede O. Grades, sodaß also $a_1 = \cos i(l' - l)$, so ist R in Bezug auf $R_{\varepsilon a \tilde\omega}$ zu entnehmen aus:

Sacando además, a_1 de un término de grado o, de manera que sea $a_1 = \cos i(l' - l)$, debemos tomar R para calcular $R_{\varepsilon a \tilde\omega}$ de la forma:

$$R = ee' \cos [i(l' - l) - \tilde\omega' + \tilde\omega];$$

folglich wird

luego

$$c(R_{\varepsilon a \tilde\omega} \cdot a_1) = e \,.\, e' \cos(\tilde\omega' - \tilde\omega)$$

und folglich

y además

$$s(a_3) = [\alpha e + \beta e' \sin(\tilde\omega' - \tilde\omega)\, e' \cos(\tilde\omega' - \tilde\omega)\, t^2,$$

d. h.

es decir:

$$s(a_3) = [e' \cos(\tilde\omega' - \tilde\omega) + e'^2 \sin 2(\tilde\omega' - \tilde\omega)]\, t^2$$

also entstehen hier auch von der Exzentrizität e unabhängige, mit e' allein behaftete Glieder. Alle weiteren Kombinationen können nur zu Gliedern höheren Grades als bisher führen. Deshalb können wir zu dem nächsten Term in $\dot a_3$ übergehen:

o sea, resultan aquí, además, términos independientes de la excentricidad e, que contienen solamente e'. Todas las demás combinaciones no pueden dar sino términos de un grado mayor que el procedente. Por lo tanto podemos ocuparnos del próximo término en a_3:

$$p_{12}(\dot a_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon e \varepsilon} \cdot e_1 l_1.$$

Da e_1 und l_1 frei von Polen sind, so auch a_3. Durch den Säkularteil von e_1 werden auch Säkularglieder in $\dot a_3$ bei passender Wahl der Argumente von $R_{\varepsilon e \varepsilon}$ und l_1 herbeigeführt, wobei die Argumente beider Faktoren in Bezug auf $\tilde\omega$ u. $\tilde\omega'$ von einander verschieden sein müssen, weil der erste Faktor eine Cos-Reihe, l_1 aber eine Sinus-Reihe ist. Da ferner auf Grund der Gleichungen (1), wenn im 2. Gliede rechter Hand von $\dot\varepsilon_1$ eine Potenzentwickelung nach e erfolgt und nur das Hauptglied mitgenommen und ferner $\dot\rho$ gebildet wird, $\dot\varepsilon_1$ und $\dot\rho_1$ die Form erhalten:

Ya que e_1 y l_1 están libres de polos lo mismo sucede con a_3. Por la parte secular de e_1 se producen términos seculares en a_3 si se eligen convenientemente los argumentos de $R_{\varepsilon e \varepsilon}$ y l_1; dichos argumentos deben ser distintos respecto de $\tilde\omega$ y $\tilde\omega'$, porque el primer factor es una serie de cosenos y l_1 una serie de senos. Obtendremos ahora para $\dot\varepsilon_1$ y $\dot\rho_1$ basándonos en las ecuaciones (1), previo desarrollo del 2° término del 2° miembro de $\dot\varepsilon_1$ en series de potencias de e, considerando sólo el término principal, y previo cálculo de $\dot\rho$, las siguientes expresiones:

$$\dot\varepsilon_1 = -\frac{2\sqrt{a}}{K} R_a + \frac{1}{2} e R_e$$

$$\dot\rho_1 = -\frac{1}{2}\frac{n}{a} a_1 = -\frac{3}{a^2}\int R_\varepsilon dt.$$

so folgt, dass alle Terme $\dot{\varepsilon}_1$ und $\dot{\rho}_1$ vom gleichen Grade in Bezug auf die Exzentrizitäten sind, falls ein beliebiger von e und zugleich auch von l abhängiger Term aus R herausgenommen wird; ist das ausgewählte Glied von ε unabhängig, so wird $\dot{\rho}_1 = 0$.

Es decir, todos los términos $\dot{\varepsilon}_1$ y $\dot{\rho}_1$ son del mismo grado respecto de las excentricidades, siempre que se tome de R cualquier término dependiente de e y al mismo tiempo de l; si el término elegido es independiente de ε, resulta : $\dot{\rho}_1 = 0$.

Da der säkulare Teil von e_1 notwendigerweise mit e' als Faktor behaftet ist, können hier von den Exzentrizitäten unabhängige Glieder in den säkularen t^2-Gliedern nicht auftreten.

Ya que la parte secular de e_1 debe contener necesariamente e' como factor, no pueden formarse en los términos seculares en t^2 términos independientes de las excentricidades.

Geht man zuerst von Gliedern 0. Grades in l_1 aus, sodaß

Partiendo primeramente de términos de grado 0 en l_1, de modo que

$$l_1 = \varepsilon_1 + \rho_1 = \sin i\,(l' - l),$$

so muß $R_{\varepsilon ee}$ aus

debemos calcular $R_{\varepsilon ee}$ de

$$R = e\,.\,e' \cos\left[i\,(l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}\right]$$

entnommen werden, sodaß folglich :

de manera que :

$$s\,(R_{\varepsilon e \varepsilon} l_1) = e' \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}),$$

also :

es decir :

$$p_{12}(a_3) = e'^2 \sin^2(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\,.\,t^2.$$

Wählt man jetzt einen Term ersten Grades zur Bestimmung von l_1 aus, so muß, wenn R in Bezug auf $R_{\varepsilon e \varepsilon}$ ebenfalls vom geringstmöglichen Grade 1 gewählt werden soll, notwendig gesetzt werden :

Eligiendo ahora un término de 1er grado para la determinación de l_1, hay que poner necesariamente, si para el cálculo de $R_{\varepsilon e \varepsilon}$ R debe elegirse también del menor grado posible (1) :

$$R = e' \cos\left[i\,(l' - (i - 1)\,l - \tilde{\omega}'\right),$$

sodaß

de manera que

$$l_1 = e' \sin\left[il' - (i - 1)\,l - \tilde{\omega}'\right];$$

dann darf in Bezug auf $R_{\varepsilon e \varepsilon}$ gewählt werden :

Eligiendo ahora :

$$R = e \cos\left[il' - (i - 1)\,l - \tilde{\omega}\right],$$

sodaß

resulta

$$R_{\varepsilon e \varepsilon} = \cos\left[il' - (i - 1)\,l - \tilde{\omega}\right]$$

und deshalb :

y por tanto :

$$s(a_3) = e'^2 \sin^2(\tilde\omega' - \tilde\omega) \cdot t^2.$$

Wäre in Bezug auf l_1 der Term

Si se calculara l_1 del término

$$R = e \cos[il' - (i-1)l - \tilde\omega]$$

gewählt werden, so hätte

resultaría

$$l_1 = e \sin[il' - (i-1)l - \tilde\omega)$$

nur mit einem Term 3. Grades in R bezüglich $R_{\varepsilon e \varepsilon}$ kombiniert werden können, sodass alsdann in a_3 Terme 4. Grades entstanden wären. Wir können deshalb nun zum nächsten Gliede in a_3 übergehen :

y $R_{\varepsilon e \varepsilon}$ debería calcularse de un término de 3er grado por lo menos en e de R, de modo que en a_3 resultarían términos de 4° grado. Por tanto, podemos considerar el término que sigue en a_3 :

$$p_{13}(\dot a_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon e\tilde\omega} e_1 \tilde\omega_1.$$

Da $\tilde\omega_1$ einen Pol $e = 0$ besitzt, Ferner $R_{\varepsilon e\tilde\omega}$ mindestens vom Grade e^0, und e_1 polfrei ist, so enthält $p_{13}(\dot a_3)$ Pole $e = 0$. Da ferner sowohl e_1 wie $\tilde\omega_1$ mit einem Säkulargliede in t behaftet ist, so folgt aus dem Produkt

Ya que $\tilde\omega_1$ contiene el polo $e = 0$, y además $R_{\varepsilon e\tilde\omega}$ es por lo menos de grado e^0 y e_1 carece de polos, $p_{13}(\dot a_3)$ posee el polo $e = 0$. Puesto que e_1 lo mismo que $\tilde\omega_1$ contiene un término secular en t, el producto

$$e_1 \cdot \tilde\omega_1 = [p(e_1) + s(e_1)][p(\tilde\omega_1) + s(\tilde\omega_1)]$$

daß Poisson-Glieder nur durch die Terme

contendrá términos de Poisson sólo por la suma

$$s(e_1)p(\tilde\omega_1) + s(\tilde\omega_1)p(e_1)$$

entstehen und zu t^2-Gliedern in a_3 führen können. Die anderen Produkt-Glieder in $e_1 \cdot \tilde\omega_1$ führen nur zu Konstanten, periodischen oder t^2-Gliedern, also in a_3 zu säkularen t^1-Gliedern und Poisson-Gliedern der Form : $t^2 \cdot \sin A$, $t \cdot \cos A$, und zu periodischen Gliedern.

Da $p(\tilde\omega_1)$ eine Sinusreihe, $p(e_1)$ aber eine Cosinusreihe darstellt wie auch $R_{\varepsilon e\tilde\omega}$, so müssen die Argumente der Faktoren in dem Produkt $R_{\varepsilon e\tilde\omega}\, p(\tilde\omega_1)$ in Bezug auf $\tilde\omega$ und $\tilde\omega'$ verschieden gewählt werden, während, sie in $R_{\varepsilon\tilde\omega e} p(e_1)$ auch gleich sein können.

que puede dar en a_3 términos en t^2. Los otros términos del producto $e_1 \cdot \tilde\omega_1$ nos dan únicamente términos constantes, periódicos o en t^2 ; es decir, que en a_3 producen términos seculares en t^1, términos de Poisson de la forma : $t^2 \cdot \operatorname{sen} A$, $t \cdot \cos A$, y términos periódicos.

Representando $p(\tilde\omega_1)$ una serie de senos y $p(e_1)$ una serie de cosenos lo mismo que $R_{\varepsilon e\tilde\omega}$, hay que elegir los argumentos de los factores del producto $R_{\varepsilon e\tilde\omega} p(\tilde\omega_1)$ distintos en $\tilde\omega$ y $\tilde\omega'$ mientras que en $R_{\varepsilon\tilde\omega e} p(e_1)$ dichos argumentos pueden ser iguales.

Setzen wir zuerst zwecks Ableitung von e_1 in die entsprechende Differentialgleichung

Si ponemos, a fin de poder deducir e_1, en su correspondiente ecuación diferencial

$$R = e \cos [il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}],$$

sodaß

de modo que

$$p(e_1) = \cos [il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}],$$

so ist unter Beibehaltung desselben R auch für $R_{\varepsilon e \tilde{\omega}}$ der Säkularteil:

resulta, conservando el mismo R también para $R_{\varepsilon e \tilde{\omega}}$, la parte secular siguiente:

$$s [R_{\varepsilon e \tilde{\omega}} s (\tilde{\omega}_1) p (e_1)] = \frac{\alpha e + \beta e'}{e} \cdot t$$

sodaß folglich:

luego:

$$p_{13}(a_3) = \alpha t^2 + \beta \frac{e'}{e} t^2,$$

d. h. neben einem Polglied erscheint auch ein von den Exzentrizitäten unabhängiger Term.

es decir, junto a un término con polo aparece un término independiente de las excentricidades.

In dem korrespondierenden Gliede, abhängig vom Produkte $s(e_1) \cdot p(\tilde{\omega}_1)$ tritt ein Glied minimalsten Grades ein, wenn zur Erzwingung eines Gliedes o. Grades in $p(\tilde{\omega}_1)$ substituiert wird:

En el otro término del producto $s(e_1) \cdot p(\tilde{\omega}_1)$ aparece un término de grado mínimo, si para obtener un término de grado o en $p(\tilde{\omega}_1)$, se substituye:

$$R = e^2 \cdot \cos i (l' - l),$$

sodaß $\tilde{\omega}_1 = \sin i (l' - l)$; dann ist folglich in Bezug auf $R_{\varepsilon e \tilde{\omega}}$:

de manera que $\tilde{\omega}_1 = \operatorname{sen} i (l' - l)$; hay que poner entonces para el cálculo de $R_{\varepsilon e \tilde{\omega}}$:

$$R = e \cdot e' \cos [i (l' - l) + \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}]$$

zu setzen, sodaß:

de manera que:

$$s [R_{\varepsilon e \tilde{\omega}} s (e_1) p (\tilde{\omega}_1)] = e'^2 \cdot t \sin^2 (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$$

und deshalb:

y por tanto:

$$p_{13}(a_3) = e'^2 \cdot t^2 \sin^2 (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}).$$

Wird zur Ableitung von $p(e_1)$ ein Term 2. Grades in R gewählt, sodaß:

Si para la deducción de $p(e_1)$, escogemos un término de 2° grado en e, de manera que sea:

$$R = e^2 \cos [il' - (i - 2) l - 2\tilde{\omega}]$$

so ist $p(e_1) = e \cos \mathrm{A}$; analog folgt mit demselben A und einem weiteren analogen Gliede mit $\mathrm{A}' = = il' - (i-2)\,l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}$: $\mathrm{R}_{\varepsilon e\tilde{\omega}} = e\cos\mathrm{A} + e'\cos\mathrm{A}'$, sodaß schliesslich:

tendremos: $p(e_1) = e\cos\mathrm{A}$; análogamente se obtiene con el mismo A y otro término análogo $\mathrm{A}' = = il' - (i-2)\,l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}$, $\mathrm{R}_{\varepsilon e\tilde{\omega}} = e\cos\mathrm{A} + e'\cos\mathrm{A}'$, y finalmente:

$$p_{13}(a_3) = (\alpha e + \beta e)\,(e + e'\cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}))\,.\,t^2.$$

Setzt man zur Ableitung des korrespondierenden Gliedes in Bezug auf $\tilde{\omega}$:

Si ponemos para la deducción del término correspondiente en $\tilde{\omega}$

$$\mathrm{R} = ee'\cos\mathrm{A} \qquad \text{wo} \qquad \mathrm{A} = i(l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}$$

sodaß $\tilde{\omega}_1 = \dfrac{e'}{e}\sin\mathrm{A}$, so wird mit Hilfe des neuen

de manera que $\tilde{\omega}_1 = \dfrac{e'}{e}\sin\mathrm{A}$, resulta, con ayuda del nuevo:

$$\mathrm{R} = ee'\cos[i(l' - l) + \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}]:$$

$$s\,[\mathrm{R}_{\varepsilon e\tilde{\omega}}\,s(e_1)\,p(\tilde{\omega}_1)] = \frac{e'^2}{e}\sin(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega})\,.\,\sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\,t,$$

sodaß folglich:

y por tanto:

$$p_{13}(a_3) = \frac{e'^3}{e}\,t^2\,.\,\sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\sin 2\,(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}).$$

Ist $p(\tilde{\omega}_1)$ mit einem Pol behaftet, wenn nämlich

Si $p(\tilde{\omega}_1)$ está afectado de un polo, siendo

$$\mathrm{R} = e\cos[il' - (i-1)\,l - \tilde{\omega}]$$

sodaß

de manera que

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{1}{e}\sin[il' - (i-1)\,l - \tilde{\omega}],$$

so muß $\mathrm{R}_{\varepsilon e\tilde{\omega}}$ aus einem Term 3. Grades entnommen werden, nämlich:

debe calcularse $\mathrm{R}_{\varepsilon e\tilde{\omega}}$ de un término de 3^er grado, es decir:

$$\mathrm{R} = e^2 e'\cos[il' - (i-1)\,l - 2\tilde{\omega} + \tilde{\omega}'];$$

alsdann wird der Säkularteil

la parte secular será, pues

$$s\,[\mathrm{R}_{\varepsilon e\tilde{\omega}}\,p(\tilde{\omega}_1)] = e'\sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}),$$

sodaß:

de manera que:

$$s\,[p(a_3)] = e'^2 t^2 \sin^2(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}).$$

Wird $\tilde{\omega}_1$ aus einem Term 2. Grades entnommen, indem

Si se deduce $\tilde{\omega}_1$ de un término de 2° grado, poniendo

$$R = e^2 \cos [il' - (i - 2) l - 2\tilde{\omega}],$$

sodaß

de manera que

$$\tilde{\omega}_1 = \sin [il' - (i - 2) l - 2\tilde{\omega}],$$

so muß $R_{\varepsilon e \tilde{\omega}}$ folgen mittels

debe obtenerse $R_{\varepsilon e \tilde{\omega}}$ por medio de

$$R = e \,.\, e' \cos [il' - (i - 2) l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}];$$

dann wird

de donde

$$s [R_{\varepsilon e \tilde{\omega}} p (\tilde{\omega}_1)] = e' \sin (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}),$$

also

y por tanto

$$s (p_{13} (a_3)) = e'^2 \sin^2 (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \,.\, t^2.$$

Wird weiter $\tilde{\omega}_1$ mittels

Si se obtiene $\tilde{\omega}_1$ por medio de

$$R = e \,.\, e' \cos [il' - (i - 2) l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}]$$

entnommen, sodaß

de manera que

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{e'}{e} \sin [il' - (i - 2) l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}],$$

so muß $R_{\varepsilon e \tilde{\omega}}$ folgen mittels

debe calcularse $R_{\varepsilon e \tilde{\omega}}$ por medio de

$$R = e^2 \,.\, \cos [il' - (i - 2) l - 2\tilde{\omega}],$$

sodaß alsdann:

luego:

$$s [R_{\varepsilon e \tilde{\omega}} p (\tilde{\omega}_1)] = e' \sin (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}),$$

also:

y, por consiguiente:

$$s [p_{13} (a_3)] = e'^2 \,.\, \sin^2 (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \,.\, t^2.$$

Entnehmen wir R in Bezug auf $p (e_1)$ aus

Si calculamos $p (e_1)$ por medio de

$$R = e \,.\, e' \cos [i (l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}],$$

sodaß

obtendremos

$$p (e_1) = e' \cos [i (l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}],$$

so folgt mittels desselben R: y mediante el mismo R resulta:

$$R_{\varepsilon e\tilde{\omega}} = e' [il' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega})];$$

folglich wird: por tanto:

$$s [R_{\varepsilon e\tilde{\omega}} p(e_1)] = e'^2,$$

folglich y

$$s(p_{13}(a_3)) = e'^2 . \frac{\varkappa e + \beta e'}{e} \cdot t^2,$$

behaftet mit einem Pole $e = 0$. está afectado del polo $e = 0$.

Schliesslich bleibt zur Erledigung der Glieder 2. Grades noch die Ableitung von $p(e_1)$ aus Si finalmente deducimos $p(e_1)$ de

$$R = ee' \cos [il' - (i - 2) l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}],$$

sodaβ, wenn $R_{\varepsilon e\tilde{\omega}}$ entnommen wird aus: último término de 2° grado y sacamos $R_{\varepsilon e\tilde{\omega}}$ de:

$$R = e . e' \cos [il' - (i - 2) l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + e^2 \cos [il' - (i - 2) l - 2\tilde{\omega}],$$

folgt: resulta:

$$s [R_{\varepsilon e\tilde{\omega}} p(e_1)] = e'^2 + e . e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega});$$

folglich ist dann: de donde:

$$s [p_{13}(a_3) = (\varkappa e + \beta e') \left(\frac{e'^2}{e} + e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\right) \cdot t^2.$$

Das nächste Glied in $\dot{a}_3$ lautet: El término siguiente de a_3 es:

$$p_{14}(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}} \cdot l_1 \tilde{\omega}_1 .$$

Der Pol $e = 0$ von $\tilde{\omega}_1$ wird durch den Faktor e von $R_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}}$ ausgeglichen, sodass $p_{14}(a_3)$ frei von Polen ist. Da ferner $R_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}}$ wie l_1 Sinus-Reihen sind und nur $\tilde{\omega}_1$ ein Säkularglied enthält, so sind die Glieder aufzusuchen, die im Produkt $R_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}} . l_1$ eine Konstante ergeben; wegen der Sinus-Form beider Faktoren dürfen die Argumente sowohl gleich als auch verschieden in Bezug auf $\tilde{\omega}'$ und $\tilde{\omega}$ sein.

El polo $e = 0$ de $\tilde{\omega}_1$ se elimina con el factor e de $R_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}}$, de modo que $p_{14}(a_3)$ queda libre de polos. Ya que, además, $R_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}}$ y l_1 son series de senos, y sólo $\tilde{\omega}_1$ contiene un término secular, hay que buscar los términos que dan una constante en el producto $R_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}} . l_1$; pero por ser senos los dos factores, los argumentos pueden ser iguales o distintos en $\tilde{\omega}'$ y $\tilde{\omega}$.

In dem Produkte $R_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}} l_1$ wird der niedrigste Grad erreicht, wenn in die Differentialgleichung für l_1 nach (1) substituiert wird :

Para lograr el grado más bajo del producto $R_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}} l_1$, pongamos en la ecuación diferencial de l_1 :

$$R = e \cos [il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}],$$

sodaß

de manera que

$$l_1 = e \sin [il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}]$$

und bei notwendiger Verwendung desselben R :

y aplicando el mismo R :

$$R_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}} = e \,.\, \sin [il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}];$$

dann wird folglich

por tanto resulta

$$s \,(R_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}} \,.\, l_1) = e^2$$

und deshalb

y

$$s \,[p_{11} (a_3)] = e \,(\varkappa e + \beta e') \, t^2.$$

Wird zur Erzielung eines Gliedes 0. Grades in l_1 gesetzt : $R = \cos i (l' - l)$, sodass $l_1 = \sin \,.\, i (l' - l)$, so muß in Bezug auf $R_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}}$ gesetzt werden :

Para lograr un término de l_1 de grado 0, pongamos : $R = \cos i (l' - l)$, de suerte que $l_1 = \operatorname{sen} i (l' - l)$; luego se debe deducir $R_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}}$ por:

$$R = e \,.\, e' \cos [i (l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}]$$

dann wird

de donde

$$s \,(R_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}} \,.\, l_1) = e \,.\, e' \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}),$$

also

y

$$s \,(p_{11} (a_3)) = e' (\varkappa e + \beta e') \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \,.\, t^2.$$

Wird im Anschluss an den ersten Fall l_1 aus der zweiten noch möglichen Form 1. Grades von R entnommen, nämlich aus :

De la 2ª forma posible de 1ᵉʳ grado de R, es decir :

$$R = e' \cos [il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}'],$$

sodaß

podemos obtener análogamente la siguiente expresión para l_1 :

$$l_1 = e' \sin [il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}',$$

so muß in Bezug auf $R_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}}$ sein :

y para calcular $R_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}}$ debe ser :

$$R = e \,.\, \cos [il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}],$$

sodaß :

de modo que :

$$s\,(R_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}} \,.\, l_1) = e \,.\, e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}),$$

also :

y por tanto :

$$s\,[p_{14}(a_3)] = e'(\alpha e + \beta e') \,.\, t^2 \,.\, \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}).$$

Wird l_1 aus einem Terme 2. Grades gewonnen, sodaß $R = e^2 \cos i\,(l' - l)$, so wird : $l_1 = e^2 \,.\, \sin i\,(l' - l)$; folglich muß in Bezug auf $R_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}}$ gewählt werden :

Si se saca l_1 de un término de 2° grado, de manera que $R = e^2 \cos i\,(l' - l)$, resulta $l_1 = e^2 \,.\, \mathrm{sen}\; i\,(l' - l)$; entonces debe escogerse para calcular $R_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}}$:

$$R = e \,.\, e' \cos\left[i\,(l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}\right];$$

dann wird folglich :

de donde

$$s\,(R_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}} \,.\, l_1) = e^3 \,.\, e' \,.\, \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}),$$

also

$$s\,(p_{14}(a_3)) = e^2 e' t^2 (\alpha e + \beta e') \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$$

sodass also von nun ab Glieder höher als vom 2. Grade erhalten werden.

Das nächste Glied in $\dot{a}_3$ lautet nach (5) :

de modo que desde ahora resultarán términos de un grado mayor al segundo.

El término siguiente de $\dot{a}_3$ se expresa según (5) :

$$p_{15}(\dot{a}_3) = \frac{\sqrt{a}}{K} \cdot \frac{1}{a} R_{\varepsilon a} a_1^2;$$

es enthält keine Pole und in den Faktoren auch keine der Zeit t proportionalen Säkularglieder, sodaß auch Keine säkularen t^2-Glieder in a_3 möglich sind. Deshalb können wir sogleich zum nächsten Term in (5) übergehen :

no contiene polos ni términos seculares en t^2; de manera que tampoco son posibles términos seculares.

Por eso podemos ahora tratar el término siguiente en (5) :

$$p_{16}(\dot{a}_3) = \frac{\sqrt{a}}{K} \cdot \frac{1}{a} \cdot R_{\varepsilon} \cdot a_2.$$

Da a_2 Poisson-Glieder enthält, sind im Produkte mit R_ε reine Säkularglieder in t^1, in $\dot{a}_3$, also auch t^2-Glieder möglich. Da a_2 nach (6) eine lineare Funktion von a_1, e_1, l_1 und $\tilde{\omega}_1$ ist, wobei die Koeffizienten periodische Funktionen der Längen l und l' sind, so entstehen Poisson-Glieder in a_2 nur in den mit den Koeffizienten e_1 und $\tilde{\omega}_1$ behafteten Gliedern, wenn

Ya que a_2 contiene términos de Poisson, son posibles en el producto de a_2 por R_ε términos seculares puros en t^1, por eso pueden existir en a_3 términos en t^2. Siendo a_2 según (6) una función lineal de a_1, e_1, l_1 y $\tilde{\omega}_1$, cuyos coeficientes son funciones periódicas de las longitudes l y l', resultan términos de Poisson en a_2, sólo en los términos que contienen von den letzteren nur die säkularen Teile berücksichtigt werden. Folglich sind nur die folgenden Teile zu berücksichtigen :

los coeficientes e_1 y $\tilde{\omega}_1$, considerando en los recién mencionados únicamente las partes seculares. Por eso tomamos en cuenta sólo las partes siguientes :

$$\dot{a}_2 = \frac{2\sqrt{a}}{K}(R_{\varepsilon e} \cdot e_1 + R_{\varepsilon\tilde{\omega}}\tilde{\omega}_1), \quad \text{wo} \quad e_1 = e' \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \cdot t \quad \text{und} \quad \tilde{\omega}_1 = \frac{\alpha e + \beta e'}{e} \cdot t.$$

Folglich entstehen Terme niedrigsten Grades, wenn $R_{\varepsilon e}$ aus

Por eso resultan términos de menor grado, sacando $R_{\varepsilon\varepsilon}$ de

$$R = e \cdot \cos A_1, \quad \text{wo} \quad A_1 = il' - (i-1)l - \tilde{\omega},$$

entnommen wird, sodass

luego

$$P(a_2) = \int R_{\varepsilon e} e_1 \cdot dt = e' \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \cdot t \cdot \cos A_1;$$

also muss

por tanto

$$R_\varepsilon \text{ aus } R = e' \cdot \cos A_2, \quad \text{wo} \quad A_2 = il' - (i-1)l - \tilde{\omega}')$$

entnommen werden, sodass folglich :

de manera que :

$$s[p_{16}(a_3)] = e'^2 \sin^2(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \cdot t^2.$$

Wird jetzt umgekehrt R_ε ein Term o. Grades anstelle von $R_{\varepsilon e}$, indem

Calculando inversamente R_ε de un término de grado o, resulta

$$R_\varepsilon = \sin A_2, \quad \text{wo} \quad A_2 = i(l' - l),$$

so muß $R_{\varepsilon e}$ aus

en cuyo caso $R_{\varepsilon e}$ debe obtenerse de

$$R = e \cdot e' \cos A_1, \quad \text{wo} \quad A_1 = i(l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}$$

entnommen werden; dann wird zunächst

resultando pues :

$$p(a_2) = e'^2 \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\, t \cdot \cos A_1;$$

folglich wird weiter :

y además :

$$s[p_{16}(a_3)] = e'^2 \cdot t^2 \cdot \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}),$$

womit alle Terme niedrigsten Grades erschöpft sind.

con lo que se han agotado todos los términos de grado más bajo.

Im 2. Teil von $\dot{a}_2$ folgt das Glied niedrigsten Grades von $R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ aus

Para obtener el término de grado más bajo de la segunda parte de $\dot{a}_2$ debe calcularse $R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ de

$$R = e \cdot \cos A_1, \quad \text{wo} \quad A_1 = il' - (i-1)l - \tilde{\omega},$$

sodaß

de modo que

$$P(R_{\varepsilon\omega\tilde{\omega}_1}) = (\alpha e + \beta e') \,.\, t \,.\, \sin A_1.$$

Folglich ist R_ε abzuleiten aus:

Por consiguiente R_ε resulta de

$$R = e \cos A_1 + e' \cos A'_1, \qquad \text{wo} \qquad A'_1 = il' - (i-1)\,l - \tilde{\omega}'.$$

Folglich wird

y por lo tanto

$$s\,(p_{16}\,(a_3)) = [\alpha e + \beta e']\,[e + e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})]\, t^2.$$

Wird endlich in Bezug auf $R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ gewählt:

Si se calcula finalmente $R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ por medio de

$$R = e \,.\, e' \,.\, \cos A_1, \qquad \text{wo} \qquad A_1 = i\,(l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega},$$

so wird

resulta

$$P\,(a_2) = (\alpha e + \beta e')\, e' t;$$

folglich ergibt sich mit $R = \cos A_2$, wo $A_2 = i\,(l' - l)$: $R_\varepsilon = \sin A_2$, also

por consiguiente R_ε se obtiene por medio de $R = \cos A_2$ y $A_2 = i\,(l' - l)$: $R_\varepsilon = \text{sen}\, A_2$, luego :

$$s\,[p_{16}\,(a_3)] = (ee' + e'^2)\, t^2 \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}),$$

sodaß immer Glieder 2. Grades zum Vorschein kommen.

Der nächste Term in $\dot{a}_3$ lautet:

de manera que siempre aparecen términos de 2° grado.

El término que sigue en $\dot{a}_3$ es :

$$p_{17}\,(\dot{a}_3) = \frac{\sqrt{a}}{K} \cdot \frac{1}{a} \cdot R_{\varepsilon e} \,.\, a_1 e_1;$$

folglich sind keine Pole $e = 0$ vorhanden. Die Form der Lösung ist dieselbe wie für $p_9\,(a_3)$, indem nur anstelle von $R_{\varepsilon ae}$ in $p_9\,(\dot{a}_3)$ die Ableitung $R_{\varepsilon e}$ getreten ist, wobei die Ableitung nach a ohne Einfluß auf die Form der Lösung ist. Folglich haben die Glieder niedrigsten Grades die in $p_9\,(\dot{a}_3)$ fixierte Form:

por consiguiente, carece de polos $e = 0$. La forma de la solución es la misma que para $p_9\,(a_3)$, con sólo sustituir la derivada $R_{\varepsilon ae}$ por $R_{\varepsilon e}$, ya que la derivada respecto de a no tiene influencia en la forma de la solución. Por consiguiente, los términos de grado más bajo tienen la forma fijada en $p_9\,(\dot{a}_3)$:

$$s\,[p_{17}\,(\dot{a}_3)] = e'^2 \sin^2(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \,.\, t^2.$$

Der nächste Term in $\dot{a}_3$ ist:

El término siguiente de $\dot{a}_3$ es:

$$p_{18}\,(\dot{a}_3) = \frac{\sqrt{a}}{K} \cdot \frac{1}{a}\, R_{\varepsilon\varepsilon} \,.\, a_1 l_1;$$

aus der Eigenschaft der Faktoren folgt die Nichtexistenz von Polen $e = 0$ wie auch das Nichtauftreten von reinen t^2-Gliedern. Deshalb können wir sogleich zum nächsten Term in $\dot{a}_3$ übergehen:

de la propiedad de los factores se sigue que no existen polos $e = 0$ y que tampoco aparecen términos seculares puros en t^2. Podemos pasar a considerar inmediatamente el término siguiente:

$$p_{19}(\dot{a}_3) = \frac{\sqrt{a}}{K} \cdot \frac{1}{a} \cdot R_{\varepsilon\tilde{\omega}} a_1 \tilde{\omega}_1,$$

wo, wie im vorhergehenden Term keine Pole $e = 0$ vorhanden sind; die Form der Lösung ist dieselbe wie in $p_{11}(a_3)$, indem anstelle von $R_{\varepsilon a\tilde{\omega}}$ die Ableitung $R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ erscheint; folglich lautet die Lösung:

que, como en el caso recién considerado carece de polos; la forma de la solución es la misma que para $p_{11}(a_3)$ si se sustituye la la derivada $R_{\varepsilon a\tilde{\omega}}$ por $R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$; luego la solución es:

$$s\,[p_{19}(a_3)] = (e^2 + e\,.\,e' + e'^2)\,t^2.$$

Nunmehr kommt der letzte Term von $\dot{a}_3$:

Llegamos así al último término de $\dot{a}_3$:

$$p_{20}(\dot{a}_3) = -\frac{2\sqrt{a}}{K}\left(\frac{1}{8}\frac{1}{a^2}R_{\varepsilon}\,.\,a^2{}_1\right) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{n}{K^2}R_{\varepsilon}\,.\,a^2{}_1;$$

dieser Term enthält weder Pole $e = 0$ noch säkulare t^2-Glieder, sodaß keine weitere Untersuchung dieses letzten Termes in $\dot{a}_3$ nötig ist.

este término no contiene polos $e = 0$ ni términos seculares en t^2, de manera que no es menester ninguna investigación a su respecto.

Wie schon oben gezeigt worden ist, heben sich die mit einem Pol $e = 0$ behafteten Glieder allgemein fort, wobei wir hinzufügen konnen, daß dies zugleich für die von den Exzentrizitäten freien Glieder gilt; denn diese entstehen nur in Verbindung mit dem Säkularteil von

Como ya se demostró en general se eliminan los términos afectados por un polo $e = 0$, lo que vale también, podemos agregar, para los que están libres de términos dependientes de las excentricidades. Pues, en efecto, se forman únicamente por la combinación con la parte secular de

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{\alpha e + \beta e'}{e}\,t,$$

dessen Umformung auf

cuya transformación a la forma

$$\tilde{\omega}_1 = \left(1 + \frac{e'}{e}\right)t$$

den Term 0. Grades ersichtlich macht, der also gleichzeitig mit dem Pol $e = 0$ weggehoben wird. Schon nach obigen Darlegungen wissen wir, daß aus der Kombination mit dem Säkularteil $e_1 = e't \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$ keine Polglieder enstehen können, also auch wegen des Faktors e' niemals Glie-

pone en evidencia el término de grado 0, que se elimina simultáneamente con el polo $e = 0$. Sabemos por las explicaciones anteriores que por la combinación con la parte secular $e_1 = e't$ sen $(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$, no pueden resultar términos con polos, ni tampoco, por el factor e', términos de grado 0. Como es evider o. Grades. Wie aus der Darstellung von $\dot{a}_3$ in (5) ersichtlich und dann weiterhin ausführlich dargelegt worden ist, treten Polglieder nur in den Gliedern $p_2(\dot{a}_3)$, $p_4(\dot{a}_3)$, $p_8(\dot{a}_3)$ und $p_{13}(\dot{a}_3)$ auf. Aus der expliziten Darstellung dieser Glieder ist dann zu ersehen, wie die sämtlichen Polglieder sich wegheben, und zwar in der Weise, daß die Polglieder in p_4 sich gegen die in p_{13} und die von p_2 sich gegen die von p_8 wegheben. Auch auf Grund der Zusammensetzung dieser Glieder findet man in Verbindung mit einem Vergleich der Diffesenziationen nach den entsprechenden Elementen die entgegengesetzte Gleichheit der Glieder in p_2 und p_8, resp. in p_4 und p_{13}. Aber nach dem allgemeinen Beweise kann dieser spezielle Beweis übergangen werden.

dente por la representación de $\dot{a}_3$ en (5) y como se explicó precedentemente sólo resultan términos con polo en los $p_2(\dot{a}_3)$, $p_4(\dot{a}_3)$, $p_8(\dot{a}_3)$ y $p_{13}(\dot{a}_3)$. Por la representación explícita de estos términos es posible ver cómo se opera la eliminación de los términos con polo, de tal modo que los de p_4 se eliminan con los de p_{13} y los de p_2 con los de p_8. En base a la composición de estos términos y por comparación de las derivadas respecto de los elementos correspondientes se halla que los términos p_2 y p_8 son iguales y de signo contrario, y análogamente p_4 y p_8. Pero después de la demostración general se puede prescindir de esta comprobación especial.

Aus der Analyse anderer Glieder in $\dot{a}_3$ kann man ferner zeigen, daß sich noch andere säkulare Teile von $\dot{a}_3$ gegenseitig zerstören, auch wenn es sich nicht um Glieder mit Polen $e = 0$ handelt. Ich greife $p_1(\dot{a}_3)$ und $p_{12}(\dot{a}_3)$ als Beispiel heraus, also:

Del análisis de otros términos de $\dot{a}_3$ se puede demostrar, además, que se eliminan aún otras partes seculares, si bien no se trata de términos con los polos $e = 0$. Destacaremos como ejemplo $p_1(\dot{a}_3)$ y $p_{12}(\dot{a}_3)$ es decir:

$$p_1(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon a} \cdot a_2, \quad \text{wo} \quad \dot{a}_2 = \frac{2\sqrt{a}}{K} [R_{\varepsilon e} \cdot e_1 + R_{\varepsilon \tilde{\omega}} \cdot \tilde{\omega}_1]$$

und

y

$$p_{12}(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon e e} \cdot l_1 \cdot e_1,$$

wo l_1 aus (1) zu ersehen ist.

Wird $R_{\varepsilon a}$ in p_1 aus $R = \cos A$ wo $A = i(l' - l)$ d. h. einem Term o. Grades, entnommen, so möge, um die Möglichkeit zum Wegheben von Termen zu erhalten R_a in l_1 aus demselben R hervorgehen; dann aber muß $R_{\varepsilon e}$ in p_1 aus $R = ee' \cos A'$, wo $A' = i(l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}$, entnommen werden, ebenso wie $R_{\varepsilon e \varepsilon}$ in p_{12}. Die Differentiationen nach ε erfolgen in p_1 wie p_{12} zweimal, wobei das Argument in Bezug auf ε beidemal dasselbe ist, sodaß dadurch der entstehende Faktor derselbe wird, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen, sodaß entsteht:

donde l_1 está definido por (1).

Si se calcula el factor $R_{\varepsilon a}$ que aparece en p_1, del término $R = \cos A$, donde $A = i(l' - l)$ término que es de grado cero, será necesario, para que sea posible la eliminación de términos, calcular el factor R_a de l_1 del mismo R; pero entonces deberá obtenerse $R_{\varepsilon e}$ de la expresión $R = ee' \cos A'$, donde $A' = i(l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}$, y del mismo término el factor $R_{\varepsilon e \varepsilon}$ que aparece en p_{12}. Las derivadas respecto de ε aparecen dos veces en p_1 y p_{12}; el argumento respecto de ε es el mismo en ambos casos, de manera que los factores que resultan son iguales, pero de signo contrario. Luego resulta:

$$p_1(\dot{a}_3) = -e't \sin\Lambda \cos\Lambda'$$

$$p_{12}(\dot{a}_3) = +e't \cos\Lambda \sin\Lambda',$$

sodaß also die Summe dieser säkularen Glieder verschwindet. Die übrigen Glieder heben sich nicht weg, wobei das aus $R_{\varepsilon\tilde{\omega}} \cdot \tilde{\omega}_1$ entstehende Glied frei von einem Pole ist, weil $R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ den Faktor e enthält. Endlich verbleibt noch in p_{12} der in $\dot{l}_1$ auftretende Term $e \cdot R_e$, aus dem aber keine sich weghebenden Glieder, folgen.

Die Gesamtheit der säkularen t^2-Glieder in a_3 ist nun in der weiter unten folgenden Liste zusammengestellt, gemäß dem in diesem Paragraphen dargelegtem Verfahren zur Ableitung der Säkularglieder aus allen $p_i(a_3)$, wo $i = 1, 2...$ bis 20. Zur Ableitung der Koeffizienten dieser Glieder sei das Folgende bemerkt· Da alle p_i als Störungen der großen Achse a dieser proportional sein müssen, wurden die sich unmittelbar ergebenden Koeffizienten immer so umgeformt, daß die Achse a als allgemeiner Proportionalitätsfaktor in Erscheinung tritt; das wurde dadurch erreicht, daß die Gaußsche Konstante k^2 mittels des 3. Keplerschen Gesetzes umgeformt wurde mittels : $k^2(1+m) = a^3n^2$. Die dann, abgesehen vom Proportionalitätsfaktor a^1, verbleibende Potenz a^2 dient dazu, erstens die Nennerfaktoren von a aufzuheben und zweitens dazu, die sämtlichen von den Laplaceschen Transcendenten abhängenden Koeffizienten der Störungsfunktion wie ihre Aleitungen nach a auf die Dimension o zu bringen, und zwar jeden Koeffizienten für sich. Von den Potenzen von n dient n^2 als Koeffizient von t^2 in a_3, da die Säkularstörungen tatsächlich nur von der Längenänderung, also von nt resp. n^2t^2 abhängig sind Die restlichen Potenzen von n bewirken, daß die bei der Integration der periodischen und der Poisson-Glieder entstehenden Divisoren der Form $\alpha n + \beta n'$ mit den n-Faktoren einen rationalen Bruch bilden, der, von den Absolutwerten von den n und n' unabhängig, nur von dem Verhältnis der mittleren Bewegungen abhängen kann.

de suerte que se anula la suma de estos términos seculares. Los otros no se eliminan ; el término que resulta de $R_{\varepsilon\tilde{\omega}} \cdot \tilde{\omega}_1$ carece de polo porque $R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ contiene el factor e. Finalmente, resta todavía en p_{12} el término $e \cdot R_\varepsilon$ que aparece en $\dot{l}_1$, y que no puede eliminarse con términos de p_1.

La totalidad de los términos seculares en t^2 de a_3 puede verse en el grupo de fórmulas que se inserta más adelante, formada según el procedimiento explicado en este párrafo al tratar la deducción de los términos seculares de todos los $p_i(\dot{a}_3)$, siendo $i = 1, 2...$ hasta 20. Con referencia a la deducción de los coeficientes de estos términos debemos agregar lo siguiente. Ya que todos los p_i, como perturbaciones del semieje mayor a, deben ser proporcionales a éste, los coeficientes resultantes se transformaron siempre de tal modo que a apareciera en todos los casos como factor general ; esto se ha logrado, transformando k^2 (constante de Gauss) por medio de la tercera ley de Kepler : $k^2(1+m) = a^3n^2$. Prescindiendo del factor general a^1, resta todavía el factor a^2 que se emplea primero para compensar los factores a en los denominadores, y segundo para reducir a la dimensión o cada uno de los coeficientes de la función perturbadora que dependen de las transcendentes de Laplace y de sus derivadas respecto de a. Con referencia a las potencias de n, se emplea n^2 como coeficiente de t^2 en a_3, porque las perturbaciones seculares dependen sólo de la variación de la longitud, es decir de nt o de n^2t^2. Las potencias restantes de n forman con los divisores $\alpha n + \beta n'$ que resultan de la integración de los términos periódicos y de los de Poisson una fracción racional independiente de los valores absolutos de n y n', y sólo dependiente de la razón de los movimientos medios.

Die Säkularglieder von e_1 und $\tilde{\omega}_1$ sind in der folgenden ebenfalls der Länge nt proportionalen Form angesetzt worden, indem, wie schon oben: $e_1 = \bar{e}_1\, nt$ und $\tilde{\omega}_1 = \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e}\, nt$, wobei die Koeffizienten in 1. Näherung linear in den Exzentrizitäten sind, und zwar $\bar{e}_1$ linear in e' und $\tilde{\omega}_1$ linear in e und e'. Ferner ist bezüglich der Verwendung und Bezeichnung der in der Störungsfunktion auftretenden Koeffizienten A_i, B_i, etc., zu beachten, daß sie alle homogene Funktionen vom -1. Grade in a und a' sind, sodaß $a \,.\, A_i$, $a \,.\, B_i$, etc., homogene Funktionen vom 0. Grade werden, die nur von dem Verhältnis $\frac{a}{a}$, abhängig sind. Zur Vereinfachung der Darstellung wurden die folgenden Abkürzungen gewählt:

Los términos seculares de e_1 y $\tilde{\omega}_1$ también proporcionales a la longitud nt, han sido representados como antes en la forma siguiente $e = \bar{e}_1 \,.\, nt$, y $\tilde{\omega}_1 = \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e}\, nt$, siendo los coeficientes en la primera aproximación, lineales en las excentricidades, a saber $\bar{e}_1$ lineal en e' y $\tilde{\omega}_1$ en e y e'. Además, con referencia al uso y designación de los coeficientes A_i, B_i, etc., de la función perturbadora, es de observar que todos ellos son funciones homogéneas de grado -1 en a y a', luego $a \,.\, A_i$, $a \,.\, B_i$, etc., son funciones homogéneas de grado 0 dependientes sólo del cociente $\frac{a}{a}$. Para simplificar la representación elegimos las abreviaturas siguientes:

$$a \,.\, A_i = \bar{A}_i, \qquad a \,.\, B_i = \bar{B}_i, \text{ etc.};$$

analog wurden für die Differentialquotienten der A_i, B_i, etc., nach a, da diese Ableitungen homogene Funktionen vom -2. Grade sind, die folgenden Abkürzungen eingeführt:

análogamente adoptamos las siguientes abreviaturas para las derivadas de los A_i, B_i, etc., respecto de a, siendo estas derivadas funciones de grado -2:

$$a^2 \cdot \frac{\partial A_i}{\partial a} = \bar{A}_{ia}, \qquad a^2 \cdot \frac{\partial B_i}{\partial a} = \bar{B}_{ia}, \text{ etc.}$$

Der Koeffizient A_i ohne Angabe eines Argumentes bedeutet stets die Abhängigkeit nur von a und a'. Ist aber A_i, B_i, etc., von a'', a''', etc., abhängig, so wird das Argument durch Akzente angedeutet, sodaß im ersten Falle A''_i, ferner A'''_i, etc., geschrieben wird, während a unverändert das andere Argument fixiert. Ferner wird dann, analog dem obigen Verfahren: $a \,.\, A''_i = A'''_i$, etc. Ebenso entsteht für die Differentialquotienten die folgende Bezeichnung:

El coeficiente A_i sin indicación de argumento, significa siempre la dependencia de a y a' solamente. Pero si A_i, B_i, etc., dependen de a y a'', o a y a''', etc., el argumento se fijará por acentos, o sea en el primer caso se escribe A''_i, en el segundo A'''_i, etc.; además pondremos análogamente $aA''_i = A'''_i$, etc. De la misma manera, para las derivadas usaremos la designación siguiente:

$$a^2 \cdot \frac{\partial A''_i}{\partial a} = \bar{A}''_{ia}, \text{ etc.}$$

Ferner ist in Bezug auf den Massenfaktor aller unten folgenden Säkularteile von a_3 zu bemerken, daß, weil stets nur e_1 oder $\tilde{\omega}_1$ als Faktor jedes ein-

Observaremos, además, con referencia al factor de las masas de todas las partes seculares de a_3, que apareciendo sólo e_1 o $\tilde{\omega}_1$ como factor de cada térzelnen Termes auftritt und die Säkularstörungen e_1 und $\tilde{\omega}_1$ der Masse m auf der Anziehung aller übrigen Planeten des Sonnensystems beruhen, die Faktoren e_1 und $\tilde{\omega}_1$ linear aus den Massen m', m'', m''', etc., zusammengesetzt sind. Im übrigen tritt infolge der Zusammensetzung aller einzelnen Glieder von a_3 aus dem Produkt von 2 Gliedern nur aus R^1 (resp. seiner Ableitungen) der gemeinsame Factor m'^2 hinzu; insgesamt ist also der gemeinsame Faktor aller Glieder von a_3: $m'^2\,(\varkappa m' + \varkappa'' m'' + \ldots)$, wobei $\varkappa$, $\varkappa''$, etc., entweder aus e_1 oder $\tilde{\omega}_1$ entstammen. Handelt es sich um die Anziehung nur einer Masse, so ist m'^3 der gemeinsame Gesamtfaktor.

Alsdann erhalten die t^2-Säkularglieder 3. Ordnung der Masse die folgende Form, immer abgesehen von dem Massenfaktor, der, wie soeben gezeigt, leicht hinzufügbar ist:

mino individualmente y correspondiendo las perturbaciones seculares e_1 y $\tilde{\omega}_1$ de la masa m a la atracción de todos los demás planetas del sistema solar, los factores e_1 y $\tilde{\omega}_1$ son funciones lineales respecto de las masas m', m'', m''', etc. Además, por el hecho de que todos los términos individuales de a_3 están formados por el producto de sólo dos términos de R^1 (es decir, de sus derivadas), figura agregado el factor común m'^2 y por consiguiente, el factor común de todos los términos de a_3 es: $m'^2\,(\varkappa m' + \varkappa'' m'' + \ldots)$, resultando los coeficientes $\varkappa$, $\varkappa''$, etc., de e_1 o $\tilde{\omega}_1$. En el caso de la atracción de una sola masa el factor común es m'^3.

Los términos seculares en t^2 del 3^er orden respecto de la masa, tienen la forma siguiente, prescindiendo siempre del factor de la masa, fácilmente asociable, como hemos demostrado:

$$\mathrm{I}\alpha \qquad s\,[p_1\,(a_3)] = +\frac{1}{4}\,a\overline{\mathrm{C}}_i\overline{\mathrm{D}}_{ia}\,\frac{(i-1)^2 n}{in'-(i-1)\,n}\cdot\frac{\bar{e}_1\,.\,e'}{(1+m)^2}\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,(nt)^2$$

$$\mathrm{I}\beta \qquad \text{»} \quad = -\frac{1}{4}\,a\overline{\mathrm{C}}_i\,\frac{(i-1)^2 n}{in'-(i-1)\,n}\cdot\frac{\bar{\tilde{\omega}}}{(1+m)^2}\left[e\overline{\mathrm{C}}_{ia}+e'\overline{\mathrm{D}}_{ia}\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\right](nt)^2$$

$$\mathrm{I}\gamma \qquad \text{»} \quad = -\frac{1}{4}\,a\,\frac{in}{n'-n}\,\overline{\mathrm{A}}_{ia}\left(\overline{\mathrm{F}}_i-\overline{\mathrm{F}}_{-i}\right)\frac{\bar{e}_1 e'}{(1+m)^2}\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,(nt)^2$$

$$\mathrm{I}\delta \qquad \text{»} \quad = +\frac{1}{4}\,a\,\frac{in}{n'-n}\,\overline{\mathrm{A}}_{ia}\left(\overline{\mathrm{F}}_i-\overline{\mathrm{F}}_{-i}\right)\bar{\tilde{\omega}}_1 e'\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,(nt)^2$$

$$\mathrm{II}\alpha \qquad s\,[p_2\,(p_3)] = -\frac{1}{16}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\left\{\overline{\mathrm{A}}_i\left(\overline{\mathrm{F}}_i-\overline{\mathrm{F}}_{-i}\right)\frac{in}{n'-n}-\overline{\mathrm{C}}_i\overline{\mathrm{D}}_i\,\frac{(i-1)^2\,.\,n}{in'-(i-1)\,n}\right.$$
$$\left.+\overline{\mathrm{E}}_i\overline{\mathrm{G}}_i\,\frac{(i-2)\,n}{in'-(i-2)\,n}+\overline{\mathrm{C}}_i\overline{\mathrm{L}}_i\,\frac{(i-1)\,n}{in'-(i-1)\,n}\right\}\bar{e}_1 e'\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,(nt)^2$$

$$\mathrm{II}\beta \qquad \text{«} \quad = +\frac{1}{8}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\frac{(i-1)\,n}{in'-(i-1)\,n}\left(\overline{\mathrm{C}}_i\right)^2\frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e}\,(nt)^2$$

$$\mathrm{II}\gamma \qquad \text{»} \quad = +\frac{1}{32}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}\,.\,n}{(1+m)^2\,(n'-n)}\left\{\left(\overline{\mathrm{F}}_i\right)^2+\left(\overline{\mathrm{F}}_{-i}\right)^2+2\overline{\mathrm{F}}_i\overline{\mathrm{F}}_{-i}\cos(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega})\right\}\frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e}\,(nt)^2$$

$$\mathrm{II}\delta \qquad \text{»} \quad = +\frac{1}{32}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\frac{(i-2)\,n}{in'-(i-2)\,n}\,\overline{\mathrm{G}}_i\left\{\overline{\mathrm{G}}_i e'+\overline{\mathrm{E}}_i e\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\right\}\frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e}\,(nt)^2$$

II ε $$s\,[p_2\,(p_3)] = +\,1\,.\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\frac{(i-2)\,n}{in'-(i-2)\,n}\,\overline{E}_i\left\{\frac{1}{8}\,\overline{G}_i e'\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) + \frac{1}{4}\,\overline{E}_i e\right\}\overline{\tilde{\omega}}_1\,(nt)^2$$

II ζ $$» \quad = +\,\frac{1}{16}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\frac{n}{n'-n}\,\overline{B}_i\left(\overline{F}_i - \overline{F}_{-i}\right)\overline{\tilde{\omega}}_1 e'\,.\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,(nt)^2$$

III α $$s\,[p_3\,(a_3)] = -\,\frac{1}{4}\,a\,\frac{\overline{D}_i}{(1+m)^2}\,(i-1)^2\left\{R_0\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) + S_0\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\right\}e'\,(nt)^2$$

$$-\,\frac{1}{4}\,a\,\frac{C_i}{(1+m)^2}\,S_0 e\,(nt)^2, \text{ wobei}$$

$$R_0 = -\left(\overline{C}_{ia} - \frac{1}{4}\sqrt{1-e^2}\,\overline{C}_i\right)\frac{\overline{e}_1 n}{in'-(i-1)\,n} - \frac{3}{2}\,\overline{C}_i\,\frac{(i-1)\,n^2}{[in'-(i-1)\,n]^2}\,\overline{\tilde{\omega}}_1$$

$$S_0 = -\left(\overline{C}_{ia} - \frac{1}{4}\sqrt{1-e^2}\,\overline{C}_i\right)\frac{n}{in'-(i-1)\,n}\cdot\overline{\tilde{\omega}}_1 + \frac{3}{2}\,\overline{C}_i\,\frac{(i-1)\,n^2}{[in'-(i-1)\,n]^2}\cdot\overline{e}_1$$

III β $$s\,[p_3\,(a_3)] = -\,\frac{1}{4}\,a\,\frac{in}{n'-n}\,\overline{A}_i\left\{\overline{F}_{ia} - \overline{F}_{-ia} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{4}\left(\overline{F}_i - \overline{F}_{-i}\right)\right.$$

$$\left.-\,\frac{3}{2}\,\frac{n}{n'-n}\left(\overline{F}_i - \overline{F}_i\right)\right\}\frac{\overline{e}_1 e'}{(1+m)^2}\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,(nt)^2$$

III γ $$» \quad = -\,\frac{1}{4}\,a\,\frac{in}{n'-n}\left\{-\,\overline{F}_{ia} + \frac{1}{4}\sqrt{1-e^2}\,\overline{F}_i + \overline{F}_{-ia} - \frac{1}{4}\sqrt{1-e^2}\,\overline{F}_{-i}\right.$$

$$\left.+\,\frac{3}{2}\,\frac{n}{n'-n}\left(\overline{F}_i - \overline{F}_{-i}\right)\right\}\frac{\overline{\tilde{\omega}}_1 e'}{(1+m)^2}\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,(nt)^2$$

IV α $$s\,[p_4\,(a_3)] = +\,\frac{1}{8}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\frac{(i-1)\,n}{in'-(i-1)\,n}\left(\overline{C}_i\right)^2\frac{\overline{\tilde{\omega}}_1}{e}\,(nt)^2$$

IV β $$» \quad = +\,\frac{1}{16}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\frac{(i-1)\,n}{in'-(i-1)\,n}\,\overline{C}_i\left\{-\,\overline{L}_i\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) - \frac{1}{2}\,\overline{M}_i\,\frac{e'}{e}\sin(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega})\right.$$

$$\left.-\,\overline{L}_i e^2\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) - \frac{1}{2}\,\overline{M}_i e e'\sin(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega})\right\}\overline{e}_1 e'\,(nt)^2$$

IV γ $$» \quad = -\,\frac{1}{16}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\frac{n}{n'-n}\,\overline{F}_i\overline{F}_{-i}\,\frac{e'^2}{e}\,\overline{e}_1\sin(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega})\,(nt)^2$$

IV δ $$» \quad = -\,\frac{1}{8}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\frac{(i-2)\,n}{in'-(i-2)\,n}\,\overline{G}_i\overline{E}_i\overline{e}_1 e'\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,(nt)^2$$

IV ε $$» \quad = +\,\frac{1}{8}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\frac{(i-2)\,n}{in'-(i-2)\,n}\,\overline{E}_i\left\{2\overline{E}_i e + \overline{G}_i e'\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\right\}\overline{\tilde{\omega}}_1\,(nt)^2$$

IVζ $$s\,[p_4\,(a_3)] = +\frac{1}{32}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\frac{(i-2)\,n}{in'-(i-2)\,n}\,\overline{G}_i\left\{2\overline{E}_i e\cos(\tilde\omega'-\tilde\omega)+\overline{G}_i e'\right\}\frac{\overline{\tilde\omega}_1}{e}\,e'\,(nt)^2$$

IVη $$» \quad = +\frac{1}{32}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\frac{n}{n'-n}\left\{(\overline{F}_i)^2+(\overline{F}_{-i})^2-2\overline{F}_i\overline{F}_{-i}\cos(2\tilde\omega'-\tilde\omega)\right\}\frac{\overline{\tilde\omega}_1}{e}\,e'^2\,(nt)^2$$

VIα $$s\,[p_6\,(a_3)] = +\frac{1}{8}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\frac{(i-1)\,n}{in'-(i-1)\,n}\,\overline{C}_i\left(-\overline{K}_i+\overline{L}_i\right)\overline{e}_1 e'\sin(\tilde\omega'-\tilde\omega)\,(nt)^2$$

VIβ $$» \quad = -\frac{1}{16}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\frac{n}{n'-n}\,\overline{B}_i\left(\overline{F}_i+\overline{F}_{-i}\right)\overline{e}_1 e'\sin(\tilde\omega'-\tilde\omega)\,(nt)^2$$

VIγ $$» \quad = +\frac{1}{16}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\frac{(i-2)\,n}{in'-(i-2)\,n}\,\overline{E}_i\overline{G}_i\overline{e}_1 e'\sin(\tilde\omega'-\tilde\omega)\,(nt)^2$$

VIIIα $$s\,[p_8\,(a_3)] = -\frac{1}{8}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\frac{(i-1)\,n}{in'-(i-1)\,n}\,(\overline{G}_i)^2\,\frac{\overline{\tilde\omega}_1}{e}\,(nt)^2$$

VIIIβ $$» \quad = -\frac{1}{16}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\frac{n}{n'-n}\,\overline{B}_i\left(\overline{F}_i-\overline{F}_{-i}\right)\overline{\tilde\omega}_1 e'\cos(\tilde\omega'-\tilde\omega)\,(nt)^2$$

VIIIγ $$» \quad = -\frac{1}{32}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\frac{n}{n'-n}\left\{(\overline{F}_i)^2+(\overline{F}_{-i})^2+2\overline{F}_i\overline{F}_{-i}\cos(2\tilde\omega'-\tilde\omega)\right\}\frac{\overline{\tilde\omega}_1}{e}\,e'^2\,(nt)^2$$

VIIIδ $$» \quad = -1\times a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\frac{n\,(i-2)}{in'-(i-2)\,n}\,\overline{E}_i\left\{\frac{1}{4}\,e\overline{E}_i+\frac{1}{16}\,\overline{G}_i e'\cos(\tilde\omega'-\tilde\omega)\right\}\overline{\tilde\omega}_1\,(nt)^2$$

VIIIε $$» \quad = -\frac{1}{32}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\frac{n\,(i-2)}{in'-(i-2)\,n}\,\overline{G}_i\left\{2\overline{E}_i e\cos(\tilde\omega'-\tilde\omega)+e'\overline{G}_{i_1}\right\}\frac{\overline{\tilde\omega}_1}{e}\,e'\,(nt)^2$$

IXα $$s\,[p_9\,(a_3)] = +\frac{1}{4}\,a\,\frac{in}{n'-n}\,\overline{A}_i\left\{\overline{F}_{ia}-\overline{F}_{-ia}\right\}\frac{\overline{e}_1 e'}{(1+m)^2}\sin(\tilde\omega'-\tilde\omega)\,(nt)^2$$

IXβ $$» \quad = -\frac{1}{4}\,a\,\frac{(i-1)^2\,n}{in'-(i-1)\,n}\,\overline{D}_i\overline{C}_{ia}\,\frac{\overline{e}_1 e'}{(1+m)^2}\sin(\tilde\omega'-\tilde\omega)\,(nt)^2$$

XIα $$s\,[p_{11}\,(a_3)] = +\frac{1}{4}\,a\,\frac{(i-1)^2\,n}{in'-(i-1)\,n}\,\overline{C}_{ia}\left\{\overline{C}_i e+\overline{D}_i e'\cos(\tilde\omega'-\tilde\omega)\right\}\frac{\overline{\tilde\omega}_1}{(1+m)^2}\,(nt)^2$$

XIβ $$» \quad = -\frac{1}{4}\,a\,\frac{in}{n'-n}\,\overline{A}_i\left\{\overline{F}_{ia}-\overline{F}_{-ia}\right\}\frac{\overline{\tilde\omega}_1}{(1+m)^2}\,e'\cos(\tilde\omega'-\tilde\omega)\,(nt)^2$$

XIIα $$s\,[p_{12}\,(a_3)] = +\frac{1}{4}\,a\,\frac{(i-1)^2\,n}{in'-(i-1)\,n}\,\overline{C}_i\left\{-\overline{D}_{ia}+\frac{3}{2}\,\frac{(i-1)\,n}{in'-(i-1)\,n}\,\overline{D}_i\right\}\times$$

$$\times\,\frac{\overline{e}_1 e'}{(1+m)^2}\sin(\tilde\omega'-\tilde\omega)\,(nt)^2$$

XIIβ $$s[p_{12}(a_3)] = -\frac{1}{4} a \frac{in}{n'-n} \left(\bar{F}_i - \bar{F}_{-i}\right) \Big\} - \bar{A}_{ia} + \frac{3}{2} \frac{n}{n'-n} \bar{A}_i \Big\{ \frac{\bar{e}_1 e'}{(1+m)^2} \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (nt)^2$$

XIIIα $$s[p_{13}(a_3)] = -\frac{1}{8} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \frac{(i-1)n}{in' - (i-1)n} \left(\bar{C}_i\right)^2 \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e} (nt)^2$$

XIIIβ $$» \quad = -\frac{1}{16} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \frac{(i-1)n}{in' - (i-1)n} \bar{C}_i \Big\{ \bar{L}_i \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \frac{1}{2} \bar{M}_i \frac{e'}{e} \sin(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega})$$

$$- \bar{K}_i \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \Big\} \bar{e}_1 e' (nt)^2$$

XIIIγ $$» \quad = +\frac{1}{16} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \frac{n}{n'-n} \bar{B}_i \left(\bar{F}_i + \bar{F}_{-i}\right) \bar{e}_1 e' \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (nt)^2$$

XIIIδ $$» \quad = +\frac{1}{8} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \frac{(i-1)n}{in' - (i-1)n} \bar{C}_i \Big\{ \bar{L}_i \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$$

$$+ \frac{1}{2} \bar{M}_i \frac{e'}{e} \sin(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) \Big\} \bar{e}_1 e' (nt)^2$$

XIIIε $$s[p_{13}(a_3)] = +\frac{1}{8} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \frac{(i-2)n}{in' - (i-2)n} \bar{G}_i \bar{E}_i \bar{e}_1 e' \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (nt)^2$$

XIIIζ $$» \quad = -\frac{1}{8} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \frac{(i-2)n}{in' - (i-2)n} \bar{E}_i \Big\{ 2\bar{E}_i e + \frac{1}{2} \bar{G}_i e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \Big\} \bar{\tilde{\omega}}_1 (nt)^2$$

XIIIη $$» \quad = -\frac{1}{16} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \bar{G}_i \Big\{ 2 E_i e \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \frac{1}{2} \bar{G}_i e' \Big\} \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e} e' (nt)^2$$

XIIIθ $$» \quad = -\frac{1}{32} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \frac{n}{n'-n} \Big\{ \left(\bar{F}_i\right)^2 + \left(\bar{F}_{-i}\right)^2 - 2\bar{F}_i \bar{F}_{-i} \cos 2(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \Big\} \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e} e'^2 (nt)^2$$

XIIIι $$» \quad = +\frac{1}{16} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \frac{n}{n'-n} \bar{F}_i \bar{F}_{-i} \bar{e}_1 \frac{e'^2}{e} \sin(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) (nt)^2$$

XIVα $$s[p_{14}(a_3)] = +\frac{1}{4} a \frac{in}{n'-n} \left(\bar{F}_i - \bar{F}_{-i}\right) \Big\} - \bar{A}_{ia} + \frac{3}{2} \frac{n}{n'-n} \bar{A}_i \Big\{ \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{(1+m)^2} e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (nt)^2$$

XIVβ $$» \quad = +\frac{1}{4} a \frac{(i-1)^2 n}{in' - (i-1)n} \bar{C}_i \Big\{ e \left(\bar{C}_{ia} - \frac{1}{4} \sqrt{1-e^2}\, \bar{C}_i - \frac{3}{2} \frac{(i-1)n}{in' - (i-1)n} \bar{C}_i\right)$$

$$+ e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \left(\bar{D}_{ia} - \frac{3}{2} \frac{n(i-1)}{in' - (i-1)n} \bar{D}_i\right) \Big\} \frac{\tilde{\omega}_1}{(1+m)^2} (nt)^2$$

XVIα $$s[p_{15}(a_3)] = +\frac{1}{8} a \frac{(i-1)^2 n}{in' - (i-1)n} \bar{C}_i \bar{D}_i \frac{\bar{e}_1 e'}{(1+m)^2} \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (nt)^2$$

XVIβ $$» \quad = -\frac{1}{8} a \frac{in}{n'-n} \bar{A}_i \left(\bar{F}_i - \bar{F}_{-i}\right) \frac{\bar{e}_1 e'}{(1+m)^2} \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (nt)^2$$

XVIγ $$s\,[p_{16}(a_3)] = -\frac{1}{4}\,a\,\frac{(i-1)^2\,n}{in'-(i-1)\,n}\,\overline{C}_i\left\{\overline{C}_i e + \overline{D}_i e'\cos(\tilde\omega'-\tilde\omega)\right\}\frac{\bar{\tilde\omega}_1}{(1+m)^2}(nt)^2$$

XVIδ $$s\,[p_{16}(a_3)] = +\frac{1}{8}\,a\,\frac{in}{n'-n}\,\overline{\Lambda}_i\left(\overline{F}_i-\overline{F}_{-i}\right)\frac{\bar{\tilde\omega}_1 e'}{(1+m)^2}\cos(\tilde\omega'-\tilde\omega)\,(nt)^2$$

XVIIα $$s\,[p_{17}(a_3)] = +\frac{1}{8}\,a\,\frac{n}{n'-n}\,\overline{\Lambda}_i\left(\overline{F}_i-\overline{F}_{-i}\right)\frac{\bar{e}_1 e'}{(1+m)^2}\sin(\tilde\omega'-\tilde\omega)\,(nt)^2$$

XVIIβ $$» \quad = -\frac{1}{8}\,a\,\frac{(i-1)^2\,n}{in'-(i-1)\,n}\,\overline{D}_i\overline{C}_i\,\frac{\bar{e}_1 e'}{(1+m)^2}\sin(\tilde\omega'-\tilde\omega)\,(nt)^2$$

XIXα $$s\,[p_{19}(a_3)] = +\frac{1}{4}\,a\,\frac{(i-1)^2\,n}{in'-(i-1)\,n}\,\overline{C}_i\left\{\overline{C}_i e + \overline{D}_i e'\cos(\tilde\omega'-\tilde\omega)\right\}\frac{\bar{\tilde\omega}_1}{(1+m)^2}(nt)^2$$

XIXβ $$» \quad = -\frac{1}{8}\,a\,\frac{in}{n'-n}\,\overline{\Lambda}_i\left(\overline{F}_i-\overline{F}_{-i}\right)\frac{\bar{\tilde\omega}_1 e'}{(1+m)^2}\cos(\tilde\omega'-\tilde\omega)\,(nt)^2.$$

Bei näherer Betrachtung dieser Glieder erweist sich, daß sich ein großer Teil, mehr als die Hälfte aller Terme, durch Wegheben zerstört, einschließlich aller mit einem Pol $e = 0$ behafteter Glieder. Die folgende Zusammenstellung enthält die sich weghebenden Glieder:

Examinando en detalle el caso de todos estos términos, se advierte en seguida que gran parte de ellos — más de la mitad — desaparece por eliminación, incluso todos aquellos que están afectados por un polo $e = 0$. El cuadro que sigue muestra claramente los términos que se eliminan:

Iα gegen XIIα, 1 Glied.
Iβ, 1. und 2. Glied gegen XIVβ, 1. und 4. Glied.
Iγ gegen XIIβ, 1. Glied.
Iδ gegen XIVα, 1. Glied.
IIα, 3, Glied gegen VIγ.
IIβ gegen VIIIα.
IIγ » VIIIγ.
IIδ » VIIIε.
IIε, 2. Gl. gegen VIIIδ, 1. Gl.
IIζ gegen VIIIβ.
IIIα, 1. Glied in R_0 gegen IXβ.
IIIγ, 3. Glied gegen XIVα, 2. Glied
IVα gegen XIIIα.
IVβ » XIIIβ und XIIIδ.
IVγ » XIIIi.
IVδ » XIIIε.
IVε + ζ + η + XIIIζ + η + θ = 0.

