FUNDAMENTOS MATEMATICOS DE LA MUSICA

POR

A. E. SAGASTUME BERRA

De los « Anales de la Sociedad Científica Argentina »,
Tomo CXXIII y sig.

T. CXXIII, pág. 1-32; 63-86; 113-136; 182-197 (año 1937
T. CXXIV, pág. 65-81; 286-322; 400-431 (año 1937)

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA MÚSICA

POR A. E. SAGASTUME BERRA

Dedicado a mi esposa, en el día de su cumpleaños. — A. E. S. B.

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo nos proponemos estudiar los puntos esenciales de la teoría musical, desde un punto de vista sobre todo matemático. Al hablar de « teoría musical » damos, es verdad, un sentido algo restringido a esta expresión: el músico que siga nuestras consideraciones notará que nos referimos solamente a una parte de lo que para él es « teoría musical », dejando de lado, por ejemplo, las cuestiones referentes a la métrica, al ritmo, así como las de estética que en rigor pertenecen también a aquélla.

En la música, como en todo arte, hay también algo de ciencia; y así como el pintor, pongamos por caso, necesita de ciencias auxiliares como la geometría, algo de física y química (teoría de los colores) etc., el músico no debe desdeñar los conocimientos científicos necesarios para su arte. Cierto es que la ciencia no explica todo en el arte, y que el que emprende un estudio científico de esta clase, sabe de antemano que existe una barrera, un límite más allá del cual no le es dado avanzar; pero ese límite varía en función del estado de los conocimientos y también de las tendencias de la época. Nada tiene de extraño, pues, que hoy, en la era de la técnica, nos interesemos, talvez más que ayer, por los fundamentos científicos del arte.

Más que ayer, pero no más que « anteayer ». En efecto, para aquellos a quienes haya sorprendido el tema de este trabajo, no estará de más consignar que en la Edad Media, la música era mucho más científica que ahora: se la estudiaba en la categoría de ciencia, al lado de la aritmética, la geometría y la astronomía, en el *quadrivium*, como se llamaba al conjunto de estas cuatro materias. Y si nos remontamos hasta la época de Pitágoras, hallamos que la música es, relativamente, mucho más *ciencia* aún.

Ese paralelismo entre la música y la ciencia ha ido desapareciendo, y hoy nos encontramos con que los músicos ignoran, o poco menos, los fundamentos científicos de su arte, mientras que los matemáticos por su parte, no se molestan en aplicar el poderoso medio de estudio e investigación en materia musical, que tienen en sus manos. Existe una intuición generalizada de que música y matemáticas tienen algo de común; pero no se sabe discernir qué es ese algo; se citan siempre ejemplos, de músicos-matemáticos o de matemáticos-músicos, como para hacer sospechar la existencia de un nexo misterioso entre ambas disciplinas; pero no se tiene noción de dónde está ese nexo.

Bien es verdad que la confusión reinante ha sido agravada por músicos seudo-científicos o matemáticos seudo-artistas, que han errado el camino, contribuyendo a formar y mantener una atmósfera hosca, de desorientación e incomprensión, que ha hecho mirar con desconfianza las tentativas de acercamiento de la música a las matemáticas, o a la física.

Esperamos no haber caído en semejantes errores. De todas maneras, pedimos que no se juzgue con precipitación este trabajo. Entendemos dedicarlo tanto a músicos como a matemáticos; y si aquellos encuentran algo abstrusos algunos pasajes, esperamos que las consecuencias de las ideas que expondremos, llevadas al terreno de la práctica musical, aclaren las dudas y disipen la *a priori* inevitable desconfianza; y en cuanto a los matemáticos, les rogaremos nos excusen la prolijidad con que expondremos puntos o razonamientos que les son familiares, pero que queremos sean comprendidos también por los músicos.

Si con este trabajo, resumen de muchas cosas conocidas y algunas nuevas, contribuímos a despejar aquella atmósfera a que nos referíamos, ello será nuestra mejor recompensa.

* *

Este estudio comprende en total seis capítulos. En el primero, repasamos las nociones de acústica necesarias, tales como la causa del sonido, sus cualidades, el fenómeno de los armónicos, etc., orientando esos conceptos en el sentido más conveniente a nuestros fines; se dan también nociones sobre intervalos musicales y su medida, y algo sobre la teoría de la consonancia.

En el Cap. II analizamos la construcción de la gama musical, dando las condiciones a que debe satisfacer, y explicando cómo se puede construir, en la forma más lógica y natural posible, un conjunto de sonidos aptos para ser utilizados musicalmente. El matemático encontrará en este capítulo algunos teoremas interesantes.

En el Cap. III tratamos el problema de la *atemperación*, que se reduce en esencia a dar un criterio para elegir entre las (infinitas) notas de la gama construída, un número finito de ellas, destinadas a ser utilizadas en la práctica. Los criterios establecidos en los casos ya conocidos permiten una generalización que es ayudada por una adecuada representación geométrica hiperespacial.

Aplicando esos criterios examinamos, en el Cap. IV, algunas de las numerosas gamas propuestas, haciendo una crítica de cada una de ellas, en particular de la gama atemperada usual, la cual *no responde* a los principios acústicos de donde podemos derivar las gamas. Se estudian asimismo las gamas de Pitágoras, de Tolomeo o de Zarlino, la pentatónica de los pueblos primitivos, las de Salinas, Grammateus, Ramos Pareja, etc.

El Cap. V contiene los fundamentos de la armonía musical. La representación hiperespacial introducida en el Cap. III es un auxiliar precioso para definir y estudiar los *acordes*, en especial los perfectos, mayores y menores, así como otros tipos. Se enuncian también dos principios armónicos generales, que llamamos el de *dualidad* (análogo a su homónimo de la geometría) y el de *sustitución*. Se estudian los acordes y tonalidades *relativas*, y el capítulo termina con una comparación entre los distintos conceptos de *consonancia* de un acorde, en donde juegan un rol fundamental los *sonidos diferenciales* o *de Tartini*, descubiertos por Sorge.

El último capítulo, VI, nos presenta a los acordes en relación con la teoría algebraica de los *ideales*, derivándose de ahí la noción de *bajo fundamental* de un acorde, del cual se estudian las propiedades. Las oportunas definiciones de la altura, absoluta y relativa, y de la consonancia (relativa) de un acorde nos permiten luego, mediante consideraciones respecto a los mínimos de una cierta función, definir lo que se entiende por *tónica* y *dominantes* (generalización de los conceptos corrientes de dominante y subdominante) de una tonalidad, y llegar así a las notas *diatónicas* y *cromáticas*, fundamento de la teoría melódica. Se estudian los diversos *modos* de una gama (en sentido distinto del usual) y termina el capítulo con varias reflexiones y ejemplos de aplicación de la teoría.

En cuanto a la bibliografía, que sobre estos temas es abundante, no nos ha sido posible consultar sino unas pocas obras. Damos sin embargo, a continuación, una lista de las principales, por orden alfabético de autores:

I - *Blaserna et Helmholtz.* — Le son et la musique (París, 1879 ed. Alcan).
II - *Boecio.* — De Institutione Musica (ed. G. Friedlein, 1867).
III - *Bosanquet, R. H. M.* — An Elementary Treatise on Musical Intervals and Temperament (Londres, 1876).
IV - *Domínguez Berrueta, J.* — Sobre la teoría científica de la música. — Revista de la R. Academia de C. Exactas, Físicas y Naturales de Madrid (Marzo, Abril y Mayo de 1916).
V - *Domínguez Berrueta, J.* — Teoría física de la música. — Memorias de la R. Academia de C. Exactas, Físicas y Naturales de Madrid. (Serie 2ª, tomo V, 1927).
VI - *Gandillot, M.* — Essai sur la gamme (París, 1906)
VII - *Guillemin, A.* — Les premiers éléments de l'acoustique musicale (París, 1904, ed. Alcan).
VIII - *Helmholtz, H. von.* — Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlagen für die Theorie der Musik (4ª ed.).
IX - *Helmholtz, H. von.*— Vorlesungen über die mathematischen Akustik (1898).
X - *Mersenne, M.* — Harmonicorum Libri XII (París, 1648).
XI - *Murray Barbour, J.* — The Persistence of the Pythagorean Tuning System - Scripta Mathematica, vol. I, nº 4, Junio 1933.
XII - *Rameau, J. Ph.* — Démonstration du principe de l'harmonie (París, 1750).
XIII - *Rayleigh, Lord.* — The Theory of Sound (2 volúmenes, 2ª ed., Londres, 1929).
XIV - *Riemann, H.* — Armonía y modulación (ed. Labor, 1930).
XV - *Sachs, Curt.* — La música en la antigüedad (ed. Labor, 1927).

CAPITULO I

LOS FENÓMENOS PRIMARIOS DE LA ACÚSTICA MUSICAL

1. — El « material » con que la música construye su obra artística es el *sonido*: así como el pintor utiliza colores, el escultor trozos de materia, el poeta palabras, así el músico utiliza sonidos, que combina sucesiva o simultáneamente, formando una especie de tejido sonoro, cuyas fibras verticales, por así decir (simultáneas) constituyen la *armonía*, mientras que las horizontales (sucediéndose según un ritmo) forman lo que se llama la *melodía*.

El sonido, desde el punto de vista físico, es nada más que un proceso ondulatorio o vibratorio de un medio elástico, que puede ser el aire o cualquier otra substancia, por ejemplo las cuerdas de los instrumentos, madera, metales, etc. Refiriéndonos al aire, debemos imaginarnos una onda sonora como un fenómeno periódico, por cuya acción en cada punto se producen dilataciones y contracciones sucesivas, periódicamente, a manera de sístole y diástole, que empujan en un sentido u otro las masas vecinas del aire, propagándose así de un punto a otro de tal manera que, en un instante cualquiera, encontraríamos que los puntos de máxima dilatación, o los de máxima compresión, o los de un estado cualquiera intermedio, se suceden, en cada dirección, a intervalos regulares. Se trata, pues, de un fenómeno doblemente periódico: periódico en el tiempo (para cada punto a intervalos iguales de tiempo se reproducen los mismos estados) y periódico en el espacio (para cada instante, a distancias iguales se reproducen los mismos estados).

En una cuerda tensa, el proceso es análogo: cada partícula de la cuerda se mueve a uno y otro lado de su posición normal de equilibrio, repitiéndose los mismos estados a intervalos iguales de tiempo; y a su vez, si pudiéramos fotografiar la cuerda en un instante dado, observaríamos que ha adoptado una forma que puede no ser muy regular, pero de tal modo que a distancias iguales, las partículas ocupan igual posición con respecto a su estado de equilibrio.

2. — Los fenómenos que se producen en una cuerda en vibración son tan típicos y por otra parte, tan importantes desde el punto de vista musical, que no vacilamos en tomar dicha cuerda como modelo para nuestro estudio. De igual manera podríamos tomar un tubo sonoro, lo que nos llevaría a consideraciones semejantes; pero es talvez más objetivo el caso de la cuerda.

Dediquémonos, pues, a estudiar algo más de cerca el fenómeno de la *cuerda vibrante.* Ya dijimos que ese fenómeno es doblemente periódico, en el tiempo y en el espacio. Ahora bien: en trigonometría elemental se estudian las funciones *sen* α (*seno* del arco α) y *cos* α (*coseno* de α) que tienen, entre otras, la propiedad de que, cuando el arco α aumenta o disminuye en $2\pi = 2 \times 3{,}14159$ (longitud de la circunferencia de radio 1, o del arco correspondiente al ángulo central de 360°), vuelven a tomar idénticos valores; en otros términos, el seno y el coseno son funciones periódicas, con el período 2π. Se concibe ahora que si en vez del arco α tomamos un *tiempo* o una *longitud,* podremos obtener funciones periódicas del tiempo o de la longitud, y esto nos lleva a sospechar que el estado de nuestra cuerda vibrante podrá expresarse mediante senos, o cosenos, de tiempos y longitudes.

Claro es que esta sospecha no constituye en manera alguna una prueba o demostración. El matemático necesita mucho más que eso para darse por satisfecho. En nuestro caso, la demostración puede hacerse con todo rigor lógico por el camino que indicaremos someramente a continuación.

