





2-7



OBSERVATORIO ASTRONÓMICO DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

DIRECTOR : ING° FÉLIX AGUILAR

SERIE ASTRONÓMICA (Antes Publicaciones). — Tomo XVI

DETERMINACION

DE

ORBITAS DE PLANETAS Y COMETAS

POR

ALEXANDER WILKENS



LA PLATA

OBSERVATORIO ASTRONÓMICO

1939



Imprenta y Casa editora Cosi. Perú 684. Buenos Aires

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

(1939)

PRESIDENTE

DOCTOR JUAN CARLOS RÉBORA

VICEPRESIDENTE

DOCTOR ORESTES E. ADORNI

SECRETARIO GENERAL

ABOGADO BERNARDO ROCHA

Consejeros titulares : INGENIERO SANTIAGO BOAGLIO, INGENIERO SANTOS SORIANO, DOCTOR EDUARDO BLOMBERG, DOCTOR VÍCTOR M. ARROYO, DOCTOR ORESTES E. ADORNI, DOCTOR JOSÉ BELBEY, INGENIERO FÉLIX AGUILAR, DOCTOR JOAQUÍN FRENGUELLI, DOCTOR MILCIÁDES A. VIGNATI, DOCTOR HILARIO MAGLIANO, INGENIERO ENRIQUE HUMET, DOCTOR ANGEL BIANCHI LISCHETTI, DOCTOR ANTONIO G. PEPE, DOCTOR ALFREDO D. CALCAGNO, PROFESOR FRANCISCO ROMERO.

Guarda Sellos : INGENIERO ALEJANDRO BOTTO.

Representantes de los alumnos, titulares : JULIO A. MARCÓ Y RUBÉN VERETONI.

OBSERVATORIO ASTRONÓMICO

DIRECTOR

INGENIERO FÉLIX AGUILAR

SECRETARIO

AGRIMENSOR CARLOS ALBARRACÍN SARMIENTO

Profesores Extraordinarios de la Escuela Superior de Ciencias Astronómicas y Conexas : INGENIERO FÉLIX AGUILAR, DOCTOR BERNARDO H. DAWSON, INGENIERO VIRGINIO MANGANIELLO, INGENIERO ESTEBAN TERRADAS, DOCTOR ALEXANDER WILKENS.

Extraordinario-Adjunto : INGENIERO SIMÓN GERSHÁNIK.

PERSONAL CIENTÍFICO Y TÉCNICO

Jefes de Departamento : DOCTOR BERNARDO H. DAWSON, INGENIERO VIRGINIO MANGANIELLO, INGENIERO NUMA TAPIA, INGENIERO ESTEBAN TERRADAS, DOCTOR ALEXANDER WILKENS.

Astrónomo de Primera : AGRIMENSOR HUGO A. MARTÍNEZ.

Geofísicos de Segunda : INGENIERO ENRIQUE LEVIN, INGENIERO SIMÓN GERSHÁNIK.

Astrónomo de Tercera : INGENIERO MIGUEL A. AGABIOS.

Astrónomo de Cuarta : DOCTOR REINALDO P. CESCO.

Astrónomo de Quinta : SEÑOR SILVIO MANGARIELLO.

Geofísico de Quinta : SEÑOR CLAUDIO VICENTE BIANCO.

Ayudantes Astrónomos de Primera : SEÑOR CARLOS U. CESCO, SEÑOR RICARDO P. PLATZECK, DOCTOR HERBERT WILKENS.

Calculista de Tercera : SEÑOR JORGE A. GARBARINO.

Ayudante Astrónomo de Segunda : SEÑOR ANGEL A. BALDINI, MIGUEL ITZIGSOHN.

Calculistas Ayudantes : SEÑORITA MARÍA DEL CARMEN GUILLÉN, BASILIO GUDOIAS.

Ayudante Geofísico de Segunda : SEÑOR JULIO LENZI.

Ayudante Geofísico de Tercera : SEÑOR RICARDO LUIS LASALLE.

Auxiliar Geofísico : SEÑOR OCTAVIO FERNANDO AUBONE.

Mecánico Especialista : SEÑOR GREGORIO PLOTNIKOFF.

DETERMINACION DE ORBITAS DE PLANETAS Y COMETAS ZUR BAHNBESTIMMUNG DER PLANETEN UND KOMETEN

In einer in den *Astronomischen Nachrichten*, Bd. 210, Nr. 5022-23 erschienenen, im Folgenden mit I bezeichneten Abhandlung über *Eine Methode der Bahnbestimmung für alle Exzentrizitäten* habe ich in der Einleitung dargelegt, inwiefern die Ableitung der heliozentrischen Koordinaten und ihrer Geschwindigkeiten anstelle der Bahnelemente am zweckmässigsten als direkter Weg und als Ziel der allgemeinen Bahnbestimmung zu betrachten ist; die nachfolgende Ableitung der Bahnelemente bleibt einem einfachen Uebergange vorbehalten.

In der vorliegenden Schrift handelt es sich um eine Erweiterung der Lösung in der Richtung zweier Gesichtspunkte, die für die Praxis der Bahnbestimmung von besonderem Nutzen sein dürften. Einmal tritt in der allgemeinen Methode auf Grund der verwendeten Parameter eine rechnerische Schwierigkeit auf, wenn die Örter des Planeten oder Kometen sich sehr nahe der Grundebene des Koordinatensystems befinden; denn in diesem Falle kleiner Breiten β können die zu Grunde gelegten Parameter:

$$C = \operatorname{ctg} \beta \cos \lambda \quad \text{und} \quad S = \operatorname{ctg} \beta \sin \lambda \quad (\lambda = \text{Länge, longitud})$$

grosse Beträge erreichen, was für die Rechnung lästig ist und zu ungenauen Ergebnissen führen kann. Man könnte sich in solchen Fällen einer beliebig gewählten neuen Fundamentalebene bedienen, was aber eine Reihe lästiger und Zeit in An-

En la introducción de un trabajo publicado en *Astronomische Nachrichten*, tomo 210, n^{os} 5022-23 sobre *Eine Methode der Bahnbestimmung für alle Exzentrizitäten*, que en lo sucesivo designaremos I, he expuesto hasta dónde es más conveniente considerar la deducción de las coordenadas heliocéntricas y sus velocidades en lugar de los elementos de la órbita como camino más directo y fin de la determinación general de la órbita; la subsiguiente deducción de los elementos de la órbita queda reducida a un simple paso.

En la presente memoria se trata de una ampliación de la solución según dos puntos de vista de especial aplicación en la práctica de la determinación de órbitas. Ocurre en el método general una dificultad en los cálculos que proviene de los parámetros empleados cuando los lugares del planeta o cometa se encuentran muy próximos al plano fundamental del sistema de coordenadas, pues en este caso de pequeñas latitudes, β , los parámetros empleados:

alcanzan valores grandes, lo que es incómodo para el cálculo y puede conducir a resultados inexactos. En tales casos podría emplearse un nuevo plano fundamental elegido arbitrariamente, pero esto exigiría una serie molesta de transformaciones para el

spruch nehmender Transformationen für den neuen Himmelskörper wie für die Sonne erfordern würde; andererseits kann man aber zeigen, wie durch einen Kunstgriff mittels einer gleich anfangs vorgenommenen Transformation der Ausgangsgleichungen die bei kleinen Breiten auftretende Kalamität im Verhalten der Parameter ausgeschaltet werden kann.

Ein zweiter Gesichtspunkt bezieht sich auf die spezielle Bahnbestimmung der parabolischen Kometen. Bereits in meiner Schrift I habe ich eine der Einheit der Exzentrizität entsprechende Methode entwickelt, späterhin dann in einer weiteren Arbeit II in den *Sitzungsberichten der Bayerischen Akademie der Wissenschaften*, Jahrgang 1928, S. 115-132, eine auf den Grundgleichungen der Arbeit I beruhende vereinfachte Methode aufgestellt. Diese Lösung lässt nun aber noch weitere für die Praxis wertvolle Vereinfachungen zu, die ich hier mitteilen möchte; sie bestehen unter anderem in der Mitteilung von Tafeln, die auf kürzestem, bequemem Wege die für die parabolische Bahnbestimmung charakteristische Hauptgleichung 6. Grades im Radiusvektor resp. in den Koordinaten aufzulösen gestatten. In diesem Kernpunkte dürfte ein grundlegender Vorzug gegenüber allen anderen Methoden liegen. Die Lösung der Kometenbahnbestimmung ist dadurch in eine Parallele mit der Bahnbestimmung der Planeten gebracht, deren Hauptgleichung 8. Grades ebenfalls mittels Tabellen für die Praxis bequem lösbar gemacht worden ist (s. I, Seite 90-94).

Herrn Direktor Ing. F. Aguilar bin ich für sein reges Interesse und seine liebenswürdige Redaktion des castellanischen Textes zu herzlichem Dank verbunden, ebenso wie den Herren A. Guillén und R. Platzeck, und meiner Tochter Gerda für die numerische Mitarbeit an den Tabellen.

nuevo cuerpo celeste y para el sol que tomarían mucho tiempo. En cambio, es posible mostrar que mediante un artificio que consiste en transformar de antemano las ecuaciones de partida, se puede eliminar la dificultad que presentan los parámetros en caso de pequeñas latitudes.

Un segundo punto de vista se refiere a la determinación especial de órbitas parabólicas de los cometas. Ya en mi trabajo I he desarrollado un método correspondiente a excentricidad unitaria, y después, en un II trabajo publicado en *Sitzungsberichten der Bayerischen Akademie der Wissenschaften* Jahrgang 1928, S. 115-132 he establecido un método simplificado que se apoya en las ecuaciones fundamentales de mi trabajo I. Pero esta solución permite todavía simplificaciones valiosas en las aplicaciones prácticas que quisiera comunicar aquí. Ellas consisten, entre otras, en la comunicación de tablas que permiten resolver de la manera más breve y cómoda la ecuación principal característica de 6° grado en el radio vector y en las coordenadas que se presenta en la determinación de órbitas parabólicas. Este método posee en este punto esencial una fundamental ventaja en frente de todos los demás. La solución de las órbitas cometarias resulta así comparable a la determinación de la órbita de los planetas, cuya ecuación principal de 8° grado se resuelve también cómodamente con tablas (v. I, págs. 90-94).

Agradezco cordialmente al Señor Director Ingeniero don Félix Aguilar su vivo interés y su amable redacción del texto castellano, e igualmente a los señores A. Guillén y R. Platzeck, y a mi hija Gerda, su colaboración en el cálculo de las tablas.

§ 1. Der Fall kleiner Breiten

Der grundlegende Gedanke zur allgemeinen Bahnbestimmung nach I beruhte darauf, dass die Beziehung zwischen den geozentrischen Koordinaten ξ , η , ζ des Planeten beliebiger Exzentrizität und den heliozentrischen Koordinaten x , y , z unter Elimination des geozentrischen Abstandes (s. I, pag. 83 (2), resp. III und IV) auf die Form gebracht wurden:

$$\begin{aligned} x_i &= C_i z_i - X_i \\ y_i &= S_i z_i - Y_i \end{aligned} \quad (1)$$

wo $i = 1, 2$ und 3 den 3 Beobachtungen u. die X , Y und $Z = 0$ den ekliptikalen Koordinaten der Sonne entsprechen; bei zeitlicher Potenzentwicklung der heliozentrischen Koordinaten um einen der 3 Örter und den ihm entsprechenden Zeitpunkt entstehen dann unter Berücksichtigung des Newtonschen Anziehungsgesetzes 6 in erster Näherung lineare Gleichungen zur Bestimmung der dem gewählten Zeitpunkt entsprechenden Koordinaten x , y , z und der zugehörigen Geschwindigkeitskomponenten x' , y' und z' . Sind nun die geozentrischen Breiten, wie jetzt voraus gesetzt werden soll, klein, sodass die Koeffizienten

$$(C = \text{ctg } \beta \cos \lambda \quad \text{und} \quad S = \text{ctg } \beta \sin \lambda)$$

beliebig grosse Werte annehmen können, so entsteht eine praktische Lästigkeit für die Bahnbestimmung, die in folgender Weise unter Abspalten des kritischen Nenners $\sin \beta$ vermieden werden kann, indem man (1) die folgende neue Form gibt:

$$\begin{aligned} x_i &= \cos \beta_i \cos \lambda_i \frac{z_i}{\sin \beta_i} - X_i \\ y_i &= \cos \beta_i \sin \lambda_i \frac{z_i}{\sin \beta_i} - Y_i \end{aligned} \quad (2)$$

wo

$$\frac{z_i}{\sin \beta_i} = \rho_i \quad \text{donde} \quad (3)$$

den geozentrischen Abstand bedeutet, der unabhängig von der Breite β bei der Bahnbestimmung stets

§ 1. El caso de pequeñas latitudes

La idea fundamental en la determinación general de órbitas según I, consiste en dar a la expresión que liga las coordenadas geocéntricas ξ , η , ζ del planeta, de excentricidad cualquiera, y las coordenadas heliocéntricas x , y , z , — eliminando la distancia geocéntrica — (v. I, pag. 83 (2), III y IV), la forma

donde $i = 1, 2$ y 3 corresponden a las 3 observaciones y X , Y , $Z = 0$, a las coordenadas eclípticas del sol. Al desarrollar las coordenadas heliocéntricas según potencias del tiempo en el contorno de una de las 3 posiciones y del instante respectivo, y si se tiene en cuenta la ley de atracción de Newton, resultan entonces 6 ecuaciones lineales en primera aproximación para la determinación de las coordenadas x , y , z del momento elegido, y además, las componentes de las velocidades x' , y' , z' . Si, como supondremos ahora, las latitudes geocéntricas son pequeñas, de modo que los coeficientes

pueden alcanzar valores arbitrariamente grandes, se presenta en tal caso una dificultad práctica para la determinación de la órbita, evitable eliminando el denominador crítico $\sin \beta$, y dando a la (1) la siguiente forma:

representa la distancia geocéntrica, distancia que para el caso de la determinación de la órbita se

von begrenzter Grösse bleibt, und wo die anstelle von C und S getretenen Koeffizienten $\cos \beta \cos \lambda$ und $\cos \beta \sin \lambda$ ebenfalls begrenzt, absolut stets kleiner als 1 bleiben. Um nun aber den Ausnahmefall kleiner Breiten auf den Normalfall, wie beabsichtigt und möglich ist, zu reduzieren, ist es nicht zweckmässig, neben ρ ihre zeitliche Ableitung ρ' anstelle von z und z' als Unbekannte einzuführen; es bedarf tatsächlich nur einer geeigneten Umformung der Gleichungen (2) mittels eines Kunstgriffes, um die Reduktion auf die Normalform zu erreichen. Wählt man (2) entsprechend eine der Grössen $\frac{z_i}{\sin \beta_i}$ als Unbekannte, so sind die beiden anderen analogen Grössen mittels zeitlicher Potenzentwicklung auf die gewählte Unbekannte reduzierbar. Die Wahl der Unbekannten bezüglich i ist aber nicht beliebig, wie wir sogleich sehen werden, sondern in der Praxis eindeutig festgelegt.

Wird beispielsweise $\frac{z_2}{\sin \beta_2}$ als Unbekannte angenommen, so ist es zweckmässig, die Gleichungen (2) in die weitere, aber identische Form überzuführen

mantiene limitada independientemente de la latitud β , y donde los coeficientes $\cos \beta$, $\cos \lambda$ y $\cos \beta \sin \lambda$ que figuran en lugar de C y S igualmente limitados, se mantienen en valor absoluto inferiores a 1. Ahora bien, para reducir el caso excepcional de latitudes pequeñas al normal, como lo pretendemos y es posible, no es conveniente introducir como incógnitas ρ y su derivada ρ' según el tiempo en lugar de z y z' . En realidad sólo es necesario transformar adecuadamente la ecuación (2) mediante un artificio, para obtener la reducción al caso normal. Si en (2) se elige como incógnita una de las cantidades $\frac{z_i}{\sin \beta_i}$, entonces pueden expresarse las otras dos magnitudes análogas en fusión de la incógnita elegida, por medio de un desarrollo según potencias del tiempo. La elección de la incógnita, en cuanto al valor de i , no es sin embargo arbitraria, sino que está condicionada por la práctica, como lo veremos de inmediato.

Si por ejemplo, se toma $\frac{z_2}{\sin \beta_2}$ como incógnita, es conveniente poner la ecuación (2) en la forma idéntica

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1' \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1} \cdot \frac{z_1}{\sin \beta_2} - X_1 \\ y_1 &= S_1' \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1} \cdot \frac{z_1}{\sin \beta_2} - Y_1 \\ x_2 &= C_2' \frac{z_2}{\sin \beta_2} - X_2 \\ y_2 &= S_2' \frac{z_2}{\sin \beta_2} - Y_2 \\ x_3 &= C_3' \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_3} \cdot \frac{z_3}{\sin \beta_2} - X_3 \\ y_3 &= S_3' \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_3} \cdot \frac{z_3}{\sin \beta_2} - Y_3 \end{aligned} \tag{4}$$

wobei

donde

$$C_i' = \cos \beta_i \cos \lambda_i \quad \text{und} \quad S_i' = \cos \beta_i \sin \lambda_i.$$

Bei der getroffenen Wahl der Unbekannten verbleibt dann die Darstellung von $\frac{z_1}{\sin \beta_2}$ und $\frac{z_3}{\sin \beta_2}$ als Funktion der Unbekannten $\frac{z_2}{\sin \beta_2}$, und zwar mittels zeitlicher Potenzentwickelungen :

$$\begin{aligned} z_1 &= z_2 + \tau_1 z_2' + \frac{\tau_1^2}{2!} z_2'' + \dots \\ z_3 &= z_2 + \tau_3 z_2' + \frac{\tau_3^2}{2!} z_2'' + \dots \end{aligned} \tag{5}$$

wo $\tau_i = t_i - t_2$, sodass folglich die in (4) auftretenden Funktionen $\frac{z_1}{\sin \beta_2}$ u. $\frac{z_3}{\sin \beta_2}$ mittels (5) lineare Funktionen der beiden Grössen resp. nunmehrigen Unbekannten $u_2 = \frac{z_2}{\sin \beta_2}$ und $u_2' = \frac{z_2'}{\sin \beta_2}$ werden, wobei u_2' keine Ableitung, sondern nur eine passende Abkürzung bezeichnet, und zu berücksichtigen ist, dass z_2'' und die höheren Ableitungen nach der Zeit infolge des Newtonschen Gesetzes, wonach $z_2'' = -\frac{k^2 z_2}{r_2^3}$, als lineare Funktionen von z_2 und z_2' darstellbar sind.

Bezüglich der beiden neuen Unbekannten u_2 und u_2' bleibt noch zu bemerken, dass wohl $\frac{z_2}{\sin \beta_2} = \rho_2$, aber $\frac{z_2'}{\sin \beta_2} \neq \rho_2'$, da allgemein $z' = \rho' \sin \beta + \rho \cos \beta \cdot \beta'$ sodass $\frac{z_2'}{\sin \beta_2} = \rho_2' + \rho_2 \operatorname{ctg} \beta_2 \cdot \beta_2'$, also zu ρ_2' , noch ein Glied in der zeitlichen Ableitung β_2' hinzutritt.

Andererseits folgt aus der Wahl von u_2 und u_2' , dass die Grössen z_2 und z_2' aus ihnen nur durch einfache Multiplikation mit dem Faktor $\sin \beta_2$ hervorgehen.

Entscheidend für die Brauchbarkeit und den Nutzen der neuen Gleichungen (4) ist nun die praktisch wichtige Bedingung, dass die dort auftretenden Faktoren $\frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1}$ und $\frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_3}$ bei kleinen resp.

Con esta elección de la incógnita, la representación de $\frac{z_1}{\sin \beta_2}$ y $\frac{z_3}{\sin \beta_2}$ en función de $\frac{z_2}{\sin \beta_2}$ por medio de un desarrollo según potencias del tiempo está dado por

donde $\tau_i = t_i - t_2$, de modo que las funciones $\frac{z_1}{\sin \beta_2}$ y $\frac{z_3}{\sin \beta_2}$ que aparecen en (4), se convierten mediante (5) en funciones lineales de las dos magnitudes o nuevas incógnitas $u_2 = \frac{z_2}{\sin \beta_2}$ y $u_2' = \frac{z_2'}{\sin \beta_2}$ donde u_2' no designa una derivada sino que es una abreviatura adecuada, y donde ha de tenerse en cuenta que z_2'' y las derivadas de orden superior según el tiempo pueden representarse como funciones lineales de z_2 y z_2' de acuerdo con la ley de Newton, según la cual $z_2'' = -\frac{k^2 z_2}{r_2^3}$.

En lo que se refiere a las dos nuevas variables u_2 y u_2' queda por observar todavía que, si bien $\frac{z_2}{\sin \beta_2} = \rho_2$, en cambio $\frac{z_2'}{\sin \beta_2} \neq \rho_2'$, dado que en general $z' = \rho' \sin \beta + \rho \cos \beta \cdot \beta'$, de modo que $\frac{z_2'}{\sin \beta_2} = \rho_2' + \rho_2 \operatorname{ctg} \beta_2 \cdot \beta_2'$, es decir, que además de ρ_2' aparece un término más en la derivada β_2' según el tiempo.

Por otra parte, resulta de la elección de u_2 y u_2' , que las cantidades z_2 y z_2' se obtienen de aquéllas por simple multiplicación por el factor $\sin \beta_2$.

Decisiva para la aplicabilidad y utilidad de la nueva ecuación (4) es la condición importante desde el punto de vista práctico, de que los factores $\frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1}$ y $\frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_3}$ se mantengan pequeños para latitud-

beliebig kleinen Breiten ebenfalls klein bleiben. Hierfür ist nach den Gleichungen (4) nur notwendig, dass der Absolutwert von β_2 der kleinste unter den 3 Absolutwerten der β_i ist, indem alsdann die genannten Faktoren, absolut genommen, kleiner als 1 bleiben, während anderenfalls diese Faktoren über jede Grenze hinaus gross werden können. Bei Erfüllung der Bedingung erscheinen dadurch gemäss (2) die Koeffizienten C'_i und S'_i , die absolut schon in jedem Falle kleiner als 1 sind, in (4) noch weiter verkleinert.

Erfüllt nun aber grade β_2 nicht die gestellte Bedingung, sondern β_1 oder β_3 , so muss $\frac{z_1}{\sin \beta_1}$ oder $\frac{z_3}{\sin \beta_3}$ als Ausgangsgrösse resp. als Unbekannte gewählt werden, sodass entsprechend z_2 und z_3 oder z_1 und z_2 nach Potenzen der Zeit zu entwickeln, und dementsprechend die Gleichungen (4) umzustellen sind, worauf wir sogleich noch einmal zurückkommen werden.

Liefert der 2. Ort bei der allgemeinen Bahnbestimmung den kleinsten Absolutwert der 3 Breiten, sodass die Gleichungen (4) unmittelbar anzuwenden sind, so ist es zweckmässig, die Produkte der Koeffizienten auf den rechten Seiten von (4) mit neuen Bezeichnungen zu versehen, sodass nämlich :

$$\begin{aligned} C_1' \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1} = c_1, & \quad C_2' = c_2, & \quad C_3' \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_3} = c_3 \\ S_1' \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1} = s_1, & \quad S_2' = s_2, & \quad S_3' \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_3} = s_3. \end{aligned} \quad (7)$$

Dann haben die Gleichungen (4) dieselbe Form wie (1), sodass auch die Form der Lösung dieselbe wie in I ist, wobei nur z_2 mit $u_2 = \frac{z_2}{\sin \beta_2}$ und z_2' mit $u_2' = \frac{z_2'}{\sin \beta_2}$ zu vertauschen ist; man erhält alsdann nach (15) in I: $u_2 = x \left(\frac{1}{T^3} - \frac{1}{r_2^3} \right)$, sodass nach (1) auch x_2 und y_2 eine lineare Funktion von dem Klammerausdruck $\frac{1}{T^3} - \frac{1}{r_2^3}$ wird.

des kleinen und auch für die beliebig kleinen Breiten. Para ello sólo es necesario, de acuerdo a la ecuación (4), que el valor absoluto de β_2 sea el menor entre los tres valores absolutos de las β_i ; dado que en tal caso los factores mencionados se mantienen en valor absoluto menores a 1, mientras que en el caso contrario pueden tomar valores arbitrariamente grandes. Cuando se cumple la condición mencionada, los coeficientes C'_i y S'_i que ya de por sí son menores que 1, se hacen aún menores.

Ahora bien, si no es precisamente β_2 la que cumple la condición antedicha, sino β_1 ó β_3 , entonces debe elegirse como cantidad inicial o incógnita $\frac{z_1}{\sin \beta_1}$ ó $\frac{z_3}{\sin \beta_3}$ respectivamente, de modo que deben desarrollarse z_2 y z_3 ó z_1 y z_2 según potencias del tiempo y transformarse las ecuaciones (4) en correspondencia con ello, asunto sobre el cual volveremos más adelante.

Si en la determinación general de la órbita la segunda posición da el menor valor absoluto de las tres latitudes, con lo que pueden aplicarse directamente las ecuaciones (4), entonces es conveniente cambiar las designaciones de los productos de los coeficientes del miembro derecho de (4), de modo que

En tal caso las ecuaciones (4) tienen la misma forma que (1) y la solución también será de la misma forma que en I; debiéndose permutar sólo z_2 con $u_2 = \frac{z_2}{\sin \beta_2}$ y z_2' con $u_2' = \frac{z_2'}{\sin \beta_2}$. Se obtiene entonces según I (15): $u_2 = x \left(\frac{1}{T^3} - \frac{1}{r_2^3} \right)$ de manera que según (1) también x_2 y y_2 resultan funciones lineales de la expresión entre paréntesis $\frac{1}{T^3} - \frac{1}{r_2^3}$.

Substituiert man dann diese Ausdrücke für x_2 , y_2 und $z_2 = u_2 \cdot \sin \beta_2$ in die Bedingungsgleichung $r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$, so erhält man die für die Bahnbestimmung charakteristische Gleichung 8. Grades in u_2 , damals in r_2 . Nach u_2 wird z_2 bekannt und damit alsdann alle anderen Koordinaten und Geschwindigkeiten.

Falls aber β_1 den kleinsten Absolutwert unter den 3 Breiten liefert, sodass $\frac{z_1}{\sin \beta_1} = u_1$ und $\frac{z_1'}{\sin \beta_1} = u_1'$ die Unbekannten fixieren, so ist in den obigen Formeln, wie in I, überall nur der Index 2 mit 1 und umgekehrt zu vertauschen. Analog sind, wenn β_3 den kleinsten Absolutwert der Breiten liefert, $u_3 = \frac{z_3}{\sin \beta_3}$ und $u_3' = \frac{z_3'}{\sin \beta_3}$ die Unbekannten, sodass alsdann oben, wie in I, überall der Index 2 mit 3 und umgekehrt zu vertauschen ist.

In diesem letzteren Falle schreiten die zeitlichen Potenzentwickelungen nach $t_1 - t_3$ und $t_2 - t_3$ fort, im vorhergehenden Falle nach $t_2 - t_1$ und $t_3 - t_1$, dagegen in dem durch die obigen Formeln definierten Falle nach $t_1 - t_2$ und $t_3 - t_2$, sodass dieser Fall der schnellst konvergente ist, wenn dieser Umstand auch bei den fast immer kleinen Zwischenzeiten praktisch nicht ins Gewicht fallen wird.

Statt in den Formeln die Indices zu vertauschen, falls der 2. Ort nicht das Minimum der 3 Absolutbreiten ergibt, kann man auch die Indices der Beobachtungen ändern, wobei der Ort mit der kleinsten Absolutbreite dann immer den Index 2 erhält, während die Indices 1 und 3 beliebig verteilbar sind. Auch in diesem Falle sind die Zeitdifferenzen der Potenzentwickelungen vergrößert, wie schon oben.

Im Falle der parabolischen Kometenbahnen, wo die Verwendung von nur 5 Beobachtungsstücken notwendig und hinreichend ist, z. B. von β_1, λ_1 des 1. Ortes, β_3, λ_3 des 3. Ortes und nur λ_2 des 2. Ortes,

Si ahora se sustituyen estas expresiones para x_2 , y_2 y $z_2 = u_2 \cdot \sin \beta_2$ en la ecuación de condición $r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$ se logra la ecuación característica de 8º grado en u_2 (anteriormente en r_2) para la determinación de u_2 . Después de u_2 se determina z_2 y con ello las demás coordenadas y velocidades.