VIβ gegen XIIIγ.
VIγ » IIα, 3. Glied.
VIIIα » IIβ.
VIIIβ » IIζ.
VIIIγ » IIγ.
VIIIδ, 1. Glied gegen IIε, 2. Glied.
VIIIε gegen IIδ.
IXα » IIIβ, 1. Teil.
IXβ » IIIα, 1. Glied in R_0.
XIIα, 1. Glied gegen Iα.
XIIβ, 1. Glied gegen Iγ.
XIIβ. 2. » » IIIβ, 3. Teil.
XIIIα gegen IVα.
XIIIβ + δ gegen IVβ.
XIIIγ gegen VIγ.
XIIIε » IVδ.
XIIIi » IVγ.
XIVα, 1. Glied gegen Iδ, 1. Glied.
XIVα, 2. » IIIγ, 3. Glied.
XIVβ, 1. + 4. Glied gegen Iβ.
XVIα gegen XVIIβ.
XVIβ » XVIIα.
XVIγ » XIXα.
XVIδ » XIXβ.
XVIIα » XVIβ.
XVIIβ » XVIα.
XIXα » XVIγ.
XIXβ » XVIδ.

Folglich verbleiben dann als von o verschieden die folgenden Glieder, die die Basis der Anwendung bilden :

Por consiguiente, sólo restan los términos distintos de o que van a continuación y que constituyen la base para las aplicaciones :

$$s\left[p_2(a_3)\right] = -\frac{1}{16}\, a\, \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \Big\{ \bar{A}_i \left(\bar{F}_i - \bar{F}_{-i}\right) \frac{in}{n'-n} - \bar{C}_i \bar{D}_i \frac{(i-1)^2\, n}{in' - (i-1)\, n}$$

$$+ \bar{C}_i \bar{L}_i \frac{(i-1)\, n}{in' - (i-1)\, n} \Big\} \bar{e}_1 e' \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\, (nt)^2 +$$

$$+ \frac{1}{8}\, a\, \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\, \bar{E}_i \bar{G}_i \frac{(i-2)\, n}{in' - (i-2)\, n}\, \bar{\tilde{\omega}}_1\, e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\, (nt)^2$$

$$s\,[p_3\,(a_3)] = -\frac{1}{4}\,a\,\frac{\mathrm{D}_i\,(i-1)^2}{(1+m)^2}\,\big\{\,\mathrm{R}'_0 \sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) + \mathrm{S}'_0 \cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,\big\}\,e'\,(nt)^2$$

wo

$$\mathrm{R}'_0 = +\frac{1}{4}\sqrt{1-e^2}\,\overline{\mathrm{C}}_{ia}\,\frac{n}{in'-(i-1)\,n}\,\bar{e}_1 - \frac{3}{2}\,\frac{(i-1)\,n^2}{[in'-(i-1)\,n]}\,\overline{\mathrm{C}}_i\bar{\tilde{\omega}}_1$$

$$\mathrm{S}'_0 = -\left(\overline{\mathrm{C}}_{ia} - \frac{1}{4}\sqrt{1-e^2}\,\overline{\mathrm{C}}_i\right)\frac{n}{in'-(i-1)\,n}\,\bar{\tilde{\omega}}_1 + \frac{3}{2}\,\overline{\mathrm{C}}_i\,\frac{(i-1)\,n^2}{[in'-(i-1)\,n]^2}\cdot\bar{e}_1$$

$$s\,[p_3\,(a_3)] = +\frac{1}{16}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\frac{in}{n'-n}\,\overline{\mathrm{A}}_i\left(\overline{\mathrm{F}}_i - \overline{\mathrm{F}}_{-i}\right)\bar{e}_1 e' \sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,(nt)^2$$

$$» \quad = +\frac{1}{4}\,a\,\frac{in}{n'-n}\,\Big\}\,\overline{\mathrm{F}}_{ia} - \overline{\mathrm{F}}_{-ia} - \frac{1}{4}\sqrt{1-e^2}\left(\overline{\mathrm{F}}_i - \overline{\mathrm{F}}_{-i}\right)\Big\{\,\frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{(1+m)^2}\,e' \cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,(nt)^2$$

$$s\,[p_6\,(a_3)] = +\frac{1}{8}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\frac{(i-1)\,n}{in'-(i-1)\,n}\,\overline{\mathrm{C}}_i\left(-\overline{\mathrm{K}}_i + \overline{\mathrm{L}}_i\right)\bar{e}_1 e' \sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,(nt)^2$$

$$s\,[p_8\,(a_3)] = -\frac{1}{16}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\frac{(i-2)\,n}{in'-(i-2)\,n}\,\overline{\mathrm{E}}_i\overline{\mathrm{G}}_i\bar{\tilde{\omega}}_1 e'\,(nt)^2$$

$$s\,[p_{11}\,(a_3)] = +\frac{1}{4}\,a\,\frac{(i-1)^2\,n}{in'-(i-1)\,n}\,\overline{\mathrm{C}}_{ia}\,\big\{\,\overline{\mathrm{C}}_i e + \overline{\mathrm{D}}_i e' \cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,\big\}\,\frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{(1+m)^2}\,(nt)^2$$

$$» \quad = -\frac{1}{4}\,a\,\frac{in}{n'-n}\,\overline{\mathrm{A}}_i\left(\overline{\mathrm{F}}_{ia} - \overline{\mathrm{F}}_{-ia}\right)\frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{(1+m)^2}\,e' \cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,(nt)^2$$

$$s\,[p_{12}\,(a_3)] = +\frac{1}{4}\,a\,\frac{(i-1)^2\,n}{in'-(i-1)\,n}\,\overline{\mathrm{C}}_i\,\Big\{ -\overline{\mathrm{D}}_{ia} + \frac{3}{2}\,\frac{(i-1)\,n}{in'-(i-1)\,n}\,\overline{\mathrm{D}}_i\,\Big\}\,\frac{\bar{e}_1 e'}{(1+m)^2}\,\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,(nt)^2$$

$$s\,[p_{14}\,(a_3)] = +\frac{1}{4}\,a\,\frac{(i-1)^2\,n}{in'-(i-1)\,n}\,\overline{\mathrm{C}}_i\,\Big\{ -e\left[+\frac{1}{4}\sqrt{1-e^2}\,\overline{\mathrm{C}}_i + \frac{3}{2}\,\frac{(i-1)\,n}{in'-(i-1)\,n}\,\overline{\mathrm{C}}_i\right]$$

$$-\frac{3}{2}\,\frac{(i-1)\,n}{in'-(i-1)\,n}\,\overline{\mathrm{D}}_i e' \cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,\Big\}\,\frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{(1+m)^2}\,(nt)^2.$$

§ 4. Der Einfluß der Kombination der direkten Störungen durch Jupiter, Saturn, etc., sowie die Rückwirkung ihrer gegenseitigen Störungen auf die Säkularänderung 3. Ordnung der großen Achse des gestörten Korpers.

Bisher ist nur der Einfluß eines einzigen störenden Körpers auf die Säkularänderung der großen Achse des gestörten Körpers untersucht worden.

§ 4. La influencia de la combinación de las perturbaciones de los grandes planetas y la repercusión de sus perturbaciones mutuas sobre la perturbación secular de tercer orden del semieje mayor de la órbita del cuerpo perturbado.

Hasta aquí nos hemos ocupado únicamente de la influencia que ejerce un solo planeta sobre la variación secular del semieje mayor de la órbita del cuer-

Dadurch ist zugleich auch die Ermittelung der direkten Wirkung jedes anderen Körpers unter bloßer Vertauschung der Buchstaben des störenden Körpers ermöglicht, aber es fehlt die Kombination dieser direkten Störungen, insofern jeder Term des Ausdrucks für $\dot{a}_3$ resp. a_3 in (5) aus 3 Faktoren besteht (auch a_2, e_2, l_2 und $\tilde{\omega}_2$ bestehen nach der Definition (6) aus 2 Faktoren) von denen jeder eine Störung darstellt, die jedem der störenden Körper zugeschrieben werden darf. Deshalb ist es zuerst nötig, den allgemeinen Ausdruck (5) der Potenzentwickelung der Störungen durch Verallgemeinerung zu erweitern. Zunächst ist, da jede Störung sich aus der Summe der Störungen durch alle anderen Körper zusammensetzt, zu berücksichtigen, daß:

po perturbado. Pasaremos ahora a investigar el efecto directo de otro planeta cualquiera, para lo cual basta una simple permutación de los índices que corresponden al cuerpo perturbador. Ahora falta combinar estas perturbaciones directas, ya que cada término de la expresión (5) de $\dot{a}_3$ o a_3, consta de 3 factores (según la definición (6) también a_2, e_2, l_2 y $\tilde{\omega}_2$ constan de 2 factores), cada uno de los cuales representa una perturbación que puede atribuirse a cualquiera de los planetas perturbadores. Por eso es que para una generalización se requiere, en primer lugar, ampliar la expresión general (5) del desarrollo de las perturbaciones en serie de potencias. Por de pronto, como cada perturbación se compone de la suma de las perturbaciones producidas por todos los demás cuerpos, debemos considerar que:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 = a_{1\mathrm{J}} + a_{1\mathrm{S}} + \ldots, \; a'_1 = + a'_{1\mathrm{S}} + \ldots \\ e_1 = e_{1\mathrm{J}} + e_{1\mathrm{S}} + \ldots, \; e'_1 = + e'_{1\mathrm{S}} + \ldots \\ \text{etc.} \end{array}\right\}$$

wo zur Abkürzung J den Jupiter, S den Saturn, etc., fixiert, Da es sich in der vorliegenden Schrift allein um die Aufsuchung der säkularen t^2-Glieder in a_3 handelt, sind zu der hierfür notwendigen Erzeugung von Poisson-Gliedern nur die mit e_1 und $\tilde{\omega}_1$ behafteten Glieder in (5) zu berücksichtigen, weil die Größen a_1 und l_1 keine der Zeit t proportionalen Terme enthalten; dabei ist zu beachten, daß die auch auftretenden Koeffizienten a_2, e_2, l_2 und $\tilde{\omega}_2$ ebenfalls von e_1 und $\tilde{\omega}_1$ abhängige Glieder enthalten, wie aus den Definitionen (6) folgt.

Betrachten wir nun daraufhin das 1. Glied von (5):

siendo, para abreviar, J Júpiter, S Saturno, etc. Puesto que en esta publicación sólo buscamos los términos de a_3 seculares en t^2, nos limitaremos al estudio de los términos afectados por e_1 y $\tilde{\omega}_1$, únicos que pueden producir los términos de Poisson necesarios, ya que a_1 y e_1 no contienen términos proporcionales a t; asimismo debemos tener presente que los coeficientes a_2, e_2, l_2 y $\tilde{\omega}_2$ también están afectados por e_1 y $\tilde{\omega}_1$, como resulta de las ecuaciones de definición (6).

Consideremos, pues, el 1er término de (5):

$$p_1(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon a} \cdot a_2,$$

so ist zuerst zu beachten, daß nunmehr:

y observemos que es en primer lugar

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{2e} = a^1{}_{2e} + a^2{}_{2e} + \dots \\ a_{2\omega} = a^1{}_{2\omega} + a^2{}_{2\omega} + \dots \\ a_{2e'} = a^1{}_{2e'} \\ a_{2\omega'} = a^1{}_{2\omega'} \\ a_{2e''} = a^2{}_{2e''} \\ a_{2\omega''} = a^2{}_{2\omega''} \end{array}\right\}$$

wo der obere Index 1 sich auf Jupiter, 2 auf Saturn, etc., bezieht. Folglich erhält dann $\dot{a}_2$ unter Ausschluß der nur von J und e_1 und $\tilde{\omega}_1$ abhängenden, oben bereits erledigten Glieder die erweiterte Form:

refiriéndose el índice superior 1 a Júpiter, 2 a Saturno, etc. Por lo tanto, $\dot{a}_2$ tiene la forma ampliada que sigue, con exclusión de aquellos términos que dependen sólo de J y e_1 y $\tilde{\omega}_1$, ya considerados:

$$\dot{a}_2 = \frac{2\sqrt{a}}{K}[a^1{}_{2e'} \cdot e'_1 + a^1{}_{2\tilde{\omega}} \cdot \tilde{\omega}'_1$$
$$+ a^2{}_{2e} \cdot e_1 + a^2{}_{2\tilde{\omega}} \cdot \tilde{\omega}_1$$
$$+ a^2{}_{2e''} \cdot e''_1 + a^2{}_{2\tilde{\omega}''} \cdot \tilde{\omega}''_1]$$

wobei die weiteren Glieder dadurch entstehen, daß der ober Index 2 durch 3, 4... und e'', $\tilde{\omega}''$ durch e''', $\tilde{\omega}'''$... ersetzt werden. Ferner ist zur Anwendung der Formeln zu setzen:

y los demás términos se logran reemplazando el índice superior 2, por 3, 4, ... y e'', $\tilde{\omega}''$, ... por e''', $\tilde{\omega}'''$, ... Además, para la aplicación de las fórmulas, se debe poner:

$$a^{(i)}{}_{2e} = R^{(i)}{}_{\varepsilon e} \qquad \text{und} \qquad a^{(i)}{}_{2e^{(i)}} = R^{(i)}{}_{\varepsilon e^{(i)}}.$$

In Bezug auf die säkularen Glieder ist, wie bisher, stets die Summe der Störungen der in Betracht kommenden großen Planeten zu substituieren und zwar in der schon fixierten Form:

Los términos seculares deben sustituirse, como antes, por la suma de las perturbaciones de los grandes planetas considerados, y, de acuerdo a la forma ya fijada:

$$e_1 = \bar{e}_1 \cdot nt \qquad \text{und} \qquad \tilde{\omega}_1 = \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e} \cdot nt,$$

wobei $\bar{e}_1$ und $\bar{\tilde{\omega}}_1$ stets vom 1. Grade der Exzentrizitäten sind, wobei aber in $\bar{e}_1$ kein Glied in e auftritt.

siendo $\bar{e}_1$ y $\bar{\tilde{\omega}}_1$ siempre de 1er grado en las excentricidades, y faltando en $\bar{e}_1$ el término en e.

Bringen wir nun die oben abgeleiteten allein auf die Anziehung durch Jupiter (d. h. nur einen Planeten) bezüglichen t^2-Säkularglieder mit Rücksicht auf ihre Entstehung allein auf Grund der Säkularterme von e_1 und $\tilde{\omega}_1$ allgemein symbolisch auf die Form:

Si transformamos ahora los términos seculares en t^2, refiriéndonos solamente a la atracción por Júpiter (e. d. un planeta, único) originados solamente por los términos seculares de e_1 y p_1, podemos escribir en general, simbólicamente

$$a) \qquad p(\dot{a}_3) = J_1 \int J_2 e_1 dt,$$

so ist nunmehr abzuleiten :

de donde se deduce :

$$b)\qquad p(\dot{a}_3) = \mathrm{J}_1 \int \mathrm{S}_2 e_1 dt;$$

folglich sind in dem früher abgeleiteten J_2 nur die Argumente m', a', e',... mit m'', a'', e'', ... zu vertauschen, sodaß die Laplaceschen Entwickelungskoeffizienten ebenfalls von a und a'' abhängig zu machen sind; ferner ist wegen der Notwendigkeit, Säkular-Glieder zu erzeugen, zu beachten, daß der Faktor J_1 nur von den Längen l und l' abhängt, dagegen S_2 nur von l und l'', sodaß das Produkt von J_1 mit dem $\int \mathrm{S}_2 e_1\, dt$ nur dann zu einem reinsäkularen Term, unter Weglassung des unbrauchbaren periodischen Teils, führen kann, wenn in J_1 und S_2 nur die Glieder ausgesucht werden, die in Bezug auf J_1 von l' und in Bezug auf S von l'' unabhängig sind; es sind aber beide Funktionen stets von l abhängig, weil J_1 als Differentialquotient nach ε resp. l immer von l abhängt. Es ist folglich nur nach den Termen in J_1 und S_2 zu suchen, in denen in der Störungsfunktion gleichzeitig $i = 0$ ist.

por consiguiente hay que permutar en la magnitud J_2 antes deducida, los argumentos m', a', e', ... con m, a, e, ... de modo que los coeficientes de Laplace serán ahora funciones de a y a''; además, debe observarse, para producir términos seculares, que el factor J_1 depende solamente de las longitudes l y l', y S_2 sólo de l y l'', de tal manera que el producto de J_1 por la integral $\int \mathrm{S}_2 e_1\, dt$ sólo puede producir un término secular puro, prescindiendo de una parte periódica, si se eligen en J_1 los términos que son independientes de l', y en S_2 los independientes de l''; pero las dos funciones siempre dependen de l, porque J_1 es una derivada respecto de ε, es decir, siempre depende de l. Por consiguiente deben buscarse en J_1 y S_2 solamente términos que corresponden al valor $i = 0$.

Analog ergibt sich der Term

Análogamente resulta el término :

$$c)\qquad p(\dot{a}_3) = \mathrm{S} \,.\int \mathrm{J} \,.\, e_1 \,.\, dt,$$

der nur die Umkehrung des Falles b darstellt, und endlich

que es el caso inverso del (b), y finalmente :

$$d)\qquad p(\dot{a}_3) = \mathrm{S} \,.\int \mathrm{S} \,.\, e_1 \,.\, dt,$$

der nur eine Vertauschung der Funktion J in a mit S darstellt, also durch Vertauschung von m', a', e', ... entsteht.

que significa sólo una permutación en (a) de J con S, es decir de m', a', e', ... con m'', a'', e'', ...

Analog sind die gleichen Vertauschungen vorzunehmen, wenn anstelle von e_1 nunmehr $\tilde{\omega}_1$ in den Integralen erscheint, entsprechend dem Anteil

Análogas permutaciones deben hacerse, si en las integrales aparece en lugar de e_1, $\tilde{\omega}_1$, como por ejemplo en la parte :

$$p(\dot{a}_3) = \mathrm{R}^1{}_{\varepsilon a} \int a^2{}_{2\tilde{\omega}} \tilde{\omega}_1 dt.$$

Dasselbe gilt in Bezug auf die Terme, die in $\dot{a}_2$ die Faktoren e'_1, $\tilde{\omega}'_1$, e''_1 und $\tilde{\omega}''_1$ unter den Integralen haben.

Lo mismo vale con respecto a los términos en $\dot{a}_2$, cuyos integrandos están afectados por los factores e'_1, $\tilde{\omega}'_1$, e''_1 y $\tilde{\omega}''_1$.

Die in der Entwickelung (5) auf $p_1(\dot{a}_3)$ folgenden Glieder $p_2(\dot{a}_3)$ bis $p_4(\dot{a}_3)$ sind wie $p_1(\dot{a}_3)$ zu behandeln, sodaß prinzipielle Unterschiede nicht bestehen.

Grundsätzlich werden im Folgende in $p_1(\dot{a}_3)$ bis $p_{20}(\dot{a}_3)$ in deren expliziten Koeffizienten $R^i{}_{\varepsilon a}$, $R^i{}_{\varepsilon e}$, etc., nur die auf den Index $i = 1$ bezüglichen Glieder dargestellt werden, weil die anderen direkt durch die entsprechenden Vertauschungen der Elemente abgeleitet werden können. Hauptterme sind deshalb die folgenden

Los términos que siguen al $p_1(\dot{a}_3)$ en el desarrollo (5): $p_2(\dot{a}_3)$ hasta $p_4(\dot{a}_3)$ deben ser tratados como p_1, porque no existen diferencias esenciales.

En lo sucesivo representaremos sistemáticamente en p_1 hasta p_{20} solamente los términos relativos al índice $i = 1$, en los coeficientes explícitos $R^i{}_{\varepsilon a}$, $R^i{}_{\varepsilon e}$, etc., pudiendo deducirse directamente los demás por las permutaciones correspondientes. Los términos principales son, pues, los siguientes:

$$p_1(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R^1{}_{\varepsilon a} a_2, \tag{1}$$

wo also

siendo

$$p(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} \{ a^2{}_{2e} e_1 + a^2{}_{2\tilde{\omega}} \tilde{\omega}_1 + a^1{}_{\varepsilon e'} e'_1 + a^1{}_{e\tilde{\omega}'} \cdot \tilde{\omega}'_1 + a^2{}_{\varepsilon e''} \cdot e''_1 + a^2{}_{\varepsilon \tilde{\omega}''} \cdot \tilde{\omega}''_1 \}$$

Da $a^2{}_{2\varepsilon} = R^2{}_{\varepsilon e}$, so folgt der von l'' unabhängige Term niedrigsten Grades aus dem folgenden Term 1. Grades, der in der Numerierung unserer Glieder, gemäß den p_i von $\dot{a}_3$, den Fall ($1a$) charakterisiert:

Ya que $a^2{}_{2e} = R^2{}_{\varepsilon e}$, se obtendrá el término de grado más bajo independiente de l'' por medio del término siguiente de 1^er grado que según la numeración de nuestros términos p_i de $\dot{a}_3$ designaremos como caso ($1a$):

$$R^2 = k^2 \frac{e}{2} C''_0 \cos(l - \tilde{\omega}), \tag{1a}$$

sodaß der resultierende Poisson-Term lautet:

luego el término de Poisson resultante será:

$$P(p(a_2)) = \frac{k^2}{K} \sqrt{a}\, C''_0 \bar{e}_1\, t \cos(l - \tilde{\omega})$$

wo der Koeffizient $\bar{e}_1$ mindestens vom 1. Grade in e' ist. Folglich ergibt sich für den 2. Faktor von (1):

siendo el coeficiente e_1 por lo menos de 1^er grado en e'. Por lo tanto se obtiene para el 2º factor de (1) la expresión:

$$R^1{}_{\varepsilon a} = -k^2 \frac{e'}{2} \frac{\partial D_0}{\partial a} \sin(l - \tilde{\omega}'),$$

womit dann in a_3 der Säkularteil entsteht, in der 1. Form:

que nos da en a_3 en primera forma la parte secular siguiente:

$$s(p_1(a_3)) = \frac{1}{4} a \frac{k^4}{K^2} C''_0 \frac{\partial D_0}{\partial a} \frac{e'\bar{e}_1}{n} t^2 \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}).$$

Bei Substitution von

Si se tiene en cuenta que

$$\frac{k^4}{K^2} = \frac{a^3 n^2}{(1 + m)^2}$$

und Berücksichtigung der oben für die Laplaceschen Transcendenten und ihre Ableitungen nach a eingeführten Abkürzungen erhält man dann als definitiven Ausdruck, den notwendigen Massenfaktor stets hinzugfügt gedacht:

y si consideramos las abreviaturas introducidas para las transcendentes de Laplace y sus derivadas respecto de a, se obtiene como expresión definitiva, suponiéndose incluído siempre el factor necesario de las masas:

$$s\,(p_1\,(a_3)) = \frac{1}{4}\,a\,\overline{C}_0\,(a'')\,\overline{D}_{0a}\bar{e}_1 e' \sin \frac{(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\,(nt)^2}{(1 + m)^2}$$

Massenfaktor ist $m''m'l\,(m', m'', \ldots)$).

siendo el factor de las masas en este caso $m'm''l\,(m', m'', \ldots)$.

Der erhaltene Ausdruck ist vom Grade e', e_1, also dem 2. Grade der Exzentrizitäten, und zwar vom niedrigst möglichen Grade, da die Wahl weiterer geeigneter Terme in den Faktoren von a_3 nur zu Gliedern 4. und höheren Grades führen kann. Deshalb könnnen wir sogleich zum nächsten Falle übergehen, innerhalb des vorliegendes Haptfalles (1):

La expresión obtenida es de grado $e' . \bar{e}_1$, es decir de 2° Grado en las excentricidades, o sea del menor grado posible, ya que la elección de otros términos adecuados en los factores de a_3, sólo puede conducir a términos de 4° y mayor grado. Por tanto podemos pasar ahora al próximo término del caso principal presente (1):

$$p\,(\dot{a}_2) = \frac{2\sqrt{a}}{K}\,R^2{}_{\varepsilon\tilde{\omega}} \cdot \tilde{\omega}_1, \tag{1b}$$

wo

siendo

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{1}{e}\,\bar{\tilde{\omega}}_1 nt$$

und $\tilde{\omega}_1$ die Säknlarwirkung aller großen Planeten enthaltend, vom 1. Grade in den Exzentrizitäten ist. Das Glied niedrigsten Grades in $p\,(a_2)$ entsteht aus dem folgenden Term von R^2:

y $\tilde{\omega}_1$ el efecto secular de todos los grandes planetas, que es de 1^er grado en las excentricidades. El término de grado más bajo de $p\,(a_2)$ resulta del término siguiente de R^2:

$$R^2 = k^2\,\frac{e}{2}\,C''_0 \cos\,(l - \tilde{\omega}),$$

sodaß:

de manera que:

$$P\,(p\,(a_2)) = \frac{k^2}{K}\sqrt{a}\;C''\bar{\tilde{\omega}}_1\,nt \sin\,(l - \tilde{\omega});$$

folglich ist $R^1_{\varepsilon a}$ abzuleiten aus

luego, $R^1_{\varepsilon a}$ se deduce de :

$$R^1 = k^2 \left[\frac{1}{2} e C_0 \cos(l - \tilde\omega) + \frac{1}{2} e' D_0 \cos(l - \tilde\omega')\right],$$

sodaß, unter Benutzung derselben Transformation der Faktoren wie in ($1a$), für den säkularen Anteil von $p_1(a_3)$ erhalten wird :

y por consiguiente aprovechando la misma transformación de los factores, que en ($1a$), se obtiene para la parte secular de $p_1(a)$, la expresión :

$$s(p_1(a_3)) = -\frac{1}{4} a \frac{C''_0}{(1+m)^2} \left[e\bar{C}_{0a} + e' \cos(\tilde\omega' - \tilde\omega) \bar{D}_{0a}\right] \bar{\tilde\omega}_1 (nt)^2$$

Weitere Glieder von demselben 2. Grade existieren nicht, weshalb wir zum nächsten Term übergehen können, wo

Como no existen otros términos de igual grado (2°) podemos pasar a ocuparnos del próximo término :

$$p(\dot{a}_2) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R^1_{\varepsilon e'} \cdot e'_1, \qquad (1c)$$

wo $e'_1 = \bar{e}'_1 \cdot n't$ und $\bar{e}'_1$ vom 1. Grade der Exzentrizitäten der störenden Körper ist; das Glied niedrigsten Grades von $p(\dot{a}_2)$ ergibt sich mittels

donde $e'_1 = e'_1 \cdot n't$ y e'_1 es de 1^er grado en las excentricidades de los cuerpos perturbadores. El término de grado más bajo de $p(\dot{a}_2)$ resulta de :

$$R^1 = k^2 \frac{e'}{2} D_i \cos[il' - (i-1)l - \tilde\omega'], \qquad (\alpha)$$

sodaß

de manera que

$$P(p(a_2)) = \frac{k^2}{K} \cdot \sqrt{a}\, D_i \frac{(i-1)n'}{in' - (i-1)n} \bar{e}'_1\, t \cos[il' - (i-1)l - \tilde\omega']$$

Folglich ist $R^1_{\varepsilon a}$ nur zu entnehmen aus :

Por tanto $R^1_{\varepsilon a}$ sólo resulta de :

$$R^1 = k^2 \frac{e}{2} C_i \cos[il' - (i-1)l - \tilde\omega],$$

sodaß

luego

$$s(p_1(a_3)) = -\frac{1}{4} a \frac{\bar{D}_i C_{ia}}{(i+m)^2} \frac{(i-1)n'}{in' - (i-1)n} \bar{e}_1{}' \cdot e \sin(\tilde\omega' - \tilde\omega)(nt)^2$$

Ein weiteres Glied 2. Grades entsteht mittels des Terms :

Otro término de 2° grado resulta de :

$$R^1 = k^2 \frac{ee'}{4} [F_{+i} \cos[i(l'-l) - \tilde\omega' + \tilde\omega] + \{F_{-i} \cos[i(l'-l) - \tilde\omega' + \tilde\omega]\} \qquad (\beta)$$

sodaß

luego

$$P\,[p\,(a_2)] = -\frac{1}{2}\sqrt{a}\,\frac{k}{K}\,\frac{\bar{e}'_1 e}{n'-n}\,n't\,\{\,F_{+i}\cos\,[i\,(l'-l)-\tilde{\omega}'+\tilde{\omega}]+F_{-i}\cos\,[i\,(l'-l)+\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}\,\}$$

Mithin muß $R^1{}_{\varepsilon a}$ folgen aus :

Por consiguiente $R^1{}_{\varepsilon a}$ se deduce de

$$R^1 = k^2\,.\,A_i\cos i\,(l'-l)$$

sodaß schließlich

de manera que finalmente :

$$s\,(p_1\,(a_3)) = -\frac{1}{4}\,a\,\frac{in'}{n'-n}\,\bar{A}_i a\,\{\,\bar{F}_{+i}-\bar{F}_{-i}\,\}\,\frac{\bar{e}'_1 e}{(1+m)^2}\sin\,(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,.\,(nt)^2$$

(Massenfaktor $= m'^2 l\,(m'', m''', \ldots)$.

Weitere Glieder 2. Grades liegen nicht vor. Deshalb gehen wir zum nächsten Falle über, nämlich :

(el factor de las masas es $m'^2 l\,(m'', m''', \ldots$ etc.)).

No quedan más términos de 2° grado. Por lo tanto procederemos a considerar el próximo caso, a saber :

$$p\,(\dot{a}_2) = \frac{2\sqrt{a}}{K}\,R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}'}\,.\,\tilde{\omega}'_1, \qquad \text{wo} \qquad \tilde{\omega}'_1 = \frac{1}{e'}\,\bar{\tilde{\omega}}_1'\,n'l.$$

und $\bar{\tilde{\omega}}'_1$ mit den linearen Gliedern $\bar{\tilde{\omega}}'_1 = \alpha' e' + \beta' e'' +$ Gliedern 3., 5. Grades, etc., beginnt. Das Glied niedrigsten Grades von $R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}}$, folgt aus :

y $\bar{\tilde{\omega}}'_1$ empieza con los términos lineales $\bar{\tilde{\omega}}'_1 = \alpha' e' + \beta' e'' +$ términos de 3°, 5° grado, etc. El de grado más bajo de $R^1{}_{\varepsilon\omega'}$ resulta de :

$$R^1 = k^2\,\frac{e'}{2}\,D_i\cos\,[il'-(i-1)\,l-\tilde{\omega}'], \qquad (\alpha)$$

sodaß :

de manera que

$$P\,(p\,(\dot{a}_2) = -\sqrt{a}\,\frac{k^2}{K}\,\frac{(i-1)\,n'}{in'-(i-1)\,n}\,D_i\bar{\tilde{\omega}}'_1 t\sin\,[il'-(i-1)\,l-\tilde{\omega}'];$$

folglich ist $R^1{}_{\varepsilon a}$ zu entnehmen aus :

Por consiguiente $R^1{}_{\varepsilon a}$ se obtiene de :

$$R^1 = k^2\,\Big\{\,\frac{1}{2}\,C_i\cos\,[il'-(i-1)\,l-\tilde{\omega}]+\frac{1}{2}\,e'D_i\cos\,[il'-(i-1)\,l-\tilde{\omega}')],$$

sodaß :

luego :

$$s\,(p_1\,(a_3)) = -\frac{1}{4}\,a\,\frac{(i-1)^2 n'}{in'-(i-1)\,n}\,\bar{D}_i\,\{\,\bar{C}_{ia}e\cos\,(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})+e'\bar{D}_{ia}\,\}\,\frac{\bar{\tilde{\omega}}_1'}{(1+m)^2}\,(nt)^2.$$

Ein weiteres Glied 2. Grades ist möglich bei Ableitung von R mittels :

De la deducción de R de la expresión siguiente, es posible obtener otro término de 2° grado :

$$R^1 = k^2 \frac{ee'}{4} \{ F_{+i} \cos [i(l'-l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}] + F_{-i} \cos [i(l'-l) + \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}] \} \qquad (\beta)$$

sodaß: luego

$$P(p(a_2)) = -\frac{1}{2}\sqrt{a}\,\frac{k^2}{K} \{ F_i \sin [i(l'-l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}] - F_{-i} \sin [i(l'-l) + \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}] \} \frac{e\overline{\tilde{\omega}}'_1}{n'-n} n't.$$

Mithin ist $R^1_{\varepsilon a}$ abzuleiten aus: Por consiguiente $R^1_{\varepsilon a}$ se obtiene de

$$R^1 = k^2 A_i \cos i(l'-l),$$

sodaß: de manera que

$$s(p_1)a_3)) = -\frac{1}{4} a \frac{in'}{n'-n} A_{ia} \left(\overline{F}_i - \overline{F}_{-i}\right) \frac{e\overline{\tilde{\omega}}'_1}{(1+m)^2} \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})(nt)^2$$

Damit sind die Terme 2. Grades erschöpft, sodaß auf den nächsten Term übergegangen werden kann:

Con esto se han agotado los términos de 2° grado, y podemos pasar a tratar el próximo:

$$p(\dot{a}_2) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R^2_{\varepsilon e''} \cdot e''_1, \qquad (1e)$$

wo $e''_1 = \overline{e}''_1 n''t$ und der Koeffizient $\overline{e}''_1$ vom 1. Grade, mit e' beginnend. Der entsprechende Säkularterm in a_3 entsteht aus den Termen von (1_c) durch Vertauschung von m', a', e', ..., mit m'', a'', e'' in $p(a_2)$, ferner von e_1' mit e_1'' und allgemeine Beschränkung auf $i = 0$, falls Säkularteile aus dem Produkt der Ableitungen von R^1 und R^2 entstehen sollen. Folglich wird nach dem Term (α) von (1_c) allein, indem der Term (β) bei $i = 0$ wegfällt:

donde $e''_1 = \overline{e}''_1 \cdot n''t$ y $\overline{e}''_1$ es de primer grado y empieza con e'. El término secular correspondiente de a_3 resulta de los de (1_c) por la permutación de m', a', e', ..., con m'', a'', e'', ... en $p(a_2)$, y de e_1' con e_1''. A fin de que puedan lograrse partes seculares del producto de las derivadas de R^1 y R^2 será necesaria además la limitación a $i = 0$. Por consiguiente, eliminándose el término (β) con $i = 0$, se obtiene por medio del término (α) de (1_c):

$$s(p_1(a_3)) = +\frac{1}{4} a\overline{D}''_0 \overline{C}_{0a} \frac{n''}{n} \frac{e \sin(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega})}{(1+m)^2} \overline{e}''_1 (n \cdot t)^2.$$

Ein analoges Verfahren ist bei dem nächsten Term einzuschlagen:

Con el término próximo debe seguirse un procedimiento análogo:

$$p(\dot{a}_2) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R^2_{\varepsilon\tilde{\omega}''} \cdot \tilde{\omega}''_1 \qquad (1f)$$

wo $\tilde{\omega}''_1 = \frac{1}{e''}\overline{\tilde{\omega}}''_1$ und $\overline{\tilde{\omega}}''_1$ = linear in e', e'', etc. Auf

donde $\tilde{\omega}''_1 = \frac{1}{e''}\overline{\tilde{\omega}}''_1$ y $\overline{\tilde{\omega}}''_1$ es lineal en e', e'', etc. Si

Grund der erforderlichen Vertauschungen in ($1d$) folgt dann im vorliegenden Falle:

efectuamos las permutaciones necesarias en ($1d$) obtenemos en el caso presente:

$$s(p(a_3)) = -\frac{1}{4}\bar{D}''_0 \left\{ \bar{C}_{0a}e \cos(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}) + e''\bar{D}_{0a} \right\} \frac{n''}{n} \frac{\bar{\tilde{\omega}}''_1}{(1+m)^2} \cdot (nt)^2$$

Weitere Glieder 2. Grades sind nicht vorhanden.

Gehen wir nun zum 2. Hauptgliede unserer Gruppe über, so ist nach (5) zu untersuchen:

No quedan ya más términos de 2° grado.

Si nos ocupamos ahora del 2° término principal de nuestro grupo, debemos según (5) examinar ahora la expresión:

$$\dot{p}_2(a_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R^1{}_{\varepsilon e} \cdot e_2, \tag{2}$$

wobei die hier notwendige Erweiterung jetzt lautet:

y la generalización necesaria conduce a:

$$\dot{p}(e_2) = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}} \left\{ e^2{}_{2e} \cdot e_1 + e^2{}_{2\tilde{\omega}} \cdot \tilde{\omega}_1 + e^1{}_{2\tilde{\omega}'} \cdot e'_1 + e^1{}_{2\tilde{\omega}'} \cdot \tilde{\omega}'_1 + e^2{}_{2e''} \cdot e''_1 + e^2{}_{2\tilde{\omega}''} \cdot \tilde{\omega}''_1 \right\}$$

Der Faktor $e^2{}_{2\varepsilon}$ des 1. Terms ist nach ($6a$) bei Entwickelung nach Potenzen von e:

El factor $e^2{}_{2e}$ del 1^er^ término se expresa, según ($6a$), por desarrollo en serie de potencias de e:

$$e^2{}_{2e} = \frac{1}{e} R^2{}_{\tilde{\omega}e} - \frac{1}{e^2(1-e^2)} R^2{}_{\tilde{\omega}} + \frac{1}{2} eR^2{}_{\varepsilon e} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}e^2\right) R^2{}_{\varepsilon}.$$

In Bezug auf die Glieder 1. Grades von R^2 sind der 1. und der 2. Term folgendermaßen darstellbar:

En cuanto a los términos de 1^er^ grado de R^2, el 1° y 2° se pueden representar como sigue:

$$I \doteq \frac{1}{e} R^2{}_{\tilde{\omega}\varepsilon} = \frac{1}{e^2} R^2{}_{\tilde{\omega}} \qquad \text{und} \qquad II = \frac{1}{e^2(1-e^2)} R^2{}_{\tilde{\omega}} = \frac{1}{e^2} R^2{}_{\tilde{\omega}}(1 + e^2 + e^4 \ldots),$$

sodaß ihre Differenz: $I - II = -R^2{}_{\tilde{\omega}}(1 + e^2 + \ldots)$ frei von Polen $e = 0$ wird, ebenso allgemein in Bezug auf alle Glieder höher als vom 1. Grade. Da (2) sich aus einem Produkt von $R^1{}_{\varepsilon e}$ und, zunächst in Bezug auf

de manera que su diferencia $I - II = -R^2{}_{\tilde{\omega}}(1 + e^2 + \ldots)$ carece del polo $e = 0$; esto sucede en general también con todos los términos de grado mayor al 1°. Componiéndose (2) de un producto de $R^1{}_{\varepsilon e}$ por derivadas de R^2 refiriéndonos primeramente a:

$$\dot{p}(e_2) = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}} e^2{}_{2e} \cdot e_1, \tag{2a}$$

Ableitungen von R^2 zusammensetzt, so ist $i = 0$ zu wählen. Folglich ergibt sich $p(e_2)$ zunächst aus:

debemos elegir $i = 0$. Por eso resulta $p(e_2)$, en primer lugar, de:

$$R^2 = k^2 \left\{ \frac{1}{2} eC''_0 \cos(l - \tilde{\omega}) + \frac{1}{2} e''D''_0 \cos(l - \tilde{\omega}'') \right\}. \qquad (\alpha)$$

Folglich führt das 1. Glied in $p(e_2)$ unter Verwendung von $R^2 = C''_0 e \cos(l - \tilde{\omega})$ zu einem Poisson-Gliede der Form $t \cos(l - \tilde{\omega})$; andererseits führt der Faktor $R^1_{\varepsilon e}$ in (2) mittels $R^1 = e \cos(l - \tilde{\omega})$ auf den Multiplikator $R^1_{\varepsilon e} = -\sin(l - \tilde{\omega})$, sodaß folglich in Verbindung mit dem soeben fixierten P-Gliede kein reines t-Glied in $\dot{a}_3$ möglich ist. Folglich bleibt wirksam in $e^2{}_{2e}$ nur das letzte Glied, und zwar das 2. Glied in R^2, das in D_0'', sodaß man findet:

Por consiguiente, el 1er término de $p(e_2)$ produce por aplicación de $R^2 = C_0'' . e . \cos(l - \tilde{\omega})$, un término de Poisson de la forma $t \cos(l - \tilde{\omega})$; por otra parte el factor $R^1_{\varepsilon e}$ de (2) nos suministra por medio de $R^1 = e \cos(l - \tilde{\omega})$ el factor $R_{\varepsilon e} = -\text{sen}(l - \tilde{\omega})$ de modo que en el producto con el término P ya mencionado, no es posible formar en $\dot{a}_3$ ningún término puro en t^1. Por consiguiente queda de $e^2{}_{2e}$ sólo el último término o sea el 2° término de R^2, con el factor D_0, de manera que se halla:

$$P(p(e_2)) = -\frac{1}{4} \frac{k^2}{K} \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{a}} D''_0 \bar{e}_1 e'' t \cos(l - \tilde{\omega}''),$$

also in Verbindung mit

luego en combinación con

$$R^1 = k^2 \frac{e}{2} C_0 \cos(l - \tilde{\omega})$$

zur Ableitung von $R^1_{\varepsilon e}$:

para la deducción de $R^1_{\varepsilon e}$ resulta:

$$s(p_2((a_3) = \frac{1}{16} a \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 + m)^2} \overline{C}_0 \overline{D}''_0 \bar{e}_1 e'' \sin(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) (n \cdot t)^2.$$

In Bezug auf R^2 ist auch die Berücksichtigung der analogen Glieder 3. Grades notwendig, nämlich

Es necesario considerar en R^2 también los términos análogos de 3er grado, a saber:

$$R^2 = k^2 \left\{ \frac{1}{8} e^2 e'' K''_0 \cos(l - \tilde{\omega}'') + \frac{1}{8} e^2 e'' L''_0 \cos(l + \tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}) + \frac{1}{8} e e''^2 M''_0 \cos(l - 2\tilde{\omega}'' + \tilde{\omega}) \right\} \qquad (\beta)$$

Mithin wird dann unter Wegfall der Terme in K_0 und M_0:

Por consiguiente, ya que los términos en K_0 y M_0 se eliminan, resulta:

$$P(p(e_2)) = +\frac{1}{4} \frac{k^2}{K} \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{a}} L''_0 \bar{e}_1 e'' t \cos(l + \tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega})$$

sodaß folglich bei Kombination mit

de manera que calculando R^1 por medio de

$$R_1 = k^2 \frac{e}{2} C_0 \cos(l - \tilde{\omega})$$

in Bezug auf $R^1_{\varepsilon e}$ erhalten wird :

se obtiene

$$s\,(p_2\,(a_3)) = +\frac{1}{16}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\bar{C}_0\bar{L}''_0\bar{e}_1 e''\sin(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega})\,(n\,.\,t)^2$$

Ferner ist e_2 aus den Termen 2. Grades zu ermitteln, indem :

Además, se debe sacar e_2 de los términos de 2° grado :

$$R^2 = k^2\left\{\frac{1}{4}e^2E''_0\cos(2l-2\tilde{\omega}) + \frac{1}{4}ee''G''_0\cos(2l-\tilde{\omega}''-\tilde{\omega})\right\} \qquad (\gamma)$$

In $e^2{}_{2e}$ hebt sich dann der Term in G_0 weg und es wird bis zu den Gliedern 1. Grades einschließlich :

Eliminándose entonces en $e^2{}_{2e}$ el término en G_0 resulta hasta los términos de 1er grado inclusive :

$$P\,(p_2\,((e_2) = +\frac{1}{4}\frac{k^2}{K}\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}\,E''_0\bar{e}_1\,t\cos(2l-2\tilde{\omega}).$$

Folglich wird der gesuchte Säkularterm, wenn $R^1_{\varepsilon e}$ aus

El término secular buscado se obtiene sacando $R^1_{\varepsilon e}$ de

$$R^1 = k^2\frac{ee'}{4}G_0\cos(2l-\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})$$

entnommen wird :

?

$$s\,(p_2\,(a_3)) = +\frac{1}{16}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\bar{G}_0\bar{E}''\bar{e}_1 e'\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,(nt)^2.$$

Damit sind alle Terme 2. Grades in $p_2\,(a_3)$ erschöpft, soweit sie in $p\,(e_2)$ von $e^2{}_{2e}\,.\,e_1$ abhängen. Deshalb gehen wir nunmehr zum Falle $(2b)$ über, wo

Con esto quedan agotados todos los términos de 2° grado de $p_2\,(a_3)$ que en $p\,(e_2)$ dependen de $e^2{}_{2e}\,.\,e_1$. Pasemos ahora al caso $(2b)$, es decir :

$$p\,(\dot{e}_2) = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}}\,e^2{}_{2\tilde{\omega}}\,.\,\tilde{\omega}_1, \qquad (2b)$$

wo wieder $\tilde{\omega}_1 = \frac{\bar{\omega}_1}{e}nt$ und $\bar{\omega}_1$ = linear in $e, e', \ldots,$ ferner

donde nuevamente es : $\tilde{\omega}_1 = \frac{\bar{\omega}_1}{e}nt$, y $\bar{\omega}_1$ es lineal en $e, e', \ldots,$ además :

$$e^2{}_{2\tilde{\omega}} = \frac{1}{e}R^2{}_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}} + \frac{1}{2}e\left(1+\frac{1}{4}e^2\right)R^2{}_{\varepsilon\tilde{\omega}},$$

sodaß der 1. Term von $e^2{}_{2\tilde{\omega}}$ mindestens vom 0. Grade und der 2. Term vom 2. Grade. Entnimmt man deshalb $\frac{1}{e}\,.\,R^2{}_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$ zuerst aus

de manera que el 1er término de e^2 es por lo menos de grado 0 y el 2° término de 2° grado. Si sacamos $\frac{1}{e}\cdot R^2{}_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$ primeramente de

$$R^2 = k^2 \frac{e}{2} C''_0 \cos(l - \tilde{\omega}), \tag{α}$$

so ist $p(\dot{e}_2)$ wegen $\tilde{\omega}_1$ mit dem Pole $e = 0$ behaftet, der auch in $p_2(a_3)$ nicht verschwindet, weil der Faktor $R^1_{\varepsilon e}$ in (2) infolge der notwendigen Verwendung von

queda afectado $\dot{e}_2$, a causa de $\tilde{\omega}_1$, por el polo $e=0$. Este polo tampoco desaparece de $p_2(a_3)$, porque el factor $R^1_{\varepsilon e}$ de la (2) obtenido necesariamente de:

$$R^1 = k^2 \frac{e}{2} C_0 \cos(l - \tilde{\omega})$$

vom 0. Grade wird; der Säkularterm wird:

es de grado 0; el término secular resulta:

$$s(p_2(a_3)) = -\frac{1}{8} a \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 + m)^2} \bar{C}_0 \bar{C}''_0 \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e} (nt)^2$$

und hebt sich gegen den Pol-Term (α) in $p_8(a_3)$ fort.

y se elimina con el término (α) con polo de $p_8(a_3)$.

Dagegen ergibt der 2. Term von $e^2{}_{2\tilde{\omega}}$ einen pollosen Term indem

Por otra parte, el término segundo de $e^2{}_{2\tilde{\omega}}$ origina un término sin polo, pues:

$$\frac{1}{2} e R^2{}_{\varepsilon\omega} = k^2 \frac{e}{4} C''_0 \cos(l - \tilde{\omega}), \tag{β}$$

sodaß folglich

de manera que:

$$p(e_2) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{k^2}{K} \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{a}} C''_0 \bar{\tilde{\omega}}_1 e t \sin(l - \tilde{\omega}),$$

und deshalb $R^1_{\varepsilon e}$ zu entnehmen ist aus:

y $R^1_{\varepsilon e}$ debe obtenerse de:

$$R^1 = k^2 \frac{e}{2} C_0 \cos(l - \tilde{\omega});$$

dann wird schließlich:

resultando definitivamente:

$$s(p_2(a_3)) = +\frac{1}{16} a \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 + m)^2} \bar{C}_0 \bar{C}''_0 \bar{\tilde{\omega}}_1 e (nt)^2.$$

Von Gliedern 2. Grades kommt dann bezüglich R^2 in Betracht:

De los términos de 2° grado de R^2 hay que considerar ahora el siguiente:

$$R^2 = k^2 \frac{e^2}{4} E''_0 \cos(2l - 2\tilde{\omega}), \tag{γ}$$

sodaß der Term niedrigsten Grades:

de manera que el término de grado más bajo es:

$$p(e_2) = +\frac{1}{2} \frac{k^2}{K} \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{a}} E''_0 \bar{\tilde{\omega}}_1 t \sin(2l - 2\tilde{\omega});$$

folglich ist bezüglich $R^1_{\varepsilon e}$ zu wählen :

por consiguiente debemos elegir para obtener $R^1_{\varepsilon e}$:

$$R^1 = k^2 \left\{ \frac{1}{4} e^2 E_0 \cos(2l - 2\tilde{\omega}) + \frac{1}{4} ee' G_0 \cos(2l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \right\}$$

sodaß

de modo que :

$$s(p_2(a_3)) = -\frac{1}{8} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \left\{ 2e\overline{E}_0 + \frac{1}{2} e' \overline{G}''_0 \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \right\} \overline{E}''_0 \tilde{\omega}_1 (nt)^2$$

Bei der Verwendungsmöglichkeit der Terme 3. Grades ist im vorliegenden Falle zu berücksichtigen :

Respecto de la posibilidad de emplear términos de 3er grado, debemos considerar en el caso presente :

$$R^2 = k^2 \left\{ \frac{1}{8} e^3 J''_0 \cos(l - \tilde{\omega}) + \frac{1}{8} ee''^2 N''_0 \cos(l - \tilde{\omega}) + \frac{1}{8} e^2 e'' L''_0 \cos(l + \tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{8} ee''^2 M''_0 \cos(l - 2\tilde{\omega}'' + \tilde{\omega}) \right\} \qquad (\delta)$$

sodaß man unter Berücksichtigung des Hauptgliedes $\frac{1}{e} R^2_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$ in $e^2_{2\tilde{\omega}}$ erhält :

de manera que resulta, considerando el término principal $\frac{1}{e} R^2_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$ de $e^2_{2\tilde{\omega}}$:

$$p(e_2) = \frac{1}{8} \frac{k^2}{K} \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}} \left\{ \begin{array}{l} e^2 J''_0 \sin(l - \tilde{\omega}) + e''^2 N''_0 \sin(l - \tilde{\omega}) \\ + 4ee'' L''_0 \sin(l + \tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega})_0 + e''^2 M''_0 \sin(2l - 2\tilde{\omega}'' + \tilde{\omega}) \end{array} \right\} \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e} t$$

Folglich ist R^1 zu entnehmen aus :

Por consiguiente, debemos sacar R^1 de :

$$R^1 = k^2 \frac{e}{2} C_0 \cos(l - \tilde{\omega}),$$

sodaß :

luego :

$$s(p_2(a_3)) = -\frac{1}{32} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \overline{C}_0 \left\{ \begin{array}{l} e^2 \overline{J}''_0 + e''^2 \overline{N}''_0 + 4ee'' \overline{L}''_0 \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \\ + e''^2 \overline{M}''_0 \cos(2\tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}) \end{array} \right\} \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e} (nt)^2$$

sodaß sich das 2. und 4. Glied wegen des Poles $e = 0$ anderweitig wegheben müssen, nämlich gegen (γ) in $p_8(a_3)$.

de manera que los términos 2° y 4° deben eliminarse con otros a causa del polo $e = 0$, es decir, con los (γ) de $p_8(a_3)$.

Entnimmt man ferner R^2 aus dem letzten Term 2. Grades :

Si sacamos, además, R^2 del último término de 2° grado :

$$R^2 = k^2 \frac{ee''}{4} G_0'' \cos(2l - \tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}), \qquad (\varepsilon)$$

so entsteht in $p(e_2)$ durch den Pol $e = 0$ von $\tilde{\omega}_1$ ebenfalls ein Pol $e = 0$; da $R^1_{\varepsilon e}$ alsdann dem Gliede

resulta en $p(e_2)$, por el polo $e = 0$ de $\tilde{\omega}_1$, también un polo $e = 0$. Debemos sacar entonces $R^1_{\varepsilon e}$ del término :

$$R^1 = k^2 \left\{ \frac{1}{4} e^2 E_0 \cos(2l - 2\tilde{\omega}) + \frac{1}{4} ee'G_0 \cos(2l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \right\}$$

zu entnehmen ist, so folgt insgesamt der säkulare Betrag:

resultando la siguiente cantidad secular:

$$s(p_2(a_3)) = -\frac{1}{32} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \left\{ 2e\overline{E}_0 \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) + e'\overline{G}_0 \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \right\} \overline{G}''_0 e'' \frac{\overline{\tilde{\omega}}_1}{e} (nt)^2$$

sodaß der 2. Term mit dem Pol $e = 0$ behaftet ist, sich aber anderweitig, in $p_8(a_3)(\beta)$ weghebt.

Schließlich ist hier noch die Verwendung der Terme 3. Grades in R^1 nötig, wenn

El 2° término está afectado por el polo $e = 0$, pero se elimina en otro lugar, con los de (β) de $p_8(a_3)$.

Es finalmente menester el empleo de los términos de 3er grado de R^1; si

$$R^2 = k^2 \frac{e}{2} C''_0 \cos(l - \tilde{\omega}) \qquad (\zeta)$$

gesetzt wird, sodaß R^1 folgen muß aus:

en cuyo caso R^1 debe obtenerse de:

$$R^1 = k^2 \left\{ \frac{1}{8} e^3 J_0 \cos(l - \tilde{\omega}) + \frac{1}{8} ee'^2 N_0 \cos(l - \tilde{\omega}) + \frac{1}{8} e^2 e' K_0 \cos(l - \tilde{\omega}') \right.$$
$$\left. + e^2 e' L_0 \cos(l + \tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) + \frac{1}{8} ee'^2 M_0 \cos(l - 2\tilde{\omega}' + \tilde{\omega}) \right\}$$

Folglich wird

resulta:

$$P(p_2(e_2)) = +\frac{1}{2} k^2 \frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}} C''_0 \frac{\overline{\tilde{\omega}}_1}{e} t \sin(l - \tilde{\omega})$$

und deshalb:

y

$$s(p_2(a_3)) = -\frac{1}{16} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} C''_0 \left\{ \frac{3}{2} e^2 \overline{J}_0 + \left(\overline{K}_0 + \overline{L}_0\right) ee' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} e'^2 \overline{M}_0 \cos(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) + \frac{1}{2} e'^2 \overline{N}_0 \right\} \frac{\overline{\tilde{\omega}}_1}{e} (nt)^2$$

Die beiden letzten den Pol $e = 0$ enthaltenden Glieder heben sich in $p_8(a_3)$, unter (δ) fort.

Zum nächsten Untergliede von (2) übergehend, haben wir den folgenden Term zu untersuchen:

Los dos últimos términos, que contienen el polo $e = 0$, se eliminan con los (δ) de $p_8(a_3)$.

Si pasamos a considerar el próximo término secundario, investigando el término siguiente:

$$p(\dot{e}_2) = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}} e^1_{2e'} \cdot e'_1, \qquad (2c)$$

wobei

$$e^1_{2e'} = \frac{1}{e} R^1_{\tilde{\omega}e'} + \frac{1}{2} e R^1_{\varepsilon e'}$$

und für e'_1 die säkulare Störung durch alle übrigen großen Planeten zu substituieren ist: $e'_1 = \overline{e'_1} n't$, wobei der Koeffizient $\overline{e'_1}$ mit den Lineargliedern in e'', e''', etc., beginnt. Der 1. Term von $e^1_{2e'}$ d. h. $\frac{1}{e} R^1_{\tilde{\omega}e'}$ ist stets, da der entsprechende Ausdruch von R^1 immer mit e und e' behaftet sein muß, vom 0. Grade, während der 2. Term $\frac{1}{2} e R^1_{\varepsilon e'}$ mindestens vom 1. Grade ist. Beide Glieder sind Sinus-Terme, sodaß $p(e_2)$ in Bezug auf den Possson-Teil von der Form $t \cos A$ wird. Folglich muß Argument A zur Erzeugung von säkularen t-Gliedern in $p_2(a_3)$ wegen des Sinusfaktors $R^1_{\varepsilon e}$ stets in Bezug auf das Agregat der Perihellängen von dem Argumente dieses Faktors verschieden sein.

Setzen wir dementsprechend, zuerst zur Ableitung von $\frac{1}{e} R^1_{\tilde{\omega}e'}$:

donde

y e_1 debe sustituirse por la perturbación secular de todos los restantes planetas: $e'_1 = e' n't$, donde el coeficiente e'_1 empieza con términos lineales en e'', e''', etc. El primer término de $e^1_{2e'}$, es decir, $\frac{1}{e} R^1_{\tilde{\omega}e'}$, es siempre de grado 0, ya que la expresión correspondiente de R^1 está multiplicada siempre por e y e', mientras que el 2° término $\frac{1}{2} e R^1_{\varepsilon e'}$, es por lo menos de 1er grado. Ambos términos son senos, de manera que $p(e_2)$ resulta de la forma de Poisson $t \cos A$. Para que el argumento A produzca términos seculares en t en $p_2(a_3)$, debe ser siempre distinto del argumento del factor $R^1_{\varepsilon e}$, que es un seno, en las partes dependientes de las longitudes de los perihelios.