Establezcamos, en la dirección de la cuerda en reposo (fig. 1) un eje de abscisas x, cuyo origen O coincida con uno de los extremos de la cuerda. Esta es OA, de longitud l. En O y perpendicularmente a Ox, tracemos el eje de ordenadas Oy. Entonces, la posición de cada punto P de la cuerda en estado de vibración (representada por la línea sinuosa que va desde O hasta A) podrá caracterizarse por sus coordenadas x, y. Se demuestra entonces que, llamando t al tiempo,

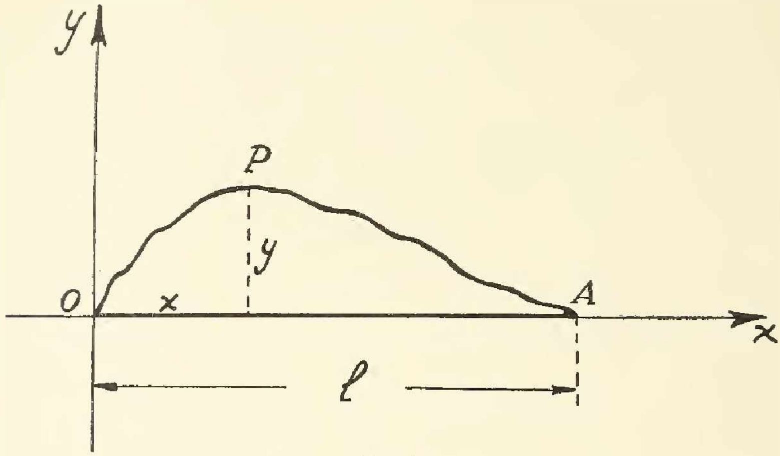

FIG. 1

tiene lugar la siguiente ecuación diferencial, llamada *ecuación de la cuerda vibrante*:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad [1]$$

donde a es una constante que depende solo de la sección s, densidad d y tensión T de la cuerda, y que tiene por expresión

$$a = \sqrt{\frac{T}{sd}} \, . \qquad [2]$$

La ecuación [1], si bien no es difícil de interpretar en términos vulgares, no significa otra cosa sino una expresión matemática de la ley que rige el fenómeno. Lo único que nos interesa es que la solución de esa ecuación puede expresarse mediante senos o cosenos de tiempos y longitudes; y en efecto, se puede verificar que la expresión

$$y = A \text{ sen } \alpha x \text{ . sen } a\alpha t \, , \qquad [3]$$

donde A y α son constantes, satisface a la ecuación [1].

La expresión [3], si hacemos en ella $t = o$, y tenemos en cuenta que *sen* $o = o$, nos da $y = o$. Es decir, que para el instante $t = o$, cualquiera sea la x, es siempre nula la y, o en otros términos, la cuerda está en su posición de equilibrio. Es decir, que la solución [3] corresponde al hecho de comenzar a contar el tiempo cuando la cuerda parte de su posición de equilibrio.

También para $x = o$ y cualquiera sea t, por análoga razón se obtiene $y = o$, lo que corresponde al hecho de que el extremo O de la cuerda es fijo. El otro extremo A, correspondiente a $x = l$, debe quedar fijo asimismo, es decir que, cualquiera sea t, debe ser $y = o$ para $x = l$. Como A es una constante no nula, y *sen* $a\alpha t$ adquiere, al variar t, valores no nulos, para que se anule la y deberá verificarse

$$\text{sen } \alpha l = o \, .$$

Pero el seno solo se anula cuando su argumento es un número entero de medias circunferencias, o sea un número $n\pi$, siendo n un número entero. Entonces

$$\alpha l = n\pi \, ,$$

de donde resulta

$$\alpha = \frac{n\pi}{l} \, ,$$

y finalmente, la solución [3] toma la forma

$$y = A \text{ sen } \frac{\pi n}{l} x \, . \, \text{sen } \frac{\pi n}{l} \, at \qquad [4]$$

3. — La expresión [4] es una solución de la ecuación [1], que corresponde al caso de la cuerda de que se trata. Pero ello no nos autoriza por ahora a decir que el movimiento de la cuerda deba regirse por fuerza por una expresión de este tipo. Basta, en efecto, reflexionar que si damos a los números A y n dos pares de valores distintos A_1, n_1; A_2, n_2, y sumamos las dos expresiones de y así obtenidas de la [4], se obtiene tambien una solución. Y este razonamiento puede generalizarse en varios sentidos, pero basta ya para justificar nuestra afirmación.

Ahora bien: existe un teorema general, de Fourier, según el cual una función cualquiera puede, en general, expresarse como una *serie* (suma compuesta de un número infinito de términos) cuyos términos son senos y cosenos de la variable de que se trate. Aplicado este teorema al caso presente, nos dice que una solución de la ecuación [1] se expresará como una serie de infinitos términos del tipo [4] (obtenidos, naturalmente, dando a A y a n distintos valores, siendo los de n enteros). O, en otros términos, la solución más general posible de a ecuación [1] para el caso que nos ocupa, será

$$y = A_1 \operatorname{sen} \frac{\pi}{l} x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{l} at + A_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{l} x \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{l} at +$$

$$+ A_3 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{l} x \cdot \operatorname{sen} \frac{3\pi}{l} at + \ldots + A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} at + \ldots$$

o abreviado:

$$y = \sum_n A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} at \cdot \qquad [5]$$

4. — Podemos, pues, limitarnos a estudiar el término general

$$y_n = A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} at \qquad [6]$$

de la serie [5]. Esta expresión se compone de tres factores: A_n, constante; sen $\frac{n\pi}{l} x$; y sen $\frac{n\pi}{l} at$. Sobre cada uno de ellos por separado haremos algunas reflexiones.

En primer lugar, imaginemos que, sin variar los otros factores, hacemos crecer el valor de A_n. Para cada punto (es decir, para cada valor fijo de x) y en cada instante (para cada valor fijo de t), los dos últimos factores no varían, de modo que al aumentar A_n aumenta proporcionalmente el valor de y_n. Por consiguiente, la separación de la cuerda de su posición de equilibrio aumenta, y con ello impulsará con mayor violencia las masas de aire que se encargan de transmitir a nuestro oído el sonido. La consecuencia es que éste se hace más *intenso*, más potente. Podemos decir, por lo tanto, que el coeficiente A_n mide la *intensidad* del sonido. También se llama a A_n, la *amplitud* de la vibración.

El segundo factor es, como sabemos, una función periódica, lo que significa que para ciertas distancias iguales, el estado vibratorio en los puntos correspondientes es el mismo. Si hacemos $x = \frac{k}{n} l$, siendo k uno de los números 0, 1, 2,... n, ello quiere decir que consideramos el punto que representa las k n-avas partes de la cuerda. Para esos valores de x resulta $\frac{\pi n}{l} x = \frac{\pi n}{l} \cdot \frac{kl}{n} = k\pi$, es decir, un múltiplo entero de π. Entonces resulta *sen* $k\pi = o$, como sabemos, y anulándose este factor, se anula la expresión y_n, cualquiera sea el valor de t. Es decir que en toda la duración del fenómeno, esos puntos

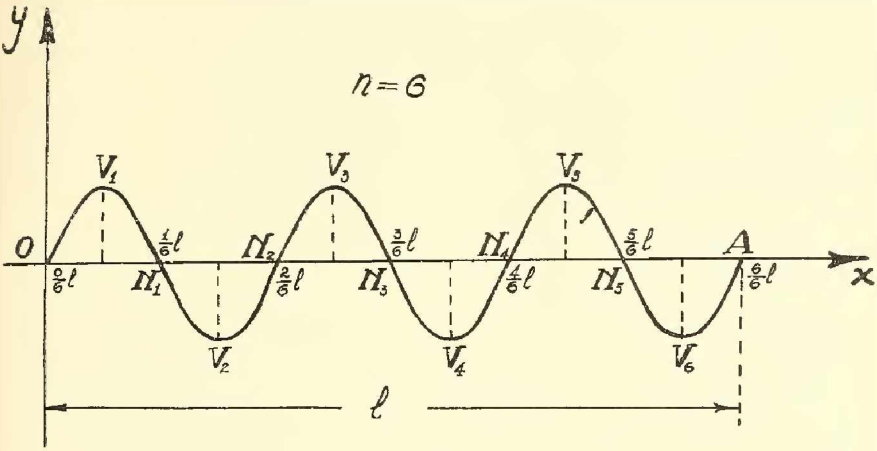

Fig. 2

están permanentemente en reposo. Por ello se llaman los *nodos* (véase la fig. 2, donde se ha representado el caso $n = 6$). Los extremos O, A son siempre nodos. En cambio si tomamos un punto $x = \frac{k}{n} l + \frac{1}{2n} l$, que difiere de un nodo en la mitad de la distancia al sucesivo, se tiene

$$\frac{\pi n}{l} x = \frac{\pi n}{l} \cdot \frac{kl}{n} + \frac{\pi n}{l} \cdot \frac{l}{2n} = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

y

$$\text{sen} \frac{\pi n}{l} x = \text{sen} \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \pm 1 ,$$

correspondiendo el signo + ó el — según que k sea par o impar. Los valores ± 1 son los extremos del seno, que no puede tomar valores mayores que + 1 ni menores que — 1. Por consiguiente, los valores de y_n serán también los máximos y mínimos posibles, es decir, en esos puntos la cuerda se apartará lo más posible de su posición de equilibrio. Son los *vientres* o puntos de máxima vibración.

Finalmente, el tercer factor, $sen \frac{\pi n}{l} at$, que nos da la periodicidad en el tiempo, puede estudiarse en forma análoga al segundo, solamente que en lugar de x, ahora tenemos at. Por lo tanto, si $at = \frac{k}{n} l$, es $sen \frac{\pi n}{l} at = sen\, k\pi = o$ cualquiera sea el valor de x, es decir que en esos instantes la cuerda pasa por su posición de reposo. Si contamos sucesivamente dos de esos pasos, en el segundo la cuerda vuelve a iniciar su vibración en el mismo sentido. En otros términos, el intervalo entre dos instantes sucesivos de reposo mide *la mitad del período* T_n de vibración. El instante t_k correspondiente al valor k es

$$t_k = \frac{k}{an} l,$$

y el instante de reposo siguiente,

$$t_{k+1} = \frac{k+1}{an} l,$$

de modo que el tiempo transcurrido, o sea el semiperíodo, es:

$$t_{k+1} - t_k = \frac{1}{2} T_n = \frac{l}{an}(k + 1 - k) = \frac{l}{an}$$

y el período será:

$$T_n = \frac{2l}{an}.$$

Si en T_n segundos la cuerda efectúa una oscilación completa, en un segundo efectuará $\frac{1}{T_n}$ oscilaciones. Ahora bien, el número de oscilaciones por segundo es lo que se llama la *frecuencia*, concepto importantísimo desde nuestro punto de vista puesto que define, como lo veremos más adelante, la *altura* de un sonido. Indicando la frecuencia con ν_n, tendremos entonces:

$$\nu_n = \frac{1}{T_n} = \frac{an}{2l} \qquad [7]$$

Terminaremos este párrafo observando que, si queremos obtener una imagen objetiva del fenómeno, por ejemplo en el caso de la fig. 2 ($n = 6$), no tenemos sino que suponer materializada la línea sinusoide, y sujeta al eje en los nodos O, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, A y hacerla girar alrededor del eje x con movimiento uniforme. Así se verá, observando desde cierta distancia, que los puntos de la curva efectúan vibraciones alrededor de la línea de equilibrio OA, a la que nuestra curva materializada cubre cuando se encuentra « de perfil ». El tiempo de una revolución completa corresponde así al período, y el número de vueltas en la unidad de tiempo será la frecuencia.

5. — En el § anterior hemos hecho el estudio de uno de los términos, [6], de la serie [5]; ese término representa lo que podemos llamar un *sonido simple* o, como se suele decir también, una *nota* o un *tono* (en sentido diverso del tono-intervalo que conocen los músicos). Advertiremos que muchas veces, al referirnos en lo sucesivo al sonido, sin calificativo, entenderemos que se trate de un sonido simple o nota; en cambio cuando no lo sea, especificaremos su calidad diciendo *sonido compuesto*. Y en cuanto a la palabra tono, preferimos reservarla para los intervalos que en música llevan ese nombre.