Pero si en cambio β_1 tiene el menor valor absoluto entre las tres latitudes, de modo que $\frac{z_1}{\sin \beta_1} = u_1$ y $\frac{z_1'}{\sin \beta_1} = u_1'$ fijan las incógnitas, entonces deben permutarse los índices 2 y 1 e inversamente en las fórmulas anteriores y en I. Análogamente, si β_3 da el menor valor absoluto de las latitudes, en tal caso son $u_3 = \frac{z_3}{\sin \beta_3}$ y $u_3' = \frac{z_3'}{\sin \beta_3}$ las incógnitas, de manera que se deben permutar los índices 2 y 3 e inversamente en lo anterior y en I.

En este último caso los desarrollos según el tiempo siguen potencias de $t_1 - t_3$ y $t_2 - t_3$ y, en el caso anterior, de $t_2 - t_1$ y $t_3 - t_1$, pero en el definido por las fórmulas de más arriba, siguen potencias de $t_1 - t_2$ y $t_3 - t_2$; de modo que este último es el de mayor convergencia, aun cuando esta circunstancia prácticamente no pesa dado que los intervalos son casi siempre pequeños.

En lugar de permutar los índices en las fórmulas, en el caso de no ser la segunda posición la que proporciona el mínimo del valor absoluto de las tres latitudes, pueden permutarse también los índices de las observaciones, con lo que la posición con la menor latitud absoluta recibe siempre el índice 2, pudiéndose asignar arbitrariamente los índices 1 y 3. También en este caso son aumentadas las diferencias de los tiempos en los desarrollos en series de potencias, como ya vimos más arriba.

Tratándose de órbitas parabólicas de los cometas, donde sólo 5 elementos de observación son necesarios y suficientes, por ejemplo β_1, λ_1 de la primera posición, β_3, λ_3 de la tercera y sólo λ_2 de la segun-

tritt deshalb eine Vereinfachung ein, insofern durch die Ausschaltung von β_2 die 3. und 4. Gleichung von (4) zu der einen von β_2 unabhängigen Gleichung zusammengezogen werden können :

$$\frac{y_2 + Y_2}{x_2 + X_2} = \operatorname{tg} \lambda_2. \quad (8)$$

Infolge dieses Fortfalles von β_2 verbleibt alsdann nur die Feststellung, ob β_1 oder β_3 den kleineren Absolutwert besitzt, damit entweder $\frac{z_1}{\sin \beta_1}$ oder $\frac{z_3}{\sin \beta_3}$ als Unbekannte zu wählen ist. Eine weitere direkte Ausführung in dem Falle der Kometen erfolgt später am Schluss von § 2, nachdem in § 2 zuerst die neue Methode der Kometenbahnbestimmung dargestellt worden ist.

§ 2. Bahnbestimmung der Parabolischen Kometen

Aus der allgemeinen für alle Exzentrizitäten gültigen Bahnbestimmungsmethode, wie sie in I dargelegt worden ist, war die auf die Kometen bezügliche spezielle Methode der parabolischen Bahnbestimmung herauszuschälen, da man in der Praxis bei Kometen zunächst durchwegs eine Darstellung auf Grund der parabolischen Arbeitshypothese sucht, um sie bei Versagen durch den Uebergang auf die elliptische Bewegungsform zu ersetzen.

Zur Darlegung der Methode dienen wieder die Gleichungen (1) als Ausgangspunkt; mit Rücksicht auf den Charakter der ersten Bahnbestimmung wird hierbei vorausgesetzt, dass unter Bezug der Koordinaten auf die Ekliptik als Fundamentalebene die Sonnenbreiten vernachlässigt werden, ebenso wie die Reduktion auf den *locus fictus* und die Lichtzeit. Es handle sich also um eine Bahnbestimmung auf 5 Dezimalen, wenn auch für eine Erhöhung der Genauigkeit unter Mitnahme von Korrekturen keinerlei Schwierigkeiten in theoretischer Hinsicht bestehen, indem nur die Restglieder zu erweitern sind. Ich glaube aber, dass man bei ersten Bahn-

da, se obtiene una simplificación eliminando β_2 por lo que las ecuaciones tercera y cuarta de (4) pueden reunirse en una ecuación independiente de β_2 :

Ausente β_2 sólo queda por determinar si β_1 ó β_3 dan el menor valor absoluto, para elegir como incógnita $\frac{z_1}{\sin \beta_1}$ ó $\frac{z_3}{\sin \beta_3}$. Un desarrollo directo en el caso de los cometas figura más adelante, al final del § 2, luego de considerar el método para la determinación de órbitas de cometas.

§ 2. Determinación de órbitas parabólicas de cometas

Del método general para la determinación de órbitas, válido para todas las excentricidades, en la forma dada en I, habrá que separar el método especial para la determinación de órbitas parabólicas, dado que en la práctica, en el caso de cometas, se busca siempre una representación en base de la hipótesis parabólica, para sustituirla, si no resulta, por el pasaje a la forma elíptica del movimiento.

Como punto de partida para la exposición del método sirven nuevamente las ecuaciones (1). Teniendo en cuenta el carácter de la primera determinación de la órbita se supone aquí que, al referir las coordenadas a la eclíptica como plano fundamental, se desprecian las latitudes del sol, y se prescinde asimismo de la reducción al *locus fictus* y de la corrección por el tiempo de aberración. Trátase por lo tanto de una determinación de órbita de 5 decimales, aun cuando no existen dificultades de orden teórico para aumentar la exactitud por medio del agregado de correcciones, para lo cual basta ampliar los términos del resto. Creo sin em-

bestimmungen der Kometen auf eine 6-, 7-, ja 8-stellige Rechnung, wie sie immer noch vorkommen, aus den bekannten Gründen verzichten sollte.

Am Schluss von § 1 ist bereits angedeutet worden, wie man bei Verwendung von 5 Beobachtungsstücken z. B. von $\lambda_1, \beta_1, \lambda_2, \lambda_3, \beta_3$ d. h. unter Ausschaltung von β_2 die entsprechenden 5 Gleichungen aufstellt, um dann unter Hinzufügung der parabolischen Bedingungsgleichung die 6 Gleichungen zu erlangen, aus denen die 6 Unbekannten $x_1, y_1, z_1, x_1', y_1',$ und z_1' folgen. Diese Gleichungen, abgesehen zunächst von der Parabelbedingung, lauten unter Bezugnahme auf (8):

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & x_1 = C_1 z_1 - X_1 \\ \text{(II)} \quad & y_1 = S_1 z_1 - Y_1 \\ \text{(III)} \quad & y_2 - x_2 \operatorname{tg} \lambda_2 = X_2 \operatorname{tg} \lambda_2 - Y_2 \\ \text{(IV)} \quad & x_3 = C_3 z_3 - X_3 \\ \text{(V)} \quad & y_3 = S_3 z_3 - Y_3 \end{aligned} \tag{9}$$

Diese Gleichungen mögen zur Darstellung von x_1', y_1', z_1', x_1 und y_1 als Funktion von z_1 dienen, wonach z_1 selbst nach Substitution der übrigen 5 Unbekannten in die parabolische Bedingungsgleichung aus dieser folgt.

Man hätte statt z auch jede andere Koordinate oder Geschwindigkeitskomponente als zu bestimmenden Parameter wählen können, aber die Wahl von z ist besonders zweckmässig, da sie die leichte Auswahl der in Frage kommenden, der Beobachtung entsprechenden Wurzel gestattet; denn allgemein geben unsere Gleichungen für z 2 Lösungen z und zwar immer eine positive und eine negative, wozu weiter unter weitere Erklärungen folgen werden. Da einem positiven z eine heliozentrisch wie geozentrisch positive Breite, einem negativen z eine negative Breite entspricht, so ist auf Grund der beobachteten Breite unmittelbar zu entscheiden, welche Wurzel z der Beobachtung entspricht. In Ausnahmefällen sind bei kleinem heliozentrischem

bargo que para las primeras determinaciones de las órbitas de los cometas puede prescindirse, por las razones conocidas, de un cálculo con 6, 7 o aun 8 cifras, como todavía suele usarse a veces.

Al final del § 1 se ha indicado como de 5 elementos de observación, por ejemplo: $\lambda_1, \beta_1, \lambda_2, \lambda_3, \beta_3$, es decir eliminando β_2 , se obtienen las 5 ecuaciones correspondientes, y con el agregado de la ecuación de la condición de parabolismo se obtienen entonces las 6 ecuaciones, de las que resultan las 6 incógnitas $x_1, y_1, z_1, x_1', y_1',$ y z_1' . Estas ecuaciones, dejando de lado por ahora la condición de parabolismo, son, si se tiene en cuenta la (8):

Estas ecuaciones servirán para la representación de x_1', y_1', z_1', x_1 e y_1 en función de z_1 , donde z_1 por su parte resulta de la ecuación de condición de parabolismo al sustituir las 5 incógnitas restantes en la misma.

En lugar de z podría haberse elegido cualquier otra coordenada o componente de la velocidad como parámetro a determinarse, pero la elección de z es en especial conveniente, dado que permite elegir fácilmente la raíz correspondiente a las observaciones que entra en cuestión; puesto que en general nuestras ecuaciones para z dan dos soluciones z , siempre una positiva y una negativa, acerca de lo cual siguen explicaciones más adelante. Dado que a un valor positivo de z corresponde una latitud positiva, tanto heliocéntrica como geocéntrica, y que a un z negativo corresponde una latitud negativa, puede deducirse de inmediato en base a la latitud observada, cuál de las raíces corresponde a las observaciones. En casos excepcionales, cuando

Sonnenabstände r eines Kometen d. h. bei auch kleinem z noch 2 weitere Lösungen möglich, und zwar so, dass insgesamt entweder eine positive Wurzel z und 3 negative, oder eine negative Wurzel z und 3 positive Wurzeln möglich sind.

Die Umwandlung der Gleichungen (9) in solche, die nur noch von den $x_1, y_1, z_1, x_1', y_1'$ und z_1' abhängig sind, erfolgt durch die Taylor-Entwickelungen :

$$\begin{aligned} x_a &= x_1 + \tau_a x_1' + \frac{\tau_a^2}{2!} x_1'' + \frac{\tau_a^3}{3!} R(x_a) \\ y_a &= y_1 + \tau_a y_1' + \frac{\tau_a^2}{2!} y_1'' + \frac{\tau_a^3}{3!} R(y_a) \quad z = 2, 3 \\ z_a &= z_1 + \tau_a z_1' + \frac{\tau_a^2}{2!} z_1'' + \frac{\tau_a^3}{3!} R(z_a) \end{aligned} \quad (10)$$

Wäre man nicht von den Koordinaten des 1., sondern des 2. Ortes ausgegangen, so hätte man sowohl die Gleichungen I als auch II entwickeln müssen, während bei der Wahl von $x_1, y_1, etc.$ nur die eine Gleichung III zu entwickeln ist; in jedem Falle sind aber die Gleichungen IV und V zu entwickeln. Der Formelersparnis bei Wahl des 1. Ortes als Basis steht nur der kleine Nachteil gegenüber, dass alsdann der 3. Ort nach Potenzen von $t_3 - t_1$ zu entwickeln ist, während bei Wahl des 2. Ortes die Entwicklung nach der kleineren Zeitdifferenz $t_3 - t_2$ fortschreitet, während ich der Vereinfachung der Formeln den Vorzug geben möchte.

Auf Grund des Newtonschen Gesetzes ist nun, wenn k^2 die Gaussche Konstante :

$$x_1'' = -k^2 \frac{x_1}{r_1^3}, \text{ etc.}, \quad (11)$$

ferner

y además

$$x_1''' = 3k^2 \frac{r_1'}{r_1^4} - k^2 \frac{x_1^3}{r_1^3}, \text{ etc.},$$

analog die weiteren Ableitungen, s. meine Abhandlung I, S. 83-84, Formeln (7) und (8). Die

la distancia heliocéntrica r de un cometa al sol es pequeña, es decir, cuando también z es pequeño, puede haber dos soluciones más, y tales, que en total haya una raíz positiva de z y 3 negativas, o de lo contrario una raíz negativa y tres positivas.

La transformación de las ecuaciones (9) en otras que sólo dependen de $x_1, y_1, z_1, x_1', y_1'$ y z_1' , se obtiene por el desarrollo de Taylor :

Si en lugar de partir de la 1ª posición lo hubiésemos hecho de la 2ª, entonces hubiera sido menester desarrollar tanto la ecuación I como la II, mientras que con la elección de $x_1, y_1, etc.$, sólo se requiere desarrollar la ecuación III, y en cada caso resta desarrollar IV y V. La economía en las fórmulas, que resulta de tomar como base la 1ª posición, tiene el pequeño inconveniente de que entonces la 3ª posición debe desarrollarse según potencias de $t_3 - t_1$, mientras que si se elige la 2ª posición el desarrollo se efectúa según potencias de diferencias de tiempo $t_3 - t_2$ menores. He dado preferencia a la mayor simplicidad de las fórmulas.

De acuerdo a la ley de Newton, si k^2 es la constante de Gauss, tenemos :

y análogamente las demás derivadas (véase mi trabajo I, págs. 83-84, fórmulas (7) y (8)). Los térmi-

Restglieder in (10) genügen den folgenden Formeln :

$$R(x_\alpha) = x_1''' + \frac{1}{4} \tau_\alpha x_1^{IV} + \dots, \quad (12)$$

analog $R(y_\alpha)$ und $R(z_\alpha)$, wo $\alpha = 2, 3$.

Da diese R-Glieder von der Ordnung $k^2 \tau_\alpha^3$ sind, so bilden sie nur kleine Zusatzglieder zu den Termen 0 Grades und sind deshalb erst bei der Verbesserung der 1. Lösung zu berücksichtigen, falls nicht r sehr klein ist.

Die Reihenentwicklung nach τ_α führt dann III, IV und V von (9) bei gleichzeitiger Substitution von x_1 und y_1 als Funktion von z_1 zufolge I und II in die 3 neuen Gleichungen über :

$$\begin{aligned} \text{(III a)} \quad y_1' \tau_2 &= x_1' \operatorname{tg} \lambda_2 - (S_1 z_1 - Y_1) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_2^2}{r_1^3} \right) + \operatorname{tg} \lambda_2 (C_1 z_1 - X_1) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_2^2}{r_1^3} \right) \\ &\quad + X_2 \operatorname{tg} \lambda_2 - Y_2 - \frac{1}{6} \tau_2^3 R(y_2) + \frac{1}{6} \tau_2^3 \operatorname{tg} \lambda_2 R(x_2) \\ \text{(IV a)} \quad x_1' \tau_3 - z_1' C_3 \tau_3 &= - (C_1 z_1 - X_1) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_3^2}{r_1^3} \right) + C_3 z_1 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_3^2}{r_1^3} \right) - X_3 \\ &\quad - \frac{1}{6} \tau_3^3 R(x_3) + \frac{1}{6} \tau_3^3 C_3 R(z_3) \\ \text{(V a)} \quad y_1' \tau_3 - z_1' S_3 \tau_3 &= - (S_1 z_1 - Y_1) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_3^2}{r_1^3} \right) + S_3 z_1 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_3^2}{r_1^3} \right) - Y_3 \\ &\quad - \frac{1}{6} \tau_3^3 R(y_3) + \frac{1}{6} \tau_3^3 S_3 R(z_3). \end{aligned} \quad (13)$$

Diese Gleichungen ergeben die x_1' , y_1' , z_1' als Funktion von z_1' , während x_1 und y_1 schon direkt durch die Gleichung I und II von (9), als lineare Funktionen von z_1 bekannt sind.

Werden dann nach Division der Gleichung IIIa durch τ_2 die von $k^2 \tau_2$, $k^2 \tau_2^2$ etc. abhängenden Glieder als Rest zu einem Term, Korr. IIIb zusammengefasst, so ergibt sich :

nos del resto en (10) satisfacen a las fórmulas siguientes :

análogamente $R(y_\alpha)$ y $R(z_\alpha)$, donde $\alpha = 2, 3$.

Como estos términos del resto son del orden $k^2 \tau_\alpha^3$, ellos constituyen pequeños términos complementarios de los de grado cero, y por lo tanto sólo han de tenerse en cuenta en la corrección de la 1ª solución, siempre que r no sea muy pequeño.

Si se sustituye x_1 e y_1 en función de z_1 de acuerdo a I y II, el desarrollo según τ_α transforma los III, IV y V en las 3 ecuaciones :

Estas ecuaciones dan x_1' , y_1' , z_1' en función de z_1 , mientras que x_1 e y_1 ya se obtienen directamente de las ecuaciones I y II de (9) como funciones lineales de z .

Si después de dividir la ecuación IIIa por τ_2 se reúnen en un término designado con Korr. IIIb los términos dependientes de $k^2 \tau_2$, $k^2 \tau_2^2$, etc., entonces se obtiene :

$$\begin{aligned} \text{(III b)} \quad y_1' &= x_1' \operatorname{tg} \lambda_2 + z_1 \frac{C_1 \operatorname{tg} \lambda_2 - S_1}{\tau_2} - \frac{Y_2 - Y_1}{\tau_2} + \operatorname{tg} \lambda_2 \frac{X_2 - X_1}{\tau_2} + \text{Korr. III b} \\ \text{wo Korr. III b} &= \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_2}{r_1^3} y_1' - \frac{1}{2} \frac{k^2}{r_1^3} \tau_2 x_1' \operatorname{tg} \lambda_2 - \frac{1}{6} \tau_2^2 R(y_2) + \frac{1}{6} \tau_2^2 \operatorname{tg} \lambda_2 R(x_2). \end{aligned}$$

Die Substitution von y_1' gemäss IIIb in Va und darauf folgende Division von Va und IVa durch τ_3 nebst Auftrennung wieder in Terme o. und höheren Grades ergibt die neuen Gleichungen :

$$(IVb) \quad x_1' - z_1' C_3 = z_1 \frac{C_3 - C_1}{\tau_3} - \frac{X_3 - X_1}{\tau_3} + \text{Korr. IVb}$$

$$(Vb) \quad x_1' \operatorname{tg} \lambda_2 - z_1' S_3 = z_1 \left(-\frac{C_1 \operatorname{tg} \lambda_2 - S_1}{\tau_2} + \frac{S_3 - S_1}{\tau_3} \right) + \frac{Y_2 - Y_1}{\tau_2} - \frac{Y_3 - Y_1}{\tau_3} - \frac{X_2 - X_1}{\tau_2} \operatorname{tg} \lambda_2 + \text{Korr. Vb.} \quad (14)$$

wobei

donde

$$\text{Korr. IVb} = -\frac{1}{6} \tau_3^2 R(x_3) + \frac{1}{6} \tau_3^2 C_3 R(z_3) + \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_3}{r_1^3} x_1 - \frac{1}{2} C_3 z_1 \frac{k^2 \tau_3}{r_1^3}$$

$$\text{Korr. Vb} = -\text{Korr. IIIb} + \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_3}{r_1^3} y_1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 \tau_3}{r_1^3} S_3 z_1 - \frac{1}{6} \tau_3^2 R(y_3) + \frac{1}{6} \tau_3^2 S_3 R(z_3)$$

wo x_1 resp. y_1 für die Koeffizienten $C_1 Z_1 - X_1$ resp. $S_1 z_1 - Y_1$ substituiert worden sind.

In den beiden Gleichungen IVb wie Vb bilden die Nenner τ_2 und τ_3 nur scheinbar Pole, indem sie bei $\tau_2 = 0$ und $\tau_3 = 0$ kein Unendlichwerden der entsprechenden Glieder bewirken, weil sie nur Differenzenquotienten angehören, die im Allgemeinen niemals wegen der τ_i grosse Glieder hervorbringen, wie man direkt oder mittels einfacher Umformung erkennen kann; z. B. erhält man für den in Vb auftretenden Term :

$$T = \frac{C_1 \operatorname{tg} \lambda_2 - S_1}{\tau_2}$$

durch Umformung :

$$T = \frac{\operatorname{ctg} \beta_1 \cdot \sin(\lambda_2 - \lambda_1)}{\cos \lambda_2 \cdot \tau_2},$$

wo der Quotient $\frac{(\sin \lambda_2 - \lambda_1)}{\tau_2}$ in der Grenze bei $\tau_2 = 0$ in die Geschwindigkeit $\frac{d\lambda}{dt}$ übergeht, die in der Praxis allgemein nur mässige Werte annimmt. Zur Abkürzung einiger Differenzenquotienten werden deshalb folgende Abkürzungen eingeführt :

Sustituyendo y_1' de acuerdo a IIIb en Va, dividiendo luego Va y IVa por τ_3 , y separando nuevamente los términos de grado o y los de grado superior, resultan las nuevas ecuaciones :

en las que se han sustituido x_1 e y_1 por los coeficientes $C_1 z_1 - X_1$ y $S_1 z_1 - Y_1$ respectivamente.

En las ecuaciones IVb y Vb los denominadores τ_2 y τ_3 forman polos sólo aparentemente, pues para $\tau_2 = 0$ y $\tau_3 = 0$, no se hacen infinitos los términos correspondientes, ya que sólo pertenecen a cocientes de diferencias, que en general nunca originan términos grandes debidos a t_i como puede reconocerse directamente o por medio de una simple transformación. Para el término que aparece en Vb se obtiene, por ejemplo

y por transformación :

donde el cociente $\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{\tau_2}$ se transforma, en el

límite para $\tau_2 = 0$, en la velocidad $\frac{d\lambda}{dt}$, que en general en la práctica sólo toma valores moderados. Para simplificar algunos cocientes de diferencias introduciremos las siguientes abreviaturas :

$$\begin{aligned} \frac{S_3 - S_1}{\tau_3} = S_3', & \quad \frac{X_3 - X_1}{\tau_3} = X_3', & \quad \frac{Y_3 - Y_1}{\tau_3} = Y_3', \\ \frac{C_3 - C_1}{\tau_3} = C_3', & \quad \frac{X_2 - X_1}{\tau_2} = X_2', & \quad \frac{Y_2 - Y_1}{\tau_2} = Y_2', \end{aligned} \quad (16)$$

Im Wesentlichen ergibt sich hieraus nach (14), dass, wie die linken Seiten von IVb und Vb, so auch die rechten Seiten lineare Funktionen von Geschwindigkeiten sind, ohne dass durch die Nenner t Pole entstehen können.

Solange die Bedingung einer parabolischen Kometenbewegung noch nicht eingeführt worden ist, müssen die Erdörter ebenfalls den Bedingungen I-V von (9) und ihren Umformungen genügen. Da für die Erde $z_1 = z_1' = 0$ ist, so folgt hieraus bei Substitution in (Vb):

$$(a) x_1' \cdot \operatorname{tg} \lambda_2 = - \frac{X_2 - X_1}{\tau_2} \operatorname{tg} \lambda_2$$

wenn in erster Näherung

$$\frac{Y_2 - Y_1}{\tau_2} - \frac{Y_3 - Y_1}{\tau_3} = 0$$

gesetzt wird, weil bei kleinen Zwischenzeiten die Differenzenquotienten nahezu gleich, ihre Differenz also entsprechend gegen 0 konvergieren muss. Folglich ergibt die vorletzte Formel:

$$(a) x_1' = - \frac{X_2 - X_1}{\tau_2} = - X_2'$$

Dieselbe Beziehung folgt aus IVb. Unter denselben Annahmen folgen aus I und II:

$$x_1 = - X_1 \quad \text{und} \quad y_1 = - Y_1, \text{ d. h.}$$

die heliozentrischen Koordinaten des Erdortes. Folglich gibt analog die Gleichung IIIb:

$$(b) y_1' = x_1' \operatorname{tg} \lambda_2 - \frac{Y_2 - Y_1}{\tau_2} + \operatorname{tg} \lambda_2 \frac{X_2 - X_1}{\tau_2}$$

oder mit Rücksicht auf (a): $y_1' = - Y_2'$, sodass also x_1' und y_1' in die entsprechenden heliozentrischen Geschwindigkeitskomponenten der Erde übergehen, was zur Kontrolle zu zeigen war.

En esencial se obtiene aquí, de acuerdo a (14), que tanto los miembros derechos como los izquierdos de IVb y Vb son funciones lineales de las velocidades, sin que de los denominadores puedan resultar polos en t .

Mientras no se ha introducido la condición de un movimiento parabólico de cometa, las posiciones de la tierra también deben satisfacer a las condiciones I-V de (9) y a sus expresiones transformadas. Dado que para la tierra es $z_1 = z_1' = 0$, resulta de aquí por sustitución en Vb:

donde en primera aproximación se ha puesto

ya que para pequeños intervalos de tiempo los cocientes de diferencias son aproximadamente iguales, y por lo tanto su diferencia debe converger a cero. Por lo tanto, resulta de la última fórmula:

Esta misma expresión resulta de IVb. En base a las mismas suposiciones resultan de I y II:

es decir, las coordenadas heliocéntricas de la posición de la tierra. En consecuencia surge en forma análoga, de la ecuación IIIb:

o, teniendo en cuenta (a) $y_1' = - Y_1'$, de modo que x_1' e y_1' se transforman en las componentes heliocéntricas de la velocidad de la tierra, lo que debíamos demostrar como control.

Sieht man nun zunächst von den Restgliedern der Gleichungen IVb und Vb ab, so erhält man in 1. Näherung die folgende Auflösung von IVb und Vb nach x_1' und z_1' :

$$\begin{aligned} (x_1') &= \frac{1}{D} \left[-S_3 (z_1 C_3' - X_3') + C_3 \left\{ z_1 \left(\frac{S_1 - C_1 \operatorname{tg} \lambda_2}{\tau_2} + S_3' \right) - X_2' \operatorname{tg} \lambda_2 + Y_2' - Y_3' \right\} \right] \\ (z_1') &= \frac{1}{D} \left[z_1 \left(\frac{S_1 - C_1 \operatorname{tg} \lambda_2}{\tau_2} + S_3' \right) - X_2' \operatorname{tg} \lambda_2 - \operatorname{tg} \lambda_2 (z_1 C_3' - X_3') + Y_2' - Y_3' \right] \end{aligned} \quad (17)$$

wo die Determinante $D = -S_3 + C_3 \operatorname{tg} \lambda_2$, und wo die Einklammerung der Unbekannten die 1. Näherung anzeigen soll.

Mit Rücksicht auf die Korrekturen Korr. IVb und Korr. Vb erhält man dann die verbesserten Werte:

$$\begin{aligned} x_1' &= (x_1') + \frac{1}{D} [-S_3 \cdot \text{Korr. IVb} + C_3 \cdot \text{Korr. Vb}] \\ z_1' &= (z_1') + \frac{1}{D} [-\operatorname{tg} \lambda_2 \text{Korr. IVb} + \text{Korr. Vb}] \end{aligned} \quad (18)$$

Wir können also z_1' die Form geben:

$$z_1' = \alpha' z_1 + \beta' \quad (19)$$

wo die Koeffizienten α' und β' nach (17) die folgende Bedeutung haben, wenn die Differenzenquotienten in X, Y, S und C überall mit X', Y' etc. bezeichnet werden:

$$\begin{aligned} \alpha' &= + \frac{1}{D} (D_1 + S_3' - C_3' \operatorname{tg} \lambda_2) \\ \beta' &= \frac{1}{D} [(X_3' - X_2') \operatorname{tg} \lambda_2 + Y_2' - Y_3'] \end{aligned} \quad (20)$$

wo

$$D_1 = \frac{S_1 - C_1 \operatorname{tg} \lambda_2}{\tau_2} \quad (21)$$

Der Ausdruck für β' zeigt, dass β' allgemein eine kleine Grösse hat, da β' mit $X_2' = X_3'$ u. $Y_2' = Y_3'$ verschwindet. Analog zu z_1' hat x_1' nach (17) die Form:

Si se prescinde por el momento de los términos del resto de las ecuaciones IVb y Vb, se alcanza en primera aproximación la siguiente resolución de IVb y Vb según x_1' y z_1' :

donde el determinante es $D = -S_3 + C_3 \operatorname{tg} \lambda_2$, y los paréntesis en las incógnitas indican que se trata de una primera aproximación.