Si ponemos para la deducción de $\frac{1}{e} R^1_{\tilde{\omega}e'}$ en primer lugar,

$$R^1 = k^2 \frac{ee'}{4} \{ F_i \cos [i(l'-l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}] + F_{-i} \cos [i(l'-l) + \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}] + G_i \cos [il' - (i-2)l - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}] \} \tag{\alpha}$$

so wird:

se obtiene:

$$P(p(e_2)) = -\frac{1}{4} \frac{k^2}{K} \frac{\sqrt{1-e^2}}{a} \overline{e_1} \cdot n't \left\{ \begin{aligned} & \frac{F_i}{i(n'-n)} \cos [i(l'-l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}] \\ & - \frac{F_{-i}}{i(n'-n)} \cos [i(l'-l) + \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}] \\ & - \frac{G_i}{in' - (i-2)n} \cos [il' - (i-2)l - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}] \end{aligned} \right\}$$

Folglich ist $R^1_{\varepsilon e}$ zu entnehmen aus:

Por consiguiente $R^1_{e\varepsilon}$ se debe sacar de:

$$R^1 = R^1_\alpha + k^2 \frac{e^2}{4} B_i \cos i(l'-l) + k^2 \frac{e^2}{4} E_i \cos [il' - (i-2)l - 2\tilde{\omega}];$$

werden dann die hieraus folgenden Glieder von $R^1_{\varepsilon e}$ mit den Gliedern verschiedenen Arguments in Bezug auf $\tilde\omega$ und $\tilde\omega'$ in $P(p(e_2))$ kombiniert, so erhält man als Säkularteil :

Si se combinan los términos de $R^1_{\varepsilon e'}$ que resultan de este R^1, con los términos de distinto argumento en $\tilde\omega$ y $\tilde\omega'$ de $P(p(e_2))$, se obtiene la parte secular :

$$S(p_2(a_3)) = -\frac{1}{16}a\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\left\{e\bar{B}_i\left(\bar{F}_i+\bar{F}_{-i}\right)\frac{n'}{n'-n}\sin(\tilde\omega'-\tilde\omega)+e'\bar{F}_i\bar{F}_{-i}\frac{n'}{n'-n}\times\sin(2\tilde\omega'-2\tilde\omega)-e\bar{G}_i\bar{E}_i\frac{n'(i-2)}{in'-(i-2)n}\sin(\tilde\omega'-\tilde\omega\right\}\bar{e}'_1(nt)^2$$

Fügen wir jetzt das 2. Glied in e^1_{2e} hinzu, nämlich $\frac{1}{2}e\,R^1_{\varepsilon e'}$, so ist R^1 zu entnehmen aus :

Si agregamos ahora el 2º término de e^1_{2e}, es decir, $\frac{1}{2}eR^1_{\varepsilon e'}$, hay que sacar R^1 de :

$$R^1 = k^2 D_i\frac{e'}{2}\cos[il'-(i-1)l-\tilde\omega'], \tag{β}$$

sodaß folglich :

de manera que :

$$P(p(e_2)) = +\frac{1}{4}\frac{k^2}{K}\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}\frac{D_i(i-1)n}{in'-(i-1)n}e\bar{e}'_1 t\cos[il'-(i-1)l-\tilde\omega'].$$

Mithin ist $R^1_{\varepsilon e}$ abzuleiten aus

Con esto $R^1_{\varepsilon e}$ debe deducirse de :

$$R^1 = k^2\frac{e}{2}C_i\cos[il'-(i-1)l-\tilde\omega],$$

sodaß wir erhalten :

resultando :

$$s(p_2(a_3)) = +\frac{1}{16}a\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\bar{C}_i\bar{D}_i\frac{(i-1)n'}{in'-(i-1)n}e\,.\,\bar{e}'_1\sin(\tilde\omega'-\tilde\omega)(nt)^2$$

Weitere Terme 2. Grades in $p_2(a_3)$ sind möglich bei Entnahme von R^1 zur Ableitung von $\frac{1}{e}R^1_{\tilde\omega e'}$ aus Gliedern 3. Grades; dann ist aber zu beachten, daß $R^1_{\varepsilon e}$ aus dem Gliede

Se pueden deducir otros términos de 2º grado en $p_2(a_3)$, si se calcula $\frac{1}{e}R^1_{\tilde\omega e'}$, sacando R^1 de los términos de 3er grado; pero entonces hay que considerar que $R^1_{\varepsilon e}$ se obtiene del término (γ)

$$R^1 = k^2 C_i\frac{e}{2}\cos[il'-(i-1)l-\tilde\omega] \tag{γ}$$

zu entnehmen ist. Folglich ist $\frac{1}{e}R^1_{\tilde\omega e'}$, da die beteiligten Glieder e, e' und $\tilde\omega$ enthalten müssen, aber unter Wegfall der Glieder mit dem Argument $il'-(i-1)l-\tilde\omega$, nur aus den folgenden Termen 3. Grades zu entnehmen :

Por consiguiente debemos sacar $\frac{1}{e}R^1_{\tilde\omega e'}$ — ya que los términos a considerar deben contener e, e' y $\tilde\omega$, excluyendo los términos con el argumento $il'-(i-1)l-\tilde\omega$ — de los siguientes términos de 3er grado ;

$$R^1 = k^2 \left\{ \frac{1}{8} e^2 e' L_i \cos\left[il' - (i-1)l + \tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}\right] + \frac{1}{8} e e'^2 M_i \cos\left[il' - (i-1)l - 2\tilde{\omega}' + \tilde{\omega}\right] \right\}$$

Folglich wird

y por consiguiente

$$P(p(e_2)) = -\frac{1}{4}\frac{k^2}{K}\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}\bar{e}'_1 \frac{n't}{in' - (i-1)n} \left\{ -eL_i \cos\left[il' - (i-1)l + \tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}\right] + e'M_i \cos\left[il' - (i-1)l - 2\tilde{\omega}' + \tilde{\omega}\right] \right\}$$

Auf Grund der Ableitung von $R^1{}_{\varepsilon e}$ aus dem schon oben unter (γ) fixierten R^1 erhält man alsdann:

Basándonos en la deducción de $R^1{}_{\varepsilon e}$ del R^1 ya mencionado en (γ), obtendremos:

$$s(p_2(a_3)) = -\frac{1}{16} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \frac{(i-1)n}{in' - (i-1)n} \bar{C}_i \left\{ e\bar{L}_i \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + e'\bar{M}_i \sin(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) \right\} \bar{e}'_1 (nt)^2$$

Weitere Glieder 2. Grades sind nicht vorhanden, weshalb wir jetzt übergehen auf ($2d$)

Ya que no existen más términos de 2° grado, pasemos al caso:

$$p(\dot{e}_2) = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}} e^1{}_{2\tilde{\omega}'} \tilde{\omega}'_1, \qquad (2d)$$

wo

donde

$$e^1{}_{2\tilde{\omega}'} = \frac{1}{e} R^1{}_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}'} + \frac{1}{2} e R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}'}$$

und

y

$$\tilde{\omega}'_1 = \frac{\bar{\tilde{\omega}}'_1}{e'} n't$$

und der Koeffizient $\bar{\tilde{\omega}}'_1$ mit den Lineargliedern in e', e'', etc., beginnt. Da $R^1{}_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}'}$, den Faktor $e \,.\, e'$ enthält, also $\frac{1}{e} R^1{}_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}'} \tilde{\omega}'_1$ unter Elimination des Poles $e = 0$ und ferner auch des Poles $e' = 0$ in $\tilde{\omega}'_1$ vom 1. Grade wird, andererseits $R^1{}_{\varepsilon e}$ vom mindestens 1. Grade ist, so wird $p_2(a_3)$ vom mindestens 2. Grade; dabei sind $e^1{}_{2\tilde{\omega}'}$ wie $R^1{}_{\varepsilon e}$ demselben R^1 zu entnehmen, weil $p(e_2)$ nur von der Form $t \sin A$ und $R^1{}_{\varepsilon e}$ nur reine Sinus-Terme enthält. Dementsprechend werde gesetzt;

el coeficiente $\bar{\tilde{\omega}}'_1$ empieza con términos lineales en e', e'', etc. Ya que $R^1{}_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}'}$ contiene el factor $e \,.\, e'$, $\frac{1}{e} R^1{}_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}'} \tilde{\omega}'_1$ resulta de 1er grado, pues se eliminan el polo $e = 0$ y el $e = 0$ de $\tilde{\omega}'_1$. Por otra parte es $R^1{}_{\varepsilon e}$ por lo menos de 1er grado, luego $p_2(a_3)$ es por lo menos del 2°. En tal caso deben sacarse $e^1{}_{2\tilde{\omega}'}$ y $R^1{}_{\varepsilon e}$ del mismo R^1, porque $p(e_2)$ es de la forma t . sen A y $R^1{}_{\varepsilon e}$ sólo contiene términos senos puros. Correspondientemente pongamos:

$$R^1 = k^2 \frac{ee'}{4} \left\{ \begin{array}{l} F_i \cos\left[i(l'-l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}\right] + G_i \cos\left[il' - (i-2)l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}\right] \\ + F_{i-} \cos\left[i(l'-l) + \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}\right] \end{array} \right\} \qquad (\alpha)$$

sodaß

de modo que

$$p(e_2) = -\frac{1}{4}\frac{k^2}{K}\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}\bar{\tilde\omega}'_1 n't \begin{Bmatrix} \dfrac{F_i}{i(n'-n)}\sin[i(l'-l)-\tilde\omega'+\tilde\omega] + \dfrac{F_{-i}}{i(n'-n)}\sin[i(l'-l)+\tilde\omega'-\tilde\omega] \\ -\dfrac{G_i}{in'-(i-2)n}\sin[il'-(i-2)l-\tilde\omega'-\tilde\omega] \end{Bmatrix}$$

Folglich ist $R^1{}_{\varepsilon e}$ abzuleiten aus :

Por consiguiente debemos deducir $R^1{}_{\varepsilon e}$ por medio de

$$R^1 = k^2\frac{ee'}{4}\begin{Bmatrix} F_i\cos[i(l'-l)-\tilde\omega'+\tilde\omega] + F_{-i}\cos[i(l'-l)+\tilde\omega'-\tilde\omega] \\ + G_i\cos[il'-(i-2]\,l-\tilde\omega'-\tilde\omega] + E_i\cos[il'-(i-2)\,l-2\tilde\omega] \end{Bmatrix}$$

sodaß folglich :

de manera que :

$$s(p_2(a_3)) = -\frac{1}{32}a\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\begin{Bmatrix} e'\left(\bar F^2{}_i + 2\bar F_i\bar F_{-i}\cos(2\tilde\omega'-2\tilde\omega) + (F_{-i})^2\right)\dfrac{n'}{n'-n} \\ + 2\bar F_i\bar B_i\dfrac{n'}{n'-n}e\cos(\tilde\omega'-\tilde\omega) + 2\bar F_{-i}\bar B_i\dfrac{n'}{n'-n}e\cos(\tilde\omega'-\tilde\omega) \\ - e'\left(\bar G^2{}_i + \bar E_i\bar G_i\cos(\tilde\omega'-\tilde\omega)\right)\dfrac{(i-2)\,n'}{in'-(i-2)\,n} \end{Bmatrix}\bar{\tilde\omega}'_1(nt)^2.$$

Der nächste Fall bezieht sich auf die Heranziehung der Glieder 3. Grades in R^1 in Bezug auf $\frac{1}{e}R^1{}_{\tilde\omega\tilde\omega'}$ mit dem Argument der Glieder 1. Grades in l und l'; diese letzteren sind für $R^1{}_{\varepsilon e}$ zu verwenden, damit in $p_2(a_3)$ wieder Terme 2. Grades entstehen können. Also ist zu setzen :

Para el cálculo de $\frac{1}{e}R^1{}_{\tilde\omega\tilde\omega'}$ consideraremos ahora el caso que se refiere al uso de los términos de 3er grado de R^1 con argumentos en l y l' correspondientes a términos de 1er grado ; estos últimos hay que emplearlos para $R^1{}_{\varepsilon e}$ a fin de que puedan originar en $p_2(a_2)$ términos de 2° grado. Por eso hay que poner :

$$R^1 = k^2\left\{\frac{1}{8}e^2e'L_i\cos[il'-(i-1)\,l+\tilde\omega'-2\tilde\omega] + \frac{1}{8}ee'^2M_i\cos[il'-(i-1)\,l-2\tilde\omega'+\tilde\omega]\right\} \quad (\beta)$$

sodaß folglich

de modo que

$$P(p(e_2)) = -\frac{1}{4}\frac{k^2}{K}\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}\frac{\bar{\tilde\omega}'_1 n't}{in'-(i-1)\,n}\begin{Bmatrix} eL_i\sin[il'-(i-1)\,l+\tilde\omega'-2\tilde\omega] \\ + e'M_i\sin[il'-(i-1)\,l-2\tilde\omega'+\tilde\omega] \end{Bmatrix}$$

Entnimmt man dann folglich $R^1{}_{\varepsilon e}$ aus :

sacando $R^1{}_{\varepsilon e}$ de :

$$R^1 = k^2\frac{e}{2}C_i\cos[il'-(i-1)\,l-\tilde\omega],$$

so folgt :

resulta :

$$s\,(p_2\,(a_3)) = -\frac{1}{4}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\frac{(i-1)\,n'}{in'-(i-1)\,n}\,C_i \left\{ \begin{array}{l} e\overline{L}_i \cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) \\ +\, e'\overline{M}_i \cos(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega}) \end{array} \right\} \bar{\tilde{\omega}}'_1\,(nt)^2$$

Es bleibt jetzt noch die Verwendung des 2. Termes in $p\,(\dot{e}_2)$ aus $e^1{}_{2\tilde{\omega}'}$ d. h.: $\frac{1}{2}\,R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}'}$, da auch durch diesen Term ein Glied 2. Grades in $p\,(a_3)$ möglich ist; setzt man nämlich

Queda por emplear, todavía, el 2° término de $p(\dot{e}_2)$: $e^1{}_{2\tilde{\omega}'}$, es decir, $\frac{1}{2}\,e\,.\,R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}'}$, ya que es posible obtener por medio de este término uno de 2° grado; poniendo, pues :

$$R^1 = k^2\,\frac{e'}{2}\,D_i \cos\,[il' - (i-1)\,l - \tilde{\omega}'], \qquad (\gamma)$$

so folgt zuerst

resulta primeramente :

$$P\,(p\,(e_2)) = \frac{1}{4}\,\frac{k^2}{K}\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}\,D_i\,\frac{(i-1)\,n'}{in'-(i-1)\,n}\,\tilde{\omega}'_1 t \sin\,[il' - (i-1)\,l - \tilde{\omega}']$$

Folglich ergibt sich $R^1{}_{\varepsilon e}$ aus :

Sigue luego $R^1{}_{\varepsilon\varepsilon}$ de :

$$R^1 = k^2\,\frac{e}{2}\,C_i \cos\,[il' - (i-1)\,l - \tilde{\omega}],$$

sodaß :

de modo que

$$s\,(p_2\,(\dot{a}_3)) = \frac{1}{16}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\frac{(i-1)\,n'}{in'-(i-1)\,n}\,\overline{C}_i\overline{D}_i e\bar{\tilde{\omega}}'_1 \cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,(nt)^2$$

Das nächste Glied von $p\,(\dot{e}_2)$ lautet dann :

El próximo término de $p\,(\dot{e}_2)$ es :

$$p\,(\dot{e}_2) = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}}\,e^2{}_{2e''}\,.\,e''_1, \qquad (2e)$$

wo

$$e^2{}_{2e''} = \frac{1}{e}\,R^2{}_{\tilde{\omega}e''} + \frac{1}{2}\,eR^2{}_{\varepsilon e''}$$

und $e''_1 = \bar{e}''_1\,n''t$ mit $\bar{e}''_1$ eine mit linearen Gliedern in e', e''', etc., beginnende Reihe ist. Da $p_2\,(\dot{a}_3)$ nach wie vor $R^1{}_{\varepsilon e}$ proportional bleibt, so sind jetzt in R^1 wie R^2 nur die $i = 0$ entsprechenden Glieder auszusuchen. Deshalb kommt in Bezug auf $R^2{}_{\tilde{\omega}e''}$ nur ein Glied 2. Grades von R^2 in Frage, nämlich :

y $e''_1 = \bar{e}''_1\,n''t$; $\bar{e}''_1$ es una serie que empieza con términos lineales en e', e''', etc. Ya que $p_2\,(a_3)$ queda como antes proporcional a $R^1{}_{\varepsilon e'}$ hay que escoger en R^1 y R^2 sólo los términos correspondientes a $i = 0$. Por eso debemos calcular $R^2{}_{\tilde{\omega}\varepsilon''}$ del siguiente término de 2° grado de R^2 :

$$R^2 = k^2 \frac{ee''}{4} G_0(a'') \cos(2l - \tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \qquad (\alpha)$$

dann wird

entonces resulta:

$$P(p(e_2)) = \frac{1}{16} \frac{k^2}{K} \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}} G_0(a'') \bar{e}''_1 \frac{n''}{n} t \cos[2l - \tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}]$$

Folglich ist R^1 zu entnehmen aus

Por consiguiente, tomando R^1 de

$$R^1 = k^2 \frac{e^2}{4} E_0 \cos(2l - 2\tilde{\omega})$$

sodaß

resulta:

$$s(p_2(a_3)) = -\frac{1}{8} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \frac{n''}{n} \bar{E}_0 \bar{G}_0(a'') e\bar{e}''_1 \sin(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega})(nt)^2$$

Berücksichtigen wir den 2. Term in $p(\dot{e}_2)$, also $\frac{1}{2} eR^2_{\varepsilon e''}$, mittels

Calculando el 2° término de $p(\dot{e}_2)$, es decir, $\frac{1}{2} eR^2_{\varepsilon e''}$, por medio de

$$R^2 = k^2 D''_0 \frac{e''}{2} \cos(l - \tilde{\omega}'') \qquad (\beta)$$

so ergibt sich zunächst:

resulta:

$$P(p(e_2)) = -\frac{1}{4} \frac{k^2}{K} \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}} D_0(a'') e\bar{e}''_1 \frac{n''}{n} t \cos(l - \tilde{\omega}'');$$

folglich muß R^1 entnommen werden aus:

Por consiguiente R^1 debe obtenerse de:

$$R^1 = k^2 \frac{e}{2} C_0 \cos(l - \tilde{\omega}),$$

sodaß:

de modo que:

$$s(p_2(a_3)) = +\frac{1}{16} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \bar{C}_0 \bar{D}_0(a'') \frac{n''}{n} e\bar{e}''_1 \sin(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega})(nt)^2.$$

Die Glieder 3. Grades in R_2 sind auch zu berücksichtigen, da sie ebenfalls zu Termen 2. Grades in $p_2(a_3)$ führen. Da $e^2_{2e''} = \frac{1}{e} R^2_{\tilde{\omega}e''}$, so sind nur die folgenden Glieder 3. Grades in e, e'' zu beachten:

También debemos considerar los términos de 3er grado de R^2, porque conducen a términos de 2° grado en $p_2(a_3)$. Ya que $e^2_{2e''} = \frac{1}{e} R^2_{\tilde{\omega}e''}$, hay que usar solamente los siguientes términos de 3er grado en e, e'':

$$R^2 = k^2 \left\{ \frac{1}{8} e^2 e'' L_0 (a'') \cos [l + \tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}] + \frac{1}{8} e e''^2 M_0 (a'') \cos [l - 2\tilde{\omega}'' + \tilde{\omega}] \right\} \qquad (\gamma)$$

Folglich wird dementsprechend :

Por consiguiente sigue :

$$P(p(e_2)) = \frac{1}{4} \frac{k^2}{K} \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{a}} \frac{n''}{n} \bar{e}''_1 t \left\{ \begin{array}{l} e L_0 (a'') \cos (l + \tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}) \\ - e'' M_0 (a'') \cos (l - 2\tilde{\omega}'' + \tilde{\omega}) \end{array} \right\}$$

sodaß $R^1{}_{\varepsilon e}$ zu entnehmen ist aus :

de manera que debemos sacar $R^1{}_{\varepsilon e}$ de :

$$R^1 = k^2 \frac{e}{2} C_0 \cos (l - \tilde{\omega})$$

und deshalb

por lo tanto

$$s(p_2(a_3)) = \frac{1}{16} a \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 + m)^2} \frac{n''}{n} \bar{C}_0 \left\{ \begin{array}{l} e\bar{L}_0 (a'') \sin (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \\ + e'' \bar{M}_0 (a'') \sin (2\tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}) \end{array} \right\} \bar{e}''_1 (nt)^2$$

Schließlich auf den letzten Term von $p(\dot{e}_2)$ übergehend, haben wir zu betrachten :

Ocupándonos finalmente del último término de $p(\dot{e}_2)$ consideremos :

$$p(\dot{e}_2) = - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{K\sqrt{a}} e^2{}_{2\omega''} \cdot \tilde{\omega}''_1 \qquad (2f)$$

mit $\tilde{\omega}''_1 = \dfrac{\bar{\tilde{\omega}}''_1}{e''} n'' t$, wobei $\bar{\tilde{\omega}}''_1$ eine mit den Lineargliedern in e', e'', etc., beginnende Reihe ist und wo

donde $\tilde{\omega}_1'' = \dfrac{\bar{\tilde{\omega}}_1''}{e''} n'' t$, y $\bar{\tilde{\omega}}_1''$ es una serie que empieza con términos lineales en e', e'', etc., y

$$e^2{}_{2\omega''} = \frac{1}{e} R^2{}_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}''} + \frac{1}{2} e R^2{}_{\varepsilon\tilde{\omega}''}.$$

Der Pol $e'' = 0$ von $\tilde{\omega}_1''$ hebt sich stets gegen den Faktor e'' in beiden Gliedern von $e^2{}_{2\tilde{\omega}''}$ weg, ebenso fällt der Pol $e = 0$ im 1. Term von $e^2{}_{2\tilde{\omega}''}$ wegen des Faktors e von $R^2{}_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}''}$ weg; da $R^2{}_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}''}$ notwendig vom mindestens 2. Grade ist, ist in Bezug auf R^2 die Wahl nur des folgenden Gliedes möglich :

El polo $e'' = 0$ de $\tilde{\omega}_1''$ se elimina siempre con el factor e'' que aparece en los dos términos de $e^2{}_{2\tilde{\omega}''}$, y el polo $e = 0$ del primer término de $e^2{}_{2\tilde{\omega}''}$ se elimina también por el factor e de $R^2{}_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}''}$; ya que $R^2{}_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}''}$ es necesariamente de 2° grado por lo menos sólo es posible elegir el término siguiente de R^2 :

$$R^2 = k^2 \frac{ee''}{4} G_0 (a'') \cos (2l - \tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}), \qquad (\alpha)$$

also wird :

resulta entonces :

$$P(p(e_2)) = \frac{1}{8} \frac{k^2}{K} \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{a}} G_0 (a'') \bar{\tilde{\omega}}''_1 \frac{n''}{n} t \sin (2l - \tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}).$$

Mithin folgt R^1 aus :

Con esto R^1 sigue :

$$R^1 = k^2 \left\{ \frac{e^2}{4} E_0 \cos(2l - 2\tilde{\omega}) + \frac{ee'}{4} G_0 \cos(2l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \right\}$$

der Säkularteil :

la parte secular :

$$s(p_2(a_3)) = -\frac{1}{32} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \frac{n''}{n} \left\{ \begin{array}{l} 2e\overline{E}_0\overline{G}_0(a'')\cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \\ + e'\overline{G}_0\overline{G}_0(a'')\cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \end{array} \right\} \bar{\tilde{\omega}}''_1 (nt)^2$$

In dem 2. Gliede von $e^2{}_{2\tilde{\omega}''} : \frac{1}{2} eR^2{}_{\varepsilon\tilde{\omega}''}$ ist R^2 zu entnehmen aus :

En el 2° término de $e^2{}_{2\tilde{\omega}''} : \frac{1}{2} eR^2{}_{\varepsilon\tilde{\omega}''}$ hay que sacar R^2 de :

$$R^2 = k^2 \frac{e''}{2} D_0(a'') \cos(l - \tilde{\omega}''); \qquad (\beta)$$

folglich wird

por lo tanto :

$$P(p(e_2)) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{k^2}{K} \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}} D_0(a'') e\bar{\tilde{\omega}}''_1 \frac{n''}{n} t \sin(l - \tilde{\omega}'')$$

und $R^1{}_{\varepsilon e}$ folgt aus :

y $R^1{}_{\varepsilon e}$ sigue de :

$$R^1 = k^2 \frac{e}{2} C_0 \cos(l - \tilde{\omega}),$$

sodaß

luego :

$$s(p_2(a_3)) = \frac{1}{16} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \frac{n''}{n} \overline{C}_0\overline{D}_0(a'') e\bar{\tilde{\omega}}''_1 \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) (nt)^2$$

Auch die Glieder 3. Grades von R^2 führen zu Termen 2. Grades in $p_2(a_3)$, wobei mit Rücksicht auf die Ableitung $R^2{}_{\omega\tilde{\omega}''}$ nur die folgenden Terme 3. Grades zu beachten sind :

También los términos de 3er grado de R^2 originan términos de 2° grado en $p_2(a_3)$, debiéndose considerar en la derivada $R^2{}_{\omega\tilde{\omega}''}$ sólo los siguientes términos de 3er grado :

$$R^2 = k^2 \left\{ \frac{1}{8} e^2 e'' L_0(a'') \cos[l + \tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}] + \frac{1}{8} ee''^2 M_0(a'') \cos[l - 2\tilde{\omega}'' + \tilde{\omega}] \right\} \qquad (\gamma)$$

Mithin folgt für das P-Glied von e_2 :

Con esto sigue para los términos de Poisson de e_2 :

$$P(p(e_2)) = -\frac{1}{4} \frac{k^2}{K} \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}} \frac{n''}{n} \bar{\tilde{\omega}}''_1 t \left\{ \begin{array}{l} eL_0(a'') \sin(l + \tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}) \\ + e''M_0(a'') \sin(l - 2\tilde{\omega}'' + \tilde{\omega}) \end{array} \right\}$$

Folglich ist $R^1_{\varepsilon e}$ abzuleiten aus

Por consiguiente $R^1_{\varepsilon e}$ se deduce por medio de

$$R^1 = k^2 \frac{e}{2} C_0 \cos (l - \tilde{\omega}),$$

sodaß :

de modo que :

$$s(p_2(a_3)) = \frac{1}{16} a \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 + m)^2} \frac{n''}{n} \bar{C}_0 \left\{ e\bar{L}_0(a'') \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) + e''\bar{M}_0(a'') \cos(2\tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}) \right\} \bar{\tilde{\omega}}''_1 (nt)^2$$

Alsdann können wir zum 3. Haupttern unserer Gruppe übergehen, nämlich, gemäß (5) :

Ahora podemos ocuparnos del 3er término principal de nuestro grupo, es decir, según (5) :

$$p_3(a_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R^1_{\varepsilon\varepsilon} l_2 \tag{3}$$

wo $l_2 = \varepsilon_2 + \rho_2$ und l_2 jetzt der Gleichung genügt :

donde $l_2 = \varepsilon_2 + \rho_2$ y l_2 satisface ahora a la ecuación :

$$p(\dot{l}_2) = \varepsilon^2{}_{2e} e_1 + \varepsilon^2{}_{2\tilde{\omega}} \tilde{\omega}_1 + \varepsilon^1{}_{2e'} e'_1 + \varepsilon^1{}_{2\tilde{\omega}'} \tilde{\omega}'_1 + \varepsilon^2{}_{2e''} e''_1 + \varepsilon^2{}_{2\tilde{\omega}''} \tilde{\omega}''_1 - \frac{3}{2} \frac{n_0}{a_0} a_2$$

unter Vernachlässigung derjenigen Glieder nach (6), die nicht zu Poisson-Gliedern führen können. Also wird zuerst untersucht der Term :

prescindiendo de aquellos términos de la (6) que no pueden originar términos de Poisson. Por consiguiente investigaremos primeramente el término :

$$p(\dot{l}_2) = \varepsilon^2{}_{2e} \cdot e_1 \tag{3a}$$

wo wieder $e = \bar{e}_1 nt$ mit $\bar{e}_1$ vom 1. Grade in e', e'', etc.; ferner ist

donde es de nuevo $e = \bar{e}_1 . nt$, siendo $\bar{e}_1$ de 1er grado en e', e'', etc.; además es :

$$\varepsilon^2{}_{2e} = -\frac{2\sqrt{a}}{K} R^2{}_{ae} + \frac{\sqrt{1 - e^2}}{2K\sqrt{a}} \left\{ e\left(1 + \frac{1}{4}e^2\right) R^2{}_{ee} + \left(1 - \frac{1}{4}e^2\right) R^2{}_e \right\}$$

Da R^2_{ae} und R^2_e mindestens vom 0. Grade, also Hauptterme sein können, ist zuerst zu setzen :

Ya que R^2_{ae} y R^2_e son por lo menos de grado 0, pudiendo ser, por tanto, términos principales, pondremos en primer lugar :

$$R^2 = k^2 \frac{e}{2} C_0 \cos (l - \tilde{\omega}) ; \tag{α}$$

Folglich wird entsprechend :

De donde resulta :

$$P(p(l_2)) = -2\sqrt{a} \frac{k^2}{K} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial C_0(a'')}{\partial a} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{8a} C_0(a'') \right\} \bar{e}_1 t \sin (l - \tilde{\omega}) ;$$

also muß $R^1_{\varepsilon\varepsilon}$ sich ergeben mittels

y por consiguiente $R^1_{\varepsilon\varepsilon}$ se obtiene de

$$R^1 = k^2 \frac{e'}{2} D_0 \cos(l - \tilde{\omega}'),$$

sodaß:

luego:

$$s(p_3(a_3)) = \frac{1}{4} a \frac{\overline{D}_0}{(1+m)^2} \left\{ \overline{C}''_{oa} - \frac{1}{4}\sqrt{1-e^2}\,\overline{C}_0(a'') \right\} e'\overline{e}_1 \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})(nt)^2$$

Weitere Glieder 2. Grades sind hier nicht vorhanden, weshalb wir zum 2. Term von $p(l_2)$ übergehen:

Como no existen más términos de 2° grado, pasaremos a tratar el 2° término de $p(l_2)$:

$$p(\dot{l}_2) = \varepsilon^2_{2\tilde{\omega}} \cdot \tilde{\omega}_1, \tag{3b}$$

wo $\tilde{\omega}_1 = \frac{\tilde{\omega}_1}{e} nt$ und $\overline{\tilde{\omega}}_1$ in erster Näherung linear in e, e', etc.; ferner ist

donde $\tilde{\omega}_1 = \frac{\overline{\tilde{\omega}}_1}{e} nt$ y $\overline{\tilde{\omega}}_1$ es en primera aproximación lineal en e, e', etc.; además es:

$$\varepsilon^2_{2\omega} = -\frac{2\sqrt{a}}{K} R^2_{a\tilde{\omega}} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{2K\sqrt{a}} e \left(1 + \frac{1}{4}e^2\right) R^2_{e\tilde{\omega}}.$$

Folglich sind $R^2_{a\tilde{\omega}}$ und $R^2_{e\tilde{\omega}}$ in den Termen niedrigsten Grades zugleich zu entnehmen aus

Por tanto hay que sacar $R^2_{a\tilde{\omega}}$ y $R^2_{e\tilde{\omega}}$ de los términos de grado más bajo, a saber, de:

$$R^2 = k^2 \frac{e}{2} C_0(a'')) \cos(l - \tilde{\omega}),$$

sodaß unter Potenzentwickelung nach e das Poisson-Glied entsteht:

de modo que, desarrollando en serie de potencias de e resulta:

$$P(p(l_2)) = -\frac{k^2}{K}\sqrt{a}\,\overline{\tilde{\omega}}_1 t \cos(l - \tilde{\omega}) \left\{ \frac{\partial C_0(a'')}{a} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{4a} C_0(a'') \right\}$$

Folglich ist in Bezug auf R^1_{ee} zu setzen:

Por lo tanto, para calcular $R^1_{\varepsilon\varepsilon}$, tomamos:

$$R^1 = k^2 \left\{ \frac{e}{2} C_0 \cos(l - \tilde{\omega}) + \frac{e'}{1} D_0 \cos(l - \tilde{\omega}') \right\}$$

sodaß als einziger Term 2. Grades verbleibt:

luego queda como único término de 2° grado:

$$s(p_3(a_3)) = -\frac{1}{4} a \left[\overline{C}''_{oa} - \frac{1}{4}\overline{C}_0(a'')\right] \left[e\overline{C}_0 + e'\overline{D}_0 \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\right] \frac{\overline{\tilde{\omega}}_1}{(1+m)^2}(nt)^2$$

Der folgende Term in $p(l_2)$ lautet dann:

El siguiente término de $p(l_2)$ es:

$$p(\dot{l}_2) = \varepsilon^1_{2e'} \cdot e'_1 \tag{3c}$$

wo $e'_1 = \bar{e}'_1\, nt$ und

donde $e'_1 = \bar{e}'_1\, nt$ y

$$\varepsilon^1_{2e'} = -\frac{2\sqrt{a}}{K} R^1_{ea'} + \frac{1}{2} e \frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}} R^1_{ee'}$$

Mithin sind nur die folgenden beiden Kombinationen in Bezug auf $R^1_{ae'}$ möglich:

Por consiguiente, sólo son posibles las siguientes combinaciones para obtener $R^1_{ae'}$:

$$R^1 = k^2 \frac{e'}{2} D_i \cos[il' - (i-1)l - \tilde{\omega}'], \qquad (\alpha)$$

sodaß

de modo que

$$P(p_3(l_2)) = -\frac{k^2}{K}\sqrt{a}\frac{\partial D_i}{\partial a}\frac{\bar{e}'_1 n't}{in' - (i-1)n} \sin[il' - (i-1)l - \tilde{\omega}'];$$

folglich muß R^1 hervorgehen aus:

Por lo tanto R^1 debe obtenerse de

$$R^1 = k^2 \frac{e}{2} C_i \cos[il' - (i-1)l - \tilde{\omega}]$$

sodaß

de manera que:

$$s(p_3(a_3)) = -\frac{1}{4} a \frac{(i-1)^2 n'}{in' - (i-1)n} \bar{C}_i \bar{D}_{ia} \frac{e\bar{e}_1'}{(1+m)^2} \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})(nt)^2$$

Im Falle (β) ist zwecks Ermittelung von $R^1_{ae'}$ und $R_{ee'}^1$ zu setzen:

En el caso (β) pondremos para la deducción de $R^1_{ae'}$ y $R^1_{ee'}$:

$$R^1 = k^2 \frac{ee'}{4} \left\{ F_i \cos[i(l'-l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}] + F_{-i} \cos[i(l'-l) + \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}] \right\}, \qquad (\beta)$$

sodaß der Poisson-Term lautet:

de tal modo que el término de Poisson es:

$$P(p(l_2)) = -\frac{1}{2}\frac{k^2}{K}\frac{n'e\bar{e}_1'}{i(n'-n)} t \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial F_i}{\partial a} - \frac{1}{4a} F_i\right) \sin[i(l'-l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}] \\ &+ \left(\frac{\partial F_i}{\partial a} - \frac{1}{4a} F_{-i}\right) \sin[i(l'-l) + \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}] \end{aligned} \right\}$$

Mithin ist $R^1_{\varepsilon\varepsilon}$ zu entnehmen aus:

Luego sacando $R^1_{\varepsilon\varepsilon}$ de:

$$R^1 = k^2 A_i \cos i(l'-l),$$

sodaß alsdann:

resulta:

$$s(p_3(a_3)) = \frac{1}{4} a \frac{in'}{n'-n} \bar{A}_i \left\{ \bar{F}_{ia} + \frac{1}{4}\bar{F}_i - \bar{F}_{-ia} - \frac{1}{4}\bar{F}_{-i} \right\} \frac{e\bar{e}_1'}{(1+m)^2} \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})(nt)^2$$

Weitere Glieder vom niedrigsten Grade (2) sind nicht möglich, sodaß wir zu dem nächsten Term von (3) übergehen können:

No siendo posibles términos de grado más bajo (2) podemos ocuparnos del próximo de (3) a saber:

$$p\,(l_2) = \varepsilon^1{}_{2\bar\omega'} \cdot \bar\omega'_1, \tag{3d}$$

wo

donde

$$\varepsilon^1{}_{2\omega'} = -\frac{2\sqrt{a}}{K} R^1{}_{a\omega'} + \frac{1}{2} e \frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}} R^1{}_{e\bar\omega'}.$$

Setzen wir, da $\varepsilon^1{}_{2\bar\omega'}$ mindestens vom 1. Grade, zuerst und als einziges Glied dieses Grades:

Ahora bien, ya que $\varepsilon^1{}_{2\bar\omega'}$ es por lo menos de 1er grado, escribiremos como término único de este grado:

$$R^1 = k^2 \frac{e'}{2} D_i \cos\left[il' - (i-1)\,l - \bar\omega'\right], \tag{α}$$

so wird:

de donde:

$$P\,(p\,(l_2)) = \frac{k^2}{K}\sqrt{a}\,\frac{\partial D_i}{\partial a}\,\frac{\bar{\bar\omega}'_1 n' t}{in' - (i-1)\,n} \cos\left[il' - (i-1)\,l - \bar\omega'\right],$$

und deshalb in Bezug auf $R^1{}_{ee}$:

y por tanto se debe calcular $R^1{}_{\varepsilon\varepsilon}$ de:

$$R^1 = k^2 \left\{ \frac{e}{2} C_i \cos\left[il' - (i-1)\,l - \bar\omega\right] + \frac{e'}{1} D_i \cos\left[il' - (i-1)\,l - \bar\omega'\right] \right\}$$

also

luego

$$s\,(p_3\,(a_3)) = -\frac{1}{4}\,a\,\frac{n'(i-1)^2}{in' - (i-1)\,n}\,\bar D_{ia} \left\{ \bar C_i e \cos(\bar\omega' - \bar\omega) + \bar D_i e' \right\} \frac{\bar{\bar\omega}'_1}{(1+m)^2}\,(nt)^2.$$

Setzt man weiter in $\varepsilon^1{}_{2\bar\omega'}$ ein Glied 2. Grades in R^1 an, so ist nur ein einziger Term möglich:

Si introducimos en $\varepsilon^1{}_{2\bar\omega'}$ el siguiente término de 2º grado de R^1, único posible:

$$R^1 = k^2 \frac{ee'}{4} \left\{ F_i \cos\left[i\,(l' - l) - \bar\omega' + \bar\omega\right] + F_{-i} \cos\left[i\,(l - l) + \bar\omega' - \bar\omega\right] \right\}, \tag{β}$$

sodaß:

resulta:

$$P\,(p\,(l_2)) = \frac{1}{2}\frac{k^2}{K}\sqrt{a}\,\frac{n'}{i\,(n'-n)}\,\bar{\bar\omega}'_1 e t \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial F_i}{\partial a} - \frac{1}{4a} F_i\right) \cos\left[il' - (i-1)\,l - \bar\omega' + \bar\omega\right] \\ &- \left(\frac{\partial F_{-i}}{\partial a} - \frac{1}{4a} F_{-i}\right) \cos\left[il' - (i-1)\,l + \bar\omega' - \bar\omega\right) \end{aligned} \right\}$$

Folglich muß in Bezug auf $R^1{}_{\varepsilon\varepsilon}$ gewählt werden:

Por consiguiente debemos elegir para obtener $R^1{}_{\varepsilon\varepsilon}$:

$$R^1 = k^2 A_i \cos i\,(l' - l),$$

sodaß der Säkularteil

de manera que la parte secular :

$$s\,(p_3\,(a_3)) = -\frac{1}{4}\,a\,\frac{n'i}{n'-n}\,\frac{\overline{A}_i}{(1+m)^2}\left\{(\overline{F}_{ia} - \overline{F}_{-ia}) - \frac{1}{4}(\overline{F}_i - \overline{F}_{-i})\right\} e\overline{\tilde\omega}'_1 \cos(\tilde\omega' - \tilde\omega)\,(nt)^2$$

Gehen wir nun zum nächsten Term von $p\,(l_2)$ über, so erhalten wir :

Si procedemos ahora a tratar el próximo término de $p(\dot{l}_2)$, tendremos :

$$p\,(\dot{l}_2) = \varepsilon^2_{2e''}\,.\,e''_1, \tag{3e}$$

wo $e''_1 = \overline{e}''_1 n''t$ mit $\overline{e}''_1$ vom 1. Grade in e', e''', etc., und

donde $e''_1 = \overline{e}''_1 n''t$, y $\overline{e}''_1$ es de 1$^{\text{er}}$ grado en e', e'', etc., y

$$\varepsilon^2_{2e''} = -\frac{2\sqrt{a}}{K}\,R^2_{ae''} + \frac{1}{2}\,e\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}}\,R^2_{ee''}.$$

Substituieren wir in Bezug auf $R^2_{ae''}$ das Glied 1. Grades :

Si tomamos, ahora, para calcular $R^2_{ae''}$, el término de 1$^{\text{er}}$ grado :

$$R^2 = k^2\,\frac{e''}{2}\,D_0\,(a'')\cos(l - \tilde\omega''),$$

so wird zuerst :

resulta :

$$P\,(p\,(l_2)) = -\frac{k^2}{K}\sqrt{a}\,\frac{n''}{n}\,\frac{\partial D_0\,(a'')}{\partial a}\,\overline{e}''_1 t \sin(l - \tilde\omega'').$$

Folglich ergibt sich R^1 aus

Por consiguiente se obtiene R^1 de :

$$R^1 = k^2\left\{\frac{e}{2}\,C_0\cos(l - \tilde\omega) + \frac{e'}{2}\,D_0\cos(l - \tilde\omega')\right\}$$

sodaß folglich das Säkularglied resultiert :

de manera que resulta el término secular :

$$s\,(p_3\,(a_3)) = \frac{1}{4}\,a\,\frac{n''}{n}\,\overline{D}_{0a}\,(a'')\left\{\overline{C}_0 e \sin(\tilde\omega - \tilde\omega'') + D_0 e' \sin(\tilde\omega' - \tilde\omega'')\right\}\frac{\overline{e}''_1}{(1+m)^2}\,(nt)^2$$

Weitere Glieder 2. Grades sind nicht vorhanden und der Term $e\,.\,R^2_{ee''}$ in $\varepsilon^2_{2e''}$ führt zu Gliedern vom mindestens 4. Grade. Deshalb gehen wir zum vorletzten Term von $p\,(l_2)$ über :

No existen más términos de 2° grado y el término $e\,.\,R^2_{ee''}$ de $\varepsilon^2_{2e''}$ conduce a términos de 4° grado por lo menos. Por eso trataremos el penúltimo término de $p\,(l_2)$:

$$p\,(\dot{l}_2) = \varepsilon^2_{2\tilde\omega''}\,.\,\tilde\omega''_1 \quad \text{wo} \quad \tilde\omega''_1 = \frac{\overline{\tilde\omega}''_1}{e''}\,n''t \tag{3f}$$

und $\bar{\omega}_1''$ linear in e', e''', etc., beginnt, u.

y $\bar{\omega}''_1$ empieza con términos lineales en e', e''', etc., y

$$\varepsilon^2{}_{2\bar{\omega}''} = -\frac{2\sqrt{a}}{K} R^2{}_{a\bar{\omega}''} + \frac{1}{2} e \frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}} R^2{}_{e\bar{\omega}''}. \tag{3f}$$

Mithin folgt $R^2{}_{a\bar{\omega}''}$ im niedrigsten Grade aus:

Por eso resulta $R^2{}_{a\bar{\omega}''}$, en el caso de menor grado de:

$$R^2 = k^2 \frac{e''}{2} D_0(a'') \cos(l - \bar{\omega}''),$$

sodaß

de manera que

$$P(p(\dot{l}_2)) = \frac{k^2}{K}\sqrt{a}\,\frac{n''}{n}\frac{\partial D_0(a'_{,})}{\partial a}\,\bar{\omega}''_1 t \cos(l - \bar{\omega}'');$$

mithin muß sein:

por eso debe ser:

$$R^1 = k^2 \left\{ \frac{1}{2} e C_0 (l - \bar{\omega}) + \frac{1}{2} e' D_0 \cos(l - \bar{\omega}') \right\}$$

sodaß:

luego:

$$s(p_3(\alpha_3)) = -\frac{1}{4} a \frac{n''}{n} \bar{D}''_{0a} \left\{ e\bar{C}_0 \cos(\bar{\omega} - \bar{\omega}'') + e' D_0 \cos(\bar{\omega}' - \bar{\omega}'') \right\} \frac{\bar{\omega}''_1}{(1+m)^2} (nt)^2.$$

Weitere Glieder 2. Grades treten nicht auf, da die aus dem 2. Term in $\varepsilon^2{}_{2\bar{\omega}''}$ folgenden Glieder mindestens vom 4. Grade werden.

No aparecen otros términos de 2° grado ya que los que resultan del 2° término de $\varepsilon^2{}_{2\bar{\omega}''}$ son por lo menos de 4° grado.

Das letzte Glied von $p(\dot{l}_2)$ lautet schließlich:

Finalmente el último término de $p(\dot{l}_2)$ originado en ρ_2 es:

$$p(\dot{l}_2) = -\frac{3}{2}\frac{n_0}{a_0} a_2, \tag{3g}$$

hervorgegangen aus ρ_2. Dabei hat a_2 dieselbe Bedeutung wie oben im Falle (1), sodaß die Integrale $P(p(a_2))$ direkt von dort entnommen werden können. Folglich erhält man nach Berücksichtigung des Faktors von a_2 in (3g) und Integration im Falle des Termes niedrigsten Grades nach (1a):

En este caso a_2 tiene el mismo significado que en el caso (1), de manera que las integrales $P(p(a_2))$ se pueden obtener directamente de allí. Por consiguiente, se obtiene, considerando el factor de a_2 en (3g) e integrando en el caso del término de grado más bajo según (1a):

$$P(p(\dot{l}_2)) = -\frac{3}{2}\frac{k^2}{K}\frac{1}{\sqrt{a}} C_0(a'')\,\bar{e}_1 t \sin(l - \bar{\omega}); \tag{α}$$

folglich ist $R^1{}_{\varepsilon\varepsilon}$ zu entnehmen aus:

por consiguiente debemos sacar $R^1{}_{\varepsilon\varepsilon}$ de:

$$R^1 = k^2 \frac{e'}{2} D_0 \cos (l - \tilde{\omega}'),$$

sodaß dann nach (3):

de manera que según (3):

$$s(p_3(a_3)) = \frac{3}{8} a\bar{C}_0(a'') \bar{D}_0 \frac{e'\bar{e}_1}{(1+m)^2} \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})(nt)^2.$$

Weitere Terme 2. Grades sind nicht vorhanden. Das nächste Glied von a_2 folgt aus ($1b$), sodaß:

No existen más términos de 2° grado. El próximo término de a_2 sigue de ($1b$), luego:

$$P(p(l_2)) = \frac{3}{2}\frac{k^2}{K}\frac{1}{\sqrt{a}} C_0(a'') \bar{\tilde{\omega}}_1 t \cos(l - \tilde{\omega}); \qquad (\beta)$$

folglich ergibt sich $R^1_{\varepsilon\varepsilon}$ aus:

por consiguiente $R^1_{\varepsilon\varepsilon}$ se obtiene de:

$$R^1 = k^2 \left\{ \frac{1}{2} eC_0 \cos(l - \tilde{\omega}) + \frac{1}{2} e'D_0 \cos(l - \tilde{\omega}') \right\}$$

sodaß sich nach (3) ergibt:

de manera que resulta por (3):

$$s(p_3(a_3)) = -\frac{3}{8} a \frac{C_0(a'')}{(1+m)^2} \left\{ eC_0 + e'\bar{D}_0 \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \right\} \bar{\tilde{\omega}}_1 (nt)^2.$$

Infolge Mangels weiterer Gliedes 2. Grades folgt jetzt weiter nach (1^c), Fall (α):

A falta de otros términos de 2° grado sigue ahora por ($1c$), caso (α):

$$P(p(l_2)) = -\frac{3}{2}\frac{k^2}{K}\frac{n}{\sqrt{a}} D_i \frac{(i-1)n'}{[in' - (i-1)n]^2} \bar{e}'_1 t \sin[il' - (i-1)l - \tilde{\omega}'] \qquad (\gamma)$$

Also muß in Bezug auf $R^1_{\varepsilon\varepsilon}$ gewählt werden:

Por consiguiente debe obtenerse $R^1_{\varepsilon\varepsilon}$, de:

$$R^1 = k^2 \frac{e}{2} C_i \cos[il' - (i-1)l - \tilde{\omega}]$$

sodaß folglich:

luego:

$$s(p_3(a_3)) = \frac{3}{8} a \frac{(i-1)^3 nn'}{[in' - (i-1)n]^2} \bar{C}_i \bar{D}_i \frac{e\bar{e}'_1}{(1+m)^2} \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})(nt)^2$$

Zum Falle (β) von (1_c) übergehend ergibt sich;

Pasando al caso (β) de ($1c$) resulta:

$$P(p(l_2)) = \frac{3}{4}\frac{k^2}{K}\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{nn'}{i(n-n')^2} e\bar{e}'_1 t \left\{ \begin{array}{l} F_i \sin[i(l'-l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}] \\ + F_{-i} \sin[i(l'-l) + \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}] \end{array} \right\}. \qquad (\delta)$$

Mithin Muß $R^1_{\varepsilon\varepsilon}$ abgeleitet werden aus:

Por tanto debemos deducir $R^1_{\varepsilon\varepsilon}$ de:

$$R^1 = k^2 A_i \cos i (l' - l),$$

sodaß : luego :

$$s (p_3 (a_3)) = \frac{3}{8} a \frac{inn'}{(n' - n)^2} \overline{A}_i (\overline{F}_i - \overline{F}_i) \frac{\overline{ee'_1}}{(1 + m)^2} \sin (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (nt)^2.$$

Da dieser Term der einzige vom 2. Grade ist, gehen wir nun zu (1*d*), Fall (α) über, wonach sich das Poisson-Glied ergibt :

Ya que este término es el único de 2° grado, consideraremos ahora el (1*d*) caso (α), de donde resulta el término de Poisson :

$$P (p (l_2)) = \frac{3}{2} \frac{k^2}{K} \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{(i - 1) nn'}{[in' - (i - 1) n]^2} \overline{D}_i \overline{\tilde{\omega}}'_1 t \cos [il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}'] ; \quad (\varepsilon)$$

folglich ergibt sich $R^1_{\varepsilon\varepsilon}$ aus :

por consiguiente $R^1_{\varepsilon\varepsilon}$ debe deducirse de :

$$R^1 = k^2 \left\{ \frac{1}{2} eC_i \cos [il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}] + \frac{1}{2} e' D_i \cos [il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}'] \right\},$$

weshalb als Säkularterm folgt :

de manera que

$$s (p_3 (a_3)) = - \frac{3}{8} a \frac{(i - 1)^3 nn'}{[in' - (i - 1) n]^2} \overline{D}_i \left\{ e\overline{C}_i + e'\overline{D}_i \right\} \frac{\tilde{\omega}'_1}{(1 + m)^2} \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (nt)^2.$$

Als 2. Möglichkeit folgt nach (β) von (1*d*) :

Una segunda posibilidad resulta del (β) de (1*d*) :

$$P (p (l_2)) = - \frac{3}{4} \frac{k^2}{K} \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{nn'}{i (n' - n)^2} \left\{ \begin{array}{l} + F_i \cos [i (l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}] \\ - F_{-i} \cos [i (l' - l) + \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}] \end{array} \right\} e\overline{\tilde{\omega}}'_1 . t \quad (\zeta)$$

sodaß luego

$$R^1 = k^2 A_i \cos i (l' - l)$$

zu setzen ist und somit :

y por tanto :

$$s (p_3 (a_3)) = \frac{3}{8} a \frac{inn'}{(n' - n)^2} \overline{A}_i \left\{ \overline{F}_i - \overline{F}_{-i} \right\} \frac{e\overline{\tilde{\omega}}'_1}{(1 + m)^2} \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (nt)^2$$

In Bezug auf den nächsten Term auf Grund von (1*e*) gilt dieselbe Bemerkung wie unter (1*c*); folglich ist der entsprechende P-Term direkt aus (γ) zu entnehmen, wenn $i = 0$ gesetzt und m', a', e', ..., mit m'', a'', e'', ..., vertauscht werden, sodaß :

Con referencia al próximo término (1*e*), vale la misma observación que en (1*c*) ; hay que sacar por tanto el término correspondiente de Poisson directamente de (γ), poniendo $i = 0$ y permutando m', a', e', ..., con m'', a'', e'', ... de modo que :

$$P (p (l_2)) = \frac{3}{2} \frac{k^2}{K} \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{n''}{n} D_0 (a'') \overline{e}_1'' . t \sin (l - \tilde{\omega}'') ; \quad (\eta)$$

mithin folgt:

luego resulta:

$$R^1 = k^2 \left\{ \frac{1}{2} eC_0 \cos(l - \tilde{\omega}) + \frac{1}{2} e'D_0 \cos(l - \tilde{\omega}') \right\},$$

sodaß:

y además:

$$s\,(p_3\,(a_3)) = \frac{3}{8}\, a\, \frac{n''}{n}\, D_0\,(a'') \left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_0 e \sin(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \\ + \bar{D}_0 e \sin(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \end{array} \right\} \frac{\bar{e}''_1}{(1 + m)^2}\, (nt)^2.$$

Der nächste Term folgt aus $(1f)$ und bedingt in $p\,(\dot{a}_2)$ von $(1d)$ dieselben Vertauschungen wie im vorhergegangenen Falle nebst Substitution $i = 0$, sodaß folglich:

El próximo término sigue de $(1f)$ y exige efectuar en $p\,(\dot{a}_2)$ de $(1d)$ las mismas permutaciones que en el caso precedente, y poner $i = 0$, de manera que:

$$P\,(p\,(l_2)) = -\frac{3}{2}\frac{k^2}{K}\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{n''}{n}\, D_0\,(a'')\, \bar{\tilde{\omega}}''_1 t \cos(l - \tilde{\omega}''); \qquad (6)$$

mithin ist $R^1_{\varepsilon\varepsilon}$ zu entnehmen aus:

por consiguiente debemos sacar $R^1_{\varepsilon\varepsilon}$ de:

$$R^1 = k^2 \left\{ \frac{1}{2} eC_0 \cos(l - \tilde{\omega}) + \frac{1}{2} e'D_0 \cos(l - \tilde{\omega}') \right\}$$

sodaß:

de modo que:

$$s\,(p_3\,(a_3)) = \frac{3}{8}\, a\, \frac{n''}{n}\, D_0\,(a'') \left\{ e\bar{C}_0 \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) + e'\bar{D}_0 \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \right\} \frac{\bar{\tilde{\omega}}''_1}{(1 + m)^2}\, (nt)^2.$$

Weiter gehen wir nun zum nächsten Term unserer Hauptgruppe über, wonach:

Si pasamos ahora al próximo término de nuestro grupo principal, obtendremos:

$$p_4\,(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K}\, R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}} \cdot \tilde{\omega}_2, \qquad (4)$$

wobei

donde

$$p\,(\dot{\tilde{\omega}}_2) = \tilde{\omega}^2_{2e} e_1 + \tilde{\omega}^2_{2\tilde{\omega}} \tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}^1_{2e'} e'_1 + \tilde{\omega}^1_{2\tilde{\omega}'} \tilde{\omega}'_1 + \tilde{\omega}_{2e''} e''_1 + \tilde{\omega}^2_{2\tilde{\omega}''} \tilde{\omega}''_1.$$

Alsdann ist also der 1. Fall:

Entonces, el primer caso es:

$$p\,(\dot{\tilde{\omega}}_2) = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{K\sqrt{a}}\, \frac{1}{e} \left\{ R^2_{ee} - \frac{1}{e\,(1 - e^2)}\, R^2_e \right\} \cdot e_1 \qquad (4a)$$

wo $e_1 = \bar{e}_1\, nt$.

donde $e_1 = \bar{e}_1\, nt$.

Die Ableitungen R_e^2 und R_{ee}^2 setzen in R^2 den 1. resp. 2. Grad voraus, sodaß zuerst:

Las derivadas R^2_e y R^2_{ee} presuponen que R^2 sea, respectivamente, de 1° y 2° grado de modo que en primer lugar es:

$$R^2 = k^2 \frac{1}{2} eC_0 (a'') \cos (l - \tilde{\omega}) \tag{α}$$

und folglich:

y por consiguiente:

$$P(p(\tilde{\omega})) = -\frac{1}{2}\frac{k^2}{K}\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{C''_0}{e^2\sqrt{1-e^2}}\bar{e}_1 t \sin (l - \tilde{\omega}),$$

sodaß der Faktor $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ = Cos-Reihe nur aus speziellen Termen 3. Grades entnommen werden muß d.h.

luego el factor $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ = serie de cosenos sólo puede lograrse de términos especiales de 3er grado, es decir, de

$$R^1 = k^2 \left\{ \frac{1}{8} e^2 e' L_0 \cos (l + \tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) + \frac{1}{8} ee'^2 M_0 \cos (l - 2\tilde{\omega}' + \tilde{\omega}) \right\}$$

Dann wird

Entonces, resulta:

$$s(p_4(a_3)) = \frac{1}{16} a\bar{C}_0 (a'') \left\{ \begin{array}{l} \bar{L}_0 e' \sin (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \\ + \frac{1}{2}\frac{e'^2}{e} \bar{M}_0 \sin (2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) \end{array} \right\} \frac{\bar{e}_1}{(1+m)^2} (nt)^2.$$

Das 2. Glied mit dem Pol $e = 0$ muß sich wegheben und zwar in diesem Falle gegen einen entsprechenden Term in $p_{13}(a_3)$, Fall (b').

Eine Vertauschung von R^1 mit R^2 und umgekehrt im Unterfalle (α) bringt ebenfalls Terme 2. Grades hervor, sodaß wir demetsprechend setzen:

El 2° término con el polo $e = 0$ debe eliminarse, en el caso presente, con el término respectivo de $p_{13}(a_3)$, caso (b').

Una permutación de R^1 con R^2, y recíprocamente, en el subcaso (α), origina también términos de 2° grado; por consiguiente, escribiremos:

$$R^1 = k^2 \frac{e}{2} C_0 \cos (l - \tilde{\omega}) \tag{β}$$

sodaß $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ eine Cos-Reihe ist, während $p(\dot{\tilde{\omega}}_2) = t \cos A$, also $p(\tilde{\omega}_2) = t \sin A$ in Bezug auf den Poisson-Term, sodaß Terme der Form $\cos (l - \tilde{\omega})$ in R^2 wirkungslos und deshalb von vorneweg zu vernachlässigen sind. Folglich bleibt R^2 beschränkt auf:

de manera que $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ es una serie de cosenos, mientras que es: $p(\dot{\tilde{\omega}}_2) = t \,.\cos A$, de donde, refiriéndonos al término de Poisson, $p(\tilde{\omega}_2) = t\,.$ sen A, ya que se pueden despreciar de antemano los términos de la forma $\cos (l - \tilde{\omega})$ de R^2, pues no vienen al caso. Luego R^2 queda limitado a:

$$R^2 = k^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{8} e^2 e'' K''_0 \cos (l - \tilde{\omega}'') + \frac{1}{8} e^2 e'' L''_0 \cos (l + \tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}) \\ + \frac{1}{8} ee''^2 M''_0 \cos (l - 2\tilde{\omega}'' + \tilde{\omega}) \end{array} \right\}.$$

Bildet man dann die Parenthese in $p(\dot{\tilde{\omega}}_2)$, so findet man den Ausdruck, frei von den Termen in K_0 und L_0:

Si se forma entonces el paréntesis de $p(\dot{\tilde{\omega}}_2)$ se halla la expresión siguiente, libre de términos en K_0 y L_0:

$$R^2_{ee} - \frac{1}{e(1-e^2)} R^2_e = -\frac{1}{8} k^2 (1 + e^2) \cdot \frac{e''^2}{e} M''_0 \cos[l - 2\tilde{\omega}'' + \tilde{\omega})$$

sodaß

luego

$$P(p(\dot{\tilde{\omega}}_2)) = -\frac{1}{8}\frac{k^2}{K}\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}(1+e^2)\frac{e''^2}{e^2} M''_0 e\bar{i}t \sin(l - 2\tilde{\omega}'' + \tilde{\omega})$$

Unter Verwendung des schon fixierten Ausdruckes für R^1 zur Ableitung von $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ folgt dann:

Empleando la expresión ya fijada de R^1, para la deducción de $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ resulta, pues:

$$s(p_4(a_3)) = \frac{1}{32} a\, \bar{C}_0 \bar{M}_0'' \frac{e''^2}{e} \frac{\bar{e}_1}{(1+m)^2} \sin(2\tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega})(nt)^2$$

Dieses mit dem Pol $e = 0$ behaftete Glied hebt sich gegen den entsprechenden Term in $p_{13}(a_3)$, Fall (a') im letzten Term der dortigen Klammer fort. Hätte man in dem Ausdruck für $P(p(\dot{\tilde{\omega}}_2))$ den in dem Factor

Este término afectado por el polo $e = 0$ se elimina con el término correspondiente de $p_{13}(a_3)$, caso (a'), último término del paréntesis. Si hubiéramos considerado, en la expresión de $P(p(\dot{\tilde{\omega}}_2))$, el término en e^2 que figura en el factor

$$\sqrt{1-e^2}(1+e^2) = 1 + \frac{1}{2}e^2$$

auftretenden Term in e^2 berücksichtigt, so wären in $p_4(a_3)$ Terme 4. Grades erschienen.

habrían aparecido en $p_4(a_3)$ términos de 4° grado.

Soll der Term R^2_{ee} in $(4a)$, $p(\dot{\tilde{\omega}}_2)$ von 0 verschieden sein, so ist zu setzen:

Si el término R^2_{ee} de $p(\dot{\tilde{\omega}}_2)$, $(4a)$ debe ser distinto de 0, hay que poner:

$$R^2 = k^2 \frac{e^2}{4} E''_0 \cos(2l\,2 - \tilde{\omega}) \qquad (\gamma)$$

sodaß bei Kombination mit dem anderen Term R^2_e in $p(\dot{\tilde{\omega}}_2)$ bei Entwickelung des Nenners nach Potenzen von e^2 folgt

de manera que por combinación con el otro término R^2_e, $p(\dot{\tilde{\omega}}_2)$ resulta, desarrollando el denominador en serie de potencias de e^2:

$$R^2_{ee} - \frac{1}{e(1-e)^2} R^2_e = -\frac{1}{2} k^2 E''_0 e^2 \cos(2l - 2\tilde{\omega}).$$

Ein analoger Term 2. Grades in e entsteht aber schon in R^2_{ee} allein, wenn diese Ableitung aus

Pero un término análogo de 2° grado de e se forma ya en R^2_{ee}, si esta derivada se obtiene de un término einem Terme 4. Grades und zwar derselben Form $\cos(2l - 2\tilde{\omega})$ entnommen wird. Da alsdann die Funktion $p(\dot{\tilde{\omega}}_2)$ nach $(4a)$ vom 2. Grade wird, nämlich $e \cdot \bar{e}_1$, so wird $p_4(\dot{a}_3)$ nach Entnahme des Faktors $R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ aus dem Terme 2. Grades $R^1 = e \cdot e' \cos(2l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$ vom 4. Grade, sodaß folglich der entstehende Term gegenüber dem Terme (α) (vom 2. Grade) zu vernachlässigen ist.

de 4° grado con argumento de la misma forma, o sea $\cos(2l - 2\tilde{\omega})$. Ya que entonces, la función $p(\dot{\tilde{\omega}}^2)$ es por $(4a)$ de 2° grado, es decir, $e \cdot \bar{e}_1$, resultará $p_4(a_3)$ de 4° grado, si se calcula previamente $R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ del término de 2° grado : $R^1 = e \cdot e' \cos(2l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$, de manera que el término producido es despreciable en comparación con el (α) (de 2° grado).

Wählen wir in R^2 einen mit dem Faktor $e \cdot e''$ versehenen Term 2. Grades, sodaß $R^2{}_{ee} = 0$, so kommt zuerst das folgende Glied in Frage :

Si elegimos en R^2 un término de 2° grado con el factor $e \cdot e''$. resulta : $R^2{}_{ee} = 0$, y debemos entonces considerar, en primer lugar, el término siguiente :

$$R^2 = k^2 \frac{ee''}{4} G_0(a'') \cos(2l - \tilde{\omega}'' - \tilde{\omega});$$

alsdann wird also :

resultando :

$$P(p(\dot{\tilde{\omega}}_2)) = -\frac{1}{8}\sqrt{1 - e^2}\,\frac{k^2}{K}\,\frac{G''_0\, e''\bar{e}_1}{\sqrt{a}\;\; e^2}\, t \sin(2l - \tilde{\omega}'' - \tilde{\omega});$$

folglich ist $R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ zu entnehmen aus :

Por consiguiente $R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ debe obtenerse de :

$$R^1 = k^2 \frac{ee'}{4} G_0 \cos(2l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}).$$

Alsdann lautet der entsprechende Säkularteil :

luego la parte secular correspondiente se expresa así:

$$s(p_4(a_3)) = -\frac{1}{32}\, a\sqrt{1 - e^2}\,\frac{\overline{G}_0 \overline{G}''_0}{(1 + m)^2}\,\frac{e'e''}{e}\,\bar{e}_1 \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}'')\,(nt^2)$$

Es ergibt sich also ein den Pol $e = 0$ enthaltendes Glied, das sich gegen den korrespondierenden Term in $p_{13}(a_3)$, (c') weghebt. Sonst sind keine weiteren regulären Glieder 2. Grades mehr vorhanden, weshalb wir nun zum nächsten Term übergehen :

Resulta, pues, un término que contiene el polo $e = 0$ y que se elimina con el término correspondiente $p_{13}(a_3)$, (c'). Como ya no quedan otros términos regulares de 2° grado, vamos a ocuparnos del próximo término :

$$p(\dot{\tilde{\omega}}_2) = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{K\sqrt{a}}\,\frac{1}{e}\,R^2{}_{e\tilde{\omega}} \cdot \tilde{\omega}_1, \qquad \text{wo} \qquad \tilde{\omega}_1 = \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e}\, nt. \tag{4b}$$

Zur Ableitung von $R^2{}_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ ist im Falle der Terme niedrigsten Grades zu setzen :

Para la deducción de $R^2{}_{\varepsilon\tilde{\omega}}$, en el caso del término de grado más bajo, debemos escribir :

$$R^2 = k^2 \frac{e}{2} C''_0 \cos(l - \tilde{\omega}), \tag{α}$$

sodaß

de manera que

$$P(p(\tilde{\omega}_2)) = -\frac{1}{2}\frac{k^2}{K}\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}C_0''\frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e^2}t\cos(l-\tilde{\omega}),$$

weshalb $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ zu folgern ist mittels:

por lo cual $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ debe resultar de:

$$R^1 = k^2\frac{e}{2}C_0\cos(l-\tilde{\omega}).$$

Alsdann wird:

Entonces se obtiene:

$$s(p_4(a_3)) = -\frac{1}{8}a\cdot\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\bar{C}''_0\cdot\bar{C}_0\frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e}(nt)^2$$

Dieses Polglied muß such wegheben und zwar gegen den korrespondierenden Term (α) in $p_{13}(a_3)$ 1. Glied.

Glieder 2. Grades unter Beibehaltung desselben R^2, also auch des gleichen $P(p(\tilde{\omega}_2))$ treten ein, wenn wir in Bezug auf $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ die Glieder vom 3. Grade heranziehen, nämlich:

Este término con polo se eliminará con el término correspondiente (α) de $p_{13}(a_3)$, 1$^{\text{er}}$ término.