En el estudio del sonido simple [6] hemos encontrado dos cualidades, *intensidad* y *altura*, de gran importancia para la música; falta aún una tercera característica clásicamente conocida, el *timbre*. Es que un sonido simple no tiene timbre, o más bien, no tiene sentido hablar del timbre de un sonido de esta clase. Este concepto aparece recién cuando consideramos el sonido compuesto dado por la serie [5].

El sonido compuesto proviene de la yuxtaposición o coexistencia de infinitos sonidos simples, dados por los términos de la serie [5]. Las frecuencias de esos sonidos, según [7], son:

$$\nu_1 = \frac{a}{2l} \quad ; \quad \nu_2 = \frac{2a}{2l} \quad ; \quad \nu_3 = \frac{3a}{2l} \quad ; \quad \nu_4 = \frac{4a}{2l} \quad ; \quad \ldots$$

o sea:

$$\nu_1 = \frac{a}{2l} \quad ; \quad \nu_2 = 2\nu_1 \quad ; \quad \nu_3 = 3\nu_1 \quad ; \quad \nu_4 = 4\nu_1 \quad ; \quad \ldots ,$$

es decir, son los *múltiplos* sucesivos de la llamada *frecuencia fundamental* que es ν_1. Estos sonidos simples se llaman 2°, 3°, 4°,... *armónicos* del fundamental; no hay inconveniente, si ello es cómodo, en llamar a éste último, *primer armónico* a fin de unificar la nomenclatura.

Todos estos armónicos se producen en general simultáneamente al vibrar la cuerda, teniendo cada uno de ellos su amplitud, A_1, A_2, A_3, ..., que puede aún ser cero en algunos casos, significando ello que el correspondiente armónico no aparece como componente. Debemos entonces imaginarnos que el movimiento de la cuerda está producido por la vibración que hemos descripto para cada armónico,

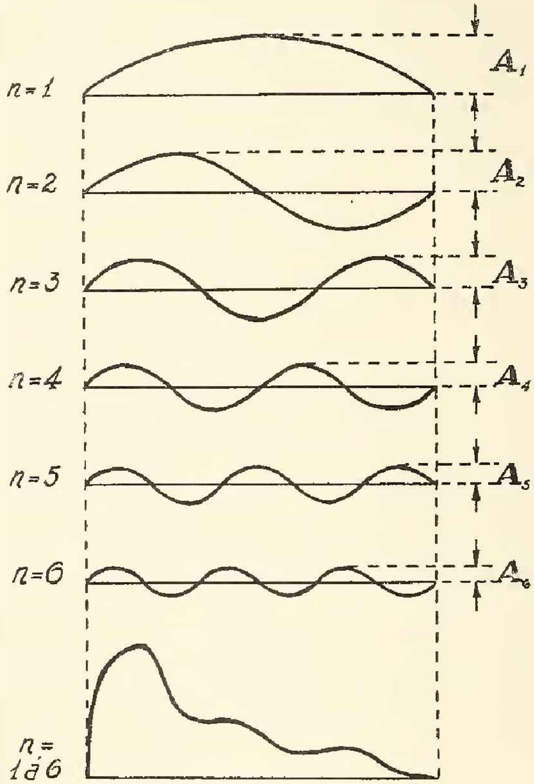

Fig. 3

pero interviniendo *simultáneamente* todos los armónicos, con diversas amplitudes. En la fig. 3 por ejemplo, hemos representado los seis primeros armónicos, con las amplitudes indicadas a la derecha, y abajo la forma de la curva resultante, que se ha obtenido sumando para cada abscisa las ordenadas de aquellas seis primeras curvas, teniendo en cuenta, naturalmente, su signo o sentido.

La forma de la curva resultante depende, como es lógico, de los armónicos y de las amplitudes componentes. Así por ejemplo, dos cuerdas afinadas a la misma nota, v. gr. *do*, pero una de violín y otra de piano, dan sonidos (compuestos) distintos, debido a que los armónicos que los componen están distribuídos con diferentes amplitudes relativas. Como la cualidad específica que distingue dos sonidos de igual altura (y, si se quiere, de igual intensidad) es el *timbre*, podemos decir en consecuencia que *el timbre de un sonido compuesto está determinado por las amplitudes relativas de los armónicos que lo componen.*

6. — Puesto que un sonido compuesto consta de gran cantidad de armónicos simples, cada uno de los cuales tiene su altura, o frecuencia, y su intensidad, podemos preguntarnos: ¿qué entenderemos por *altura* de un sonido compuesto?

Para responder a esta cuestión, debemos tener en cuenta un hecho experimental, pero que podemos prever teóricamente, al menos con cierta aproximación. Digamos, para abreviar el lenguaje, que una cuerda vibra *en el estado n*, cuando produce solamente el n-ésimo armónico. Por ejemplo, en la fig. 3, los seis primeros diagramas representan a la cuerda vibrando en los estados 1 á 6, mientras que el séptimo da la imagen aproximada de la misma cuerda vibrando simultáneamente en los estados 1 á 6.

Cuando una cuerda está en el estado n, hay además de los extremos, n-1 nodos intermedios que representan, por así decir, ligaduras o vínculos a que está sometida; se puede, en efecto, imaginar que esos nodos están rígidamente unidos a sus posiciones de equilibrio, sin que por eso se modifique en nada el movimiento de los demás puntos de la cuerda. Esto sentado, se puede prever que cuantos más nodos haya, es decir, cuanto mayor sea n, la cuerda tendrá comparativamente menos movilidad, y en consecuencia la amplitud será menor. Claro es que esto no es sino una manera de encarar las cosas, y que la consecuencia obtenida no puede considerarse como producto de una irreprochable deducción lógica. Sin embargo, es lo que la experiencia enseña que se produce en la realidad: en general, la experiencia nos dice que los armónicos aparecen con tanta menor intensidad cuanto más elevados son o, dicho en otra forma, que A_n es en general una función decreciente de n.

Más exactamente aún, puede decirse, siempre tomando por base la experiencia, que los sonidos que impresionan nuestro oído con carácter *musical* son los que siguen la ley enunciada, mientras que aquéllos en que A_n no decrezca al aumentar n, o bien aquellos en que un gran número de las A_n sean de magnitudes del mismo orden, nos producen la sensación de *ruido*. Esto nos da derecho a sentar, *como definición*, lo siguiente: *un sonido* (*compuesto*) *es musical cuando los armónicos sucesivos aparecen con intensidades* (*amplitudes*) *decrecientes a medida que aumenta su número de orden*; de tal manera que al cabo de un número n relativamente bajo, las amplitudes de los armónicos A_{n+1}, $A_{n+2}, \ldots$ son todas despreciables en comparación con la del fundamental, A_1. Un sonido, en cambio, *es un ruido cuando aparece una gran cantidad de armónicos con amplitudes comparables a* A_1. Claro es que, según esta definición, no existe un límite neto entre sonido y ruido, sino solo una gradación.

De acuerdo con ésto, quedará justificado llamar *altura* o *frecuencia* de un sonido musical compuesto, a la de su nota fundamental o más baja, es decir a la que en los §§ 4 y 5 hemos llamado ν_1.

Lo dicho nos explica también por qué hemos tomado como caso típico el de la cuerda, y no el de una barra, membrana o placa vibrante. En estos tres últimos casos, en efecto, el número o el orden de los armónicos de intensidad comparable a la nota fundamental son tan elevados, que las vibraciones tienen más el caracter de ruidos que de sonidos musicales (aún el caso de las campanas no es netamente típico).

7. — La fórmula [7] para $n = 1$, combinada con la [2] nos da:

$$\nu_1 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{sd}}, \qquad [8]$$

de donde pueden deducirse las leyes descubiertas por Mersenne (1) en 1636 para la altura del sonido dado por una cuerda. Ella es: inversamente proporcional a la longitud de la cuerda, a la raíz cuadrada de su sección y de su densidad; y directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión que soporta. Todo ello está condensado en la fórmula [8].

De las leyes referentes a la longitud y a la sección hace uso el constructor de pianos, haciendo más largas las cuerdas destinadas a las notas graves, y envolviéndolas en una espiral de acero para aumentar su sección; y el violinista a su vez aplica la ley de la tensión, cuando ajusta las clavijas para hacer más agudos los sonidos de su instrumento.

Además, en esas leyes se funda el *sonómetro*, que consta de una o varias cuerdas de distintos materiales y secciones, mantenidas en tensión constante por medio de pesos atados a sus extremos, y que

(1) Mersenne, (X).

pueden alargarse o acortarse por medio de puentes que corren sobre escalas graduadas. Este aparato sirve así para medir y comparar alturas de sonidos, y su precisión es bastante grande.

8. — Así como dos puntos de una recta determinan un segmento, dos notas, o sea, dos estados de una cuerda, determinan lo que se llama un *intervalo*. El intervalo se concibe así como el conjunto de notas de alturas comprendidas entre las dos dadas; y así como los segmentos se comparan y miden por su longitud, así podemos también definir una medida de intervalos que nos será muy útil en lo que sigue.

En primer lugar, el intervalo está definido por las frecuencias de las dos notas dadas, sean por ejemplo ν, ν'. En una cierta cuerda, estas frecuencias corresponden a dos estados (§ 6) n, n', de modo que, según [7]

$$\nu = \frac{an}{2l} \quad , \quad \nu' = \frac{an'}{2l} ,$$

y

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{n'}{n} .$$

En otra cuerda, de constantes a_1 y l_1, si consideramos los mismos estados n, n', se tendrán otras frecuencias ν'', ν''' correspondientes a ν, ν', que no serán las mismas, pero que satisfarán a la relación

$$\frac{\nu'''}{\nu''} = \frac{n'}{n} ,$$

y por consiguiente,

$$\frac{\nu'''}{\nu''} = \frac{\nu'}{\nu} .$$

Ahora bien, de acuerdo con nuestra definición, en la que no se especifica la cuerda que se use para medir los intervalos, dos cuerdas, consideradas cada una en dos estados n, n', iguales para las dos, definen el mismo intervalo. Luego, cuando dos intervalos son iguales, lo son también las relaciones $\frac{\nu'''}{\nu''}$, $\frac{\nu'}{\nu}$ de las frecuencias que los componen; y viceversa. Por esto es que la relación de frecuencias nos da un medio de comparar los intervalos, y por eso también se suele decir que los intervalos se miden por el cociente de las frecuencias que los componen. Pero no es ésta la medida que deseamos definir aquí.

De la relación anterior resulta, a su vez:

$$\frac{\nu'''}{\nu'} = \frac{\nu''}{\nu} = k\,,$$

de donde:

$$\nu''' = k\nu'$$
$$\nu'' = k\nu\,.$$

Según nuestra definición, la medida del intervalo (ν, ν'), que indicaremos con $I\,(\nu, \nu')$, debe ser igual a la del intervalo (ν'', ν'''), o sea $I\,(\nu'', \nu''')$. Es decir, debemos tener:

$$I\,(k\nu\,, k\nu') = I\,(\nu\,, \nu')\,, \qquad [9]$$

donde la constante k es arbitraria $(\neq o)$. Esto nos da una primera propiedad de la función $I\,(\nu, \nu')$.