Si se tienen en cuenta las correcciones Korr. IVb y Korr. Vb se logran los valores corregidos:

Podemos por lo tanto dar a z_1' la forma

donde los coeficientes α' y β' tienen, de acuerdo a (17), la siguiente significación:

expresiones en las que los cocientes de diferencias en X, Y, S y C siempre se han indicado con X', Y' etc. La expresión para β' muestra que β' tiene en general un valor pequeño, ya que se anula para $X_2' = X_3'$ e $Y_2' = Y_3'$. En analogía con z , x tiene de acuerdo a (17) la forma:

$$x_1' = \gamma' z_1 + \delta' \quad (22)$$

wo

donde

$$\gamma' = \frac{1}{D} [-S_3 C_3' + C_3 D_1 + C_3 S_3'] \quad (23)$$

$$\delta' = \frac{1}{D} [S_3 X_3' - C_3 X_2' \operatorname{tg} \lambda_2 + (Y_2' - Y_3') C_3]$$

Wird in Anbetracht der kleinen Zwischenzeiten in 1. Näherung $X_2' = X_3' = X'$ und analog: $Y_2' = Y_3' = Y'$ gesetzt, so reduziert sich in δ' die Klammer rechter Hand auf:

Si en consideración a los pequeños intervalos de tiempo se pone en primera aproximación $X_2' = X_3' = X'$ y análogamente $Y_2' = Y_3' = Y'$, entonces el paréntesis del miembro derecho de δ' se reduce a

$$S_3 X_3' - C_3 X_2' \operatorname{tg} \lambda_2 = X' (S_3 - C_3 \operatorname{tg} \lambda_2) = -DX',$$

sodass folglich

de modo que

$$\delta' = -X' \quad (23a)$$

Schliesslich folgt y_1' aus IIIb, nach Substitution von $x_1' = \gamma' z_1 + \delta_1'$, in der analogen Form:

Finalmente, efectuando la sustitución $x_1 = \gamma' z_1 + \delta_1'$, se obtiene y_1' de IIIb en la forma análoga:

$$y_1' = \epsilon' z_1 + \zeta' + \text{Korr. IIIb} \quad (24)$$

wo die Koeffizienten folgende Bedeutung haben:

donde los coeficientes tienen el siguiente significado:

$$\epsilon' = \gamma' \operatorname{tg} \lambda_2 - D_1 \quad (25)$$

wo

$$\zeta' = \delta' \operatorname{tg} \lambda_2 - Y_2' + X_2' \operatorname{tg} \lambda_2$$

Bei Substitution von $\delta = -X_2'$ reduziert sich ζ' auf die einfache Form:

Efectuando la sustitución $\delta' = -X_2'$, ζ' se reduce a la forma simple

$$\zeta' = -Y_2' \quad (25a)$$

Es bleibt nur noch zu bemerken, dass die restlichen Unbekannten x_1 und y_1 bereits nach I und II als lineare Funktionen von z_1 dargestellt worden sind.

Sólo falta observar que las incógnitas restantes x_1 e y_1 han sido representadas como funciones lineales de z_1 , de acuerdo a I y II.

Zur Bestimmung von z_1 selbst verbleibt schliesslich die Substitution von x_1' , y_1' und z_1' als Funktion von z_1 in die parabolische Bedingungsgleichung:

Para determinar z_1 queda por sustituir x_1' , y_1' y z_1' en función de z en la ecuación de la condición de parabolismo:

$$v_1^2 = \frac{2k^2}{r_1} = x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 \quad (26a)$$

wo v_1 die Geschwindigkeit und wozu noch die r als Funktion von x_1 , y_1 und z_1 definierende Beziehung tritt:

donde v_1 representa la velocidad y donde aparece la expresión que define r_1 en función de x_1 , y_1 y z_1 :

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \quad (26b)$$

Werden die rechten Seiten der beiden Gleichungen (26a, b) durch Substitution von I und II von (9), ferner von (19), (22) und (24) in Funktionen von z_1 verwandelt, so ergeben sich die folgenden beiden Gleichungen zur Bestimmung der beiden Unbekannten r_1 und z_1 :

$$r_1^2 = cz_1^2 + dz_1 + e \quad (27a)$$

$$2 \cdot \frac{k^2}{r_1} = c'z_1^2 + d'z_1 + e' \quad (27b)$$

wo

$$\begin{aligned} c &= 1 + C_1^2 + S_1^2 = \operatorname{cosec}^2 \beta_1 & \text{y} & & c' &= \gamma'^2 + \varepsilon'^2 + \alpha'^2 \\ d &= -2(C_1 X_1 + S_1 Y_1) & & & d' &= 2(\alpha'\beta' + \gamma'\delta' + \varepsilon'\zeta') \\ e &= X_1^2 + Y_1^2 = R_1^2 & & & e' &= \beta'^2 + \delta'^2 + \zeta'^2 \end{aligned}$$

Quadriert man die Gleichung (27b) und multipliziert sie mit der Gleichung (27a), so entsteht die folgende Gleichung 6. Grades in z_1 :

$$4k^4 = (cz_1^2 + dz_1 + e)(c'z_1^2 + d'z_1 + e')^2 \quad (28a)$$

oder, wenn noch $c' = c''k^2$, $d' = d''k^2$ und $e' = e''k^2$ gesetzt wird:

$$F(z) = f_0 z^6 + f_1 z^5 + f_2 z^4 + f_3 z^3 + f_4 z^2 + f_5 z + f_6 = 0 \quad (28b)$$

worin:

$$\begin{aligned} f_0 &= cc''^2, & f_1 &= 2cc''d'' + c''^2d, & f_2 &= c(d''^2 + 2c''e'') + 2c''d''d + c''^2e \\ f_3 &= 2cd''e'' + d(d'' + 2c''e'') + 2c''d''e, & f_4 &= ce''^2 + 2dd''e'' + e(d''^2 + 2c''e'') \\ f_5 &= de''^2 + 2ed''e'', & f_6 &= ee''^2 - 4 \end{aligned}$$

auf deren Auflösung wir sogleich weiter unten wie auch in Beispiel zurückkommen.

Bestimmt man andererseits z_1^2 und z_1 aus den beiden Gleichungen (27a) und (27b), als wenn sie 2 in z_1^2 und z_1 lineare Gleichungen wären, so folgt:

$$\begin{aligned} z_1^2 &= \frac{1}{\Delta} \left[(r_1^2 - e) d' - \left(\frac{2k^2}{r_1} - e' \right) d \right] \\ z_1 &= \frac{1}{\Delta} \left[- (r_1^2 - e) c' + \left(\frac{2k^2}{r_1} - e' \right) c \right] \end{aligned} \quad (29)$$

wo die Determinante $\Delta = cd' - c'd$.

Bei Erhebung der 2. Gleichung zum Quadrat und Gleichsetzung mit der 1. Gleichung folgt dann

Si se transforman ambas ecuaciones (26)a, b en funciones de z_1 , mediante la sustitución de I y II de (9) y de (19), (22) y (24), se obtienen las siguientes ecuaciones para la determinación de las incógnitas r_1 y z_1 :

Elevando al cuadrado la ecuación (27b) y multiplicándola por la (27a) se obtiene la siguiente ecuación de 6° grado en z_1 :

o, si se pone $c' = c''k^2$, $d' = d''k^2$ y $e' = e''k^2$ resulta:

donde

sobre cuya solución volveremos más tarde, y también en el ejemplo.

Si se determina z_1^2 y z_1 de las dos ecuaciones (27a) y (27b), como si se tratara de dos ecuaciones lineales en z_1^2 y z_1 , resulta:

donde el determinante $\Delta = cd' - c'd$.

Elevando al cuadrado la 2ª ecuación e igualándola a la primera, resulta nuevamente una ecuación

wiederum eine Gleichung 6. Grades in r , die nach Potenzen von r geordnet folgendermassen lautet :

$$K_0 r^6 + K_2 r^4 + K_3 r^3 + K_4 r^2 + K_5 r + K_6 = 0 \quad (30)$$

worin die Koeffizienten die folgende Bedeutung haben :

$$K_0 = c'^2, K_2 = -2hc' - \Delta d', K_3 = -4k^2 cc', K_4 = h^2 - \Delta g, K_5 = 4k^2 ch + 2k^2 \Delta d, K_6 = 4k^4 c^2 \quad (31)$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde :

$$g = -ed' + e'd, \quad h = ec' - ce'.$$

Die Form (30) wird zweckmässigerweise nur bei $r_1 < 1$ benutzt, während bei $r_1 > 1$ die durch r_1^6 dividierte Gleichung Anwendung findet :

$$K_6 \left(\frac{1}{r_1}\right)^6 + K_5 \left(\frac{1}{r_1}\right)^5 + K_4 \left(\frac{1}{r_1}\right)^4 + K_3 \left(\frac{1}{r_1}\right)^3 + K_2 \left(\frac{1}{r_1}\right)^2 + K_0 = 0. \quad (30)$$

Vor der Darlegung einer praktischen Auflösung der Gleichung 6. Grades in r ist es zweckmässig, die Anzahl der reellen Wurzeln zu kennen, und ferner ein Kriterium zu besitzen, um die der Beobachtung entsprechende Wurzel auswählen zu können. Wie man aus der Definition von K_0 , K_3 und K_6 ersieht, ist stets $K_0 > 0$, $K_3 < 0$ und $K_6 > 0$, während K_2 , K_4 und $K_5 \geq 0$ sein können. Folglich ergeben sich die in der beistehenden Tafel zusammengestellten 8 Möglichkeiten der Vorzeichenfolge in der Gleichung 6. Grades :

de 6º grado en r_1 que si se la ordena según potencias de r tiene la siguiente forma :

en la que los coeficientes tienen la siguiente significación :

donde por abreviar hemos puesto :

La forma (30) sólo se usa para $r_1 < 1$, mientras que para $r_1 > 1$ se aplica la ecuación dividida por r_1^6 :

Antes de entrar a resolver prácticamente la ecuación de 6º grado es conveniente conocer el número de las raíces reales, y poseer un criterio para seleccionar la raíz que corresponde a la observación. De la definición de K_0 , K_3 y K_6 resulta que siempre es $K_0 > 0$, $K_3 < 0$ y $K_6 > 0$, mientras que K_2 , K_4 y K_5 pueden ser mayores o menores que cero. Por esta razón resultan las 8 posibilidades para la sucesión de los signos en la ecuación de 6º grado, que figuran en la tabla adjunta :

	K_0	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	Z
1)	+	+	-	+	+	+	2
2)	+	+	-	+	-	+	4
3)	+	+	-	-	+	+	2
4)	+	+	-	-	-	+	2
5)	+	-	-	+	+	+	2
6)	+	-	-	+	-	+	4
7)	+	-	-	-	+	+	2
8)	+	-	-	-	-	+	2

Auf Grund der Anzahl der Vorzeichenwechsel folgt dann nach dem Satze von Descartes die in der letzten Kolumne unter Z angegebene Höchstzahl der möglichen positiven reellen Wurzeln r . Demnach sind in 6 Fällen 2 positive Wurzeln r , und in 2 Fällen 4 positive Wurzeln möglich. Es lässt sich aber zeigen, dass stets eine der positiven Wurzeln für die Darstellung der Beobachtungen nicht in Frage kommt, sodass nur eine oder 3 positive Wurzeln r verbleiben, also nur 1 oder 3 Lösungen möglich sind. Die Grundgleichungen I-V von (9) werden nämlich auch dann befriedigt, wenn alle Längen λ mit $\lambda + 180^\circ$ vertauscht und zugleich alle Breiten β mit entgegengesetztem Vorzeichen versehen werden, da alsdann sämtliche Koeffizienten in den 5 Gleichungen, also C_i , S_i und $\operatorname{tg} \lambda_2$ unverändert bleiben. Die fingierten Örter liegen dann alle diametral zu den tatsächlich beobachteten, sodass die entsprechenden Koordinaten z das entgegengesetzte Vorzeichen haben wobei die beiden zugehörigen Werte von r wie auch die absoluten z allgemein von einander verschieden sind. Ergibt die Gleichung 6. Grades also nur 2 reelle positive Wurzeln r so entspricht nur die eine Wurzel der tatsächlichen Beobachtung, wobei das der beobachteten Breite entsprechende Vorzeichen der aus den n berechneten z -Werte die brauchbare Wurzel r ausscheidet. Hat aber die Gleichung 6. Grades 4 reelle positive Wurzeln r ergeben, so kommt die den diametralen Ort darstellende Wurzel r in Wegfall, sodass noch 3 positive Wurzeln r verbleiben und somit eine 3-fache Lösung möglich erscheint.

Die graphische Darstellung der beiden Gleichungen (27a) und (27b) bestätigt und erweitert diese Betrachtungen und gibt die Möglichkeit zu einer weiteren Methode der Bestimmung der Unbekannten r_1 und z_1 . Dabei stellt (27a), wenn $r_1^2 = w_1 = cz_1^2 + dz_1 + e = \text{Ordinate}$ ($z = \text{Abscisse}$ gesetzt wird, eine gewöhnliche Parabel 2. Ordnung dar, deren Achse parallel zur w -Achse ver-

En base al número de cambios de signo se obtiene, según el teorema de Descartes, el número máximo de raíces r reales y positivas posibles indicadas en la última columna con la designación Z . De acuerdo a esto hay 6 casos con 2 raíces y 2 con 4 raíces positivas. Puede mostrarse que en todos los casos hay una raíz que no entra en consideración para la representación de las observaciones, de modo que sólo quedan una o tres raíces positivas, es decir, que sólo pueden presentarse una o tres soluciones. En efecto, las ecuaciones fundamentales I-V de (9) también quedan satisfechas si se permutan las longitudes λ con $\lambda + 180^\circ$ y simultáneamente se cambia el signo de todas las longitudes, dado que así permanecen invariados todos los coeficientes en las 5 ecuaciones, es decir, C_i , S_i y $\operatorname{tg} \lambda_2$. Las posiciones ficticias se encuentran entonces en posiciones diametrales con respecto a las posiciones realmente observadas, de modo que las coordenadas z correspondientes tienen signo contrario, siendo los dos valores de r así como los valores absolutos de z en general distintos entre sí. Si la ecuación de 6º grado no proporciona nada más que 2 raíces reales y positivas r , entonces sólo una de ellas corresponde realmente a la observación. El signo de los valores de z calculados a partir de r , signo que corresponde a la latitud observada, hace evidente la raíz r utilizable. Pero si, en cambio, la ecuación de 6º grado ha proporcionado 4 raíces reales y positivas, entonces la raíz r que corresponde a los puntos diametrales queda eliminada, de manera que restan 3 raíces positivas y con ello parece posible una solución triple.

La representación gráfica de las dos ecuaciones (27a) y (27b) confirma y amplía estas consideraciones y ofrece la posibilidad de un nuevo método para la determinación de las incógnitas r_1 y z_1 . Aquí (27a) representa, si se pone $r_1^2 = w_1 = cz_1^2 + dz_1 + e = \text{ordenada}$ ($z = \text{abscisa}$), una parábola común de 2º orden, cuyo eje es paralelo al eje w y cuya parte convexa esté dirigida hacia abajo y

läuft und deren konvexe Seite nach unten zeigt, und schliesslich ganz in der oberen Halbebene gelegen ist, weil $w_1 = r_1^2$ stets eine positive Grösse ist. Bringt man w_1 zwecks Deutung des Koeffizienten d auf die Form: $w_1 = \rho^2 - 2\rho \cos \Delta + 1$, wenn in dem Dreieck Komet-Erde-Sonne ρ die geozentrische Kometenentfernung, Δ der Winkel an der Erde und die Entfernung Erde-Sonne in erster Annäherung gleich 1 ist, so folgt aus dem Vergleich der beiden Formen für w , nachdem noch $z = \rho \sin \beta$ und $e = R^2 = 1$ substituiert worden ist: $d = -\frac{2 \cos \Delta}{\sin \beta}$ und nebenher noch $c = \frac{1}{\sin^2 \beta}$, was schon von früher her bekannt ist. Bringen wir nun w_1 auf die Normalform:

$$c \left(z + \frac{d}{2c} \right)^2 = w - 1 + \frac{d^2}{4c},$$

so sind also die Koordinaten des Scheitelpunktes der Parabel w_1 :

$$z_0 = -\frac{d}{2c} = \cos \Delta \sin \beta, \text{ y } w_0 = 1 - \frac{d^2}{4c} = \sin^2 \Delta,$$

und ferner ist der Parameter der Parabel

$$p = \frac{1}{2c} = \frac{1}{2} \sin^2 \beta,$$

entsprechend also der Form:

$$(z - z_0)^2 = 2p(w - w_0).$$

Folglich unterliegen die Scheitelkoordinaten und der Parameter den Bedingungen: $z_0 \leq 1$, und $0 \leq w_0 \leq 1$, ferner $p \leq 0.5$; folglich ist der Abstand des Scheitels S vom Anfangspunkt: $s = \sqrt{w_0^2 + z_0^2} = \sqrt{1 - \cos^2 \Delta \cos^2 \beta} \leq 1$ (astr. Einheit), sodass der Scheitel mit abnehmendem Δ und β in den Anfangspunkt $z = w = r = 0$ rückt, da β gleichzeitig mit Δ klein wird und verschwindet.

Analog ist: $w_2 = r^2 = \frac{4k^4}{(c'z^2 + d'z + e')^2}$ eine stets positive in der oberen Halbebene gelegene Kurve,

que se encuentra en su totalidad en el semiplano superior, dado que $w_1 = r_1^2$ es una cantidad positiva. Poniendo w_1 en la forma: $w_1 = \rho^2 - 2\rho \cos \Delta + 1$, con el objeto de evidenciar el coeficiente d , siendo en el triángulo determinado por el cometa, el sol y la tierra, ρ la distancia geocéntrica del cometa, Δ el ángulo en la tierra y habiendo puesto en primera aproximación la distancia tierra-sol igual a 1, entonces resulta de la comparación de las 2 formas de w dadas, si previamente substituímos $z = \rho \sin \beta$ y $e = R^2 = 1$: $d = -\frac{2 \cos \Delta}{\sin \beta}$ y además: $c = \frac{1}{\sin^2 \beta}$, como ya sabemos de antes.

Si ponemos w_1 en la forma normal:

las coordenadas del vértice de la parábola w_1 están dadas por:

siendo además el parámetro de la parábola:

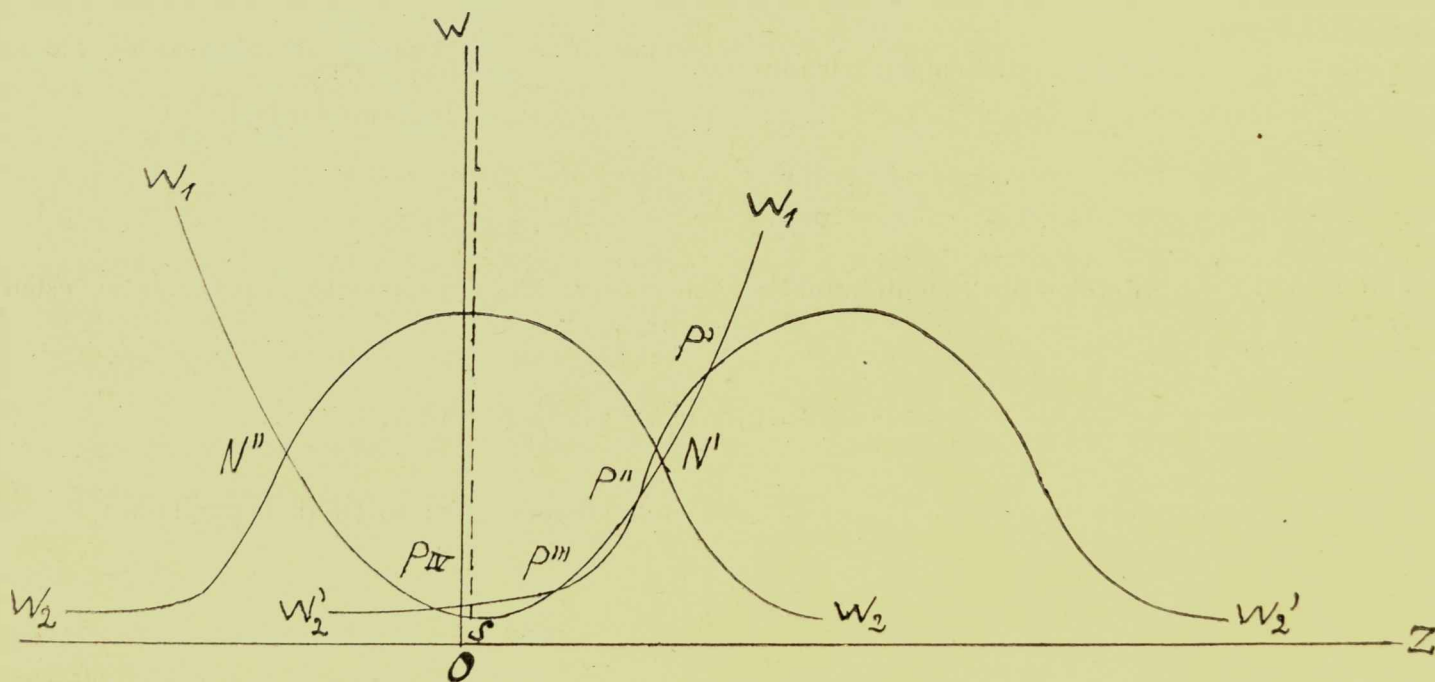
que corresponde por lo tanto a la forma:

En consecuencia, las coordenadas del vértice y el parámetro satisfacen a las condiciones: $z_0 \leq 1$ y $0 \leq w_0 \leq 1$; además $p \leq 0.5$; por lo tanto la distancia del vértice S al origen es $s = \sqrt{w_0^2 + z_0^2} = \sqrt{1 - \cos^2 \Delta \cos^2 \beta} \leq 1$ (unidad astronómica), de modo que al decrecer Δ y β , el vértice se acerca al origen $z = w = r = 0$, debido a que β decrece y se anula simultáneamente con Δ .

Análogamente $w_2 = r^2 = \frac{4k^4}{(c'z^2 + d'z + e')^2}$ es una curva siempre positiva que se encuentra en el semi-

wobei $\frac{1}{\sqrt{w_2}}$ wieder eine Parabel 2. Ordnung. Deshalb stellt w_2 als inverse Form des Quadrates dieser Parabel eine der Glockenform ähnliche Kurve dar, die sich mit wachsendem z der z -Achse asymptotisch anschmiegt; andererseits hat die Kurve dort ein Maximum, wo die Parabel $\frac{1}{\sqrt{w_2}}$ ein Minimum hat d. h. im Scheitel, wo $z = -\frac{d'}{2c'}$. Im Allgemeinen haben deshalb die Parabel w_1 und die inverse Form

plano superior, y donde $\frac{1}{\sqrt{w_2}}$ nuevamente una parábola de 2° orden. Por eso w_2 como expresión inversa del cuadrado de una parábola, representa una curva en forma de campana, que se aproxima asintóticamente al eje z cuando z crece; por otra parte, la curva tiene un máximo donde la parábola $\frac{1}{\sqrt{w_2}}$ tiene un mínimo, es decir en el vértice, donde $z = -\frac{d'}{2c'}$. Por eso en general la parábola w_1 y la



w_2 nur 2 Schnittpunkte N und N'' (s. die Figur) entsprechend 2 Wertepaaren (r, z) , wobei nur das eine Paar der Beobachtung entspricht, während das andere der diametralen Lösung angehörende Paar ausscheidet. Drei Schnittpunkte sind allgemein nicht möglich, da die Wurzeln der entsprechenden Gleichung 6. Grades in r resp. z immer nur paarweise reell sein können. Aber 4 Schnittpunkte sind möglich, wenn (s. die Figur, in der die Kurve w_2' dieselbe, nur in Richtung z verschobene Kurve w_2 darstellt) w_2' in der Weise an die Parabel w_1 heranrückt, dass w_1 von w_2 längs dem aufsteigenden oder absteigenden, um den Wendepunkt gelegenen

forma inversa w_2 sólo tienen 2 puntos de intersección N y N'' (véase la figura) que corresponden a dos pares de valores (r, z) de los cuales uno sólo pertenece a las observaciones, mientras que el otro elimina el par correspondiente a la solución diametral. En general no pueden existir 3 puntos de intersección, dado que las raíces de la ecuación correspondiente de 6° grado en r y z pueden ser sólo reales de a pares. Pero en cambio pueden presentarse 4 puntos de intersección (véase la figura en la que w_2' representa la misma curva w_2 , pero desplazada en la dirección de z) cuando w_2' se aproxima de tal manera a la parábola w_1 que a lo largo de la rama

Ast von w_2' in den 3 Punkten P' , P'' und P''' , und weiterhin noch in dem 4. Punkte P^{iv} geschnitten wird, und zwar auf dem asymptotisch verlaufenden Kurventeil von w_2' . Deshalb ist in diesem Punkte die Ordinate w , d. h. r klein, folglich auch z , da zu kleiner heliozentrischer Entfernung auch ein kleines z gehört. Würde analog der linke Parabelzweig von dem rechten Aste der Kurve w_2' geschnitten werden, so ergäben sich analog 4 Schnittpunkte. In beiden Fällen ist mindestens ein z -Wert vorhanden, der ein den anderen entgegengesetztes Vorzeichen hat, der diametralen Lösung entsprechend, sodass also in Konjunktionsnähe 1 oder 3 Lösungen möglich sind. Die Kleinheit von r und z im Punkte P^{iv} , vielleicht auch schon im Punkte P''' , wenn die Parabel w_1 und die Kurve w_2' besonders nahe an die z -Achse heranrücken, legt die Frage nach der Existenz dieser Lösungen nahe, insofern unsere Bahnbestimmungsmethode auf der Voraussetzung beruht, dass die Potenzentwicklungen der heliozentrischen Koordinaten nach der Zeit konvergieren. Deshalb ist die Konvergenz insbesondere im Falle kleinen heliozentrischen Abstandes näher zu untersuchen, zumal die Koeffizienten der Zeitpotenzen mit den Faktoren $\frac{1}{r^n}$ ($n = 3, 4$ etc.) behaftet sind, sodass die Restglieder mit kleinem r über alle Grenzen anwachsen können, während sie andererseits allgemein als kleine resp. zu vernachlässigende Größen vorausgesetzt waren.

Werden die heliozentrischen Koordinaten im Falle der parabolischen Kometenbewegung nach Potenzen der Zeit entwickelt, so ist der bis zum nächsten singulären Punkt reichende Konvergenzradius R , bei Entwicklung um den Zeitpunkt t herum, durch die folgende Formel festgelegt (s. Charlier, *Die Mechanik des Himmels*, Bd. 2):

$$R = \sqrt{R_0^2 + (t - T)^2},$$

ascendente o descendente de w_2 próxima al punto de inflexión se producen 3 puntos de intersección P' , P'' y P''' , y un cuarto punto de intersección P^{iv} se presenta en la parte asintótica de w_2' . Por esta razón en este punto es pequeña la ordenada w , es decir r , y por lo tanto también z , dado que a distancias heliocéntricas pequeñas también corresponden valores pequeños de z . Análogamente, si la rama izquierda de la parábola cortara a la rama derecha de la curva w_2' , se obtendrían también 4 puntos de intersección. En ambos casos existe por lo menos un valor de z que tiene signo contrario al de los demás, que corresponde a la solución diametral, de modo que en la proximidad de la conjunción pueden existir 1 ó 3 soluciones. Si la parábola w_1 y la curva w_2' se aproximan especialmente al eje z , la pequeñez de r y z en el punto P^{iv} , y quizás ya en el punto P''' , plantea la pregunta de la existencia de las soluciones, dado que nuestro método de determinación de órbitas se basa en la suposición de que convergen los desarrollos de las coordenadas heliocéntricas en serie de potencias según el tiempo. Debido a esta circunstancia debe estudiarse con más detención la convergencia especialmente en el caso de una distancia heliocéntrica pequeña, ya que los coeficientes de las potencias del tiempo presentan el factor $\frac{1}{r^n}$ ($n = 3, 4$ etc.) de manera que los términos del resto pueden sobrepasar todo límite para r pequeño, mientras que por otra parte habíamos supuesto que dichos términos fueran en general pequeños y también despreciables.