Conservando el mismo R^2, es decir, el mismo $P(p(\tilde{\omega}_2))$, se obtendrán términos de 2° grado, si se aprovechan para calcular R^1, los términos de 3$^{\text{er}}$ grado:

$$R^1 = k^2\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{8}e^3J_0\cos(l-\tilde{\omega}) + \frac{1}{8}ee'^2N_0\cos(l-\tilde{\omega}) + \frac{1}{8}e^2e'L_0\cos(l+\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega})\\ +\frac{1}{8}ee'^2M_0\cos(l-2\tilde{\omega}'+\tilde{\omega})\end{array}\right\}, \qquad (\beta)$$

sodaß alsdann als Säkularglied erhalten wird:

de manera que sigue como término secular:

$$s(p_4(a_3)) = -\frac{1}{16}a\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\bar{C}_0''\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}e^2J_0 + \frac{1}{2}e'^2N_0 + ee'\bar{L}_0\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\\ -\frac{1}{2}e'^2\bar{M}_0\cos(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega})\end{array}\right\}\frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e}(nt)^2$$

sodaß das 2. und 4. Glied der Klammer einen Pol $e = 0$ besitzen, der aber durch die Kombination des obigen Ausdruckes mit dem entgegengesetzt gleichen Term in $p_{13}(a_3)$, Fall (γ) in Wegfall kommt.

Entnimmt man weiter $R^2_{e\tilde{\omega}}$ aus dem folgenden Term 2. Grades von

de modo que los términos 2° y 4° del paréntesis poseen un polo $e = 0$, pero se eliminan por combinación de la expresión mencionada con el término igual, pero de signo contrario, de $p_{13}(a_3)$ caso (γ).

Si se saca además, $R^2_{e\tilde{\omega}}$ del término siguiente 2° grado

$$R^2 = k^2\frac{1}{4}e^2E_0''\cos(2l-2\tilde{\omega}) + \frac{1}{4}ee''G_0''\cos(2l-\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}) \qquad (\gamma)$$

so erhält man:

se obtiene

$$P(p(\tilde{\omega}_2)) = -\frac{1}{4}\frac{k^2}{K}\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}\frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e^2}\cdot t\left\{\begin{array}{l} 2eE''_0\cos(2l-2\tilde{\omega}) \\ +\frac{1}{2}e''G_0''\cos(2l-\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}) \end{array}\right\}.$$

Folglich ist $R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ abzuleiten aus

Por consiguiente, debemos deducir $R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ de:

$$R^1 = k^2\frac{1}{4}e^2E_0\cos(2l-2\tilde{\omega}) + \frac{1}{4}ee'G_0\cos(2l-\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}),$$

sodaß wir alsdann den Säkularterm erhalten:

de manera que se obtiene, como término secular:

$$s(p_4(a_3)) = -\frac{1}{16}a\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\left\{\begin{array}{l} 4e^2E_0\bar{E}_0'' + ee''\bar{E}_0G_0''\cos(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}) \\ +2ee'\bar{E}_0''\bar{E}\bar{G}_0\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) + \frac{e'e''}{2}\bar{G}_0\bar{G}_0''\cos(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}') \end{array}\right\}\frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e}(nt)^2$$

Der letzte den Pol $e=0$ enthaltende Term der Klammer hebt sich gegen den engegengesetzt-gleichen 2. Term (ε) von $p_{13}(a_3)$ fort.

Um weitere Glieder 2. Grades in $s(p_4(a_3))$ zu erhalten, sind noch die folgenden Terme 3. Grades in R^2 zur Ableitung von $R^2{}_{e\tilde{\omega}}$ zu berücksichtigen:

El último término del paréntesis contiene el polo $e=0$ y se elimina con el segundo término, igual pero de signo contrario (ε) $p_{13}(a_3)$.

Para obtener otros términos de 2º grado en $s(p_4(a_3))$, debemos considerar todavía los siguientes de 3er grado de R^2, para deducir $R^2{}_{e\tilde{\omega}}$:

$$R^2 = k^2\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{8}e^3J''\cos(l-\tilde{\omega}) + \frac{1}{8}e^2e''L_0''\cos(l+\tilde{\omega}''-2\tilde{\omega}) \\ +\frac{1}{8}ee''^2M_0''\cos(l-2\tilde{\omega}''+\tilde{\omega}) + \frac{1}{8}ee''^2N_0''\cos(l-\tilde{\omega}) \end{array}\right\} \qquad (\delta)$$

Dann wird

Entonces resulta:

$$P(p(\tilde{\omega}_2)) = \frac{1}{2}\frac{k^2}{K}\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}\frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e^2}t\left\{\begin{array}{l} -\frac{3}{4}e^2J_0''\cos(l-\tilde{\omega}) - ee''^2L_0''\cos(l+\tilde{\omega}''-2\tilde{\omega}) \\ +\frac{1}{4}e''^2M_0''\cos(l-2\tilde{\omega}''+\tilde{\omega}) - \frac{1}{4}e''^2N_0''\cos(l-\tilde{\omega}) \end{array}\right\}$$

Folglich haben wir $R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ zu entnehmen aus:

Por consiguiente, tenemos que sacar $R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ de:

$$R^1 = k^2\frac{e}{2}C_0\cos(l-\tilde{\omega}),$$

womit sich dann ergibt:

de donde resulta:

$$s(p_4)(a_3)) = -\frac{1}{8}a\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\left\{\begin{array}{l} \frac{3}{4}e^2\bar{J}_0'' + ee''\bar{L}_0''\cos(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}) \\ -\frac{1}{4}e''^2\bar{M}''_0\cos(2\tilde{\omega}''-2\tilde{\omega}) \\ +\frac{1}{4}e''^2\bar{N}_0'' \end{array}\right\}\frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e}(nt)^2.$$

Der 3. und 4. Term des Klammerausdruckes mit dem Pol $e = 0$ heben sich gegen korrespondierende Terme in p_{13} (a_3), Fall (β) fort, 2. und 4. Glied.

Weiter ergibt sich als nächster Fall :

Los términos 3° y 4° del paréntesis, con el polo $e = 0$, se eliminan con los términos correspondientes de p_{13} (a_3), caso (β) términos 2° y 4°.

El próximo caso que se presenta es:

$$p\,(\dot{\tilde\omega}_2) = \tilde\omega^1{}_{2e'} \cdot e'_1, \tag{4c}$$

wo e_1' der Säkularteil $e_1' = e'_1 \,.\, n't$ und

donde e'_1 es la parte secular $e'_1 = e'\, n't$ y

$$\tilde\omega^1{}_{2e'} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{K\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{e} R^1{}_{ee'}.$$

Wegen $R^1{}_{ee'}$ ist R^1 mindestens vom 2. Grade und zwar :

Para formar $R^1{}_{ee}$ debe ser R^1 al menos de 2° grado, es decir :

$$R^1 = k^2 \left\{ \frac{ee'}{4} F_i \cos\left[i\,(l' - l) - \tilde\omega' + \tilde\omega\right] + \frac{ee'}{4} F_{-i} \cos\left[i\,(l' - l) + \tilde\omega' - \tilde\omega\right] \right\} \tag{α}$$

Folglich ergibt sich als zugehöriger P-Term :

Por consiguiente resulta como término de Poisson :

$$P\,(p\,(\tilde\omega_2)) = \frac{1}{4}\frac{k^2}{K}\frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{a}}\,\frac{n'}{i\,(n' - n)}\,\frac{\bar e_1'}{e}\,t \left\{ \begin{matrix} F_i \sin\left[i\,(l' - l) - \tilde\omega' + \tilde\omega\right] \\ + F_{-i} \sin\left[i\,(l' - l) + \tilde\omega' - \tilde\omega\right] \end{matrix} \right\}$$

Folglich ergibt sich $R^1{}_{\varepsilon\tilde\omega}$ aus denselben Gliedern des obigen R^1, indem die kreuzweisen Produkte aus F_i u. F_{-i} zu den gesuchten konstanten Teilen führen, sodaß

Luego si $R^1{}_{\varepsilon\tilde\omega}$ se forma del mismo R^1, las partes constantes buscadas resultan de los productos cruzados de F_i por F_{-i}, de manera que :

$$s\,(p_4\,(a_3)) = \frac{1}{16}\,a\,\frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 + m)^2}\,\frac{n'}{n' - n}\,\bar F_i \bar F_{-i}\, e'\bar e'_1 \sin\,(2\tilde\omega' - 2\tilde\omega)\,(nt)^2.$$

Von den Termen 2. Grades in R^1 verbleibt dann nur noch der folgende zur Ableitung von $R^1{}_{ee'}$:

De los términos de 2° grado de R^1 queda todavía, para la deducción de $R^1{}_{ee'}$, el siguiente :

$$R^1 = k^2 \frac{ee'}{4} G_i \cos\left[il' - (i - 2)\,l - \tilde\omega' - \tilde\omega\right], \tag{β}$$

sodaß

de modo que :

$$P\,(p\,(\tilde\omega_2)) = \frac{1}{4}\frac{k^2}{K}\frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{a}}\,\frac{n'}{in' - (i - 2)\,n}\,G_i\,\frac{\bar e'_1}{e}\,t \sin\left[il' - (i - 1)\,l - \tilde\omega' - \tilde\omega\right].$$

Also ist $R^1{}_{\varepsilon\tilde\omega}$ zu entnehmen aus :

Por lo tanto hay que sacar $R^1{}_{\varepsilon\tilde\omega}$ de :

$$R^1 = k^2 \frac{e^2}{4} E_i \cos\left[il' - (i - 2)\,l - 2\tilde\omega\right],$$

womit dann folgt:

resultando entonces:

$$s\,(p_4\,(a_3)) = \frac{1}{16}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\frac{n'\,(i-2)}{in'-(i-2)\,n}\,\overline{E_i}\overline{G_i}ee'_1\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,(nt)^2$$

Schließlich liefern noch die Glieder 3. Grades einen Beitrag zu $R^1_{ee'}$, nämlich:

Finalmente de los términos de 3er grado sólo pueden aprovecharse para obtener $R^1_{ee'}$ los siguientes:

$$R^1 = k^2\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{8}\,e^2e'K_i\cos[il'-(i-1)\,l-\tilde{\omega}'] + \frac{1}{8}\,e^2e'L_i\cos[il'-i-1)\,l+\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega}]\\ +\frac{1}{8}\,ee'^2M_i\cos[il'-(i-1)\,l-2\tilde{\omega}'+\tilde{\omega}]\end{array}\right\} \qquad (\gamma)$$

sodaß als P-Term folgt:

de manera que el término de Poisson resulta:

$$P\,(p\,(\tilde{\omega}_2)) = \frac{1}{4}\,\frac{k^2}{K}\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}\cdot\frac{n'}{in'-(i-1)\,n}\cdot\frac{\bar{e}'_1}{e}\left\{\begin{array}{l}eK_i\sin[il'-(i-1)\,l-\tilde{\omega}']\\ +eL_i\sin[il'-(i-1)\,l+\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega}]\\ +e'M_i\sin[il'-(i-1)\,l-2\tilde{\omega}'+\tilde{\omega}]\end{array}\right\}$$

Also ist $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ su entnehmen aus:

Por consiguiente, hay que sacar $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ de:

$$R^1 = k^2\,\frac{e}{2}\,C_i\cos[il'-(i-1)\,l-\tilde{\omega}],$$

womit dann als Säkularterm folgt:

obteniéndose como término secular:

$$s\,(p_4\,(a_8)) = \frac{1}{16}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\frac{(i-1)\,n'}{in'-(i-1)\,n}\,\overline{C_i}\left\{\begin{array}{l}e\overline{K_i}\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) - e\overline{L_i}\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\\ +e\overline{M_i}\sin(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega})\end{array}\right\}\bar{e}'_1\,(nt)^2$$

Weitere Glieder 2. Grades existieren nicht, deshalb gehen wir über zu dem Falle:

Ya que no existen más términos de 2° grado, podemos pasar al caso siguiente:

$$p\,(\dot{\tilde{\omega}}_2) = \tilde{\omega}^1{}_{2\tilde{\omega}'}\cdot\tilde{\omega}'_1 \qquad (4d)$$

mit dem Säkularglied $\tilde{\omega}'_1 = \frac{\tilde{\omega}'_1}{e'}\,.\,n't$, und wobei

con el término secular $\tilde{\omega}_1' = \frac{\tilde{\omega}_1'}{e'}\,.\,n't$ y donde

$$\tilde{\omega}^1{}_{2\tilde{\omega}'} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}}\cdot\frac{1}{e}\,R^1_{e\tilde{\omega}'}.$$

Da die Ableitung $R^1_{e\tilde{\omega}'}$ in R^1 Glieder 2. Grades in e und e' zugleich voraussetzt, setzen wir zuerst:

Ya la derivada $R^1_{e\tilde{\omega}'}$ debe formarse de términos de R^1 de 2° grado en e y e', pondremos en primer lugar:

$$R^1 = k^2\,\frac{ee'}{4}\,\{F_i\cos[i\,(l'-l)-\tilde{\omega}'+\tilde{\omega}] + F_{-i}\cos[i\,(l'-l)+\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}]\}, \qquad (\alpha)$$

sodaß als P-Term sich ergibt:

de manera que resulta como término de Poisson:

$$P\,(p\,(\tilde\omega_2)) = \frac{1}{4}\frac{k^2}{K}\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}\frac{n'}{i\,(n'-n)}\frac{\tilde\omega'_1}{e}\,t\left\{\begin{aligned}&-F_i\cos\,[i\,(l'-l)-\tilde\omega'+\tilde\omega]\\&+F_{-i}\cos\,[i\,(l'-l)+\tilde\omega'-\tilde\omega]\end{aligned}\right\}$$

Deshalb folgt dann $R^1{}_{\varepsilon\tilde\omega}$ aus derselben Funktion R^1 wie oben, sodaß schließlich folgt:

Por consiguiente $R^1{}_{\varepsilon\tilde\omega}$ debe deducirse de la misma función R^1, resultando finalmente:

$$s\,(p_4\,(a_3)) = -\frac{1}{32}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\frac{n'}{n'-n}\left\{\overline{F}{}^2{}_i+\overline{F}{}^2{}_{-i}-2\overline{F}_i\overline{F}_{-i}\cos\,(2\tilde\omega'-2\tilde\omega)\right\}e'\overline{\tilde\omega}'_1\,(nt)^2$$

Weitere Glieder 2. Grades ergeben sich noch aus dem folgenden Term 2. Grades von R^1:

Se obtendrán otros términos de 2° grado considerando el siguiente término de 2° grado de R^1:

$$R^1 = k^2\frac{ee'}{4}G_i\cos\,[il'-(i-2\;l-\tilde\omega'-\tilde\omega], \tag{β}$$

sodaß:

de donde:

$$P\,(p\,(\tilde\omega_2)) = -\frac{1}{4}\frac{k^2}{K}\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}\frac{n'}{in'-(i-2)\,n}\frac{\overline{\tilde\omega}_1'}{e}\,t\cos\,[il'-(i-1)\,l-\tilde\omega'-\tilde\omega]$$

Folglich ergibt sich $R^1{}_{\varepsilon\tilde\omega}$ aus den folgenden beiden Termen zugleich:

Por consiguiente, $R^1{}_{\varepsilon\tilde\omega}$ debe obtenerse de los dos términos siguientes:

$$R^1 = k^2\left|\frac{1}{4}e^2E_i\cos\,[il'-(i-2)\,l-2\tilde\omega)+\frac{1}{4}ee'G_i\cos\,[il'-(i-2)\,l-\tilde\omega'-\tilde\omega]\right|,$$

sodaß

de modo que

$$s\,(p_4\,(a_3)) = \frac{1}{32}\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\frac{(i-2)\,n'}{in'-(i-2)\,n}\left\{2e\overline{E}_i\cos\,(\tilde\omega'-\tilde\omega)+e'\overline{G}_i\right\}\overline{\tilde\omega}_1'\,(nt)^2.$$

Schließlich liefern auch die Glieder 3. Grades einen Beitrag, wenn in Bezug auf $R^1{}_{e\tilde\omega'}$ gesetzt wird:

Finalmente también de los términos de 3^er^ grado se obtiene una contribución si ponemos para calcular $R^1{}_{e\tilde\omega'}$:

$$R_1 = k^2\left\{\begin{aligned}&+\frac{1}{8}e^2e'K_i\cos\,[il'-(i-1)\,l-\tilde\omega']+\frac{1}{8}e^2e'L_i\cos\,[il'-(i-1)\,l+\tilde\omega'-2\tilde\omega]\\&+\frac{1}{8}ee'^2M_i\cos\,[il'-(i-1)\,l-2\tilde\omega'+\tilde\omega]\end{aligned}\right\}, \tag{γ}$$

sodaß

de manera que:

$$P\,(p\,(\tilde\omega_2)) = -\frac{1}{4}\frac{k^2}{K}\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}\frac{n'}{in'-(i-1)\,n}\left\{\begin{aligned}&eK_i\cos\,[il'-(i-1)\,l-\tilde\omega')\\&-e'L_i\cos\,[il'-(i-1)\,l+\tilde\omega'-2\tilde\omega]\\&+e'M_i\cos\,[il'-(i-1)\,l-2\tilde\omega'+\tilde\omega]\end{aligned}\right\}\frac{\overline{\tilde\omega}_1'}{e}\cdot t$$

Mithin ist $R^1_{\varepsilon\tilde\omega}$ abzuleiten mittels :

Por consiguiente, hay que deducir $R^1_{\varepsilon\tilde\omega}$ de :

$$R^1 = k^2 \frac{e}{2} \overline{C}_i \cos\left[il' - (i - 1)\, l - \tilde\omega\right],$$

sodaß :

de modo que :

$$s\,(p_4\,(a_3)) = \frac{1}{16}\, a\, \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 + m)^2}\, \frac{(i - 1)\, n'}{in' - (i - 1)\, n}\, \overline{C}_i \left\{ \begin{matrix} e\,(\overline{K}_i - \overline{L}_i) \cos(\tilde\omega' - \tilde\omega) \\ + e'\overline{M}_i \cos(2\tilde\omega' - 2\tilde\omega) \end{matrix} \right\} \overline{\tilde\omega}_1'\,(nt)^2.$$

womit die Glieder 2. Grades erschöpft sind. Deshalb folgt nunmehr der Fall :

con lo cual hemos agotado los términos de 2° grado. En consecuencia sigue ahora el caso :

$$p\left(\dot{\tilde\omega}_2\right) = \tilde\omega^2_{2e''} \cdot e_1'', \qquad \text{wo} \qquad e_1'' = \overline{e}_1'' n'' \cdot t \tag{4e}$$

und

y

$$\tilde\omega^2_{2e''} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{K\sqrt{a}}\, \frac{1}{e}\, R^2_{ee''}.$$

Da $R^2_{ee''}$ in $P\,(p\,(\tilde\omega_2))$ zu einem Term der Form $t \,.\, \sin A$ führt, während der Faktor $R^1_{\varepsilon\tilde\omega}$ eine Cos-Reihe darstellt, ist in Bezug auf $R^2_{ee''}$ nur eine Wahl innerhalb der Terme 2. Grades möglich, nämlich :

Ya que $R^2_{ee''}$ produce en $P\,(p\,(\tilde\omega_2))$ un término de la forma $t \,.\, \text{sen}\, A$, y el factor $R^1_{\varepsilon\tilde\omega}$ es una serie de cosenos, la única elección posible dentro de los términos de 2° grado, para el cálculo de $R^2_{ee''}$ es ésta :

$$R^2 = k^2 \frac{ee''}{4}\, G_0\,(a'') \cos\left[2l - \tilde\omega'' - \tilde\omega\right], \tag{α}$$

sodaß folglich :

de manera que :

$$P\,(p\,(\tilde\omega_2)) = \frac{1}{8}\, \frac{k^2}{K}\, \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{a}}\, G_0\,(a'')\, \frac{n''}{n}\, \frac{\overline{e}_1''}{e}\, t \sin\left[2l - \tilde\omega'' - \tilde\omega\right]$$

Mithin ist $R^1_{\varepsilon\tilde\omega}$ abzuleiten aus :

Por consiguiente, hay que deducir $R^1_{\varepsilon\tilde\omega}$ de :

$$R^1 = k^2 \frac{e^2}{4}\, E_0 \cos(2l - 2\tilde\omega)$$

sodaß :

de modo que :

$$s\,(p_4\,(a_3)) = -\frac{1}{16}\, a\, \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 + m)^2} \cdot \frac{n''}{n}\, \overline{E}_0 \overline{G}_0\,(a'')\, e\overline{e}_1'' \sin(\tilde\omega'' - \tilde\omega)\,(nt)^2.$$

Ferner liefern die folgenden Glieder 3. Grades von R^2 einen Beitrag :

Hay que considerar además, los siguientes términos de 3er grado de R^2 :

$$\mathrm{R}^2 = k_{\varepsilon} \begin{Bmatrix} \frac{1}{8} e^2 e'' \mathrm{K}_0 (a'') \cos (l - \tilde{\omega}'') + \frac{1}{8} e^2 e'' \mathrm{L}_0 (a'') \cos (l + \tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}) \\ + \frac{1}{8} e e''^2 \mathrm{M}_0 (a'') \cos (l - 2\tilde{\omega}'' + \tilde{\omega}) \end{Bmatrix}, \tag{β}$$

sodaß : luego :

$$\mathrm{P}(p(\tilde{\omega}_2)) = \frac{1}{4} \frac{k^2}{\mathrm{K}} \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{a}} \frac{n''}{n} \frac{e_1''}{n} t \begin{Bmatrix} e\mathrm{K}_0 (a'') \sin (l - \tilde{\omega}'') + e\mathrm{L}_0 (a'') \sin (l + \tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}) \\ + e''\mathrm{M}_0 (a'') \sin (l - 2\tilde{\omega}'' + \tilde{\omega}) \end{Bmatrix}$$

Folglich haben wir $\mathrm{R}^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ abzuleiten aus : Por consiguiente, tenemos que deducir $\mathrm{R}^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ de :

$$\mathrm{R}^1 = k^2 \frac{2}{e} \mathrm{C}_0 \cos (l - \tilde{\omega}),$$

sodaß : de manera que :

$$s(p_4(a_3)) = - \frac{16}{1} a \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 + m)^2} \cdot \frac{n''}{n} \overline{\mathrm{C}}_0 \begin{Bmatrix} e(\overline{\mathrm{K}}_0 (a'') - \overline{\mathrm{L}}_0 (a'')) \sin (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \\ + e'' \overline{\mathrm{M}}_0 (a'') \sin (2\tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}) \end{Bmatrix} \Bigg| \, \bar{e}_1'' (nt)^2.$$

womit alle Terme dieses Falles erschöpft sind. Deshalb folgt nunmehr der Fall :

Con lo cual hemos agotado todos los términos de este caso. Por tanto consideremos ahora el caso siguiente :

$$p(\dot{\tilde{\omega}}_2) = \tilde{\omega}^2{}_{2\tilde{\omega}''} \tilde{\omega}_1'' \tag{4f}$$

wo $\tilde{\omega}''_1$ säkular : $\tilde{\omega}''_1 = \frac{\bar{\tilde{\omega}}''_1}{e''} n''t$, und ferner :

donde $\tilde{\omega}''_1 = \frac{\bar{\tilde{\omega}}''_1}{e''} n''t$, es secular y además :

$$\tilde{\omega}^2{}_{2\omega''} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\mathrm{K}\sqrt{a}} \frac{1}{e} \mathrm{R}^2{}_{e\tilde{\omega}''}$$

Auch in diesem Falle sind die Glieder 2. und 3. Grades in R^2 zu berücksichtigen, zuerst mittels

También en este caso hay que considerar los términos de 2° y 3er grado de R^2, tomando primeramente :

$$\mathrm{R}^2 = k^2 \frac{ee''}{4} \mathrm{G}_0 (a'') \cos (2l - \tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}). \tag{α}$$

Deshalb wird : de donde resulta :

$$\mathrm{P}(p(\tilde{\omega}_2)) = - \frac{1}{8} \frac{k^2}{\mathrm{K}} \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{a}} \frac{n''}{n} \mathrm{G}_0 (a'') \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1''}{e} t \cos (2l - \tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}),$$

also folgt $\mathrm{R}^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ aus : y, por consiguiente $\mathrm{R}^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ resulta de :

$$R^1 = k \left\{ \frac{1}{4} e^2 E_0 \cos(2l - 2\tilde{\omega}) + \frac{1}{4} ee' G_0 \cos(2l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \right\}.$$

Mithin folgt als Säkularbeitrag:

formándose la contribución secular:

$$s(p_4(a_3)) = -\frac{1}{32} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \frac{n''}{n} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} e\bar{E} \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \\ + e'\bar{G}_0 \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \end{array} \right\} \bar{\tilde{\omega}}_1'' (nt)^2.$$

In Bezug auf die Terme 3. Grades sind nur zu berücksichtigen:

Con referencia a los términos de 3er grado sólo debemos considerar:

$$R^2 = k^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{8} e^2 e'' K_0(a'') \cos(l - \tilde{\omega}'') + \frac{1}{8} e^2 e'' L_0(a'') \cos(l + \tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}) \\ + \frac{1}{8} ee''^2 M_0(a'') \cos(l - 2\tilde{\omega}'' + \tilde{\omega}) \end{array} \right\} \qquad (\beta)$$

Folglich wird

de donde resulta:

$$P(p(\tilde{\omega}_2)) = -\frac{1}{4} \frac{k^2}{K} \frac{n''}{n} \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1''}{e} \cdot t \left\{ \begin{array}{l} eK_0(a'') \cos(l - \tilde{\omega}'') \\ - eL_0(a'') \cos(l + \tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}) \\ + e'' M_0(a'') \cos(l - 2\tilde{\omega}'' + \tilde{\omega}) \end{array} \right\}$$

Mithin ist $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ zu entnehmen aus:

Por consiguiente vamos a sacar $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ de:

$$R^1 = k^2 \frac{e}{2} C_0 \cos(l - \tilde{\omega}),$$

sodaß der Säkularbeitrag:

de manera que el aporte secular será:

$$s(p_4(a_3)) = -\frac{1}{16} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \frac{n''}{n} \bar{C}_0 \left\{ \begin{array}{l} e\left[\bar{K}_0(a'') - \bar{L}_0(a'')\right] \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \\ + e'' \bar{M}_0(a'') \cos(2\tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}) \end{array} \right\} \bar{\tilde{\omega}}''_1 (nt)^2.$$

Damit sind alle Terme des Hauptterms $p_4(a_3)$ erledigt, sodaß nunmehr überzugehen ist auf:

Con esto quedan agotados todos los términos de $p_4(a_3)$ y podemos ahora ocuparnos de:

$$p_5(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} \frac{1}{2} R^1_{\varepsilon aa} (a_1)^2.$$

Da aber $(a_1)^2$ stets nur aus konstanten Teilen und periodischen Gliedern zusammengesetzt ist, so auch $p_5(\dot{a}_3)$, sodaß wir infolge des Fehlens säkularer Glieder sogleich zum nächsten Term:

Pero puesto que $(a_1)^2$ sólo consta de partes constantes y términos periódicos, lo mismo sucede con $p_5(\dot{a}_3)$, de manera que no resultarán términos seculares y podemos pasar inmediatamente al próximo caso:

$$p_6(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K}\frac{1}{2} R^1_{\varepsilon ee}(e_1)^2 \tag{6}$$

übergehen können.

Sind $s(e_1)$ die säkularen und $p(e_1)$ die periodischen Glieder von e_1, so vermag in

Si $s(e_1)$ y $p(e_1)$ son, respectivamente, los términos seculares y periódicos de e_1, resulta del desarrollo :

$$(e_1)^2 = [s(e_1)]^2 + [p(e_1)]^2 + 2s(e_1)\,p(e_1)$$

nur das letzte gemischt -säkulare Glied $2 . s(e_1) . p(e_1)$ zu den für unsere Zwecke notwendigen Poisson-Gliedern zu führen, wenn der periodische Faktor $R^1_{\varepsilon ee}$ von $p_6(\dot{a}_3)$ noch hinzugefügt wird. Dabei fixiert hier, wie bisher immer, der Faktor $s(e_1)$ die Gesamtheit der Säkularstörungen aller störenden Körper, während der andere Faktor $p(e_1)$ die periodischen Störungen nur durch Saturn, Uranus etc. unter Ausschluß des schon zu Beginn unserer Untersuchung berücksichtigten Jupiter enthält, sodaß $R = R^2$ resp. R^3 etc., zu setzen ist.

que sólo el último término, secular-mixto, multiplicado por el factor periódico $R^1_{\varepsilon ee}$, puede producir en $p_6(\dot{a}_3)$ un término de Poisson que interese a nuestro fin. Como siempre, el factor $s(e_1)$ contiene la suma de las perturbaciones seculares producidos por todos los cuerpos, mientras que el otro factor $p(e_1)$, contiene las perturbaciones periódicas producidas por Saturno, Urano, etc., excluyendo Júpiter ya considerado precedentemente; y se debe poner $R = R^2$, $R = R^3$, etc.

Da nun der Faktor $R^1_{\varepsilon ee}$ Glieder mindestens vom 2. Grade in R^1 voraussetzt, so ist in diesem Falle auch in $p(e_1)$ die Störungsfunktion R^2 vom mindestens 2. Grade. Deshalb ist zuerst und zwar als einziger Term von R^1 zu wählen :

Ya que, ahora, el factor $R^1_{\varepsilon ee}$ presupone términos de 2° grado por lo menos de R^1, también deberá ser la función perturbadora R^2, en este caso, de 2° grado al menos, para obtener $p(e_1)$. Por lo tanto, hay que elegir en primer lugar y como único término :

$$R^1 = k^2\frac{e^2}{4}E_0\cos(2l - 2\tilde{\omega}). \tag{α}$$

Folglich ist in :

Por eso hay que elegir primeramente en

$$p(\dot{e}_1) = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}}\left\{\frac{1}{e}R^2_{\tilde{\omega}} + \frac{1}{2}eR^2_{\varepsilon}\right\}$$

zur Ableitung von $R^2_{\tilde{\omega}}$ zuerst zu wählen :

para deducir $R^2_{\tilde{\omega}}$:

$$R^2 = k^2\frac{ee''}{4}G_0(a'')\cos[2l - \tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}],$$

sodaß mit Rücksicht auf $s(e_1) = \bar{e}_1 . nt$:

de modo que, considerando $s(e_1) = \bar{e}_1 . nt$ resulta :

$$2p(e_1)\,s(e_1) = +\frac{1}{4}\frac{k^2}{K}\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}G_0(a'')\,e''\bar{e}_1 t\cos(2l - \tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}).$$

Folglich ergibt das Produkt mit dem Faktor $\frac{\sqrt{a}}{k} \cdot R^1_{\varepsilon ee}$:

Por consiguiente, se obtiene, multiplicando por $\frac{\sqrt{a}}{k} \cdot R^1_{\varepsilon ee}$:

$$s\,(p_6\,(a_3)) = -\frac{1}{16}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\overline{E}_0\overline{G}_0\,(a'')\,e''\bar{e}_1\,\sin\,(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega})\,(nt)^2.$$

Das 2. Glied in $p\,(\dot{e}_1)$: $e \,.\, R^2_\varepsilon$, führt zu Termen vom mindestens 4. Grade, ist deshalb also zu vernachlässigen.

El 2° término de $p\,(e_1)$: $e \,.\, R^2_\varepsilon$ produce términos de 4° grado por lo menos, y puede despreciarse.

Wählt man weiter R^1 vom 3. Grade, so kommen wegen der Form der Funktion $R^1_{\varepsilon ee}$ und da $p\,(e_1)$ eine Cos-Reihe ist, nur die folgenden Terme in Frage:

Si se escoge, además, R^1 de 3^er grado, hay que considerar, debido a la forma de la función $R^1_{\varepsilon ee}$ y al hecho de que $p\,(e_1)$ es una serie de cosenos, sólo los términos siguientes:

$$R^1 = k^2\,\frac{e^2e'}{8}\,\{\,K_0\cos\,(l-\tilde{\omega}') + L_0\cos\,(l+\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega}\,\}, \qquad (\beta)$$

sodaß folglich

de modo que:

$$R^2 = k^2\,\frac{e}{2}\,C_0\,(a'')\cos\,(l-\tilde{\omega})$$

und deshalb:

y por lo tanto:

$$2p\,(e_1)\,s\,(e_1) = +\,\frac{k^2}{K}\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}\,\overline{C}_0''\bar{e}_1 t\cos\,(l-\tilde{\omega})$$

Folglich wird auf Grund von R^1:

Por consiguiente, basándonos en R^1 obtendremos:

$$s\,(p_6\,(a_3)) = +\,\frac{1}{16}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\overline{C}''_0\,\{\,\overline{K}_0-\overline{L}_0\,\}\,e'\bar{e}_1\,\sin\,(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,(nt)^2.$$

Der nächste Hauptterm in $\dot{a}_3$ lautet:

El próximo término principal de $\dot{a}_3$ es:

$$p_7\,(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K}\,\frac{1}{2}\,R^1_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}\cdot(l_1)^2, \qquad (7)$$

fällt aber fort, weil in $(l_1)^2$ keine Poisson-Glieder möglich sind, sodaß wir sogleich auf den nächsten Term übergehen können:

y no interesa porque en $(l_1)^2$ no son posibles términos de Poisson. Luego podemos pasar ya al próximo término:

$$p_8\,(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K}\,\frac{1}{2}\,R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}}\cdot(\tilde{\omega}_1)^2 \qquad (8)$$

wo analog zum vorhergegangenen Falle $p_6(a_3)$ mit $(e_1)^2$ als Faktor, der für unsere Zwecke brauchbare Teil von $(\tilde{\omega}_1)^2$ zu reduzieren ist auf:

donde análogamente al caso precedente de $p_6(a_3)$ con $(e_1)^2$ como factor, la parte de $(\tilde{\omega}_1)^2$ que nos interesa, debe reducirse a:

$$(\tilde{\omega}_1)^2 = 2p(\tilde{\omega}_1) \,.\, s(\tilde{\omega}_1),$$

wobei $s(\tilde{\omega}_1) = \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e} nt$ und

donde $s(\tilde{\omega}_1) = \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e} nt$,

$$p(\dot{\tilde{\omega}}_1) = \frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}} \frac{1}{e} \cdot R^2{}_e,$$

wo in R^2 der periodische Teil zu substituieren ist.

Da $R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$ wie auch $p(\tilde{\omega}_1)$ Sinus-Reihen sind, so dürfen R^1 wie R^2 aus denselben Gliedern von R entnommen werden. Ist also zuerst:

y R^2 debe sustituirse por la parte periódica.

Ya que $R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$ y $p(\tilde{\omega}_1)$ son series de senos, R^1 y R^2 pueden sacarse de los mismos términos de R. Es, pues, en primer lugar:

$$R^2 = k^2 \frac{e}{2} \bar{C}''_0 \cos(l - \tilde{\omega}), \tag{α}$$

so wird der P-Term von $(\tilde{\omega}_1)^2$:

de donde el término P de $(\tilde{\omega}_1)^2$ será

$$2s(\tilde{\omega}_1)\, p(\tilde{\omega}_1) = \frac{k^2}{K} \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}} \bar{C}''_0 \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e^2} t \sin(l - \tilde{\omega});$$

folglich wird, wenn dementsprechend

y poniendo correspondientemente:

$$R^1 = k^2 \frac{e}{2} C_0 \cos(l - \tilde{\omega})$$

gesetzt wird, erhalten:

se obtendrá:

$$s(p_8(a_3)) = +\frac{1}{8} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \bar{C}_0 \bar{C}''_0 \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e} (nt)^2.$$

Dieser Ausdruck ist also mit einem Pole $e = 0$ behaftet und hebt sich deswegen gegen den analogen Term in $p_2(a_3)$, Fall $(2b)$ (α) weg.

Entnehmen wir jetzt $p(\dot{\tilde{\omega}}_1)$ aus den Termen 2. Grades von R^2, so ergibt sich der Fall:

Esta expresión contiene el polo $e = 0$ y se elimina con el término análogo de $p_2(a_3)$, caso $(2b)$, (α).

Sacando ahora $p(\dot{\tilde{\omega}}_1)$ de los términos de 2° grado de R^2 resulta el caso:

$$R^2 = k^2 \left\{ \frac{1}{4} e^2 E''_0 \cos(2l - 2\tilde{\omega}) + \frac{1}{4} ee'' G''_0 \cos(2l - \tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \right\}. \tag{β}$$

Damit erhält man dann

Con esto se obtiene :

$$2p(\tilde{\omega}_1)\,s(\tilde{\omega}_1) = \frac{1}{2}\frac{k^2}{K}\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}\frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e^2}\,t\left\{eE''_0 \sin(2l-2\tilde{\omega}),\; + \frac{1}{2}e''G''_0 \sin(2l-\tilde{\omega}''-\tilde{\omega})\right\}$$

Folglich ist $R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$ aus dem zu R^2 analogen Ausdruck von R^1 zu entnehmen :

Por tanto hay que sacar $R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$ de la expresión de R^1 análoga a R^2 :

$$R^1 = k^2\left\{\frac{1}{4}e^2E_0\cos(2l-2\tilde{\omega}) + \frac{1}{4}ee'G_0\cos(2l-\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\right\}$$

sodaß

de manera que :

$$s(p_8(a_3)) = \frac{1}{4}a\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\left\{\begin{array}{l} e^2\bar{E}_0\bar{E}''_0 + \dfrac{ee''}{2}\bar{E}_0\bar{G}_0''\cos(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}) \\ + \dfrac{1}{4}ee'G_0E''_0\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) + \dfrac{1}{8}e'e''\bar{G}''_0\bar{G}_0\cos(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}')\end{array}\right\}\frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e}(nt)^2$$

Auch hier ergibt sich ein Glied mit einem Pol und zwar im 4. Gliede des Klammerausdruckes, es hebt sich aber gegen den korrespondierenden Term (ε) in $p_2(a_3)$ weg.

También aquí resulta un término con un polo, a saber, el 4° del paréntesis, pero se elimina con el término correspondiente de $p_2(a_3)$.

Schließlich ergibt auch die Verwendung der Glieder 3. Grades noch brauchbare Terme 2. Grades in $p_8(a_3)$, und zwar sowohl bei Verwendung in R^1 wie in R^2. Zuerst ist im Falle

Finalmente, empleando los términos de R^1 y R^2 de 3er grado, se pueden formar en $p_8(a_3)$ términos aptos de 2° grado. Primeramente tenemos el caso :

$$R^2 = k^2\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{8}e^3J''_0\cos(l-\tilde{\omega}) + \dfrac{1}{8}ee''^2N''_0\cos(l-\tilde{\omega}) + \dfrac{1}{8}e^2e''K''_0\cos(l-\tilde{\omega}'') \\ + \dfrac{1}{8}e^2e''L''_0\cos(l+\tilde{\omega}''-2\tilde{\omega}) + \dfrac{1}{8}ee''^2M''_0\cos(l-2\tilde{\omega}''+\tilde{\omega})\end{array}\right\} \qquad (\gamma)$$

Folglich ergibt sich der Poisson-Term :

Luego resulta el término de Poisson :

$$2p(\tilde{\omega}_1)\,s(\tilde{\omega}_1) = \frac{1}{2}\frac{k^2}{K}\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}\frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e}\,t\left\{\begin{array}{l}\dfrac{3}{2}e^2J''_0\sin(l-\tilde{\omega}) + \dfrac{1}{2}e''^2N''_0\sin(l-\tilde{\omega}) \\ + ee''K''_0\sin(l-\tilde{\omega}'') + ee''L''_0\sin(l+\tilde{\omega}''-2\tilde{\omega}) \\ + \dfrac{1}{2}e''^2M_0(a'')\sin(l-2\tilde{\omega}''+\tilde{\omega})\end{array}\right\}$$

Mithin ist dann $R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$ zu entnehmen aus :

Por lo tanto, se debe sacar $R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$ de :

$$R^1 = k^2\frac{e}{2}C_0\cos(l-\tilde{\omega}),$$

sodaß

de modo que:

$$s\left(p_8\left(a_3\right)\right) = \frac{1}{16}\, a\, \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\, \bar{C}_0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2}\, e^2 \bar{J}''_0 + \frac{1}{2}\, e''^2 \bar{N}''_0 \\ + ee''\left[\bar{K}''_0 + \bar{L}''_0\right] \cos\left(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}\right) \\ + \frac{1}{2}\, ee''^2 M''_0 \cos\left(2\tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}\right) \end{array} \right\} \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e}\, (nt)^2$$

Die einen Pol $e = 0$ enthaltenden Glieder in N_0 und M_0 der Klammer heben sich gegen die korrespondierenden Glieder (δ) von $p_2(a_3)$ fort.

Setzen wir in Bezug auf die Glieder 3. Grades zur Ableitung von $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$:

Los términos en N_0 y M_0 del paréntesis contienen un polo $e = 0$, pero se eliminan con los términos correspondientes (δ) de $p_2(a_3)$.

Consideremos ahora para la deducción de $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}'}$ los siguientes términos de 3er grado:

$$R^1 = k^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{8}\, e^3 J_0 \cos\left(l - \tilde{\omega}\right) + \frac{1}{8}\, ee'^2 N_0 \cos\left(l - \tilde{\omega}\right) \\ + \frac{1}{8}\, e^2 e' L_0 \cos\left(l + \tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}\right) + \frac{1}{8}\, ee'^2 M_0 \cos\left(l - 2\tilde{\omega}' + \tilde{\omega}\right), \end{array} \right\} \qquad (\delta)$$

andererseits aber

El por otra parte:

$$R^2 = k^2\, \frac{e}{2}\, C''_0 \cos\left(l - \tilde{\omega}\right),$$

sodaß:

de modo que:

$$2p\left(\tilde{\omega}_1\right) s\left(\tilde{\omega}_1\right) = \frac{k^2}{K}\, \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}\, C''_0\, \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e^2}\, t \sin\left(l - \tilde{\omega}\right)$$

so wird schließlich:

Resulta, pues, finalmente:

$$s\left(p_8\left(a_3\right)\right) = \frac{1}{4}\, a\, \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\, \bar{C}''_0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{8}\, e^2 \bar{J}_0 + \frac{1}{8}\, e'^2 \bar{N}_0 \\ + \frac{1}{2}\, ee' \bar{L}_0 \cos\left(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}\right) \\ + \frac{1}{8}\, e'^2 \bar{M}_0 \cos\left(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}\right) \end{array} \right\} \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e}\, (nt)^2$$

Das 2. und das letzte Glied der Klammer enthalten den Pol $e = 0$, und heben sich gegen die analogen Terme in $p_2(a_3)$ (2b), Fall (ζ) weg. Damit sind alle Terme von $p_8(a_3)$ erledigt.

Der nächste Term der Hauptgruppe lautet nun:

Los términos 2° y último del paréntesis contienen el polo $e = 0$, y se eliminan con los términos análogos de $p_2(a_3)$, (2b), caso (ζ). Con esto hemos agotado todos los términos de $p_8(a_3)$.

El próximo término del grupo principal es ahora:

$$p_9\left(\dot{a}_3\right) = \frac{2\sqrt{a}}{K}\, R^1_{\varepsilon a e} \cdot a_1 \cdot e_1, \qquad (9)$$

wobei a_1 aus R^2 zu entnehmen ist und e_1 die Gesamtheit der Säkularstörungen fixiert.

Da $R^1{}_{\varepsilon a e}$ eine Sinus-Reihe, aber a_1 eine Cos-Reihe, fixiert, so dürfen nur Glieder verschiedener Argumente in Bezug auf $\tilde{\omega}$ und $\tilde{\omega}'$ kombiniert werden, um die erforderlichen Poisson-Glieder zu erlangen. Entnimmt man $R^1{}_{\varepsilon a e}$ aus dem Term niedrigsten Grades, so muß, noch mit Rücksicht auf $i=0$, sein:

donde a_1 debe sacarse de R^2 y e_1 contiene la suma de las perturbaciones seculares.

Ya que $R^1{}_{\varepsilon a e}$ es una serie de senos, y a_1 una serie de cosenos, hay que combinar solamente términos de argumentos distintos en $\tilde{\omega}$ y $\tilde{\omega}'$, para obtener los términos de Poisson necesarios. Si se saca $R^1{}_{\varepsilon a e}$ del término de grado más bajo y se considera que $i=0$ debe ser:

$$R^1 = k^2 \frac{e}{2} C_0 \cos(l - \tilde{\omega}),$$

Folglich ist a_1 abzuleiten mittels:

Luego hay que formar a_1 por medio de:

$$R^2 = k^2 \frac{e''}{2} D''_0 \cos(l - \tilde{\omega}''),$$

sodaß

de modo que:

$$a_1 e_1 = + \frac{k^2}{K} \sqrt{a}\, D''_0 \bar{e}_1 e'' t \cos(l - \tilde{\omega}'').$$

Mit Rücksicht auf das schon fixierte R^1 wird dann:

Si consideramos la expresión de R^1 ya fijada se obtiene:

$$s\,(p_9\,(a_3)) = -\frac{1}{4}\, a\, \overline{D}''_0 \overline{C}_{0a} \frac{\bar{e}_1 e''}{(1+m)^2} \sin(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega})\,(nt)^2$$

womit schon alle Glieder 2. Grades erschöpft sind.

Das nächste Hauptglied

y con esto hemos agotado todos los términos de 2° grado. El próximo término principal

$$p_{10}\,(a_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R^1{}_{\varepsilon a \varepsilon} a_1 \cdot l_1 \qquad (10)$$

führt wegen des Koeffizienten l_1, der frei von Säkulargliedern ist, nicht zu Termen in t^2 in a_3, weshalb wird zu dem weiteren Term

no produce términos en t^2 en a_3, porque el coeficiente l_1 carece de términos seculares. Por consiguiente consideremos el próximo:

$$p_{11}\,(a_3)) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R^1{}_{\varepsilon a \tilde{\omega}} \cdot a_1 \cdot \tilde{\omega}_1 \qquad (11)$$

übergehen. Hierin ist wieder für $\tilde{\omega}_1$ die Säkularstörung und für a_1 die aus R^2 etc., folgende periodische Störung zu substituieren, unter Berücksichti-

Aquí hay que substituir de nuevo $\tilde{\omega}_1$ por la perturbación secular, y a_1 por la perturbación periódica que resulta por R^2, considerando que por el factor gung von $i=0$ wegen des Faktors $R^1_{\varepsilon a \tilde{\omega}}$. Da sowohl $R^1_{\varepsilon a \tilde{\omega}}$ wie a_1 Cosinusreihen darstellen, sind in beiden Funktionen Glieder gleichen wie verschiedenen Argumentes in den Perihellängen zu benutzen.

Entnehmen wir $R^1_{\varepsilon a \omega}$ zuerst aus dem einzig möglichen Gliede 1. Grades:

$R^1_{\varepsilon a \tilde{\omega}}$ debe ser $i=0$. Ya que tanto $R^1_{\varepsilon a \tilde{\omega}}$ como a_1 son series de cosenos se pueden utilizar términos de argumentos iguales o distintos en las longitudes de los perihelios.

Si sacamos $R^1_{\varepsilon a \tilde{\omega}}$ primero del único término posible de 1er grado:

$$R^1 = k^2 \frac{e}{2} C_0 \cos(l - \tilde{\omega})$$

so muß R^2 zur Ermittelung von a_1 folgen aus:

debe formarse R^2 para obtener a_1 por medio de:

$$R^2 = k^2 \left\{ \frac{e}{2} C_0(a'') \cos(l - \tilde{\omega}) + \frac{e''}{2} D''_0 \cos(l - \tilde{\omega}'') \right\}$$

sodaß:

de modo que:

$$a_1 \cdot \tilde{\omega}_1 = \frac{k^2}{K} \sqrt{a} \left\{ C''_0 e \cos(l - \tilde{\omega}) + D''_0\, a\, e'' \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \right\} \bar{\tilde{\omega}}_1\, t,$$

Folglich wird dann:

Luego resulta:

$$s(p_{11}(a_3)) = \frac{1}{4}\, a\, \bar{C}''_{0a} \left\{ \bar{C}''_{0a} e + \bar{D}''_0 e'' \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \right\} \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{(1 + m)^2} (nt)^2.$$

Im Übrigen gibt es keine weiteren Glieder 2. Grades.

Mithin liefert der nächste Hauptterm:

No hay, pues, más términos de 2° grado.

El próximo término principal es:

$$p_{12}(a_3)) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R^1_{\varepsilon e \varepsilon} e_1 l_1, \tag{12}$$

wo von den beiden Faktoren e_1 und l_1 nur e_1 die erforderlichen Säkularterme enthält. Ferner ist hier zu beachten, daß

donde solamente el primero de los dos factores e_1 y l_1 contiene los términos seculares necesarios. Además hay que considerar aquí que:

$$l_1 = \varepsilon_1 + \rho_1 = -\frac{2\sqrt{a}}{K} \int R^2{}_a dt + \frac{1}{2} e \frac{\sqrt{1 - e^2}}{K\sqrt{a}} \int R^2{}_e dt - \frac{3}{2} \frac{n}{a} \int a_1(l, l'')\, dt.$$

Entnimmt man nun $R^1_{\varepsilon e \varepsilon}$ aus den Gliedern niedrigsten Grades von R^1, also aus

Si se saca ahora $R^1_{\varepsilon e \varepsilon}$ de los términos de grado más bajo de R^1, es decir, de:

$$R^1 = k^2 \frac{e}{2} C_0 \cos(l - \tilde{\omega}),$$

so ist l_1 abzuleiten nur aus :

e_1 debe deducirse de :

$$R^2 = k^2 \frac{e''}{2} D''_0 \cos(l - \tilde{\omega}''),$$

weil hier Glieder nur mit verschiedenem Argument in Bezug auf $\tilde{\omega}$ und $\tilde{\omega}''$ kombinierbar sind. Wie man ersieht, übt dann der 2. Term der rechten Seite von l_1 keinen Einfluß aus, weil R_e^2 verschwindet; es müßten die Glieder 3. Grades von gleichen Argument in l und l' herangezogen werden, aber dann wird däs entsprechende Glied in $p_{12}(a_3)$ vom 4. Grade, also hier hinfällig. Folglich erhält man im niedrigsten Grade :

puesto que aquí sólo pueden combinarse términos con argumentos distintos en $\tilde{\omega}$ y $\tilde{\omega}'$. Se observa entonces que el 2° término del 2° miembro de l_1 no ejerce ninguna influencia ya que R_e^2 se anula; se deberían considerar los términos de 3er grado del mismo argumento en l y l', pero en tal caso resultaría el término correspondiente $p_{12}(a_3)$ de 4° grado, es decir, innecesario aquí. Por consiguiente, se obtiene, en los términos de grado más bajo :

$$l_1 e_1 = -\frac{k^2}{K}\sqrt{a}\left\{\overline{D}''_{0a}\sin(l-\tilde{\omega}'') + \frac{3}{2}\frac{D''_0}{a}\sin(l-\tilde{\omega}'')\right\} e''\bar{e}_1 \, . \, t$$

Folglich muß $R^1_{\varepsilon e \varepsilon}$ aus dem schon oben fixierten R^1 abgeleitet werden, womit dann erhalten wird :

Por lo tanto debe deducirse $R^1_{\varepsilon e \varepsilon}$ del R^1 ya fijado, resultando :

$$s(p_{12}(a_3)) = -\frac{1}{4} a \,\overline{C}_0 \left\{\overline{D}''_{0a} + \frac{3}{2}\overline{D}''_0\right\} e'' \, . \, \bar{e}_1 \sin(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega})(nt)^2.$$

Weitere Glieder 2. Grades treten hier nicht auf. Deshalb kommen wir nun zu dem Hauptterm :

Como no quedan más términos de 2° grado, pasemos ahora al principal :

$$p_{13}(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R^1_{\varepsilon e \tilde{\omega}} \, . \, e_1 \, . \, \tilde{\omega}_1, \tag{13}$$

wo sowohl e_1 wie $\tilde{\omega}_1$ säkular sein köonen. Sind beide Faktoren zugleich säkular, so entsteht in $p_{13}(a_3)$ direkt ein Poisson-Term, aber keine reine Säkularbeschleunigung in t^2.

donde tanto e_1 como $\tilde{\omega}_1$ pueden ser seculares. Si ambos factores son seculares a la vez, se forma en $p_{13}(a_3)$, directamente, un término de Poisson; pero en cambio no se formará ninguna aceleración secular pura en t^2.

Es werde zuerst $\tilde{\omega}_1$ säkular angenommen, also $\tilde{\omega}_1 = \frac{\overline{\tilde{\omega}}_1}{e} \cdot nt$. Substituieren wir dann :

Supongamos primeramente, $\tilde{\omega}_1$ secular, es decir $\tilde{\omega}_1 = \frac{\tilde{\omega}_1}{e} \cdot nt$. Poniendo entonces :

$$R^1 = k^2 C_0 \frac{e}{2}\cos(l - \tilde{\omega}), \tag{α}$$

so ist $R^1_{\varepsilon e \tilde{\omega}}$ eine Cosinusreihe, ebenso wie der Ausdruck für e_1, der hier mittels R^2, etc., zu bilden ist, sodaß R^2 zuerst zu entnehmmen ist aus :

resultan $R^1_{\varepsilon e \tilde{\omega}}$ y e_1 series de cosenos, debiéndose formar e_1 aquí por medio de R^2, de modo que, primeramente deduciremos R^2 de :

$$R^2 = k^2 \frac{e}{2} C''_0 \cos(l - \tilde\omega).$$

Folglich wird auf Grund der Differentialgleichung

Luego obtendremos, basándonos en la ecuación diferencial :

$$\dot e_1 = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}}\frac{1}{e} R^2_{\tilde\omega} - \frac{1}{2} e \frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}} R^2_{\varepsilon}$$

erhalten :

el producto :

$$p(e_1)\, s(\tilde\omega_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{k^2}{K}\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}\left\{ C''_0 - \frac{e^2}{2} C''_0 \right\} \frac{\bar{\tilde\omega}_1}{e} t \cos(l - \tilde\omega).$$

Folglich wird endlich :

Por consiguiente resulta :

$$s(p_{13}(a_3)) = \frac{1}{8} a \cdot \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \bar{C}_0 \left\{ \bar{C}''_0 - \frac{1}{2} e^2 \bar{C}''_0 \right\} \frac{\bar{\tilde\omega}_1}{e} (nt)^2.$$

Dieser Ausdruck enthält den Pol $e = 0$, und zwar im 1. Gliede der Klammer, es findet aber ein Wegheben dieses Gliedes gegen das analoge in $p_4(a_3)$, Fall $(4b)$, (α) statt, während der 2. Term der Klammer ein normales Glied 2. Grades ergibt.

Esta expresión contiene el polo $e = 0$, en el primer término del paréntesis, que se elimina con el término análogo de $p_4(a_3)$, caso $(4b)$, (α), mientras que el 2° término del paréntesis forma un término normal de 2° grado.

Wir können nun $R^1_{\varepsilon e\tilde\omega}$ mit demselben Ausdruck 0. Grades wie im Falle (a) kombinieren mit Termen 3. Grades in R^2, sodaß mit Rücksicht auf $R_{\tilde\omega}^2$ in $\dot e_1$ gewählt werden darf :

Podemos ahora combinar $R^1_{\varepsilon e\tilde\omega}$ con la misma expresión de grado 0 que en el caso (a), tomando para calcular $R^2_{\tilde\omega}$ de $\dot e_1$ los siguientes términos de 3er grado de R^2 :

$$R^2 = k^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{8} e^3 J''_0 \cos(l - \tilde\omega) + \frac{1}{8} e e''^2 N''_0 \cos(l - \tilde\omega) \\ + \frac{1}{8} e^2 e'' L''_0 \cos(l + \tilde\omega'' - 2\tilde\omega) + \frac{1}{8} e e''^2 M''_0 \cos(l - 2\tilde\omega'' + \tilde\omega) \end{array} \right\} \qquad (\beta)$$

Unter Ausschaltung des Termes $e R^2_{\varepsilon}$ in $\dot e_1$, aus dem Glieder 4. Grades in a_3 hervorgehen würden, folgt dann :

Prescindiendo del término $e \,.\, R_{\varepsilon}^2$ de $\dot e_1$, que produciría términos de 4° grado en a_3, resulta :

$$p(e_1)\, s(\tilde\omega_1) = \frac{1}{8}\frac{k^2}{K}\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}} \left\{ \begin{array}{l} e^2 J''_0 \cos(l - \tilde\omega) + e''^2 N''_0 \cos(l - \tilde\omega) \\ + 2ee'' L''_0 \cos(l + \tilde\omega'' - 2\tilde\omega) - e''^2 M''_0 \cos(l - 2\tilde\omega'' + \tilde\omega) \end{array} \right\} \frac{\bar{\tilde\omega}_1}{e} (nt)^2$$

Folglich erhalten wir mit Rücksicht auf $R^1_{\varepsilon e\tilde\omega}$:

Por lo tanto, obtendremos, considerando el factor $R^1_{\varepsilon e\tilde\omega}$:

$$s(p_{13}(a_3)) = \frac{1}{32} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \bar{C}_0 \left\{ \begin{array}{l} e^2 \bar{J}''_0 + e''^2 \bar{N}''_0 \\ + 2ee'' \bar{L}''_0 \cos(\tilde\omega'' - \tilde\omega) - e''^2 \bar{M}''_0 \cos(2\tilde\omega'' - 2\tilde\omega) \end{array} \right\} \frac{\bar{\tilde\omega}_1}{e} (nt)^2$$

wo sich das 2. und 4. Glied mit dem Pol $e = 0$ gegen korrespondierende Glieder von $p_4(a_3)$ wegheben, in (4 b), (δ).

Vertauscht man in (β) die Ausdrücke für R^1 und R^2, so ergibt sich der Fall:

donde los términos 2° y 4° con el polo $e = 0$ se eliminan con el término correspondiente de $p_4(a_3)$, (4b), (δ).

Si permutamos en (β) las expresiones de R^1 y R^2, se forma el caso:

$$R^2 = k^2 C''_0 \frac{e}{2} \cos(l - \tilde{\omega}), \qquad (\gamma)$$

kombiniert mit

combinado con

$$R^1 = k^2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{8} e^3 J_0 \cos(l - \tilde{\omega}) + \frac{1}{8} ee'^2 N_0 \cos(l - \tilde{\omega}) \\ & + \frac{1}{8} e^2 e' L_0 \cos(l + \tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) + \frac{1}{8} ee'^2 M_0 \cos(l - 2\tilde{\omega}' + \tilde{\omega}). \end{aligned} \right\}$$

Folglich genügt $e_1 \tilde{\omega}_1$ demselben Ausdruck wie im Falle (α), wobei wir aber hier in (γ) von der Mitnahme des aus eR^2_ε hervorgegangenen Gliedes absehen können, da es zu Termen 4. Grades Anlaß geben würde; mithin wird alsdann:

Por consiguiente $e_1 . \tilde{\omega}_1$ satisface la misma expresión que en el caso (α); pero pudiéndose prescindir aquí de considerar el término eR_ε^2, ya que originaría términos de 4° grado, resulta:

$$s(p_{13}(a_3)) = \frac{1}{8} a \cdot \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 + m)^2} \bar{C}''_0 \left\{ \begin{aligned} & \frac{3}{4} e^2 \bar{J}_0 + \frac{1}{4} e'^2 \bar{N}_0 + ee' \bar{L}_0 \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \\ & - \frac{1}{4} e'^2 M_0 \cos(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) \end{aligned} \right\} \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e} (nt)^2$$

wo das 2. und 4. Glied den Pol $e = 0$ besitzen und sich neswegen gegen die analogen Terme in $p_4(a_3)$, Fall (β) fortheben.

Entnehmen wir jetzt $R^1_{\varepsilon e \omega}$ aus den Termen 2. Grades von R^1, so ist zuerst:

donde los términos 2° y 4° contienen el polo $e = 0$ y por consiguiente se eliminan con los términos análogos de $p_4(a_3)$, caso (β).

Si sacamos ahora $R^1_{\varepsilon e \tilde{\omega}}$ de los términos de 2° grado de R^1, resulta, en primer lugar:

$$R^1 = k^2 \frac{e^2}{4} E_0 \cos(2l - 2\tilde{\omega}). \qquad (\delta)$$

sodaß folglich R^2 entnommen werden muß aus:

de modo que hay que sacar R^2 de:

$$R^1 = k^2 \left\{ \frac{1}{4} e^2 E''_0 \cos(2l - 2\tilde{\omega}) + \frac{1}{4} ee'' G''_0 \cos(2l - \tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \right\}$$

Folglich wird

Por eso resulta:

$$p(e_1)\, s(\tilde{\omega}_1) = \frac{k^2}{K} \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{a}} \left\{ \frac{1}{4} e E''_0 \cos(2l - 2\tilde{\omega}) + \frac{1}{8} G''_0 \cos(2l - \tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \right\} \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e} t,$$

also :

luego :

$$s\left(p_{13}\left(a_3\right)\right) = \frac{1}{16}\, a\, \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\, \bar{E}_0 \left\{ e\bar{E}''_0 + \frac{1}{2}\, e''\bar{G}''_0 \cos\left(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}\right) \right\} \bar{\tilde{\omega}}'_1\, (nt)^2,$$

frei von Polen $e = 0$.

Alsdann bleibt nur noch ein Term 2. Grades in R^1 zur Verwendung für $R^1_{\varepsilon e \tilde{\omega}}$:

carece de polos $e = 0$.

Queda, pues, sólo un término de 2° grado de R^1 para el cálculo de $R^1_{\varepsilon e \tilde{\omega}}$, a saber :

$$R^1 = k^2\, \frac{ee'}{4}\, G_0 \cos\left(2l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}\right), \qquad (\varepsilon)$$

sodaß R^2 demselben Ausdrucke wie im Falle (δ) genügen muß. Demnach folgt auch für das Produkt $p\left(e_1\right) s\left(\tilde{\omega}_1\right)$ derselbe Ausdruck wie in (δ). Mit Rücksicht auf ded neuen Wert von R^1 wird dann :

de manera que R^2 debe satisfacer la misma expresión que en el caso (δ). Luego resulta también para el producto $p\left(e_1\right) s\left(\tilde{\omega}_1\right)$ la misma expresión que en (δ). Considerando el nuevo valor de R^1 se obtiene entonces :

$$s\left(p_{13}\left(a_3\right)\right) = \frac{1}{16}\, a\, \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\, \bar{G}_0 \left\{ e\bar{E}_0 \cos\left(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}\right) + \frac{1}{2}\, e''\bar{G}''_0 \cos\left(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}'\right) \right\} e'\, \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e}\, (nt)^2.$$

wobei das 2. Glied mit dem Pol $e = 0$ gegen das analoge Glied ($4b$) (β) von $p_4\left(a_3\right)$ wegfällt. Zugleich sind alle Terme 2. Grades von $p_{13}\left(a_3\right)$ erledigt, soweit $\tilde{\omega}_1$ als säkular betrachtet wird.

Betrachten wir nun e_1 als säkular, sodaß alsdann $\tilde{\omega}_1$ eine periodische Sinusreihe darstellt, während $R^1_{\varepsilon e \tilde{\omega}}$ eine Cosinusreihe bleibt, so fallen alle Terme mit demselben Argument in $\tilde{\omega}$ und $\tilde{\omega}'$ für unsere Zwecke fort. Wählt man also im Falle der Terme niedrigsten Grades

donde el 2° término con el polo $e = 0$ se elimina con el término análogo ($4b$), (β) de $p_4\left(a_3\right)$. Al mismo tiempo se agotan todos los términos de 2° grado de $p_{13}\left(a_3\right)$, si consideramos $\tilde{\omega}_1$ como secular.

Si consideramos ahora e_1 secular, de manera que $\tilde{\omega}_1$ es una serie periódica de senos, mientras que $R^1_{\varepsilon e \tilde{\omega}}$ es una serie de cosenos, todos los términos con el mismo argumento en $\tilde{\omega}$ y $\tilde{\omega}'$ no vienen al caso. Eligiendo, pues, en el caso de términos de grado más bajo :

$$R^1 = k^2\, \frac{e}{2}\, C_0 \cos\left(l - \tilde{\omega}\right), \qquad (a')$$

so ist R^2 zur Ableitung von $\tilde{\omega}_1$ nur aus den Termen 3. Grades möglich, und zwar nur den folgenden :

sólo será posible deducir $\tilde{\omega}_1$, de los términos siguientes de 3er grado :

$$R^2 = k^2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{8}\, e^2 e'' K''_0 \cos\left(l - \tilde{\omega}''\right) + \frac{1}{8}\, e^2 e'' L''_0 \cos\left(l + \tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}\right) \\ & + \frac{1}{8}\, e e''^2 M''_0 \cos\left(l - 2\tilde{\omega}'' + \tilde{\omega}\right) \end{aligned} \right\}$$

Dann wird zunächst

Resulta entonces

$$p(\tilde\omega_1)\, s(e_1) = \frac{k^2}{\mathrm{K}} \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} ee''\mathrm{K}''_0 \sin(l - \tilde\omega'') \\ + \frac{1}{4} ee''\mathrm{L}''_0 \sin(l + \tilde\omega'' - 2\tilde\omega) \\ + \frac{1}{8} e''^2\mathrm{M}''_0 \sin(l - 2\tilde\omega'' + \tilde\omega) \end{array} \right\} \frac{\bar e_1}{e} l$$

so daß folglich mit Rücksicht auf R^1:

de modo que, considerando la expresión de R^1, se obtiene:

$$s(p_{13}(a_3)) = \frac{1}{16} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \bar{\mathrm{C}}_0 \left\{ \begin{array}{l} \left(\bar{\mathrm{L}}''_0 - \bar{\mathrm{K}}''_0\right) e'' \sin(\tilde\omega'' - \tilde\omega) \\ - \frac{1}{2} \frac{e''^2}{e} \bar{\mathrm{M}}''_0 \sin(2\tilde\omega'' - 2\tilde\omega) \end{array} \right\} \bar e_1 (n \,.\, t)^2.$$

Das letzte mit einem Pole $e = 0$ behaftete Glied der Klammer fällt gegen das entsprechend engegengesetzte Glied $(4a)$ (β) von $p_4(a_3)$ fort.