Una segunda propiedad la obtendremos teniendo en cuenta que, si partimos de una frecuencia ν y formamos el intervalo $I\,(\nu, \nu')$, llegando así a la frecuencia ν', y luego, a partir de ésta formamos un nuevo intervalo $I\,(\nu', \nu'')$, el resultado será el mismo que si partiéramos de ν y formáramos el intervalo $I\,(\nu, \nu'')$. Es decir, la *suma* de los dos primeros debe dar el tercero:

$$I\,(\nu\,, \nu') + I\,(\nu'\,, \nu'') = I\,(\nu\,, \nu'')\,. \qquad [10]$$

Con las [9] y [10] ya podemos hallar explícitamente la forma de la función $I\,(\nu\,, \nu')$. Ante todo, como k es arbitraria en [9], podemos tomar en particular $k = \frac{1}{\nu}\cdot$ Entonces

$$k\nu = 1 \quad , \quad k\nu' = \frac{\nu'}{\nu}$$

y

$$I\,(\nu\,, \nu') = I\left(1\,, \frac{\nu'}{\nu}\right)\cdot$$

A la función $I\left(1\,, \frac{\nu'}{\nu}\right)$, que no depende sino de $\frac{\nu'}{\nu}$, podemos designarla con $\varphi\left(\frac{\nu'}{\nu}\right)\cdot$ Entonces

$$I\,(\nu, \nu') = \varphi\left(\frac{\nu'}{\nu}\right), \qquad [11]$$

con lo cual la [10] se transforma en:

$$\varphi\left(\frac{\nu'}{\nu}\right) + \varphi\left(\frac{\nu''}{\nu'}\right) = \varphi\left(\frac{\nu''}{\nu}\right)$$

o sea, si llamamos α a $\frac{\nu'}{\nu}$, β a $\frac{\nu''}{\nu'}$, y tenemos en cuenta que $\frac{\nu''}{\nu} = \frac{\nu''}{\nu'} \cdot \frac{\nu'}{\nu} = \alpha\,\beta$:

$$\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)\,. \qquad [12]$$

Si aquí hacemos $\beta = 1$, se obtiene $\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha) + \varphi(1)$, o sea:

$$\varphi(1) = o\,. \qquad [13]$$

Si imponemos a la función φ la condición de que para un valor ξ, arbitrario pero positivo y diverso de 1, tome un valor C, también arbitrario y positivo, es decir

$$\varphi(\xi) = C \qquad (\xi > o\,,\ \xi \neq 1\,,\ C > o)\,, \qquad [14]$$

queda perfectamente determinada la función φ. En efecto, por aplicación de la [12] para $\alpha = \beta = \xi$ se tiene:

$$\varphi(\xi^2) = \varphi(\xi\,.\,\xi) = \varphi(\xi) + \varphi(\xi) = 2C\;;$$

y luego, sucesivamente:

$$\varphi(\xi^3) = \varphi(\xi^2\,.\,\xi) = \varphi(\xi^2) + \varphi(\xi) = 3C$$
$$\varphi(\xi^4) = \varphi(\xi^3\,.\,\xi) = \varphi(\xi^3) + \varphi(\xi) = 4C\;;$$

etc.; y en general

$$\varphi(\xi^n) = nC \qquad [15]$$

para todo n entero y positivo.

Esta ecuación puede extenderse para todo n real. Ante todo, para los enteros negativos, pues en virtud de [12] y [13] se tiene (si n es entero y positivo):

$$\varphi(\xi^n\,.\,\xi^{-n}) = \varphi(1) = \varphi(\xi^n) + \varphi(\xi^{-n}) = o$$

Luego:

$$\varphi(\xi^{-n}) = -\varphi(\xi^{n}) = -nC .$$

Para $n = o$, siendo $\xi^o = 1$, la misma [13] nos asegura la validez de la [15]. Extendámosla ahora para todo exponente fraccionario $\frac{p}{q}$.

Se tiene:

$$\varphi(\xi^p) = pC = \varphi\left[\left(\xi^{\frac{p}{q}}\right)^q\right] = q\,\varphi\left(\xi^{\frac{p}{q}}\right),$$

de donde:

$$\varphi\left(\xi^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q}\,C\,;$$

y finalmente, si el exponente de ξ fuera irracional, se podría extender también la [15] mediante consideraciones de límite. En resumen, pues, podemos decir que la [15] es válida cualquiera sea el número *real* n.

Ahora bien: si ponemos $\xi^n = \alpha$, n es lo que se llama el *logaritmo* de α respecto a la base ξ; n y α se determinan mutuamente (una vez fijado ξ). La [15] puede escribirse, pues:

$$\varphi(\alpha) = C \log_\xi \alpha\,,$$

indicando con $\log_\xi \alpha$ el logaritmo de α en la base ξ. De aquí, teniendo en cuenta la [11], resulta finalmente nuestra fórmula general

$$I(\nu, \nu') = C \log_\xi \frac{\nu'}{\nu} = C\,[\log_\xi \nu' - \log_\xi \nu] \qquad [16]$$

que nos dice que: *la medida del intervalo entre dos notas* ν, ν', *es igual a la constante* C *(arbitraria, positiva pero elegida de una vez por todas) multiplicada por el logaritmo del cociente de las frecuencias* ν' *y* ν, *respecto a la base* ξ *(positiva,* $\neq 1$ *y elegida de una vez por todas).*

9. — De la fórmula general [16] podemos obtener, según los valores numéricos que elijamos para C y ξ, distintos sistemas de medición de intervalos. De estos sistemas hay infinitos, pues tanto C como ξ son arbitrarios, salvo las limitaciones indicadas. Mencionaremos, pues, solo algunos entre los más usados o más convenientes para nuestro objeto.

I. — *Medida de los intervalos en savartios.* — El *savartio,* nombre adoptado en honor del físico Savart, es una unidad logarítmica comprendida en nuestra fórmula general. La medida de un intervalo en savartios se obtiene multiplicando por 1000 el logaritmo vulgar, o decimal, de la relación de frecuencias. De modo que habrá que tomar en la [16] $C = 1000$, y $\xi = 10$. Por ejemplo, si las frecuencias ν, ν' están en la relación de 1 á 2 (intervalo que llamaremos una *octava*) la medida en savartios de este intervalo será:

$$I\,(1\,,2) = 1000 \log_{10} \frac{2}{1} = 1000 \log_{10} 2\,,$$

y como el logaritmo vulgar de 2 es 0,30103000, se tendrá

$$I\,(1\,,2) = 301{,}03000 \text{ savartios.}$$

Si queremos obtener un intervalo que tenga 1 savartio por medida, tendremos que resolver la ecuación

$$1000 \log_{10} \frac{\nu'}{\nu} = 1\,,$$

de donde:

$$\log_{10} \frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{1000}\,.$$

Siendo 10 la base, y $\frac{1}{1000}$ el exponente, el intervalo $\frac{\nu'}{\nu}$ será

$$\frac{\nu'}{\nu} = 10^{\frac{1}{1000}}\,,$$

de modo que las frecuencias ν', ν deben estar en la relación de $10^{\frac{1}{1000}}$ (o sea $\sqrt[1000]{10}$) á 1, para que su intervalo sea 1 savartio.

Abreviaremos el savartio con la letra σ, de modo que, por ejemplo:

$$\text{Octava} = I\,(1\,,2) = 301{,}03000\ \sigma\,.$$

II. — *Méridas y heptaméridas.* — Si se toma $C = 43$, $\xi = 2$, el intervalo resulta expresado en una unidad que se llama *mérida.* (Saveur). Es decir, que

$$I\,(\nu\,,\nu') = 43 \log_2 \frac{\nu'}{\nu} = \text{intervalo medido en méridas.}$$

Por ejemplo:

$$\text{Octava} = I\,(1\,,\,2) = 43 \log_2 2 = 43 \text{ méridas},$$

puesto que en cualquier sistema, el logaritmo de la base (en este caso $\log_2 2$) es la unidad.

Adoptaremos para la mérida la abreviatura μ.

En cambio, si conservamos $\xi = 2$, pero tomamos $C = 301$, tendremos la medida en una unidad que se llama *heptamérida*, y que abreviaremos $h\mu$. Por ejemplo:

$$\text{Octava} = I\,(1\,,\,2) = 301 \log_2 2 = 301\ h\mu\,.$$

Como la medida de la octava en savartios es 301,03000 σ, vemos que la heptamérida difiere muy poco del savartio.

Si tomamos un intervalo $\dfrac{\nu'}{\nu}$ de una mérida, es decir, si

$$43 \log_2 \frac{\nu'}{\nu} = 1\,,$$

tendremos:

$$\log_2 \frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{43}$$

y

$$301 \log_2 \frac{\nu'}{\nu} = \frac{301}{43} = 7\,.$$

Pero $301 \log_2 \dfrac{\nu'}{\nu}$ es la medida del intervalo en heptaméridas. Luego, como el intervalo elegido medía 1 μ, tendremos:

$$1\,\mu = 7\,h\mu\,, \qquad \text{ó} \qquad 1\,h\mu = \frac{1}{7}\,\mu\,,$$

es decir, la heptamérida es la séptima parte de la mérida, lo que justifica su denominación.

Dos sonidos de frecuencias ν, ν' cuyo intervalo sea de una mérida serán tales que, como acabamos de verlo,

$$\log_2 \frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{43}\,,$$

de donde:

$$\frac{\nu'}{\nu} = 2^{\frac{1}{43}} = \sqrt[43]{2}\,\cdot$$

En cambio, si el intervalo (ν, ν') es de una heptamérida, se deberá tener

$$\log_2 \frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{301}, \qquad \text{y} \qquad \frac{\nu'}{\nu} = 2^{\frac{1}{301}} = \sqrt[301]{2}\,.$$

III. — *Octavas.* — Tomando $C = 1$ y $\xi = 2$ en la [16], se obtendrá el intervalo medido en una unidad que llamaremos *octava* y simbolizaremos con la letra ω. La razón de esta denominación está en que, si $\frac{\nu'}{\nu}$ representa un intervalo de 1ω, se tendrá:

$$\log_2 \frac{\nu'}{\nu} = 1\,,$$

de donde

$$\frac{\nu'}{\nu} = 2^1 = 2\,,$$

es decir, que la relación $\frac{\nu'}{\nu}$ es de 2 á 1, o sea que (ν, ν') es efectivamente el intervalo que hemos llamado octava. De acuerdo con lo que hemos visto en I y II, podremos escribir las equivalencias:

$$1\,\omega = 301{,}03000\,\sigma = 43\,\mu = 301\,h\mu\,.$$

Esta medida de intervalos, utilizada ya por Euler, parece deberse en realidad a Juan Caramuel de Lobkowitz (1), quien le dió el nombre de « logarithmi musicali » y la utilizó en sus trabajos sobre la gama musical.

IV. — *Quintas, terceras, etc.* — Para $C = 1$, $\xi = \frac{3}{2}$, obtenemos la expresión del intervalo $I\,(\nu, \nu')$ en lo que llamamos *quintas,* unidad que simbolizaremos con la letra χ. Una quinta será, pues, un intervalo (ν, ν') tal que

$$\log_{3/2} \frac{\nu'}{\nu} = 1\,,$$

o

$$\frac{\nu'}{\nu} = \left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2} = 1{,}5\,.$$

(1) Véase J. MURRAY BARBOUR, (XI).

Si en lugar de este valor de ξ tomamos $\xi = \frac{5}{4}$, la unidad será tal que

$$\log_{5/4} \frac{\nu'}{\nu} = 1 ,$$

y

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{5}{4} ,$$

intervalo que llamaremos una *tercera* [1] y simbolizaremos por τ.

Por ejemplo, el intervalo de octava medido en quintas será

$$\log_{3/2} \frac{2}{1} = \log_{3/2} 2 = 1,70952\, \chi ;$$

en cambio, medido en terceras, es:

$$\log_{5/4} \frac{2}{1} = \log_{5/4} 2 = 3,10628\, \tau .$$

Análogamente podremos tomar como unidad cualquier otro intervalo, racional o no, según nos convenga, tomando $C = 1$ y ξ igual al intervalo de que se trate. Por ejemplo, el *semitono atemperado* α es un intervalo cuya relación de frecuencias es de $2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2}$ á 1. Por lo tanto, la octava medida en semitonos atemperados vale

$$\log_{\sqrt[12]{2}} 2 = 12,00000\, \alpha .$$

10. — Para convertir las unidades, o sea hallar la medida de un intervalo en cierta unidad cuando está dado en otra, podemos hacer uso también de una fórmula general. Sea un primer sistema de medida con las constantes C, ξ, y sea (ν, ν') el intervalo unidad en ese sistema. Por lo tanto,

$$C \log_{\xi} \frac{\nu'}{\nu} = 1 ,$$

de donde:

$$\log_{\xi} \frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{C} ,$$

y

$$\frac{\nu'}{\nu} = \xi^{\frac{1}{C}} .$$

[1] La razón de las denominaciones *quinta, tercera,* es puramente musical y se verá más adelante.