Si en el caso de movimiento parabólico de un cometa se desarrollan las coordenadas heliocéntricas según potencias del tiempo, entonces, al efectuar el desarrollo alrededor del punto t , el radio de convergencia que llega hasta el punto singular más próximo, está dado por la siguiente fórmula (Charlier, *Die Mechanik des Himmels*, Bd. 2):

wo T die Zeit des Periheldurchganges und R_0 fixiert ist durch den Ausdruck :

$$R_0 = \frac{2}{3} \sqrt{2} \frac{q^{3/2}}{k\sqrt{1+m}},$$

wo q = Periheldistanz. Folglich ist R_0 das Minimum des Konvergenzradius R , gültig für die zeitliche Potenzentwicklung um die Perihelzeit herum. Die numerische Rechnung zeigt, dass, wenn $q = 1$, der minimale Konvergenzradius $R = 54.8$ Tage beträgt; Folglich ist das Minimum bei $q = 0.3$: $R = 9.1$ Tage und bei $q = 0.1$: $R = 1.73$ Tage. Um ein anschauliches Bild bezüglich dieser Zeiten im Vergleich mit der Zeit zu haben, die vom Kometen benötigt wird den Bogen vom Perihel bis zur wahren Anomalie $w = 90^\circ$ zu durchlaufen, werde die $w = 90^\circ$ entsprechende Zeit aus der Barkerschen Gleichung berechnet; es ergibt sich :

$$t - T = U = \frac{4}{3} \sqrt{2} \frac{q^{3/2}}{k\sqrt{1+m}} = 2R_0$$

R_0 beläuft sich also auf die halbe Umlaufzeit des Kometen vom Perihel bis $w = 90^\circ$; die der Minimalzeit R_0 entsprechende wahre Anomalie w_0 folgt dann aus der Barkerschen Gleichung :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} w_0 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2} w_0 = \frac{2}{3},$$

sodass also, unabhängig von q , die wahre Anomalie rund $w_0 = 62^\circ$ beträgt, d. h. rund $2/3$ der Winkelbewegung des Kometen bis $w = 90^\circ$. Nehmen wir nun den für die Konvergenz ungünstigsten Fall an, dass der Komet sich bei der kleinen Periheldistanz $q = 0.1$ in Konjunktion u. zugleich im Perihel, zur Sonne befinde, so ist die minimale Konvergenzgrenze $R = 2R_0 = 3.5$ Tage, wenn der Komet einmal auf jeder Seite der Sonne symmetrisch beobachtet worden ist, wobei er einen Winkel von 124° in wahrer Anomalie durchlaufen hat, und die Potenzentwicklung nach der Zeit um die Perihel-

donde T representa el tiempo del paso por el perihelio y R_0 está dado por la expresión :

donde a su vez q es la distancia al perihelio. En consecuencia R_0 es el mínimo del radio de convergencia R , válido para el desarrollo según potencias del tiempo alrededor del tiempo del paso por el perihelio. El cálculo numérico muestra que, si $q = 1$, resulta para el radio de convergencia mínimo el valor $R = 54.8$ días; por lo tanto el mínimo para $q = 0.3$ es $R = 9.1$ días y para $q = 0.1$ es 1.73 días. Para tener un cuadro comparativo de estos tiempos con el que necesita el cometa para recorrer el arco comprendido entre el perihelio y el punto de anomalía verdadera $w = 90^\circ$, calculemos el tiempo correspondiente a $w = 90^\circ$, a partir de la ecuación de Barker; resulta :

R_0 se reduce por lo tanto a la mitad del tiempo que tarda el cometa en recorrer el trayecto entre perihelio y $w = 90^\circ$; la anomalía verdadera w_0 correspondiente al tiempo mínimo R_0 se obtiene por lo tanto de la ecuación de Barker :

de modo que la anomalía verdadera vale alrededor de $w_0 = 62^\circ$, independiente de q , es decir representa aproximadamente $2/3$ del movimiento angular del cometa hasta $w = 90^\circ$. Consideremos ahora el caso menos favorable para la convergencia, el que el cometa se encuentre a la pequeña distancia al perihelio $q = 0.1$ en conjunción al sol y al mismo tiempo en el perihelio; entonces el límite de convergencia mínimo es $R = 2R_0 = 3.5$ días, si el cometa ha sido observado simétricamente a ambos lados del sol. El ángulo recorrido por el cometa es de 124° en anomalía verdadera y el desarrollo según

zeit herum stattgefunden hat. Da dieser spezielle, für die Konvergenz ungünstigste Fall selten eintreten dürfte, zumal ein Komet mit so kleiner Perihelidistanz im Perihel selbst nicht beobachtet werden dürfte, so ist die Konvergenz unserer zeitlichen Reihenentwicklungen für alle praktischen Fälle als gesichert zu betrachten, unter Beachtung der Zeitgrenzen bei sehr kleinen Sonnenabständen, Folglich ist auch der Fall einer 3-fachen Lösung bei kleinem r möglich, auch wenn $r \geq 0.1$, wenn die Zeitgrenze in diesem extremen Falle weniger als 3.5 Tage beträgt.

Bezüglich der Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung 6. Grades in z : (28 b) $F(z) = 0$, ist zuerst noch zu bemerken, dass bei Beschränkung der Erdbahn auf einen Kreis die Konstanten $e = 1$ und $e' = k^2$, also $e'' = 1$ werden, wie aus der Ableitung weiter unten vorweggenommen sei. Dann reduziert sich folglich die Konstante f_6 in $F(z)$ auf $f_6 = e \cdot e''^2 - 4 = -3$ und der Koeffizient $f_0 = c \cdot e''^2$ ist stets positiv, weil, wie bereits gezeigt, c stets positiv ist, während über die Vorzeichen der übrigen Koeffizienten f_1 bis f_5 keine Aussage möglich ist. Aber wie diese Vorzeichen auch immer sein mögen, so folgt doch nach dem Descartesschen Satze auf Grund der Tatsache, dass $f_0 > 0$ und $f_6 < 0$, dass mindestens eine reelle positive Wurzel z , folglich auch eine reelle negative Wurzel z möglich ist, da die Wurzeln in Anbetracht des 6. Grades der Gleichung immer paarweise reell sein müssen; zudem muss der Beobachtung natürlicherweise mindestens eine reelle Lösung z entsprechen. Wie schon ausgeführt, entspricht die andere Lösung z der geozentrisch entgegengesetzten Lage eines finierten Kometen, der wie der beobachtete die Bedingungsgleichungen (9) erfüllt.

Es möge nun zur bequemen Auflösung der Hauptgleichung 6. Grades der Kometenbahnbestimmung, da eine analytische Lösung nicht möglich

potencias del tiempo se ha efectuado alrededor del tiempo de pasaje por el perihelio. Dado que este caso especial, que es el más desfavorable para la convergencia ha de presentarse pocas veces, puesto que un cometa con distancia tan pequeña al perihelio no ha de observarse en el perihelio mismo, entonces puede considerarse asegurada la convergencia de nuestros desarrollos en serie según el tiempo para todos los casos prácticos, si se tienen en cuenta los límites en el tiempo para distancias muy pequeñas al sol. En consecuencia, también es posible una solución triple para r pequeño, aún cuando $r \geq 0.1$, siempre que el límite en el tiempo representa en este caso extremo menos de 3.5 días.

En lo referente al número de raíces reales de la ecuación de 6º grado en z (28 b) $F(z) = 0$, queda por observar, en primer lugar, que si se reduce la órbita terrestre a un círculo, resulta $e = 1$ y $e = k^2$, es decir $e'' = 1$, como surge de la deducción de más adelante. Por consiguiente, la constante f_6 de $F(z)$ se reduce a $f_6 = e \cdot e''^2 - 4 = -3$ y el coeficiente $f_0 = c \cdot e''^2$ es siempre positivo, ya que, como acabamos de mostrar, c siempre es positivo, mientras que no puede decirse nada con respecto a los signos de los coeficientes f_1 a f_5 restantes. Pero cualquiera que sea este signo, resulta según el teorema de Descartes y de acuerdo al hecho de que $f_0 > 0$ y $f_6 < 0$, que es posible por lo menos una raíz real y positiva, y por lo tanto también una raíz real negativa, ya que en consideración al 6º grado de la ecuación las raíces siempre deben ser reales de a pares. Por otra parte debe corresponder a la observación por lo menos una solución real. Como ya queda expresado, la otra solución corresponde a la posición geocéntricamente opuesta de un cometa ficticio, que igual que el cometa observado, satisface a las ecuaciones de condición (9).

Dado que no es posible hallar una solución analítica de la ecuación fundamental de 6º grado de la determinación de órbitas de los cometas, proponga-

ist, eine tabellarische Lösung vorgeschlagen werden, die unmittelbar die ersten Näherungswerte der Wurzeln r und z der beiden Gleichungen (27a) und (27b) liefert, wobei die unbrauchbaren Wurzeln sogleich ausgeschieden werden. Zunächst erscheint eine tabellarische Auflösung der beiden genannten Gleichungen-unmöglich resp. zu kompliziert, weil jede Gleichung von 3 unabhängigen Parametern nämlich von c , d , e und c'' , d'' und e'' abhängig ist. Wären nur 4 unabhängige Parameter vorhanden und zwar je 2 für jede Gleichung, so wäre die tabellarische Auflösung der beiden Gleichungen leicht möglich, indem man bei festem r und z in einer Tabelle d als Funktion von c , in einer zweiten Tabelle d'' als Funktion von c'' tabulieren würde. Beide Tabellen werden bei gleichem r als Komponenten nebeneinandergestellt gedacht, während z in beiden Tabellen von $z = 0.1$ ab um je 0.1 ansteigt. Die Auflösung bestünde dann darin, dasjenige zugehörige gleiche Wertepaar (r, z) bei vorgelegten c , d , c'' u. d'' aufzusuchen, das nach der Anlage der Tabelle mit r als Hauptargument immer auch zu dem gleichen z im selben Tabellenpaar führt. Die vorausgesetzte Reduktion der beiden Gleichungen (27a) und (27b) auf nur 4 Argumente statt der vorhandenen 6 ist nun tatsächlich in einer ersten Näherung bei Voraussetzung einer kreisförmigen Erdbahn möglich.

Auf Grund der Definitionen zur Formel (27a) ist zunächst: $e = R_1^2$, wo R der Abstand Erde-Sonne und deshalb in einer ersten Annäherung $R = 1$ also $e = 1$ gesetzt werden darf, sodass die erste Gleichung (27a) damit auf 2 Parameter c und d reduziert ist. Ferner ist auch e' in einen einfachen Ausdruck überführbar und zwar auf Grund der obigen Formeln (27b): danach ist

$$e' = \beta'^2 + \delta'^2 + \zeta'^2,$$

und nach (20a), (23a) und (25a):

$$\delta' = -X' \quad \text{und} \quad \zeta' = -Y',$$

mos una solución cómoda que de inmediato nos proporcione valores aproximados de las raíces r y z de las ecuaciones (27a) y (27b), en la que las raíces superfluas quedan directamente eliminadas. Por de pronto parece imposible o muy complicada la resolución de las ecuaciones mencionadas, dado que cada ecuación depende de 3 parámetros independientes, que son c , d , e , y c'' , d'' y e'' . Si existieran sólo 4 parámetros independientes, dos para cada ecuación, sería fácil hallar la resolución tabular, expresando, para r y z fijos, d en función de c en una tabla y d'' en función de c'' en una 2ª tabla. Para un mismo r las 2 tablas deben considerarse colocadas una al lado de la otra, mientras que z crece a partir de $z = 0.1$ de 0.1 en 0.1 en ambas tablas. La resolución consistiría entonces en hallar para c , d , c'' y d'' dados aquel par (r, z) de valores correspondientes que de acuerdo a la construcción de la tabla, con r como argumento principal, conduce siempre al mismo valor de z . La reducción supuesta de las ecuaciones (27a) y (27b) a 4 argumentos en lugar de las 6 existentes, de hecho es posible en primera aproximación si se supone que la órbita terrestre es circular.

En base a las definiciones correspondientes a la fórmula (27a) es por de pronto: $e = R_1^2$, donde R es la distancia tierra-sol, y por lo tanto puede ponerse en primera aproximación $R = 1$, o sea $e = 1$, de manera que la primera ecuación (27a) se reduce así a dos parámetros c y d . Además también e' puede transformarse en una expresión simple, lo que se consigue mediante las fórmulas (27b). Según ello es:

y según (20a), (23a) y (25a) resulta:

wozu noch $\beta' = 0$ tritt, sodass folglich nach (27 b) siendo además $\beta' = 0$, de modo que según (27 b)
tenemos :

$$e' = X'^2 + Y'^2 = V'^2 \tag{34}$$

wo V' die lineare Geschwindigkeit der Erde in ihrer donde V' es la velocidad lineal de la tierra alrede-
 Bahn um die Sonne. Da andererseits dor del sol. Como por otra parte

$$V'^2 = k^2 \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{A} \right),$$

wo k^2 die Gaussche Konstante, R wieder der Radius- donde k^2 es la constante de Gauss, R nuevamente
 vektor und A die grosse Halbachse der Erdbahn, el radio vector y A el semieje mayor de la órbita
 so reduziert sich V' bei kreisförmiger Erdbahn mit terrestre, entonces V se reduce en el caso de órbita
 $R = A = 1$ auf $V'^2 = k^2$, sodass folglich $e' = k^2$, terrestre circular con $R = A = 1$, a $V' = k^2$, de
 und die Parabelbedingung reduziert sich auf : modo que $e' = k^2$ y la condición de parabolismo se
reduce a :

$$\frac{2k^2}{r} = e'z + d'z + k^2 \tag{35}$$

Sind r und z von der 0. Grössenordnung, so sind folglich die Koeffizienten e' und d' von der Grössenordnung k^2 , weshalb $e' = e''k^2$ und $d' = d''k^2$ gesetzt werden soll, sodass k^2 aus der Gleichung ganz herausfällt. Damit ist auch die Parabelbedingung auf nur 2 Parameter reduziert worden. Zu bemerken bleibt nur noch, dass nach den Definitionen (27 a) u. (27 b) stets e und $e' > 0$, also auch $e'' > 0$, während $d \geq 0$ ist, ebenso d' u. $d'' \geq 0$.

Si r y z son del orden de magnitud 0, entonces los coeficientes e' y d' son del orden k^2 , razón por la cual pondremos $e' = e''k^2$ y $d' = d''k^2$, de modo que k^2 desaparece de la ecuación. En esta forma se ha reducido también la condición de parabolismo a dos parámetros. Falta observar solamente que de acuerdo a las definiciones (27 a) y (27 b) siempre es e y $e' > 0$, luego también $e'' > 0$, mientras que $d \geq 0$, igualmente d y $d'' \geq 0$.

Nachdem die Gleichungen (27 a) u. (27 b) somit in 1. Näherung auf die nur je 2 Parameter enthaltenden Gleichungen :

Después de haber reducido las ecuaciones (27 a) y (27 b) en primera aproximación a las ecuaciones :

$$r^2 = cz^2 + dz + 1 \tag{36 a}$$

$$\frac{2}{r} = e''z^2 + d''z + 1 \tag{36 b}$$

reduziert worden sind, kann an die Herstellung der Tabellen geschritten werden. Bei der ersten Gleichung von (36) kann das Argument c wegen der Beziehung $c = \operatorname{cosec}^2 \beta$ mit der Breite des Kometen vertauscht werden, wobei dann der Tafelwert d sowohl für nördliche wie südliche Breiten gilt, weil c eine grade Funktion der Breite β ist. Bei der Berechnung von d als Funktion von z , r und

que sólo contienen dos parámetros cada una, puede emprenderse la construcción de las tablas. En la primera de las ecuaciones (36) puede permutarse el argumento c con la latitud del cometa si se tiene en cuenta la expresión $c = \operatorname{cosec}^2 \beta$, con lo cual el valor d de la tabla corresponde tanto para latitudes boreales como australes, dado que c es una función par de la latitud β . Al efectuar el cálculo de d en

c resp. β können aber z und β nicht beliebig gewählt werden, sondern sind in bestimmte von r abhängige Grenzen einzuschliessen. Denn für eine Kugel vom Radius r um die Sonne ist stets $z \leq r$ und folglich gehört dann zu einem festangenen z ein Maximum u. ein Minimum der von der Erde aus beobachteten Breite β , wie die geometrische Anschauung unmittelbar ergibt. Die beiden Grenzwerte β' und β'' sind bei kreisförmiger Erdbahn durch die folgenden Formeln definiert:

$$\begin{aligned} r \leq 1 & : \operatorname{tg} \beta' = \frac{z}{1 - \sqrt{r^2 - z^2}} \\ r > 1 & : \operatorname{tg} \beta' = \frac{z}{\sqrt{r^2 - z^2} - 1} \\ z \leq \sqrt{r^2 - 1} & : \operatorname{tg} \beta'' = \frac{z}{1 + \sqrt{r^2 - z^2}} \\ r > 1 & : \operatorname{tg} \beta'' = \frac{z}{1 - \sqrt{r^2 - z^2}} \end{aligned} \quad (37)$$

In Bezug auf die praktische Anwendung im Sonnensystem kann die heliozentrische Entfernung in die Grenzen $r = 0.2$ bis 2.0 eingeschlossen werden, da nur selten kleinere resp. grössere r bei ersten Bahnbestimmungen auftreten. Kommt ein solcher Fall einmal vor, so sind die Gleichungen (27a) u. (27b) zweckmässigerweise graphisch aufzulösen, oder es ist die entsprechende Gleichung 6. Grades in r oder z durch Annäherungen aufzulösen. Für die linke Seite der Parabelbedingung (36b), vermindert um $e'' = 1$ ergeben sich innerhalb der soeben fixierten Grenzwerte von r die Grenzen: 9 resp. 0, denen rechts $e''z^2 + d''z$ entspricht, mit der Bedingung, dass stets $|z| < r$ bleiben muss. Ist z sehr klein, so müssen e'' resp. d'' gross sein s. die unten folgenden Tafeln. Die Tafeln wurden deshalb allgemein in Bezug auf e'' innerhalb $e'' = 0$ und 10, um eine Einheit fortschreitend, angelegt, darüber hinaus für $e'' = 100, 200, 300, 400$ und 500 , wobei d'' auf 2 Dezimalen berechnet wurde, entsprechend dem Ziele einer ersten Näherung für r und z ; die hohen Werte von e'' sind

función de z , r y c o bien β , no pueden elegirse arbitrariamente los valores de z y β , sino que deben encerrarse dentro de límites determinados que dependen de r . En efecto, para una esfera de radio r alrededor del sol siempre es $z \leq r$, y por lo tanto corresponde para un valor fijo de z siempre un máximo y un mínimo de la latitud β observada desde la tierra, como resulta de inmediato de la intuición geométrica. Los dos valores límites β' y β'' , en el caso de considerar la órbita terrestre como circular, están definidos por las fórmulas siguientes:

En lo que se refiere a las aplicaciones prácticas en el sistema solar puede encerrarse la distancia heliocéntrica entre los límites $r = 0.2$ y 2.0 , dado que sólo raras veces se presentan valores menores o mayores en las determinaciones de órbitas provisionarias. Si realmente se presenta uno de estos casos, es conveniente resolver gráficamente las ecuaciones (27a) y (27b), o si no, ha de resolverse por aproximaciones la correspondiente ecuación de 6º grado en r o z . Para el miembro izquierdo de la condición de parabolismo (36b), disminuído en $e'' = 1$, resultan, dentro de los límites recientemente fijados para r los límites 9 y 0 respectivamente, a los cuales en el miembro derecho les corresponde $e''z + d''|z|$, con la condición de que siempre debe permanecer $|z| < r$. Si z es más pequeño entonces e'' y d'' deben ser grandes (véanse las tablas que siguen más adelante). Por la circunstancia mencionada, la tablas fueron elaboradas, en lo que respecta a e'' , para los valores comprendidos entre $e'' = 0$ y 10, creciendo de a uno, y más allá de diez para $e'' = 100, 200, 300, 400$ y 500 , habiéndose calculado d'' con 2 decima-

allgemein auch nötig mit Rücksicht auf niedere Breiten des Kometen, da c'' , wie aus der Definition folgt, der Funktion $\sin \beta$ umgekehrt proportional ist, und zwar durch die Koeffizienten γ' und ϵ' , während α' nach (21) davon frei ist. Die d'' entsprechende Tafel ist, wenn nötig auf das Leichteste zu erweitern, indem sie allein auf Grund der Werte $c'' = 0$ unmittelbar niedergeschrieben werden kann; denn aus der Definitionsformel

$$d'' = \frac{1}{z} \left(\frac{2}{r} - 1 - c'' z^2 \right)$$

folgt, dass der von c'' abhängende Teil $-c'' \cdot z$ sich in derselben Kolumne der Tabelle, d. h. bei konstantem z , immer um dasselbe Vielfache von z ändert, wenn c'' sich gleichmässig ändert.

Beide Tabellen sind nur für ein positives z berechnet worden, sie gelten aber unmittelbar auch für negatives z , wenn, wie die beiden Gleichungen (36 a, b) zeigen, zugleich die Vorzeichen von d und d'' geändert werden. Treten also die aus den Beobachtungen abgeleiteten Argumente d oder d'' in den Tabellen nicht mit dem vorausgesetzten Vorzeichen auf so hat man sich das Vorzeichen der Tabelle geändert zu denken, unter gleichzeitigem Uebergang auf negatives z ; der Kürze und Uebersichtlichkeit halber wurde in der Tabelle der Uebergang auf negatives z bei gleichzeitiger Änderung des Vorzeichens von d resp. d'' nicht vermerkt. Die Teile der Tabellen (c'' , d''), wo $|z| > r$, beziehen sich auf ein anderes Thema weiter unten.

Ueber die Verteilung der Vorzeichen von d und d'' in den Tabellen ist Folgendes zu bemerken. Aus der vereinfachten Form von (27 a) folgt:

$$d = \frac{r^2 - 1 - cz^2}{z}.$$

Für die Werte $r \leq 1$ ist $r^2 - 1$ stets ≤ 0 , sodass, da stet: $c > 0$, der Zähler stets negativ und somit

les, de acuerdo al fin perseguido de una primera aproximación en r y z . Los valores elevados de c'' , en general también son necesarios en consideración a latitudes pequeñas del cometa, dado que c'' es, como resulta de la definición, inversamente proporcional a la función $\sin \beta$, siéndolo por intermedio de los coeficientes γ' y ϵ' , mientras que α' no está afectado, de acuerdo a (21). La tabla correspondiente a d'' puede ampliarse fácilmente, si fuera necesario ya que puede construirse de inmediato en base sólo a los valores $c'' = 0$, pues de la fórmula de definición

resulta que la parte dependiente c'' , o sea $-c'' z$, varía para una misma columna de la tabla, es decir para z constante, siempre en un mismo múltiplo de z , cuando c'' varía uniformemente.

Las dos tablas sólo han sido calculadas para un z positivo, pero valen también directamente para z negativo si se cambian simultáneamente los signos de d y d'' , como lo muestran las dos ecuaciones (36 a). De modo que si de las observaciones resultan argumentos d o d'' que no figuran en las tablas con el signo mencionado, entonces debe considerarse cambiado el signo de la tabla, y ponerse simultáneamente a un z negativo; por razones de claridad y brevedad no ha sido puesta en evidencia en la tabla el pasaje a un z negativo con el cambio de signo de d o d'' correspondiente. Las partes de la tabla indicadas con (c'' , d''), donde $|z| > r$, se refieren a otro tema desarrollado más adelante.

Acerca de la distribución de los signos de d y d'' en la tabla puede observarse lo siguiente. De la forma simplificada (27 a) resulta:

Para los valores $r \leq 1$ es siempre $r^2 - 1 \leq 0$, y como además siempre es $c > 0$, el denominador

stets $d < 0$, wenn $z > 0$, aber $d > 0$ bei $z < 0$. Da negative z nicht in die Tabelle aufgenommen worden sind, so kommt in ihr also nur das negative Zeichen von d vor, solange $r \leq 1$.

Ist $r > 1$, so ist $r^2 - 1$ immer positiv, sodass der Zähler in d verschwinden kann an den Stellen, wo

$$z_0^2 = \frac{r^2 - 1}{c} > 0$$

sodass der Fall $d = 0$ in der Tabelle sowohl an der positiven Stelle

$$z_0 = + \sqrt{\frac{r^2 - 1}{c}},$$

wie an der negativen Stelle

$$z_0 = - \sqrt{\frac{r^2 - 1}{c}}$$

auftritt.

In der Nähe der beiden Nullstellen wird bei absolut grösserem $|z| > |z_0|$: $d \leq 0$ bei $z \geq 0$, umgekehrt bei $|z| < |z_0|$. Es gehört also zu jedem Wert d ein Wert $z > 0$ und ein Wert $z < 0$. Wie schon erwähnt, ist aber die Tafel (c, d) auf $z > 0$ beschränkt worden, indem bei Umkehrung des Vorzeichens von d auch das Vorzeichen von z umzukehren ist. In der Tabelle tritt also in jeder Zeile bei $r > 1$ wegen $z > 0$ nur ein einmaliger Zeichenwechsel auf, tatsächlich aber ein doppelter mit Rücksicht auf $z < 0$.

In Bezug auf die Tabelle für d'' folgt aus der Definitionsformel:

$$d'' = \frac{\frac{2}{r} - 1 - c''z^2}{z},$$

dass, da stets $c'' > 0$, der Zähler bei passendem r durch 0 hindurchgehen kann; ist $c'' = 0$, so ist

$$d'' = \frac{1}{z} \left(\frac{2}{r} - 1 \right) \geq 0,$$

constantemente resulta negativo, con lo cual siempre también $d < 0$, para $z > 0$, pero en cambio es $d > 0$ para $z < 0$. Como los valores negativos de z no han sido considerados en la tabla, sólo aparece en ella el signo negativo de d , siempre que $r \leq 1$.

Si $r > 1$ entonces $r^2 - 1$ siempre es positivo, de modo que el numerador puede anularse en aquellos puntos en que

de manera que el caso $d = 0$ aparece en la tabla tanto en el lugar positivo

como en el negativo

En la proximidad de los dos ceros resulta $d \leq 0$ para $z \leq 0$, cuando el valor absoluto de $|z|$ es mayor que el de $|z_0|$, ocurriendo la recíproca cuando $|z| < |z_0|$. A cada valor de d corresponde por lo tanto un valor $z > 0$ y uno $z < 0$. Como ya se ha mencionado, la tabla (c, d) ha sido restringida a $z > 0$, ya que al cambiar el signo de d ha de cambiarse el signo de z . En la tabla aparece, en consecuencia, en cada fila con $r > 1$ un solo cambio de signo debido a que $z > 0$, pero en realidad hay un doble cambio debido a $z < 0$.

En lo referente a d'' resulta de la fórmula de definición

que, por ser $c'' > 0$, el numerador puede pasar por el valor 0 para un r conveniente; si $c'' = 0$, entonces es

solange $r \leq 2$ u. $z > 0$; da die Tabelle nur bis $r = 2$ geht, ist also in der Zeile $c'' = 0$ stets $d'' \geq 0$, solange $z > 0$, aber $d'' < 0$ bei $z < 0$, Ist $c'' \neq 0$, so hat d'' die beiden Nullstellen

$$z_0 = \pm \sqrt{\frac{\frac{2}{r} - 1}{c''}}$$

in jeder Zeile der Tabelle, von $r = 0$ bis $r = 2$, solange $z_0 \leq r$.

Mit der Annäherung von r an $r = 2$ rücken die beiden Nullstellen, wie die obige Formel zeigt, immer näher an einander in die einzige Nullstelle $z = 0$. Ueber $r = 2$ hinaus gibt es keine reellen Nullstellen mehr, und d'' ist alsdann, da der Zähler in d'' negativ, bei $z > 0$ negativ, bei $z < 0$ aber $d'' > 0$.

Die Tabelle führt nur zu einem ersten Näherungswert von r und z , zumal die Erdbahn als kreisförmig angesehen wurde, wenn diese Voraussetzung auch für die 1. Näherung vollkommen genügt; die Verbesserungen Δr und Δz , die man an die ersten Näherungswerte r_1^0 und z_1^0 anzubringen hat, um die genauen Werte $r_1 = r_1^0 + \Delta r$ und $z = z_1^0 + \Delta z$ zu erhalten, folgen auf Grund einer Potenzentwicklung der Ausgangsgleichungen (27a) und (27b), nach Δr und Δz , wobei unter Beibehaltung nur der linearen Glieder die folgenden Gleichungen erhalten werden:

$$\begin{aligned} (A_1) \quad 2r_1^0 \Delta r + (-2cz_1^0 - d) \Delta z &= cz_1^{02} + dz_1^0 + e - r_1^{02} = D_1 \\ (B_1) \quad -\frac{2k^2}{r_1^{02}} \Delta r + (-2c'z_1^0 - d') \Delta z &= c'z_1^{02} + d'z_1^0 + e' - \frac{2k^2}{r_1^0} = D_2. \end{aligned} \tag{38}$$

Die Mitnahme der linearen Glieder dürfte stets genügen, wenn auch eine Wiederholung der Auflösung nötig werden sollte, ausser im Falle kleiner r -Werte, wo in der 2. Gleichung der Koeffizient von Δr und rechts der konstante Teil in $1/r_1^0$ gross würde; in diesem Falle genügt es aber, die 2. Gleichung mit r^2 zu multiplizieren, um die

siempre que $r \leq 2$ y $z > 0$; como la tabla sólo alcanza hasta $r = 2$ en la línea $c'' = 0$ siempre es $d'' > 0$, en el caso de que $z > 0$, en cambio es $d'' < 0$, para $z < 0$. Si $c'' \neq 0$, entonces d'' tiene los dos ceros

en cada fila de la tabla desde $r = 0$ hasta $r = 2$, siempre que $z_0 \leq r$.