El último término del paréntesis con el polo $e = 0$, se destruye con el correspondiente término $(4a)$, (β) de $p_4(a_3)$.

Ermitteln wir jetzt $\tilde\omega_1$, an (a) anschießend, mittels:

Si a partir de (a) deducimos $\tilde\omega_1$ por medio de:

$$\mathrm{R}^2 = k^2 \frac{e}{2} \mathrm{C}_0'' \cos(l - \tilde\omega), \qquad (b')$$

so folgt $\mathrm{R}^1_{\varepsilon e\tilde\omega}$ nur aus den folgenden Termen 3. Grades von R^1:

se obtiene $\mathrm{R}^1_{\varepsilon e\tilde\omega}$ sólo de los términos siguientes de 3^er grado de R^1:

$$\mathrm{R}^1 = k^2 \left\{ \frac{1}{8} e^2 e'\mathrm{L}_0 \cos(l + \tilde\omega' - 2\tilde\omega) + \frac{1}{8} ee'^2\mathrm{M}_0 \cos(l - 2\tilde\omega' + \tilde\omega) \right\}.$$

Mithin wird zunächst:

de donde en primer lugar resulta:

$$p(\tilde\omega_1) \,.\, s(e_1) = \frac{1}{2} \frac{k^2}{\mathrm{K}} \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}} \mathrm{C}''_0 \frac{\bar e_1}{e} t \sin(l - \tilde\omega),$$

also folglich:

y por consiguiente:

$$s(p_{13}(a_3)) = -\frac{1}{8} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \bar{\mathrm{C}}''_0 \left\{ \begin{array}{l} e'\bar{\mathrm{L}}_0 \sin(\tilde\omega' - \tilde\omega) \\ + \frac{1}{4} \frac{e'^2}{e} \bar{\mathrm{M}}_0 \sin(2\tilde\omega' - 2\tilde\omega) \end{array} \right\} \bar e_1 (nt)^2.$$

Der 2. Term hebt sich wegen des Poles $e = 0$ gegen den entsprechenden Term $(4a)$, (α) von $p_4(a_3)$ fort.

El 2° término con el polo $e = 0$ se elimina con el término correspondiente $(4a)$, (α) de $p_4(a_3)$.

Ermitteln wird jetzt $\mathrm{R}^1_{\varepsilon e\tilde\omega}$ aus den Termen 2.

Si calculamos ahora $\mathrm{R}^1_{\varepsilon e\tilde\omega}$ por medio de los tér-

Grades von R^1, so ist hier zusammenfassend zu setzen:

minos de 2° grado de R^1, debemos poner:

$$R^1 = k^2 \left\{ \frac{1}{4} e^2 E_0 \cos(2l - 2\tilde{\omega}) + \frac{1}{4} e e' G_0 \cos(2l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \right\} \qquad (c')$$

Folglich muß dann $\tilde{\omega}_1$ ermittelt werden aus:

Por consiguiente debe determinarse $\tilde{\omega}_1$ por medio de

$$R^2 = k^2 \left\{ \frac{1}{4} e e'' G''_0 \cos(2l - \tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) + \frac{1}{4} e^2 E''_0 \cos(2l - 2\tilde{\omega}) \right\};$$

dann wird:

Luego resulta:

$$p(\tilde{\omega}_1)\, s(e_1) = \frac{1}{4} \frac{k^2}{K} \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{a}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{e''}{e} G''_0 \sin(2l - \tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \\ + E''_0 \sin(2l - 2\tilde{\omega}) \end{array} \right\} \bar{e}_1 \cdot t$$

sodaß folglich:

de modo que:

$$s(p_{13}(a_3)) = \frac{1}{8} a \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 + m)^2} \left\{ \begin{array}{l} - \bar{E}_0 \bar{G}''_0 e'' \sin(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) + \frac{1}{2} \bar{E}''_0 \bar{G}_0 e' \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \\ + \frac{1}{4} \bar{G}_0 \bar{G}''_0 \frac{e' e''}{e} \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}'') \end{array} \right\} \bar{e}_1 (nt)^2.$$

Der letzte Term, den Pol $e = 0$ enthaltend, hebt sich gegen den korrespondieren Term in $p_4(a_3)$ (4a) (δ) fort. Damit sind dann alle Terme 2. Grades erledigt, sodaß wir zum nächstend Hauptterm übergehen können:

El último término contiene el polo $e = 0$ y se elimina con el correspondiente de $p_4(a_3)$, (4a), (δ). Con esto se agotan todos los términos de 2° grado de manera que podemos pasar al próximo término principal:

$$p_{14}(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R^1_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}} l_1 \cdot \tilde{\omega}_1 \qquad (14)$$

wo nur $\tilde{\omega}_1$ säkular sein kann und der Faktor l_1 von R^2 abhängig ist. Da die Funktion $R^1_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}}$ stets den Faktor e enthält, $\tilde{\omega}_1$ aber den Pol $e = 0$ besitzt, so verschwindet der Pol im Produkt, sodaß nur polfreie Terme entstehen. Die Störung l_1 folgt mittels

donde sólo $\tilde{\omega}_1$ puede ser secular y el factor l_1 depende de R^2. Ya que la función $R^1_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}}$ contiene siempre el factor e y $\tilde{\omega}_1$ el polo $e = 0$, únicamente se formarán términos libres de polos. La perturbación l_1 resulta por medio de:

$$\dot{l}_1 = - \frac{2\sqrt{a}}{K} R^2_a + \frac{1}{2} e \frac{\sqrt{1 - e^2}}{K\sqrt{a}} R^2_e - \frac{3}{2} \frac{n}{a} a_1 (l, l'').$$

Da $R^1_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}}$ wie l_1 Sinusreihen sind, ist die Berücksichtigung auch gleicher Argumente in beiden Fak-

Ya que $R^1_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}}$ y l_1 son series de senos pueden considerarse también iguales argumentos en los dos toren zulässig. Dann ist, da l_1 von R^2 abhängt, nur ein einziger $i = 0$ entsprechender Term 2. Grades in $p_{14}(a_3)$ möglich; man muß setzen:

factores. Por depender l_1 de R^2, sólo es posible un único término de 2° grado en $p_{14}(a_3)$ correspondiente a $i = 0$; se debe, pues, poner:

$$R^2 = k^2 \left\{ \frac{1}{2} eC''_0 \cos(l - \tilde{\omega}) + \frac{1}{2} e''D''_0 \cos(l - \tilde{\omega}'') \right\}$$

sodaß mithin das Produkt:

de manera que:

$$l_1\tilde{\omega}_1 = \frac{k^2}{K}\frac{\tilde{\omega}_1}{\sqrt{a}\,.\,e}\, t \left\{ \begin{array}{l} e \sin(l - \tilde{\omega}) \left[-a\dfrac{\partial C''_0}{\partial a} + \dfrac{1}{4}\sqrt{1 - e^2}\, C''_0 - \dfrac{3}{2} C''_0 \right] \\ - e'' \sin(l - \tilde{\omega}'') \left[a\dfrac{\partial D''_0}{\partial a} + \dfrac{3}{3} D''_0 \right] \end{array} \right\}$$

Folglich ist $R^1_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}}$ zu entnehmen aus:

Por lo tanto debe sacarse $R^1_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}}$ de:

$$R^1 = k^2 \frac{e}{2} C_0 \cos(l - \tilde{\omega}),$$

sodaß der Säkularteil entsteht:

de manera que:

$$s(p_{14}(a_3)) = \frac{1}{4} a\bar{C}_0 \left\{ \begin{array}{l} e \left[\bar{C}''_{0a} - \dfrac{1}{4}\sqrt{1 - e^2}\, \bar{C}''_0 + \dfrac{3}{2} \bar{C}''_0 \right] \\ + e'' \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \left[\bar{D}''_{0a} + \dfrac{3}{2} \bar{D}''_0 \right] \end{array} \right\} \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{(1 + m)^2} (nt)^2.$$

Alle übrigen Glieder führen zu Termen 4. Grades.

Die von unserer Hauptgruppe noch verbleibenden Glieder: $p_{15}(a_3)$ bis $p_{30}(a_3)$ lassen sich leicht aus den oben schon abgeleiteten Termen ermitteln, da es sich bei diesen Termen nur um solche handelt, die allein aus der Variabilität des Koeffizienten $\sqrt{a}$ des Ausdruckes von $\dot{a}_3$ in Verbindung mit der Entwickelung von R^1_ε hervorgehen.

Zuerst ist zu betrachten:

Todos los demás conducen a términos de 4° grado.

Los términos que faltan todavía de nuestro grupo principal, a saber, $p_{15}(a_3)$ hasta $p_{20}(a_3)$ se deducen fácilmente de los términos ya calculados, puesto que se trata de términos que sólo resultan de la variabilidad del coeficiente $\sqrt{a}$ en la expresión de $\dot{a}_3$ conjuntamente con el desarrollo de R^1.

Primeramente hay que considerar:

$$p_{15}(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K}\frac{1}{2a} \cdot R^1_{\varepsilon a}(a_1)^2 \tag{15}$$

Dieser Term fällt von vorneweg fort, weil $(a_1)^2$ kein Poisson-Glied enthält.

Der folgende Hauptterm ist:

Este término se elimina de antemano, porque $(a_1)^2$ no contiene ningún término de Poisson.

El siguiente término principal es:

$$p_{16}(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} \cdot \frac{1}{2a} R^1_\varepsilon \cdot a_2; \tag{16}$$

hier liefert a_2 die erforderlichen Poissonglieder durch die mit den Faktoren e_1 und $\tilde{\omega}_1$ versehenen Terme von a_2. Das Endresultat folgt direkt aus dem Hauptterm $p_1(a_3)$, indem, wie der Vergleich von $p_{16}(a_3)$ zeigt, nur die Differentiationen nach a zu unterdrückten und ferner $p_1(a_3)$ durch $2a$ zu dividieren ist. Demnach erhält man die folgenden entsprechenden Terme, jetzt akzentuiert:

a_2 produce aquí los términos de Poisson necesarios mediante los términos que contienen los factores e_1 y $\tilde{\omega}_1$. El resultado final se logra directamente del término principal $p_1(a_3)$, como resulta de la comparación de $p_{16}(a_3)$ con $p_1(a_3)$ con solo prescindir de la derivación respecto de a y dividir $p_1(a_3)$ por $2a$. Se obtienen los siguientes términos correspondientes, que distinguimos ahora por acentos

$$(1a)' \qquad s(p_{16}(a_3)) = \frac{1}{8}\, a\, \bar{C}_0(a'')\, \bar{D}_0 \frac{e'\bar{e}_1}{(1+m)^2} \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\,(nt)^2$$

$$(1b)' \qquad = -\frac{1}{8}\, a\bar{C}_0(a'') \left\{ e\bar{C}_0 + e'\bar{D}_0 \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \right\} \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{(1+m)^2}(nt)^2$$

$$(1c)'\alpha \qquad = -\frac{1}{8}\, a\bar{D}_i\bar{C}_i \frac{(i-1)\,n'}{in' - (i-1)\,n} \frac{\bar{e}'_1 e}{(1+m)^2} \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\,(nt)^2$$

$$(1c)'\beta \qquad = -\frac{1}{8}\, a \frac{in'}{n'-n} \bar{A}_i \left(\bar{F}_i - \bar{F}_{-i}\right) \frac{\bar{e}'_1 e}{(1+m)^2} \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\,(nt)^2$$

$$(1d)'\alpha \qquad = -\frac{1}{8}\, a \frac{(i-1)^2\, n'}{in' - (i-1)\,n} \bar{D}_i \left\{ \bar{e}C_i \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + e^2\bar{D}_i \right\} \frac{\bar{\tilde{\omega}}'_1}{(1+m)^2}(nt)^2$$

$$(1d)'\beta \qquad = -\frac{1}{8}\, a \frac{in'}{n'-n} \bar{A}_i \left\{ \bar{F}_i - \bar{F}_{-i} \right\} \frac{\bar{\tilde{\omega}}'_1 e}{(1+m)^2} \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\,(nt)^2$$

$$(1e)' \qquad = +\frac{1}{8}\, a \frac{n''}{n} \bar{D}_0(a'')\, \bar{C}_0 \frac{\bar{e}''_1 e}{(1+m)^2} \sin(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega})\,(nt)^2$$

$$(1f)' \qquad = -\frac{1}{8}\, a \frac{n''}{n} \bar{D}_0(a) \left\{ e\bar{C}_0 \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + e\bar{D}_0 \right\} \frac{\bar{\tilde{\omega}}''_1}{(1+m)^2}(nt)^2$$

Der nächste Hauptterm ist dann:

El próximo término principal

$$p_{17}(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} \frac{1}{2a} R^1_{\varepsilon e} \cdot a_1^{\cdot} \cdot e_1,$$

der sich von $p_9(\dot{a}_3)$ ebenfalls nur durch die oben genannten Differenzen unterscheidet, sodaß man hier erhält:

que resulta de $p_9(\dot{a}_3)$, efectuando las operaciones mencionadas, nos permite escribir:

$$s(p_{17}(a_3)) = -\frac{1}{8}\, a\, \bar{D}''_0 \bar{C}_0 \frac{\bar{e}_1 e''}{(1+m)^2} \sin(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega})\,(nt)^2.$$

Der nächste Term $p_{18}(a_3)$ enthält keine säkularen t^2-Glieder, sodaß wir sogleich übergehen auf:

El próximo término, $p_{18}(a_3)$, no contiene términos seculares en t^2, de manera que pasaremos a:

$$p_{19}(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K}\frac{1}{2a}R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}}a_1 \cdot \tilde{\omega}_1\,; \tag{19}$$

das entsprechende Säkularglied folgt unter Beachtung der schon fixierten Bedingungen aus $p_{11}(a_3)$, sodaß sich ergibt:

el término secular correspondiente resulta de $p_{11}(a_3)$ considerando las condiciones ya fijadas, de modo que:

$$s(p_{19}(a_3)) = \frac{1}{8}a\,\overline{C}_0\left\{e\overline{C}''_0 + e''\overline{D}''_0\cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega})\right\}\frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{(1-m)^2}(nt)^2.$$

Schließlich liefert das letzte Glied der Hauptgruppe:

Finalmente, el último término del grupo principal:

$$p_{20}(\dot{a}_3) = -\frac{2\sqrt{a}}{K}\frac{1}{8a^2}R^1{}_\varepsilon(a_1)^2$$

keinen Beitrag zu den gesuchten Säkulartermen.

no aporta ninguna contribución a los términos seculares buscados.

Hiermit ist die Behandlung der gesamten Hauptgruppe erledigt. Die parallele Hauptgruppe hierzu erhält man, indem man in allen Formeln der behandelten Gruppe von (1) bis (20), den *oberen* Index 1 mit 2 und umgekehrt vertauscht, d. h. indem man überall die Elemente m', a', e', ... mit m'', a'', e'', ... vertauscht und umgekehrt; die Glieder mögen mit (1'), (2), etc., bezeichnet werden; so ist also

Con esto queda terminada la investigación de todo el grupo principal. El grupo principal paralelo se obtiene permutando en todas las fórmulas del grupo ya tratado desde (1) hasta (20) el índice superior 1 con 2 e inversamente, es decir, reemplazando en todas partes los elementos m', a', e', ... por m'', a'', e'', ... e inversamente; designando estos términos con (1'), (2'), etc., se obtiene

$$p_1(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K}R^2{}_{\varepsilon a}a^1{}_2 \tag{1'}$$

wo

donde

$$p(\dot{a}^1{}_2) = \frac{2\sqrt{a}}{K}\left\{a^1{}_{\varepsilon e}e_1 + a^1{}_{2\tilde{\omega}}\tilde{\omega}_1 + a^2{}_{2e''}e''_1 + e^2{}_{2\tilde{\omega}''}\cdot\tilde{\omega}''_1 + a^1{}_{2e'}\cdot e'_1 + a^1{}_{2\tilde{\omega}'}\cdot\tilde{\omega}'_1\right\}$$

u. s. w. Die s-Glieder von a_3 ergeben sich dann entsprechend unmittelbar aus den obigen Resultaten.

Los términos seculares de a_3 resultan entonces, de inmediato, de los resultados precedentes.

Unsere nächste Aufgabe besteht weiter darin, die Störungen der Elemente von Jupiter, Saturn, etc., anstatt bisher indirekt, nunmehr direkt in Rücksicht zu ziehen. Zu diesem Zweck ist die Formel für $\dot{a}_3$ gemäß (5) auf die folgende Form zu erweitern:

Nuestra próxima tarea consiste en considerar directamente, en lugar de indirectamente como hasta ahora, las perturbaciones de los elementos de Júpiter, Saturno, etc. Para este fin, hay que ampliar la fórmula referente a a_3 según (5) de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
p(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K}\Big\{ & {R^1}_{\varepsilon a'} \cdot {a'}_2 + {R^1}_{\varepsilon e'} \cdot {e'}_2 + {R^1}_{\varepsilon\varepsilon'} {l'}_2 + {R^1}_{\varepsilon\tilde{\omega}'} \cdot {\tilde{\omega}'}_2 \\
& + \frac{1}{2} {R^1}_{\varepsilon a' a'} \cdot {a'^2}_1 + \frac{1}{2} {R^1}_{\varepsilon e' e'} \cdot {e'^2}_1 + \frac{1}{2} R_{\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'} {l'^2}_1 + \frac{1}{2} {R^1}_{\varepsilon\tilde{\omega}'\tilde{\omega}'} \cdot \tilde{\omega}'^{21} \\
& + {R^1}_{\varepsilon a a'} \cdot a_1 \cdot {a'}_1 + ({R^1}_{\varepsilon a e'} a_1 {e'}_1) + {R^1}_{\varepsilon a \varepsilon'} a_1 {l'}_1 + ({R^1}_{\varepsilon a \tilde{\omega}'} \cdot a_1 {\tilde{\omega}'}_1) \\
& + {R^1}_{\varepsilon e a'} e_1 \cdot {a'}_1 + ({R^1}_{\varepsilon e e'} e_1 {e'}_1) + {R^1}_{\varepsilon e \varepsilon'} e_1 {l'}_1 + ({R^1}_{\varepsilon e \tilde{\omega}'} \cdot e_1 \cdot {\tilde{\omega}'}_1) \\
& + {R^1}_{\varepsilon\varepsilon a'} l_1 \cdot {a'}_1 + ({R^1}_{\varepsilon\varepsilon e'} l_1 {e'}_1) + {R^1}_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon'} l_1 \cdot {l'}_1 + ({R^1}_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}'} \cdot l_1 \cdot {\tilde{\omega}'}_1) \\
& + {R^1}_{\varepsilon\tilde{\omega} a'} \tilde{\omega}_1 {a'}_1 + ({R^1}_{\varepsilon\tilde{\omega} e'} \cdot \tilde{\omega}_1 {e'}_1) + {R^1}_{\varepsilon\tilde{\omega}\varepsilon'} \tilde{\omega}_1 {l'}_1 + ({R^1}_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}'} \cdot \tilde{\omega}_1 {\tilde{\omega}'}_1) \\
& + {R^1}_{\varepsilon a' e'} \cdot {a'}_1 \cdot {e'}_1 + {R^1}_{\varepsilon a' \varepsilon'} {a'}_1 \cdot {l'}_1 + {R^1}_{\varepsilon a' \tilde{\omega}'} \cdot {a'}_1 \cdot {\tilde{\omega}'}_1 + R_{\varepsilon e' \varepsilon'} \cdot {e'}_1 \cdot {l'}_1 \\
& + {R^1}_{\varepsilon e' \tilde{\omega}'} \cdot {e'}_1 \cdot {\tilde{\omega}'}_1 + {R^1}_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}'} \cdot {l'}_1 {\tilde{\omega}'}_1 + \frac{1}{2a} {R^1}_{\varepsilon a'} a_1 \cdot {a'}_1 + \left(\frac{1}{2a} R_{\varepsilon e'} a_1 {e'}_1\right) \\
& + \frac{1}{2a} {R^1}_{\varepsilon\varepsilon'} a_1 \cdot {l'}_1 + \left(\frac{1}{2a} {R^1}_{\varepsilon\tilde{\omega}'} \cdot a_1 {\tilde{\omega}'}_1\right) \Big\}.
\end{aligned}
$$

Von diesen 34 Gliedern fällt die Mehrzahl für unser Ziel der Ermittelung der Säkularglieder in t^2 fort; nur 10-Glieder sind brauchbar, die durch Parenthesen gekennzeichnet sind. Sämtliche Glieder enthalten wegen der Differentiation von R^1 nach ε die Länge l. Dagegen sind alle Faktoren ${a'}_1$, ${e'}_1$, ${l'}_1$, und ${\tilde{\omega}_1}'$ frei von l, weil wir annehmen, daß die großen Planeten Jupiter, Saturn, etc., keine Störungen durch die kleinen Planeten oder die Erde erfahren, sodaß sie zumindest hier vernachlässigt werden dürfen. Infolgedessen können nur die Glieder einen Betrag liefern, in denen die von l abhängigen Faktoren a_1, e_1, l_1, oder $\tilde{\omega}_1$ auftreten, wobei zugleich zur Entstehung der notwendigen Poissonglieder stets ${e_1}'$ oder ${\tilde{\omega}_1}'$ als Faktoren auftreten müssen und von diesen der Säkularbetrag zu verwenden ist. Es sind ${e_1}'$ und ${\tilde{\omega}_1}'$ die von allen anderen Planeten hervorgerufenen Säkularstörungen des Jupiter, während die Faktoren a_1, e_1, l_1 und $\tilde{\omega}_1$ die periodischen Störungen durch Jupiter, Saturn, etc., enthalten. Im ersteren Falle (Jupiter) durchläuft der Index i alle Werte $i = 0, \pm 1, \pm 2$, etc., aberim 2. Falle (Saturn, etc.) ist immer $i = 0$. In Bezug auf die

La mayoría de estos 34 términos no interesa a nuestro objeto, que es la investigación de los términos seculares en t^2 y hemos destacado con paréntesis los diez términos utilizables. Todos los términos contienen la longitud l a causa de la derivación de R^1 respecto de ε ó l. Por el contrario todos los factores ${a_1}'$, ${e_1}'$, ${l_1}'$ y ${\tilde{\omega}_1}'$ carecen de l, pues suponemos que los grandes planetas Júpiter, Saturno, etc., no sufren perturbaciones debidas a los asteroides o la Tierra, de modo que ellas, al menos aquí, pueden ser despreciadas. Por consiguiente sólo pueden producir una contribución los términos dependientes de l en los cuales aparecen los factores a_1, e_1, l_1 o $\tilde{\omega}_1$, y para que se puedan producir los términos de Poisson necesarios, deberán aparecer ${e_1}'$ y ${\tilde{\omega}_1}'$ como factores. Los factores ${e_1}'$ y ${\tilde{\omega}_1}'$ son las perturbaciones seculares de Júpiter producidas por todos los otros planetas, mientras que los factores a_1, e_1, l_1 y $\tilde{\omega}_1$ contienen las perturbaciones periódicas por Júpiter, Saturno, etc. En el primer caso (Júpiter) el índice i toma los valores $i = 0, \pm 1, \pm 2$, etc., pero en el 2° caso (Saturno, etc.), es siempre $i = 0$. Con referencia a los primeros cuatro términos en ${a_2}'$, ${e_2}'$, ${l_2}'$

ersten 4 Glieder in a'_2, e'_2, l'_2 und $\tilde{\omega}'_2$ ist speziell zu bemerken, daß diese Faktoren wohl Poisson-Glieder enthalten, deren periodischer Teil aber von l', l'', ... oder l', l''', ... etc., abhängt, sodaß eine Kombination zu einer Konstanten durch das Hinzutreten des stets von l abhängenden Faktors $R^1{}_{\varepsilon a'}$, etc., nicht möglich ist. Ferner ist zu bemerken, daß alle 10 Glieder von Polen $e=0$ und $e'=0$ frei sind. Denn prinzipiell können solche Terme nur in den mit den Koeffizienten $\tilde{\omega}_1$ oder $\tilde{\omega}'_1$ oder mit beiden behafteten Gliedern auftreten. Entsprechend dem Prinzip der Entwickelung der Störungsfunktion nach Taylors Theorem muß aber das Auftreten der genannten Faktoren stets von einer Differentiation von R_1 nach $\tilde{\omega}$ oder $\tilde{\omega}'$ oder beiden begleitet sein; andererseits müssen dann gemäß den Eigenschaften der Störungsfuntion die Exzentrizitäten e oder e' oder beide als Faktoren auftreten, sodaß die in $\tilde{\omega}_1$ und $\tilde{\omega}'_1$ oder $\tilde{\omega}_1 \cdot \tilde{\omega}'_1$ auftretenden Pole $e=0$ und $e'=0$ aufgehoben werden.

y $\tilde{\omega}_2'$ hay que observar especialmente que estos factores contienen términos de Poisson. cuyas partes periódicas dependen de l', l'', ... ó l', l''', ... etc. Luego no es posible formar una constante en el producto por $R^1{}_{\varepsilon a'}$, pues $R^1{}_{\varepsilon a'}$, depende siempre de l. Además, hay que observar que todos los 10 términos carecen de polos $e=0$ y $e'=0$; pues en principio estos términos sólo pueden formarse en los productos afectados por los coeficientes $\tilde{\omega}_1$ o $\tilde{\omega}_1'$, ó por los dos. De acuerdo al desarrollo en serie de Taylor de la función perturbadora los factores mencionados aparecen siempre acompañados de una derivación de R^1 respecto de $\tilde{\omega}$ ó $\tilde{\omega}'$ o de ambas; por otra parte, las excentricidades e ó e', o ambas deben aparecer según las propiedades de la función perturbadora, de modo que los polos $e=0$ y $e'=0$ que aparecen en $\tilde{\omega}_1$ y $\tilde{\omega}_1'$ o en $\tilde{\omega} \cdot \tilde{\omega}'$ se eliminen.

Tritt anstelle der gestörten Bahn des Jupiter die des Saturn, etc., so ist in den 10 Termen R^1 durch R^2, etc., und analog die Faktoren e'_1 und $\tilde{\omega}'_1$ durch e''_1 und $\tilde{\omega}''_1$ zu ersetzen. Dann erhält diese Parallelgruppe also die folgende Form:

Si se sustituye la órbita perturbada de Júpiter por la de Saturno, hay que reemplazar en los diez términos R^1 por R^2, etc., y análogamente los factores e_1' y $\tilde{\omega}_1'$ por e_1'' y $\tilde{\omega}_1''$. Entonces, este grupo paralelo obtiene la forma siguiente:

$$p\,(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K}\Big\{ R^2{}_{\varepsilon a e''} \cdot a_1 e''_1 + R^2{}_{\varepsilon a \tilde{\omega}''} a_1 \tilde{\omega}''_1 + R^2{}_{\varepsilon e e''} e_1 e''_1 + R^2{}_{\varepsilon e \tilde{\omega}''} e_1 \tilde{\omega}''_1$$
$$+ R^2{}_{\varepsilon\varepsilon e''} l_1 e''_1 + R^2{}_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}''} l_1 \tilde{\omega}''_1 + R^2{}_{\varepsilon\tilde{\omega} e''} \tilde{\omega}_1 e''_1 + R^2{}_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}''} \tilde{\omega}_1 \cdot \tilde{\omega}''_1$$
$$+ \frac{1}{2a} R^2{}_{\varepsilon e''} a_1 e''_1 + \frac{1}{2a} R^2{}_{\varepsilon\tilde{\omega}''} \cdot a_1 \cdot \tilde{\omega}''_1 \Big\}$$

Dabei ist wieder für a_1, e_1, l_1 und $\tilde{\omega}_1$ die Summe der periodischen Störungen durch Jupiter, Saturn, etc., zu substituieren, ebenso für e''_1 und $\tilde{\omega}''_1$ die Summe der Säkularstörungen des Saturn durch alle übrigen großen Planeten.

Hay que sustituir otra vez a_1, e_1, l_1 y $\tilde{\omega}_1$ por la suma de las perturbaciones periódicas por Júpiter, Saturno, etc.; asimismo, e_1'' y $\tilde{\omega}_1''$ por la suma de las perturbaciones seculares de Saturno debidas a todos los otros grandes planetas.

Gehen wir jetzt zur Behandlung des 1. Gliedes unserer ersten Gruppe über, so ist (1) $R^1{}_{\varepsilon a e'}\, a_1 e'_1$ zu bilden, wobei wieder $e'_1 = \bar{e}'_1\, n' t$ sein muß und $\bar{e}'_1$ ein Glied mindestens vom 1. Grade in e'', e''', etc.,

Si pasamos ahora a considerar el primer término de nuestro primer grupo debemos formar (1) $R^1{}_{\varepsilon a e'}$. $a_1 e_1'$, donde $e_1' = \bar{e}_1'\, n' t$, y $\bar{e}_1'$ es un término de 1^er^ grado por lo menos en e'', e''', etc. Ya que $R^1{}_{\varepsilon a e'}$ es ist. Da $R^1_{\varepsilon ae'}$ durch eine Sinus-, a_1 aber durch eine Cos-Reihe dargestellt wird, so sind Glieder vom gleichen Winkelargument in beiden Faktoren auszuschließen. Deshalb ist, wenn $R^1_{\varepsilon ae'}$ in den Gliedern niedrigsten Grades auf Grund von

una serie de senos, y a_1 una serie de cosenos, quedan excluídos del producto de los dos factores los términos del mismo argumento angular. Por lo tanto, si deducimos $R^1_{\varepsilon ae'}$ de los términos de grado más bajo, o sea de

$$R^1 = k^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} e' D_i \cos\left[il' - (i-1)\, l - \tilde{\omega}'\right] \\ + \frac{1}{4} ee' \left[F_i \cos\left[i\,(l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}\right] + F_{-i} \cos\left[i\,(l' - l) + \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}\right]\right] \end{array} \right\}$$

abgeleitet wird, die periodische Störung a_1 durch Jupiter zu bilden mittels:

debemos formar la perturbación periódica a_1 producida por Júpiter mediante la expresión:

$$R^1 = k^2 \left\{ A_i \cos\left[i\,(l' - l)\right] + \frac{1}{2} C_i e \cos\left[il' - (i-1)\, l - \tilde{\omega}\right] \right\}$$

Die entsprechende periodische Störung a_1 durch Saturn fordert, daß, weil R_1 von l und l', a_1 aber von l und l'' abhängt, das Glied mit $i = 0$ aufzusuchen ist. Ferner ist es jetzt nicht nur gestattet, sondern wegen des Grades des Gliedes notwendig, zu dem zur Ableitung von a_1 erforderlichen R^2-Gliede:

La perturbación periódica correspondiente a_1 debida a Saturno, exige elegir el término con $i = 0$, ya que R^1 depende de l y l' y a_1 depende de l y l''. Además para deducir a_1 no sólo es lícito sino también necesario añadir al término siguiente de R^2:

$$R^2 = k^2 \frac{e}{2} C''_0 \cos(l - \tilde{\omega})$$

noch den folgenden Teil hinzuzufügen:

la parte:

$$\Delta R^2 = k^2 \frac{e''}{2} D''_0 \cos(l - \tilde{\omega}''),$$

während bei a_1 durch Jupiter das zu D_i gehörige Argument: $il' - (i-1)\, l - \tilde{\omega}'$ in R^1 nicht zulässig war. Folglich lautet die Summe der periodischen Störungen durch Jupiter und Saturn:

mientras que en a_1 (perturbación por Júpiter), el argumento del término con D_i: $il' - (i-1)\, l - \tilde{\omega}'$ no era admisible en R^1. Por consiguiente la suma de las perturbaciones periódicas originadas por Júpiter y Saturno es:

$$a_1 = -\frac{k^2}{K}\sqrt{a} \left\{ \begin{array}{l} C_i \frac{(i-1)}{in' - (i-1)\, n} e \cos\left[il' - (i-1)\, l - \tilde{\omega}\right] + 2A_i \frac{\cos i\,(l' - l)}{(n' - n)} \\ - \frac{e}{n} C''_0 \cos(l - \tilde{\omega}) - \frac{e''}{n} D''_0 \cos(l - \tilde{\omega}'') \end{array} \right\},$$

sodaß folglich im Produkt mit $R^1_{\varepsilon ae}$ für die gesuchte Säkularstörung gefunden wird:

de modo que la perturbación secular buscada se halla por medio del producto de a_1 por $R^1_{\varepsilon ae'}$:

$$a_3 = \frac{1}{4}\,a \left\{ \begin{array}{l} \overline{C}_i\overline{D}_{ia}\,\dfrac{(i-1)^2 n'}{in' - (i-1)\,n}\,e\sin(\tilde\omega' - \tilde\omega) + \overline{C}''_0\overline{D}_{0a}\,\dfrac{n'}{n}\,e\sin(\tilde\omega' - \tilde\omega) \\ -\,\overline{D}''_0\overline{D}_{0a}\,\dfrac{n'}{n}\,e''\sin(\tilde\omega'' - \tilde\omega') + \overline{A}_i\overline{F}_{ia}\,\dfrac{in'}{n' - n}\,e\sin(\tilde\omega' - \tilde\omega) \\ -\,\overline{A}_i\overline{F}_{-ia}\,\dfrac{in'}{n' - n}\,e\sin(\tilde\omega' - \tilde\omega) \end{array} \right\} \frac{\overline{e}'_1}{(1+m)^2}\,(nt)^2$$

Der 2. unserer kritischen Teme hängt ab von der Funktion:

El 2° de nuestros términos críticos depende de la función:

$$R^1_{\varepsilon a\tilde\omega'} a_1 \tilde\omega'_1, \qquad \text{wo} \qquad \tilde\omega'_1 = \frac{\overline{\tilde\omega}'_1}{e'}\,n't \tag{2}$$

und $\overline{\tilde\omega}'_1$ mindestens vom 1. Grade. Die beiden anderen Faktoren sind beide Cosinus-Reihen, sodaß in den zugehörigen Störungsfunktionen auch Terme gleichen Argumentes zu berücksichtigen sind. Im Falle niedrigsten Grades von $R^1_{\varepsilon a\tilde\omega'}$ ist zu wählen:

es por lo menos de 1^er grado. Los otros dos factores son series de cosenos, de modo que en las funciones perturbadoras correspondientes hay que considerar también términos del mismo argumento. En el caso de grado más bajo de $R^1_{\varepsilon e\tilde\omega'}$ debe elegirse

$$R^1 = k^2\,\frac{e'}{2}\,D_i \cos\left[il' - (i-1)\,l - \tilde\omega'\right]; \tag{α}$$

folglich ist a_1 (Jupiter) zu ermitteln mittels:

por lo tanto debemos sacar a_1 (Júpiter) por medio de

$$R^1 = k^2 \left\{ C_i\,\frac{e}{2}\cos\left[il' - (i-1)\,l - \tilde\omega\right] + D_i\,\frac{e'}{1}\cos\left[il' - (i-1)\,l - \tilde\omega'\right] \right\}$$

In diesem Falle ist R^2 in Bezug auf die Ableitung von a_1 (Sat.) aus dem zu R^1 analogen Ausdruck zu bilden, nur unter Vertauschung von m', a', e', ... mit m'', a'', e'', ... und Substitution $i = 0$. Dann wird folglich in Bezug auf Jupiter und Saturn:

En este caso, para la deducción de a_1 (Saturno), formamos R^2 de la expresión análoga de R^1, permutando m', a', e', ... con m'', a'', e'', ... y poniendo $i = 0$. Entonces resulta, para Júpiter y Saturno:

$$a_1 = -\frac{k^2}{K}\sqrt{a} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(i-1)}{in' - (i-1)\,n}\,C_i\,e\cos\left[il' - (i-1)\,l - \tilde\omega\right] + \dfrac{(i-1)}{in' - (i-1)\,n}\,D_i\cos\left[il' - (i-1)\,l - \tilde\omega'\right] \\ -\,\dfrac{1}{n}\,C''_0\,e\cos(l - \tilde\omega) - \dfrac{1}{n}\,D''_0\,e''\cos(l - \tilde\omega'') \end{array} \right\}$$

und somit schließlich:

y, finalmente:

$$a_3 = \frac{1}{4}\,a \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(i-1)^2\,n'}{in' - (i-1)\,n}\left[\overline{C}_i\overline{D}_{ia}\,e\cos(\tilde\omega' - \tilde\omega) + \overline{D}_i\overline{D}_{ia}\,.\,e'\right] \\ +\,\dfrac{n'}{n}\left[\overline{C}''_0\overline{D}_{0a}\,e\cos(\tilde\omega' - \tilde\omega) + \overline{D}''_0\overline{D}_{0a}\,e''\cos(\tilde\omega'' - \tilde\omega')\right] \end{array} \right\} \frac{\overline{\tilde\omega}'_1}{(1+m)^2}\,(nt)^2$$

Ferner ist $R^1{}_{\varepsilon a \tilde{\omega}'}$ auch aus Termen 2. Grades von R^1 entnehmbar, sodaß

Además $R^1{}_{\varepsilon a \tilde{\omega}'}$ puede lograrse de términos de 2° grado de R^1, o sea

$$R^1 = \frac{1}{4} k^2 ee' \left\{ F_i \cos\left[i(l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}\right] + F_{-i} \cos\left[i(l' - l) + \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}\right] \right\} \qquad (\beta)$$

sodaß a_1 (Jup.) zu folgern ist mittels:

de manera que a_1 (Júpiter) resulta por medio de:

$$R^1 = k^2 A^i \cos i(l' - l),$$

sodaß:

luego:

$$a_1 = -2\frac{k^2}{K}\sqrt{a}\, A_i \frac{\cos i(l' - l)}{(n' - n)}$$

Mithin ergibt sich dann:

y por consiguiente, se obtiene:

$$a_3 = \frac{1}{4} a \cdot \overline{A}_i \frac{in'}{n' - n} \left\{ \overline{F}_{ia} - \overline{F}_{-ia} \right\} \cdot e \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\, \bar{\tilde{\omega}}'_1 (nt)^2$$

ohne Hinzufügung von Gliedern, die aus a_1 (Sat.) hervorgehen könnten, weil a_1 (Sat.) für $i = 0$ verschwindet.

Weitere Glieder 2. Grades in a_3 sind hier nicht vorhanden, deshalb gehen wir über zu:

sin la intervención de términos que podrían resultar de a_1 (Saturno), puesto que a_1 (Saturno) desaparece para $i = 0$.

Como no hay otros términos de 2° grado en a_3 pasamos a:

$$R_{\varepsilon ee'} e_1 e'_1. \qquad (3)$$

Aus Gründen analog zu denen in den vorhergegangenen Fällen ist dann $R^1{}_{\varepsilon ee'}$ im Falle der Terme niedrigsten Grades zu entnehmen aus:

Por motivos análogos a los de los casos precedentes hay que sacar $R^1{}_{\varepsilon ee'}$, en el caso de términos de grado más bajo de:

$$R^1 = k^2 \frac{ee'}{4} \left\{ F_i \left[i(l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}\right] + F_{-i} \cos\left[i(l' - l) + \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}\right]. \right\} \qquad (a)$$

Da $\dot{e}_1$

Ya que $\dot{e}_1$

$$\dot{e}_1 = -\frac{\sqrt{1 - e^2}}{K\sqrt{a}} \left\{ \frac{1}{e} R_{\tilde{\omega}} + \frac{1}{2} e R_{\varepsilon} \right\},$$

so ist folglich in Bezug auf e_1 (Jup.) zu setzen:

hay que poner para la deducción de e_1 (Júpiter):

$$R^1 = k^2 \left\{ \frac{ee'}{4} \left[F_{-i} \cos\left[i(l' - l) + \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}\right] + F_i \cos\left[i(l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}\right]\right] + A_i \cos i(l' - l) \right\}$$

sodaß

de modo que:

$$e_1 = -\frac{1}{2}\frac{k^2}{K}\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}e'\frac{F_i}{i(n'-n)}\cos[i(l'-l)-\tilde{\omega}'+\tilde{\omega}] \\ -\frac{1}{2}e'\frac{F_{-i}}{i(n'-n)}\cos[i(l'-l)+\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}]-e\frac{A_i}{n'-n}\end{array}\right\}$$

In Bezug auf e_1 (Sat.) sind in Verbindung mit den soeben genannten Gliedern bei den analogen Argumenten in der Länge : $i(l'-l)$ keine Säkularteile in $\dot{a}_3$ möglich, weil bei dem notwendigen $i=0$ die Größe $e_1 = t$. const. = säkular, wird, während $R^1{}_{\varepsilon ee'} = 0$.

Weiter ist $R^1{}_{\varepsilon ee'}$ dem folgenden Gliede 2. Grades zu entnehmen :

Si consideramos conjuntamente los términos ya mencionados con el argumento $i(l'-l)$, con los argumentos análogos que corresponden a e_1 (Saturno), no serán posibles partes seculares en $\dot{a}_3$, ya que por ser necesariamente $i=0$, resulta $e_1 = t$. const. = secular, mientras que $R^1{}_{\varepsilon ee'} = 0$.

Además $R^1{}_{\varepsilon ee'}$ se debe sacar del siguiente término de 2° grado :

$$R^1 = k^2\frac{ee'}{4}G_i\cos[il'-(i-2)l-\tilde{\omega}'+\tilde{\omega}]; \tag{b}$$

folglich ist dann e_1 (Jup.) zu ermitteln aus :

por consiguiente e_1 (Júpiter) se obtiene de :

$$R^1 = k^2\frac{e^2}{4}E_i\cos[il'(i-2)l-2\tilde{\omega}],$$

wobei der Term $e \cdot R^1{}_\varepsilon$ in e_1 zum Wegfall kommt, da er zu Termen 4. Grades in $\dot{a}_3$ führen würde ; also wird, noch mit Rücksicht auf den Anteil Saturns bei $i=0$:

donde el término $e \cdot R^1{}_\varepsilon$ de e_1 se elimina porque origina en $\dot{a}_3$ términos de 4° grado ; luego resulta, considerando la contribución de Saturno para $i=0$:

$$e_1\,(\text{Jup.} + \text{Sat.}) = \frac{1}{2}\frac{k^2}{K}\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}\left\{E_i\frac{e\cos[il'(i-2)l-2\tilde{\omega}]}{in'-(i-2)n} + E''_0\frac{e}{2n}\cos(2l-2\tilde{\omega})\right\}$$

Schließlich führen noch die folgenden aus dem 3. Grade von R^1 sich ergebenden Terme zu Gliedern 2. Grades in $\dot{a}_3$, zwecks Ableitung von $R^1{}_{\varepsilon ee'}$:

Finalmente se originan aun términos de 2° grado en $\dot{a}_3$, si $R^1{}_{\varepsilon ee'}$ se deduce de los siguientes términos de 3^er^ grado de R^1 :

$$R^1 = k^2\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{8}e^2e'K_i\cos[il'-(i-1)l-\tilde{\omega}'] + \frac{1}{8}e^2e'L_i\cos[il'-(i-1)l+\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega}] \\ +\frac{1}{8}ee'^2M_i\cos[il'-(i-1)l-2\tilde{\omega}'+\tilde{\omega}]\end{array}\right\} \tag{c}$$

Folglich ist dann das entsprechende e_1 (Jup.) zu entnehmen aus :

Por consiguiente, el valor correspondiente de e_1 (Júpiter) debe tomarse de :

$$R^1 = k^2\frac{e}{2}C_i\cos[il'-(i-1)l-\tilde{\omega}],$$

sodaß, wenn auch zugleich der bei $i = 0$ entstehende Beitrag von Saturn berücksichtigt wird :

de manera que, considerando la contribución de Saturno correspondiente a $i = 0$, se obtiene :

$$e_1\,(\text{Jup.} + \text{Sat.}) = \frac{1}{2}\frac{k^2}{K}\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}\left\{ C_i \frac{\cos[il' - (i-1)l - \tilde\omega]}{in' - (i-1)n} + C''_0 \frac{\cos(l - \tilde\omega)}{n} \right\}.$$

Insgesamt wird folglich aus allen 3 Fällen (a), (b) und (c) die Säkularstörung :

Por tanto se obtiene en total, de los 3 casos (a), (b) y (c) la perturbación secular :

$$\begin{aligned} a_3 = \frac{1}{16}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\Bigg\{ & -\overline{F}_i\overline{F}_{-i}\frac{n'}{n'-n}\,e' \sin(2\tilde\omega' - 2\tilde\omega) - \overline{A}_i\left(\overline{F}_i - \overline{F}_{-i}\right)\frac{n'}{n'-n}\,e \sin(\tilde\omega' - \tilde\omega), \\ & - \frac{(i-2)n'}{in' - (i-2)n}\overline{E}_i\overline{G}_i e \sin(\tilde\omega' - \tilde\omega) + \overline{C}_i\frac{(i-1)n'}{in' - (i-1)n}\begin{bmatrix} -\left(\overline{K}_i - \overline{L}_i\right) e \sin(\tilde\omega' - \tilde\omega) \\ -\overline{M}_i e' \sin(2\tilde\omega' - 2\tilde\omega)\end{bmatrix} \\ & + \frac{n'}{n}\overline{E}''_0\overline{G}_0 e \sin(\tilde\omega' - \tilde\omega) \\ & - \frac{n'}{n}\overline{C}''_0\left[-\left(\overline{K}_0 - \overline{L}_0\right) e \sin(\tilde\omega' - \tilde\omega) - \overline{M}_0 e' \sin(2\tilde\omega' - 2\tilde\omega)\right]\Bigg\}\,\overline{\tilde\omega}'_1\,(nt)^2. \end{aligned}$$

Der 4. Term unserer Spezialgruppe ist abhängig von der Funktion :

El 4° término de nuestro grupo especial depende de la función :

$$R^1_{\varepsilon e\tilde\omega'} e_1 \tilde\omega'_1, \tag{4}$$

Abgesehen von der Freiheit dieses Produktes von Polen unterliegen die Argumente keinerlei Beschränkung, weil die beiden ersten Faktoren von (4) Cos-Reihen sind. Da das Produkt $R^1_{\varepsilon e\tilde\omega'} \cdot \tilde\omega'_1$ bei Ableitung des 1. Faktors aus Gliedern 3. Grades infolge der Ableitung nach e und der Neutralisierung des Poles $e' = 0$ vom 2. Grade wird, so bleibt das gesamte Produkt (4) vom 2. Grade, wenn e_1 wie $R^1_{\varepsilon e\tilde\omega'}$ aus den Termen desselben Argumentes in l und l' entnommen werden, nämlich :

Si prescindimos del hecho de que este producto carece de polos, los argumentos no están sujetos a ninguna restricción, ya que los dos primeros factores de (4) son series de cosenos. Si R^1 se deduce de términos de 3er grado, resulta del 2° grado el producto $R^1_{\varepsilon e\tilde\omega'} \cdot \tilde\omega_1'$, a causa de la derivación respecto de e y de la neutralización del polo $e' = 0$; por tanto el producto total (4) resultará también de 2° grado, si e_1 y $R^1_{\varepsilon e\tilde\omega'}$ se toman de los términos de igual argumento en l y l', a saber :

$$A = il' - (i-1)l + \alpha\tilde\omega + \beta\tilde\omega',$$

wo gemäß den Eigenschaften der Störungsfunktion $\alpha + \beta = -1$ sein muß.

donde debe ser por las propiedades de la función perturbadora : $\alpha + \beta = -1$.

So erhalten wir zur Ableitung von $R^1_{\varepsilon e\tilde\omega'}$ als ersten Fall :

Por eso obtenemos, para deducir $R^1_{\varepsilon e\tilde\omega'}$, como primer caso :

$$R^1 = k^2\left\{\frac{ee'}{4}\,F_i \cos[i(l'-l) - \tilde\omega' + \tilde\omega] + F_{-i}\cos[i(l'-l) + \tilde\omega' - \tilde\omega]\right\} \tag{a}$$

sodaß e_1 (Jup.) abzuleiten ist mittels der folgenden Funktion

de manera que se debe deducir e_1 (Júpiter) por medio de la función siguiente:

$$R^1 = k^2 \left\{ \frac{ee'}{4} [F_i \cos [i(l'-l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}] + F_{-i} \cos [i(l'-l) + \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}]] + A \cos i(l'-l) \right\}$$

Folglich wird:

Luego resulta:

$$e_1 = \frac{1}{4} \frac{k^2}{K} \frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ - e' \frac{F_i}{i(n'-n)} \cos [i(l'-l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}] + e' \frac{F_{-i}}{i(n'-n)} \cos [i(l'-l) + \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}] \right.$$
$$\left. + 2 \frac{A_i}{n-n'} e \cos i(l'-l) \right\}$$

Periodische Störungen e_1 (Saturn) aus Termen dieser Form liefern in Verbindung mit $R^1_{\varepsilon e \tilde{\omega}'}$ keine Säkularstörungen in a_3.

Das nächste brauchbare Glied von R^1 zur Ableitung des Faktors $R^1_{\varepsilon e \tilde{\omega}'}$ ist

Las perturbaciones periódicas e_1 análogas a estas producidas por Saturno, no dan en a_3 perturbaciones seculares.

El próximo término útil de R^1 para deducir el factor $R^1_{\varepsilon e \tilde{\omega}'}$, es:

$$R^1 = k^2 \frac{ee'}{4} G_i \cos [il' - (i-2)l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}], \tag{b}$$

sodaß e_1 (Jup.) abzuleiten ist aus:

de manera que e_1 (Júpiter) debe sacarse de:

$$R^1 = k^2 \left\{ \frac{e^2}{4} E_i \cos [il' - (i-2)l - 2\tilde{\omega}) + \frac{ee'}{4} G_i \cos [il' - (i-2)l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}] \right\},$$

sodaß

de suerte que:

$$e_1 = \frac{1}{4} \frac{k^2}{K} \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}} \frac{1}{in' - (i-2)n} \left\{ \begin{array}{l} 2eE_i \cos [il' - (i-2)l - 2\tilde{\omega}] \\ + e'G_i \cos [il' - (i-2)l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}] \end{array} \right\}$$

Schließlich sind in dem Falle, wo die Glieder 3. Grades der Störungsfunktion herangezogen werden, um $R^1_{\varepsilon e \tilde{\omega}'}$ zu ermitteln, allein die folgenden Glieder zu berücksichtigen:

Si consideramos finalmente, para deducir $R^1_{\varepsilon e \tilde{\omega}'}$ términos de 3^er grado de la función perturbadora, sólo podemos tomar:

$$R_1 = k^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{8} e^2 e' K_i \cos [il' - (i-1)l - \tilde{\omega}'] + \frac{1}{8} e^2 e' L_i \cos [il' - (i-1)l + \tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}] \\ + \frac{1}{8} ee'^2 M_i \cos [il' - (i-1)l - 2\tilde{\omega}' + \tilde{\omega}] \end{array} \right\}. \tag{c}$$

Also ist e_1 (Jup.) dann nur zu folgern aus:

Por lo tanto e_1 (Jupiter) se logra sólo de:

$$R^1 = k^2 \frac{e}{2} C_i \cos [il' - (i-1)l - \tilde{\omega}],$$

womit man erhält:

de donde se obtiene:

$$e_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{k^2}{K} \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{a}} \frac{C^i}{in' - (i - 1) n} \cos [il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}].$$

Die aus e^1 (Sat.) sich ergebenden Terme folgen in den Fällen (b) und (c) bei Substitution $i = 0$ bei gleichzeitigem Übergange von m', a', e', ... auf m'', a'', e'', ... in den aufgestellten Formeln. Alsdann erhält man insgesamt:

Los términos correspondientes a e_1 (Saturno) se forman en los casos (b) y (c) poniendo $i = 0$ y permutando m', a', e', ... con m'', a'', e'', ... en las fórmulas establecidas. Entonces se obtiene, en suma:

$$a_3 = \frac{1}{16} a \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 + m)^2} \Big\{ - \frac{1}{2} \overline{F}_i \overline{F}_{-i} \frac{n'}{n' - n} e' \cos (2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) - \overline{F}_i \overline{A}_i \frac{in'}{n' - n} e \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$$

$$+ \frac{1}{2} (\overline{F}_i)^2 \frac{n'}{n' - n} e' + \frac{1}{2} (\overline{F}_{-i})^2 \frac{n'}{n' - n} e' - \frac{1}{2} \overline{F}_i \overline{F}_{-i} \frac{n'}{n' - n} e' \cos (2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega})$$

$$+ \overline{F}_{-i} \overline{A}_i \frac{in'}{n' - n} e \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - \overline{G}_i (i - 2) \Big[\frac{1}{2} \overline{G}_i \frac{n'}{in' - (i - 2) n} e'$$

$$+ \overline{E}_i \frac{n'}{in' - (i - 2) n} e \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \Big] + \overline{G}_0 \frac{n'}{n} \Big[\frac{1}{2} \overline{G}''_0 e'' \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') + \overline{E}''_0 \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \Big]$$

$$- \frac{(i - 1) n'}{in' - (i - 1) n} \overline{C}_i \Big[\overline{K}_i e \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - \overline{L}_i e \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \overline{M}_i e' \cos (2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}') \Big]$$

$$+ C''_0 \frac{n'}{n} \Big[\overline{K}_0 e \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - \overline{L}_0 e \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \overline{M}_0 e' \cos (2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) \Big] \Big\} \tilde{\omega}_1' (nt)^2.$$

Der nächste Term unserer Gruppe lautet dann:

El próximo término de nuestro grupo es pues:

$$R^1_{\varepsilon\varepsilon e'} \cdot l_1 e'_1, \tag{5}$$

sodaß die nötigen Konstanten aus dem Produkt einer periodischen Sinus- mit einer Cosinus-Reihe zu suchen sind, sodaß folglich Terme gleichen Argumentes in den Störungsfunktionen ausgeschlossen sind.

Da $R^1_{\varepsilon\varepsilon e'}$ mindestens vom 0. Grade, muß R^1 die folgenden Glieder enthalten, um Terme niedrigsten d. h. 2. Grades in a_3 zu erlangen:

de manera que hay que buscar las constantes necesarias en el producto de una serie de senos por una serie de cosenos, quedando excluídos de las funciones perturbadoras los términos del mismo argumento.

Ya que $R^1_{\varepsilon\varepsilon e'}$ es por lo menos de grado 0, R^1 debe contener los términos siguientes a fin de lograr los del grado más bajo en a_3:

$$R^1 = k^2 \Big\{ \frac{e'}{2} D_i \cos [il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}'] + \frac{ee'}{4} F_i \cos [i (l' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}] + F_{-i} \cos [i (l' - l) + \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}] \Big\}$$

Alle anderer Glieder 2. und höheren Grades führen zu Termen 4. Grades in a_3. Da

Todos los demás términos de 2° grado o mayor producen términos de 4° grado en a_3. Ya que

$$\dot{l}_1 = \dot{\rho}_1 - \frac{2\sqrt{a}}{K} R^1_a + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}} e R^1_e,$$

wo

donde

$$\dot{\rho}_1 = -\frac{3}{2}\frac{n}{a} a_1 = -\frac{3}{2}\int \frac{2\sqrt{a}}{K} R^1_\varepsilon \,.\, dt,$$

so ist l_1 wie auch ρ_1 abzuleiten mittels:

hay que deducir l_1 y ρ_1 por medio de:

$$R^1 = k^2 \left\{ \frac{e}{2} C_i \cos\left[il' - (i-1)\,l - 2\tilde{\omega}\right] + A_i \cos\left[i\,(l'-l)\right] \right\}.$$

Man findet alsdann:

Hállase entonces:

$$l_1 = -2\frac{k^2}{K}\cdot\sqrt{a}\left\{\frac{1}{2} e \frac{\partial C_i}{\partial a} \frac{\sin\left[il' - (i-1)\,l - \tilde{\omega}\right]}{in' - (i-1)\,n} + \frac{\partial A_i}{\partial a}\frac{\sin i\,(l'-l)}{i\,(n'-n)}\right\} + \frac{1}{4}\frac{k^2}{K}\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}\cdot e \times$$
$$\times C_i \frac{\sin\left[il' - (i-1)\,l - \tilde{\omega}\right]}{in' - (i-1)\,n} + 3\frac{k^2}{K}\frac{n}{\sqrt{a}}\left\{\frac{1}{2} e C_i \frac{(i-1)\sin\left[il' - (l'-1)\,(l-\tilde{\omega}\right]}{\left[in' - (i-2)\,n\right]^2} + A_i \frac{\sin i\,(l'-l)}{i\,(n'-n)^2}\right\}$$

Folglich erhält man unter Berücksichtigung des Faktors $R^1_{\varepsilon\varepsilon e'}$, und ferner nach Ableitung des entsprechenden Termes l_1 (Sat.):

Por consiguiente se obtiene, considerando el factor $R^1_{\varepsilon\varepsilon e'}$ y deduciendo además el término correspondiente l_1 (Sat.):

$$a_3 = a\frac{1}{(1+m)^2}\left\{ e\sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\left[\frac{1}{4}\overline{D}_i\overline{C}_{ia}\frac{(i-1)^2 n'}{in' - (i-1)\,n} + \frac{1}{4}\overline{A}_{ia}\frac{in'}{n'-n}\left(\overline{F}_i - \overline{F}_{-i}\right)\right.\right.$$
$$- \frac{1}{16}\sqrt{1-e^2}\,\overline{C}_i\overline{D}_i\frac{(i-1)^2 n'}{in' - (i-1)\,n} - \frac{3}{8}\left.\left(\overline{D}_i\overline{C}_i\frac{(i-1)^3 nn'}{\left[in' - (i-1)\,n\right]^2} + \overline{A}_i\left(\overline{F}_i - \overline{F}_{-i}\right)\frac{inn'}{(n'-n)^2}\right)\right]$$
$$- \frac{1}{4}\overline{D}_0\left[e\sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\left(-3\frac{n'}{n}\overline{C}''_0 - 2\frac{n'}{n}\overline{C}''_{0a} + \frac{1}{2}\sqrt{1-e^2}\frac{n'}{n}\overline{C}''_0\right)\right.$$
$$\left.\left. + e''\sin(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}')\left(3\frac{n'}{n}\overline{D}''_0 + 2\frac{n'}{n}\overline{D}''_{0a}\right)\right]\right\}\overline{e}'_1\,(n\,.\,t)^2.$$

Der nächste Term unserer Gruppe ist der folgende:

El próximo término de nuestro grupo es el siguiente:

$$R^1_{\varepsilon\varepsilon\tilde{\omega}'}\,.\,l_1\tilde{\omega}'_1. \qquad (6)$$

Da bei säkularem Verhalten des letzten Faktors die beiden ersten Faktoren Sinusreihen sind, sind Terme gleichen Argumentes in ihnen zulässig. Der erste Faktor ist zuerst aus der folgenden Funktion zu bilden:

Ya que los dos primeros factores son series de senos y el último factor es secular, son admisibles en ellos términos del mismo argumento. El primer factor se forma, en primer lugar, de la función:

$$R^1 = k^2 \left\{ \frac{1}{2} e' D_i \cos [il' - (i-1)l - \tilde{\omega}'] + \frac{ee'}{4} [F_i \cos [i(l'-l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}] + F_{-i} \cos [i(l'-l) + \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}]] \right\}$$

während alle weiteren Glieder 2. und höheren Grades nur zu Termen 4. und höheren Grades in a_3 führen können. Folglich sind dann l_1 und ρ_1 abzuleiten aus:

mientras que todos los demás términos de 2° grado o mayor solo pueden introducir en a_3 términos de 4° grado o mayor. Por consiguiente l_1 y ρ_1 deben deducirse de

$$R^1 = k^2 \left\{ \frac{1}{2} eC_i \cos [il' - (i-1)l - \tilde{\omega}] + \frac{1}{2} e' D_i \cos [il' - (i-1)l - \tilde{\omega}'] + A_i \cos i(l'-l) \right\}$$

sodaß:

de modo que:

$$\begin{aligned} l_1 = &- \frac{k^2}{K} \sqrt{a} \left\{ e \frac{\partial C_i}{\partial a} \frac{\sin [il' - (i-1)l - \tilde{\omega}]}{in' - (i-1)n} + e' \frac{\partial D_i}{\partial a} \frac{\sin [il' - (i-1)l - \tilde{\omega}']}{in' - (i-1)n} \right. \\ &\left. + 2 \frac{\partial A_i}{\partial a} \frac{\sin i(l'-l)}{i(n'-n)} \right\} + \frac{1}{4} \cdot \frac{k^2}{K} \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}} eC_i \frac{\sin [il' - (i-1)l - \tilde{\omega}]}{in'(i-1)n} \\ &+ \frac{3}{2} \frac{k^2}{K} \frac{n}{\sqrt{a}} \left\{ eC_i \frac{(i-1)}{[in' - (i-1)n]^2} \sin [il' - (i-1)l - \tilde{\omega}] \right. \\ &\left. + e' D_i \frac{(i-1)}{[in' - (i-1)n]^2} \sin [il' - (i-1)l - \tilde{\omega}'] + A_i \frac{\sin i(l'-l)}{i(n'-n)^2} \right\} \end{aligned}$$

Folglich wird, nachdem auch l_1 (Sat.) gebildet worden ist, mittels Substitution von $i = 0$ und Überganges van m', a', e', ... auf m'', a'', e'', ..., der folgende Ausdruck für a_3 erhalten:

Por consiguiente, después de haber formado l_1 (Sat.) haciendo $i = 0$ y permutando m', a', e', ... con m'', a'', e'', ..., resulta la siguiente expresión de a_3:

$$\begin{aligned} a_3 = \frac{1}{2} \Bigg\{ &\overline{D}_i (i-1)^2 \Bigg[- \frac{1}{2} \left(\overline{C}_{ia} \frac{n'}{in' - (i-1)n} e \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \overline{D}_{ia} \frac{n'}{in' - (i-1)n} e' \right) - \frac{1}{8} \sqrt{1-e^2} \frac{n'}{in' - (i-1)n} \times \\ &\times \overline{C}_i e \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \frac{3}{4} \left(\overline{C}_i \frac{(i-1)nn'}{[in' - (i-1)n]^2} e \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \overline{D}_i \frac{(i-1)nn'}{[in' - (i-1)n]^2} e' \right) \Bigg] \\ &+ \frac{1}{2} \overline{F}_i \overline{A}_{ia} \frac{in'}{n'-n} e \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - \frac{3}{8} \overline{F}_i \overline{A}_i \frac{nn'}{(n'-n)^2} e \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \\ &- \frac{1}{2} \overline{F}_{-i} \overline{A}_{ia} \frac{in'}{n'-n} e \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \frac{3}{8} \overline{F}_{-i} \frac{inn'}{(n'-n)^2} \overline{A}_i e \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \\ &- \frac{1}{4} \overline{D}_0 \Bigg[e \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \left(-2 \frac{n'}{n} \overline{C}''_{0a} + \frac{1}{2} \sqrt{1-e^2} \frac{n'}{n} \overline{C}''_0 - 3 \frac{n'}{n} \overline{C}''_0 \right) \\ &+ ee'' \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \left(-2 \frac{n'}{n} \overline{D}''_{0a} - 3 \frac{n'}{n} D''_0 \right) \Bigg] \Bigg\} \frac{\overline{\tilde{\omega}}'_1}{(1+m)^2} (nt)^2. \end{aligned}$$

Der nächste der Hauptterme ist:

El próximo de los términos principales es:

$$R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}e'} \cdot \tilde{\omega}_1 e'_1 \tag{7}$$

da der 1. Faktor durch eine Cos-, der 2. durch eine Sinusreihe dargestellt wird, so sind in beiden gleiche Argumente ausgeschlossen. Folglich ist $R_{\varepsilon\tilde{\omega}e'}$, da die zugehörige Funktion R^1 wegen der Differentiation nach $\tilde{\omega}$ und e' mindestens vom 2. Grade sein muß, zuerst zu entnehmen aus:

ya que el primer factor es una serie de cosenos y el 2° una serie de senos, se excluyen de los dos factores los argumentos iguales. Por lo tanto debemos obtener en primer lugar $R_{\varepsilon\tilde{\omega}e'}$, de la expresión siguiente, pues la función R^1 correspondiente debe ser por lo menos de 2° grado a causa de la derivación respecto de $\tilde{\omega}$ y e':

$$R^1 = k^2 \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{4} ee'G_i \cos[il' - (i-2)l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}] + \frac{1}{4} ee' [F_i \cos[i(l'-l)\tilde{\omega} - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}) \\ &+ F_{-i} \cos[i(l'-l) + \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}] \end{aligned} \right\} \tag{a}$$

Folglich ist $\tilde{\omega}_1$ aus dem folgenden R^1 zu ermitteln:

Por consiguiente deducimos $\tilde{\omega}_1$ de:

$$R^1 = k^2 \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{4} e^2E_i \cos[il' - (i-2)l - 2\tilde{\omega}] + \frac{1}{4} ee' [F_i \cos[i(l'-l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}] \\ &+ F_{-i} \cos[i(l'-l) + \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}]] + \frac{1}{4} e^2B_i \cos i(l'-l) \end{aligned} \right\}$$

sodaß sich für $\tilde{\omega}_1$ (Jup.) ergibt:

de manera que resulta $\tilde{\omega}_1$ (Júp.).:

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{k^2}{K} \cdot \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{e} \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{4} eE_i \frac{\sin[il' - (i-2)l - 2\tilde{\omega}]}{in' - (i-2)n} + \frac{1}{4} e' \frac{1}{i(n'-n)} [F_i \sin[il' - l) - \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}] \\ &+ F_{-i} \sin[i(l'-l) + \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}]] + \frac{1}{2} eB_i \sin i(l'-l) \end{aligned} \right\}$$

Da es nun auch möglich ist, daß das Produkt $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}e'} \cdot \tilde{\omega}_1$ vom 1. Grade wird, wenn der 1. Faktor aus Termen 3. Grades und $\tilde{\omega}_1$ aus Termen 1. Grades von R^1 entnommen wird, unter Neutralisierung des Poles $e = 0$, so sind von den Termen 3. Grades diese und nur diese zu berücksichtigen:

Ya que ahora es posible que el producto $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}e'} \cdot \tilde{\omega}_1$ resulte también de 1^er grado, si el primer factor se saca de los términos de 3^er grado y $\tilde{\omega}_1$ de los términos del 1^er grado de R^1, con neutralización del polo $e = 0$, debemos considerar de los términos de 3^er grado éstos y sólo estos términos:

$$R^1 = k^2 \left\{ \frac{1}{8} e^2e'L_i \cos[il' - (i-1)l + \tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}] + \frac{1}{8} ee'^2M_i \cos[il' - i - 1)l - 2\tilde{\omega}' + \tilde{\omega}] \right\} \tag{b}$$

Folglich ergibt sich $\tilde{\omega}_1$ mittels:

Por consiguiente $\tilde{\omega}_1$ resulta por medio de:

$$R^1 = \frac{1}{2} k^2eC_i \cos[il' - (i-1)l - \tilde{\omega}]$$

sodaß

luego :

$$\dot{\tilde\omega}_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{k^2}{K} \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}} C_i \frac{1}{e} \frac{\sin[il' - (i-1)l - \tilde\omega]}{in' - (i-1)n}$$

Fügen wir in den beiden Fallen (a) und (b) noch die Störung $\tilde\omega_1$ (Sat.) hinzu, durch Substitution von $i = 0$ in die entsprechenden Terme, so erhalten wir endlich :

Si añadimos además en los dos casos (a) y (b) la perturbación $\tilde\omega_1$ (Sat.), haciendo $i = 0$ en los términos correspondientes, obtendremos finalmente :

$$\begin{aligned} a_3 = \frac{1}{32} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \Big\{ & -2\overline{G}_i\overline{E}_i \frac{(i-2)n'}{in' - (i-2)n} e \sin(\tilde\omega' - \tilde\omega) - 2\overline{F}_i\overline{F}_{-i} \frac{n'}{n'-n} e' \sin(2\tilde\omega' - 2\tilde\omega) \\ & - 2\overline{B}_i\overline{F}_i \frac{n'}{n'-n} e \sin(\tilde\omega' - \tilde\omega) + 2\overline{B}_i\overline{F}_{-i} \frac{n'}{n'-n} e \sin(\tilde\omega' - \tilde\omega) \\ & - 2\overline{C}_i \frac{(i-1)n'}{in' - (i-1)n} \left[e\overline{L}_i \sin(\tilde\omega' - \tilde\omega) + e'\overline{M}_i \sin(2\tilde\omega' - 2\tilde\omega)\right] + 2\overline{G}_0\overline{E}''_0 \frac{n'}{n} e \sin(\tilde\omega' - \tilde\omega) \\ & - \overline{G}_0\overline{G}''_0 \frac{n'}{n} e'' \sin(\tilde\omega'' - \tilde\omega') + 2\overline{C}''_0 \frac{n'}{n} \left[e\overline{L}_0 \sin(\tilde\omega' - \tilde\omega) + e'\overline{M}_0 \sin(2\tilde\omega' - 2\tilde\omega)\right] \Big\} e'_1 \cdot (nt)^2. \end{aligned}$$

Der nächste Term der Hauptgruppe lautet :

El próximo término del grupo principal es :

$$R^1_{\varepsilon\tilde\omega\tilde\omega'} \cdot \tilde\omega_1 \cdot \tilde\omega_1 ; \tag{8}$$

sowohl der 1. wie der 2. Faktor werden durch Sinusreihen dargestellt sodaß gleiche Winkelargumente zulässig sind.