Sea, por otra parte, otro sistema de medida con las constantes C' ξ'. Entonces la medida del intervalo (ν, ν') en este nuevo sistema será

$$C' \log_{\xi'} \frac{\nu'}{\nu} = C' \log_{\xi'} \left(\xi^{\frac{1}{C}}\right)$$

y, por las propiedades de los logaritmos:

$$= \frac{C'}{C} \log_{\xi'} \xi .$$

Una unidad del primer sistema equivale, pues, a $\frac{C'}{C} \log_{\xi'} \xi$ unidades del nuevo. Un intervalo cualquiera tendrá, en el último sistema una medida $I' (\nu, \nu')$ que será igual a la medida en el primero, $I (\nu, \nu')$, multiplicada por la constante $\frac{C'}{C} \log_{\xi'} \xi$. O sea:

$$I' (\nu , \nu') = I (\nu , \nu') \cdot \frac{C'}{C} \log_{\xi'} \xi \qquad [17]$$

Por ejemplo: sea α (semitono atemperado) la unidad del primer sistema, y σ (savartio) la unidad del segundo. Entonces: $C = 1$, $\xi = \sqrt[12]{2}$, $C' = 1000$, $\xi' = 10$. Luego:

$$I' (\nu , \nu') \text{ (en savartios)} = I (\nu , \nu') \text{ (en } \alpha) \times \frac{1000}{1} \log_{10} \sqrt[12]{2} ,$$

es decir:

$$I' (\nu , \nu') = I (\nu , \nu') \times 1000 \times \frac{1}{12} \times 0{,}30103 = I (\nu , \nu') \times 25{,}08583.$$

En particular, si

$$I (\nu , \nu') = 1 \alpha , I' (\nu , \nu') = 25{,}08583 \sigma ,$$

o sea:

$$1 \alpha = 25{,}08583 \sigma .$$

Así, por medio de la fórmula [17], puede resolverse cualquier problema de conversión de unidades. No es necesario tratar en particular cada uno de los casos posibles, sino que preferimos resumir todo ello, al mismo tiempo que lo dicho en el § anterior, en el cuadro siguiente:

Medida de intervalos

Unidad		Constantes		Equivalencias						
Designación	Símbolo	C	ξ	en σ	en μ	en $h\mu$	en ω	en χ	en τ	en α
Savartio . .	σ	1000	10	1,00000	0,14284	0,99990	0,00332	0,00568	0,01032	0,039
Mérida . . .	μ	43	2	7,00070	1,00000	7,00000	0,02326	0,03976	0,07224	0,279
Heptamérida	$h\mu$	301	2	1,00010	0,14286	1,00000	0,00332	0,00568	0,01032	0,039
Octava . . .	ω	1	2	301,03000	43,00000	301,00000	1,00000	1,70952	3,10628	12,00
Quinta. . . .	χ	1	$\frac{3}{2}$	176,09125	25,15319	176,07236	0,58496	1,00000	1,81704	7,018
Tercera . . .	τ	1	$\frac{5}{4}$	96,91000	13,84286	96,90003	0,32193	0,55034	1,00000	3,8631
Semitono at.	α	1	$\sqrt[12]{2}$	25,08583	3,58333	25,08333	0,08333	0,14246	0,25886	1,000

Ejemplo de aplicación de la tabla: El intervalo $4\chi - \tau - 2\omega$ se quiere expresar en octavas. Siguiendo la línea horizontal de la quinta (χ) obtenemos en la columna correspondiente a la octava (ω) la equivalencia

$$1\chi = 0{,}58496\,\omega\ ;$$

luego:

$$4\chi = 4 \times 0{,}58496 = 2{,}33984\,\omega\ .$$

Análogamente:

$$1\tau = 0{,}32193\,\omega\ .$$

Por tanto:

$$4\chi - \tau - 2\omega = 2{,}33984 - 0{,}32193 - 2 = 0{,}01791\,\omega\ .$$

Este intervalo es lo que luego llamaremos la *coma tolemaica* o *sintónica*. Expresada en savartios, puesto que $1\omega = 301{,}03000\ \sigma$, tendríamos

$$\text{Coma tolemaica} = 0{,}01791 \times 301{,}03000 = 5{,}39145\ \sigma\ .$$

En los cálculos logarítmicos con las frecuencias, se presenta a menudo el problema de calcular el logaritmo de un número en una cierta base, distinta de 10,siendo así que las tablas comunes de logaritmos se refieren a la base 10 (logaritmos vulgares, decimales o de Briggs).

La observación general siguiente resuelve esta dificultad, permitiéndonos siempre operar con una tabla de logaritmos vulgares, aunque tengamos que usar distintas bases. *Entre tres números positivos a, b, c, tales que los dos primeros sean diversos de la unidad, subsiste siempre la identidad*

$$\log_a b \,.\, \log_b c = \log_a c \,, \qquad [18]$$

que puede llamarse la *propiedad transitiva* de la logaritmación.

En efecto: llamando λ al logaritmo de b en la base a, λ' al de c en la base b, es decir, poniendo:

$$\lambda = \log_a b \qquad ; \qquad \lambda' = \log_b c \,,$$

se tendrá, por la definición misma de los logaritmos, que:

$$a^{\lambda} = b \qquad ; \qquad b^{\lambda'} = c \,.$$

Elevando a la potencia λ' la primera de estas relaciones, y teniendo en cuenta la segunda, se tendrá

$$a^{\lambda\lambda'} = b^{\lambda'} = c \,,$$

de donde:

$$\lambda\lambda' = \log_a c \,,$$

y sustituyendo λ, λ' por sus valores, resulta la [18].

Por ejemplo: para calcular en el § 9 el $\log_{3/2} 2$, hemos aplicado la [18], tomando $a = 10$, $b = \frac{3}{2}$, $c = 2$. Entonces:

$$\log_{10} \frac{3}{2} \cdot \log_{3/2} 2 = \log_{10} 2 \,,$$

de donde:

$$\log_{3/2} 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} \frac{3}{2}} = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3 - \log_{10} 2} \,.$$

En una tabla común hallamos $\log_{10} 2 = 0{,}30103$; $\log_{10} 3 = 0{,}47712$; luego:

$$\log_{3/2} 2 = \frac{0{,}30103}{0{,}47712 - 0{,}30103} = \frac{0{,}30103}{0{,}17609} = 1{,}70952 \,.$$

Si ponemos en la [18] $a = c$, teniendo en cuenta que $\log_a a = 1$, resulta:

$$\log_a b \,.\, \log_b a = 1 \,,$$

de donde:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \,, \qquad [19]$$

que puede también ser útil. Por ejemplo, para $a = 10$, $b = 2$, se tiene:

$$\log_2 10 = \frac{1}{\log_{10} 2} = \frac{1}{0{,}30103} = 3{,}32193 \,,$$

lo que hemos utilizado para calcular la equivalencia $1\tau = 0{,}32193\,\omega$ en la tabla, pues $\log_2 \frac{5}{4} = \log_2 \frac{10}{8} = \log_2 10 - \log_2 (2^3) = \log_2 10 - 3$.

Una última observación antes de dejar este tema: en la tabla y cálculos anteriores, hemos dado los resultados con cinco cifras decimales; pero ello no significa que deban tomarse esos valores como exactos. Por el contrario, salvo algunas excepciones, todos ellos son números irracionales, o por lo menos, números que no pueden ser expresados como fracciones decimales con un número finito de guarismos. Es preciso tener esto muy en cuenta en ciertos cálculos muy exactos, en donde puede ser necesario tomar seis, siete o más decimales, so pena de obtener errores en los resultados.

11. — Hemos definido el sonido (§ 6) como un movimiento vibratorio compuesto, en que los armónicos sucesivos tienen amplitudes en general decrecientes, a medida que aumenta su número de orden. Por consiguiente, el armónico preponderante es el que corresponde al estado 1 de vibración, y precisamente, lo hemos llamado armónico fundamental, y él nos ha servido para definir la altura del sonido compuesto.

Para fijar las ideas, y recordando la fórmula [7], vamos a entender en lo sucesivo por *cuerda-tipo*, una cuerda ideal dimensionada de tal manera que sus constantes satisfagan a la relación

$$\frac{a}{2l} = 1 \,, \qquad [20]$$

en cuyo caso, en virtud de la fórmula [7], se tiene $\nu_n = n$, es decir que la frecuencia correspondiente al estado n es precisamente el número n; o en otros términos, los armónicos sucesivos, a partir de la nota fundamental, tendrán las frecuencias 1, 2, 3, 4, 5, ..., y en consecuencia, podremos denominarlos *armónico* 1, *armónico* 2, etc.

El armónico 2 será el que, inmediatamente después de la nota fundamental, presente mayor amplitud. Puede decirse que, en general, la intensidad del armónico 2 es en muy poco inferior a la de la nota fundamental, siempre que se trate, naturalmente, de vibraciones libres. El intervalo que forman estos dos armónicos es lo que hemos llamado una octava, pues sus frecuencias están en la relación de 1 á 2.

El intervalo de octava es de una importancia fundamentalísima para la música, y ocupa el primer puesto entre los intervalos llamados *consonantes*, es decir, « que suenan bien ». Para explicarnos esta consonancia, debemos imaginarnos que en cualquier proceso vibratorio natural que posea los caracteres de sonido musical, la nota fundamental aparece siempre acompañada de su octava, con intensidad comparable a la de aquélla; estas dos notas aparecen así amalgamadas, de tal modo que lo que oímos es en realidad esa combinación de ambas. No es extraño, pues, que si oímos separadamente las dos notas puras, nos aparezcan como complementándose y tendamos a asemejarlas, casi a identificarlas. Téngase en cuenta, en apoyo de esto, que los fenómenos que ocurren en nuestro propio oído interno deben participar de las características de los demás fenómenos vibratorios.

El razonamiento puede extenderse, claro está, a los armónicos 3, 4, 5, ..., aunque cada vez en menor grado. Los intervalos $\frac{3}{1}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{5}{1}$, ... aparecen así como consonancias naturales, pero cada vez menores, hasta llegar al terreno de las disonancias.

Claro es que no existe un límite definido entre consonancias y disonancias. Todo músico admitirá, por ejemplo, que la consonancia por excelencia es la octava, mientras que un semitono atemperado es una disonancia. Pero entre estos casos extremos hay infinidad de gradaciones, que esfuman toda delimitación precisa. Más aún: lo que dijimos en la Introducción acerca del límite entre lo científico y lo artístico en la música, puede aplicarse igualmente al caso presente. Es decir que el límite entre consonancia y disonancia varía también con la época y sus tendencias; y podemos comprobarlo fácilmente examinando la evolución histórica. En los orígenes de la música, a través de los griegos y hasta la Edad Media, solo se consideraba como consonancia la octava, a tal punto que la *monodia* antigua solo se acompañaba con sonidos al unísono o a la octava. Después comenzó a usarse la quinta en el acompañamiento, es decir, a admitirse el intervalo de quinta como consonancia, y más tarde la *cuarta* (una cuarta es $1\,\omega - 1\,\chi = 0{,}41504\,\omega$). Solo mucho tiempo después aparece en tal categoría la tercera, y con ella la *sexta* (una sexta es $1\,\omega - 1\,\tau = 0{,}67807\,\omega$). Quedaba aún un intervalo horrísono, el « diabolus in musica », como se le llamaba, el célebre intervalo de *tritono* que podemos definir aproximadamente como equivalente a seis semitonos atemperados, o sea $6\,\alpha = 0{,}50000\,\omega$, hasta que Monteverdi se atrevió con el fantasma, que se convirtió desde entonces en una « armonía disonante natural » e hizo evolucionar la música casi hasta el punto en que hoy la conocemos. Actualmente se tiende a nuevos horizontes, como veremos en su oportunidad, y con ello la música se enriquece y adquiere nuevos medios de expresión.