Como muestra la fórmula anterior, al acercarse r a $r = 2$ los dos ceros se aproximan cada vez más entre sí y hacia el único cero $z = 0$. Más allá de $r = 2$ ya no existen ceros reales, y d'' es entonces negativo para $z > 0$, y $d'' > 0$ para $z < 0$, por ser negativo el denominador de d'' .

La tabla proporciona un primer valor aproximado de r y z , dado que se ha considerado como circular la órbita terrestre, si bien esta suposición es completamente suficiente para la primera aproximación. Las correcciones Δr y Δz que deben aplicarse a las primeras aproximaciones r_1^0 y z_1^0 para obtener los valores exactos $r_1 = r_1^0 + \Delta r$ y $z = z_1^0 + \Delta z$, resultan del desarrollo en serie de potencias según Δr y Δz de las ecuaciones iniciales (27a) y (27b), y si sólo se conservan los términos lineales las siguientes ecuaciones:

El uso de los términos lineales debería ser suficiente en todos los casos, aun cuando fuera necesario repetir la resolución, excepto en el caso de valores pequeños de r en que el coeficiente de Δr en la segunda ecuación y el término constante en $1/r_1^0$ que figura a la derecha se harían muy grandes; en este caso basta sin embargo multiplicar también la

lästigen Nenner in r zu beseitigen. Dann ist da $r^2 \cdot \Delta z$ sehr klein, in 1. die Näherung nach (B₁):

$$\Delta r = -\frac{1}{2} (r_1)^{02} \frac{D_2}{h^2},$$

Δz folgt dann aus (A₁).

Im Anschluss an die Betrachtungen in § 1 in Bezug auf den besonderen Fall kleiner Breiten, insbesondere unter Bezugnahme auf den letzten Absatz von § 1, ist nunmehr nach Darlegung der Kometenbahnbestimmung die kleinen Breiten entsprechende Änderung der Darstellung nachzutragen.

Ist $|\beta_1| < |\beta_3|$, so lauten im Anschluss an (4) und (7) die einer parabolischen Kometenbahn entsprechenden Gleichungen (9) folgendermassen, indem in (9) die z durch u und C, S durch c und s ersetzt werden, während die Gleichung III unverändert bleibt:

$$(Ia) \quad x_1 = c_1 u_1 - X_1$$

$$(IIa) \quad y_1 = s_1 u_1 - Y_1$$

$$(IIIa) \quad y_2 - x_2 \operatorname{tg} \lambda_2 = X_2 \operatorname{tg} \lambda_2 - Y_2 \quad (39)$$

$$(IVa) \quad x_3 = c_3 u_3 - X_3$$

$$(Va) \quad y_3 = s_3 u_3 - Y_3$$

Deshalb ist analog in allen hieraus gefolgerten Gleichungen (10) bis (25) z_i mit $u_i = \frac{z_i}{\sin \beta_1}$, z'_i mit u'_i , C und S mit c und s , ferner

segunda ecuación con r^3 para eliminar los denominadores molestos. Dado que $r^2 \cdot \Delta z$ es muy pequeño, resulta entonces en primera aproximación de acuerdo a (B₁):

obteniéndose Δz de (A₁).

A las consideraciones del § 1 que se refiere al caso de latitudes pequeñas, teniendo en cuenta especialmente la última parte del § 1 y después de haber presentado la determinación de órbitas de los cometas, queda por agregar la modificación correspondiente a las latitudes pequeñas.

Si $|\beta_1| < |\beta_3|$, las ecuaciones de una órbita cometaria parabólica correspondientes a las ecuaciones (9) son, de acuerdo a (4) y (7), las siguientes:

que se obtienen sustituyendo en (9) z por u y C, S por c, s y dejando invariada la III. Por esta razón deben permutarse en forma análoga en las ecuaciones (10) a (25) que resultan de aquí, z_i con $u_i = \frac{z_i}{\sin \beta_1}$, z'_i con u'_i , C y S con c y s , además:

$$S_3' \text{ mit } s_3' = \frac{s_3 - s_1}{\tau_3}$$

$$C_3' \text{ » } c_3' = \frac{c_3 - c_1}{\tau_3}$$

$$D_1 \text{ » } d_1 = \frac{s_1 - c_1 \operatorname{tg} \lambda_2}{\tau_2} \text{ (s. (21))}$$

zu vertauschen. Dabei sind die c und s definiert durch : Las c y s están definidas aquí por :

$$\begin{aligned} c_1 &= \cos \beta_1 \cos \lambda_1, & c_3 &= \cos \beta_3 \cos \lambda_3 \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_3} \\ s_1 &= \cos \beta_1 \sin \lambda_1, & s_3 &= \cos \beta_3 \sin \lambda_3 \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_3} \end{aligned} \quad (40)$$

Da c_3 und s_3 auch in der folgenden Form geschrieben werden können :

Dado que c_3 y s_3 también pueden ser escritos en la forma :

$$\begin{aligned} c_3 &= \cos \lambda_3 \frac{\sin \beta_1}{\operatorname{tg} \beta_3} \\ s_3 &= \sin \lambda_3 \frac{\sin \beta_1}{\operatorname{tg} \beta_3} \end{aligned}$$

so folgt, dass mit Rücksicht auf die obige Bedingung $|\beta_1| < |\beta_3|$ die Absolutwerte von c_3 und s_3 stets der Bedingung genügen :

y teniendo en cuenta la condición anterior $|\beta_1| < |\beta_3|$, resulta que los valores absolutos de c_3 y s_3 siempre satisfacen a las condiciones :

$$|c_3| < |\cos \lambda_3| \quad \text{und} \quad |s_3| < |\sin \lambda_3|.$$

Die Auflösung der Gleichungen (9) lautet dann in Analogie zu I und II von (9), (19), (22) und (24), wonach die Unbekannten lineare Funktionen von z sind :

En analogía con I y II de (9), (19), (22) y (24), de acuerdo a las cuales las incógnitas son funciones de z , la resolución de la (9) da :

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 u_1 - X_1 & x_1' &= \varepsilon' u_1 + \zeta_1 \\ y_1 &= s_1 u_1 - Y_1 & y_1' &= \gamma' u_1 + \delta' \\ & & u_1' &= \alpha' u_1 + \beta' \end{aligned} \quad (41)$$

wo u_1 und u_1' als Funktionen von z_1 und z_1' definiert sind durch :

donde u_1 y u_1' están definidas como funciones de z_1 y z_1' por medio de :

$$u_1 = \frac{z_1}{\sin \beta_1} \quad \text{und} \quad u_1' = \frac{z_1'}{\sin \beta_1}.$$

Folglich gehen die Bedingungsgleichungen (27a) und (27b) über in die neue Form :

En consecuencia, las ecuaciones de condición (27a) y (27b) toman la nueva forma :

$$\begin{aligned} r_1^2 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = (c_1 u_1 - X_1)^2 + (s_1 u_1 - Y_1)^2 + u_1^2 \sin^2 \beta_1 = c u_1^2 + d u_1 + e \\ \frac{2k^2}{r_1} &= x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 = (\varepsilon' u_1 + \zeta')^2 + (\gamma' u_1 + \delta')^2 + (\alpha' u_1 + \beta')^2 \sin^2 \beta_1 = c' u_1^2 + d' u_1 + e' \end{aligned} \quad (42)$$

wo

donde

$$c = c_1^2 + s_1^2 + \sin^2 \beta_1 = 1, \quad d = -2(c_1 X_1 + s_1 Y_1) \quad e = X_1^2 + Y_1^2 = R_1^2$$

und ferner :

y además

$$\begin{aligned} c' &= \varepsilon'^2 + \gamma'^2 + \alpha'^2 \sin^2 \beta_1 \\ d' &= 2(\gamma' \delta' + \varepsilon' \zeta' + \alpha' \beta' \sin^2 \beta_1) \\ e' &= \beta'^2 \sin^2 \beta_1 + \delta'^2 + \zeta'^2 \end{aligned}$$

Der Unterschied gegenüber der normalen Bahnbestimmung besteht folglich darin, dass jetzt $c = 1$, sodass c als Argument der Tafeln wegfällt; ferner war das Argument z der Bedingung unterworfen, dass $|z| \leq r$, während jetzt $u_1 = \text{geoz. Abstand}$ $< 1 + r_1$, wenn $r_1 < 1$, aber $u_1 > 1 - r_1$ bei $r \geq 1$. Ferner ist jetzt $d = -2 \cos \Delta$, wo $\Delta = \text{sphärischer Abstand Sonne-Komet}$, sodass d in den Grenzen ± 2 gelegen und tabuliert ist.

Folglich sind die Grenzen der bisherigen Tafeln, wenn in ihnen z mit u vertauscht gedacht wird, zu erweitern, indem nach den soeben fixierten Grenzbedingungen bei

$r = 0.2 :$	$0.8 \leq u_1 = \varphi_1 \leq 1.2$
$0.3 :$	$0.7 \quad 1.3$
$0.4 :$	$0.6 \quad 1.4$
$1.0 :$	$0.0 \quad 2.0$
$1.5 :$	$0.5 \quad 2.5$
$2.0 :$	$1.0 \quad 3.0$

sodass das Argument $u_1 = \varphi_1$ bis zu 3.0 ansteigt wenn r bis 2.0 anwächst. Da $c = 1$ dem Falle $\beta_1 = 90^\circ$ in unseren Tafeln entspricht, so ist ein Teil der Tafeln bereits vorhanden, aber durch die Erweiterung derselben würden dieselben einen unangenehmen Umfang annehmen, weshalb es zweckmäßiger ist, eine neue Tafel herzustellen, in der r und u die Argumente und d die gesuchte Funktion ist, entsprechend der ersten Gleichung (36a), die nur noch die 3 Variablen r , u und d enthält, sodass die früheren Einzeltafeln für r hier insgesamt durch eine einzige Tafel ersetzt werden können.

Die 2. Gleichung (36b) ist wie die frühere analoge Gleichung unmittelbar an die 2. Komponente unseres Tafelpaares angepasst, nur dass auch hier z mit u vertauscht zu denken ist und ferner eine

La diferencia con respecto a la determinación normal de órbitas reside, por lo tanto, en que ahora $c = 1$, de modo que c no aparece como argumento de las tablas; además, el argumento z estaba sujeto a la condición $|z| \leq r$, mientras que ahora $u_1 = \text{distancia geocéntrica}$ $< 1 + r_1$, para $r_1 < 1$, pero $u_1 > 1 - r_1$, para $r \geq 1$. Además ahora es $d = -2 \cos \Delta$, donde Δ es la distancia esférica entre el sol y el cometa, de manera que d está comprendido entre los límites ± 2 , y tabulado entre estos valores.

En consecuencia, si en las tablas anteriores se consideran permutados z con u , deben ampliarse en ellas los límites, poniendo de acuerdo a las condiciones límites fijados recién, para

de modo que el argumento $u_1 = \varphi_1$ puede alcanzar al valor 3.0 cuando r llega a valer 2.0. Dado que $c = 1$ corresponde al caso $\beta_1 = 90^\circ$ de nuestras tablas, una parte de las mismas ya existe, pero como por la ampliación de dichas tablas adquirirían una extensión incómoda, es conveniente confeccionar una nueva tabla en la cual r y u son los argumentos y d es la función buscada, de acuerdo a la primera de las ecuaciones (36a) que ya solamente contiene las 3 variables r , u y d ; de manera que en este caso pueden sustituirse las tablas individuales para r que anteceden en su conjunto por una única tabla.

La segunda ecuación (36b) se amolda, como la ecuación análoga anterior, a la segunda componente de nuestro par de tablas, debiéndose considerar permutado también aquí z con u y siendo además

Erweiterung wie in der ersten Tafel entsprechend den neuen Grenzen von z resp. u vorzunehmen ist.

Ist nun zweitens $|\beta_3| < |\beta_1|$, so bedarf es nur der Vertauschung der Indices 1 mit 3 und umgekehrt bei der Numerierung des 1. und 3. Ortes, während dieselbe Vertauschung in den Formeln, aber unter Beibehaltung der Numerierung der Orte, umständlicher sein kann.

§ 3. Beispiel zur Kometenbahnbestimmung

Zur Erläuterung zu der oben dargestellten Bahnbestimmungsmethode werde als Beispiel der Komet Sperra gewählt, dessen Bahnbestimmung ich schon in I ohne Voraussetzung einer Exzentrizität und dann in II unter Voraussetzung einer parabolischen Bahn durchgeführt habe, nachdem J. Bauschinger diesen Kometen 1896 IV Sperra in seinem *Lehrbuch der Bahnbestimmung der Himmelskörper* bereits als Beispiel herangezogen hat.

Die Beobachtungsdaten sind die folgenden: (*Komet 1896 IV Sperra*, 1896 m. Z. Berlin, Aequin. 1896).

$$\begin{aligned} t_1 &= \text{Sept. } 7.42259, \lambda_1 = 171^\circ 22' 49''.4, \beta_1 = +59^\circ 46' 6''.8, L_1 = 165^\circ 41' 26''.2, \log R_1 = 0.003027 \\ t_2 &= \quad 10.35812, \lambda_2 = 176 \quad 22' 51''.9, \beta_2 = +61 \quad 27' 43''.8, L_2 = 168 \quad 32' 48''.8, \log R_2 = 0.002690 \\ t_3 &= \quad 13.41354, \lambda_3 = 182 \quad 11' 53''.2, \beta_3 = +63 \quad 3' 56''.7, L_3 = 171 \quad 31' 26''.2, \log R_3 = 0.002327 \end{aligned}$$

wo die L_i die geozentrischen Längen der Sonne fixieren. Die Parallaxe, die Reduktion auf den *locus fictus* und die Lichtzeitreduktion wurde vernachlässigt. Die den Polarkoordinaten L_i und R_i der Sonne entsprechenden rechtwinkligen Koordinaten X und Y_i ($Z_i = 0$) und die aus den Längen und Breiten des Kometen berechneten Grössen C_i und S_i sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt (überall Logarithmen und 5 — stellige Rechnung):

necesario efectuar una ampliación de acuerdo a los nuevos límites de z y u , igual que en el caso de la primera tabla.

Si ahora el 2º lugar es $|\beta_3| < |\beta_1|$, no hay más que permutar los índices 1 y 3 al numerar la 1ª y 3ª posición, pudiéndose efectuar también la citada permutación en las fórmulas, conservando en tal caso la numeración de las posiciones; aun cuando esto último puede resultar más complicado.

§ 3. Ejemplo de determinación de órbitas de cometas

Como aclaración al método para la determinación de órbitas expuesto más arriba, se ha elegido el cometa Sperra 1896 IV, cuya determinación de órbita ya he desarrollado en I sin presuponer una excentricidad, y después en II bajo el supuesto de una órbita parabólica; y que ya fué usado por J. Bauschinger en su obra *Lehrbuch der Bahnbestimmung der Himmelskörper*.

Los datos de observación son los siguientes: (*Cometa 1896 IV Sperra*, 1896 m. Z. Berlin, Aequin. 1896).

donde las L_i denotan las longitudes geocéntricas del sol. La paralaje, la reducción al *locus fictus* y la corrección debida al tiempo de aberración han sido despreciadas. Las coordenadas rectangulares X_i e Y_i ($Z_i = 0$) correspondientes a las coordenadas polares L_i y R_i del sol y las cantidades C_i y S_i calculadas a partir de las longitudes y latitudes del cometa, se hallan reunidas en la tabla que sigue (en todos los casos se emplean logaritmos y cálculos con 5 cifras):

<i>i</i>	1	2	3
X_i	$9.98934n$	$9.99396n$	$9.99756n$
Y_i	9.39600	9.30059	9.17081
C_i	$9.76055n$	$9.73458n$	$9.70561n$
S_i	8.94121	8.53562	$8.28975n$

Hieraus folgen dann die weiteren Hilfsgrößen C_3', S_3', D_1 etc., nach (16) u. (21):

$$C_3' = 8.05797$$

$$S_3' = 8.25118n$$

$$D_1 = 8.23902$$

De aquí resultan las demás magnitudes auxiliares C_2', S_3', D_1 etc., según (16) y (21)

$$X_2' = 7.55100n$$

$$X_3' = 7.4935n$$

$$Y_2' = 8.22327n$$

$$Y_3' = 8.22553n$$

Alsdann erhält man mittels (20), (21), (23) u. (25), nebst (17) für die Determinante D:

$$\alpha' = 7.64990$$

$$\beta' = 7.061$$

$$\gamma' = 7.96200$$

$$\delta' = 7.403$$

$$\epsilon' = 8.25330n$$

$$\zeta' = 8.22496$$

Luego de (20), (21), (23) y (25), agregando (17) para el determinante D, se obtiene

wobei $D = 8.71262$.

Folglich lauten die Koeffizienten der beiden Gleichungen (27a) und (27b) folgendermassen:

$$c = 0.12698$$

$$d = 0.06739n$$

$$e = 0.00605$$

donde $D = 8.71262$.

En consecuencia, los coeficientes de las ecuaciones (27a) y (27b) resultan:

$$c' = 6.62834$$

$$d' = 6.73633n$$

$$e' = 6.46218$$

sodass die Gleichungen selbst, nach Einführung von c'', d'' u. e'' in die 2. Gleichung gemäss (32a) folgendermassen lauten:

$$(A) \quad r_1^2 = (0.12698) z_1^2 + (0.06739n) z_1 + (0.00605)$$

$$(B) \quad \frac{2k^2}{r_1} = (6.62834-10) z_1^2 + (6.73633-10)n z_1 + (6.46218-10)$$

Während die Gleichung (A) im Folgenden unverändert bestehen bleibt ist (B) noch zu korrigieren, nachdem nach Erlangung der 1. Näherung für r_1 resp. z_1 die Restglieder und die Korrekturen III b, IV b und V b berechnet worden sind. Auf Grund der Tabellen erhält man dann die 1. Näherung für

de modo que las ecuaciones mismas, después de introducir c'', d'' y e'' en la 2ª ecuación de acuerdo a (31a), quedan expresadas por:

Mientras que la ecuación (A) permanecerá invariada en lo que sigue, la (B) todavía debe corregirse, lo que se consigue después de obtener la primera aproximación, calculando para r_1 y z_1 los términos del resto y las correcciones III b, IV b y V b. En base a las tablas se logra luego la primera aproxima-

r und z folgendermassen. Aus den Beobachtungsdaten für t_1 folgt, dass die Längendifferenz zwischen Sonne und Komet rund 6° beträgt, während die Breite rund 60° , beträgt, sodass der sphärische Abstand Sonne-Komet ebenfalls rund 60° verbleibt; folglich ist der heliozentrische Minimalabstand des Kometen: $r = R \cdot \sin 60^\circ = 0.87$, wenn $R = 1$ gesetzt wird. Folglich genügt es, unsere Tafeln erst ab $r = 0.9$ für die Heraussuchung der ersten Näherungswerte für r und z heranzuziehen, wobei die Argumente $\beta_1 = 60^\circ$, $d = -1.17$ und $c'' = +1.44$ und $d'' = -1.84$ sind. Dabei sei für den Gebrauch der Tafeln daran erinnert, dass in den Tafeln bei Umkehrung des Vorzeichens von d resp. d'' stets auch die Vorzeichen von z umzukehren sind. Denn im Falle $r > 1$ ist nicht nur der zu dem vorgelegten d resp. d'' zugehörige z -Wert unmittelbar aufzuschlagen, sondern auch das zu dem entgegengesetzten auf derselben Zeile befindlichen d -Wert gehörige z , das bei der Vertauschung des zugehörigen $-d$ mit $+d$ das negative Vorzeichen erhalten muss. Allgemein müssen sich zu jedem vorgelegten d 2 z -Werte, hier bei $r > 1$ immer ein positiver und ein negativer Wert ergeben, weil eine beliebige von der Erde ausgehende Richtung, fixiert durch β und $d = -\frac{2 \cos \Delta}{\sin \beta}$ ($\Delta =$ Abstand Sonne-Komet) die Kugel vom Radius r um die Sonne stets in 2 Punkten schneidet. Die Auflösung von (27a) liefert die beiden z -Werte mittels der Formel:

$$z = \frac{1}{2c} \left[-d \pm \sqrt{d^2 + 4c(r^2 - 1)} \right]$$

Ist $r < 1$, so liefert dieselbe Formel die zugehörigen z -Werte, wobei jetzt aber beide z positiv oder beide negativ sind.

Analog liefert die dynamische Bedingungsgleichung (27b) stets 2 reelle oder keine Lösung z vermittelt der analogen Formel:

$$z = \frac{1}{2c''} \left[-d'' \pm \sqrt{d''^2 + 4c'' \left(\frac{2}{r} - 1 \right)} \right],$$

mación de la siguiente manera. De los datos de observación para t_1 resulta que la diferencia de longitud entre el sol y el cometa es, en números redondos, de 6° , mientras que la latitud es de unos 60° , de modo que la distancia esférica entre sol y cometa es igualmente de unos 60° . En consecuencia, la distancia heliocéntrica mínima del cometa es $r = R \sin 60^\circ = 0.87$, si se pone $R = 1$. Por lo tanto, es suficiente hacer uso de nuestras tablas a partir de $r = 0.9$ para hallar los primeros valores aproximados para r y z ; los argumentos son aquí $\beta_1 = 60^\circ$, $d = -1.17$ y $c'' = +1.44$ y $d'' = -1.84$. Para el uso de las tablas recordemos que al efectuar un cambio de signo de d o d'' debe cambiarse también el signo de z . Pues en el caso $r > 1$, no sólo debe buscarse el valor de z correspondiente al valor de d o d'' propuesto, sino también el z que corresponde al valor opuesto de d que se encuentre en la misma línea, valor de z que debe recibir el signo negativo al permutar $-d$ con $+d$. En general, para cada d dado deben resultar dos valores de z ; en el caso presente, con $r > 1$, siempre existirá un valor positivo y uno negativo, ya que una dirección cualquiera que parte de la tierra y que está fijada por β y $d = -\frac{2 \cos \Delta}{\sin \beta}$ ($\Delta =$ distancia sol-cometa), corta a la esfera de radio r y centro en el sol en 2 puntos. La resolución de (27a) da los dos valores de z por medio de la fórmula:

Si $r < 1$, la misma fórmula da los valores de z correspondientes, pero ahora los 2 valores de z son ambos positivos o ambos negativos.

Análogamente, la ecuación de condición dinámica (27b) entrega siempre 2 valores reales de z o ninguna solución por medio de la fórmula análoga:

wobei es aber möglich ist, dass in diesem Falle ein z -Wert ausserhalb der beschränkten Tafelgrenzen gelegen ist, weil ein den Beobachtungen entsprechendes z stets der Bedingung $|z| \leq r$ genügen muss. Die über die mögliche Grenze $z = r$ ($r =$ Spitzenargument jeder Tabelle), hinausgehenden z -Werte der Tabelle (c'', d''), gehören nicht mehr zu dem System (27a, b), sondern zu dem System (42) im Falle kleiner Breiten, wobei z in den Tafeln mit u zu vertauschen ist, das als geozentrische Entfernung bis zu $u = 3$ läuft.

Darauf beruht nun die Tatsache, dass die folgende Tabelle, auf Grund unserer Hilfstafeln von $r = 0.9$ ab mit den Argumenten β_1, d_1 resp. c_1'', d_1'' die zugehörigen z -Werte enthält, und zu jedem r je 2 Lösungen $z'(\beta_1, d_1)$ und $z''(c_1'', d_1'')$ darbietet; ist $|z| > r$, so sind die entsprechenden, unbrauchbaren Werte z ausgelassen. Um die Genauigkeit der Interpolation der z -Werte zu ersehen, sind die genauen Werte auf Grund der oben gegebenen Formel auch berechnet worden (Rechnung):

siendo posible, sin embargo, que en este caso uno de los valores de z se encuentre fuera de los límites restringidos de la tabla, ya que un z correspondiente a las observaciones siempre debe satisfacer a la condición $|z| \leq r$. Los valores de z de la tabla (c'', d'') que sobrepasan el límite posible $z = r$ ($r =$ argumento principal de cada tabla) ya no pertenecen al sistema (27a, b), sino al sistema (42) en el caso de latitudes pequeñas, donde en las tablas debe permutarse z con u , que como distancia geocéntrica alcanza el valor $u = 3$.

En esto reside ahora el hecho de que la tabla que sigue, basada en las tablas auxiliares consideradas a partir de $r = 0.9$ y con los argumentos β_1, d_1 , y c'', d'' , contiene los valores de z correspondientes y proporciona para cada r dos soluciones $z'(\beta_1, d_1)$ y $z''(c_1'', d_1'')$. Cuando $|z| > r$, se han omitido los valores de z inutilizables correspondientes. Para apreciar la exactitud de la interpolación de los valores se han calculado también los valores exactos en base a la fórmula dada más arriba (cálculo = Rechnung):

1) Tafeln (Tablas)					2) Rechnung (Cálculo)				
r	z'	z''	z'	z''	r	z'	z''	z'	z''
0.9	+0.6	+0.2	—	—0.5	0.9	+0.66	+0.22	—	—0.48
1.0	0.8	0.0	—	—0.4	1.0	88	00	—	.41
1.1	1.03	—0.2	—	—0.35	1.1	1.03	—0.15	—	.35
1.2	1.1	—0.3	—	—0.3	1.2	1.16	—0.28	—	—0.30
1.3	1.27	—0.4	—	—0.26	1.3	1.28	—0.40	—	.24
1.4	1.35	—0.5	—	—0.2	1.4	1.40	.52	—	.20
1.5	1.5	—0.6	+1.5	—	1.5	1.50	.62	+1.44	.16
1.6	1.55	—0.7	1.4	—	1.6	1.60	.73	1.40	.12
1.7	+1.7	—0.93	1.4	—	1.7	+1.71	—0.83	1.37	—0.09

Die Gleichheit von z' und z'' tritt, nun, wie ein Blick auf die Tabelle zeigt, an den 2 fettgedruckten Stellen ein: $r = 1.2$ mit $z = -0.3$ und $r = 1.5$ mit $z = +1.5$. Da $\beta_1 = +60^\circ > 0$, so entspricht die zweite Lösung den Beobachtungen, während die

Como lo muestra una ligera observación de la tabla, la igualdad de z' y z'' aparece en negrita: $r = 1.2$ con $z = -0.3$ y $r = 1.5$ con $z = +1.5$. Como $\beta_1 = +60^\circ > 0$, entonces la segunda solución corresponde a las observaciones, mientras que

erstere der diametralen Lage bei negativer Breite entsprechen würde. Mit dieser 1. Näherung ist nun die strenge Lösung mit Hilfe von (A) und (B) abzuleiten, auf Grund sukzessiver differentieller Verbesserung unter Verwendung der Formeln (38). Unter Annahme von $z = 0.17609$ als erste Näherung gibt die Gleichung (A) von (36): $r = 0.17862$, welchen Wert wir als ersten Näherungswert für r ansehen, sodass folglich $D = (-\infty)$ und ferner $D_2 = 5.56063 - 10$ nach (38). Folglich wird nach (38):

$$\Delta r = \frac{1}{\Delta} (6.863n D_1 + 0.455 D_2)$$

wo $\Delta = (7.467 - 10)n$

donde $\Delta = (7.467 - 10)n$

$$\Delta z = \frac{1}{\Delta} (6.415 D_1 + 0.477 D_2)$$

Folglich wird

Luego sigue:

$$\Delta r = 8.549n \text{ und } \Delta z = 8.571n$$

sodass also in 2. Näherung:

de modo que en segunda aproximación:

$$r = 0.16832 \text{ und } z = 0.16517$$

Folglich erhält man nach (38) in 2. Näherung:

En consecuencia, se obtiene según (38) en segunda aproximación:

$$D_1 = 7.07 \text{ und } D_2 = 3.55$$

also nach obiger Gleichung:

es decir, según la ecuación anterior es:

$$\Delta r = 5.70n \text{ und } \Delta z = 6.67n$$

sodass die 3. Näherung lautet:

de modo que la tercera aproximación es:

$$r = 0.16831 \text{ und } z = 0.16503.$$

Mit diesen Werten werden die Gleichungen (A) und (B) vollständig befriedigt, sodass die Endwerte erreicht sind. Da die erste Lösung nur zur Berechnung der Korrekturen dient, genügt oben im Allgemeinen stets eine 3-stellige Rechnung für r und z .