Da $R^1_{\varepsilon\tilde\omega\tilde\omega'}$ mindestens vom 2. Grade ist, beruht der 1. Fall auf der folgenden Zusammensetzung von R^1 :

tanto el primer factor como el 2° son series de senos, de manera que son admisibles argumentos angulares iguales.

Ya que $R^1_{\varepsilon\tilde\omega\tilde\omega'}$ es por lo menos de 2° grado, el primer caso se basa en la siguiente composición de R^1 :

$$R^2 = k^2 \frac{ee'}{4} \left\{ \begin{aligned} & F_i \cos[i(l'-l)l - \tilde\omega' + \tilde\omega] + F_{-i} \cos[i(l'-l) + \tilde\omega' - \tilde\omega] \\ & + G_0 \cos[il' - (i-2)l - \tilde\omega' - \tilde\omega] \end{aligned} \right\} \tag{a}$$

sodaß

de modo que

$$\dot{\tilde\omega}_1 = \frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{e} R^1_e$$

zu ermitteln ist aus :

se deduce de :

$$R^1 = k^2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{4} e^2 B_i \cos i(l'-l) + \frac{1}{4} ee' [F_i \cos[i(l'-l) - \tilde\omega' + \tilde\omega] + F_{-i} \cos[i(l'-l) + \tilde\omega' - \tilde\omega] \\ & + \frac{1}{4} e^2 E_i \cos[il' - (i-2)l - 2\tilde\omega] + \frac{1}{4} ee' G_i \cos[il' - (i-2)l - \tilde\omega' - \tilde\omega] \end{aligned} \right\}$$

sodaß / luego:

$$\tilde\omega_1 = \frac{k^2}{K}\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}\cdot\frac{1}{e}\left\{\frac{1}{2}B_{ie}\frac{\sin i(l'-l)}{i(n'-n)} + \frac{e'}{4}\frac{1}{i(n'-n)}\left(\begin{array}{l} F_i \sin[i(l'-l)-\tilde\omega'+\tilde\omega] \\ + F_{-i}\sin[i(l'-l)+\tilde\omega'-\tilde\omega]\end{array}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}E_{ie}\frac{\sin[il'-(i-2)l-2\tilde\omega]}{in'-(i-2)n} + \frac{1}{4}e'G_i\frac{\sin[il'-(i-2)l-\tilde\omega'-\tilde\omega]}{in'-(i-2)n}\right\}$$

In Bezug auf $\tilde\omega_1$ (Sat.) ist zu bemerken, daß das Produkt $R^1_{\varepsilon\tilde\omega\tilde\omega'}\cdot\tilde\omega_1$ infolge $i=0$ in diesem Falle nur von den Funktionen E_0 und G_0 abhängig wird.

Respecto de $\tilde\omega_1$ (Sat.) hay que observar que el producto $R^1_{\varepsilon\tilde\omega\tilde\omega'}\cdot\tilde\omega_1$ depende en este caso (por $i=0$) solamente de las funciones E_0 y G_0.

Weiter folgen auch aus bestimmten Termen 3. Grades von R^1 zur Ableitung von $R^1_{\varepsilon\tilde\omega\tilde\omega'}$ brauchbare Teile von a_3, wenn $\tilde\omega_1$ aus dem in e linearen Term von R^1 berechnet wird, sodaß $\frac{1}{ee'}R^1_{\varepsilon\tilde\omega\tilde\omega'}$ vom 1. Grade, $e\,.\,\tilde\omega_1$ vom 0. Grade und $e'\tilde\omega'_1$ vom 1. Grade werden. Man hat dementsprechend nur die folgenden Terme in R^1 zur Ableitung von $R^1_{\varepsilon\tilde\omega\tilde\omega'}$ zu berücksichtigen:

Además resultan partes útiles de a_3, si se deduce $R^1_{\varepsilon\tilde\omega\tilde\omega'}$ de ciertos términos de 3^er grado, y si se calcula $\tilde\omega_1$ del término lineal en e de R^1, de manera que sea $\frac{1}{ee'}\cdot R^1_{\varepsilon\tilde\omega\tilde\omega'}$ de 1^er grado, $e\,.\,\tilde\omega_1$ de grado 0 y $e'\,.\,\tilde\omega'_1$ de 1^er grado. Por este motivo debemos considerar únicamente los siguientes términos de R^1 para deducir $R^1_{\varepsilon\tilde\omega\tilde\omega'}$:

$$R^2 = k^2\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{8}e^2e'L_i\cos[il'-(i-1)l+\tilde\omega'-2\tilde\omega] \\ +\frac{1}{8}ee'^2M_i\cos[il'-(i-1)l-2\tilde\omega'+\tilde\omega]\end{array}\right\} \qquad (b)$$

Folglich ist zur Bestimmung von $\tilde\omega_1$ zu wählen:

Por consiguiente, para la determinación de $\tilde\omega_1$, debemos elegir:

$$R^1 = k^2\frac{e}{2}C_i\cos[il'-(i-1)l-\tilde\omega],$$

sodaß / de manera que

$$\tilde\omega_1 = \frac{1}{2}\frac{k^2}{K}\cdot\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}C_i\frac{1}{e}\frac{\sin[il'-(i-1)l-\tilde\omega]}{in'-(i-1)\,.\,n}.$$

Alsdann erhält man aus den Termen (a) und (b) zusammen, unter Einschluß von $\tilde\omega_1$ (Sat.):

Entonces se obtiene por (a) y (b), incluyendo $\tilde\omega_1$ (Sat.):

$$
\begin{aligned}
a_3 = \frac{1}{16}\, a \cdot \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \Bigg\{ & e\overline{F}_i\overline{B}_i \frac{n'}{n'-n} \cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) + e'\overline{F}_i\overline{F}_{-i} \frac{n'}{n'-n} \cos(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega}) \\
& + \frac{1}{2} e' \left(\overline{F}_i\right)^2 \frac{n'}{n'-n} - e\overline{F}_{-i}\overline{B}_i \frac{n'}{n'-n} \cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) + \frac{1}{2} e' \left(\overline{F}_{-i}\right)^2 \frac{n'}{n'-n} \\
& - \frac{1}{2} e' \left(\overline{G}_i\right)^2 \frac{(i-2)\,n'}{in'-(i-2)\,n} - e\overline{E}_i\overline{G}_i \frac{(i-2)\,n'}{in'-(i-2)\,n} \cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) \\
& + \overline{C}_i \frac{(i-1)\,n'}{in'-(i-1)\,n} \left[e\overline{L}_i \cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) + e'\overline{M}_i \cos(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega})\right] \\
& + \overline{E}''_0\,\overline{G}_0 \frac{n'}{n} e \cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) + \frac{1}{2} \overline{G}''_0\overline{G}_0 \frac{n'}{n} e'' \cos(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}') \\
& - \overline{C}''_0 \frac{n'}{n} \left[e\overline{L}_0 \cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) + e'\overline{M}_0 \cos(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega})\right] \Bigg\} \,\overline{\tilde{\omega}}_1'\,(nt)^2.
\end{aligned}
$$

Weiter lautet der vorletzte Term unserer Gruppe:

El término penúltimo de nuestro grupo es:

$$\dot{a}_3 = \frac{2\sqrt{a}}{K} \frac{1}{2a} R^1{}_{\varepsilon e'} \cdot a_1 \cdot e'_1\,; \tag{9}$$

das Resultat ergibt sich aus dem entsprechenden Term (1) unserer Gruppe, da beide Funktionen sich nur durch die Differentiation nach a in (1) und den Divisor $2a$ in (9) unterscheiden. Die Beachtung dieser Unterschiede ergibt unmittelbar:

el resultado se obtiene del término correspondiente (1) de nuestro grupo, ya que ambas funciones difieren solamente en la derivación respecto de a en (1) y el divisor ($2a$) en (9). Por la observación de estas diferencias resulta inmediatamente:

$$
\begin{aligned}
a_3 = \frac{1}{8}\, a \Bigg\{ & \left(e\overline{C}_i\overline{D}_i \frac{(i-1)^2\,n'}{in'-(i-1)\,n} + e\overline{A}_i\left[\overline{F}_i - \overline{F}_{-i}\right] \frac{in'}{n'-n}\right) \sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) \\
& + e\overline{C}''_0\overline{D}_0 \frac{n'}{n} e \sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) - \overline{D}''_0\overline{D}_0 \frac{n'}{n} e'' \sin(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}') \Bigg\} \frac{\overline{\tilde{\omega}}'_1}{(1+m)^2}\,(nt)^2.
\end{aligned}
$$

Schließlich lautet der letzte Term der Gruppe:

Finalmente, el último término del grupo es:

$$\dot{a}_3 = \frac{2\sqrt{a}}{K} \cdot \frac{1}{2a} R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}'} a_1 \cdot \tilde{\omega}'_1. \tag{10}$$

Auch dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem analogen Term (2) unserer Gruppe nur durch die schon unter (9) erwähnten Operationen. Folglich erhält man in ähnlicher Weise:

También esta expresión se distingue del término análogo (2) de nuestro grupo sólo por las operaciones ya mencionadas en (9). Por consiguiente, se obtiene de modo semejante:

$$a_3 = \frac{1}{8} a \left\{ \left(\overline{\mathrm{F}}_i - \overline{\mathrm{F}}_{-i}\right) \overline{\mathrm{A}}_i \frac{in'}{n'-n} e \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \left[\overline{\mathrm{C}}_i \overline{\mathrm{D}}_i e \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + e' \left(\overline{\mathrm{D}}_i\right)^2\right] \frac{(i-1)^2 n'}{in' - (i-1) n} \right.$$

$$\left. + \overline{\mathrm{C}}''_0 \overline{\mathrm{D}}_0 \frac{n'}{n} e \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \overline{\mathrm{D}}''_0 \overline{\mathrm{D}}_0 \frac{n'}{n} e'' \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \right\} \frac{\overline{\tilde{\omega}}'_1}{(1+m)^2} (nt)^2.$$

Hiermit sind alle Terme der Gruppe erledigt, sodaß nunmehr auch die Parallelgruppe unmittelbar ableitbar ist, wenn Saturn mit Uranus, etc., vertauscht wird, zu welchem Zweck nur m'', a'', e'', ... mit m''', a''', e''', ... zu vertauschen ist.

Con esto hemos agotado todos los términos del grupo y podemos ahora deducir el grupo paralelo correspondiente a Urano, etc., para lo cual basta permutar m'', a'', e'', ... con m''', a''', e''', ...

Eine weitere Hauptgruppe ergibt sich durch die Vertauschung des oberen Index 1 in dem 1. Faktor z. B. bei $\mathrm{R}^1{}_{\varepsilon a e'} a_1 e'_1$ des Termes (1) mit 2, 3, etc., und entsprechender Vertauschung von m', a', e', ... mit m'', a'', e'', ... resp. mit m''', a''', e''', ..., etc., in den Ableitungen von R^2, etc., wie in dem zugehörigen 2. und 3. Koeffizienten, um dadurch von der Hauptstörung durch Jupiter auf die übrigen großen Planeten übergehen zu können. Dabei bleibt a_1 von der Form $a_1 = a_1$ (Jup.) $+ a_1$ (Sat.) $+ a_1$ (Uran.) + etc., analog e_1, l_1 und $\tilde{\omega}_1$.

Se obtiene otro grupo principal permutando el índice superior 1 del primer factor de cada término del grupo anterior, por ejemplo del (1) : $\mathrm{R}^1{}_{\varepsilon a e'} a_1 e_1'$, con los índices 2, 3, ..., y reemplazando correspondientemente m', a', e', ... por m'', a'', e'', ... o por m''', a''', e''', ..., tanto en las derivadas de R^2, etc., como en los factores 2° y 3°, a fin de poder pasar de la perturbación principal de Júpiter a las de los demás planetas. Luego queda a_1 de la forma $a_1 = a_1$ (Jup.) $+ a_1$ (Sat.) $+ a_1$ (Urano) $+ \ldots$ y análogamente e_1, l_1 y $\tilde{\omega}_1$.

§ 5. Der Fall innerer störender Körper

§ 5. Las perturbaciones producidas por cuerpos interiores

Bisher war angenommen worden, daß der gestörte Korper sich innerhalb der Bahnen der störenden Körper befinde, sodaß jetzt der ebenso wichtige umgekehrte Fall zu untersuchen bleibt. Im Falle der Erde ist diese Umkehrung durch den Effekt des Planeten Venus besonders charakterisiert, ferner im Falle des Saturn durch die Anziehung des Planeten Jupiter, etc.

Hasta ahora hemos supuesto que el planeta perturbado se mueve dentro de las órbitas de los cuerpos perturbadores; queda, pues, por investigar el caso inverso, igualmente importante. Si se trata de la Tierra, este caso está caracterizado especialmente, por el efecto del planeta Venus, si de Saturno por la atracción de Júpiter, etc.

Der Ubergang von der obigen Darstellung der t^2-Säkularstörung a_3 eines inneren gestörten Körpers der Masse m durch die äußere Masse m' auf den umgekehrten Fall ist auf Grund der obigen Formeln folgendermaßen möglich. Da jetzt m' die gestörte Masse ist, so sind zuerst in obigen Formeln für a_3 alle Elemente m, a, e, ... mit m', a', e', ...,

Para pasar de la deducción anterior que da la perturbación secular en t^2 de a_3, de un cuerpo interior de masa m debida a uno exterior de masa m', al caso inverso, mediante las fórmulas anteriores, debe procederse como sigue. Ya que ahora m' es la masa perturbada, debemos permutar en primer lugar, en las fórmulas anteriores referentes a a_3

zu vertauschen außer in den durch die Integrationen nach der Zeit erhaltenen Nennern $i \cdot n' - (i - k) \cdot n$, die beim Uvergange auf nunmehr a'_3 unverändert bleiben, weil die Winkelargumente in beiden Fällen in Bezug auf l und l' unverändert sind. Nur die Koeffizienten der trigonometrischen Funktionen dieser Argumente erfahren durch die Änderung des Nebenteiles der Störungefunktion eine Änderung, sodaß die A_i, B_i, etc. Abänderungen erfahren, die unmittelbar am einfachsten dem 10. Bande der *Annales de l'Observatoire de Paris*, ab pag. 40 zu entnehmen sind. Da ferner die Differentialgleichung der großen Achse nunmehr lautet :

todos los elementos m, a, e, ... etc., con m', a', e', ... salvo en los denominadores $in' - (i - k) n$, obtenidos por la integración respecto del tiempo, que no alteran si pasamos a a'_3, porque en los dos casos quedan invariables los argumentos angulares. Los coeficientes de las funciones trigométricas de estos argumentos están sujetos a alteración debido al cambio de la parte complementaria de la función perturbadora, de modo que los A_i, B_i, etc., varían, pudiéndose tomar éstos del tomo X de los *Annales de l'Observatoire de Paris*, desde la pág. 40. Ya que, además, la ecuación diferencial del semieje mayor, es :

$$\dot{a}' = \frac{2\sqrt{a'}}{K'} R'_{\varepsilon'}$$

wo R' die neue durch den Nebenteil abgeänderte Störungsfunktion fixiert, tritt auf der rechten Seite, auch bei der Potenzentwickelung der rechten Seite nach den störenden Massen, immer der Differentialqotient nach ε' auf, also wegen des allgemeinen Argumentes $i \cdot l' - (i - k)\, l +$ Vielfachen von $\tilde{\omega}$ und $\tilde{\omega}'$, auch der Faktor i, d. h. in den Formeln ist überall der bisherige Koeffizient $(i - k)$ durch $-i$ zu ersetzen. Im Spezialfalle $k = 0$, also beim Argumente $i\,(l' - l)$, erscheint infolge Integration nach der Zeit t der Nenner $i\,(n' - n)$; vielfach erscheint aber in den Formeln nur der Nenner $n' - n$, weil der Koeffizient i durch einen entsprechenden Faktor i im Zähler weggehoben wurde. Deshalb ist der Nenner in diesen Fällen immer durch Hinzufügung des Faktors i ergänzt zu denken, ebenso wie der Zähler, damit auf diese Weise festgestellt wird, ob im Zähler der ursprüngliche Faktor i durch $-i$, i^2 durch $-i^2$, i^3 durch $-i^3$, etc., zu ersetzen ist. Bei $k \neq 0$ kommt im allgemeinen Falle des Nenners $in' - (i - k)\, n$ eine analoge Überlegung nicht in Frage. Da ferner anstelle der ursprünglichen Differenziationen nach $\tilde{\omega}$ und e nunmehr solche nach $\tilde{\omega}'$ und e' treten, so ist in dem Ausdruck für a_3 auch

donde R' es la nueva función perturbadora alterada por la parte complementaria, aparece siempre en el 2° miembro, aún en el desarrollo en series de potencias de las masas perturbadoras, la derivada respecto de ε' y por consiguiente el factor i, pues el argumento general es $il' - (i - k)\, l +$ múltiplos de $\tilde{\omega}$ y $\tilde{\omega}'$. Luego, debemos reemplazar en nuestras fórmulas el coeficiente anterior $i - k$ siempre por $-i$. En el caso especial en que $k = 0$, es decir, si el argumento es $i\,(l' - l)$ aparece por la integración respecto del tiempo t, el denominador $i\,(n' - n)$: pero muchas veces en las fórmulas aparece el denominador $n' - n$, pues el coeficiente i se ha eliminado con un factor i del numerador. Por consiguiente en estos casos hay que agregar el factor i al denominador y al numerador, para constatar, si en el numerador el factor original i debe ser reemplazado por $-i$, i^2 por i^2, i^3 por $-i^3$, etc. Si $k \neq 0$, estamos en el caso general $in' - (i - k)\ n$ y la observación anterior no viene al caso. Ya que las derivadas anteriores respecto de $\tilde{\omega}$ y e deben calcularse ahora respecto de $\tilde{\omega}'$ y e', deberemos permutar en la expresión de a_3, C_i con D_i en todos los términos de 1er grado de la función perturbadora. Análogamente stets C_i mit D_i zu vertauschen, was die Glieder 1. Grades der Störungsfunktion anbetrifft. In den Gliedern 2. Grades ist analog der Faktor E_i von

$$\frac{1}{4} e^2 \cos [il' - (i - 2) l - 2\tilde{\omega}]$$

mit H_i von

$$\frac{1}{4} e'^2 \cos [il' - (i - 2)(l - 2\tilde{\omega}']$$

zu vertauschen und umgekehrt. Dagegen erfährt G_i als Koeffizient von

$$\frac{1}{4} e \,.\, e' \cos [il' - (i - 2) l - \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}]$$

wegen der Symmetrie dieses Gliedes in e, e' wie in $\tilde{\omega}$ und $\tilde{\omega}'$ keine Veränderung. Dagegen sind die F_i und F_{-i} als Koeffizienten von

$$\frac{1}{4} e \,.\, e' \cos [i(l' - l) \mp \tilde{\omega}' \pm \tilde{\omega}]$$

bei Differentiationen nach $\tilde{\omega}'$ wegen der Asymmetrie des Argumentes in Bezug auf $\tilde{\omega}$ und $\tilde{\omega}'$ mit $-F_i$ resp. $-F_{-i}$ zu vertauschen, während bei doppelter Differentiation nach $\tilde{\omega}$ oder $\tilde{\omega}'$ oder bei gleichzeitiger Differentiation nach $\tilde{\omega}$ und $\tilde{\omega}'$ die Vorzeichen von F_i und F_{-i} unverändert bleiben. In Bezug auf die Glieder 3. Grades mit demselben Argument wie die des 1. Grades bezüglich l und l' bei gleicher oder verschiedener Zusammensetzung in $\tilde{\omega}$ und $\tilde{\omega}'$ gehen die Koeffizienten J_i in P_i, N_i in K_i, und L_i in M_i über, wenn a_3 in a'_3 übergeht, wie man aus der oben gegebenen Darstellung dieser Glieder 3. Grades ersehen kann; auch hier tritt eventuell eine Umkehrung der Vertauschung ein.

Schließlich ist noch zu beachten, daß, während früher im ersten Falle $aA_i = A_i$, $aB_i = B_i$ und analog bei den Differentialquotienten, nunmehr im Falle a'_3 die A_i, B_i, etc., die folgende Bedeutung haben: $A_i = a'A_i$, $B_i = a'B_i$, etc., und bei den Differentialquotienten:

en los términos de 2° grado hay que permutar el factor E_i de

con H_i de

e inversamente. Por el contrario G_i, coeficiente de

no está sujeto a alteración alguna, pues este término es simétrico en e y e' lo mismo que en $\tilde{\omega}$ y $\tilde{\omega}'$. En cambio los coeficientes F_i y F_{-i} de

deben permutarse al derivar respecto de $\tilde{\omega}'$ con $-F_i$ y $-F_{-i}$ respectivamente, por las asimetrías de los argumentos en $\tilde{\omega}'$ y $\tilde{\omega}$; mientras que en las dobles derivadas, respecto de $\tilde{\omega}$ o $\tilde{\omega}'$ o de $\tilde{\omega}$ y $\tilde{\omega}'$, los signos de F_i y F_{-i} no varían. Con referencia a los términos de 3^er grado con igual argumento en l y l' que los de 1^er grado e iguales o distintos en $\tilde{\omega}$ y $\tilde{\omega}'$ observaremos que los coeficientes J_i se transforman en P_i, los N_i en K_i, y L_i en M_i y viceversa eventualmente, al cambiar en a'_3, como resulta de la representación precedente de estos términos de 3^er grado.

Finalmente hay que observar que mientras en el caso anterior era $aA_i = A_i$, $aB_i = B_i$ y análogamente en las derivadas, ahora en el caso de a'_3, los A_i, B_i, etc., tienen la siguiente significación: $A_i = a'A_i$, $B_i = a'B_i$, etc., y en las derivadas:

$$\overline{A}_{ia'} = a'^2 \cdot \frac{\partial A_i}{\partial a'} \text{ etc.},$$

bei allen anderen Koeffizienten.

Alsdann erhält man aus der Darstellung von a_3 die folgende Form der Säkularstörungen für a'_3, soweit sie t^2 proportional sind:

y lo mismo para los otros coeficientes.

Luego se obtiene de la representación de a_3, la forma siguiente para las perturbaciones seculares de a'_3 proporcionales a t^2:

$$s\,[p_2\,(a'_3)] = +\frac{1}{16}\,a'\,\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\left\{\overline{A}_i\left(\overline{F}_i - \overline{F}_{-i}\right)\frac{in'}{n'-n} - \overline{C}_i\overline{D}_i\,\frac{i^2n'}{in'-(i-1)\,n}\right.$$

$$\left. - \overline{D}_i\overline{M}_i\,\frac{in'}{in'-(i-1)\,n}\right\}\bar{e}'_1\,e\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,(n't^2)$$

$$s\,[p_2\,(a'_3)] = -\frac{1}{8}\,a'\,\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\,\frac{in'}{in'-(i-2)\,n}\,\overline{G}_i\overline{H}_i\bar{\tilde{\omega}}'_1 e\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,(n't)^2$$

$$s\,[p_3\,(a'_3)] = -\frac{1}{4}\,a'\overline{C}_i i^2\left\{-R'_0\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) + S'_0\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\right\}\frac{e}{(1+m')^2}\,(n't)^2$$

wo

donde

$$R'_0 = \frac{1}{4}\sqrt{1-e'^2}\,\overline{D}_{ia'}\,\frac{n'}{in'-(i-1)\,n}\,\bar{e}'_1 + \frac{3}{2}\,\frac{in'^2}{[in'-(i-1)\,n]^2}\,\overline{D}_i\bar{\tilde{\omega}}'_1$$

$$S'_0 = -\left(\overline{D}_{ia'} - \frac{1}{4}\sqrt{1-e'^2}\,\overline{D}_i\right)\frac{n'}{in'-(i-1)\,n}\,\bar{\tilde{\omega}}'_1 - \frac{3}{2}\,\overline{D}_i\,\frac{in'^2}{[in'-(i-1)\,n]^2}\,\bar{e}'_1$$

$$s\,[p_3\,(a'_3)] = -\frac{1}{16}\,a'\,\frac{in'}{n'-n}\,\overline{A}_i\,\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\left(\overline{F}_i - \overline{F}_{-i}\right)\bar{e}'_1 e\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,(n't)^2$$

$$s\,[p_3\,(a'_3)] = -\frac{1}{4}\,a'\,\frac{in'}{n'-n}\,\overline{A}_i\left\{\overline{F}_{ia'} - \overline{F}_{-ia'} - \frac{1}{4}\sqrt{1-e'^2}\left(\overline{F}_i - \overline{F}_{-i}\right)\right\}\frac{\bar{\tilde{\omega}}'_1}{(1+m')^2}\,e\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,(n't)^2$$

$$s\,[p_6\,(a'_3)] = +\frac{1}{8}\,a'\,\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\,\frac{in'}{in'-(i-1)\,n}\,\overline{D}_i\left(-\overline{N}_i + \overline{M}_i\right)\bar{e}'_1 e\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,(n't)^2$$

$$s\,[p_8\,(a'_3)] = +\frac{1}{16}\,a'\,\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\,\frac{in'}{in'-(i-2)\,n}\,\overline{H}_i\overline{G}_i\bar{\tilde{\omega}}'_1 e\,(n't)^2$$

$$s\,[p_{11}\,(a'_3)] = +\frac{1}{4}\,a'\,\frac{i^2n'}{in'-(i-1)\,n}\,\overline{D}_{ia'}\left\{\overline{D}_i e' + \overline{C}_i e\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\right\}\frac{\bar{\tilde{\omega}}'_1}{(1+m')^2}\,(n't)^2$$

$$\text{»} \qquad = +\frac{1}{4}\,a'\,\frac{in'}{n'-n}\,\overline{A}_i\left(\overline{F}_{ia'} - \overline{F}_{-ia'}\right)\frac{\bar{\tilde{\omega}}'_1}{(1+m')^2}\,e\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,(n't)^2$$

$$s\,[p_{12}\,(a'_3)] = -\frac{1}{4}\,a'\,\frac{i^2n'}{in'-(i-1)\,n}\,\overline{D}_i\left\{-\overline{C}_{ia'} - \frac{3}{2}\,\frac{in'}{in'-(i-1)\,n}\,\overline{C}_i\right\}\frac{\bar{e}'_1}{(1+m')^2}\,e\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,(n't)^2$$

$$s\,|p_{14}(a'_3)] = +\frac{1}{4}\,a'\,\frac{i^2 n'}{in'-(i-1)\,n}\,\overline{\mathrm{D}}_i \left\{ \begin{array}{l} e'\left[-\frac{1}{4}\sqrt{1-e'^2}\,\overline{\mathrm{D}}_i + \frac{3}{2}\,\frac{in'}{in'-(i-1)\,n}\,\overline{\mathrm{D}}_i\right] \\ +\frac{3}{2}\,\frac{in'}{in'-(i-1)\,n}\,\overline{\mathrm{C}}_i e\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) \end{array} \right\} \frac{\bar{\tilde{\omega}}'_1}{(1+m')^2}\,(n't)^2$$

Im Falle weiterer störender innerer Planeten außer m, nämlich $m^{(')}$, $m^{('')}$, etc., ist in den soeben abgeleiteten Formeln m, a, e, ..., mit $m^{(')}$, $a^{(')}$, $e^{(')}$, etc., zu vertauschen, zugleich auch in den Koeffizienten A_i, B_i, etc.

En caso de que existan además de m otros planetas perturbadores interiores, digamos $m^{(')}$, $m^{('')}$, etc., hay que permutar simultáneamente en las fórmulas anteriores y en los coeficientes A_i, B_i, etc., m, a, e, etc., con $m^{(')}$, $a^{(')}$, $e^{(')}$, etc.

Gehen wir nun weiter zu den in §. 3 behandelten Kombinationen der Störungen des Saturn durch Jupiter und umgekehrt, etc., in ihrer Rückwirkung auf die Säkularbeschleunigung a'_3 über, so sind in den oben für a_3 abgeleiteten Formeln wieder die Elemente m, a, e, ... mit m', a', e', ..., und umgekehrt, generell zu vertauschen, unter Beachtung der schon oben dargelegten Bedingungen für die Koeffizienten und Vorzeichen bei bestimmten Funktionen und Differentiationen. Treten ferner zu dem störenden inneren Planeten m noch weitere störende innere Massen $m^{(')}$, $m^{('')}$, etc., hinzu, so sind wiederum die Elemente m, a, e, ... in den sogleich folgenden Formeln mit $m^{(')}$, $a^{(')}$, $e^{(')}$, ..., etc., zu vertauschen. Treten schließlich zu der störenden äußeren Masse m'', noch die weiteren äußeren Massen m''', etc., hinzu, so sind in den folgenden Formeln die Elemente m'', a'', e'', ... mit m''', a''', e''', ... zu vertauschen.

Si pasamos ahora a las combinaciones de las perturbaciones de Saturno por Júpiter e inversamente, tratadas en el §. 3 en su repercusión sobre la aceleración secular a'_3, debemos cambiar nuevamente en general, en las fórmulas deducidas para a_3, los elementos m, a, e, ... por m', a', e', ... y recíprocamente, considerando las condiciones ya fijadas sobre los coeficientes y signos de determinadas funciones y sus derivadas. Si se agregan aun otras masas perturbadoras interiores $m^{(')}$, $m^{('')}$, etc., a la interior m, hay que cambiar en las fórmulas siguientes los elementos m, a, e, ... por $m^{(')}$, $a^{(')}$, $e^{(')}$, ... y finalmente agregando a la masa perturbadora exterior m'' otras masas exteriores m''', ... hay que permutar en las fórmulas siguientes los elementos m'', a'', e'', con m''', a''', e''', ...

Man erhält alsdann die folgenden Ausdrücke für die entsprechende Säkularbeschleunigung a'_3 angeordnet wie oben :

Se obtiene entonces, para la aceleración secular a'_3, las siguientes expresiones numeradas como antes :

$$(1a) \qquad s\,|p_1(a'_3)] = -\frac{1}{4}\,\overline{\mathrm{D}}''_0\overline{\mathrm{C}}_{0a'}\,\frac{\bar{e}'_1 e}{(1+m')^2}\,\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,(n't)^2$$

$$(1b) \qquad \text{»} \quad = -\frac{1}{4}\,a'\,\overline{\mathrm{D}}''_0\left[e'\overline{\mathrm{D}}_{0a'} + e\cos(\tilde{\omega}-\tilde{\omega})\,\overline{\mathrm{C}}_{0a'}\right]\frac{\bar{\tilde{\omega}}'_1}{(1+m')^2}\,(n't)^2$$

$$(1c)\alpha \qquad \text{»} \quad = -\frac{1}{4}\,a'\,\overline{\mathrm{C}}_i\overline{\mathrm{D}}_{ia'}\,\frac{in}{in'-(i-1)\,n}\,\frac{\bar{e}_1 e'}{(1+m')^2}\,\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,(n't)^2$$

$$(1c)\beta \qquad \text{»} \quad = +\frac{1}{4}\,a'\,\overline{\mathrm{A}}_{ia}\left(\overline{\mathrm{F}}_i - \overline{\mathrm{F}}_{-i}\right)\frac{in}{n'-n}\,\frac{\bar{e}_1 e'}{(1+m')^2}\,\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\,(n't)^2$$

$$(1d)\alpha \quad » \quad = -\frac{1}{4}a'\frac{i^2n}{in'-(i-1)n}\bar{C}_i\left\{\bar{D}_{ia'}e'\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})+e\bar{C}_{ia'}\right\}\frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{(1+m')^2}(n't)^2$$

$$(1d)\beta \quad » \quad = +\frac{1}{4}a'\frac{in}{n'-n}\bar{A}_{ia'}\left(\bar{F}_i-\bar{F}_{-i}\right)\frac{e'\bar{\tilde{\omega}}_1}{(1+m')^2}\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})(n't)^2$$

$$(1e) \quad » \quad = +\frac{1}{4}a'\frac{n''}{n'}\bar{C}_0''\bar{D}_{0a'}\frac{\bar{e}''_1e'}{(1+m')^2}\sin(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}')(n't)^2$$

$$(1f) \quad » \quad = -\frac{1}{4}a'\frac{n''}{n'}\bar{C}''_0\left\{\bar{D}_{0a'}e'\cos(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}')+e''\bar{C}_{0a'}\right\}\frac{\bar{\tilde{\omega}}''_1}{(1+m')^2}(n't)^2$$

$$(2a)\alpha \quad s[p_2(a_3')] = +\frac{1}{16}a'\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\bar{D}_0\bar{C}''_0\bar{e}'_1e''\sin(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}')(n't)^2$$

$$(2a)\beta \quad » \quad = +\frac{1}{16}a'\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\bar{D}_0\bar{M}''_0\bar{e}'_1e''\sin(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}')(n't)^2$$

$$(2a)\gamma \quad » \quad = -\frac{1}{16}a'\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\bar{G}_0\bar{H}''_0\bar{e}'_1e\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})(n't)^2$$

$$(2b)\alpha \quad » \quad = -\frac{1}{8}a'\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\bar{D}_0\bar{D}''_0\frac{\bar{\tilde{\omega}}'_1}{e'}(n't)^2$$

hebt sich gegen den analogen Polterm (α) in $p_8(a'_3)$ fort.

se elimina con el término análogo con polo (α) de $p_8(a'_3)$.

$$(2b)\beta \quad » \quad = +\frac{1}{16}a'\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\bar{D}_0\bar{D}''_0\bar{\tilde{\omega}}'_1e'(n't)^2$$

$$(2b)\gamma \quad » \quad = -\frac{1}{8}a'\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\left\{2e'\bar{H}_0+\frac{1}{2}e\bar{G}''_0\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\right\}\bar{H}''_0\bar{\tilde{\omega}}'_1(n't)^2$$

$$(2b)\delta \quad » \quad = -\frac{1}{32}a'\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\bar{D}_0\left\{\begin{array}{l}e'^2\bar{P}''_0+e''^2\bar{K}''_0+4e'e''\bar{M}''_0\cos(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}')\\+e''^2\bar{L}''_0\cos(2\tilde{\omega}''-2\tilde{\omega}')\end{array}\right\}\frac{\bar{\tilde{\omega}}'_1}{e'}(n't)^2$$

Das 2. und 4. Glied heben sich gegen das Glied (γ) von $p_8(a'_3)$ weg.

Los términos 2° y 4° se destruyen con el término (γ) de $p_8(a'_3)$.

$$(2b)\varepsilon \quad » \quad = -\frac{1}{32}a'\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\left\{2e'\bar{H}_0\cos(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}')+eG_0\cos(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega})\right\}\bar{G}''_0\frac{e''}{e'}\bar{\tilde{\omega}}'_1(n't)^2$$

Der 2. Term mit dem Pol $e=0$ hebt sich gegen den Term (β) von $p_8(a'_3)$ fort.

El 2° término con el polo $e=0$ se elimina con el término (β) de $p_8(a'_3)$.

$$(2b)\zeta \qquad \text{»} \qquad = -\frac{1}{16}\, a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\, \bar{D}''_0 \left\{ \frac{1}{2} e'^2 \bar{P}_0 + \left(\bar{N}_0 + \bar{M}_0\right) e'e \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \frac{1}{2} e^2 \bar{L}_0 \cos(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) + \frac{1}{2} e^2 \bar{K}_0 \right\} \frac{\bar{\tilde{\omega}}'_1}{e'} (n't)^2$$

Die beiden letzten Glieder fallen gegen die entsprechenden Glieder (δ) von $p_8(a'_3)$ fort.

Los dos últimos términos se destruyen con los términos correspondientes (δ) de $p_8(a'_3)$.

$$(2c)\alpha \qquad \text{»} \qquad = -\frac{1}{16}\, a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \left\{ -\frac{n}{n'-n} \bar{B}_i (F_i + F_{-i})\, e' \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \frac{n}{n'-n} \bar{F}_i \bar{F}_{-i}\, e \sin(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) - \frac{in}{in' - (i-2)n} \bar{G}_i \bar{H}_i\, e' \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \right\} \bar{e}_1 (n't)^2$$

$$(2c)\beta \qquad \text{»} \qquad = -\frac{1}{16}\, a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\, \bar{D}_i \bar{C}_i \frac{in}{in' - (i-1)n}\, \bar{e}_1 e' \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\, (n't)^2$$

$$(2c)\gamma \qquad \text{»} \qquad = -\frac{1}{16}\, a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{in}{in' - (i-1)n}\, \bar{D}_i \left\{ \begin{array}{l} e'\bar{M}_i \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \\ + e\bar{L}_i \sin(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) \end{array} \right\} \bar{e}_1 (n't)^2$$

$$(2d)\alpha \qquad \text{»} \qquad = -\frac{1}{32}\, a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \left\{ -e\left[(\bar{F}_i)^2 + (\bar{F}_{-i})^2 + F_i F_{-i} \cos(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega})\right] \frac{n}{n'-n} - 2\bar{F}_i B_i \frac{n}{n'-n}\, e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - 2\bar{F}_{-i} B_i \frac{n}{n'-n}\, e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + e\left[(G_i)^2 + \bar{H}_i \bar{G}_i \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\right] \frac{in}{in' - (i-2)n} \right\} \bar{\tilde{\omega}}_1 \cdot (n't)^2$$

$$(2d)\beta \qquad \text{»} \qquad = +\frac{1}{4}\, a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{in}{in' - (i-1)n}\, \bar{D}_i \left\{ \begin{array}{l} e'\bar{M}_i \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \\ + e\bar{L}_i \cos(2\tilde{\omega}' - 2\tilde{\omega}) \end{array} \right\} \bar{\tilde{\omega}}_1 (n't)^2$$

$$(2d)\gamma \qquad \text{»} \qquad = -\frac{1}{16}\, a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{in}{in' - (i-1)n}\, \bar{D}_i \bar{C}_i \bar{\tilde{\omega}}_1 e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\, (n't)^2$$

$$(2e)\alpha \qquad \text{»} \qquad = -\frac{1}{8}\, a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n''}{n'}\, \bar{H}_0 \bar{G}_0 \bar{e}''_1 e' \sin(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}')\, (n't)^2$$

$$(2e)\beta \qquad \text{»} \qquad = +\frac{1}{16}\, a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n''}{n'}\, \bar{D}_0 \bar{C}''_0 \bar{e}''_1 e' \sin(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}')\, (n't)^2$$

$$(2e)\gamma \qquad \text{»} \qquad = +\frac{1}{16}\, a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n''}{n}\, \bar{D}_0 \left\{ \begin{array}{l} e'\bar{M}''_0 \sin(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \\ + e''\bar{L}''_0 \sin(2\tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}') \end{array} \right\} \bar{e}''_1 (n't)^2$$

$$(2f)\alpha \qquad \text{»} \qquad = -\frac{1}{32}\, a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n''}{n'} \left\{ \begin{array}{l} 2e'\bar{H}_0 \bar{G}''_0 \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \\ + e\bar{G}_0 \bar{G}''_0 \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \end{array} \right\} \bar{\tilde{\omega}}''_1 (n't)^2$$

(2f)β »

$$= + \frac{1}{16}\, a' \frac{\sqrt{1 - e'^2}}{(1 + m')^2} \frac{n''}{n'} \bar{D}_0 \bar{C}''_0 \bar{\tilde{\omega}}''_1 e' \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}')\, (n't)^2$$

(2f)γ »

$$= + \frac{1}{16}\, a' \frac{\sqrt{1 - e'^2}}{(1 + m')^2} \cdot \frac{n''}{n'} \bar{D}_0 \left\{ \begin{matrix} e'\bar{M}''_0 \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \\ + e''\bar{L}''_0 \cos(2\tilde{\omega}'' - 2\tilde{\omega}') \end{matrix} \right\} \bar{\tilde{\omega}}''_1\, (n't)^2$$

(3a)

$$s\,[p_3(a_3')] = - \frac{1}{4}\, a' \frac{\bar{C}_0}{(1 + m')^2} \left\{ \bar{D}''_{0a'} - \frac{1}{4} \sqrt{1 - e'^2}\, \bar{D}''_0 \right\} \bar{e}'_1 e \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\, (n't)^2$$

(3b) »

$$= - \frac{1}{4}\, a' \left[\bar{D}''_{0a'} - \frac{1}{4} \bar{D}''_0 \right] \left[e'\bar{D}_0 + e\bar{C}_0 \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \right] \frac{\bar{\tilde{\omega}}'_1}{(1 + m)'^2}\, (n't)^2$$

(3c)α »

$$= + \frac{1}{4}\, a' \frac{i^2 \,.\, n}{in' - (i - 1)\, n} \bar{D}_i \bar{C}_{ia'} \frac{\bar{e}_1}{(1 + m')^2}\, e' \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\, (n't)^2$$

(3c)β »

$$= - \frac{1}{4}\, a' \frac{in}{n' - n} \bar{A}_i \left\{ \bar{F}_{ia'} - \bar{F}_{-ia'} + \frac{1}{4} \left(\bar{F}_i - \bar{F}_{-i} \right) \right\} \frac{\bar{e}_1}{(1 + m')^2}\, e' \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\, (n't)^2$$

(3d)α »

$$= - \frac{1}{4}\, a' \frac{i^2 \,.\, n}{in' - (i - 1)\, n} \bar{C}_{ia'} \left\{ \bar{D}_i e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \bar{C}_i e \right\} \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{(1 + m')^2}\, (n't)^2$$

(3d)β »

$$= + \frac{1}{4}\, a' \frac{in}{n' - n} \bar{A}_i \left\{ \bar{F}_{ia'} - \bar{F}_{-ia'} - \frac{1}{4} \left(\bar{F}_i - \bar{F}_{-i} \right) \right\} \bar{\tilde{\omega}}_1 e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\, (n't)^2$$

(3e) »

$$= - \frac{1}{4}\, a' \frac{n''}{n'} \bar{C}''_{0a'} \left\{ \bar{D}_0 e' \sin(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') + \bar{C}_0 e \sin(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \right\} \frac{\bar{e}''_1}{(1 + m')^2}\, (n't)^2$$

(3f) »

$$= - \frac{1}{4}\, a' \frac{n''}{n'} \bar{C}_{0a'} \left\{ \bar{D}_0 e' \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') + C_0 e \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \right\} \frac{\bar{\tilde{\omega}}''_1}{(1 + m')^2} \cdot (n't)^2$$

(3g)α »

$$= - \frac{3}{8}\, a' \bar{D}''_0 \bar{C}_0 \frac{e'_1}{(1 + m')^2}\, e \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\, (n't)^2$$

(3g)β »

$$= - \frac{3}{8}\, a' \bar{D}''_0 \left\{ e'\bar{D}_0 + e\bar{C}_0 \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \right\} \frac{\bar{\tilde{\omega}}'_1}{(1 + m')^2}\, (n't)^2$$

(3g)γ »

$$= + \frac{3}{8}\, a' \frac{i^3 n n'}{[in' - (i - 1)\, n]^2} \bar{D}_i \bar{C}_i \frac{\bar{e}_1}{(1 + m')^2}\, e' \,.\, \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\, (n't)^2$$

(3g)δ »

$$= + \frac{3}{8}\, a' \frac{inn'}{(n' - n)^2} \bar{A}_i \left(\bar{F}_i - \bar{F}_{-i} \right) \frac{\bar{e}_1}{(1 + m')^2}\, e' \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\, (n't)^2$$

(3g)ε »

$$= + \frac{3}{8}\, a' \frac{i^3 n n'}{[in' - (i - 1)\, n]^2} \bar{C}_i \left\{ e'\bar{D}_i + e\bar{C}_i \right\} \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{(1 + m')^2} \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\, (n't)^2$$

(3g)ζ »

$$= - \frac{3}{8}\, a' \frac{inn'}{(n' - n)^2} A_i \left(\bar{F}_i - \bar{F}_{-i} \right) \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{(1 + m')^2}\, e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\, (n't)^2$$

$$(3g)\eta \quad » \quad = +\frac{3}{8}a'\frac{n''}{n}\bar{C}''_0\left\{\bar{D}_0 e'\sin(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}')+\bar{C}_0 e\sin(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega})\right\}\frac{\bar{e}''_1}{(1+m)^2}(n't)^2$$

$$(3g)\theta \quad » \quad = +\frac{3}{8}a'\frac{n''}{n'}\bar{C}''_0\left\{\bar{D}_0 e'\cos(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}')+\bar{C}_0 e\cos(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega})\right\}\frac{\bar{\tilde{\omega}}''_1}{(1-m')^2}(n't)^2$$

$$(4a)\alpha \quad s[p_4(a'_3)] = -\frac{1}{16}a'\bar{D}''_0\left\{\bar{M}_0 e\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})+\frac{1}{2}\frac{e^2}{e'}\bar{L}_0\sin(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega})\frac{\bar{e}'_1}{(1+m')^2}(n't)^2\right.$$

Das 2. Glied mit den Pol $e'=0$ fällt gegen den entsprechenden 2. Term in $p_{13}(a'_3)$ Fall (b') fort.

El 2° término con el polo $e'=0$ se elimina con el 2° término correspondiente de $p_{13}(a'_3)$ caso (b').

$$(4a)\beta \quad s(p_4(a'_3)) = +\frac{1}{32}a'\bar{D}_0\bar{L}''_0\frac{e''^2}{e'}\frac{\bar{e}'_1}{(1+m')^2}\sin(2\tilde{\omega}''-2\tilde{\omega}')(n't)^2$$

Dieses Glied mit den Pole $e'=0$ hebt sich gegen den entsprechenden Term (a') in $p_{13}(a'_3)$ fort, und zwar in letzten Term der Klammer.

Este término con el polo $e'=0$ se elimina con el término correspondiente (a') de $p_{13}(a'_3)$, es decir, con el último término del paréntesis.

$$(4a)\gamma \quad s[p_4(a'_3)] = 4.\ \text{Grad}$$

$$(4a)\delta \quad s[p_4(a'_3)] = +\frac{1}{32}a'\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\bar{G}_0\bar{G}''_0\frac{ee''}{e'}\bar{e}'_1\sin(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega})(n't)^2$$

Dieses Glied mit den Pol $e'=0$ hebt sich gegen den Term (c') in $p_{13}(a'_3)$ fort.

Este término con el polo $e'=0$ se destruye con el término (c') de $p_{13}(a'_3)$.

$$(4b)\alpha \quad s[p_4(a'_3)] = -\frac{1}{8}a'\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\bar{D}''_0\bar{D}_0\frac{\bar{\tilde{\omega}}'_1}{e'}(n't)^2$$

Dieses Polglied hebt sich gegen das Polglied (α) in $p_{13}(a'_3)$, 1. Glied, fort.

Este término con polo se elimina con el 1^er término con polo (α) de $p_{13}(a'_3)$,

$$(4b)\beta \quad s[p_4(a'_3)] = -\frac{1}{16}a'\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\bar{D}''_0\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}e'^2\bar{P}_0+\frac{1}{2}e^2\bar{K}_0+ee'\bar{M}_0\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\\ -\frac{1}{2}e^2\bar{L}_0\cos(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega})\end{array}\right\}\frac{\bar{\tilde{\omega}}'_1}{e'}(n't)^2$$

wo das 2. und 4. Glied mit den Pole $e'=0$ sich gegen die entsprechenden Terme (γ) in $p_{13}(a'_3)$ fortheben.

donde los términos 2° y 4° con el polo $e'=0$ se destruyen con los términos correspondientes (γ) de $p_{13}(a'_3)$.

$$(4b)\gamma \quad s[p_4(a'_3)] = -\frac{1}{16}a'\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\left\{\begin{array}{l}4e'^2\bar{H}_0\bar{H}''_0+e'e''\bar{H}_0\bar{G}''_0\cos(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}')\\ +2ee'\bar{H}''_0\bar{G}_0\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})+\frac{1}{2}ee''\bar{G}_0\bar{G}''_0\cos(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega})\end{array}\right\}\frac{\bar{\tilde{\omega}}'_1}{e'}(n't)^2$$

Der letzte Term mit den Pol $e' = 0$ hebt sich gegen den 2. Term in (ε) von $p_{13}(a'_3)$ fort.

El último término con el polo $e' = 0$ se elimina con el 2° término de (ε) de $p_{13}(a'_3)$.

$$(4b)\delta \qquad s[p_4(a'_3)] = -\frac{1}{8} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \bar{D}_0 \left\{ \begin{matrix} \frac{3}{4} e'^2 \bar{P}''_0 + e'e''\bar{M}''_0 \cos(\tilde\omega'' - \tilde\omega') \\ -\frac{1}{4} e''^2 \bar{L}''_0 \cos(2\tilde\omega'' - 2\tilde\omega') + \frac{1}{4} e''^2 \bar{K}''_0 \end{matrix} \right\} \frac{\bar{\tilde\omega}'_1}{e'} (n't)^2$$

Das 3. und 4. Glied mit den Pol $e' = 0$ fallen gegen die entsprechenden 2. und 4. Glieder in (β) von $p_{13}(a'_3)$ fort.

Los términos 3° y 4° con el polo $e' = 0$ se eliminan con los términos 2° y 4° correspondientes de (β) de $p_{13}(a'_3)$.

$$(4c)\alpha \qquad s[p_4(a'_3)] = -\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n}{n'-n} \bar{F}_i \bar{F}_{-i} \bar{e}_1 e \sin(2\tilde\omega' - 2\tilde\omega)(n't)^2$$

$$(4c)\beta \qquad \text{»} \quad = +\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{in}{in' - (i-2)n} \bar{H}_i \bar{G}_i \bar{e}_1 e' \sin(\tilde\omega' - \tilde\omega)(n't)^2$$

$$(4c)\gamma \qquad \text{»} \quad = +\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{in}{in' - (i-1)n} \bar{D}_i \left\{ \begin{matrix} \bar{N}_i e' \sin(\tilde\omega' - \tilde\omega) - \bar{M}_i e' \sin(\tilde\omega' - \tilde\omega) \\ + e\bar{L}_i e' \sin(2\tilde\omega' - 2\tilde\omega) \end{matrix} \right\} \bar{e}_1 (n't)^2$$

$$(4d)\alpha \qquad \text{»} \quad = +\frac{1}{32} a' \frac{\sqrt{1-{}'e^2}}{(1+m')^2} \frac{n}{n'-n} \left\{ (F_i)^2 + (F_{-i})^2 - 2F_iF_{-i} \cos(2\tilde\omega' - \tilde\omega) \right\} \bar{\tilde\omega}_1 e (n't)^2$$

$$(4d)\beta \qquad \text{»} \quad = -\frac{1}{32} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{in}{in' - (i-2)n} \left\{ 2e'\bar{H}_i \cos(\tilde\omega' - \tilde\omega) + e\bar{G}_i \right\} \bar{\tilde\omega}_1 (n't)^2$$

$$(4d)\gamma \qquad \text{»} \quad = -\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{in}{in' - (i-1)n} \bar{D}_i \left\{ \begin{matrix} (\bar{N}_i - \bar{M}_i) e' \cos(\tilde\omega' - \tilde\omega) \\ + \bar{L}_i e \cos(2\tilde\omega' - 2\tilde\omega) \end{matrix} \right\} \bar{\tilde\omega}_1 (n't)^2$$

$$(4e)\alpha \qquad \text{»} \quad = -\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n''}{n'} \bar{H}_0 \bar{G}''_0 \bar{e}''_1 e' \sin(\tilde\omega'' - \tilde\omega')(n't)^2$$

$$(4e)\beta \qquad \text{»} \quad = -\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n''}{n'} \bar{D}_0 \left\{ \begin{matrix} (\bar{N}''_0 - \bar{M}''_0) \sin(\tilde\omega'' - \tilde\omega') \\ + \bar{L}''_0 e'' \sin(2\tilde\omega'' - 2\tilde\omega') \end{matrix} \right\} \bar{e}''_1 (n't)^2$$

$$(4f)\alpha \qquad \text{»} \quad = -\frac{1}{32} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \cdot \frac{n''}{n'} \bar{G}''_0 \left\{ \frac{1}{2} e'\bar{H}_0 \cos(\tilde\omega'' - \tilde\omega') + e\bar{G}_0 \cos(\tilde\omega'' - \tilde\omega) \right\} \bar{\tilde\omega}''_1 (n't)^2$$

$$(4f)\beta \qquad \text{»} \quad = -\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \frac{n''}{n'} \bar{D}_0 \left\{ \begin{matrix} (\bar{N}''_0 - \bar{M}''_0) e \cos(\tilde\omega'' - \tilde\omega') \\ + \bar{L}''_0 e'' \cos(2\tilde\omega'' - 2\tilde\omega') \end{matrix} \right\} \bar{\tilde\omega}''_1 (n't)^2$$

$$(6)\alpha \qquad s[p_6(a'_3)] = -\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \bar{H}_0 \bar{G}''_0 \bar{e}'_1 e'' \sin(\tilde\omega'' - \tilde\omega')(n't)^2$$

$$(6)\beta \qquad \text{»} \quad = -\frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \bar{D}''_0 (\bar{N}_0 - \bar{M}_0) \bar{e}'_1 e \sin(\tilde\omega' - \tilde\omega)(n't)^2$$

$$(8)\alpha \qquad s\,[p_8(a'_3)] = +\frac{1}{8}\,a'\,\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\,\overline{D}_0\overline{D}''_0\,\frac{\bar{\tilde{\omega}}'_1}{e'}\,(n't)^2$$

Dieser Term mit dem Pol $e' = 0$ hebt sich gegen den analogen Term $(2b)\,\alpha$ in $p_2(a'_3)$ fort.

Este término con el polo $e' = 0$ se elimina con el término análogo $(2b)\,\alpha$ de $p_2(a'_3)$.

$$(8)\beta \qquad s\,[p_8(a'_3)] = \frac{1}{4}\,a'\,\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\left\{\begin{aligned}&e'^2\overline{H}_0\overline{H}''_0 + \frac{1}{2}\,e'e''\overline{H}_0\overline{G}''_0\cos(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}')\\&+\frac{1}{4}\,ee'\overline{G}_0\overline{H}''_0\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) + \frac{1}{8}\,ee''\overline{G}_0\overline{G}''_0\cos(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega})\end{aligned}\right\}\frac{\bar{\tilde{\omega}}'_1}{e'}\,(n't)^2$$

Der Pol-Term, das 4. Glied der Klammer, hebt sich gegen den Term $(2b)\,\varepsilon$ in $p_2(a'_3)$ fort.

El término con polo (4° del paréntesis), se destruye con el término $(2b)\,\varepsilon$ de $p_2(a'_3)$.

$$(8)\gamma \qquad s\,[p_8(a'_3)] = \frac{1}{16}\,a'\,\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\,\overline{D}_0\left\{\begin{aligned}&\frac{3}{2}\,e'^2\overline{P}''_0 + \frac{1}{2}\,e''^2\overline{K}''_0\\&+(N''_0+M''_0)\,e'e''\cos(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}')\\&+\frac{1}{2}\,\overline{L}''_0e''^2\cos(2\tilde{\omega}''-2\tilde{\omega}')\end{aligned}\right\}\frac{\bar{\tilde{\omega}}'_1}{e'}\,(n't)^2$$

Das 2. und 4. Glied mit dem Pol $e' = 0$ heben sich gegen die entsprechenden Glieder δ in $(2b)$ von $p_2(a'_3)$ fort.

Los términos 2° y 4° con el polo $e'=0$, se eliminan con los términos correspondientes $(2b)\,\delta$ de $p_2(a'_3)$.

$$(8)\delta \qquad s\,[p_8(a'_3)] = +\frac{1}{4}\,a'\,\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\,\overline{D}''_0\left\{\begin{aligned}&+\frac{1}{8}\,e'^2\overline{P}_0 + \frac{1}{8}\,e^2\overline{K}_0\\&+\frac{1}{2}\,ee'\overline{M}_0\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\\&+\frac{1}{8}\,e^2\overline{L}_0\cos(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega})\end{aligned}\right\}\frac{\bar{\tilde{\omega}}'_1}{e'}\,(n't)^2$$

Das 2. und 4. Glied mit den Pol $e' = 0$ heben sich gegun die entsprechenden Glieder $(2b)\,\zeta$ von $p_2(a'_3)$ fort.

Los términos 2° y 4° con el polo $e' = 0$ se destruyen con los términos correspondientes $(2b)\,\zeta$ de $p_2(a'_3)$.

$$(9) \qquad s\,[p_9(a'_3)] = -\frac{1}{4}\,a'\overline{C}''_0\overline{D}_{0a'}\,\frac{\bar{e}'_1}{(1+m')^2}\,e''\sin(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}')\,(n't)^2$$

$$(11) \qquad s\,[p_{11}(a'_3)] = +\frac{1}{4}\,a'\overline{D}_{0a'}\left\{\overline{D}''_0e' + \overline{C}''_0e''\cos(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}')\right\}\frac{\bar{\tilde{\omega}}'_1}{(1+m')^2}\,(n't)^2$$

$$(12) \qquad s\,[p_{12}(a'_3)] = -\frac{1}{4}\,a'\overline{D}_0\left\{\overline{C}''_{0a'} + \frac{3}{2}\,\overline{C}''_0\right\}\frac{\bar{e}'_1}{(1+m')^2}\,e''\sin(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}')\,(n't)^2$$

$$(13)\alpha \qquad s\,[p_{13}(a'_3)] = \frac{1}{8}\,a'\,\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\,\overline{D}_0\left\{\overline{D}''_0 - \frac{1}{2}\,e'^2D''_0\right\}\frac{\bar{\tilde{\omega}}'_1}{e'}\,(n't)^2$$

Der 1. Term mit den Pol $e' = 0$ hebt sich gegen den analogen Term in $(4b)\,\alpha$ von $p_4(a'_3)$ fort.

El 1^er^ término con el polo $e' = 0$ se elimina con el término análogo de $(4b)\,\alpha$ de $p_4(a'_3)$.

$$(13)\beta \qquad s\,[p_{13}(a'_3)] = \frac{1}{32}\,a'\,\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\,\overline{D}_0 \begin{Bmatrix} e'^2\overline{P}''_0 + e''^2\overline{K}''_0 \\ + 2e'e''\overline{M}''_0 \cos(\tilde\omega'' - \tilde\omega') \\ - e''^2 L''_0 \cos(2\tilde\omega'' - 2\tilde\omega') \end{Bmatrix} \frac{\overline{\tilde\omega}'_1}{e'}\,(n't)^2$$

Das 2. und 4. Glied mit den Pol $e' = 0$ heben sich gegen die entsprechenden Glieder in $(4b)\,\delta$ von $p_4(a'_3)$ fort.