Volviendo a nuestro tema, digamos que la idea expresada acerca de la razón de ser de las consonancias naturales no es sino una aproximación. En general puede decirse que la consonancia de un intervalo depende, no solo del intervalo mismo, sino también de la altura absoluta de las notas que lo forman, y por consiguiente, toda teoría de la consonancia que solo se base en la medida de los intervalos, debe ser aproximada. Así por ejemplo, el intervalo entre los armónicos 2 y 4, puesto que $\frac{4}{2} = \frac{2}{1}$, es también una octava, y por tanto, según nuestra idea, debería ser tan consonante como el intervalo (1, 2), mientras que por otra parte, según la misma teoría, siendo 4 y 2 armónicos más elevados que 2 y 1, la consonancia sería menor. Hay así una contradicción, que no pretendemos ocultar, y que se hace todavía más grave si consideramos que, en la práctica, un mismo intervalo es tanto más consonante cuanto mayor es la altura de las notas que lo componen (la influencia de la altura absoluta es ciertamente menor que la de la relativa, pero se hace sentir sin embargo).

Todo esto confirma nuestra aseveración de que la teoría es incompleta. No pretendemos llenar sus lagunas, sin embargo, pues para nuestro objeto basta con la idea apuntada. Añadiremos solo que para explicar el aumento de la consonancia con la altura absoluta, puede valer talvez la reflexión siguiente: existe un límite superior para las frecuencias audibles, que naturalmente varía de un sujeto a otro, y también con la educación dada al sentido del oído. En términos generales podemos fijarla, digamos, en unas 16000 vibraciones por segundo. Su magnitud no interesa a nuestro razonamiento, sino solamente su existencia, y si le asignamos ese valor es solo para fijar las ideas. Esto sentado, consideremos dos cuerdas, una de altura 100 por ejemplo, y otra de altura 800. Los armónicos sucesivos tendrán, pues, las siguientes frecuencias: para la primera

100 , 200 , 300 , 400 , 500 , 600 , 700 , 800 , 900 , 1000,

1100 , 1200 , 1300 , 1400 , 1500 , 1600 , 1700 , 1800 , 1900 , 2000,

. . . .

. . . .

15100, 15200, 15300, 15400, 15500, 15600, 15700, 15800, 15900, 16000.

Para la segunda:

800 , 1600 , 2400 , 3200 , 4000 ,

4800 , 5600 , 6400 , 7200 , 8000 ,

. . . .

. . . .

12800 , 13600 , 14400 , 15200 , 16000.

Los armónicos superiores, en ambos casos, no son audibles, pues sus frecuencias son superiores al límite fijado. Ahora bien: en el primer caso, hay 160 armónicos que verdaderamente contribuyen a formar el sonido, y en el segundo, solo 20. No es extraño, pues, que el segundo sonido nos parezca más puro, más simple, y un intervalo formado alrededor de él mas consonante que en el primer caso.

Claro es que se trata aquí de sonidos compuestos. Para los sonidos simples, según esta idea, iguales intervalos deben ser igualmente consonantes a todas las alturas.

12. — Hemos mencionado ya la gran consonancia o semejanza, casi diríamos identidad, que nos presenta un sonido con su octava. El identificar (a los efectos de la nomenclatura de los intervalos y sistematización de la teoría) un sonido con su octava, es una cosa corriente entre los músicos, de tal manera que dos notas a intervalo de octava toman el mismo nombre, y son equivalentes, en cierto modo,

a los efectos de la teoría armónica, pudiendo distinguirlos, si hubiera necesidad, por medio de subíndices o ápices convenientes; por ejemplo, do_3 y do_4, o do^{III} y do^{IV}.

Como nosotros poco tendremos que hacer con las frecuencias o alturas absolutas, sino con las relativas, o con los intervalos, es conveniente hacer desde ahora una convención. Las frecuencias las referiremos a la cuerda-tipo, cuya definición hemos dado en el § 11, y cuya nota fundamental tiene la frecuencia (ficticia) 1. De modo que si en alguna cuestión queremos hacer intervenir las frecuencias absolutas, solo tendremos que multiplicar las relativas por la frecuencia de la nota fundamental adoptada. Por ejemplo, si tomamos como frecuencia fundamental absoluta la de la nota la_3, o sea 435 vibraciones por segundo, la quinta, cuya frecuencia relativa (§ 9) es $\frac{3}{2}$, tendría la frecuencia absoluta $\frac{3}{2} \times 435 = 652{,}5$ vibraciones por segundo (o sea, 1305 en 2 segundos); y la tercera, $\frac{5}{4} \times 435 = 543{,}75$ vibraciones por segundo.

Además, casi siempre consideraremos las frecuencias o los intervalos *reducidos a la octava fundamental*. Veamos qué significado tiene esto: multiplicando una frecuencia por 2, obtenemos la nota que está una octava más alta que la original; si a ésta la multiplicamos nuevamente por 2, el resultado será elevar la nota una nueva octava; así la frecuencia original habrá quedado multiplicada por $2^2 = 4$, y la nota original elevada en dos octavas. En general, multiplicando una frecuencia por 2^n, la nota correspondiente queda elevada n octavas (n entero y ≥ 0); y análogamente se ve que dividir una frecuencia por 2^n (o multiplicarla por 2^{-n}) equivale a bajar la nota en n octavas.

Ahora bien: si 1 es nuestra frecuencia fundamental, contando a partir de ella una octava llegamos al sonido de frecuencia 2. Nuestra *octava fundamental* es, pues, el intervalo (1, 2), y para reducir una nota a esta octava, bastará multiplicar o dividir su frecuencia ν por una potencia de 2 determinada en tal forma que el resultado quede comprendido entre los números 1 y 2 (excluído el 2). Es evidente que ésto es siempre posible, y de una sola manera. Por ejemplo, las notas de la *escala armónica*

$$1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , \ldots$$

reducidas a la octava fundamental son:

$$1\,,\ \frac{2}{2}\,,\ \frac{3}{2}\,,\ \frac{4}{2^2}\,,\ \frac{5}{2^2}\,,\ \frac{6}{2^2}\,,\ \frac{7}{2^2}\,,\ \frac{8}{2^3}\,,\ \frac{9}{2^3}\,,\ \frac{10}{2^3}\,,\ \ldots$$

o sea:

$$1\,,\ 1\,,\ \frac{3}{2}\,,\ 1\,,\ \frac{5}{4}\,,\ \frac{3}{2}\,,\ \frac{7}{4}\,,\ 1\,,\ \frac{9}{8}\,,\ \frac{5}{4}\,,\ \ldots$$

puesto que cada uno de estos números es igual o mayor que 1 y no alcanza a 2.

Con el sistema de medida de intervalos basado en la unidad ω (§ 10), esta reducción se efectúa en forma simplísima. Consideremos, en efecto, una frecuencia cualquiera ν (≥ 1) y sea n el exponente (entero positivo, nulo o negativo) que hay que dar al factor 2 para reducir dicha frecuencia a la octava fundamental. Entonces

$$1 \leq 2^n \,.\, \nu < 2$$

y tomando los logaritmos de base 2, teniendo en cuenta que cuanto mayor es un número, también mayor es su logaritmo, se tendrá

$$\log_2 1 \leq \log_2 (2^n \,.\, \nu) < \log_2 2\,.$$

Pero

$$\log_2 1 = 0 \;\; ; \log_2 2 = 1 \;\; ; \log_2 (2^n\, \nu) = \log_2 (2^n) + \log_2 \nu = n + \log_2 \nu$$

Luego:

$$0 \leq n + \log_2 \nu < 1\,,$$

es decir, al sumar al $log_2\, \nu$ el entero n, el resultado queda comprendido entre 0 y 1; en otros términos, $n + log_2\, \nu$ es la *parte fraccionaria* o *mantisa* del $log_2\, \nu$, y basta tomar esa mantisa, sin cuidarse de la *característica* o parte entera, para tener reducida la frecuencia ν a la octava fundamental. Recordando por otra parte que $log_2\, \nu = log_2 \left(\frac{\nu}{1}\right)$ es la medida del intervalo $(1, \nu)$ en octavas, tendremos el siguiente importante resultado:

Para reducir un intervalo $(1, \nu)$ *o una frecuencia* ν *a la octava fundamental, basta tomar la parte fraccionaria o mantisa de la medida de ese intervalo en octavas.*

Por ejemplo: sea reducir la frecuencia $\frac{25}{3}$ a la octava fundamental. La medida del intervalo $\left(1, \frac{25}{3}\right)$ en octavas, hallada por el procedimiento explicado en el § 10, es:

$$\log_2 \frac{25}{3} = \log_2 25 - \log_2 3 = 4{,}64386 - 1{,}58496 = 3{,}05890\,\omega$$

Luego, el intervalo reducido a la octava es 0,05890 ω.

Es por esta razón que la medida ω es particularmente cómoda para el estudio que haremos en los capítulos siguientes.

(Continuará)

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA MÚSICA

Por A. E. SAGASTUME BERRA

(*Continuación* *)

Capitulo II

CONSTRUCCION DE LA GAMA

13. — Entramos ahora en el problema primario de toda la teoría musical. ¿Qué sonidos utilizaremos para « hacer música »? Claro es que si consideramos las frecuencias absolutas, todas ellas, dentro de los límites de la audición (es decir, mientras sean *sonidos*) pueden ser utilizadas. Por ejemplo, un piano, o un violín, pueden ser afinados indiferentemente de modo que el la_3 dé las 435 vibraciones por segundo que se le han asignado por convención internacional, ó 440, ó 420, o cualquier otro número arbitrario (dentro de ciertos límites), con lo cual las demás notas variarán también en forma arbitraria.

Si consideramos en cambio las frecuencias relativas, nos encontramos con un problema de distinta índole. Para fijar las ideas adoptemos, como es corriente hacerlo, el intervalo fundamental de una octava, y consideremos todas las frecuencias reducidas a ese intervalo que, en nuestra cuerda-tipo (§ 11) es el (1, 2). ¿Con qué números llenaremos el intervalo entre la frecuencia 1 y la 2?

Desde el punto de vista en que nos colocamos caben, *a priori*, dos soluciones, o mejor dicho, dos tipos de solución: el tipo continuo y el discontinuo o discreto; o sea, si admitimos como utilizables todas las frecuencias del intervalo (1, 2), que varían en forma continua, o si solo nos limitamos a ciertas frecuencias (en número finito o infinito) bien determinadas.

En el primer caso, teóricamente posible, tendríamos sin embargo dificultades, en primer lugar de índole práctica. En efecto, los instru-

* Ver entrega I, T. CXXIII, pág. 1 y sig.

mentos llamados « de sonidos fijos » (piano, arpa, flauta, etc.) quedarían descartados o pasarían a un plano completamente secundario, pues no podrían proporcionar la gradación continua que adoptamos; y aún suponiendo que utilizáramos los instrumentos de sonidos variables, violín, violoncello, y otros que inventáramos ex-profeso, habría grandes dificultades en la ejecución e interpretación. Dado que un compositor hipotético quisiera utilizar en su obra todos los recursos de una gradación continua en los sonidos, la ejecución de esa obra debería ser sumamente exacta, so pena de perderse el valor que el autor ha querido asignar a esos recursos. Además, desde el punto de vista teórico, se nos ocurre que habría peligro de que la música así constituída se convirtiera en una cosa amorfa e indefinida, por falta de contraste.

De cualquier manera, limitaremos nuestro estudio a la solución discreta, teniendo para ello poderosas razones. En primer lugar, la *gama* o sea el conjunto de sonidos utilizables, siempre ha estado constituída, en la música de todos los pueblos, por un conjunto discreto (más aún, finito) de notas. Por otra parte, la naturaleza misma nos enseña la escala armónica discreta en las vibraciones de las cuerdas, tubos, placas y membranas, es decir, en todos los «mecanismos » que podamos imaginar como aptos para construir instrumentos musicales.

Nuestra gama será, pues, discreta. Pero aún en este caso, podemos preguntarnos si convendrá que conste de un número finito o no de notas. La posibilidad de un número infinito de notas en cada octava puede desecharse por consideraciones análogas a las que hicimos más arriba a propósito de la gama continua. Y queda finalmente el caso de una gama finita (*a fortiori* discreta) abierto a nuestro estudio.