Um nun diese erste Lösung durch die Korrekturen bis zur Endlösung zu verbessern, sind zuerst die heliozentrischen Koordinaten und Geschwindig-

la primera correspondería a la posición diametral con latitud negativa. A partir de esta primera aproximación ha de deducirse la solución rigurosa con ayuda de (A) y (B) en base a una corrección diferencial sucesiva, haciendo uso de las fórmulas (38). Aceptando el valor $z = 0.17609$ como primera aproximación se obtiene de la ecuación (A) de (36): $r = 0.17862$, valor éste que consideramos como primera aproximación para r , de manera que $D = (-\infty)$ y además $D_2 = 5.56063 - 10$, de acuerdo a (38). Por lo tanto resulta, de acuerdo a (38):

Con estos valores quedan completamente satisfechas las ecuaciones (A) y (B), de modo que hemos alcanzado los valores finales. Como la primera solución solamente se emplea para el cálculo de las correcciones, basta en general un cálculo con tres cifras para r y z .

Para mejorar esta primera solución por medio de las correcciones hasta obtener la solución final, es necesario calcular en primer lugar las coordenadas

keiten mittels der Koeffizienten : α' , β' , γ' , δ' , ε' u. ζ' zu berechnen, als Funktion der 1. Lösung ; $z_1 = 0,16503$ und $r_1 = 0,16830$ gemäss den Formeln (9), I u. II und (19), (22), (24); danach erhält man :

$$\begin{array}{ll} x_1 = 9,12461 & x_1' = 8,20214 \\ y_1 = 9,08340n & y_1' = 7,97383n \\ z_1 = 0,16503 & z_1' = 7,88541 \end{array}$$

Mittels dieser Daten ergeben sich dann nach (11) die folgenden Zahlenwerte für die 2. 3. und 4. zeitliche Ableitung der Koordinaten, da bei der kurzen Zwischenzeit auf höhere Ableitungen verzichtet werden darf, wie wir sogleich noch sehen werden :

$$\begin{array}{lll} x'' = (5,09087-10)n & x''' = (4,089-10)n & x^{IV} = (2,807-10) \\ y'' = 5,04966-10 & y''' = 5,811-10 & y^{IV} = (2,584-10)n \\ z'' = (6,13129-10)n & z''' = 4,301-10 & z^{IV} = (2,866-10) \end{array}$$

Die Rechnung zeigt nun, dass die 4. Ableitungen zu klein sind, um einen merklichen Einfluss auf die Restglieder $R(x)$ etc. und die Korrektionen $\text{Korr. III}b$ etc. ausüben zu können, sodass wohl meist bei kleinen Zwischenzeiten der ersten Bahnbestimmung auf diese Terme 4. Ordnung verzichtet werden kann. Nach (12), $\text{III}b$ und (15) erhält man sukzessive; unter Vernachlässigung von x^{IV} etc.:

$$\begin{array}{ll} R(x_2) = R(x_3) = x_1''' = (4,089-10)n & \text{Korr. III}b = (5,208-10)n \\ R(y_2) = R(y_3) = y_1''' = 3,811-10 & \text{Korr. IV}b = 6,387-10 \\ R(z_2) = R(z_3) = z_1''' = 4,301-10 & \text{Korr. V}c = (5,135-10)n \end{array}$$

sodass nun die definitiven Ausdrücke für die Geschwindigkeiten als Funktion von z nach den Formeln $\text{III}b$ (17) und (18) die folgenden sind :

$$\begin{array}{l} x_1' = 7,96200 \cdot z_1 + 7,440 \\ y_1' = 8,25330n \cdot z_1 + 8,22418 \\ z_1' = 7,64990 \cdot z_1 + 7,074 \end{array}$$

geocéntricas y las velocidades por medio de los coeficientes α' , β' , γ' , δ' , ε' y ζ' , en función de la primera solución $z = 0,16503$ y $r = 0,16830$ según las fórmulas (9), I y II, y (19), (22), (24); de acuerdo a esto se obtiene :

Por medio de estos datos resultan entonces según (11) los valores numéricos para la derivada 2ª, 3ª y 4ª de las coordenadas según el tiempo que figuran en seguida. Debido al pequeño intervalo de tiempo puede prescindirse de las derivadas de orden superior, como veremos todavía :

El cálculo muestra que la derivada cuarta es demasiado pequeña para ejercer una influencia apreciable sobre los términos del resto $R(x)$ etc. y las correcciones $\text{Korr. III}b$, etc., de manera que en la mayoría de los casos en que los intervalos de tiempo son pequeños, bien puede prescindirse de los términos de cuarto orden. Según (12), $\text{III}b$ y (15) se obtiene sucesivamente, despreciando x^{IV} etc. :

de modo que según las fórmulas $\text{III}b$ (17) y (18), las expresiones definitivas para las velocidades en función de z son :

während x_1 und y_1 unverändert bleiben gemäss I u. II von (9). Folglich lautet die Gleichung (B) endgültig nun Folgendermassen ;

$$(B) \frac{2k^2}{r_1} = x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 = 6.62834z_1^2 + 6.73194nz_1 + 6.46205,$$

während die Gleichung (A) unverändert nach der früheren Darstellung oben zu entnehmen ist. Verwenden wir zur Auflösung des neuen Gleichungspaares (A) und (B) die frühere 1. Näherung $r = 0.16830$ und $z = 0.16503$ als Ausgangslösung, die differentiell zu verbessern ist, so muss $\log D_1 = -\infty$ sein, weil die Näherung eine exakte Lösung der unveränderten Gleichung (A) ist, während $D_2 = (3.49 - 10)$, sodass für die entsprechenden Verbesserungen Δr_1 und Δz_1 unter Verwendung der früheren Gleichungen mit denselben Koeffizienten erhalten wird :

$$\Delta r = 6.482n \text{ und } \Delta z = 6.512n$$

sodass die neuen Werte :

$$r = 0.16601 \text{ und } z = 0.16255.$$

Diese Werte sind nun auch schon die Endwerte, da die Substitution dieser Werte in (A) und (B) zeigt, dass sie erfüllt sind.

Folglich werden nun die definitiven Geschwindigkeitskomponenten x_1' , y_1' , z_1' u. ferner x_1 und y_1 bei Substitution des definitiven z -Wertes in die obigen Gleichungen :

$$\begin{array}{lll} x_1' = 8.20617 & y_1' = 7.96830n & z_1' = 7.88529 \\ x_1 = 9.13996 & y_1 = 9.08600n & z_1 = 0.16255 \end{array}$$

Um nun die Genauigkeit der Darstellung der vorgelegten Beobachtungen auf Grund der soeben erlangten Koordinaten und ihrer Geschwindigkeiten, gültig für den Zeitpunkt t_1 , zu erproben und zu prüfen, wie die nicht benutzte Breite des 2. Beobachtungsortes dargestellt wird, haben wir die geozentrischen Örter der 2. und 3. Beobachtung

quedando invariados x_1 e y_1 , según I y II de (9). En consecuencia, la ecuación (B) reza en definitiva :

mientras que la ecuación (A) debe sacarse sin modificación de la representación anterior. Si empleamos la primera aproximación anterior $r = 0.16830$ y $z = 0.16503$ como solución inicial para la resolución del nuevo par de ecuaciones (A) y (B) entonces debe ser $\log D_1 = -\infty$, puesto que la primera aproximación es una solución exacta de la ecuación (A), mientras que debe ser $D_2 = (3.49 - 10)$, de modo que empleando las situaciones anteriores con los mismos coeficientes se obtienen para las respectivas correcciones Δr_1 y Δz_1 :

de manera que los nuevos valores son :

Ahora bien, estos ya son los valores finales, pues la sustitución de los mismos en (A) y (B) muestra que estas ecuaciones quedan satisfechas.

Sustituyendo el valor definitivo de z en las ecuaciones anteriores se obtiene para las componentes definitivas de las velocidades x_1' , y_1' , z_1' y además para x_1 e y_1 , los valores :

Para examinar ahora la exactitud de la representación de las observaciones en base a las coordenadas y sus velocidades, obtenidas recientemente y válidas para el instante t_1 y para verificar cómo queda representada la latitud de la 2ª posición observada y no utilizada, debemos calcular las posiciones geocéntricas de la segunda y tercera posición en

auf Grund der zeitlichen Potenzreihen (10) für die heliozentrischen Koordinaten zu berechnen, wobei base a las series de potencias según el tiempo (10), teniendo en cuenta que

$$\xi_i = x_i + X_i$$

$$\eta_i = y_i + Y_i$$

$$\zeta_i = z_i$$

Die Rechnung ergibt :

$$\xi_2 = 9.90364n$$

$$\eta_2 = 8.70468$$

$$\zeta_2 = 0.16906$$

El cálculo proporciona :

$$\xi_3 = 9.88100n$$

$$\eta_3 = 8.46501n$$

$$\zeta_3 = 0.17539$$

Der 1. Ort ist stets identisch erfüllt, indem x_1 und y_1 so bestimmt worden sind, nach I u. II von (9), d. h. mittels $\beta_1 u \cdot \lambda_1$, dass auch die Umkehrung erfüllt ist. Für den 2. und 3. Ort ergeben sich dann die folgenden Längen und Breiten :

$$\lambda_2 = 176^\circ 22' 86$$

$$\beta_2 = 61 \quad 27.73$$

La primera posición siempre se satisface idénticamente, dado que x_1 e y_1 han sido determinados de modo que también se satisfaga la inversión, según I y II de (9), es decir, mediante β_1 y λ_1 . Para la segunda y tercera posición resultan, entonces, las siguientes longitudes y latitudes :

$$\lambda_3 = 182^\circ 11' 85$$

$$\beta_3 = 63 \quad 3.97$$

sodass sich die aus der folgenden Tabelle ersichtlichen Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung ergeben :

de modo que surgen las diferencias entre el cálculo y la observación que figuran en la tabla :

B-R	$\Delta\lambda \cdot \cos \beta$	$\Delta\beta$
1. Ort.	0.00	0.00
2. Ort.	0.00	0.00
3. Ort.	+0.02	-0.03

Es ist also eine gute Darstellung der Beobachtungen erreicht und die Darstellung der Breite des 2. Ortes zeigt, dass die parabolische Hypothese eine vollständige Darstellung der Beobachtungen ermöglicht hat.

Die Berechnung der Bahnelemente aus den 3 Koordinaten x_1, y_1, z_1 und ihren Geschwindigkeiten x_1', y_1' und z_1' gestaltet sich dann wie folgt. Zunächst ergeben sich die Neigung i , die Knotenlänge Ω und die Periheldistanz $q = 0.5 p$, wo p

Se ha obtenido en consecuencia una buena representación de las observaciones, y la de la latitud de la 2ª posición muestra que la hipótesis parabólica ha permitido una representación completa de dichas observaciones.

El cálculo de los elementos de las órbitas a partir de las tres coordenadas x_1, y_1, z_1 y de sus velocidades x_1', y_1' y z_1' se efectúa como sigue. En primer término se logran, a partir del teorema de las áreas, la inclinación i , la longitud del nodo Ω y la

der Parameter der Bahn, aus dem Flächensatz, distancia al perihelio $q = 0.5 p$ (siendo p el parámetro de la órbita) :
wonach :

$$y_1 z_1' - z_1 y_1' = k\sqrt{p} \sin i \sin \Omega = (8.09968)$$

$$x_1 z_1' - z_1 x_1' = k\sqrt{p} \sin i \cos \Omega = (8.34856n)$$

$$x_1 y_1' - y_1 x_1' = k\sqrt{p} \cos i = (6.83027)$$

Folglich erhält man sukzessive :

En consecuencia, se obtiene sucesivamente :

$$\Omega = 150^\circ 35' 17$$

$$i = 88^\circ 29' 23$$

$$q = + 1.1095$$

Die Berechnung der wahren Anomalie w_1 , die zur Ableitung der Perihelzeit benötigt wird, folgt aus den beiden Gleichungen für r und r' als Funktion von w , wobei die erste Beziehung die Polargleichung

El cálculo de la anomalía verdadera w , necesaria para deducir el tiempo del paso por el perihelio, resulta de las dos ecuaciones para r y r' en función de w , siendo la primera relación la ecuación polar

$$r = \frac{P}{1 + e \cdot \cos w}$$

und

y la segunda relación en el caso de la parábola es

$$r' = \frac{k}{\sqrt{p}} \sin w$$

die 2. Beziehung im Falle der Parabel; da im letzteren Falle noch $r \cdot r' = x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z'$, so folgen die beiden Gleichungen, die eindeutig den richtigen Quadranten für w vermitteln :

El cálculo de la anomalía verdadera w , necesaria para deducir el tiempo del paso por el perihelio, resulta de las dos ecuaciones para r y r' en función de w , siendo la primera relación la ecuación polar

$$\cos w = \frac{P}{r} - 1$$

$$\sin w = \frac{\sqrt{p}}{r} \left(\frac{x}{r} x' + \frac{y}{r} y' + \frac{z}{r} z' \right)$$

wozu bemerkt sei, dass die einfachere Formel

que determinan unívocamente el cuadrante correcto para w ; observemos aquí que la fórmula más simple :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} w = \pm \sqrt{\frac{r}{q} - 1}$$

nicht das Vorzeichen von w liefern kann.

no puede proporcionar el signo de w .

Die Rechnung ergibt dann : $w_1 = + 59^\circ 4' 06$, womit dann nach der Barkerschen Gleichung $T = \text{Perihelzeit} = 1896 \text{ Juli } 9.167$ folgt.

El cálculo suministra entonces : $w = + 59^\circ 4' 06$, con lo que resulta, de acuerdo a la ecuación de Barker ; $T = \text{tiempo del paso por el perihelio} = 1896 \text{ Julio } 9.167$.

Weiter folgt u_1 , das Argument der Breite, aus den folgenden beiden Formeln, die zugleich den Quadranten sicher stellen und zur Kontrolle der Rechnung den schon bekannten Wert von r wiedergeben müssen: (s. I, S. 95, Formel (25)):

$$r \cos u = x \cos \varrho + y \sin \varrho$$

$$r \sin u = (-x \sin \varrho + y \cos \varrho) \sec i = z \operatorname{cosec} i$$

wonach $u = 97^\circ 3' 52''$ folgt, also $\omega = u_1 - w_1 = 37^\circ 59' 46'' =$ Abstand des Perihels vom Knoten.

Hätte man die Lösung der Hauptgleichungen (36) auf der Reduktion derselben auf die Gleichung (28b): $F(z) = 0$ aufgebaut, so hätte man die folgende Gleichung 6. Grades in z erhalten, die uns hier nur noch in Bezug auf die Zahl der wirklich vorhandenen positiven und negativen reellen Wurzeln z interessiert:

$$F(z) = z^6 + 0.53610n z^5 + 0.77824 z^4 + 0.80026n z^3 + 0.63018 z^2 + 0.23798n z + 0.03968n = (-\infty)$$

welche Gleichung aus den obigen Daten der 1. Lösung entstanden ist. Nach dem Satze von Descartes sind auf Grund der Zahl der Zeichenwechsel 5 reelle positive Wurzeln und eine negative reelle Wurzel z möglich. Trägt man nun aber die Funktion $F(z)$ mit z als Abscisse graphisch auf, so ersieht man, dass $F(z) = 0$ nur an 2 reellen Stellen z eintritt, nämlich bei $z = +1.5$ und $z = -0.3$, alle anderen Wurzeln sind also paarweise konjugiert komplex; da die beobachtete Breite positiv ist, so entspricht die erstgenannte Wurzel der Beobachtung, die andere der diametralen Lage des Kometenortes, sodass sie unbrauchbar ist. Statt der nach dem Descartesschen Satze möglichen 5 positiven Wurzeln, ist also nur eine einzige tatsächlich positiv.

Analog erhält man nach (30) die folgende Gleichung 6. Grades in r :

$$F(r_1) = r_1^6 + 9.95701n r_1^4 + 0.57186n r_1^3 + 9.45797 r_1^2 + 0.10333 r_1 + 0.54166 = (-\infty)$$

Además resulta el argumento de la latitud u_1 de las dos fórmulas que siguen, que al mismo tiempo aseguran el cuadrante y que deben dar, para el control del cálculo, el valor ya conocido de r (véase I, pág. 95, fórmula (25)):

de donde resulta $u = 97^\circ 3' 52''$, y por lo tanto $\omega = u_1 - w_1 = 37^\circ 59' 46'' =$ distancia del perihelio al nodo.

De haber basado la resolución de la ecuación fundamental (36) en la reducción de la misma a la ecuación (28b): $F(z) = 0$, hubiésemos obtenido la ecuación de 6º grado que sigue, y que aquí no nos interesa más que en lo referente al número de raíces reales positivas y negativas que efectivamente existen. La ecuación es:

y resulta de los datos de la primera solución, que anteceden. De acuerdo al teorema de Descartes pueden presentarse, en base al número de cambios de signo, 5 raíces reales positivas y una raíz real negativa. Pero si ahora se representa gráficamente $F(z)$, tomando z como abscisa, se comprueba que es $F(z) = 0$ sólo para dos valores de z , que son $z = +1.5$ y $z = -0.3$, las raíces restantes son complejas conjugadas dos a dos. Dado que la latitud observada es positiva, resulta que la primera de las raíces mencionadas es la que corresponde a la observación, refiriéndose la segunda a la posición diametral del cometa, de manera que es inutilizable. En consecuencia, de las 5 raíces positivas que de acuerdo al teorema de Descartes pueden presentarse, sólo una lo es realmente.

Análogamente se obtiene, de acuerdo a (30), la ecuación de 6º grado en r :

Folglich sind nach dem Descartesschen Satze in diesen Falle 2 mögliche positive Lösungen r_1 , nämlich $r_1 = 1.5$ resp. 1.2 vorhanden, wobei wieder die erstere Lösung der Beobachtung und die 2. Lösung der diametralen Lage entspricht, wie die Berechnung von z ergibt und wie es nach Früherem auch sein muss.

Da die Aufstellung der Gleichungen 6. Grades in z wie in r , wie auch ihre Auflösung allgemein mehr Zeit in Anspruch nimmt, als die Aufsuchung der Lösung mit Hilfe der Tafeln auf Grund der beiden Grundformeln (36), so bleibt die Verwendung der Tafeln der Auflösung der beiden Gleichungen 6. Grades immer überlegen.

Vale decir, que de acuerdo al teorema de Descartes pueden presentarse en este caso dos soluciones positivas r , que son $r = 1.5$ y 1.2 , donde nuevamente la primera solución corresponde a la observación y la segunda corresponde a la posición diametral, como lo muestra el cálculo de z y como también debe ser de acuerdo a razones expuestas anteriormente.

Dado que tanto la construcción de la ecuación de 6° grado en z y en r como su resolución requiere en general más tiempo que la búsqueda de la solución con ayuda de las tablas basadas en las fórmulas fundamentales (36), siempre resulta ventajoso el empleo de dichas tablas.

TABLA PARA d'' (TAFEL FÜR d'')

r = 2.0

C''/Z	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
2	0.3	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.4	4.8	5.2	5.6	6.0
3	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8	5.1	5.4	5.7	6.0	6.6	7.2	7.8	8.4	9.0
4	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0	4.4	4.8	5.2	5.6	6.0	6.4	6.8	7.2	7.6	8.0	8.8	9.6	10.4	11.2	12.0
5	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	11.0	12.0	13.0	14.0	15.0
6	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2	4.8	5.4	6.0	6.6	7.2	7.8	8.4	9.0	9.6	10.2	10.8	11.4	12.0	13.2	14.4	15.6	16.8	18.0
7	0.7	1.4	2.1	2.8	3.5	4.2	4.9	5.6	6.3	7.0	7.7	8.4	9.1	9.8	10.5	11.2	11.9	12.6	13.3	14.0	15.4	16.8	18.2	19.6	21.0
8	0.8	1.6	2.4	3.2	4.0	4.8	5.6	6.4	7.2	8.0	8.8	9.6	10.4	11.2	12.0	12.8	13.6	14.4	15.2	16.0	17.6	19.2	20.8	22.4	24.0
9	0.9	1.8	2.7	3.6	4.5	5.4	6.3	7.2	8.1	9.0	9.9	10.8	11.7	12.6	13.5	14.4	15.3	16.2	17.1	18.0	19.8	21.6	23.4	25.2	27.0
10	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0	12.0	13.0	14.0	15.0	16.0	17.0	18.0	19.0	20.0	22.0	24.0	26.0	28.0	30.0
100	10.0	20.0	30.0	40.0	50.0	60.0	70.0	80.0	90.0	100.0	110.0	120.0	130.0	140.0	150.0	160.0	170.0	180.0	190.0	200.0	220.0	240.0	260.0	280.0	300.0
200	20.0	40.0	60.0	80.0	100.0	120.0	140.0	160.0	180.0	200.0	220.0	240.0	260.0	280.0	300.0	320.0	340.0	360.0	380.0	400.0	440.0	480.0	520.0	560.0	600.0
300	30.0	60.0	90.0	120.0	150.0	180.0	210.0	240.0	270.0	300.0	330.0	360.0	390.0	420.0	450.0	480.0	510.0	540.0	570.0	600.0	660.0	720.0	780.0	840.0	900.0
400	40.0	80.0	120.0	160.0	200.0	240.0	280.0	320.0	360.0	400.0	440.0	480.0	520.0	560.0	600.0	640.0	680.0	720.0	760.0	800.0	880.0	960.0	1040.0	1120.0	1200.0
500	50.0	100.0	150.0	200.0	250.0	300.0	350.0	400.0	450.0	500.0	550.0	600.0	650.0	700.0	750.0	800.0	850.0	900.0	950.0	1000.0	1100.0	1200.0	1300.0	1400.0	1500.0

r = 1.9

C''/Z	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8
0	+0.5	+0.2	+0.2	+0.1	+0.1	+0.1	+0.1	+0.1	+0.1	+0.0	+0.0	+0.0	+0.0	+0.0	+0.0	+0.0	+0.0	+0.0	+0.0	+0.0	+0.0	+0.0	+0.0	+0.0
1	0.4	+0.0	-0.1	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.7	-0.8	-0.9	-1.1	-1.2	-1.3	-1.4	-1.5	-1.6	-1.7	-1.8	-1.9	-2.0	-2.2	-2.4	-2.6	-2.8
2	0.3	-0.1	0.4	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9	2.2	2.4	2.6	2.5	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.4	4.8	5.2	5.6
3	0.2	0.3	0.7	1.1	1.4	1.7	2.0	2.3	2.6	2.9	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8	5.1	5.4	5.7	6.0	6.6	7.2	7.8	8.4
4	0.1	0.5	1.0	1.5	1.9	2.3	2.7	3.1	3.5	3.9	4.4	4.8	5.2	5.6	6.0	6.4	6.8	7.2	7.6	8.0	8.8	9.6	10.4	11.2
5	0.0	0.7	1.3	1.9	2.4	2.9	3.4	3.9	4.4	4.9	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	11.0	12.0	13.0	14.0
6	-0.1	0.9	1.6	2.3	2.9	3.5	4.1	4.7	5.3	5.9	6.6	7.2	7.8	8.4	9.0	9.6	10.2	10.8	11.4	12.0	13.2	14.4	15.6	16.8
7	0.2	1.1	1.9	2.7	3.4	4.1	4.8	5.5	6.2	6.9	7.7	8.4	9.1	9.8	10.5	11.2	11.9	12.6	13.3	14.0	15.4	16.8	18.2	19.6
8	0.3	1.3	2.2	3.1	3.9	4.7	5.5	6.3	7.1	7.9	8.8	9.6	10.4	11.2	12.0	12.8	13.6	14.4	15.2	16.0	17.6	19.2	20.8	22.4
9	0.4	1.5	2.5	3.5	4.4	5.3	6.2	7.1	8.0	8.9	9.9	10.8	11.7	12.6	13.5	14.4	15.3	16.2	17.1	18.0	19.8	21.6	23.4	25.3
10	0.5	0.7	2.8	3.9	4.9	5.9	6.9	7.9	8.9	9.9	11.0	12.0	13.0	14.0	15.0	16.0	17.0	18.0	19.0	20.0	22.0	24.0	26.0	28.0
100	9.5	19.7	29.8	39.9	49.9	59.9	69.9	79.9	89.9	99.9	110.0	120.0	130.0	140.0	150.0	160.0	170.0	180.0	190.0	200.0	220.0	240.0	260.0	280.0
200	19.5	39.7	59.8	79.9	99.9	119.9	139.9	159.9	179.9	199.9	219.9	240.0	260.0	280.0	300.0	320.0	340.0	360.0	380.0	400.0	440.0	480.0	520.0	560.0
300	29.5	59.7	89.8	119.9	149.9	179.9	209.9	239.9	269.9	299.9	330.0	360.0	390.0	420.0	450.0	480.0	510.0	540.0	570.0	600.0	660.0	720.0	780.0	840.0
400	39.5	79.7	119.8	159.9	199.9	239.9	279.9	319.9	359.9	399.9	440.0	480.0	520.0	560.0	600.0	640.0	680.0	720.0	760.0	800.0	880.0	960.0	1040.0	1120.0
500	49.5	99.7	149.8	199.9	249.9	299.9	349.9	399.9	449.9	499.9	550.0	600.0	650.0	700.0	750.0	800.0	850.0	900.0	950.0	1000.0	1100.0	1200.0	1300.0	1400.0