Los términos 2° y 4° con el polo $e' = 0$ se destruyen con los términos correspondientes de $(4b)\,\delta$ de $p_4(a'_3)$.

$$(13)\gamma \qquad s\,[p_{13}(a'_3)] = +\frac{1}{8}\,a'\,\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\,\overline{D}''_0 \begin{Bmatrix} \frac{3}{4}e'^2\overline{P}_0 + \frac{1}{4}e^2\overline{K}_0 + ee'\overline{M}_0\cos(\tilde\omega' - \tilde\omega) \\ - \frac{1}{4}e^2\overline{L}_0\cos(2\tilde\omega' - 2\tilde\omega) \end{Bmatrix} \frac{\overline{\tilde\omega}'_1}{e'}\,(n't)^2$$

wo das 2. und 4. Glied mit dem Pole $e' = 0$ gegen die entsprechenden Term in $(4b)\beta$ fortfallen,

donde los términos 2° y 4° con el polo $e' = 0$ se destruyen con los términos correspondientes de $(4b)\beta$.

$$(13)\delta \qquad = \frac{1}{16}\,a'\,\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\,\overline{H}_0 \left\{ e'\overline{H}''_0 + \frac{1}{2}e''\overline{G}''_0\cos(\tilde\omega'' - \tilde\omega') \right\} \overline{\tilde\omega}'_1\,(n't)^2$$

$$(13)\varepsilon \qquad = \frac{1}{16}\,a'\,\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\,\overline{G}_0 \left\{ \overline{H}_0 e'\cos(\tilde\omega' - \tilde\omega) + \frac{1}{2}G''_0 e''\cos(\tilde\omega'' - \tilde\omega) \right\} \frac{e\overline{\tilde\omega}'_1}{e'}\,(n't)^2$$

Das 2. Glied mit den Pol $e' = 0$ fällt gegen das analoge Glied $(4b)\,\beta$ von $p_4(a'_3)$ fort,

El 2° término con el polo $e' = 0$ se elimina con el término análogo $(4b)\,\beta$ de $p_4(a'_3)$.

$$(13)a' \qquad s\,[p_{13}(a'_3)] = +\frac{1}{16}\,a'\,\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\,\overline{D}_0 \begin{Bmatrix} (M''_0 - N''_0)\,e''\sin(\tilde\omega'' - \tilde\omega') \\ - \frac{1}{2}\frac{e''^2}{e'}\overline{L}''_0 \operatorname{sen}(2\tilde\omega'' - 2\tilde\omega') \end{Bmatrix} \overline{e}'_1\,(n't)^2$$

$$(13)b' \qquad \text{»} \qquad = +\frac{1}{8}\,a'\,\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\,\overline{D}''_0 \begin{Bmatrix} e\overline{M}_0\sin(\tilde\omega' - \tilde\omega) \\ + \frac{1}{4}\frac{e^2}{e'}\overline{L}_0\sin(2\tilde\omega' - 2\tilde\omega) \end{Bmatrix} \overline{e}'_1\,(n't)^2$$

$$(13)c' \qquad \text{»} \qquad = +\frac{1}{8}\,a'\,\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2} \begin{Bmatrix} - \overline{H}_0\overline{G}''_0 e''\sin(\tilde\omega'' - \tilde\omega') - \frac{1}{2}H''_0\overline{G}_0 e\sin(\tilde\omega' - \tilde\omega) \\ - \frac{1}{4}\overline{G}_0\overline{G}''_0\,\frac{ee''}{e'} \end{Bmatrix} \overline{e}'_1\,(nt)^2$$

Der letzte Term mit den Pol $e' = 0$ hebt sich gegen den korrespondierenden Term $(4a)\,\delta$ in $p_4(a'_3)$ fort.

El último término con el polo $e' = 0$ se elimina con el término correspondiente de $(4a)\,\delta$ de $p_4(a'_3)$.

$$(14)\qquad s\,[p_{14}(a'_3) = +\frac{1}{4}\,a'\,\overline{D}_0 \left\{ \begin{array}{l} e'\left[\overline{D}''_{0a'} - \frac{1}{4}\sqrt{1-e'^2}\,\overline{D}''_0 + \frac{3}{2}\,\overline{D}''_0\right] \\ + e''\cos(\tilde\omega''-\tilde\omega')\left[\overline{C}''_{0a'} + \frac{3}{2}\,\overline{C}''_0\right] \end{array} \right\} \frac{\overline{\tilde\omega}'_1}{(1+m')^2}\,(n't)^2$$

$$(16)\quad (1a)'\qquad s\,[p_{16}(a'_3)] = -\frac{1}{8}\,a'\,\overline{D}''_0\overline{C}_0\,\frac{\overline{e}'_1}{(1+m')^2}\,e\sin(\tilde\omega'-\tilde\omega)\,(n't)^2$$

$$(1b)'\qquad » \quad = -\frac{1}{8}\,a'\,\overline{D}''_0\left\{e'\overline{D}_0 + \overline{C}_0 e\cos(\tilde\omega'-\tilde\omega)\right\}\frac{\overline{\tilde\omega}'_1}{(1+m')^2}\,(n't)^2$$

$$(1c)'\alpha\qquad » \quad = -\frac{1}{8}\,a'\,\frac{in}{in'-(i-1)n}\,\overline{C}_i\overline{D}_i\,\frac{\overline{e}_1}{(1+m')^2}\,e'\sin(\tilde\omega'-\tilde\omega)\,(n't)^2$$

$$(1c)'\beta\qquad » \quad = +\frac{1}{8}\,a'\,\frac{in}{n'-n}\,\overline{\Lambda}_i\left(\overline{F}_i - \overline{F}_{-i}\right)\frac{\overline{e}_1}{(1+m')^2}\,e'\sin(\tilde\omega'-\tilde\omega)\,(n't)^2$$

$$(1d)'\alpha\qquad » \quad = -\frac{1}{8}\,a'\,\frac{i^2n}{in'-(i-1)n}\,\overline{C}_i\left\{e'\overline{D}_i\cos(\tilde\omega'-\tilde\omega) + e\overline{C}_i\right\}\frac{\overline{\tilde\omega}_1}{(1+m')^2}\,(n't)^2$$

$$(1d)'\beta\qquad » \quad = +\frac{1}{8}\,a'\,\frac{in}{n'-n}\,\overline{\Lambda}_i\left\{\overline{F}_i - \overline{F}_{-i}\right\}\frac{\overline{\tilde\omega}_1}{(1+m')^2}\,e'\cos(\tilde\omega'-\tilde\omega)\,(n't)^2$$

$$(1e)'\qquad » \quad = +\frac{1}{8}\,a'\,\frac{n''}{n'}\,\overline{C}''_0\overline{D}_0\,\frac{\overline{e}''_1}{(1+m')^2}\,e'\sin(\tilde\omega''-\tilde\omega')\,(n't)^2$$

$$(1f)'\qquad » \quad = -\frac{1}{8}\,a'\,\frac{n''}{n'}\,\overline{C}''_0\left\{e'\overline{D}_0\cos(\tilde\omega''-\tilde\omega') + e''\overline{C}_0\right\}\frac{\overline{\tilde\omega}''_1}{(1+m')^2}\,(n't)^2$$

$$(17)\qquad s\,[p_{17}(a'_3)] = -\frac{1}{8}\,a'\overline{C}''_0\overline{D}_0\,\frac{\overline{e}'_1}{(1+m')^2}\,e''\sin(\tilde\omega''-\tilde\omega')\,(n't)^2$$

$$(19)\qquad s\,[p_{19}(a'_3)] = +\frac{1}{8}\,a'\overline{D}_0\left\{e'\overline{D}''_0 + e''\overline{C}''_0\cos(\tilde\omega''-\tilde\omega')\right\}\frac{\overline{\tilde\omega}'_1}{(1+m')^2}\,(n't)^2$$

Ferner bleibt parallel zum Falle der Berücksichtigung der direkten Störungen von Jupiter auf Saturn und umgekehrt, in ihrem Einflusse auf die Säkularstörung a_3, die Darlegung der analogen Störung, wenn jetzt m', d. h. ein in Bezug auf m äußerer Planet, anstelle von m als gestörter Körper zu betrachten ist. Die Funktion R^1 geht dann über in R, mit dem Massenfaktor m, nur wegen des Nebenteils der Störungsfunktion verschieden von R^1. Aber da jetzt m' der gestörte Planet ist, ist in den

Paralelamente al caso de considerar la influencia sobre la perturbación secular a_3, de las perturbaciones de Júpiter sobre Saturno y recíprocamente, queda por explicar el caso en que el cuerpo perturbado sea m', planeta exterior a m. La función R^1 se transforma en R con el factor masa m, distinta de R^1 solamente en la parte complementaria de la función perturbadora. Pero ya que ahora es m' el planeta perturbado hay que permutar en las expresiones de a_3 m, a, e, ... con m', a', e', e inversamente.

Ausdrücken für a_3 überall $m, a, e, \ldots$ mit $m', a', e', \ldots$ und umgekehrt zu vertauschen. Zugleich ist, wie schon oben, C_i mit D_i, E_i mit H_i, etc., zu vertauschen. Schließlich ist überall $i,\ i-1,\ i-2$, etc., mit $-i$ zu vertauschen, während die überall auftretenden Nenner $in' - (i-k)\,n$ unverändert bleiben, wie oben schon ausgeführt wurde; ist der Nenner aber $k \,.\, n$, von dem Argumente $k \,.\, l - k\tilde{\omega}$ im Falle $i = 0$ herrührend, so ist zur Darstellung von a'_3 n mit n' zu vertauschen, entsprechend dem Argumente $k \,.\, l' - k\tilde{\omega}'$ der Störungsfunktion. Die m'' entsprechenden Elemente $m'', a'', e'', \ldots$ bleiben dagegen stets unverändert. Im Falle der Anziehung weiterer innerer Planeten $m^{(')}, m^{('')}$, etc., sind in den folgenden Ausdrücken zur Gewinnung der entsprechenden Störungsanteile nur die Elemente $m, a, e, \ldots$ mit $m^{(')}, a^{(')}, e^{(')}, \ldots$ resp. mit $m^{('')}, a^{('')}, e^{('')}$, etc., zu vertauschen, ebenso wie im Falle weiterer äußerer störender Körper neben m'' mit den Elementen $m''', a''', e''', \ldots$ resp. $m^{\text{IV}}, a^{\text{IV}}, e^{\text{IV}}$, etc., die Elemente m'', a'', e'', etc., mit den genannten neuen Elementen zu vertauschen sind. Alsdann lauten die von dem inneren Planeten m und dem außeren Planeten m'' abhängenden kombinierten Störungen a'_3 des Planeten m' gemäß den früheren Formeln folgendermaßen:

Simultáneamente hay que cambiar, como ya vimos, C_i con D_i, E_i con H_i, etc. Finalmente debemos reemplazar siempre $i,\ i-1,\ i-2$, etc., por $-i$, salvo en los denominadores $in' - (i-k)\,n$ que permanecen inalterados, como ya explicamos; pero si el denominador es kn, producido por el argumento $kl - k\tilde{\omega}$ (caso $i = 0$), debemos permutar n con n' para representar a'_3, pues el argumento de la función perturbadora es $kl' - k\tilde{\omega}'$. Los elementos correspondientes a m'', es decir, $a'', e'', \ldots$ permanecen, por el contrario, inalterados. En el caso de atracción de otros planetas interiores $m^{(')}, m^{('')}$, etc., debe cambiarse en las expresiones que siguen, a fin de obtener las partes de perturbación correspondientes, los elementos $m, a, e, \ldots$ con $m^{(')}, a^{(')}, e^{(')}, \ldots$ o con $m^{('')}, a^{('')}, e^{('')}$, etc.; asimismo, debe sustituirse, si existen además de m'' otros cuerpos perturbadores exteriores, los elementos m'', a'', e'', etc., por los elementos m''', a''', e''', o por $m^{\text{IV}}, a^{\text{IV}}, e^{\text{IV}}$, etc. Luego las perturbaciones a'_3 del planeta m' debidas al planeta interior m y al planeta exterior m'' se expresa según las fórmulas anteriores como sigue:

$$(1)' \qquad a'_3 = +\frac{1}{4}\,a' \Big\{ -\overline{D}_i\overline{C}_{ia'}\,\frac{i^2 n}{in' - (i-1)\,n}\,e' \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - \overline{D}''_0\overline{C}_{0a'}\,\frac{n}{n'}\,e' \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$$

$$-\overline{C}''_0\overline{C}_{0a'}\,\frac{n}{n'}\,e'' \sin(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) - \overline{A}_i\overline{F}_{ia'}\,\frac{in}{n' - n}\,e' \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$$

$$+\overline{A}_i\overline{F}_{-ia'}\,\frac{in}{n' - n}\,e' \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \Big\} \frac{\bar{e}_1}{(1 + m')^2}\,(n't)^2$$

$$(2')\alpha \qquad a'_3 = +\frac{1}{4}\,a' \Big\{ \frac{i^2 n}{in' - (i-1)\,n} \left[\overline{D}_i\overline{C}_{ia'}e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \overline{C}_i\overline{C}_{ia'} \,.\, e\right]$$

$$+\frac{n}{n'}\left[\overline{D}''_0\overline{C}_{0a'}e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \overline{C}''_0\overline{C}_{0a'}e'' \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega})\right] \Big\} \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{(1 + m')^2}\,(n't)^2$$

$$(2')\beta \qquad a'_3 = -\frac{1}{4}\,a'\,\frac{in}{n' - n}\,\overline{A}_i \left\{ \overline{F}_{ia'} - \overline{F}_{-ia'} \right\} e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\,\frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{(1 + m')^2}\,(n't)^2$$

$$(3)\ (a'+b'+c')\qquad a'_3 = +\frac{1}{16}\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\Big\{\bar{F}_i\bar{F}_{-i}\frac{n}{n'-n}e\sin(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega})$$

$$-\bar{A}_i\left(\bar{F}_i-\bar{F}_{-i}\right)\frac{n}{n'-n}e'\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})-\frac{in}{in'-(i-2)n}\bar{H}_i\bar{G}_i e'\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})$$

$$+\frac{in}{in'-(i-1)n}\bar{D}_i\Big[-\left(\bar{N}_i-\bar{M}_i\right)e'\sin(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega})$$

$$-\bar{L}_i e\sin(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega})\Big]-\frac{n}{n'}\bar{H}''_0\bar{G}_0 e'\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})$$

$$+\frac{n}{n'}\bar{D}''_0\Big[-\left(\bar{N}_0-\bar{M}_0\right)e'\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})-\bar{L}_0\, e\sin(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega})\Big]\Big\}\frac{\bar{\omega}'_1}{(1+m')^2}(n't)^2$$

$$(4)'(a'+b'+c')\,a'_3 = \frac{1}{16}a'\frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\Big\{+\frac{1}{2}\bar{F}_i\bar{F}_{-i}\frac{n}{n'-n}e\cos(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega})+\bar{F}_i\bar{A}_i\frac{in}{n'-n}e'\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})$$

$$-\frac{1}{2}\left(\bar{F}_i\right)^2\frac{n}{n'-n}\cdot e-\frac{1}{2}\left(\bar{F}_{-i}\right)^2\frac{n}{n'-n}e+\frac{1}{2}\bar{F}_i\bar{F}_{-i}\frac{n}{n'-n}e\cos(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega})$$

$$-\bar{F}_{-i}\bar{A}_i\frac{in}{n'-n}e'\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})+\bar{G}_i\Big[\frac{1}{2}\bar{G}_i\frac{in}{in'-(i-2)n}e$$

$$+\bar{H}_i\frac{in}{in'-(i-2)n}e'\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\Big]+\bar{G}_0\frac{n}{n'}\Big[\frac{1}{2}\bar{G}_0''e''\cos(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega})$$

$$+\bar{H}''_0\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\Big]+\frac{in}{in'-(i-1)n}\bar{D}_i\begin{bmatrix}\bar{N}_i e'\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})-\bar{M}_i e'\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\\+\bar{L}_i e'\cos(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega})\end{bmatrix}$$

$$+\bar{D}''_0\frac{n}{n'}\Big[\bar{N}_0 e'\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})-\bar{M}_0 e'\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})+\bar{L}_0 e\cos(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega})\Big]\Big\}\bar{\omega}_1\,(n't)^2.$$

$$(5)'\ (a'+b'+c')\ a'_3 = +a'\Big\{-e'\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\Big[\frac{1}{4}\bar{C}_i\bar{D}_{ia'}\frac{i^2n}{in'-(i-1)n}+\frac{1}{4}\bar{A}_{ia'}\frac{in}{n'-n}\left(\bar{F}_i-\bar{F}_{-i}\right)$$

$$-\frac{1}{16}\sqrt{1-e'^2}\,\bar{D}_i\bar{C}_i\frac{i^2\,.\,n}{in'-(i-1)n}+\frac{3}{8}\Big(\bar{C}_i\bar{D}_i\frac{i^3nn'}{[in'-(i-1)n]^2}+\bar{A}_i\left(\bar{F}_i-\bar{F}_{-i}\right)$$

$$\times\frac{inn'}{(n'-n)^2}\Big)\Big]-\frac{1}{4}\bar{C}_0\Big[-e'\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\Big(-3\frac{n}{n'}\bar{D}''_0-2\frac{n}{n'}\bar{D}''_0$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{1-e^2}\frac{n}{n'}\bar{D}''_0\Big)+e''\sin(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega})\Big(3\frac{n}{n'}\bar{C}''_0+2\frac{n}{n'}\bar{C}''_{0a'}\Big)\Big]\Big\}\frac{\bar{e}_1}{(1+m')^2}(n't)^2$$

$$(6)'\ (a'+b'+c')\ a'_3 = \frac{1}{2} a' \Big\{ i^2\overline{C}_i \Big[-\frac{1}{2}\Big(\overline{D}_{ia'} \frac{n}{in'-(i-1)n} e' \cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) + \overline{C}_{ia'} \frac{n}{in'-(i-2)n} e$$

$$-\frac{1}{8}\sqrt{1-e'^2}\frac{n}{in'-(i-1)n}\overline{D}_i e' \cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) - \frac{3}{4}\frac{inn'}{[in'-(i-1)n]^2}\begin{pmatrix}\overline{D}_i e' \cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\\ +\overline{C}_i\,.\,e\end{pmatrix}\Big)\Big]$$

$$-\frac{1}{2}\overline{F}_i\overline{A}_{ia'}\frac{in}{n'-n}e'\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) + \frac{3}{8}\overline{F}_i\overline{A}_i\frac{nn'}{(n'-n)^2}e'\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})$$

$$+\frac{1}{2}\overline{F}_{-i}\overline{A}_{ia'}\frac{in}{n'-n}e'\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) + \frac{3}{8}\overline{F}_{-i}\overline{A}_i\frac{inn'}{(n'-n)^2}e'\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})$$

$$-\frac{1}{4}\overline{C}_0\Big[e'\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})\Big(-2\frac{n}{n'}\overline{D}''_{0a'} + \frac{1}{2}\sqrt{1-e'^2}\frac{n}{n'}\overline{D}''_0 - 3\frac{n}{n'}\overline{D}''_0\Big)$$

$$+e''\cos(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega})\Big(-2\frac{n}{n'}\overline{C}''_{0a'} - 3\frac{n}{n'}\overline{C}''_0\Big)\Big]\Big\}\frac{\overline{\omega}_1}{(1+m')^2}(n't)^2$$

$$(7)'\ (a'+b'+c')\ a'_3 = \frac{1}{32} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\Big\{ -2\overline{G}_i\overline{H}_i\frac{in}{in'-(i-2)n}e'\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})$$

$$+2\overline{F}_i\overline{F}_{-i}\frac{n}{n'-n} + 2\overline{B}_i\overline{F}_i\frac{n}{n'-n}e'\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})$$

$$-2\overline{B}_i\overline{F}_{-i}\frac{n}{n'-n}e'\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) - 2\overline{D}_i\frac{in}{in'-(i-1)n}\big[e'\overline{M}_i\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})$$

$$+eL_i\sin(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega})\big] - 2\overline{G}_0\overline{H}''_0\frac{n}{n'}e'\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})$$

$$-\overline{G}_0\overline{G}''_0\frac{n}{n'}e''\sin(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}) - 2D''_0\frac{n}{n'}\big[e'\overline{M}_0\sin(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})$$

$$+e\overline{L}_0\sin(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega})\big]\Big\}\overline{e}_1(n't)^2.$$

$$(8)'\ (a'+b'+c')\ a'_3 = \frac{1}{16} a' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\Big\{ -e'\overline{F}_i\overline{B}_i\frac{n}{n'-n}\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) - e\overline{F}_i\overline{F}_{-i}\frac{n}{n'-n}(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega})$$

$$-\frac{1}{2}e\big(\overline{F}_i\big)^2\frac{n}{n'-n} + e'\overline{F}_{-i}\overline{B}_i\frac{n}{n'-n}\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) - \frac{1}{2}e\big(\overline{F}_{-i}\big)^2\frac{n}{n'-n}$$

$$+\frac{1}{2}e\big(\overline{G}_i\big)^2\frac{in}{in'-(i-2)n} + e'\overline{H}_i\overline{G}_i\frac{in}{in'-(i-2)n}\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) - \overline{D}_i\frac{in}{in'-(i-1)n}\times$$

$$\times\big[\overline{M}_i e'\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega}) + \overline{L}_i e\cos(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega})\big] + \overline{H}''_0\overline{G}_0\frac{n}{n'}e'\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})$$

$$+\frac{1}{2}\overline{G}''_0\overline{G}_0\frac{n}{n'}e''\cos(\tilde{\omega}''-\tilde{\omega}) - \overline{D}_0\frac{n}{n'}\big[\overline{M}_0 e'\cos(\tilde{\omega}'-\tilde{\omega})$$

$$+\overline{L}_0 e\cos(2\tilde{\omega}'-2\tilde{\omega})\big]\Big\}\overline{\omega}_1(n't)^2.$$

$$(9)'\ (a'+b'+c')\ a'_3 = \frac{1}{8}\, a' \Big\{ -\left(\overline{D}_i\overline{C}_i \frac{i^2 n}{in' - (i-1)\,n} + \overline{A}_i\left(\overline{F}_i - \overline{F}_{-i}\right)\frac{in}{n'-n}\right) e' \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$$

$$- \overline{D}''_0\overline{C}_0 \frac{n}{n'} e' \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - \overline{C}''_0\overline{C}_0 \frac{n}{n'} e'' \sin(\tilde{\omega}'' - \omega) \Big\} \frac{\overline{e}_1}{(1+m')^2}(n't)^2.$$

$$(10)'\ (a'+b'+c')\ a'_3 = +\frac{1}{8}\, a' \Big\{ -\left(\overline{F}_i - \overline{F}_{-i}\right)\overline{A}_i \frac{in}{n'-n} e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$$

$$+ \frac{i^2 n}{in' - (i-1)\,n}\left[\overline{D}_i\overline{C}_i e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + e\,(C_i)^2\right]$$

$$+ \overline{D}''_0\overline{C}_0 \frac{n}{n'} e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$$

$$+ \overline{C}''_0\overline{C}_0 \frac{n}{n'} e'' \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \Big\} \frac{\overline{\tilde{\omega}}_1}{(1+m')^2}(n't)^2.$$

Hiermit ist der erste Teil der Untersuchung bezüglich der Ableitung der reinen Säkularstörungen in t^2 erledigt. Der zweite Teil wird die entsprechenden Poisson-Terme der Form $t^2 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} A$ enthalten.

Con esto terminamos la primera parte de la investigación realizada para deducir las perturbaciones seculares puras en t^2. La segunda parte contendrá los términos correspondientes de Poisson, es decir, los términos de la forma $t^2 \begin{matrix}\text{sen}\\ \cos\end{matrix} A$.

PARTE II. DIE POISSON-TERME IN t^2

PARTE II. LOS TERMINOS DE POISSON EN t^2

§ 1. Der Einfluß der direkten Störungen der großen Planeten auf die Säkularbeschleunigung a_3 des gestörten Körpors.

Im 2. Teil der vorliegenden Abhandlung sollen in unmittelbarem Anschluß an den 1. Teil, der die rein säkularen Störungen der großen Achsen von der Form t^2 enthält, die entsprechenden Poisson-Terme der Form $t^2 \cdot \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} A$ abgeleitet werden. Die Aufsuchung dieser Glieder wird, wie wir sogleich sehen werden, noch durch einen besonderen Umstand erleichtert werden. Man möchte vielleicht von vorneweg annehmen, daß diese neuen Glieder in Analogie zu den rein-säkularen in t^2 ebenfalls mindestens vom 2. Grade der Exzentrizitäten sind; tatsächlich aber sind die Poisson-Glieder mindestens schon vom 1. Grade der Exzentrizitäten, sodaß wir bei Beschränkung der Untersuchung auf die Terme niedrigsten Grades von denen des 2. Grades werden zunächst absehen können.

Zuerst ist jetzt festzustellen, welche Voraussetzungen ein Term der Differentialgleichung von $\dot{a}_3$ (Formel (5)) erfüllen muß, damit der Term im Integral a_3 zu Gliedern der Form $t^2 \cdot \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} A$ führen kann. Die Differentiation eines solchen Termes zeigt, daß er wiererum zu einem Term der gleichen Form führt, da A eine lineare Funktion der Zeit ist; setzen wir $A = \alpha t + \beta$, so lauten andererseits die Integrale:

§ 1. La influencia de las perturbaciones directas de los grandes planetas sobre la aceleración secular a_3 del cuerpo perturbado.

Después de haber deducido en la primera parte de esta memoria las perturbaciones seculares puras en t^2 de los semiejes mayores, deduciremos en esta segunda parte los términos correspondientes de Poisson, de la forma $t^2 \cdot \begin{smallmatrix}\cos\\ \mathrm{sen}\end{smallmatrix} A$. La búsqueda de estos términos se aliviara, como vamos a ver en seguida, gracias a una circunstancia particular. Podría, quizás, suponerse de antemano que estos nuevos términos sean al menos de 2° grado en las excentricidades, análogamente a los seculares puros en t^2. Pero en realidad estos términos de Poisson son por los menos de 1er grado en las excentricidades, de modo que podemos limitar nuestra investigación prescindiendo primeramente de los términos de 2° grado.

En primer lugar debemos determinar las condiciones que ha de cumplir un término de la ecuación diferencial de $\dot{a}_3$ (fórmula (5)), a fin de que puedan producirse, en la integral a_3, términos de la forma $t^2 \cdot \begin{smallmatrix}\cos\\ \mathrm{sen}\end{smallmatrix} A$. La derivada de este término da origen a un término de la misma forma, ya que A es una función lineal del tiempo, digamos $A = \alpha t + \beta$, y por otra parte las integrales de términos de la forma $t^2 \begin{smallmatrix}\cos\\ \mathrm{sen}\end{smallmatrix}$ de $\dot{a}_3$ son:

$$\int t^2 \cos(\alpha t + \beta)\, dt \doteq t^2 \frac{\sin(\alpha t + \beta)}{\alpha} + 2t \frac{\cos(\alpha t + \beta)}{\alpha^2} - 2 \frac{\sin(\alpha t + \beta)}{\alpha^3}$$

$$\int t^2 \sin(\alpha t + \beta)\, dt = - t^2 \frac{\cos(\alpha t + \beta)}{\alpha} + 2t \frac{\sin(\alpha t + \beta)}{\alpha^2} + 2 \frac{\cos(\alpha t + \beta)}{\alpha^3}.$$

Daraus ist ersichtlich, daß auch noch andere Funktionen, zunächst $t^3 \cdot {\cos \atop \sin} A$, bei Integration zu Termen der gewünschen Poisson-Form $t^2 \cdot {\cos \atop \sin} A$ führen können; diese folgen aber, wie aus den früheren Untersuchungen hervorgeht, erst aus den Termen 4. Ordnung der Masse, von denen wir einstweilen allgemein abgesehen haben.

Folglich ist unsere nunmehrige Anfgabe, aus der Differentialgleichung von $\dot{a}_3$ nur diejenigen Glieder herauszusuchen, die den Faktor $t^2 \cdot {\cos \atop \sin} A$ enthalten, wo A eine lineare Funktion der Zeit ist. In jedem einzelnen Term von (5) ist der von den Ableitungen der Störungsfunktion R explizit abhängige Koeffizient rein periodisch, weil jeder Koeffizient die Ableitung nach der Länge ε enthält. Folglich muß der zur Erzeugung eines Poisson-Termes der oben genannten Art noch notwendige Faktor t^2 aus den Faktoren a_2, e_2, ... $(a_1)^2$, $(e_1)^2$, ... $a_1 \cdot e_1$, $a_1 \cdot \varepsilon_1$, ... $e_1\tilde{\omega}_1$ hervorgehen. Das aber ist nur möglich, wenn in den zunächst nur aus 2 gleichen oder verschiedenen Multiplikatoren bestehenden Koeffizienten jeder einzelne Faktor einen rein säkularen Beitrag der Form t^1 enthält. Da die Faktoren a_1 und l_1 keine solchen Störungen enthalten, kommen ganz allein nur die folgenden Terme in Frage: e^2_1, $\tilde{\omega}^2_1$, und $e_1 \cdot \tilde{\omega}_1$, d. h. Faktoren, die nur in $p_6(\dot{a}_3)$, $p_8(\dot{a}_3)$ und $p_{13}(\dot{a}_3)$ vorkommen. Von den noch übrigen Multiplikatoren: a_2, e_2, l_2 y $\tilde{\omega}_2$ fällt der erste in a_2 sogleich weg, weil dieser nach dem Theorem von Poisson keine reinen Säkularglieder in t^2 enthält; wohl aber enthalten die übrigen 3 Faktoren e_2, l_2 und $\tilde{\omega}_2$ reine Säkularterme in t^2. Das ersieht man

Luego es evidente que, por integración de otras funciones, en primer lugar de $t^3 \cdot {\cos \atop \text{sen}} A$ pueden producirse términos de la forma deseada de Poisson: $t^2 {\cos \atop \text{sen}} A$; pero estos provienen, como resulta de las investigaciones anteriores, de los términos de 4º orden en la masa que hasta ahora no hemos considerado en general.

Por consiguiente nuestra tarea queda reducida a buscar en la ecuación diferencial de $\dot{a}_3$ únicamente aquellos términos que contienen el factor $t^2 {\cos \atop \text{sen}} A$, siendo A una función lineal del tiempo. En cada uno de los términos de (5) el coeficiente que depende explícitamente de las derivadas de la función perturbadora, es periódico puro, porque cada coeficiente contiene la derivada respecto de la longitud ε. Por consiguiente el coeficiente t^2, necesario para producir términos de Poisson del tipo mencionado, debe resultar de los factores a_2, e_2, ..., $(a_1)^2$, $(e_1)^2$, ..., $a_1 e_1$, $a_1 \varepsilon_1$, ..., $e_1\tilde{\omega}_1$. Pero eso sólo es posible, si en primer lugar cada factor de estos coeficientes que consisten de dos factores iguales o distintos, contiene una contribución secular pura de la forma t^1. Ya que los factores a_1 y l_1 no contienen perturbaciones tales, debemos considerar sólo los términos siguientes: $(e_1)^2$, $(\tilde{\omega}_1)^2$ y $e_1\tilde{\omega}_1$, es decir, factores que aparecen solamente en $p_6(\dot{a}_3)$, $p_8(\dot{a}_3)$ y $p_{13}(\dot{a}_3)$. De los demás coeficientes: a_2, e_2, l_2 y $\tilde{\omega}_2$ el primero se elimina inmediatamente, porque no contiene, según el teorema de Poisson, ningún término secular puro en t^2; pero los tres restantes factores e_2, l_2 y $\tilde{\omega}_2$ contienen términos seculares puros en t^2. Esto resulta más sencillaeinfachst aus den Bedingungsgleichungen (6), wonach zuerst :

mente de las ecuaciones de condición (6), donde primeramente

$$\dot{e}_2 = -\frac{\sqrt{1 - e^2}}{K\sqrt{a}}[e_{2a} \cdot \dot{a}_1 + e_{2e} \cdot \dot{e}_1 + e_{2l}\dot{l}_1 + e_{2\tilde{\omega}} \cdot \dot{\tilde{\omega}}_1],$$

und ganz analog in Bezug auf $\dot{l}_2$ und $\dot{\tilde{\omega}}_2$. Säkularglieder in t^2 gehen dann bezüglich e_2 nur aus den mit den Faktoren $\dot{e}_1$ und $\dot{\tilde{\omega}}_1$ behafteten Gliedern von $\dot{e}_2$ hervor, weil nur diese dir erforderlichen Säkularterme der Form t^1 und zugleich die Koeffizienten e_{2e} und $e_{2\tilde{\omega}}$ konstante Teile enthalten, sodaß die Integrale e_2, wie auch l_2 und $\tilde{\omega}_2$ rein-säkulare t^2-Glieder enthalten ; folglich sind also die Glieder $p_2(\dot{a}_3)$, $p_3(\dot{a}_3)$ und $p_4(\dot{a}_3)$ zu untersuchen. Zuerst betrachten wir :

y análogamente para $\dot{l}_2$ y $\dot{\tilde{\omega}}_2$. Resultan entonces en e_2 términos seculares en t^2, únicamente de los términos que en $\dot{e}_2$ contienen los factores $\dot{e}_1$ y $\dot{\tilde{\omega}}_1$, porque sólo estos poseen términos seculares de la forma t_1, a la vez que los coeficientes e_{2e} y $e_{2\tilde{\omega}}$ tienen términos constantes, luego las integrales e_2, l_2 y $\tilde{\omega}_2$ contienen términos seculares puros en t^2 y por tanto debemos investigar los términos $p_2(\dot{a}_3)$, $p_3(\dot{a}_3)$ y $p_4(\dot{a}_3)$. Consideremos primeramente

$$p_2(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R^1{}_{\varepsilon e} \cdot \dot{e}_2;$$

die in Betracht kommenden Koeffizienten lauten nun bei Potenzentwickelung nach e :

desarrollando los coeficientes según potencias de e resulta el primero :

$$e_{2e} = \frac{1}{e} R_{\tilde{\omega}e} - \frac{1}{e^2}(1 + e^2 + \ldots) R_{\tilde{\omega}} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4}e^2 + \ldots\right) R_{\varepsilon e} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}e^2 + \ldots\right) R_{\varepsilon}.$$

Die beiden letzten Glieder fallen weg, weil sie rein periodisch sind, während die beiden ersten Glieder auch die notwendigen Konstanten enthalten. Es ist nun zweckmäßig, zugleich den zweiten in $\dot{e}_2$ in Betracht kommenden Koeffizienten in Rücksicht zu ziehen :

De los dos últimos términos podemos prescindir, pues son periódicos puros, pero no, en cambio, de los dos primeros que contienen las constantes necesarias. Es conveniente considerar al mismo tiempo el segundo coeficiente de $\dot{e}_2$:

$$e_{2\tilde{\omega}} = \frac{1}{e} R_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}} + \frac{1}{2}e\left(1 + \frac{1}{4}e^2 + \ldots\right) R_{\varepsilon\tilde{\omega}}.$$

wo der zweite Term, weil rein periodisch, in Wegfall kommt.

donde el segundo término carece de interés por ser periódico puro.

Bringen wir nun den Säkularteil der Störungsfunktion unter der, wie wir sogleich sehen werden, notwendigen Berücksichtigung der Terme 4. Grades auf die bekannte Form von Laplace-Le Verrier, wobei die Koeffizienten A^i_p die Transcendenten von Laplace nebst ihren Ableitungen fixieren :

Consideremos ahora la parte secular de la función perturbadora, tomando en cuenta los términos de 4° grado lo cual es necesario como veremos, en la forma conocida de Laplace-Le Verrier, donde los coeficientes A^i_p representan las trascendentes de Laplace y sus derivadas :

$$R = k^2\Big[\frac{1}{2}A^0 + \frac{1}{4}(A^0_1 + A^0_2)(e^2 + e'^2) + \frac{3}{16}(A^0_3 + A^0_4)e^4$$

$$+ \frac{1}{8}(A^0_1 + 7A^0_2 + 12A^0_3 + 6A^0_4)e^2e'^2$$

$$+ \frac{3}{16}(A^0_1 + 3A^0_2 + 3A^0_3 + A^0_4)e'_4 + \frac{ee'}{2}(A^1_0 - A^1_1 - A^1_2)\cos(\tilde\omega' - \tilde\omega)$$

$$- \frac{e^3e'}{8}(2A^1_2 + 9A^1_3 + 6A^1_4)\cos(\tilde\omega' - \tilde\omega) + \frac{ee'^3}{8}(A^1_0 - A^1_1 - 11A^1_2 - 15A^1_3$$

$$- 6A^1_4)\cos(\tilde\omega' - \tilde\omega) + \frac{3}{16}e^2e'^2(A^2_0 - A^2_1 + A^2_2 + 4A^2_3 + 2A^2_4)\cos(2\tilde\omega' - 2\tilde\omega)\Big]$$

so wird bei Beschränkung von e_{2e} auf die Terme 2. Grades d. h. auf

Resulta así, limitándose a los términos de 2° grado,

$$e_{2e} = \frac{1}{e}R_{\tilde\omega e} - \frac{1}{e^2}R_{\tilde\omega} - R_{\tilde\omega},$$

und wenn noch auf die frühere Bezeichnung der Koeffizienten der Störungsfunktion Rücksicht genommen wird, indem $2(A^1_0 - A^1_1 - A^1_2) = F_0$ so wird :

y si ponemos como antes $2(A^1_0 - A^1_1 - A^1_2) = F_0$, se obtiene :

$$e_{2e} = k^2\Big[(-F_0 + 5f_4)\frac{ee'}{4}\sin(\tilde\omega' - \omega) + \frac{3}{8}e'^2 f_6 \sin(2\tilde\omega' - 2\tilde\omega)\Big].$$

Dabei haben die Koeffizienten f_4, f_5 und f_6 der 3 letzten Terme der Störungsfunktion die Bedeutung :

Los coeficientes f_4, f_5 y f_6 de los 3 últimos términos de la función perturbadora tienen los significados :

$$f_4 = 2A^1_2 + 9A^1_3 + 6A^1_4$$

$$f_5 = A^1_0 - A^1_1 - 11A^1_2 - 15A^1_3 - 6A^1_4$$

$$f_6 = A^2_0 - A^2_1 + A^2_2 + 4A^2_3 + 2A^2_4.$$

Aus der Darstellung oben von e_{2e} ersieht man also, daß der Koeffizient f_5 nicht mehr vorkommt, indem sich 2 Polglieder der Form $\frac{e'^3}{e}$ ergeben, die sich infolge absoluter Gleichheit, bei aber verschiedenen Vorzeichen, wegheben, sodaß e_{2e} frei von Polen ist. Analog erhält man :

En la representación anterior de $e_{2e'}$ el coeficiente f_5 no aparece ya, pues ha resultado ser factor de 2 términos con polo de la forma $\frac{e'^3}{e}$, iguales en valor absoluto y de distinto signo, de modo que e_{2e} carece de polos.

Análogamente resulta :

$$e_{2\omega} = -k^2\frac{e'}{4}F_0\cos(\tilde\omega' - \tilde\omega) + 3.\ \text{Grad.} + 5.\ \text{Grad. etc.}$$

frei von Polen. Folglich ergibt die Integration in Bezug auf e_2 mit Rücksicht darauf, daß $e_1 = \bar{e}_1 nt$ und $\tilde{\omega}_1 = \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e} nt$, wobei $\bar{e}_1$ wie $\bar{\tilde{\omega}}_1$ Terme 1. + 3. Grades, etc., sind:

libre de polos. Por consiguiente se otbiene integrando respecto de e_2 y considerando que $e_1 = \bar{e}_1 nt$ y $\tilde{\omega}_1 = \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e} nt$ donde $\bar{e}_1$ como $\bar{\tilde{\omega}}_1$ son término de 1er + 3er grado, etc.

$$e_2 = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}} \left\{ e_{2e} \cdot \bar{e}_1 + e_{2\tilde{\omega}} \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e} \right\} \frac{nt^2}{2}.$$

Da e_{2e} nach obiger Rechnung mindestens vom 2. Grade, aber $e_{2\tilde{\omega}}$ mindestens vom 1. Grade und zwar in e', so wird folglich $e_{2e}\bar{e}_1$ mindestens vom 3. Grade, während $e_{2\tilde{\omega}} \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e}$ einen Pol $e = 0$ hat. Zum Übergang auf $p_2(a_3)$ ist dann noch der Faktor $R_{\varepsilon e}$ zu berücksichtigen, der nach willkürlicher Wahl vom 0., oder 1., oder 2., ... Grade sein kann. Wird R so gewählt, daß $R_{\varepsilon e}$ vom 0. Grade wird, so bleibt der Pol $e = 0$ in a_3 erhalten, muß sich aber, wie schon früher bei den Polen der rein-säkularen t^2-Glieder, wegheben und zwar gegen den analogen Term in $p_8(a_3)$.

Ya que e_{2e} es, según el cálculo anterior, por lo menos de 2° grado, pero $e_{2\tilde{\omega}}$ por lo menos de 1er grado en e', resulta $e_{2e} \cdot \bar{e}_1$ al menos de 3er grado, en tanto que $e_{2\tilde{\omega}} \cdot \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e}$ tiene un polo $e = 0$. Para pasar a $p_2(a_3)$ hay que considerar aún el factor R_ε que puede elegirse arbitrariamente de grado 0, 1 ó 2, etc. Eligiendo R de modo que $R_{\varepsilon e}$ sea de grado 0, se mantiene en a_3 el polo $e = 0$, pero tiene que eliminarse como antes con los polos de los términos seculares puros en t^2, es decir, con los términos análogos de $p_8(a_3)$.

Ist $R_{\varepsilon e}$ vom 1. Grade in e', wenn nämlich R aus den Gliedern in F_i und G_i gewählt wird, so bleibt auch dann das Glied mit dem Pole $e = 0$ bestehen, hebt sich aber gegen das entsprechende Glied in $p_8(a_3)$ fort. Nur wenn $R_{\varepsilon e}$ mindestens vom 1. Grade in e, sodaß der Koeffizient e den Pol $e = 0$ aufhebt, so wird das entsprechende Glied in $a_3 : e_{2\tilde{\omega}}\bar{\tilde{\omega}}_1$ vom 2. Grade und der Form: $e'(\alpha e + \beta e')$ während das Polglied, falls $R_{\varepsilon e}$ vom 0. Grade, die Form erhält:

Si ahora es $R_{\varepsilon e}$ de 1er grado en e', o sea si R se elige de los términos de coeficientes F_i y G_i, existe aún el término con el polo $e = 0$, pero se destruye con el término correspondiente de $p_8(a_3)$. Cuando $R_{\varepsilon e}$ es por lo menos de 1er grado en e, de modo que el coeficiente e destruye el polo $e = 0$, el término correspondiente de $a_3 : e_{2\tilde{\omega}} \cdot \bar{\tilde{\omega}}_1$ es de 2° grado y de la forma: $e'(\alpha e + \beta e')$, mientras que el término con polo resulta de la forma:

$$e_{2\tilde{\omega}} \cdot \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e} = e' \cdot \frac{\alpha e + \beta e'}{e}. \qquad (a)$$

si $R_{\varepsilon e}$ es de grado 0.

Wir können uns hier nun nicht auf die Bemerkung beschränken, daß dieses Glied sich gegen ein entsprechendes Glied von $p_8(a_3)$ weghebt, sondern müssen untersuchen, ob nicht bei dieser Elimination der Polteile noch Reste positiven Grades übrigbleiben. Denn es ist:

No es suficiente limitarnos aquí a la observación de que este término se elimina con un término correspondiente de $p_8(a_3)$, sino que debemos investigar aún si la eliminación es completa o si quedan restos de grado positivo. Es

$$p_8(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} \cdot \frac{1}{2} R^1_{\varepsilon\bar{\omega}\bar{\omega}} \cdot (\tilde{\omega}_1)^2$$

sodaß, da $R_{\varepsilon\bar{\omega}\bar{\omega}}$ mindestens vom 1. Grade in e: entsteht:

de manera que, por ser $R_{\varepsilon\bar{\omega}\bar{\omega}}$ por lo menos de 1^er grado, resulta:

$$R_{\varepsilon\bar{\omega}\bar{\omega}}(\tilde{\omega}_1)^2 = \frac{\bar{\omega}^2_1}{e} = \frac{1}{e}(\alpha e + \beta e')^2. \tag{b}$$

Folglich hebt sich (a) gegen (b), abgesehen vom Vorzeichen, nur teilweise weg, wie aus der folgenden Zerlegung folgt:

Luego, prescindiendo del signo, (a) y (b) se eliminan sólo parcialmente, pues, por la descomposición

$$\frac{1}{e}(\alpha e + \beta e')^2 = \frac{\alpha e + \beta e'}{e}(\alpha e + \beta e') = (\alpha e + \beta e')\,\alpha + \beta\frac{e'}{e}(\alpha e + \beta e');$$

dann stimmt also der 2. Summand mit (a) überein, während der 1. Summand einen Rest fixiert, der vom 1. Grade der Exzentrizitäten ist, also von niedererem Grade als die bereits oben abgeleiteten Terme in $p_2(a_3)$, die vom 2. Grade waren. Mithin folgt hieraus, daß die Poisson-Glieder von a_3 der Form $t^2 \cdot \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} A$ mindestens von 1. Grade der Exzentrizitäten sein können. Um festzustellen, ob das gefundene Glied 1. Grades sich nicht noch gegen andere analoge Glieder wieder weghebt, ist einerseits die exakte explizite Form und andererseits die eventuelle Existenz weiterer Glieder 1. Grades in den übrigen Termen $p_i(a_3)$ abzuleiten. Erst dann könnte die Aufsuchung der Glieder 2. Grades fortgesetzt werden. Setzen wir dementsprechend zur Ableitung von $R_{\varepsilon e}$ in $p_2(\dot{a}_3)$:

se ve que el 2° sumando coincide con (a) y el primero da un resto de 1^er grado, es decir, de grado menor que el de los términos de $p_2(a_3)$ deducidos anteriormente, o sea del segundo. Luego resulta que los términos de Poisson de a_3 de la forma $t^2 \cdot \begin{smallmatrix}\cos\\ \text{sen}\end{smallmatrix} A$ pueden ser por lo menos de 1^er grado en las excentricidades. Para constatar, si el término hallado puede eliminarse con otros términos análogos, es menester por una parte deducir su forma exacta explícita, y por otra parte indagar la existencia eventual de otros términos de 1^er grado en los demás términos $p_i(a_3)$. Solo entonces podría proseguirse la búsqueda de los términos de 2° grado. Si ponemos, por tanto, para la deducción de $R_{\varepsilon e}$ de $p_2(\dot{a}_3)$:

$$R = k^2 \frac{e}{2} C_i \cos[il' - (i-1)l - \tilde{\omega}],$$

so wird mit Rücksicht auf den 2. Term in dem Ausdruck für e_2 oben:

resulta, considerando el 2° término de la expresión anterior de e_2:

$$p_2(\dot{a}_3) = +\frac{1}{8}\frac{k^2}{K^2}\sqrt{1-e^2}\,(i-1)\,nC_iF_i\frac{e'}{e}\bar{\omega}_1 \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\,t^2 \sin[il' - (i-1)l - \tilde{\omega}]$$

Andererseits erhält man mit demselben R zur Ableitung von $R_{\varepsilon\bar{\omega}\bar{\omega}}$ den folgenden Ausdruck für $p_8(\dot{a}_3)$:

Por otra parte se obtiene deduciendo $R_{\varepsilon\bar{\omega}\bar{\omega}}$ del mismo R, la expresión siguiente de $p_8(\dot{a}_3)$:

$$p_8(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K}\frac{1}{2}R^1_{\varepsilon\bar{\omega}\bar{\omega}} \cdot \bar{\omega}^2_1 = -\frac{1}{2}\frac{k^2}{K}(i-1)n^2C_i\frac{(\bar{\omega}_1)^2}{e}t^2 \sin[il' - (i-1)l - \bar{\omega}].$$

Da nun der Säkularteil $\bar{\omega}_1 = \frac{\bar{\omega}_1}{e} \cdot nt$, so wird : Ya que ahora la parte secular $\bar{\omega}_1 = \frac{\bar{\omega}_1}{e} \cdot nt$, resulta :

$$n\bar{\omega}_1 = \frac{e\bar{\omega}_1}{t} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}}R_e = \alpha e + \beta e',$$

wobei donde :

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{k^2}{K}\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}(A^0_1 + A^0_2), \qquad \beta = \frac{1}{4}\frac{k^2}{K}\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}F_0\cos(\bar{\omega}' - \bar{\omega}).$$

Folglich erhalten wir in $p_8(\dot{a}_3)$ den Faktor : Por consiguiente obtenemos en $p_8(\dot{a}_3)$ el factor :

$$\frac{n^2(\bar{\omega}_1)^2}{e} = \frac{n\bar{\omega}_1}{e}(\alpha e + \beta e') = \alpha\bar{\omega}_1 n + \beta\frac{e'}{e}\bar{\omega}_1 \cdot n$$

wo der 1. Summand der letzten Summe vom 1. Grade ist, während der 2. Summand das Polglied mit dem Pol $e = 0$ enthält. Folglich wird : donde el 1er término del último miembro es de 1er grado, en tanto que el segundo contiene el polo $e = 0$. Por tanto resulta :

$$p_8(\dot{a}_3) = -\frac{1}{2}\frac{k^2}{K}(i-1)C_i\left(\alpha\bar{\omega}_1 n + \beta\frac{e'}{e}\bar{\omega}_1 n\right)t^2\sin[il' - (i-1)l - \bar{\omega}]$$

oder bei Substitution von β zur Feststellung des Polgliedes : o por substitución de β, por fijar el término con polo :

$$p_8(\dot{a}_3) = -\frac{1}{8}\frac{k^4}{K^2}\sqrt{1-e^2}(i-1)nC_iF_0\frac{e'}{e}\bar{\omega}_1\cos(\bar{\omega}' - \bar{\omega})t\sin[il' - (i-1)l - \bar{\omega}]$$

sodaß dieser Term sich gegen den obigen Polterm von $p_2(\dot{a}_3)$ weghebt, während in $p_8(\dot{a}_3)$ im Gliede mit dem Faktor α noch ein Term 1. Grades übrig bleibt. Bei Substitution des Teiles $\alpha\bar{\omega}_1 n$ von $n^2(\bar{\omega}_1)^2$ und des entsprechenden Ausdruckes von α erhält man dann : de modo que este término se elimina con el término con polo anterior de $p_2(\dot{a}_3)$, mientras que en el término con el factor α de $p_8(\dot{a}_3)$ queda todavía un término de 1er grado. Substituyendo entonces la parte $\alpha\bar{\omega}_1$ de $n^2(\bar{\omega}_1)^2$ y la expresión correspondiente de α, se obtiene :

$$p_8(\dot{a}_3) = -\frac{1}{4}\frac{k^4}{K^2}\sqrt{1-e^2}C_i(i-1)(A^0_1 + A^0_2)\bar{\omega}_1 nt^2\sin(il' - (i-1)l - \bar{\omega})$$

sodaß die Integration, nachdem noch $\frac{k^4}{K^2} = \frac{a^3n^2}{(1+m)^2}$ gesetzt und für die Laplaceschen Koeffizienten die entsprechenden Abkürzungen eingeführt worden sind, ergibt : de modo que resulta por integración, substituyendo $\frac{k^4}{K^2} = \frac{a^3n^2}{(1+m)^2}$ y aplicando a los coeficientes de Laplace las abreviaciones correspondientes :

$$p_8(a_3) = +\frac{1}{4}a\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\frac{(i-1)n}{in' - (i-1)n}\bar{C}_i(\bar{A}^0_1 + \bar{A}^0_2)\bar{\omega}_1(nt)^2\cos[il' - (i-1)l - \bar{\omega}]$$

womit das Glied 1. Grades in $p_8(a_3)$ abgeleitet ist, da $\bar{\omega}_1 = \varkappa e + \beta e'$.

Da im Übrigen in keinem anderen Terme $p_i(a_3)$ außer in $p_8(a_3)$ der Faktor $(\bar{\omega}_1)^2$ auftritt, so muß in allen übrigen Gliedern ein totales Wegheben der Glieder mit dem Pole $e = 0$ stattfinden. Denn die weiteren Polglieder stammen allein noch aus den Termen:

con lo cual hemos obtenido el término de 1er grado, ya que $\bar{\omega}_1 = \varkappa e + \beta e'$.

Puesto que el factor $(\bar{\omega}_1)^2$ no aparece en ningún otro término $p_i(a_3)$, con excepción de $p_8(a_3)$, debe tener lugar una eliminación total de los términos con el polo $e = 0$. Pues los otros términos de polo resultan solo de estos:

$$p_4(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon\bar{\omega}} \cdot \dot{\bar{\omega}}_2 \quad \text{und} \quad p_{13}(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon e\bar{\omega}} \cdot e_1 \cdot \bar{\omega}_1.$$

Die in Betracht kommenden Terme in $\dot{\bar{\omega}}_2$ sind die folgenden:

Los términos a considerar en $\dot{\bar{\omega}}_2$ son los siguientes:

$$\dot{\bar{\omega}}_2 = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{K\sqrt{a}} \frac{1}{e} [\bar{\omega}_{2e} \cdot e_1 + \bar{\omega}_{2\bar{\omega}} \cdot \bar{\omega}_1],$$

worin zu substituieren ist:

donde hay que substituir:

$$\bar{\omega}_{2e} = R_{ee} - \frac{1}{e(1 - e^2)} R_e$$

und $\bar{\omega}_{2\bar{\omega}} = R_{e\bar{\omega}}$, sodaß hier nur die 1. Potenz von $(\dot{\bar{\omega}}_1)$ erscheint und deshalb in der Summe von $p_4(\dot{a}_3)$ und $p_{13}(\dot{a}_3)$ ein unmittelbares Wegheben der Terme, die in $\bar{\omega}_1$ den Pole $e = 0$ enthalten, stattfinden kann.

Es handelt sich aber weiter um die Frage, ob in dem schon behandelten mit einem Pol $e = 0$ behafteten Term $p_4(\dot{a}_3)$ und den übrigen Gliedern $p_i(\dot{a}_3)$ noch Glieder 1. Grades der Exzentrizitäten vorhanden sind.

y $\bar{\omega}_{2p} = R_{e\bar{\omega}}$, de modo que aparece aquí sólo la 1a potencia de $\dot{\bar{\omega}}_1$ y por tanto, en la suma de $p_4(\dot{a}_3)$ y $p_{13}(\dot{a}_3)$ la eliminación de los términos con polo es total.

Se trata ahora de establecer si el término con polo $e = 0$ ya tratado, es decir, $p_4(\dot{a}_3)$, y los otros términos $p_i(\dot{a}_3)$ contienen también términos de 1er grado en las excentricidades.

Zunächst ist in dem obigen Ausdruck für $p_4(\dot{a}_3)$ die Ableitung $R_{\varepsilon\bar{\omega}}$ wegen der Differentiation nach $\bar{\omega}$ mindestens vom 1. Grade, sodaß R entnehmbar ist aus:

Primeramente la derivada $R_{\varepsilon\bar{\omega}}$ de la expresión anterior de $p_4(\dot{a}_3)$ es por la derivación respecto de $\bar{\omega}$, por los menos de 1er grado, de manera que debemos tomar

$$R = k^2 C_i \frac{e}{2} \cos[il' - (i - 1)l - \bar{\omega}].$$

Den Koeffizienten $\dot{\bar{\omega}}_2$ bringen wir auf die Form:

Al coeficiente $\dot{\bar{\omega}}_2$ podemos darle la forma:

$$\dot{\bar{\omega}}_2 = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{K\sqrt{a}} \left[\left(\frac{1}{e} R_{ee} - \frac{1}{e^2} R_e - R_e\right) e_1 + \frac{1}{e} R_{e\bar{\omega}} \cdot \bar{\omega}_1\right].$$

woraus zuerst bei Betrachtung des 1. Gliedes allein auf Grund des oben gegebenen Säkularteils von R folgt, unter Substitution von $e_1 = \bar{e}_1\, nt$:

de donde sigue, considerando en primer lugar solo el 1er término de la parte secular dada anteriormente y substituyendo $e_1 = \bar{e}_1 \,.\, nt$:

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{k^2}{K} \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}} (A^0_1 + A^0_2) \frac{\bar{e}_1}{e} nt^2,$$

sodaß :

de manera que :

$$p_4(\tilde{a}_3) = -\frac{1}{4}\frac{k^2}{K}\sqrt{1-e^2}(i-1)\, C_i (A^0_1 + A^0_2)\, \bar{e}_1 nt^2 \cos[il' - (i-1)l - \tilde{\omega}]$$

d. h. man erhält bei Integration, da $\bar{e}_1$ vom 1. Grade, einen weiteren Term 1. Grades, der unter Umformung der Koeffizienten die Form annimmt :

es decir, se obtiene por integración, ya que $\bar{e}_1$ es de 1er grado, otro término de 1er grado, cuya forma es, previa transformación de los coeficientes :

$$p_4(a_3) = -\frac{1}{4} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \frac{(i-1)n}{in' - (i-1)n} \bar{C}_i \left(\bar{A}^0_1 + \bar{A}^0_2\right) \bar{e}_1 (nt)^2 \sin[il' - (i-1)l - \tilde{\omega}]$$

worin für $\bar{e}_1$ die Säkularstörung durch alle großen Planeten gesetzt werden darf.

donde $\bar{e}_1$ es la perturbación secular debida a todos los grandes planetas.

In dem 2. Term von $\dot{\tilde{\omega}}_2$: $\frac{1}{e^2} R_e \,.\, e_1$, tritt, da $R_e = \alpha e + \beta e'$ und e_1 proportional e' ist, stets $e'(\alpha e + \beta e')$ als Multiplikator auf, sodaß beim Übergang auf $p_4(a_3)$ entweder Polglieder oder Terme vom mindestens 2. Grade, niemals aber solche vom 1. Grade auftreten.

En el 2° término de $\dot{\tilde{\omega}}_2$: $\frac{1}{e^2} R_e \,.\, e_1$ aparece siempre $e'(\alpha e + \beta e')$ como factor, ya que $R_e = \alpha e + \beta e'$ y e_1 es proporcional a e', de modo que en $p_4(a_3)$ aparecen términos con polo, o términos de 2° grado por lo menos, pero nunca términos de 1er grado.

Aus dem 3. Term in $\dot{\tilde{\omega}}_2$: $R_e \,.\, e_1$ folgt aus demselben Grunde nur ein Term 2. Grades, sodaß deshalb in $p_4(a_3)$ durch das Hinzutreten des Faktors $R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$, der mindestens vom 1. Grade ist, mindestens ein Term 3. Grades entsteht.

Del 3er término de $\dot{\tilde{\omega}}_2$: $R_e \,.\, e_1$ resulta, por el mismo motivo, solo un término de 2° grado, de manera que $p_4(a_3)$ contiene, por el agregado del factor $R_{e\tilde{\omega}'}$ de 1er grado por lo menos, un término de 3er grado por lo menos.

Das 4. Glied in $\dot{\tilde{\omega}}_2$: $\frac{1}{e} R_{e\tilde{\omega}} \,.\, \tilde{\omega}_1$, führt, da $R_{e\tilde{\omega}}$ proportional e' ist, und da ferner

El 4° término de $\dot{\tilde{\omega}}_2$: $\frac{1}{e} R_{e\tilde{\omega}} \,.\, \tilde{\omega}_1$ origina en $p_4(a_3)$, agregándole el factor $R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$, proporcional a e_1, un término con polo, ya que $R_{e\tilde{\omega}}$ es proporcional a e' y además es

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{\alpha e + \beta e'}{e},$$

in $p_4(a_3)$ nach Hinzutreten des Faktors $R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$, proportional mindestens zu e_1, zu einem Polgliede, oder,

o por lo menos da origen a un término de segundo grado con el factor $e'(\alpha e + \beta e')$ en caso de que se wenn in $R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ das Glied proportional e^2 gewählt wird, um den Pol zu eliminieren, mindestens zu einem Term 2. Grades mit dem Faktor $e'(\alpha e + \beta e')$ d. h. auch hier sind keine weiteren Glieder 1. Grades möglich.

elija en $R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ el término proporcional a e^2, para eliminar el polo. Luego tampoco aquí son posibles más términos de primer grado.

Untersuchen wir jetzt weiter die übrigen Terme $p_i(\dot{a}_3)$, soweit sie zu Poisson-Gliedern der Form $t^2 \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} A$ Anlaß geben können, so ist zuerst

Investiguemos ahora los términos de Poisson de la forma $t^2 \begin{smallmatrix}\cos\\ \mathrm{sen}\end{smallmatrix} A$ en los demás $p_i(\dot{a}_3)$, considerando primeramente el término :

$$p_2(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon e} \cdot e_2$$

zu betrachten, womit wir bereits oben begonnen haben. Da

que ya habíamos empezado a tratar.

Ya que

$$\dot{e}_2 = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}} \{ e_{2e} \cdot e_1 + e_{2\tilde{\omega}} \cdot \tilde{\omega}_1 \}$$

und der erste Summand $e_{2e} \cdot e_1$ vom mindestens 3. Grade ist, wie oben gezeigt wurde, so bleibt noch zu untersuchen, ob der 2. Term : $e_{2\tilde{\omega}} \cdot \tilde{\omega}_1$, wenn wir noch in $p_2(a_3)$ von dem Faktor $R_{\varepsilon e}$, der mindestens vom 0. Grade ist, absehen, vom 1. Grade sein kann. Da $e_{2\tilde{\omega}}$ nach der oben gegebenen Definition mindestens vom 1. Grade, falls nämlich der Säkularteil $\frac{1}{e} R_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$ vom Mindestgrade 1 in e', und ferner $\tilde{\omega}_1 = \frac{\alpha e + \beta e'}{e}$ substituiert wird, so entsteht ein Polterm; dieser hebt sich anderweitig fort, wenn nicht $R_{\varepsilon e} = 1$. Grad gewählt wird, sodaß alsdann in $p_4(a_3)$ ein Term $e'(\alpha e + \beta e')$, d. h. ein Term mindestens vom 2. Grade erscheint, aber kein Term 1. Grades.

y el primer sumando $e_{2e} \cdot e_1$ es por lo meno de 3^er^ grado, como hemos probado antes, queda todavía por investigar. si el término $e_{2\tilde{\omega}} \cdot \tilde{\omega}_1$, prescindiendo en $p_2(a_3)$ del factor $R_{\varepsilon e}$ que es por lo menos de grado 0, puede ser de 1^er^ grado. Ya que $e_{2\tilde{\omega}}$, según la definición anterior es al menos de 1^er^ grado, en caso de que la parte secular $\frac{1}{e} R_{\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$ es al menos de grado 1 en e', y se pone además $\tilde{\omega}_1 = \frac{\alpha e + \beta e'}{e}$, se origina un término con polo. Este se elimina con otro término, si no se elige $R_{\varepsilon e}$ de 1^er^ grado, de modo que resulta en $p_4(a_3)$ un término $e'(\alpha e + \beta e')$, es decir un término de 2° grado al menos, pero ninguno de 1^er^ grado.

Der nächste Hauptterm lautet :

El próximo término principal es :

$$p_3(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon\varepsilon} \cdot l_2,$$

wo der Faktor $\dot{l}_2$ einen Säkularterm in t enthält, d. h. l_2 einen solchen in t^2, da $\dot{l}_2$ nach (5) in Bezug auf die in Betracht kommenden Teile zusammengesetzt ist aus :

donde el factor $\dot{l}_2$ contiene un término secular en t, es decir, l_2 contiene un término en t^2, ya que $\dot{l}_2$ está compuesto, según (5), prescindiendo de las partes innecesarias, de esta forma :

$$\dot{l}_2 = \varepsilon_{2e} e_1 + \varepsilon_{2\tilde{\omega}} \cdot \tilde{\omega}_1,$$

wobei nach Entwickelung nach Potenzen von e entsteht :

donde los coeficientes desarrollados en potencias de e, son :

$$\varepsilon_{2e} = -\frac{2\sqrt{a}}{K} R_{ae} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{2K\sqrt{a}}\left[e\left(1+\frac{1}{4}e^2\right)R_{ee} + \left(1-\frac{1}{4}e^2\right)R_e\right]$$

Ferner ist :

Además es :

$$\varepsilon_{2\tilde{\omega}} = -\frac{2\sqrt{a}}{K} R_{a\tilde{\omega}} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{2K\sqrt{a}}\, e\left(1+\frac{1}{4}e^2\right)R_{e\tilde{\omega}}.$$

Da in ε_{2e} und $\varepsilon_{2\tilde{\omega}}$ nur die säkularen Teile zu bilden sind, sind alle Glieder rechter Hand, weil sie von den Ableitungen nach ε unabhängig sind, in Rücksicht zu ziehen. Da R_{ae} mindestens vom 1. Grade und zwar von der Form $\gamma e + \delta e'$, ferner R_{ee} von 0. Grade und R_e vom 1. Grade : $\alpha e + \beta e'$, so ist, aus der Definition von ε_{2e} ersichtlich, daß ε_{2e} mindestens vom 1. Grade und deshalb $\varepsilon_{2e} \,.\, e_1$ mindestens vom 2. Grade in der Form : $e'(pe + qe')$, während der Faktor $R_{\varepsilon\varepsilon}$ in $p_3(\dot{a}_3)$ vom 0. oder 1. oder 2. Grade etc., sein kann. Folglich entstehen durch den 1. Term von l_2 nach der Integration t^2-Glieder, aber mindestens vom 2. Grade, also Poisson-Glieder in t^2 in $p_3(\dot{a}_3)$. In Bezug auf den 2. Summanden in l_2 folgt, daß $\varepsilon_{2\tilde{\omega}}$, weil $R_{a\tilde{\omega}}$ mindesvom 2. Grade von der Form $ee' \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$, im Produkt mit $\tilde{\omega}_1$ ergibt :

Ya que hay que formar solamente las partes seculares de ε_{2e} y $\varepsilon_{2\tilde{\omega}}$, debemos considerar todos los términos del 2° miembro, porque todos son independientes de las derivadas respecto de ε. Ya que R_{ae} es al menos de 1$^{\text{er}}$ grado, de la forma $\gamma e + \delta e'$, R_{ee} de grado 0 y R_e de 1$^{\text{er}}$ grado de la forma $\alpha e + \beta e'$, es evidente, por la definición de ε_{2e}, que ε_{2e} es de 1$^{\text{er}}$ grado por lo menos, y por tanto $\varepsilon_{2e} \,.\, e_1$ es al menos de 2° y de la forma : $e'(pe + qe')$; mientras que el factor $R_{\varepsilon\varepsilon}$ de $p_3(\dot{a}_3)$ puede ser de grado 0, 1, 2, etc. Por consiguiente se originan, integrando, términos en t^2 por el 1$^{\text{er}}$ término de l_2, pero al menos de 2° grado ; luego términos de Poisson en t^2 en $p_3(\dot{a}_3)$. Respecto del segundo sumando de l_2 resulta, por ser $R_{a\tilde{\omega}}$ al menos de segundo grado, de la forma : $ee' \operatorname{sen}(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$, el producto de $\varepsilon_{2\tilde{\omega}}$ por $\tilde{\omega}_1$:

$$\varepsilon_{2\tilde{\omega}} \cdot \tilde{\omega}_1 = \bar{\tilde{\omega}}_1 e' = (\alpha e + \beta e') \,.\, e' = 2.\ \text{Grad},$$

sodaß auch hier kein Term 1. Grades entsteht.

es decir, que tampoco aparecen aquí términos de 1$^{\text{er}}$ grado.