14. — Debemos, pues, llenar el intervalo fundamental (1, 2) con un número finito de notas. ¿Qué criterio seguiremos para hacerlo? Las posibilidades de elección son infinitas. Sin embargo, podemos seguir una ruta segura si observamos lo que ocurre naturalmente, o sea aplicando lo que hemos visto en el capítulo anterior acerca de la escala armónica.

La escala armónica, reducida a la octava fundamental (§ 12) es:

$$1\,,\,1\,,\,\frac{3}{2}\,,\,1\,,\,\frac{5}{4}\,,\,\frac{3}{2}\,,\,\frac{7}{4}\,,\,1\,,\,\frac{9}{8}\,,\,\frac{5}{4}\,,\,\frac{11}{8}\,,\,\ldots \qquad [1]$$

Admitamos en nuestra gama, por ejemplo, además de la nota fundamental, la $\frac{3}{2}$. Ello quiere decir, refiriéndonos para concretar el razonamiento al caso de las cuerdas, que junto con la cuerda-tipo admitimos en nuestro instrumento ideal otra cuerda de frecuencia fundamental $\frac{3}{2}$. Esta cuerda también produce, a su vez, el armónico 3, que con respecto a la cuerda-tipo tendrá la frecuencia $\frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{2}$ ó, reducida a la octava, $\frac{9}{8}$. Este sonido es precisamente otro de los armónicos comprendidos en la escala (1), y no hay razón para rechazarlo, una vez que originariamente hemos admitido el armónico 3. A su vez, partiendo de este sonido $\frac{9}{8}$, y tomando su tercer armónico, obtendremos una nueva frecuencia (reducida) $\frac{27}{16}$. Y en general, prolongando esta construcción, nos vemos conducidos a considerar todas aquellas frecuencias cuyo numerador sea una potencia cualquiera no negativa de 3, y el denominador la potencia de 2 conveniente para reducirla a la octava fundamental, es decir, todas las frecuencias de la forma $2^{n_1} . 3^{n_2}$ $(n_2 \geq 0)$.

Admitamos ahora, además, el sonido $\frac{5}{4}$ como perteneciente a nuestra gama. Entonces, por el razonamiento anterior, también admitiremos todas las frecuencias de la forma $2^{m_1} . 5^{m_2}$. Pero más aún: a partir de una de éstas, debemos considerar como posible, o admisible, el tercer armónico (y con él el 9°, 27°, etc.); o bien, a partir de una de las frecuencias $2^{n_1} . 3^{n_2}$, el quinto armónico (y con él el 25°, el 125°, etc.). De manera que en conjunto las frecuencias admisibles serán todas las de la forma $2^{n_1} . 3^{n_2} . 5^{n_3}$.

Es de observar en este punto, que las frecuencias obtenidas constituyen lo que ya Euler llamaba la *gama matemática*, es decir, conjunto de sonidos cuyas frecuencias se expresan todas bajo la forma $2^{n_1} . 3^{n_2} . 5^{n_3}$.

Si tomamos el armónico 6, por ejemplo, no se obtiene con este proceso nada nuevo, pues $6 = 2 \times 3$ y $6 . 2^{n_1} . 3^{n_2} . 5^{n_3} = 2^{n_1+1} . 3^{n_2+1} . 5^{n_3}$, que es otra frecuencia de la misma forma, es decir, comprendida en las anteriores. Solo se obtienen frecuencias nuevas si adoptamos un nuevo número *primo*, 7 por ejemplo, como armónico admisible.

Obsérvese que con este proceso obtenemos siempre un número *infinito* (numerable) de frecuencias. Dedicaremos el resto de este capítulo a estudiar esos conjuntos infinitos, y en el siguiente abordaremos recién la cuestión de cómo limitar el número de notas para satisfacer las condiciones del § anterior.

En general, llamaremos armónicos *fundamentales*, o *constitutivos*, o *generadores* de una gama, a los números primos tales que toda frecuencia correspondiente a una nota de la gama se expresa como producto de potencias de esos números, con exponentes no todos nulos. El armónico 2 se considerará siempre como fundamental, sobreentendiéndolo muchas veces, pues ya hemos visto la especie de identificación que existe entre un sonido y su octava.

Generalizando, pues, el procedimiento anterior, supongamos tener $r + 1$ números primos distintos, el primero de los cuales sea 2; a los demás, dispuestos en orden creciente, los llamaremos p_1, p_2, ... p_r. Por lo tanto, p_1 será por lo menos igual a 3, y entonces

$$3 \leq p_1 < p_2 < \ldots < p_r .$$

Con estos números primos tomados como armónicos fundamentales, podremos construir una *gama* de frecuencias, formando todos los posibles productos de sus potencias y reduciendo esos números a la octava fundamental. Una frecuencia cualquiera ν de nuestra gama tendrá, pues, la expresión reducida

$$\nu = 2^{n_0} \,.\, p_1^{n_1} \,.\, p_2^{n_2} \ldots p_r^{n_r} .$$

El exponente n_0 debe ser tal que $1 \leq \nu < 2$, de modo que, dados los números p_1, p_2, ... p_r, para cada sistema de valores de n_1, n_2, ..., n_r habrá que determinar convenientemente n_0 de modo que se cumpla esa condición; y es evidente que ese valor de n_0 queda así unívocamente determinado. En otros términos, n_0 es una función unívoca de los valores n_1, n_2, ..., n_r (para p_1, p_2, ..., p_r fijos).

Puesto que el intervalo de octava es el fundamental, convendrá medir las frecuencias en octavas, ω (§ 9), en cuyo caso, por el teorema general del § 12, bastará considerar la mantisa del logaritmo (de base 2) del número $p_1^{n_1} \,.\, p_2^{n_2} \ldots p_r^{n_r}$.

En general, cuando consideremos un número real α, podremos definir lo que llamaremos *parte entera de* α e indicaremos con $E(\alpha)$, y la *parte fraccionaria de* α, $F(\alpha)$. Cualquier número real tal como α

está comprendido siempre entre dos números enteros sucesivos (o coincide con un entero); así, si N_a es un entero tal que

$$N_a \leq \alpha < N_a + 1 ,$$

el entero N_a será por definición la parte entera de α, y $\alpha - N_a$ será la parte fraccionaria. O, dicho en otros términos, $E(\alpha)$ está definido por las propiedades siguientes:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I)} & E(\alpha) \text{ es entero} \\ \text{II)} & \alpha - E(\alpha) \geq 0 \quad ; \quad \alpha - [E(\alpha) + 1] < 0 \end{array}\right\} \qquad [2]$$

y la parte fraccionaria por:

$$\text{III)} \qquad F(\alpha) = \alpha - E(\alpha) . \qquad [2']$$

Resulta de II) y III) en particular, que *la parte fraccionaria de un número no puede ser negativa, ni llegar a valer* 1 *ó más.*

Por ejemplo: la parte entera y la fraccionaria de $\alpha = 2{,}3025$, son: $E(\alpha) = 2$; $F(\alpha) = 0{,}3025$. Las de $\alpha = 0{,}41$, son: $E(\alpha) = 0$; $F(\alpha) = 0{,}41$. Las de $\alpha = -2{,}6$ son: $E(\alpha) = -3$; $F(\alpha) = 0{,}4$. Las de $\alpha = 26$ son: $E(\alpha) = 26$; $F(\alpha) = 0$.

Esto sentado, las medidas de nuestras frecuencias ν en octavas, que llamaremos $\gamma^{p_1, p_2, \ldots, p_r}_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ serán

$$\gamma^{p_1 p_2 \ldots p_r}_{n_1 n_2 \ldots n_r} = F(\log_2 \nu) = F(\log_2 (p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_r^{n_r}))$$

o sea, por las propiedades de los logaritmos:

$$\gamma^{p_1 \ldots p_r}_{n_1 \ldots n_r} = F\left(\sum_{i=1}^{r} n_i \log_2 p_i\right) .$$

Los $log_2\, p_i$ son constantes especiales de nuestra gama, de modo que poniendo:

$$\pi_i = \log_2 p_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

será

$$\left.\begin{array}{l} \pi_i = \log_2 p_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r) \\ \gamma^{p_1 \ldots p_r}_{n_1 \ldots n_r} = F\left(\sum_{i=1}^{r} n_i \pi_i\right) . \end{array}\right\} \qquad [3]$$

El conjunto de las infinitas $\gamma_{n_1 \ldots n_r}^{p_1 \ldots p_r}$ que se obtienen (para dados p_i) dando todos los valores posibles a los n_i, es lo que constituye nuestra *gama* (por ahora infinita), a la que designaremos por $\Gamma^{p_1 \cdots p_r}$.

15. — Suponiendo fijados de una vez por todas el número r y los números primos $p_1, p_2, \ldots, p_r$, lo que da por consecuencia el fijar también las π_i, estudiemos algunas propiedades generales del conjunto $\Gamma^{p_1 \cdots p_r}$, que podremos llamar Γ simplemente, sobreentendiendo los índices (análogamente, podremos escribir para abreviar $\gamma_{n_1 \ldots n_r}$ en lugar de $\gamma_{n_1 \ldots n_r}^{p_1 \cdots p_r}$).

Ante todo, dadas las $n_1, \ldots, n_r$ queda fijado un valor, y solo uno, para $\gamma_{n_1 \ldots n_r}$. Si fijamos en cambio un valor de $\gamma_{n_1 \ldots n_r}$ perteneciente a Γ ¿quedarán unívocamente determinados los valores de $n_1, \ldots, n_r$?

Para responder a esta cuestión, observemos que dada una $\gamma_{n_1 \ldots n_r}$ es decir, dadas las $n_1, \ldots, n_r$, y suponiendo que exista otro sistema $n_1', \ldots, n_r'$ que dé la misma nota, debería ser

$$F\,(\log_2 (p_1^{n_1} \ldots p_r^{n_r})) = F\,(\log_2 (p_1^{n'_1} \ldots p_r^{n'_r})),$$

o sea que los números

$$\log_2 (p_1^{n_1} \ldots p_r^{n_r}) \qquad , \qquad \log_2 (p_1^{n'_1} \ldots p_r^{n'_r})$$

deben diferir solo en un entero n_0:

$$\log_2 (p_1^{n_1} \ldots p_r^{n_r}) - \log_2 (p_1^{n'_1} \ldots p_r^{n'_r}) = n_0,$$

o bien:

$$\frac{p_1^{n_1} \ldots p_r^{n_r}}{p_1^{n'_1} \ldots p_r^{n'_r}} = 2^{n_0},$$

y esto es absurdo si $n_0 \neq 0$, pues en la fracción del primer miembro solo aparecen factores primos distintos de 2, mientras que en el segundo solo aparece el factor primo 2. La única posibilidad es que $n_0 = 0$, en cuyo caso se tendrá necesariamente $n_1 = n'_1$, $n_2 = n'_2$, $\ldots$, $n_r = n'_r$. Es decir, que la $\gamma_{n_1, \ldots, n_r}$ determina unívocamente los exponentes $n_1, n_2, \ldots, n_r$.

Hemos establecido, pues, que: *existe* (para r y los p_i fijos) *una correspondencia biunívoca entre los sistemas de exponentes* $n_1, n_2, \ldots, n_r$ *y los valores de* $\gamma_{n_1 n_2 \ldots n_r}$ *correspondientes.*

Por ejemplo: puesto que el sistema $n_1 = n_2 = \ldots = n_r = 0$ nos da $\gamma_{0,0,\ldots 0} = 0$ (la nota fundamental), *no puede obtenerse esta nota fundamental con ningún otro sistema de exponentes,* y particularizando aún más: *si una al menos de las n_i es distinta de cero, $\gamma_{n_1 \ldots n_r}$ no puede ser la nota fundamental.*

16. — Tomemos ahora un valor ρ comprendido entre 0 y 1, excluído el valor 1. En especial, puede dar la casualidad de que ρ coincida con uno de los valores de $\gamma_{n_1 \ldots n_r}$, y entonces lo hará para un cierto sistema de exponentes $N_1, N_2, \ldots, N_r$. Excluyendo este caso, no hay ningún sistema de exponentes tal que $\gamma_{n_1 \ldots n_r} = \rho$. Pero cabe la pregunta: ¿existirán sistemas tales que den *aproximadamente* el valor ρ? Y si existen: ¿con qué aproximación podemos alcanzar ese valor?