TABLA PARA d'' (TAFEL FÜR d'')

r = 1.8

C''/Z	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	
0	+1.1	+0.6	+0.4	+0.3	+0.2	+0.2	+0.1	+0.1	+0.1	+0.1	+0.1	+0.1	+0.1	+0.1	+0.1	+0.1	+0.1	+0.1	+0.1	+0.0	+0.0	+0.0	+0.0	+0.0
1	1.0	0.4	+0.1	-0.1	-0.3	-0.4	-0.5	-0.7	-0.8	-0.9	-1.0	-1.1	-1.2	-1.3	-1.4	-1.5	-1.6	-1.7	-1.9	-2.1	-2.3	-2.6	-2.8	-3.6
2	0.9	+0.2	-0.2	0.8	1.0	1.2	1.5	1.5	1.7	1.9	2.1	2.3	2.5	2.7	2.9	3.1	3.3	3.5	3.9	4.3	4.7	5.2	5.8	6.6
3	0.8	-0.0	0.5	0.9	1.3	1.6	1.9	2.3	2.6	2.9	3.2	3.5	3.8	4.1	4.4	4.7	5.0	5.3	5.9	6.5	7.1	7.8	8.4	9.3
4	0.7	0.2	0.8	1.3	1.8	2.2	2.6	3.1	3.5	3.9	4.3	4.7	5.1	5.5	5.9	6.3	6.7	7.1	7.9	8.7	9.5	10.4	11.4	12.5
5	0.6	0.4	1.3	1.7	2.3	2.8	3.3	3.9	4.4	4.9	5.4	5.9	6.4	6.9	7.4	7.9	8.4	8.9	9.9	10.9	11.9	13.0	14.0	15.2
6	0.5	0.6	1.4	2.1	2.8	3.4	4.0	4.7	5.3	5.9	6.5	7.1	7.7	8.3	8.9	9.5	10.1	10.7	11.9	13.1	14.3	15.6	16.8	18.1
7	0.4	0.8	1.7	2.5	3.3	4.0	4.7	5.5	6.2	6.9	7.6	8.3	9.0	9.7	10.4	11.1	11.8	12.5	13.9	15.3	16.7	18.2	19.6	21.0
8	0.3	1.0	2.0	2.9	3.8	4.6	5.4	6.3	7.1	7.9	8.7	9.5	10.3	11.1	11.9	12.7	13.5	14.3	15.9	17.5	19.1	20.8	22.4	24.0
9	0.2	1.2	2.3	3.3	4.3	5.2	6.1	7.1	7.2	8.9	9.8	10.7	11.6	12.5	13.4	14.3	15.2	16.1	17.9	19.7	21.5	23.4	25.2	27.0
10	+0.1	1.4	2.6	3.7	4.8	5.8	6.8	7.9	8.9	9.9	10.9	11.9	12.9	13.9	14.9	15.9	16.9	17.9	19.9	21.9	23.9	26.0	28.0	30.0
100	-8.9	19.4	29.6	39.7	49.8	59.8	69.8	79.9	89.9	99.9	109.9	119.9	129.9	139.9	149.9	159.9	169.9	179.9	199.9	219.9	239.9	260.0	280.0	300.0
200	18.9	39.4	59.6	79.7	99.8	119.8	139.8	159.8	179.8	199.8	219.8	239.8	259.8	279.8	299.8	319.8	339.8	359.8	399.8	439.8	479.8	520.0	560.0	600.0
300	28.9	59.4	89.6	119.7	149.8	179.8	209.8	239.8	269.8	299.8	329.8	359.8	389.8	419.8	449.8	479.8	509.8	539.8	599.8	659.8	719.8	780.0	840.0	900.0
400	38.9	79.4	119.6	159.7	199.8	239.8	279.8	319.8	359.8	399.8	439.8	479.8	519.8	559.8	599.8	639.8	679.8	719.8	799.8	879.8	959.8	1040.0	1120.0	1200.0
500	48.9	99.4	149.6	199.7	249.8	299.8	349.8	399.8	449.8	499.8	549.8	599.8	649.8	699.8	749.8	799.8	849.8	899.8	999.8	1099.8	1199.8	1300.0	1400.0	1500.0

r = 1.7

C''/Z	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	
0	+1.80	+0.90	+0.60	+0.45	+0.36	+0.30	+0.26	+0.22	+0.20	+0.18	+0.16	+0.15	+0.14	+0.13	+0.12	+0.11	+0.10	+0.10	+0.09	+0.09	+0.08	+0.07	+0.07
1	1.70	0.70	0.30	+0.05	-0.14	-0.30	-0.44	0.58	-0.70	-0.82	-0.94	-1.05	-1.16	-1.27	-1.38	-1.49	-1.60	-1.70	-1.91	-2.11	-2.32	-2.53	-2.73
2	1.60	0.50	+0.00	-0.35	0.64	0.90	1.14	1.38	1.60	1.82	2.04	2.25	2.46	2.67	2.88	3.09	3.30	3.50	3.91	4.31	4.72	5.13	5.53
3	1.50	0.30	-0.30	0.75	1.14	1.50	1.84	2.18	2.50	2.82	3.14	3.45	3.76	4.07	4.38	4.69	5.00	5.30	5.91	6.51	7.12	7.73	8.33
4	1.40	+0.10	0.60	1.15	1.64	2.10	2.54	2.98	3.40	3.82	4.24	4.65	5.06	5.47	5.88	6.29	6.70	7.10	7.91	8.71	9.52	10.33	11.13
5	1.30	-0.10	0.90	1.55	2.14	2.70	3.24	3.78	4.30	4.82	5.34	5.85	6.36	6.87	7.38	7.89	8.40	8.90	9.91	10.91	11.92	12.93	13.93
6	1.20	0.30	1.20	1.95	2.64	3.30	3.94	4.58	5.20	5.82	6.44	7.05	7.66	8.27	8.88	9.49	10.10	10.70	11.91	13.11	14.32	15.53	16.73
7	1.10	0.50	1.50	2.35	3.14	3.90	4.64	5.38	6.10	6.82	7.54	8.25	8.96	9.67	10.38	11.09	11.80	12.50	13.91	15.31	16.72	18.13	19.53
8	1.00	0.70	1.80	2.75	3.64	4.50	5.34	6.18	7.00	7.82	8.64	9.45	10.26	11.07	11.88	12.69	13.50	14.30	15.91	17.51	19.12	20.73	22.33
9	0.90	0.90	2.10	3.15	4.14	5.10	6.04	6.98	7.90	8.82	9.74	10.65	11.56	12.47	13.38	14.29	15.20	16.10	17.91	19.71	21.52	23.33	25.13
10	+0.80	1.10	2.40	3.55	4.64	5.70	6.74	7.78	8.80	9.82	10.84	11.85	12.86	13.87	14.88	15.89	16.90	17.90	19.91	21.91	23.92	25.93	27.93
100	-8.20	19.10	29.40	39.55	49.64	59.70	69.74	79.78	89.80	99.82	109.84	119.85	129.86	139.87	149.88	159.89	169.90	179.90	199.91	219.91	239.92	259.93	279.93
200	18.20	39.10	59.40	79.55	99.78	119.82	139.74	159.78	179.80	199.82	219.84	239.85	259.92	279.87	299.88	319.89	339.94	359.90	399.91	439.91	479.92	519.93	559.93
300	28.20	59.10	89.40	119.72	149.78	179.82	209.74	239.78	269.80	299.82	329.84	359.85	389.92	419.87	449.88	479.89	509.94	539.90	599.91	659.91	719.92	779.93	839.93
400	38.20	79.10	119.40	159.72	199.78	239.82	279.74	319.78	359.80	399.82	439.84	479.85	519.92	559.87	599.88	639.89	679.94	719.90	799.91	879.91	959.92	1039.93	1119.93
500	48.20	99.10	149.40	199.72	249.78	299.82	349.74	399.78	449.80	499.82	549.84	599.85	649.92	699.87	749.88	799.89	849.94	899.90	999.91	1099.91	1199.92	1299.93	1399.93

TABLA PARA d (TAFEL FÜR d)

$r = 1.7$

β/λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
0°																	
2																	
4																	
6		-8.87	-21.19														
8		-0.86	9.14														
10		+2.82	3.63	-8.51													
12		+4.82	0.63	-4.52	-7.78												
14		+6.04	1.18	2.10	-4.75	-7.08											
16		+6.81	2.35	-0.55	-2.81	-4.76	-6.46										
18			3.16	+0.54	-1.46	-3.13	-3.28	-6.01									
20			3.74	+1.31	-0.50	-1.98	-3.01	-4.48									
22			4.17	+1.88	+0.22	-1.12	-1.54	-3.33	-4.30								
24			4.49	+2.31	+0.75	-0.48	-0.94	-2.48	-3.34	-4.16							
26				+2.64	+1.18	+0.03	-0.47	-1.80	-2.97	-3.31	-4.01						
28				+2.92	+1.51	+0.43	+0.10	-1.26	-1.77	-2.64	-3.26						
30				+3.13	+1.78	+0.75	+0.21	-0.84	-1.50	-2.11	-2.69	-3.22					
32					+2.00	+1.01	+0.46	-0.49	-1.10	-1.68	-2.21	-2.70	-3.18				
34					+2.18	+1.24	+0.67	-0.19	-0.77	-1.30	-1.80	-2.26	-2.70				
36					+2.33	+1.41	+0.85	+0.04	-0.51	-1.01	-1.47	-1.90	-2.31	-2.70			
38					+2.46	+1.57	+0.86	+0.25	-0.28	-0.75	-1.19	-1.59	-1.98	-2.35			
40						+1.70	+1.14	+0.43	-0.08	-0.53	-0.95	-1.33	-1.70	-2.04			
42						+1.82	+1.25	+0.58	+0.10	-0.34	-0.73	-1.10	-1.44	-1.77			
44						+1.91	+1.35	+0.71	+0.24	-0.18	-0.56	-0.91	-1.24	-1.55			
46							+1.43	+0.82	+0.36	-0.04	-0.41	-0.74	-1.06	-1.36			
48							+1.51	+0.91	+0.47	+0.08	-0.28	-0.60	-0.90	-1.19			
50								+1.00	+0.57	+0.18	-0.16	-0.47	-0.76	-1.04			
52								+1.07	+0.65	+0.28	-0.06	-0.36	-0.65	-0.91			
54								+1.14	+0.73	+0.36	+0.04	-0.26	-0.53	-0.79			
56								+1.20	+0.79	+0.44	+0.12	-0.17	-0.44	-0.68			
58								+1.25	+0.85	+0.50	+0.19	-0.10	-0.36	-0.60			
60									+0.90	+0.56	+0.25	-0.02	-0.28	-0.51			
62									+0.95	+0.61	+0.31	+0.04	-0.21	-0.45			
64										+0.65	+0.36	+0.09	-0.15	-0.38			
66										+0.69	+0.40	+0.14	-0.10	-0.32			
68										+0.72	+0.44	+0.18	-0.06	-0.28			
70											+0.47	+0.22	-0.02	-0.24			
72											+0.50	+0.25	+0.01	-0.20			
74											+0.53	+0.28	+0.05	-0.16			
76											+0.30	+0.30	+0.07	-0.14			
78											+0.32	+0.32	+0.09	-0.12			
80											+0.34	+0.34	+0.11	-0.10			
82													+0.13	-0.08			
84													+0.14	-0.06			
86														-0.06			
88															-0.05		
90																	

-1.18

TABLA PARA d'' (TAFEL FÜR d'')

r = 1.6

C/Z	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	
0	+2.50	+1.25	+0.83	+0.62	+0.50	+0.42	+0.36	+0.31	+0.28	+0.25	+0.23	+0.21	+0.19	+0.18	+0.17	+0.16	+0.14	+0.12	+0.11	+0.11	+0.10	+0.10
1	2.40	1.05	0.53	+0.22	0.00	-0.18	-0.34	-0.49	-0.62	-0.75	-0.87	-0.99	-1.11	-1.22	-1.33	-1.44	-1.66	-1.88	-2.09	-2.09	-2.30	-2.50
2	2.30	0.85	+0.23	-0.18	-0.50	0.78	1.04	1.29	1.52	1.75	1.97	2.19	2.41	2.62	2.83	3.04	3.46	3.88	4.29	4.29	4.70	5.10
3	2.20	0.65	-0.07	0.58	1.00	1.38	1.74	2.09	2.42	2.75	3.07	3.39	3.71	4.02	4.33	4.64	5.26	5.88	6.49	6.49	7.10	7.70
4	2.10	0.45	0.37	0.98	1.50	1.98	2.44	2.89	3.32	3.75	4.17	4.59	5.01	5.42	5.83	6.24	7.06	7.88	8.69	8.69	9.50	10.30
5	2.00	0.25	0.67	1.38	2.00	2.58	3.14	3.69	4.22	4.75	5.27	5.79	6.31	6.82	7.33	7.84	8.86	9.88	10.89	10.89	11.90	12.90
6	1.90	+0.05	0.97	1.78	2.50	3.18	3.84	4.49	5.12	5.75	6.37	6.99	7.61	8.22	8.83	9.44	10.66	11.88	13.09	13.09	14.30	15.50
7	1.80	-0.15	1.27	2.18	3.00	3.78	4.54	5.29	6.02	6.75	7.47	8.19	8.91	9.62	10.33	11.04	12.46	13.88	15.29	15.29	16.70	18.10
8	1.70	0.35	1.57	2.58	3.50	4.38	5.24	6.09	6.92	7.75	8.57	9.39	10.21	11.02	11.83	12.64	14.26	15.88	17.49	17.49	19.10	20.70
9	1.60	0.55	1.87	2.98	4.00	4.98	5.94	6.89	7.82	8.75	9.67	10.59	11.51	12.42	13.33	14.24	16.06	17.88	19.69	19.69	21.50	23.30
10	+1.50	0.75	2.17	3.38	4.50	5.58	6.64	7.69	8.72	9.75	10.77	11.79	12.81	13.82	14.83	15.84	17.86	19.88	21.89	21.89	23.90	25.90
100	-7.50	18.75	29.17	39.38	49.50	59.58	69.64	79.69	89.72	99.75	109.77	119.79	129.81	139.82	149.83	159.84	179.86	199.88	219.89	219.89	239.90	259.90
200	17.50	38.75	59.17	79.38	99.50	119.58	139.64	159.69	179.72	199.75	219.77	239.79	259.81	279.82	299.83	319.84	339.86	359.88	379.89	379.89	479.90	519.90
300	27.50	58.75	89.17	119.38	149.50	179.58	209.64	239.69	269.72	299.75	329.77	359.79	389.81	419.82	449.83	479.84	509.86	539.88	559.89	559.89	719.90	779.90
400	37.50	78.75	119.17	159.38	199.50	239.58	279.64	319.69	359.72	399.75	439.77	479.79	519.81	559.82	599.83	639.84	679.86	719.88	759.89	759.89	959.90	1039.90
500	47.50	98.75	149.17	199.38	249.50	299.58	349.64	399.69	449.72	499.75	549.77	599.79	649.81	699.82	749.83	799.84	849.86	899.88	949.89	949.89	1199.90	1299.90

r = 1.5

C''/Z	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	
0	+3.30	+1.65	+1.10	+0.82	+0.67	+0.55	+0.47	+0.41	+0.37	+0.33	+0.30	+0.28	+0.25	+0.24	+0.22	+0.21	+0.18	+0.16	+0.15	+0.15	+0.14
1	3.20	1.45	0.80	0.42	+0.17	-0.05	-0.23	-0.39	-0.53	-0.67	-0.80	-0.92	-1.05	-1.16	-1.28	-1.39	-1.62	-1.84	-2.05	-2.05	-2.26
2	3.10	1.25	0.50	+0.02	-0.33	0.65	0.93	1.19	1.43	1.67	1.90	2.12	2.35	2.56	2.78	2.99	3.42	3.84	4.25	4.25	4.66
3	3.00	1.05	+0.20	-0.38	0.83	1.25	1.63	1.99	2.33	2.67	3.00	3.32	3.65	3.96	4.28	4.59	5.22	5.84	6.45	6.45	7.06
4	2.90	0.85	-0.10	0.78	1.33	1.85	2.33	2.79	3.23	3.67	4.10	4.52	4.95	5.36	5.78	6.19	7.02	7.84	8.65	8.65	9.46
5	2.80	0.65	0.40	1.18	1.83	2.45	3.03	3.59	4.13	4.67	5.20	5.72	6.25	6.76	7.28	7.79	8.82	9.84	10.85	10.85	11.86
6	2.70	0.45	0.70	1.58	2.33	3.05	3.73	4.39	5.03	5.67	6.30	6.92	7.55	8.16	8.78	9.39	10.62	11.84	13.05	13.05	14.26
7	2.60	0.25	1.00	1.98	2.83	3.65	4.43	5.19	5.93	6.67	7.40	8.12	8.85	9.56	10.28	10.99	12.42	13.84	15.25	15.25	16.66
8	2.50	+0.05	1.30	2.38	3.33	4.25	5.13	5.99	6.83	7.67	8.50	9.32	10.15	10.96	11.78	12.59	14.22	15.84	17.45	17.45	19.06
9	2.40	-0.15	1.60	2.78	3.83	4.85	5.83	6.79	7.73	8.67	9.60	10.52	11.45	12.36	13.28	14.19	16.02	17.84	19.65	19.65	21.46
10	+2.30	0.35	1.90	3.18	4.33	5.45	6.53	7.59	8.63	9.67	10.70	11.72	12.75	13.76	14.78	15.79	17.82	19.84	21.85	21.85	23.86
100	-6.70	18.35	28.90	39.18	49.33	59.45	69.53	79.59	89.63	99.67	109.70	119.72	129.75	139.76	149.78	159.79	179.82	199.84	219.85	219.85	239.86
200	16.70	38.35	58.90	79.18	99.33	119.45	139.53	159.59	179.63	199.67	219.70	239.72	259.75	279.76	299.78	319.79	339.82	359.84	379.85	379.85	479.86
300	26.70	58.35	88.90	119.18	149.33	179.45	209.53	239.59	269.63	299.67	329.70	359.72	389.75	419.76	449.78	479.79	509.82	539.84	559.85	559.85	719.86
400	36.70	78.35	118.90	159.18	199.33	239.45	279.53	319.59	359.63	399.67	439.70	479.72	519.75	559.76	599.78	639.79	679.82	719.84	759.85	759.85	959.86
500	46.70	98.35	148.90	199.18	249.33	299.45	349.53	399.59	449.63	499.67	549.70	599.72	649.75	699.76	749.78	799.79	849.82	899.84	949.85	949.85	1199.86

TABLA PARA d (TAFEL FÜR d)

r = 1.5

β/λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
0°															
2															
4															
6															
8															
10															
12															
14															
16															
18															
20															
22															
24															
26															
28															
30															
32															
34															
36															
38															
40															
42															
44															
46															
48															
50															
52															
54															
56															
58															
60															
62															
64															
66															
68															
70															
72															
74															
76															
78															
80															
82															
84															
86															
88															
90															

-1.58

TABLA PARA d (TAFEL FÜR d)

r = 1.4

β/Z	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
0°														
2														
4														
6														
8														
10														
12														
14														
16														
18														
20														
22														
24														
26														
28														
30														
32														
34														
36														
38														
40														
42														
44														
46														
48														
50														
52														
54														
56														
58														
60														
62														
64														
66														
68														
70														
72														
74														
76														
78														
80														
82														
84														
86														
88														
90														

-1.43

TABLA PARA d'' (TAFEL FÜR d'')

r = 1.4

C^m/Z	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4
0	+4.30	+2.15	+1.43	+1.08	+0.86	+0.72	+0.61	+0.54	+0.48	+0.43	+0.39	+0.36	+0.33	+0.31	+0.25	+0.22	+0.20	+0.18	+0.17
1	4.20	1.95	1.13	0.68	+0.36	+0.12	-0.09	-0.26	-0.42	-0.57	-0.71	-0.84	-0.97	-1.09	-1.35	-1.58	-1.80	-2.02	-2.23
2	4.10	1.75	0.83	+0.28	-0.14	-0.48	0.79	1.06	1.32	1.57	1.81	2.00	2.27	2.49	2.95	3.38	3.80	4.22	4.63
3	4.00	1.55	0.53	-0.12	0.64	1.08	1.49	1.86	2.22	2.57	2.91	3.24	3.57	3.89	4.55	5.18	5.80	6.42	7.03
4	3.90	1.35	+0.23	0.52	1.14	1.68	2.19	2.66	3.12	3.57	4.01	4.44	4.87	5.29	6.15	6.98	7.80	8.62	9.43
5	3.80	1.15	-0.07	0.92	1.64	2.28	2.89	3.46	4.02	4.57	5.11	5.64	6.17	6.69	7.75	8.78	9.80	10.82	11.83
6	3.70	0.95	0.37	1.32	2.14	2.88	3.59	4.26	4.92	5.57	6.21	6.84	7.47	8.09	9.35	10.58	11.80	13.02	14.23
7	3.60	0.75	0.67	1.72	2.64	3.48	4.29	5.06	5.82	6.57	7.31	8.04	8.77	9.49	10.95	12.38	13.80	15.22	16.63
8	3.50	0.55	0.97	2.12	3.14	4.08	4.99	5.86	6.72	7.57	8.41	9.24	10.07	10.89	12.55	14.18	15.80	17.42	19.03
9	3.40	0.35	1.27	2.52	3.64	4.68	5.69	6.66	7.62	8.57	9.51	10.44	11.37	12.29	14.15	15.98	17.80	19.62	21.43
10	+3.30	+0.15	1.57	2.92	4.14	5.28	6.39	7.46	8.52	9.57	10.61	11.64	12.67	13.69	15.75	17.78	19.80	21.82	23.83
100	-5.70	-17.75	28.57	38.92	49.14	59.28	69.39	79.46	89.52	99.57	109.61	119.64	129.67	139.69	159.75	179.78	199.80	219.82	239.83
200	15.70	37.75	58.57	78.92	99.14	119.28	139.39	159.46	179.52	199.57	219.61	239.64	259.67	279.69	319.75	359.78	399.80	439.82	479.83
300	25.70	57.75	88.57	118.92	149.14	179.28	209.39	239.46	269.52	299.57	329.61	359.64	389.67	419.69	479.75	539.78	599.80	659.82	719.83
400	35.70	77.75	118.57	158.92	199.14	239.28	279.39	319.46	359.52	399.57	439.61	479.64	519.67	559.69	639.75	719.78	799.80	879.82	959.83
500	45.70	97.75	148.57	198.92	249.14	299.28	349.39	399.46	449.52	499.57	549.61	599.64	649.67	699.69	799.75	899.78	999.80	1099.82	1099.83

r = 1.3

C^m/Z	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
0	+5.40	+2.70	+1.80	+1.35	+1.08	+0.90	+0.77	+0.68	+0.60	+0.54	+0.49	+0.45	+0.42	+0.38	+0.34	+0.30	+0.27	+0.24
1	5.30	2.50	1.50	0.95	0.58	+0.30	+0.07	-0.12	-0.30	-0.46	-0.61	-0.75	-0.88	-1.02	-1.26	-1.50	-1.73	-1.96
2	5.20	2.30	1.20	0.55	+0.08	-0.30	-0.63	0.92	1.20	1.46	1.71	1.95	2.18	2.42	2.86	3.30	3.73	4.16
3	5.10	2.10	0.90	+0.15	-0.42	0.90	1.33	1.72	2.10	2.46	2.81	3.15	3.48	3.82	4.46	5.10	5.73	6.36
4	5.00	1.90	0.60	-0.25	0.92	1.50	2.03	2.52	3.00	3.46	3.91	4.35	4.78	5.22	6.06	6.90	7.73	8.56
5	4.90	1.70	+0.30	0.65	1.42	2.10	2.73	3.32	3.90	4.46	5.00	5.55	6.08	6.62	7.66	8.70	9.73	10.76
6	4.80	1.50	0.00	1.05	1.42	2.70	3.43	4.12	4.80	5.46	6.11	6.75	7.38	8.02	9.26	10.50	11.73	12.96
7	4.70	1.30	-0.30	1.45	2.42	3.30	4.13	4.92	5.70	6.46	7.21	7.95	8.68	9.42	10.86	12.30	13.73	15.16
8	4.60	1.10	0.60	1.85	2.92	3.90	4.83	5.72	6.60	7.46	8.31	9.15	9.98	10.82	12.46	14.10	15.73	17.36
9	4.50	0.90	0.90	2.25	3.42	4.50	5.53	6.52	7.50	8.46	9.41	10.35	11.28	12.22	14.06	15.90	17.73	19.56
10	+4.40	+0.70	1.20	2.65	3.92	5.10	6.23	7.32	8.40	9.46	10.51	11.55	12.58	13.62	15.66	17.70	19.73	21.76
100	-4.60	-17.30	28.20	38.65	48.92	59.10	69.23	79.32	89.40	99.46	109.51	119.55	129.58	139.62	159.66	179.70	199.73	219.76
200	14.60	37.30	58.20	78.65	99.92	119.10	139.23	159.32	179.40	199.46	219.51	239.55	259.58	279.62	319.66	359.70	399.73	439.76
300	24.60	57.30	88.20	118.65	149.92	179.10	209.23	239.32	269.40	299.46	329.51	359.55	389.58	419.62	479.66	539.70	599.73	659.76
400	34.60	77.30	118.20	158.65	199.92	239.10	279.23	319.32	359.40	399.46	439.51	479.55	519.58	559.62	639.66	719.70	799.73	879.76
500	44.60	97.30	148.20	198.65	249.92	299.10	349.23	399.32	449.40	499.46	549.51	609.55	649.58	699.62	799.66	899.70	999.73	1099.76

TABLA PARA d'' (TAFEL FÜR d'')

r = 1.2

C''/Z	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
0	+6.66	+3.33	+2.22	+1.67	+1.33	+1.11	+0.95	+0.83	+0.74	+0.67	+0.61	+0.56	+0.50	+0.40	+0.39	+0.35	+0.32
1	6.56	3.13	1.92	1.27	0.83	+0.51	+0.25	+0.03	-0.16	-0.33	-0.49	-0.64	-0.90	-1.20	-1.41	-1.65	-1.88
2	6.46	2.93	1.62	0.87	+0.33	-0.09	-0.45	-0.77	1.06	1.33	1.59	1.84	2.30	2.80	3.21	3.65	4.08
3	6.36	2.73	1.32	0.47	-0.17	0.69	1.15	1.57	1.96	2.33	2.69	3.04	3.70	4.40	5.01	5.65	6.28
4	6.26	2.53	1.02	+0.97	0.67	1.29	1.85	2.37	2.86	3.33	3.79	4.24	5.10	6.00	6.81	7.65	8.48
5	6.16	2.33	0.72	-0.33	1.17	1.89	2.55	3.17	3.76	4.33	4.89	5.44	6.50	7.60	8.61	9.65	10.68
6	6.06	2.13	0.42	0.73	1.67	2.49	3.25	3.97	4.66	5.33	5.99	6.64	7.90	9.20	10.41	11.65	12.88
7	5.96	1.93	+0.12	1.13	2.17	3.09	3.95	4.77	5.56	6.33	7.09	7.84	9.30	10.80	12.21	13.65	15.08
8	5.86	1.73	-0.18	1.53	2.67	3.69	4.65	5.57	6.46	7.33	8.19	9.04	10.70	12.40	14.01	15.65	17.28
9	5.76	1.53	0.48	1.93	3.17	4.29	5.35	6.37	7.36	8.33	9.29	10.24	12.10	14.00	15.81	17.65	19.48
10	+5.66	+1.33	0.78	2.33	3.67	4.89	6.05	7.17	8.26	9.33	10.39	11.44	13.50	15.60	17.61	19.65	21.68
100	-3.34	-16.67	27.78	38.33	48.67	58.89	69.05	79.17	89.26	99.33	109.39	119.44	139.50	159.60	179.61	199.65	219.68
200	13.34	36.67	57.78	78.33	98.67	118.89	139.05	159.17	179.26	199.33	219.39	239.44	279.50	319.60	359.82	399.95	439.68
300	23.34	56.67	87.78	118.33	148.67	178.89	209.05	239.17	269.26	299.33	329.39	359.44	419.50	479.60	539.82	599.95	659.68
400	33.34	76.67	117.78	158.33	198.67	238.89	279.05	319.17	359.26	399.33	439.39	479.44	559.50	639.60	719.82	799.95	879.68
500	43.34	96.67	147.78	198.33	248.67	298.89	349.05	399.17	449.26	499.33	549.39	599.44	699.50	799.60	899.82	999.95	1099.68

r = 1.1

C''/Z	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.3	1.4	1.6	1.8	2.0
0	+8.20	+4.10	+2.73	+2.05	+1.64	+1.37	+1.17	+1.02	+0.91	+0.82	+0.74	+0.68	+0.58	+0.51	+0.46	+0.41
1	8.10	3.90	2.43	1.65	1.14	0.77	+0.47	+0.22	+0.01	-0.18	-0.36	-0.52	-0.82	-1.09	-1.34	-1.59
2	8.00	3.70	2.13	1.25	0.64	+0.17	-0.23	-0.58	-0.89	-1.18	-1.46	-1.72	-2.22	-2.69	-3.14	-3.59
3	7.90	3.50	1.83	0.85	+0.14	-0.43	0.93	1.38	1.79	2.18	2.56	2.92	3.62	4.29	4.94	5.59
4	7.80	3.30	1.53	0.45	-0.36	1.03	1.63	2.18	2.69	3.18	3.66	4.12	5.02	5.89	6.74	7.59
5	7.70	3.10	1.23	+0.05	0.86	1.63	2.33	2.98	3.59	4.18	4.76	5.32	6.42	7.49	8.54	9.59
6	7.60	2.90	0.93	-0.35	1.36	2.23	3.03	3.78	4.49	5.18	5.86	6.52	7.82	9.09	10.34	11.59
7	7.50	2.70	0.63	0.75	1.86	2.83	3.73	4.58	5.39	6.18	6.96	7.72	9.22	10.69	12.14	13.59
8	7.40	2.50	0.33	1.15	2.36	3.43	4.43	5.38	6.29	7.18	8.06	8.92	10.62	12.29	13.94	15.59
9	7.30	2.30	+0.03	1.55	2.86	4.03	5.13	6.18	7.19	8.18	9.16	10.12	12.02	13.89	15.74	17.59
10	+7.20	+2.10	-0.27	1.95	3.36	4.63	5.83	6.98	8.09	9.18	10.26	11.32	13.42	15.49	17.54	19.59
100	-1.80	-15.90	27.27	37.95	48.36	58.63	68.83	78.98	89.09	99.18	109.26	119.32	139.42	159.49	179.54	199.59
200	11.80	35.90	57.27	77.95	98.36	118.63	138.83	158.98	179.09	199.18	219.26	239.32	279.42	319.49	359.54	399.59
300	21.80	55.90	87.27	117.95	148.36	178.63	208.83	238.98	269.09	299.18	329.26	359.32	419.42	479.49	539.54	599.59
400	31.80	75.90	117.27	157.95	198.36	238.63	278.83	318.98	359.09	399.18	439.26	479.32	559.42	639.49	719.54	799.59
500	41.80	95.90	147.27	197.95	248.36	298.63	348.83	408.98	449.09	499.18	549.26	599.32	699.42	799.49	899.54	999.59