Da $p_4(\dot{a}_3)$ schon behandelt worden ist, folgt als nächstes zu betrachtendes Glied :

Ya que $p_4(\dot{a}_3)$ ha sido tratado, el próximo término a considerar es :

$$p_6(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} \cdot \frac{1}{2} R_{\varepsilon ee} \cdot (e_1)^2, \qquad \text{wo} \qquad (e_1)^2 = (\bar{e}_1)^2 (nt)^2,$$

sodaß direkt der Poisson-Term $t^2 . \sin A$ in $p_6(\dot{a}_3)$ erhalten wird, und zwar behaftet mit dem Faktor e'_2, weil e_1 in erster Näherung e' und ferner den Exzentrizitäten aller anderen störenden Planeten linear

de modo que resulta directamente el término de Poisson : $t^2 . \operatorname{sen} A$ de $p_6(\dot{a}_3)$, afectado por el factor e'^2, porque e_1 en la aproximación es proporcional a e' y a las excentricidades de todos demás planetas proportional ist; ferner ist $R_{\varepsilon ee}$ zuerst vom o. Grade wählbar, sodaß folglich keine Glieder 1. Grades in $p_6(a_3)$ existieren.

Der nächste Hauptterm

$$p_7(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K}\frac{1}{2} R_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}(l_1(^2$$

enthält keine Poisson-Glieder der gesuchten Form; ferner ist der dann folgende Term $p_8(\dot{a}_3)$ bereits untersucht worden, sodaß wir sogleich zum letzten in Betracht kommenden Term übergehen können:

$$p_{13}(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon e\tilde{\omega}} \cdot e_1 \cdot \tilde{\omega}_1;$$

da $e_1\tilde{\omega}_1 = \bar{e}_1 \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e}(nt)^2$ ist, so entstehen bei Kombination mit $R_{\varepsilon e\tilde{\omega}}$ Polglied, falls $R_{\varepsilon e\tilde{\omega}}$ vom o. Grade wird, durch Entnahme aus den Termen 1. Grades von R; diese Terme heben sich aber in $p_4(a_3)$ gegen die entsprechenden korrespondierenden Glieder weg. Wird $R_{\varepsilon e\tilde{\omega}}$ aber vom 1. Grade in e gewählt, so entstehen in $p_{13}(a_3)$ Glieder der Form: $e_1\tilde{\omega}_1$ d. h. $e'(\varkappa e + \beta e')$, die also mindestens vom 2. Grade sind.

Folglich verbleiben die Glieder 1. Grades in $p_4(a_3)$ und $p_8(a_3)$ als die einzigen Terme niedrigsten d. h. 1. Grades der Poisson-Form: $t^2 \cdot \begin{smallmatrix}\cos\\ \cdot\\ \sin\end{smallmatrix} A$ in Bezug auf die 3. Ordnung der störenden Massen.

§ 2. Der Einfluß der kombinierten und der gegenseitigen Störungen der großen Planeten auf die Säkularbeschleunigung a_3.

Die Differentialgleichungen für a_3 auf Grund der genannten Störungen der großen Planeten sind dieselben wie früher in Teil I, §. 4. Die ersten Grundformeln sind also:

perturbadores. Se puede elegir primeramente $R_{\varepsilon ee}$ de grado o, de modo que nó existen términos de 1er grado en $p_6(a_3)$.

El próximo término principal:

no contiene ningún término de Poisson de la forma buscada y el término siguiente $p_8(\dot{a}_3)$ ya ha sido investigado, de manera que podemos pasar a considerar en seguida el último término:

ya que $e_1 \cdot \tilde{\omega}_1 = \bar{e}_1 \cdot \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e}(nt)^2$, resultan por combinación con $R_{\varepsilon e\tilde{\omega}}$ términos con polo, si $R_{\varepsilon e\tilde{\omega}}$ es de grado o, o sea si se consideran los términos de 1er grado de R; pero estos términos se eliminan con los términos correspondientes de $p_4(a_3)$. Tomando $R_{\varepsilon e\tilde{\omega}}$ de 1er grado en e, resultan en $p_{13}(a_3)$ términos de la forma: $e_1\tilde{\omega}_1$, es decir, $e'(\varkappa e + \beta e')$, luego por lo menos de 2° grado. Por consiguiente los términos que quedan de $p_4(a_3)$ y $p_8(a_3)$ son los únicos términos de grado más bajo (primero), de la forma de Poisson: $t^2 \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} A$, en el 3er orden de las masas perturbadoras.

§ 2. La influencia de las perturbaciones combinadas y mutuas de los grandes planetas sobre la aceleración secular a_3.

Las ecuaciones diferenciales de a_3 referentes a las perturbaciones mencionadas de los grandes planetas son las mismas que las anteriores de la parte I, § 4. Las primeras fórmulas fundamentales son, por tanto:

$$(1) \qquad p_1(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R^1_{\varepsilon a} \cdot a_2, \qquad p_2(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R_{\varepsilon e} \cdot e_2, \text{ etc.}, \qquad (2)$$

wo jetzt in die Koeffizienten a_2, e_2, l_2 und $\tilde{\omega}_2$ die von Saturn, etc., abhängenden Störungen von m wie auch die gegenseitigen Störungen aller großen Planeten einzuführen sind, während die nur von Jupiter abhängenden Faktoren : $R^1_{\varepsilon a}$, $R^1_{\varepsilon e}$, etc., erhalten bleiben, wodurch also eine Kombination der Störungen eintritt. Unsere Aufgabe ist dann, unter der genannten Voraussetzung in a_2, e_2, etc., bis $e_1 \cdot \tilde{\omega}_1$ die Säkularstörungen in t^2 zu ermitteln, damit dann bei Integration der Produkte von a_2, e_2, etc., mit den Ableitungen $R^1_{\varepsilon a}$, $R^1_{\varepsilon e}$, etc., die gesuchten Poisson-Terme entstehen können. Zuerst ist dann im Falle :

hay que introducir en los coeficientes a_2, e_2, l_2 y $\tilde{\omega}_2$ las perturbaciones de m dependientes de Saturno, etc., como asimismo las perturbaciones mutuas de todos los grandes planetas, mientras que los factores $R^1_{\varepsilon a}$, $R^1_{\varepsilon e}$, etc. dependientes sólo de Júpiter, se mantienen. Se trata pues de una combinación de perturbaciones.

Nuestra tarea consiste entonces en deducir en a_2, e_2, etc., hasta $e_1\tilde{\omega}_1$, en la hipótesis precedente, las perturbaciones seculares en t^2, a fin de que puedan originarse, integrando los productos de a_2, e_2, etc., por las derivadas $R^1_{\varepsilon a}$, $R^1_{\varepsilon e}$, etc., los términos de Poisson buscados.

Primeramente tenemos el caso :

$$p_1(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K}\{a^2_{2e}e_1 + a^2_{2\tilde{\omega}}\cdot\tilde{\omega}_1 + a^1_{2e'}e'_1 + a^1_{2\tilde{\omega}'}\tilde{\omega}'_1 + a_{2e''}e''_1 + a^2_{2\tilde{\omega}''}\cdot\tilde{\omega}''_1\}. \qquad (1)$$

Da nun in der Klammer die Koeffizienten a^2_{2e}, $a^2_{2\tilde{\omega}}$, etc., infolge der Abhängigkeit von der Länge ε, gemäß den Definitionen ($6a$) in Teil I, nur rein-periodische Glieder sind, so enthält $\dot{a}_2$, nachdem e_1, $\tilde{\omega}_1$, e'_1, $\tilde{\omega}'_1$, etc., durch ihre säkularen Teile ersetzt sind und Integration stattgefunden hat, stets nur Glieder der gemischt-säkularen Form $t^1 \cdot {\sin \atop \cos} A$, nicht aber von der rein-säkularen Form t^2; also können auch in dem Anteil $p_1(a_2)$ keine t^2 Glieder auftreten, also auch in a_3 keine Poisson-Glieder der genannten Form.

Ya que los coeficientes a^2_{2e}, $a^2_{2\tilde{\omega}}$, etc., del paréntesis, son siempre términos periódicos puros, por la dependencia de la longitud ε, según las definiciones ($6a$), Parte I, a_2 contiene, previa substitución de e_1, $\tilde{\omega}_1$, e'_1, $\tilde{\omega}'_1$, etc., por sus partes seculares e integración, solamente términos de la forma secular mixta $t \; {\text{sen} \atop \cos} A$, pero no de la forma secular pura en t^2; por consiguiente no pueden aparecer en la parte $p_1(a_2)$ ningún término en t^2, y por consiguiente tampoco en a_3, términos de Poisson de la forma mencionada.

Dagegen kann das 2. Glied unserer Gruppe :

Por el contrario, el 2° término de nuestro grupo :

$$p_2(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R^1_{\varepsilon e}\cdot e_2, \qquad (2)$$

wo

donde

$$p(\dot{e}_2) = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}}\begin{bmatrix} e^2_{2e}e_1 + e^2_{2\tilde{\omega}}\cdot\tilde{\omega}_1 \\ + e^1_{2e'}e'_1 + e^2_{2\tilde{\omega}'}\cdot\tilde{\omega}'_1 \\ + e^2_{2e''}\cdot e''_1 + e^2_{2\tilde{\omega}''}\tilde{\omega}''_1 \end{bmatrix}$$

zu rein-säkularen Termen t^1 führen, weil die Koeffizienten e^2_{2e}, etc., alle neben periodischen auch konstante Teile enthalten, denn es ist :

produce términos seculares puros en t^1, porque todos los coeficientes e^2_{2e}, etc., contienen, aparte de términos periódicos, partes constantes, pues es :

$$e^2{}_{2e} = \frac{1}{e} R^2{}_{\tilde\omega e} - \frac{1}{e(1-e^2)} R^2{}_{\tilde\omega}$$

$$e^2{}_{2\tilde\omega} = \frac{1}{e} R^2{}_{\tilde\omega\tilde\omega}$$

sodaß, R^2 entsprechenden, auf Grund der früheren Darstellung in Bezug auf R^1:

de modo que, si R^2 se deduce de la representación anterior de R^1, resulta:

$$e_{2e} = k^2 \left\{ \left(-\frac{1}{4} ee''F''_0 + \frac{5}{4} ee''f''_4 \right) \sin(\tilde\omega'' - \tilde\omega) + \frac{3}{8} e''^2 f_6 \sin(2\tilde\omega'' - 2\tilde\omega) \right\}$$

$$e_{2\tilde\omega} = -k^2 \frac{1}{4} e''F''_0 \cos(\tilde\omega'' - \tilde\omega).$$

Ferner erhält man für die säkularen Teile der nächsten Koeffizienten:

Además se obtiene, como partes seculares de los coeficiententes siguientes:

$$e^1{}_{2e'} = \frac{1}{e} R^1{}_{\tilde\omega e'} = -k^2 F_0 \sin(\tilde\omega' - \tilde\omega)$$

$$e^1{}_{2\tilde\omega''} = \frac{1}{e} R^1{}_{\tilde\omega\tilde\omega'} = +\frac{1}{4} k^2 e' F_0 \cos(\tilde\omega' - \tilde\omega).$$

Die zugehörigen Faktoren, von denen nur die säkularen Teile zu berücksichtigen sind, erhalten die Form:

Los factores correspondientes, de los cuales solo solo debemos considerar las partes seculares, resultan de la forma:

$$e'_1 = \bar e'_1 n't, \qquad \tilde\omega'_1 = \frac{\bar{\tilde\omega}'_1}{e'} \cdot n't$$

$$e''_1 = \bar e''_1 n''t, \qquad \tilde\omega''_1 = \frac{\bar{\tilde\omega}''_1}{e''} \cdot n''t$$

während

mientras que:

$$e^2{}_{2e''} = -\frac{1}{4} k^2 F''_0 \sin(\tilde\omega'' - \tilde\omega) \qquad e^2{}_{2\tilde\omega''} = +\frac{1}{4} k^2 e'' F''_0 \cos(\tilde\omega'' - \tilde\omega).$$

Alle Koeffizienten $e^2{}_{2e}$, $e^2{}_{2\tilde\omega}$, etc., sind frei von Polen $e = 0$, während $\tilde\omega_1$, $\tilde\omega'_1$, etc., mit den Polen $e = e' = e'' = 0$ behaftet sind. Zur Vermeidung der entsprechenden Pole, ist deshalb R^1 so zu wählen, daß die Funktion $R^1{}_{\varepsilon e}$ den Faktor e enthält, also R^1 vom 2. Grade ist, während in den übrigen Fällen der 1. Grad genügt, also:

Todos los coeficientes $e^2{}_{2e}$, $e^2{}_{2\tilde\omega}$, etc., carecen de polos $e = 0$, mientras que $\tilde\omega_1$, $\tilde\omega'_1$, etc., están afectados por los polos $e = e' = e'' = 0$. Para evitar los polos correspondientes, hay que eligir R^1, de modo que la función $R^1{}_{\varepsilon e}$ contenga el factor e, por consiguiente que R^1 sea de 2° grado, mientras que en los demás casos basta el primero, luego:

$$R^1 = k^2 \frac{e}{2} C_i \cos[il' - (i-1)l - \tilde\omega],$$

dagegen in den Fällen eines Poles :

y en los casos de un polo :

$$R^1 = k^2 \left\{ \frac{1}{4} e^2 E_i \cos[il' - (i-2)l - 2\tilde{\omega}] + \frac{1}{4} e^2 B^i \cos[i(l'-l)] \right.$$

Folglich ergibt sich in Bezug auf die Terme niedrigsten Grades von $p_2(a_3)$ das folgende Bild für die Verteilung des entsprechenden Grades jedes Summanden von $p(\dot{e}_2)$:

Por tanto se obtiene para los términos de grado más bajo de $p_2(a_3)$ las siguientes expresiones de repartición del grado correspondiente de cada sumando de $p(\dot{e}_2)$:

$$(1) \qquad [R^1{}_{\varepsilon e} \cdot e^2{}_{\varepsilon e} \cdot e_1] = 0 + 2 + 1 = 3.\ \text{Grad}$$

$$(2) \qquad [R^1{}_{\varepsilon e} \cdot e^2{}_{2\tilde{\omega}} \cdot \tilde{\omega}_1] = (e)^1 + (e'')^1 + 0 \left(\frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e}\right) = 2.\ \text{Grad}\,(e''\bar{\tilde{\omega}}_1)$$

$$(3) \qquad [R^1{}_{\varepsilon e} \cdot e_{2e'} \cdot e'_1] = 0 + 0 + 1\,(e'') = 1.\ \text{»} \quad (e'')$$

$$(4) \qquad [R^1{}_{\varepsilon e} \cdot e^1{}_{2\tilde{\omega}'} \cdot \tilde{\omega}'_1] = 0 + 1\,(e') + 0\left(\frac{\bar{\tilde{\omega}}'_1}{e'}\right) = 1.\ \text{»} \quad (\bar{\tilde{\omega}}'_1)$$

$$(5) \qquad [R^1{}_{\varepsilon e} \cdot e^2{}_{2e''} \cdot e''_1] = 0 + 0 + 1\,(e') = 1.\ \text{»} \quad (e')$$

$$(6) \qquad [R^1{}_{\varepsilon e}, e^2{}_{2\tilde{\omega}''} \cdot \tilde{\omega}''_1] = 0 + 1\,(e'') + 0\left(\frac{\bar{\tilde{\omega}}''_1}{e''}\right) = 1.\ \text{»} \quad (\bar{\tilde{\omega}}''_1)$$

Folglich lauten die Glieder niedrigsten d. h. 1. Grades wie folgt :

Por consiguiente los términos de grado más bajo, e. d. primero, son :

$$\begin{aligned} p_2(a_3) = {} & + \frac{1}{4} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \bar{C}_i (i-1)(nl)^2 \cos[il - (i-1)l - \tilde{\omega}] \Big\} - \bar{F}_0 \bar{e}'_1 \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \\ & + \frac{n'}{in' - (i-1)n} + \bar{F}_0 \bar{\tilde{\omega}}'_1 \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \frac{n'}{in' - (i-1)n} - F''_0 e''_1 \sin(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \frac{n''}{in' - (i-1)n} \\ & + \bar{F}''_0 \bar{\tilde{\omega}}''_1 \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \frac{n''}{in' - (i-1)n} \Big\}. \end{aligned}$$

Der nächste Hauptterm ist dann der folgende :

El próximo término principal es :

$$p_3(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R^1{}_{\varepsilon\varepsilon} \cdot l_2,$$

wo $l_2 = \varepsilon_2 + \rho_2$ der Differentialgleichung genügt :

donde $l_2 = \varepsilon_2 + \rho_2$ satisface la ecuación diferencial :

$$p(\dot{l}_2) = \varepsilon^2{}_{2e} \cdot e_1 + \varepsilon^2{}_{2\tilde{\omega}} \cdot \tilde{\omega}_1 + \varepsilon^1{}_{2e'} \cdot e'_1 + \varepsilon^1{}_{2\tilde{\omega}'} \ \tilde{\omega}'_1 + \varepsilon^2{}_{2e''} \cdot e_1'' + \varepsilon^2{}_{2\tilde{\omega}''} \cdot \tilde{\omega}''_1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{a} a_2.$$

Die Koeffizienten $\varepsilon^2{}_{2e'}$ ... sind dieselben wie früher bei der Aufsuchung des kombinierten, aber rein-

Los coeficientes $\varepsilon^2{}_{2e}$, etc., son los mismos del caso en que buscábamos los términos combinados, pero säkularen t^2-Glieder von a_3, nur sind jetzt die konstanten Teile derselben Koeffizienten zu bestimmen, um nunmehr die entsprechenden gemischt-säkularen Terme von a_3 zu erhalten. Substituiert man in die einzelnen Teile der rechten Seite von $p(\dot{l}_2)$ den säkularen Teil, so erhält man für jedes Glied von $\dot{l}_2$ den folgenden Grad in Bezug auf die Exzentrizitäten:

seculares puros en t^2 de a_3, sólo que ahora debemos deducir las partes constantes de los mismos coeficientes para obtener los correspondientes términos seculares mixtos de a_3. Reemplazando cada término del segundo miembro de $p(\dot{l}_2)$ por su parte secular se obtiene para cada término de $\dot{l}_2$ el grado siguiente en las excentricidades :

1.	Term, Faktor	e_1,	entsprechend	des früheren analogen	$(3a)$:	Grad	$= 2$
2.	»	$\tilde{\omega}_1$,	»	»	$(3b)$:	»	$= 2$
3.	»	e'_1,	»	»	$(3c)$:	»	$= 2$
4.	»	$\tilde{\omega}'_1$,	»	»	$(3d)$:	»	$= 2$
5.	»	e''_1,	»	»	$(3e)$:	»	$= 2$
6.	»	$\tilde{\omega}''_1$,	»	»	$(3f)$:	»	$= 2$

Der 7. Term in a_2 ist nach dem Theorem von Poisson frei von rein-säkularen t^1-Gliedern.

Die für $p_3(a_3)$ sich ergebenden t^2-Poisson-Glieder sind also allgemein alle vom mindestens 2. Grade und fallen deshalb gegen die vom 1. Grade fort.

Der nächste Hauptterm lautet :

El 7° término con el factor a_2, carece según el teorema de Poisson, de términos seculares puros en t^1.

Luego los términos de Poisson en t^2 de $p_3(a_3)$ son, en general, de 2° grado por lo menos y puede por tanto, despreciarse.

El próximo término principal es :

$$p_4(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}} \cdot \tilde{\omega}_2, \tag{4}$$

wo jetzt :

donde ahora

$$p(\dot{\tilde{\omega}}_2) = \tilde{\omega}^2{}_{2e} \cdot e_1 + \tilde{\omega}^2{}_{2\tilde{\omega}} \cdot \tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}^1{}_{2e'} \cdot e'_1 + \tilde{\omega}^1{}_{2\tilde{\omega}'} \cdot \tilde{\omega}'_1 + \tilde{\omega}^2{}_{2e''} \cdot e''_1 + \tilde{\omega}^2{}_{2e''} \cdot \tilde{\omega}''_1.$$

In Analogie zu dem Falle $p_4(a_3)$ in § 1 (Teil II) ergibt zuerst in Bezug auf die beiden ersten Glieder (Faktoren e_1 und $\tilde{\omega}_1$) nur das 1. Glied einen Term 1. Grades in a_3. Deshalb wird :

Análogamente al caso $p_4(a_3)$, § 1 de esta parte, resulta que de los dos primeros términos (factor e_1 y $\tilde{\omega}_1$), sólo el primero produce un término de 1^er grado en a_3. Luego es :

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{k^2}{K} \cdot \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} [(A^0{}_1)'' + (A^0{}_2)''] \bar{e}_1 n t^2$$

sodaß, wenn $R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ aus

de manera que, tomando $R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ de

$$R^1 = k^2 \frac{e}{2} C_i \cos [il' - (i-1)l - \tilde{\omega}]$$

entnommen wird, nach Integration folgt :

se obtiene, previa integración :

$$p_4(a_3) = -\frac{1}{4}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\overline{C}_i\,\frac{(i-1)\,n}{in'-(i-1)\,n}\,[(A^0{}_1)'' + (A^0{}_2)'']\,\bar{e}_1\,(nt)^2 \sin[il' - (i-1)\,l - \tilde{\omega}]. \qquad ((4a)\ \text{u.}\ (4b))$$

Der nächste Teil-Term von (4) beruht auf:

El próximo término parcial de (4) se basa en la expresión:

$$p(\dot{\tilde{\omega}}_2) = \tilde{\omega}^1{}_{2e'} \,.\, e'_1, \qquad (4c)$$

wo

donde

$$\tilde{\omega}^1{}_{2e'} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}}\cdot\frac{1}{e}\,R^1{}_{ee'}.$$

Folglich ist a_3, da $\frac{1}{e}\,R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ mindestens vom Grade 0, vom Grade des Produktes $R^1{}_{ee'} \,.\, e'_1$, also wegen des Faktors e'_1 mindestens vom 1. Grade. Da

Ya que $\frac{1}{e}\,R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ es al menos de grado 0, a_3 resulta del grado del producto $R^1{}_{ee'}e'_1$, es decir, por el factor e'_1, por lo menos de 1er grado. Ya que

$$R^1{}_{ee'} = \frac{1}{4}\,k^2 F_0 \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}),$$

so ergibt sich, wenn $R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ wieder aus demselben R^1 wie im Falle (4a) entnommen wird:

resulta, si volvemos a tomar $R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ del mismo R^1 que en el caso (4a):

$$p(\dot{\tilde{\omega}}_2) = \frac{1}{8}\frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}}\cdot\frac{k^2}{K}\,F_0 \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\,\bar{e}'_1 n' t^2,$$

also

por consiguiente:

$$p_4(a_3) = -\frac{1}{8}\,a\,\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\,\overline{C}_i \overline{F}_0 \bar{e}'_1 \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})\,\frac{(i-1)\,n'}{in'-(i-1)\,n}\,(nt)^2 \sin[il' - (i-1)\,l - \tilde{\omega}].$$

Der folgende Teil-Term wird dargestellt durch:

El siguiente término parcial está representado por:

$$(4d) \qquad p(\dot{\tilde{\omega}}_2) = \tilde{\omega}^1{}_{2\tilde{\omega}'} \,.\, \tilde{\omega}'_1, \qquad \text{wo} \qquad \tilde{\omega}^1{}_{2\tilde{\omega}'} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}}\cdot\frac{1}{e}\,R^1{}_{e\tilde{\omega}},$$

Der Nenner e in $\tilde{\omega}^1{}_{2\tilde{\omega}'}$ fällt in a_3 wieder weg infolge des Faktors $R_{\varepsilon\tilde{\omega}'}$ sodaß der Grad von a_3 bestimmt wird durch das Produkt: $R^1{}_{e\tilde{\omega}'} \,.\, \tilde{\omega}'_1$. Da $\tilde{\omega}'_1 = \frac{\overline{\tilde{\omega}}'_1}{e'}\,n' t$, andererseits aber $R^1{}_{e\tilde{\omega}'}$ stets mindestens mit dem Faktor $(e')^1$ behaftet ist, so fällt der Pol e' von $\tilde{\omega}'_1$ immer fort, und a_3 wird vom 1. Grade, weil $\overline{\tilde{\omega}}'_1$

El denominador e de $\tilde{\omega}^1{}_{2\tilde{\omega}'}$ se elimina en a_3 por el factor $R_{\varepsilon\omega}$, de modo que el grado de a_3 está determinado por el producto: $R^1{}_{e\tilde{\omega}'}\tilde{\omega}_1'$. Ya que $\tilde{\omega}_1' = \frac{\overline{\tilde{\omega}}_1'}{e}\,nt$, y por otra parte, $R^1{}_{e\tilde{\omega}'}$ está afectado siempre por el factor $(e')^1$ al menos, el polo e' de $\tilde{\omega}_1'$ se elimina y a_3 resulta de 1er grado, pues $\overline{\tilde{\omega}}_1'$ es siempre de 1°

mindestens vom 1. Grade ist : $\bar{\tilde{\omega}}'_1 = \alpha' e' + \beta' e''$. Entnehmen wir dann $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ aus dem folgenden Term 1. Grades :

grado al menos : $\tilde{\omega}'_1 = \alpha' e' + \beta' e''$. Sacando entonces $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ del siguiente término de 1er grado :

$$R^1 = k^2 C_i \frac{e}{2} \cos\left[il' - (i-1)l - \tilde{\omega}\right],$$

so folgt nach Integration von $\dot{a}_3$ der Ausdruck 1. Grades :

se obtiene previa integración de $\dot{a}_3$, la expresión de 1er grado :

$$p_1(a_3) = +\frac{1}{8} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \bar{C}_i \frac{(i-1)n'}{in' - (i-1).n} \bar{F}_0 \bar{\tilde{\omega}}'_1 \sin(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})(nt)^2 \sin\left[il' - (i-1)l - \tilde{\omega}\right]$$

Der nächste Term von $\dot{\tilde{\omega}}_2$ lautet :

El próximo término de $\dot{\tilde{\omega}}_2$ es :

$$p(\dot{\tilde{\omega}}_2) = \tilde{\omega}^2{}_{2e''} \cdot e''_1, \qquad \text{wo} \quad e''_1 = \bar{e}''_1 \cdot n''t = 1.\ \text{Grad}$$

und

y

$$\tilde{\omega}^2{}_{2e''} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}} \frac{1}{e} R^2{}_{ee''}.$$

Das Produkt $\frac{1}{e} R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ ist wieder mindestens vom 0. Grade und $R^2{}_{ee''} \cdot e''_1$ mindestens vom 1. Grade d. h. proportional e, also auch a_3. Dazu ist wieder $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ aus dem Terme 1. Grades in e zu wählen, sodaß schließlich nach Integration von $\dot{a}_3$ erhalten wird :

El producto $\frac{1}{e} R_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ vuelve a ser de grado 0 al menos, y $R^2{}_{ee''} \cdot e''_1$ de 1er grado al menos, es decir proporcional a e, y por tanto, también a a_3. Luego debemos elegir nuevamente $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}}$ del término de 1er grado en e, de manera que, en definitiva, resulta, previa integración de $\dot{a}_3$:

$$p_1(a_3) = -\frac{1}{8} a \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2} \bar{F}''_0 \bar{C}_i \bar{e}''_1 \cos(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) \frac{(i-1)n''}{in' - (i-1)n} (nt)^2 \sin\left[il' - (i-1)l - \tilde{\omega}\right]$$

In Bezug auf den nächsten Term :

Respecto del término siguiente :

$$(4f) \qquad p(\dot{\tilde{\omega}}_2) = \tilde{\omega}^2{}_{2\tilde{\omega}''} \cdot \tilde{\omega}''_1, \qquad \text{wo} \qquad \tilde{\omega}''_1 = \frac{\bar{\tilde{\omega}}''_1}{e''} n'' \cdot t$$

und

y

$$\tilde{\omega}^2{}_{2\tilde{\omega}''} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{K\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{e} R^2{}_{e\tilde{\omega}''},$$

bedarf es zur Ableitung des Resultates nur einer Vertauschung von a', e', $\tilde{\omega}'$ und n' in $p(\dot{\tilde{\omega}}_2)$ von (4d) mit a'', e'', $\tilde{\omega}''$ u. n''; folglich wird dann :

basta para deducir el resultado, permutar a', e', $\tilde{\omega}'$ y n' de $p(\dot{\tilde{\omega}}_2)$ de (4d), con a'', e'', $\tilde{\omega}''$ y n''; por tanto resulta :

$$p_4(a_3) = \frac{1}{8} a \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 + m)^2} \bar{C}_i \frac{(i - 1) n''}{in' - (i - 1) n} \bar{F}''_0 \bar{\tilde{\omega}}''_1 \sin(\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}) (nt)^2 \sin[il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}].$$

Da das 5. Hauptglied:

Ya que el 5° término principal:

$$p_5(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} \frac{1}{2} R^1_{\varepsilon ee} \cdot (a_1)^2$$

wegen der Zusammensetzung von $(a_1)^2$ nur aus einer Konstanten und periodischen Gliedern nicht zu Poisson-Termen zu führen vermag, können wir sogleich zum nächsten Hauptterm übergehen:

no puede producir términos de Poisson, debido a que $(a_1)^2$ se compone sólo de una constante y de términos periódicos, podemos pasar inmediatamente al próximo término principal:

$$p_6(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} \frac{1}{2} R^1_{\varepsilon ee} \cdot (e_1)^2, \tag{6}$$

wo $e_1 = \bar{e}_1 n . t$. Da $\bar{e}_1$ vom 1. Grade und $R^1_{\varepsilon ee}$ mindestens vom 0. Grade, so wird $p_6(a_3)$ mindestens vom 2. Grade und ist deshalb gegenüber den Termen 1. Grades zu vernachlässigen.

donde $e_1 = \bar{e}_1 nt$. Ya que $\bar{e}_1$ es de 1^er grado y $R^1_{\varepsilon ee}$ al menos de grado 0, $p_6(a_3)$ resulta por lo menos de 2° grado y puede, por tanto despreciarse.

Da das Hauptglied (7):

Puesto que el término principal:

$$p_7(a_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} \frac{1}{2} R^1_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} \cdot (l_1)^2 \tag{7}$$

aus dem analogen Grunde wie im Falle (6) keine der gesuchten Poisson-Terme hervorbringen hann, können wir sogleich zum nächsten Term schreiten:

$R^1_{\varepsilon ee}$ no puede producir términos de Poisson buscados, por motivo análogo al del caso (6), podemos pasar al próximo término:

$$p_8(a_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} \cdot \frac{1}{2} R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}} \cdot (\tilde{\omega}_1)^2, \tag{8}$$

da

ya que

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{\bar{\tilde{\omega}}_1}{e} nt$$

die Säkularglieder in Bezug auf alle großen Planeten enthält, sind dadurch die Einflüsse kombinierten Ursprungs bereits erfaßt. Da $(\tilde{\omega}_1)^2$ den Pol $e^2 = 0$ enthält, andererseits $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$ immer mit einem Faktor mindestens 1. Grades in e_1 behaftet ist, so enthält

contiene los términos seculares de todos los grandes planetas, las influencias de las combinaciones quedan ya consideradas. Ya que $(\tilde{\omega}_1)^2$ contiene el polo $e^2 = 0$, y por otra parte $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$ está afectado siempre por un factor de 1^er grado en e_1 al menos,

$p_8(a_3)$ das Polglied $e_1 = 0$, das sich gegen das korrespondierende Glied in $p_2(a_3)$ forthebt. Bei diesem Prozeß bleiben aber Terme 1. Grades in $p_8(a_3)$ bestehen, wie in § 1 dieses Teiles II zu ersehen ist. Wird in R^1 ein Glied mindestens 2. Grades berücksichtigt, sodaß $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$ ebenfalls mindestens vom 2. Grade in e ist, so hebt sich der genannte Pol $e = 0$ weg und $p_8(a_3)$ wird mindestens vom Grade von $(\bar{\tilde{\omega}}_1)^2$, d. h. mindestens vom 2. Grade. Dann aber sind diese Terme gegen die vom 1. Grade wieder zu vernachlässingen.

Die nun weiter folgenden Terme von $\dot{a}_3$:

resulta que $p_8(a_3)$ contiene el término con polo $e^1 = 0$ que se elimina con el término correspondiente de $p_2(a_3)$; pero quedan términos de 1^er^ grado en $p_8(a_3)$, como hemos visto en el § 1 de esta parte II. Si consideramos en R^1 un término de 2° grado al menos, de modo que $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}}$ también sea de 2° grado en e al menos, el polo mencionado $e = 0$ se elimina y $p_8(a_3)$ resulta del grado de $(\tilde{\omega}_1)^2$, es decir, de 2° grado por lo menos. Mas entonces estos términos pueden despreciarse.

Los términos siguientes de $\dot{a}_3$:

(9)	mit dem	Faktor	$a_1 e_1$
(10)	»	»	$a_1 l_1$
(11)	»	»	$a_1 \tilde{\omega}_1$
(12)	»	»	$e_1 l_1$

enthalten nur Terme der Form: $t^1 \, {\cos \atop \sin} \, A$, also im Integral a_3 keine Poissongleider der gesuchten Form $t^2 \, {\cos \atop \sin} \, A$.

Der letzte Term: (13) mit dem Faktor $e_1\tilde{\omega}_1$ enthält, wie schon in § 1 dieses Teiles II bei Berücksichtigung der Jupiterstörungen allein gezeigt wurde, wohl Terme der gesuchten Poisson-Form, aber vom 2. Grade, sodaß sie deshalb hier wegfallen. Damit sind alle Terme dieses Typs erledigt.

Nunmehr kommen wir zur Untersuchung der Teile von $\dot{a}_3$, welche die Wirkung der gegenseitigen Störungen der großen Planeten in dem Ausdruck für $\dot{a}_3$ schon explizit in den Faktoren enthalten. Der entsprechende Ausdruck für $\dot{a}_3$ ist im Teil I gegeben worden. Dabei hatten sich zur Ableitung der reinsäkularen t^2-Glieder nur 10 Terme als brauchbar erwiesen. Jetzt sind bei der Ableitung der Poisson-Glieder der Form $t^2 \, . \, {\cos \atop \sin} \, A$ weitere Terme heranzuziehen, wobei folglich alle die Terme wegfallen,

contienen sólo términos de la forma: $t^1 \, {\cos \atop \text{sen}} \, A$, y por consiguiente en la integral a_3 no existen términos de Poisson de la forma buscada: $t^2 \, {\cos \atop \text{sen}} \, A$.

El último término: (13) con el factor $e_1\tilde{\omega}_1$ contiene, como ya hemos probado en el § 1 de esta parte II, considerando las perturbaciones por Júpiter, términos de Poisson de la forma buscada, pero de 2° grado, de modo que podemos despreciarlos. Con lo cual quedan agotados todos los términos de este tipo.

Pasemos ahora a la investigación de las partes de $\dot{a}_3$ que contienen explícitamente en los factores el efecto de las perturbaciones mutuas de los grandes planetas en la expresión de $\dot{a}_3$. La fórmula correspondiente ya ha sido establecida en la parte I. Sólo 10 de los términos resultaron útiles para deducir los términos seculares puros en t^2. Para la deducción de los términos de Poisson de la forma $t^2 \, . \, {\cos \atop \text{sen}} \, A$, debemos aprovechar ahora otros términos, prescindiendo de los que sólo pueden producir die nur den Faktor $t^1 \cdot {}^{\cos}_{\sin} A$ hervorbringen können. Deshalb sind die allein in Betracht kommenden Terme die folgenden, die sich unmittelbar aus der Erweiterung von (5) Teil I auf die Potenzentwickelung nach a'_1, e'_1, l'_1 und $\tilde{\omega}'_1$ sowie nach a'_2, e'_2, l'_2 und $\tilde{\omega}'_2$ ergeben :

el factor $t^1 \, {}^{\cos}_{\text{sen}} A$. Por lo tanto, los términos a considerar sólo son los siguientes, que resultan inmediatamente de la ampliación de (5), parte I, y del desarrollo en series de potencias de a'_1, e'_1, l'_1 y $\tilde{\omega}'_1$ como asimismo de a'_2, e'_2, l'_2 y $\tilde{\omega}'_2$:

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2} R^1_{\varepsilon e' e'} \cdot (e'_1)^2 \qquad \mathrm{II}' = \frac{1}{2} R^1_{\varepsilon \tilde{\omega}' \tilde{\omega}'} \cdot (\tilde{\omega}'_1)^2$$

$$\mathrm{II}'' = R^1_{\varepsilon e'} \cdot e'_2 \qquad \mathrm{III} = R^1_{\varepsilon \varepsilon'} \cdot l'_2$$

$$\mathrm{IV} = R_{\varepsilon \tilde{\omega}'} \cdot \tilde{\omega}'_2 \qquad \mathrm{V} = R^1_{\varepsilon e e'} \cdot e_1 e'_1$$

$$\mathrm{VI} = R^1_{\varepsilon e \tilde{\omega}'} \cdot e_1 \cdot \tilde{\omega}'_1 \qquad \mathrm{VII} = R^1_{\varepsilon \tilde{\omega} e'} \cdot \tilde{\omega}_1 \cdot e'_1$$

$$\mathrm{VIII} = R^1_{\varepsilon \tilde{\omega} \tilde{\omega}'} \cdot \tilde{\omega}_1 \cdot \tilde{\omega}'_1 \qquad \mathrm{XI} = R^1_{\varepsilon e' \tilde{\omega}'} \cdot e'_1 \cdot \tilde{\omega}'_1$$

wobei

donde

$$p\,(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K}(\mathrm{I} + \mathrm{II}' + \ldots + \mathrm{IX}).$$

Mithin haben wir zuerst zu untersuchen :

Pos eso debemos investigar primeramente :

$$(\mathrm{I}) \qquad p\,(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} \cdot \frac{1}{2} R^1_{\varepsilon e' e'} (e'_1)^2,$$

wo $e'_1 = n't \,.\, L$, wo L eine Reihe ist, die mit den in den Exzentrizitäten e'', e''', etc., linearen Gliedern beginnt. Da andererseits $R^1_{\varepsilon e' e'}$ mindestens vom o. Grade, so liefert I nur Terme vom Grade 2 in Bezug auf die gesuchte Form der Poisson-Glieder.

Der 2. Term unserer Gruppe ist :

donde $e'_1 = n't \,.\, L$, y L es una serie que empieza con términos lineales en las excentricidades e'', e''', etc. Ya que, por otra parte, es $R^1_{\varepsilon e' e'}$ de grado o, al menos, la fórmula I da sólo términos de Poisson de la forma buscada de segundo grado.

El segundo término de nuestro grupo es :

$$(\mathrm{II}') \qquad p'\,(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} \frac{1}{2} R^1_{\varepsilon \tilde{\omega}' \tilde{\omega}'} (\tilde{\omega}'_1)^2 ;$$

aus der obigen Behandlung des analogen Gliedes der Hauptreihe :

sabemos por la investigación anterior del término análogo de la serie principal :

$$p_8\,(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} \cdot \frac{1}{2} R^1_{\varepsilon \tilde{\omega} \tilde{\omega}} \cdot (\tilde{\omega}_1)^2$$

wissen wir, daß sich hier die vorhandenen Polglieder gegen diejenigen in

que los términos con polo que aquí existen se eliminan con los de

$$p_2(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R^1{}_{\varepsilon e} \cdot e_2;$$

wegheben, wobei aber ein Restglied 1. Grades übrig bleibt. Deshalb entsteht hier ein analoges Restglied gegenüber dem Term :

pero queda un término de 1er grado. Luego se origina aquí un resto análogo al término II'' :

$$\text{(II'')} \qquad p''(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R^1{}_{\varepsilon e'} \cdot e'_2;$$

es ist in dem früheren Restgliede von $p_8(\dot{a}_3)$ nur e mit e', also der Koeffizient C_i mit D_i zu vertauschen, also auch $\tilde{\omega}$ mit $\tilde{\omega}'$ und n mit n', sodaß man erhält :

debiéndose permutar en el resto precedente de $p_8(\dot{a}_3)$ e con e', es decir, el coeficiente C_i con D_i, o sea $\tilde{\omega}$ con $\tilde{\omega}'$ y n con n'. Se obtiene, entonces :

$$p''(a_3) = \frac{1}{4}a\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1+m)^2}\bar{D}_i\frac{(i-1)n'}{in'-(i-1)n}[aA^0{}_1(a'a'') + aA^0{}_2(a'a'')]\bar{\tilde{\omega}}'_1(nt)^2\cos[il'-(i-1)l-\tilde{\omega}']$$

Der Proportionalitätsfaktor a folgt aus der Umformung der Gaußschen Konstanten :

El factor de proporcionalidad a resulta de la transformación de la constante de Gauss :

$$k^2 = \frac{a^3n^2}{1+m},$$

um zugleich auch den Proportionalitätsfaktor $(n't)^2$ zu erhalten; schließlich wurde noch

para obtener al mismo tiempo el factor $(nt)^2$; previamente hemos puesto

$$\tilde{\omega}'_1 = \frac{\bar{\tilde{\omega}}'_1}{e'}n't$$

gesetzt.

Der nächste Term lautet :

El término siguiente es :

$$\text{(III)} \qquad p(\dot{a}'_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R^1{}_{\varepsilon\varepsilon'} l'_2,$$

da l'_2 rein-säkulare Glieder in t^2 enthält. Schon früher wurde bewiesen, daß :

pues l'_2 contiene términos seculares puros en t^2. Hemos probado anteriormente, que la parte secular de

$$\varepsilon_{2\tilde{\omega}} = -\frac{2\sqrt{a}}{K}R_{a\tilde{\omega}} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{2K\sqrt{a}}\left(1+\frac{1}{4}e^2\right)eR_{e\tilde{\omega}}$$

in seinem Säkularteil mindestens vom 2. Grade ist, analog folglich auch $\varepsilon'_{2\tilde{\omega}}$ bei Abhängigkeit von den

es al menos de 2° grado, y por tanto, análogamente, también la de $\varepsilon'_{2\tilde{\omega}}$ que resulta depender de los ele-

Elementen von m''. Folglich ist (III) gegenüber den Termen 1. Grades zu vernachlässigen.

Der nächste Term unserer Gruppe ist:

mentos de m''. Por consiguiente, los términos de (III) son despreciables en comparación con los de 1er grado.

El siguiente término de nuestro grupo es:

$$\text{(IV)} \qquad p\,(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}'} \cdot \tilde{\omega}'_2 ;$$

dieser Term bildet das Analogen zu dem früheren $p_4\,(\dot{a}_3)$, wobei nur

este término es análogo del anterior $p_4\,(\dot{a}_3)$, siendo

$$\tilde{\omega}'_2 = \frac{\bar{\omega}'_2}{e'} n'l^2 = \frac{k^2}{K'}\sqrt{1 - e'^2}\,\frac{1}{e'}[A^0{}_1\,(a'a'') + A^0{}_2\,(a'a'')]\,\bar{e}'_1 n'l^2.$$

Der Faktor $R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}'}$ ist zuerst aus dem Term 1. Grades in e' zu entnehmen:

Debemos sacar primeramente el factor $R^1{}_{\varepsilon\tilde{\omega}'}$ del término de 1er grado en e':

$$R^1 = k^2 \,.\, D_i \cdot \frac{e'}{2} \cos\,(il - (i - 1)\,l - \tilde{\omega}'),$$

sodaß schließlich unter Wegheben des Poles $e' = 0$ das folgende Poisson-Glied 1. Grades übrig bleibt:

de modo que queda, finalmente, previa eliminación del polo $e = 0$, el siguiente término de Poisson de 1er grado:

$$p\,(a_3) = -\frac{1}{4}\,a\,\frac{\sqrt{1 - e'^2}}{(1 + m)^2}\,\frac{(i - 1)\,n'}{in' - (i - 1)\,n}\,\bar{D}_i\,[aA^0{}_1\,(a', a'') + aA^0{}_2\,(a', a'')] \,.\, \bar{e}'_1\,(nt)^2 \times$$
$$\times \sin\,[il' - (i - 1)\,l - \tilde{\omega}'].$$

Weitere Terme 1. Grades sind in IV nicht vorhanden, sodaß wir zum folgenden Term übergehen:

No habiendo más términos de 1er grado en (IV), pasaremos al término próximo:

$$\text{(V)} \qquad p\,(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R^1{}_{\varepsilon e e'} \,.\, e_1 \,.\, e'_1 ;$$

die Existenz des Produktes $e_1 e'_1$ neben dem Faktor $R^1{}_{\varepsilon e e'}$, der mindestens vom 0. Grade ist, zeigt an, daß der Term (V) mindestens vom 2. Grade, also innerhalb unseres Rahmens wegfällt.

Der nächstfolgende Term ist:

el producto de $e_1 \,.\, e'_1$, por el factor $R^1{}_{\varepsilon e e'}$ de grado 0 por lo menos, nos indica que el término (V) es de 2° grado al menos, y por tanto despreciable.

El término siguiente es:

$$\text{(VI)} \qquad p\,(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R^1{}_{\varepsilon e\tilde{\omega}'} \,.\, e_1 \tilde{\omega}'_1 .$$

Der Faktor $R^1{}_{\varepsilon e\tilde{\omega}'}$ enthält wegen der Differentiation nach $\tilde{\omega}'$ stets mindestens $(e')^1$ als Faktor, der den Pol

contiene siempre como factor al menos $(e')^1$, a causa de la derivación respecto de $\tilde{\omega}'$, de modo que

$e' = 0$ von $\tilde{\omega}'_1$ eliminiert, sodaß insgesamt, da e_1 vom 1. Grade ist, der Ausdruck (VI) mindestens vom 2. Grade: $e_1(\alpha' e' + \beta' e'')$, also zu vernachlässigen ist.

In dem folgenden Term:

el polo $e' = 0$ de $\tilde{\omega}'_1$ se elimina, y por tanto, ya que e_1 es de 1er grado, la expresión (VI) es al menos de 2º grado: $e_1(\alpha' e' + \beta' e'')$, y por consiguiente despreciable.

En el término siguiente:

$$\text{(VII)} \qquad p(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}e'} \tilde{\omega}_1 e'_1$$

fällt analog zum Falle (VI) der Pol $e = 0$ von $\tilde{\omega}_1$ gegen den in $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}e'}$ auftretenden Faktor e weg, sodaß der Term (VII) mindestens vom 2. Grade wird und zu vernachlässigen bleibt.

Der nun folgende Term

análogamente al caso (VI), el polo $e = 0$ de $\tilde{\omega}_1$ se elimina con el factor e de $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}e'}$, de manera que el término (VII) resulta de 2º grado por lo menos, luego despreciable.

El término que sigue ahora:

$$\text{(VIII)} \qquad p(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}'} \cdot \tilde{\omega}_1 \cdot \tilde{\omega}'_1$$

enthält durch den Faktor $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}'}$ stets auch den Multiplikator $e \,.\, e'$, der die Pole $e = 0$ in $\tilde{\omega}_1$, resp, $e' = 0$ in $\tilde{\omega}'_1$ neutralisiert, sodaß (VIII) mindestens vom 2. Grade wird, ausgedrückt durch das Produkt $\bar{\tilde{\omega}}_1 \bar{\tilde{\omega}}'_1$.

Schließlich lautet das letzte Glied:

contiene, por el factor $R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}\tilde{\omega}'}$ siempre el multiplicador $e \,.\, e'$ que neutraliza los polos $e = 0$ de $\tilde{\omega}_1$ y $e' = 0$ de $\tilde{\omega}'_1$, de manera que (VIII) es un término de 2º grado, al menos, expresado por el producto $\tilde{\omega}_1 \cdot \tilde{\omega}_1'$.

Finalmente el último término es:

$$\text{(IX)} \qquad p(\dot{a}_3) = \frac{2\sqrt{a}}{K} R^1_{\varepsilon e'\tilde{\omega}'} \cdot e'_1 \cdot \tilde{\omega}'_1.$$

Wird $R^1_{\varepsilon e'\tilde{\omega}'}$ aus dem Term 1. Grades in e' in R^1 entnommen, so gibt der Faktor $\tilde{\omega}'_1$ zu einem Pole $e' = 0$ Anlaß. Das so entstehende Polglied hebt sich aber gegen den entsprechenden Term in

Tomando $R^1_{\varepsilon e'\tilde{\omega}'}$ del término de 1er grado en e' de R^1, el factor $\tilde{\omega}'_1$ introduce un polo $e' = 0$. Mas este término con polo se elimina con el término correspondiente de:

$$\text{(IV)} \qquad R^1_{\varepsilon\tilde{\omega}'} \tilde{\omega}'_2 \text{ fort.}$$

Wählen wir $R^1_{\varepsilon e'\tilde{\omega}'}$ aus den Termen 2. und höheren Grades in e', so hebt sich der Pol fort und es entsteht in (IX) ein Glied vom mindestens 2. Grade, ausgedrückt durch das Produkt: $e'_1 . \tilde{\omega}'_1$. Im Übrigen sind keine weiteren Glieder 2. Grades vorhanden.

Die unmittelbar analoge Gruppe zu I-IX ergibt sich durch die Vertauschung von e', $\tilde{\omega}'$, ... mit e'', $\tilde{\omega}''$, ... oder mit e''', $e^{(IV)}$, ..., d. h. durch Vertauschung des 1. Faktors in (I) $R^1_{\varepsilon e'e'}$ mit $R^2_{\varepsilon e''e''}$ oder

Eligiendo $R^1_{\varepsilon e'\tilde{\omega}'}$ de los términos de 2º y mayor grado en e', el polo se elimina, originándose en (IX) un término de 2º grado al menos, expresado por el producto: $e'\tilde{\omega}'_1$. En lo que resta no existen más términos de 2º grado.

El grupo inmediato análogo a I-IX resulta permutando e', $\tilde{\omega}'$, ... con e'', $\tilde{\omega}''$, ... ó con e''', $e^{(IV)}$..., es decir permutando el 1er factor de (I) $R^1_{\varepsilon e'e'}$ con $R^2_{\varepsilon e''e''}$ ó $R^3_{\varepsilon e'''e'''}$, etc., con cual la perturbación

$R^3_{\varepsilon e''' e'''}$, etc., wodurch die Hauptstörung von a_3 durch Jupiter durch die von Saturn, etc., ersetzt wird, also enteprechend auch der Faktor $(e'_1)^2$ durch $(e''_1)^2$ resp. $(e'''_1)^2$, etc. Dabei fixieren dann e''_1, etc., die Summe aller Säkularstörungen von m'' durch die übrigen großen Planeten, analog e'''_1, etc.

principal de a_3 por Júpiter se reemplaza por la de Saturno, etc., y por consiguiente el factor $(e'_1)^2$ por $(e'')^2$, etc. Entonces e''_1, etc., fija la suma de todas las perturbaciones seculares de m'' por los otros grandes planetas y análogamente e'''_1, etc.

§ 3. Der Einfluß der inneren Planeten

Die nun folgenden Betrachtungen über den Einfluß der inneren störenden Körper schließen sich unmittelbar an die in § 5, Teil I an.

Die dort abgeleiteten Voraussetzungen für den Übergang von den Formeln bezüglich der Wirkung der äußeren störenden Körper auf die durch die inneren Planeten behalten auch hier bei der Ableitung der Poisson-Terme in t^2 ihre Gültigkeit. Während hier im periodischen Teil der Störungsfunktion die Koeffizienten der trigonometrischen Funktionen durch die Änderung des Nebenteils der Störungsfunktion eine entsprechende Abänderung erfahren, bleibt der Säkularteil ohne jede Änderung. Unter Beachtung der in § 5, Teil I fixierten durch den Einfluß der inneren Planeten bedingten Umformungen der Koeffizienten der Integrale $p_i\,(a_3)$ folgt dann als erster Term niedrigsten d. h. 1. Grades:

§ 3. La influencia de los planetas interiores

Las investigaciones que siguen se refieren a la influencia de los cuerpos perturbadores internos y constituyen la continuación inmediata de las del § 5, parte I.

Las proposiciones que deducimos acá sobre el pasaje de las fórmulas relativas al efecto de los cuerpos perturbadores exteriores a las referentes a los planetas interiores valen también para la deducción de los términos de Poisson en t^2. Mientras que los coeficientes de las funciones trigonométricas de la parte periódica de la función perturbadora varían por la alteración de la parte complementaria de la función perturbadora, la parte secular queda inalterada. Considerando las transformaciones del § 5, parte I, de los coeficientes de las integrales $p_i\,(a_3)$ condicionadas por la influencia de los planetas interiores resulta como 1er término de grado mínimo, es decir 1er grado:

$$p_8\,(a'_3) = -\frac{1}{4}\,a' \cdot \frac{\sqrt{1-e'^2}}{(1+m')^2}\,\frac{in'}{in'-(i-1)\,n}\,\overline{D}_i\left(\overline{A}^0_1 + \overline{A}^0_2\right)\bar{\tilde{\omega}}'_1\,(n't)^2 \cos\left[il' - (i-1)\,l - \tilde{\omega}'\right]$$

wo bei den Koeffizienten zu beachten ist, daß jetzt: $\overline{D}_i = a'D_i$ und $\overline{A}^0_1 = a'A^0_1$: es sind also alle Koeffizienten jetzt mit dem Faktor a' statt a versehen und $\bar{\tilde{\omega}}'_1$ ist durch den in $\tilde{\omega}'_1 = \frac{\bar{\tilde{\omega}}'_1}{e'}\,n't$ vorhandenen Koeffizienten fixiert, wobei $\bar{\tilde{\omega}}'_1$ die Gesamtstörung durch alle inneren wie äußeren störenden Körper darstellt.

Der 2. Term, der aus p_4 hervorgeht, ergibt als Resultat der Umformungen:

donde hay que observar, sobre los coeficientes, que ahora es: $\overline{D} = a'D_i$ y $\overline{A}^0_1 = a'A^0_1$; luego todos los coeficientes contienen ahora el factor a' en vez de a, y $\bar{\tilde{\omega}}'_1$ está fijado por el coeficiente correspondiente de $\tilde{\omega}'_1 = \frac{\tilde{\omega}'_1}{e'}\,n't$, siendo $\tilde{\omega}'_1$ la perturbación total de los cuerpos perturbadores interiores y exteriores.

El 2º término que resulta de p_4 produce como resultado de las transformaciones:

$$p_4(a'_3) = + \frac{1}{4} a' \frac{\sqrt{1 - e'^2}}{(1 + m')^2} \frac{in'}{in' - (i - 1) n} \overline{D}_i (\overline{A}^0_1 + \overline{A}^0_2) \bar{e}'_1 (n't)^2 \sin [il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}'].$$

Da hiermit gemäß § 1, Teil II, die allein möglichen Störungen direkter Form erschöpft sind, gehen wir, gemäß § 2, Teil II, zu dem Einfluß der kombinierten und gegenseitigen Störungen der großen Planeten über. Alsdann erhalten wir zuerst den folgenden Term 1. Grades:

Ya que, según § 1, parte II, las perturbaciones posibles de forma directa se han agotado, pasamos, según § 2, parte II, a la influencia de las perturbaciones combinadas y mutuas de los grandes planetas. Obtendremos, pues, primeramente el término siguiente de 1^er grado:

$$p_2(a'_3) = - \frac{1}{4} a' \frac{\sqrt{1 - e'^2}}{(1 + m')^2} \overline{D}_i i (n't)^2 \cos [il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}'] \Big\{ \overline{F}_0 \bar{e}_1 \sin (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \times \frac{n}{in' - (i - 1) n} + \overline{F}_0 \bar{\tilde{\omega}}_1 \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \frac{n}{in' - (i - 1) n} - \overline{F}''_0 \bar{e}''_1 \sin (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \frac{n''}{in' - (i - 1) n} + \overline{F}''_0 \bar{\tilde{\omega}}''_0 \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') \frac{n''}{in' - (i - 1) n} \Big\}$$

dabei ist zu beachten, daß, weil m' jetzt der gestörte Körper ist, F''_0 nunmehr von a'' u. a' (früher von a'' und a) abhängig ist.

Die weiteren Terme folgen dann auf Grund der Formel für $p_4(a_3)$:

donde hay que observar que siendo ahora m' el cuerpo perturbado, F''_0 depende de a'' y a' (anteriormente de a'' y a).

Los otros términos resultan entonces en base de la fórmula de $p_4(a_3)$:

$$p_4(a'_3) = + \frac{1}{4} a' \frac{\sqrt{1 - e'^2}}{(1 + m')^2} \overline{D}_i \frac{in'}{in' - (i - 1) n} [(A^0_1)'' + A^0_2)''] \bar{e}_1' (n't)^2 \sin [il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}']$$

$$p_4(a'_3) = + \frac{1}{8} a' \frac{\sqrt{1 - e'^2}}{(1 + m')^2} \overline{D}_i \overline{F}_0 \bar{e}_1 \frac{in}{in' - (i - 1) n} \cos (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (n't)^2 \sin [il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}']$$

$$p_4(a'_3) = + \frac{1}{8} a' \frac{\sqrt{1 - e'^2}}{(1 + m')^2} \overline{D}_i \overline{F}_0 \bar{\tilde{\omega}}_1 \frac{in}{in' - (i - 1) n} \sin (\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) (n't)^2 \sin [il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}']$$

$$p_4(a'_3) = + \frac{1}{8} a' \frac{\sqrt{1 - e'^2}}{(1 + m')^2} \overline{D}_i \overline{F}''_0 \bar{e}''_1 \frac{in''}{in' - (i - 1) n} \cos (\tilde{\omega}'' - \tilde{\omega}') (n't)^2 \sin [il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}']$$

Hiermit sind alle Terme der betrachteten Gruppe erledigt.

Weiterhin sind dann diejenigen Teile von $\dot{a}_3$ zu untersuchen, in denen die gegenseitigen Störungen der großen Planeten von vorneweg explizit enthalten sind. Unter Erweiterung der ursprünglichen 10 Glieder auf die unserer Voraussetzung entsprechenden Terme wird der erste Term niedrigsten, also 1. Grades nach II':

Con esto hemos agotado todos los términos de nuestro grupo.

Debemos investigar ahora las partes de $\dot{a}_3$ que contienen explícitamente, las perturbaciones mutuas de los grandes planetas. Ampliando los 10 términos originales con los términos que corresponden a nuestra proposición, resulta el 1^er término de grado más bajo, es decir 1^er grado, según II':

$$p'(\dot{a}'_3) = \frac{2\sqrt{a'}}{K'}\frac{1}{2} R_{\varepsilon'\tilde{\omega}\tilde{\omega}} \cdot (\tilde{\omega}_1)^2;$$

der gegenüber den Polgliedern übrig bleibende Term auf Grund der Kombination mit dem Term :

prescindiendo de los términos con polo, queda en base a la combinación con el término

$$p''(\dot{a}'_3) = \frac{2\sqrt{a'}}{K'} R_{\varepsilon' e} \cdot e_2$$

ist dann :

$$p''(a'_3) = -\frac{1}{4} a' \frac{\sqrt{1 - e'^2}}{(1 + m')^2} \overline{C}_i \frac{n}{in' - (i - 1) n} [a'A^0_1 (a, a'') + a'A^0_2 (a, a'')] \bar{\tilde{\omega}}_1 (n't)^2 \cos(il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}]$$

wo die Koeffizienten der Säkularterme der Klarheit halber explizit dargestellt worden sind.

Der nächste und zugleich letzte Term der Gruppe, der Berücksichtigung erfordert, ist der dem Falle (IV) entsprechende :

donde los coeficientes de los términos seculares han sido representados explícitamente, por claridad.

El próximo y último término del grupo, que exige consideración, es el que corresponde al caso (IV) :

$$p(\dot{a}'_3) = \frac{2\sqrt{a'}}{K'} R_{\varepsilon'\tilde{\omega}} \cdot \tilde{\omega}_2;$$

entsprechend der dort gegebenen Formel lautet dann die entsprechende Störung :

la perturbación correspondiente es entonces, según la fórmula escrita :

$$p(a'_3) = +\frac{1}{4} a' \frac{\sqrt{1 - e'^2}}{(1 + m')^2} \frac{in}{in' - (i - 1) n} \overline{C}_i [a'A^0_1 (a, a'') + a'A^0_2 (a, a'')] \bar{e}_1 (n't)^2 \sin [il' - (i - 1) l - \tilde{\omega}].$$

Die zu diesem Gliede gehörende vollständige Gruppe ergibt sich durch Hinzufügung der Störungeng, die aus weiteren inneren störenden Körpern hervorgehen, die wir mit $m^{()}$, $m^{('')}$, etc., bezeichnen wollen und zu denen die Elemente gehören : $a^{()}$, $e^{()}$, etc., oder $a^{('')}$, $e^{('')}$, etc. Folglich ergibt sich diese Gruppe vollständig, wenn die Elemente m, a, e, ... mit $m^{()}$, $a^{()}$, $e^{()}$, ... oder weiter mit $m^{('')}$, $a^{('')}$, $e^{('')}$, ... in unseren obigen Formeln vertauscht werden.

El grupo completo que pertenece a este término resulta por adición de las perturbaciones que se originan por otros cuerpos perturbadores internos designados con $m^{()}$, $m^{('')}$, etc., con elementos : $a^{()}$, $e^{()}$, etc., ó $a^{('')}$, $e^{('')}$, etc. Por consiguiente este grupo completo resulta permutando en nuestras fórmulas los elementos m, a, e, ... con $m^{()}$, $a^{()}$, $e^{()}$, ... ó $m^{('')}$, $a^{('')}$, $e^{('')}$, ...

INHALT

TEIL I. DIE THEORETISCHEN GRUNDLAGEN

§ 1. Einleitung 5
§ 2. Die allgemeine Entwickelung der Bahnelemente nach Potenzen der störenden Massen und die Differentialgleichung des Gliedes 3. Ordnung der großen Achse 11
§ 3. Die Methode der Aufsuchung der den Zeitpotenzen t und t^2 proportionalen Säkularglieder der 3. Ordnung der großen Achse des gestörten Körpers durch äußere störende Planeten 18
§ 4. Der Einfluß der Kombination der direkten Störungen durch Jupiter, Saturn, etc., sowie die Rückwirkung ihrer gegenseitigen Störungen auf die Säkularänderung 3. Ordnung der großen Achse des gestörten Körpers 69
§ 5. Der Fall innerer störender Körper 143

TEIL II. DIE POISSON-TERME IN t^2

§ 1. Der Einfluß der direkten Störungen der großen Planeten auf die Säkurbeschleunigung a_3 des gestörten Körpers. 160
§ 2. Der Einfluß der kombinierten und der gegenseitigen Störnngen der großen Planeten auf die Säkularbeschleunigung a_3 171
§ 3. Der Einfluß der inneren Planeten 184

INDICE

PARTE I. FUNDAMENTOS TEORICOS

§ 1. Introducción 5
§ 2. Desarrollo general de los elementos de la órbita según potencias de las masas perturbadoras y ecuación diferencial del término de 3er orden del eje mayor 11
§ 3. Método para hallar los términos seculares de 3er orden del eje mayor, proporcionales a las potencias t y t^2 del tiempo, en caso de ser las órbitas de los planetas perturbadores exteriores a las del cuerpo perturbado 18
§ 4. La influencia de la combinación de las perturbaciones directas por Júpiter, Saturno, etc., y la repercusión de sus perturbaciones mutuas sobre la perturbación secular de 3er orden del eje mayor de la órbita del cuerpo perturbado 69
§ 5. Perturbaciones producidas por planetas interiores 143

PARTE II. LOS TERMINOS DE POISSON EN t^2

§ 1. La influencia de las perturbaciones directas de los grandes planetas sobre la aceleración secular a_3 del cuerpo perturbado 160
§ 2. La influencia de las perturbaciones combinadas y mutuas de los grandes planetas sobre la aceleración secular a_3. 171
§ 3. La influencia de los planetas interiores 184