TABLA PARA d (TAFEL FÜR d)

r = 1.1

β/z	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1
0°											
2	-18.42	-17.26									
4	-7.06	-9.25									
6	-3.05										
8											
10											
12											
14											
16											
18											
20											
22											
24											
26											
28											
30											
32											
34											
36											
38											
40											
42											
44											
46											
48											
50											
52											
54											
56											
58											
60											
62											
64											
66											
68											
70											
72											
74											
76											
78											
80											
82											
84											
86											
88											
90											

-1.82

TABLA PARA d'' (TAFEL FÜR d'') $r = 1.0$

C''/Z	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0	+10.00	+ 5.00	+ 3.33	+2.50	+2.00	+1.67	+1.43	+1.25	+1.11	+1.00	+0.83	+0.71	+0.62	+0.56	+0.50
1	9.90	4.80	3.03	2.10	1.50	1.07	0.73	+0.45	+0.21	+0.00	-0.37	-0.69	-0.98	-1.24	-1.50
2	9.80	4.60	2.73	1.70	1.00	+0.47	+0.03	-0.35	-0.69	-1.00	1.57	2.09	2.58	3.04	3.50
3	9.70	4.40	2.43	1.30	0.50	-0.13	-0.67	1.15	1.59	2.00	2.77	3.49	4.18	4.84	5.50
4	9.60	4.20	2.13	0.90	+0.00	0.73	1.37	1.95	2.49	3.00	3.97	4.89	5.78	6.64	7.50
5	9.50	4.00	1.83	0.50	-0.50	1.33	2.07	2.75	3.39	4.00	5.17	6.29	7.38	8.44	9.50
6	9.40	3.80	1.53	+0.10	1.00	1.93	2.77	3.55	4.29	5.00	6.37	7.69	8.98	10.24	11.50
7	9.30	3.60	1.23	-0.30	1.50	2.53	3.47	4.35	5.19	6.00	7.57	9.09	10.58	12.04	13.50
8	9.20	3.40	0.93	0.70	2.00	3.13	4.17	5.15	6.09	7.00	8.77	10.49	12.18	13.84	15.50
9	9.10	3.20	0.63	1.10	2.50	3.73	4.87	5.95	6.99	8.00	9.97	11.89	13.78	15.64	17.50
10	+ 9.00	+ 3.00	+ 0.33	1.50	3.00	4.33	5.57	6.75	7.89	9.00	11.17	13.29	15.38	17.44	19.50
100	0.0	-15.00	-26.67	37.50	48.00	58.33	68.57	78.75	88.89	99.00	119.17	139.29	159.38	179.44	199.50
200	-10.00	35.00	56.67	77.50	98.00	118.33	138.57	158.75	178.89	199.00	239.17	279.29	319.38	359.44	399.50
300	20.00	55.00	86.67	117.50	148.00	178.33	208.57	238.75	268.89	299.00	359.17	419.29	479.38	539.44	599.50
400	30.00	75.00	116.67	157.50	198.00	238.33	278.57	318.75	358.89	399.00	479.17	559.29	639.38	719.44	799.50
500	40.00	95.00	146.67	197.50	248.00	298.33	348.57	398.75	448.89	499.00	599.17	699.29	799.38	899.44	999.50

 $r = 0.9$

C''/Z	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
0	+12.20	+ 6.10	+ 4.07	+3.05	+2.44	+2.03	+1.74	+1.52	+1.36	+1.22	+1.02	+0.87	+0.76	+0.66
1	12.10	5.90	3.77	2.65	1.94	1.43	1.04	+0.72	+0.46	+0.22	-0.18	-0.18	-0.53	-1.14
2	12.00	5.70	3.47	2.25	1.44	0.83	+0.37	-0.08	-0.44	-0.78	1.38	1.93	2.44	2.94
3	11.90	5.50	3.17	1.85	0.94	+0.23	-0.36	0.88	1.34	1.78	2.58	3.33	4.04	4.74
4	11.80	5.30	2.87	1.45	+0.44	-0.37	1.06	1.68	2.24	2.78	3.78	4.73	5.64	6.54
5	11.70	5.10	2.57	1.05	-0.06	0.97	1.76	2.48	3.14	3.78	4.98	6.13	7.24	8.34
6	11.60	4.90	2.27	0.65	0.56	1.57	2.46	3.28	4.04	4.78	6.18	7.53	8.84	10.14
7	11.50	4.70	1.97	+0.25	1.06	2.17	3.16	4.08	4.94	5.78	7.38	8.93	10.44	11.94
8	11.40	4.50	1.67	-0.15	1.56	2.77	3.86	4.88	5.84	6.78	8.58	10.33	12.04	13.74
9	11.30	4.30	1.37	0.55	2.06	3.37	4.56	5.68	6.74	7.78	9.78	11.73	13.64	15.54
10	11.20	+ 4.10	+ 1.07	0.95	2.56	3.97	5.26	6.48	7.64	8.78	10.98	13.13	15.24	17.34
100	+ 2.20	-13.90	-25.93	36.95	47.56	57.97	68.26	78.48	88.64	98.78	118.98	139.13	159.24	179.34
200	- 7.80	33.90	55.93	76.95	97.56	117.97	138.26	158.48	178.64	198.78	238.98	279.13	319.24	359.34
300	17.80	53.90	85.93	116.95	147.56	177.97	208.26	238.48	268.64	298.78	358.98	419.13	479.24	539.34
400	27.80	73.90	115.93	156.95	197.56	237.97	278.26	318.48	358.64	398.78	478.98	559.13	639.24	719.34
500	37.80	93.90	145.93	196.95	247.56	297.97	348.26	398.48	448.64	498.78	598.98	699.13	799.24	899.34

TABLA PARA d (TAFEL FÜR d)

$r = 0.9$

β/Z	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0									
2									
4	-22.42								
6	-11.06								
8	-7.05	-11.25							
10	-5.21	-7.57	-10.57						
12	-4.21	-5.57	-7.57						
14	-3.61	-4.36	-5.76	-7.30					
16	-3.22	-3.59	-4.59	-5.76	-6.97				
18	-2.95	-3.05	-3.78	-4.67	-5.62				
20	-2.76	-2.66	-3.20	-3.90	-4.66	-5.44			
22	-2.61	-2.37	-2.77	-3.33	-3.93	-4.57			
24	-2.50	-2.16	-2.45	-2.90	-3.40	-3.94			
26	-2.42	-1.99	-2.19	-2.55	-2.98	-3.44	-3.91		
28	-2.35	-1.85	-1.99	-2.29	-2.64	-3.03	-3.44		
30	-2.30	-1.75	-1.83	-2.08	-2.38	-2.72	-3.07	-3.44	
32	-2.26	-1.66	-1.70	-1.90	-2.14	-2.46	-2.77	-3.09	
34	-2.22	-1.59	-1.59	-1.75	-1.95	-2.23	-2.51	-2.79	
36	-2.19	-1.53	-1.50	-1.63	-1.83	-2.06	-2.30	-2.56	
38	-2.16	-1.48	-1.43	-1.53	-1.70	-1.90	-2.12	-2.35	
40	-2.14	-1.43	-1.36	-1.44	-1.55	-1.77	-1.97	-2.17	-2.22
42	-2.12	-1.40	-1.30	-1.36	-1.49	-1.65	-1.79	-2.02	
44		-1.36	-1.26	-1.30	-1.42	-1.56	-1.72	-1.89	
46		-1.33	-1.21	-1.25	-1.35	-1.48	-1.62	-1.78	
48		-1.31	-1.18	-1.20	-1.29	-1.40	-1.54	-1.69	
50		-1.29	-1.15	-1.16	-1.23	-1.34	-1.47	-1.60	
52		-1.27	-1.12	-1.12	-1.19	-1.29	-1.40	-1.53	
54		-1.26	-1.09	-1.08	-1.14	-1.23	-1.34		
56		-1.24	-1.07	-1.06	-1.11	-1.19	-1.29		
58		-1.23	-1.05	-1.01	-1.08	-1.15	-1.24		
60			-1.03	-1.01	-1.04	-1.12			
62			-1.02	-0.99	-1.02				
64				-0.97					
66									
68									
70									
72									
74									
76									
78									
80									
82									
84									
86									
88									
90									

TABLA PARA d'' (TAFEL FÜR d'')

β/Z	$r = 0.8$								$r = 0.7$						
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
0°															
2															
4	-25.12								-25.65						
6	-13.76								-14.26						
8	-9.75	-12.62							-10.26	-12.86					
10	-7.91	-8.93	-11.46						-8.41	-9.18					
12	-6.91	-6.92	-8.47						-7.41	-7.18	-8.63				
14	-6.31	-5.72	-6.65	-7.98					-6.81	-5.96	-6.82				
16	-5.92	-4.93	-5.48	-6.43					-6.43	-5.19	-5.65	-6.55			
18	-5.62	-4.40	-4.68	-5.33	-6.15				-6.15	-4.65	-4.84	-5.46			
20	-5.46	-4.01	-4.10	-4.57	-5.20					-4.26	-4.27	-4.70	-5.30		
22	-5.42	-3.72	-3.66	-4.00	-4.48	-5.04				-3.97	-3.84	-4.12	-4.58		
24	-5.20	-3.51	-3.35	-3.57	-3.94	-4.37				-3.76	-3.52	-3.70	-4.05	-4.48	
26		-3.34	-3.10	-3.23	-3.52	-3.89				-3.59	-3.26	-3.36	-3.62	-3.97	
28		-3.21	-2.89	-2.96	-3.18	-3.48	-3.83			-3.45	-3.06	-3.09	-3.29	-3.56	
30		-3.10	-2.46	-2.75	-2.85	-3.16	-3.46			-3.35	-2.90	-2.88	-3.02	-3.25	
32		-3.01	-2.61	-2.58	-2.70	-2.90	-3.16				-2.77	-2.70	-2.80	-2.99	
34		-2.94	-2.49	-2.43	-2.52	-2.68	-2.82				-2.65	-2.55	-2.62	-2.77	-2.85
36		-2.88	-2.40	-2.31	-2.37	-2.51	-2.69				-2.57	-2.43	-2.47	-2.59	
38		-2.83	-2.33	-2.21	-2.24	-2.36	-2.51	-2.62			-2.50	-2.33	-2.34	-2.44	
40		-2.79	-2.26	-2.12	-2.13	-2.22	-2.35					-2.24	-2.23	-2.30	
42			-2.20	-2.04	-2.03	-2.10	-2.22					-2.17	-2.13	-2.21	
44			-2.15	-1.98	-1.96	-2.01	-2.10						-2.04		
46			-2.14	-1.92	-1.89	-1.93	-2.01								
48			-2.08	-1.88	-1.83	-1.85	-1.92								
50				-1.83	-1.78	-1.79									
52				-1.80	-1.73										

β/Z	$r = 0.6$						$r = 0.5$					
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	
0°												
2												
4	-26.92						-28.02					
6	-15.56						-16.66					
8	-11.55	-13.53					-12.65	-14.07				
10	-9.71	-9.82					-10.81	-10.38				
12	-8.71	-7.82	-9.08					-8.38				
14		-6.61	-7.24									
16		-5.84	-6.10					-7.16	-7.62			
18		-5.30	-5.27	-5.78				-6.38	-6.46			
20		-4.91	-4.70	-5.02				-5.85	-5.64	-6.07		
22		-4.62	-4.58	-4.45	-4.84			-5.46	-5.07	-5.30		
24			-3.94	-4.02	-4.31				-4.64	-4.72		
26			-3.69	-3.68	-3.88				-4.32	-4.30		
28			-3.49	-3.41	-3.55				-4.06	-3.95	-4.01	
30			-3.34	-3.20	-3.28	-3.34				-3.69		
32			-3.21	-3.03	-3.06							
34				-2.88	-2.88							
36					-2.73							

TABLA PARA d'' (TAFEL FÜR d'')

$r = 0.8$

C''/Z	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
0	+15.00	+ 7.50	+ 5.00	+ 3.75	+ 3.00	+ 2.50	+ 2.14	+ 1.88	+ 1.50	+ 1.30	+ 1.10	+ 0.90	+ 0.80
1	14.90	7.30	4.70	3.35	2.50	1.90	1.44	1.08	+ 0.50	+ 0.10	- 0.30	- 0.70	- 1.00
2	14.80	7.10	4.40	2.95	2.00	1.30	0.74	+ 0.28	- 0.50	- 1.10	1.70	2.30	2.80
3	14.70	6.90	4.10	2.55	1.50	0.70	+ 0.04	- 0.52	1.50	2.30	3.10	3.90	4.60
4	14.60	6.70	3.80	2.15	1.00	+ 0.10	- 0.66	1.32	2.50	3.50	4.50	5.50	6.40
5	14.50	6.50	3.50	1.75	+ 0.50	- 0.50	1.36	2.12	3.50	4.70	5.90	7.10	8.20
6	14.40	6.30	3.20	1.35	0.00	1.10	2.06	2.92	4.50	5.90	7.30	8.70	10.00
7	14.30	6.10	2.90	0.95	- 0.50	1.70	2.76	3.72	5.50	7.10	8.70	10.30	11.80
8	14.20	5.90	2.60	0.55	1.00	2.30	3.46	4.52	6.50	8.30	10.10	11.90	13.60
9	14.10	5.70	2.30	+ 0.15	1.50	2.90	4.16	5.32	7.50	9.50	11.50	13.50	15.40
10	14.00	+ 5.50	+ 2.00	- 0.25	2.00	3.50	4.86	6.12	8.50	10.70	12.90	15.10	17.20
100	+ 5.00	-12.50	-25.00	36.25	47.00	57.50	67.86	78.12	98.50	118.70	138.90	159.10	179.20
200	- 5.00	32.50	55.00	76.25	97.00	117.50	137.86	158.12	198.50	238.70	278.90	319.10	359.20
300	15.00	52.50	85.00	116.25	147.00	177.50	207.86	238.12	298.50	358.70	418.90	479.10	539.20
400	25.00	72.50	115.00	156.25	197.00	237.50	277.86	318.12	398.50	478.70	558.90	639.10	719.20
500	35.00	92.95	145.00	196.25	247.00	297.50	347.86	398.12	498.50	598.70	698.90	799.10	899.20

$r = 0.7$

C''/Z	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
0	+18.60	+ 9.30	+ 6.20	+ 4.65	+ 3.72	+ 3.10	+ 2.66	+ 2.32	+ 1.86	+ 1.56	+ 1.33	+ 1.10
1	18.50	9.10	5.90	4.25	3.22	2.50	1.96	1.52	+ 0.86	+ 0.36	- 0.07	- 0.44
2	18.40	8.90	5.60	3.85	2.72	1.90	1.26	+ 0.72	- 0.14	- 0.84	1.47	2.04
3	18.30	8.70	5.30	3.45	2.22	1.30	+ 0.56	- 0.08	1.14	2.04	2.87	3.64
4	18.20	8.50	5.00	3.05	1.72	0.70	- 0.14	0.88	2.14	3.24	4.27	5.26
5	18.10	8.30	4.70	2.65	1.22	+ 0.10	0.84	1.68	3.14	4.44	5.67	6.86
6	18.00	8.10	4.40	2.25	0.72	- 0.50	1.54	2.48	4.14	5.64	7.07	8.46
7	17.90	7.90	4.10	1.85	+ 0.22	1.10	2.24	3.28	5.14	6.84	8.47	10.00
8	17.80	7.70	3.80	1.45	- 0.28	1.70	2.94	4.08	6.14	8.04	9.87	11.60
9	17.70	7.50	3.50	1.05	0.78	2.30	3.64	4.88	7.14	9.24	11.27	13.26
10	17.60	+ 7.30	+ 3.20	+ 0.65	1.28	2.90	4.34	5.68	8.14	10.44	12.67	14.86
100	+ 8.60	-10.70	-23.80	-35.35	46.28	56.90	67.34	77.68	98.14	118.44	138.67	158.84
200	- 1.40	30.70	53.80	75.35	96.28	116.90	137.34	157.68	198.14	238.44	278.67	318.84
300	11.40	50.70	83.80	115.35	146.28	176.90	207.34	237.68	298.14	358.44	418.67	478.84
400	21.40	70.70	113.80	155.35	196.28	236.90	277.34	317.68	398.14	478.44	558.67	638.84
500	31.40	90.70	143.80	195.35	246.28	296.90	347.34	397.68	498.14	598.44	698.67	798.84

TABLA PARA d'' (TAFEL FÜR d'') $r = 0,6$

C''/Z	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
0	+23.40	+11.70	+ 7.78	+ 5.83	+ 4.67	+ 3.89	+ 2.91	+ 2.33	+ 1.94	+ 1.71	+ 1.46
1	23.30	11.50	7.48	5.43	4.15	3.29	2.11	1.33	+ 0.74	+ 0.31	- 0.14
2	23.20	11.30	7.18	5.03	3.67	2.69	1.31	+ 0.33	- 0.46	- 1.09	1.74
3	23.10	11.10	6.88	4.63	3.17	2.09	+ 0.51	- 0.67	1.66	2.49	3.34
4	23.00	10.90	6.58	4.23	2.67	1.49	- 0.29	1.67	2.86	3.89	4.94
5	22.90	10.70		3.83	2.17	0.89	1.09	2.67	4.06	5.29	6.54
			6.28								
6	22.80	10.50	5.98	3.43	1.67	+ 0.29	1.89	3.67	5.26	6.69	8.14
7	22.70	10.30	5.68	3.03	1.17	- 0.31	2.69	4.67	6.46	8.09	9.74
8	22.60	10.10	5.38	2.63	0.67	0.91	3.49	5.67	7.66	9.49	11.34
9	22.50	9.90	5.08	2.23	+ 0.17	1.51	4.29	6.67	8.86	10.89	12.94
10	22.40	9.70	+ 4.78	+ 1.83	- 0.33	2.11	5.09	7.67	10.06	12.29	14.54
100	13.40	- 8.30	-22.22	-34.17	45.33	56.11	77.09	97.67	118.06	138.29	158.54
200	+ 3.40	28.30	52.22	74.17	95.33	116.11	157.09	197.67	238.06	278.29	318.54
300	- 6.60	48.30	82.22	114.17	145.33	176.11	237.09	297.67	358.06	418.29	478.54
400	16.60	68.30	112.22	154.17	195.33	236.11	317.09	397.67	478.06	558.29	638.54
500	26.60	88.30	142.22	194.17	245.33	296.11	397.09	497.67	598.06	698.29	798.54

 $r = 0,5$

C''/Z	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
0	+30.00	+15.00	+10.00	+ 7.50	+ 6.00	+ 5.00	+ 3.75	+ 3.00	+ 2.50	+ 2.14
1	29.90	14.80	9.70	7.10	5.50	4.40	2.95	2.00	1.30	1.74
2	29.80	14.60	9.40	6.70	5.00	3.80	2.15	+ 1.00	+ 0.10	+ 0.34
3	29.70	14.40	9.10	6.30	4.50	3.20	1.35	0.00	- 1.10	- 1.06
4	29.60	14.20	8.80	5.90	4.00	2.60	+ 0.55	- 1.00	2.30	2.46
5	29.50	14.00	8.50	5.50	3.50	2.00	- 0.25	2.00	3.50	3.86
6	29.40	13.80	8.20	5.10	3.00	1.40	1.05	3.00	4.70	5.26
7	29.30	13.60	7.90	4.70	2.50	0.80	1.85	4.00	5.90	6.66
8	29.20	13.40	7.60	4.30	2.00	+ 0.20	2.65	5.00	7.10	8.06
9	29.10	13.20	7.30	3.90	1.50	- 0.40	3.45	6.00	8.30	9.46
10	29.00	+13.00	+ 7.00	+ 3.50	+ 1.00	1.00	4.25	7.00	9.50	10.86
100	20.00	- 5.00	-20.00	-32.50	-44.00	55.00	76.25	97.90	117.50	137.86
200	+10.00	25.00	50.00	72.50	94.00	115.00	156.25	197.00	237.50	277.86
300	0.00	45.00	80.00	112.50	174.00	175.00	236.25	297.00	357.50	417.86
400	-10.00	65.00	110.00	152.50	194.00	235.00	316.25	397.00	477.50	557.86
500	20.00	85.00	140.00	192.50	244.00	295.00	396.25	497.00	497.50	697.86

TABLAS PARA d'' (TAFEL FÜR d'')

$r = 0.4$

C''/Z	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
0°	+40.00	+20.00	+13.33	+10.00	+ 6.67	+ 5.00	+ 4.00	+ 3.33	+ 2.86
1	39.90	19.80	13.03	9.60	6.07	4.20	3.00	2.13	1.46
2	39.80	19.60	12.73	9.20	5.47	3.40	2.00	+ 0.93	+ 0.06
3	39.70	19.40	12.43	8.80	4.87	2.60	1.00	- 0.27	- 1.34
4	39.60	19.20	12.13	8.40	4.27	1.80	+ 0.00	1.47	2.74
5	39.50	19.00	11.83	8.00	3.67	1.00	- 1.00	2.67	4.14
6	39.40	18.80	11.53	7.60	3.07	+ 0.20	2.00	3.87	5.54
7	39.30	18.60	11.23	7.20	2.47	- 0.60	3.00	5.07	6.94
8	39.20	18.40	10.93	6.80	1.87	1.40	4.00	6.27	8.34
9	39.10	18.20	10.63	6.40	1.27	2.20	5.00	7.47	9.74
10	39.00	+18.00	+10.33	+ 6.00	+ 0.67	3.00	6.00	8.67	11.14
100	30.00	-10.00	-16.67	-30.00	-59.33	75.00	96.00	116.67	137.14
200	+20.00	20.00	46.67	70.00	113.33	155.00	196.00	236.67	277.14
300	-10.00	40.00	76.67	110.00	173.33	235.00	296.00	356.67	417.14
400	0.00	60.00	106.67	150.00	233.33	315.00	396.00	476.67	557.14
500	10.00	80.00	136.67	190.00	293.33	395.00	496.00	596.67	697.14

$r = 0.3$

C''/Z	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
0°	+56.70	+28.35	+18.90	+14.18	+ 9.45	+ 7.08	+ 5.67	+ 4.72
1	56.60	28.15	18.60	13.78	8.85	6.28	4.67	3.52
2	56.50	27.95	18.30	13.38	8.25	5.48	3.67	2.32
3	56.40	27.75	18.00	12.98	7.65	4.68	2.67	+ 1.12
4	56.30	27.55	17.70	12.58	7.05	3.88	1.67	- 0.08
5	56.20	27.35	17.40	12.18	6.45	3.08	+ 0.67	1.28
6	56.10	27.15	17.10	11.78	5.85	2.28	- 0.33	2.48
7	56.00	26.95	16.80	11.38	5.25	1.48	1.33	3.68
8	55.90	26.75	16.50	10.98	4.65	+ 0.68	2.33	4.88
9	55.80	26.55	16.20	10.58	4.05	- 0.12	3.33	6.08
10	55.70	26.35	+15.90	+10.18	+ 3.45	0.92	4.33	7.28
100	46.70	8.35	-11.10	-25.82	-50.55	72.91	94.33	115.28
200	36.70	28.35	41.10	65.82	110.55	152.91	194.33	235.28
300	26.70	48.35	71.10	105.82	170.55	232.91	294.33	355.28
400	16.70	68.35	101.10	145.82	230.55	319.91	394.33	475.28
500	6.70	88.35	131.10	185.82	290.55	399.91	494.33	594.28

$r = 0.2$

C''/Z	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
0°	+90.00	+45.00	+22.50	+15.00	+11.25	+ 9.00	+ 7.50
1	89.90	44.80	22.10	14.40	10.45	8.00	6.30
2	89.80	44.60	21.70	13.80	9.65	7.00	5.10
3	89.70	44.40	21.30	13.20	8.85	6.00	3.90
4	89.60	44.20	20.90	12.60	8.05	5.00	2.70
5	89.50	44.00	20.50	12.00	7.25	4.00	1.50
6	89.40	43.80	20.10	11.40	6.45	3.00	+ 0.30
7	89.30	43.60	19.70	10.80	5.65	2.00	- 0.90
8	89.20	43.40	19.30	10.20	4.85	1.00	2.10
9	89.10	43.20	18.90	9.60	4.05	+ 0.00	3.30
10	89.00	43.00	+18.50	+ 9.00	+ 3.25	- 1.00	4.50
100	80.00	25.00	-17.50	-45.00	-68.75	91.00	112.50
200	70.00	+ 5.00	57.50	105.00	148.75	191.00	232.50
300	60.00	-15.00	97.50	165.00	228.75	291.00	352.50
400	50.00	35.00	137.50	225.00	308.75	391.00	472.50
500	40.00	55.00	177.50	285.00	388.75	491.00	592.50

TABLA PARA d (TAFEL FÜR d)

β/z	$r = 0.4$				$r = 0.3$			$r = 0.2$	
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.1	0.2	0.3	0.1	0.2
0°									
2									
4	-28.92								
6	-17.54				-10.55			-18.76	
8	-13.56								
10		-10.82				-11.17			-10.0
		-9.27				-9.18			
12						-7.96			
14		-7.60	-7.92				-6.67		
16		-6.84	-6.76						
18			-5.94						
20			-5.37	-5.0					
22			-4.93						

TABLA PARA r (TAFEL FÜR r)

$$(r^2 = u^2 + du + 1)$$

d/u	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
-2.0	+0.80	+0.60	+0.40	+0.20	0.00	+0.20	+0.40	+0.60	+0.80	+1.00	+1.20	+1.40	+1.60	+1.80	+2.00
1.8	0.82	0.66	0.53	0.45	+0.45	0.53	0.66	0.82	1.00	1.18	1.37	1.56	1.76	1.95	2.14
1.6	0.85	0.72	0.63	0.60	0.63	0.72	0.85	1.00	1.17	1.34	1.52	1.71	1.90	2.09	2.28
1.4	0.87	0.78	0.72	0.72	0.78	0.87	1.00	1.15	1.31	1.48	1.66	1.84	2.03	2.22	2.41
1.2	0.89	0.82	0.80	0.82	0.89	1.00	1.13	1.28	1.44	1.60	1.79	1.97	2.15	2.34	2.53
-1.0	+0.92	+0.87	+0.87	+0.92	+1.00	+1.11	+1.25	+1.55	+1.56	+1.73	+1.91	+2.09	+2.27	+2.46	+2.65
0.8	0.94	0.92	0.94	1.00	1.10	1.22	1.36	1.51	1.67	1.84	2.02	2.20	2.38	2.57	2.76
0.6	0.96	0.96	1.00	1.08	1.18	1.31	1.46	1.61	1.78	1.95	2.13	2.31	2.49	2.68	2.86
0.4	0.98	1.00	1.06	1.15	1.26	1.40	1.55	1.71	1.88	2.05	2.23	2.41	2.59	2.78	2.97
-0.2	1.00	1.04	1.11	1.22	1.34	1.80	1.64	1.80	1.97	2.14	2.32	2.51	2.69	2.88	3.07
0.0	+1.02	+1.08	+1.17	+1.28	+1.41	+1.56	+1.72	+1.89	+2.06	+2.24	+2.42	+2.60	+2.79	+2.97	+3.16
+0.2	1.04	1.11	1.22	1.34	1.48	1.64	1.80	1.97	2.14	2.32	2.51	2.69	2.89	3.07	3.26
0.4	1.06	1.15	1.26	1.40	1.55	1.71	1.88	2.05	2.23	2.41	2.59	2.78	2.97	3.16	3.35
0.6	1.08	1.18	1.31	1.46	1.61	1.78	1.95	2.13	2.31	2.49	2.68	2.86	3.05	3.24	3.44
0.8	1.10	1.22	1.36	1.51	1.67	1.84	2.02	2.20	2.38	2.57	2.76	2.95	3.14	3.33	3.52
1.0	1.11	1.25	1.40	1.56	1.73	1.91	2.09	2.27	2.46	2.65	2.84	3.03	3.22	3.41	3.61
+1.2	+1.13	+1.28	+1.44	+1.61	+1.79	+1.97	+2.15	+2.34	+2.53	+2.72	+2.91	+3.10	+3.30	+3.49	+3.69
1.4	1.15	1.31	1.48	1.66	1.84	2.03	2.22	2.41	2.60	2.79	2.99	3.19	3.38	3.57	3.77
1.6	1.17	1.34	1.52	1.71	1.90	2.09	2.28	2.47	2.67	2.86	3.06	3.25	3.45	3.65	3.85
1.8	1.18	1.37	1.56	1.75	1.95	2.14	2.34	2.54	2.73	2.93	3.13	3.33	3.53	3.73	3.92
2.0	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00	2.20	2.40	2.60	2.80	3.00	3.20	3.40	3.60	3.80	4.00