Demostraremos que: *dado un número ρ, comprendido entre* 0 *y* 1, *y excluyendo el caso en que exista un sistema (único, si es que existe)* $N_1, \ldots, N_r$ tal que $\gamma_{N_1 \ldots N_r} = \rho$, *pueden hallarse sistemas* $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ *tales que el error cometido al reemplazar ρ por $\gamma_{n_1 \ldots n_r}$ sea arbitrariamente pequeño.* O, dicho en términos más precisos, que, *dado un valor $\varepsilon > 0$, por pequeño que sea, puede hallarse una sucesión de sistemas* $(n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, \ldots, n_r^{(1)})$, $(n_1^{(2)}, n_2^{(2)}, \ldots, n_r^{(2)})$, $\ldots$, $(n_1^{(\nu)}, n_2^{(\nu)}, \ldots, n_r^{(\nu)})$, $\ldots$ *y elegirse en la sucesión un índice ν_0 tal que, desde él en adelante, $\gamma_{n_1^{(\nu)} \ldots n_r^{(\nu)}}$ difiera de ρ (por defecto o por exceso) en menos de ε.* Es decir,

$$|\gamma_{n_1^{(\nu)} \ldots n_r^{(\nu)}} - \rho| < \varepsilon \qquad \text{para} \quad \nu \geq \nu_0(\varepsilon) \qquad [4]$$

O también, expresado brevemente: *Γ es denso en el intervalo* (0, 1).

Obsérvese ante todo que si $s \leq r$, $\Gamma^{p_1 \cdots p_s}$ está contenido en $\Gamma^{p_1 \cdots p_r}$, pues puede considerarse a $\Gamma^{p_1 \cdots p_s}$ como formado por las $\gamma^{p_1 \cdots p_s, p_{s+1} \cdots p_r}_{n_1 \ldots n_s, 0, \ldots, 0}$. Por consiguiente, bastará demostrar el teorema para $r = 1$, pues si Γ^{p_1} es denso, con mayor razón lo será $\Gamma^{p_1 \cdots p_r}$ que contiene a aquél.

Antepondremos dos lemas acerca de la función $F(\alpha)$, definida por la [2′].

Lema I — Si α, β son dos números reales, se verifica

$$F(\alpha + \beta) = F(\alpha) + F(\beta) - \theta(\alpha, \beta) \qquad [5]$$

donde

$$\theta(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0, & \text{si } F(\alpha) + F(\beta) < 1 \\ 1, & \text{» } F(\alpha) + F(\beta) \geq 1 \end{cases} \qquad [5']$$

En efecto: de la [2'] resulta:

$$\alpha = E(\alpha) + F(\alpha)$$

y análogamente:

$$\beta = E(\beta) + F(\beta) .$$

Sumando miembro a miembro:

$$\alpha + \beta = E(\alpha) + E(\beta) + F(\alpha) + F(\beta) ,$$

mientras que para el número $\alpha + \beta$ debe valer también la igualdad

$$\alpha + \beta = E(\alpha + \beta) + F(\alpha + \beta) ,$$

y por consiguiente

$$E(\alpha + \beta) + F(\alpha + \beta) = E(\alpha) + E(\beta) + F(\alpha) + F(\beta) .$$

Ahora bien: si $F(\alpha) + F(\beta)$ es una fracción propia, es decir, menor que 1, las partes enteras y fraccionarias de ambos miembros coincidirán, y será $F(\alpha + \beta) = F(\alpha) + F(\beta)$, que es el primer caso de las [5], [5']. En cambio si $F(\alpha) + F(\beta) \geq 1$, se puede escribir

$$E(\alpha + \beta) + F(\alpha + \beta) = E(\alpha) + E(\beta) + 1 + [F(\alpha) + F(\beta) - 1] ,$$

y siendo $F(\alpha) + F(\beta) - 1$ fraccionario (pues $F(\alpha) + F(\beta)$ es siempre menor que 2), y debiendo nuevamente coincidir las fracciones de ambos miembros, se tendrá en este caso $F(\alpha + \beta) = F(\alpha) + F(\beta) - 1$, es decir, el segundo caso de las [5], [5'].

Lema II — Si $\frac{P}{Q}$ *es una fracción positiva irreducible (es decir, que* P *y* Q *son primos entre sí) la función* $F\left(\frac{P}{Q} n\right)$, *donde* n *es un entero cualquiera, toma al variar* n, *los valores:* $0, \frac{1}{Q}, \frac{2}{Q}, \frac{3}{Q}, \ldots, \frac{Q-1}{Q}$ *y solo ellos.*

Efectuemos ante todo, suponiendo n fijo por un momento, el cociente $\frac{Pn}{Q}$ · Será

$$\frac{Pn}{Q} = E + \frac{\alpha}{Q},$$

donde E es un entero, el cociente de la división, y α otro entero, el resto, que será por lo tanto uno de los números $0, 1, 2, \ldots, Q - 1$. Entonces:

$$0 \leq \alpha < Q .$$

Además

$$F\left(\frac{Pn}{Q}\right) = F\left(E + \frac{\alpha}{Q}\right) = F\left(\frac{\alpha}{Q}\right) = \frac{\alpha}{Q} \cdot \qquad [6]$$

Estas igualdades se explican, en primer lugar porque E, por ser entero, no influye en la parte fraccionaria (también se puede demostrar por la [5], pues $\theta\left(E, \frac{\alpha}{Q}\right) = 0$ por ser $F(E) = 0$) y además, siendo $\frac{\alpha}{Q}$ una fracción positiva y menor que la unidad, coincide con su parte fraccionaria.

El valor así hallado para $F\left(\frac{P}{Q} n\right)$ es, entonces, uno de los valores $\frac{0}{Q} = 0, \frac{1}{Q}, \frac{2}{Q}, \ldots, \frac{Q-1}{Q}$, lo que nos dice que, cualquiera sea el valor de n, esa función solo puede tomar alguno de estos valores; y solo falta demostrar que los toma a todos.

Para ello, sea ahora dado el valor de α comprendido entre 0 y $Q - 1$, y probemos que hay siempre valores de n tales que $F\left(\frac{P}{Q} n\right) = \frac{\alpha}{Q}$. Como α debe ser, según lo anterior, el resto de la división de Pn por Q, bastará probar que se puede elegir n de modo que ese resto sea el α dado; o en otros términos, que Pn sea *congruente* a α según el *módulo Q:*

$$Pn \equiv \alpha \qquad (\text{mód. } Q),$$

y ésto, como se sabe, es posible por ser P y Q primos entre sí, y existen infinitos valores de n que cumplen esa propiedad (¹).

Con ésto queda demostrado nuestro Lema II.

Obsérvese que según ésto, si representamos los valores de $F\left(\frac{P}{Q}n\right)$ en el segmento $(0, 1)$, los puntos representativos $0, \frac{1}{Q}, \frac{2}{Q}, \ldots, \frac{Q-1}{Q}$ dividen al segmento en Q partes iguales, y distan entre sí $\frac{1}{Q}$. Por tanto, el conjunto $F\left(\frac{P}{Q}n\right)$ *no es denso* en el intervalo $(0, 1)$.

17. — Con estos preparativos, podemos ahora demostrar el importante teorema anunciado en el § 16, bastando, como ya se ha dicho, hacerlo para Γ^p (suprimimos, por comodidad, los índices de las n y las p). Es decir, que *dado* $\varepsilon > 0$ *arbitrario, es posible elegir una sucesión* $n^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ *y el índice* $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ *tal que, para todo* $\nu \geq \nu_0$, *sea*

$$| \gamma_{n^{(\nu)}} - \rho | < \varepsilon \qquad [4']$$

siendo ρ *un número comprendido entre* 0 *y* 1, *dado de antemano, y de tal modo que no coincida con ninguno de los* γ_n.

El valor de γ_n es.

$$\gamma_n = F(\pi n) = \psi(n), \qquad [7]$$

donde $\pi = \log_2 p$; y siendo p un número primo distinto de $2, \pi$ resulta ser un número *irracional*. Esto es esencial en nuestro razonamiento, pues si π fuera de la forma $\frac{P}{Q}$, ya hemos observado en el § anterior que $F(\pi n) = F\left(\frac{P}{Q}n\right)$ *no es denso* en el intervalo $(0, 1)$.

La función $\psi(n)$ tiene las siguientes propiedades:

I) Está definida solo para valores enteros (y, en el caso que consideramos, no negativos) de la variable n;

II) Sus valores son siempre irracionales, salvo $\psi(0)$;

(¹) Las soluciones de esa congruencia están dadas, como se sabe, por $n \equiv \alpha P^{\varphi(Q)-1}$ (mód. Q), siendo $\varphi(Q)$ la función euleriana que da el número de números menores que Q y primos con él.

III) Para todo n es

$$0 \leq \psi(n) \leq 1 \qquad [8]$$

(§ 14) (Aunque el valor 1 no es alcanzado por esta función, lo incluímos en el carácter de una cota superior, y por razones de simetría, como se verá);

IV) Es $\psi(n) = \psi(m)$ solamente cuando $n = m$ (§ 15);

V) Las diferencias $\Delta\psi$, o sea $\psi(n+1) - \psi(n)$, están dadas por.

$$\Delta\psi = \psi(n+1) - \psi(n) = \delta - \theta(n) \qquad [9]$$

donde

$$\theta(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } \Delta\psi > 0 \text{ ó si } \psi(n+1) > \psi(n) \\ 1 \text{ » } \Delta\psi < 0 \text{ » » } \psi(n+1) < \psi(n) \end{cases} \qquad [10]$$

[La (9) se obtiene de la (5), Lema I, tomando $\alpha = n\pi$, $\beta = \pi$ y llamando δ a $\psi(1)$ y $\theta(n)$ a $\theta(n\pi, \pi)$. Es menester observar que en la [5], escrita bajo la forma

$$F(\alpha + \beta) - F(\alpha) = F(\beta) - \theta(\alpha, \beta)$$

debe resultar

$$\theta(\alpha, \beta) = 0 \text{ si } F(\alpha + \beta) \geq F(\alpha) \text{ y } \theta(\alpha, \beta) = 1 \text{ si } F(\alpha + \beta) < F(\alpha);$$

el caso $F(\alpha + \beta) = F(\alpha)$ está aquí excluído, en virtud de IV];

VI) $\psi(0) = 0 \quad , \quad \psi(1) > 0 .$

Si definimos ahora las funciones

$$\left.\begin{aligned} \bar{\psi}(n) &= 1 - \psi(n) \\ \bar{\theta}(n) &= 1 - \theta(n) \end{aligned}\right\} \qquad [11]$$

y la magnitud

$$\bar{\delta} = 1 - \delta , \qquad [12]$$

es fácil ver que la función $\bar{\psi}(n)$ cumple las condiciones I á V (difiriendo de $\psi(n)$ solo en los valores que da la VI) teniendo para ella

$\bar{\theta}(n)$ y $\bar{\delta}$ el mismo significado que el de $\theta(n)$ y δ con respecto a $\psi(n)$. En efecto: las propiedades I y II son evidentes para $\bar{\psi}$; la III es inmediata, pues de $0 \leq \psi(n) \leq 1$ resulta

$$0 \leq 1 - \psi(n) \leq 1 ,$$

o sea:

$$0 \leq \bar{\psi}(n) \leq 1$$

[es para conservar esta propiedad que incluímos el valor de 1 como cota superior en la (8)].

La propiedad IV también se verifica evidentemente para $\bar{\psi}$. En cuanto a la V, formando las diferencias de $\bar{\psi}$ se tiene:

$$\Delta\bar{\psi} = \bar{\psi}(n+1) - \bar{\psi}(n) = -\psi(n+1) + \psi(n) = -\Delta\psi ,$$

o sea:

$$\Delta\bar{\psi} = -\delta + \theta(n) = (1-\delta) - [1-\theta(n)]$$

$$\Delta\bar{\psi} = \bar{\delta} - \bar{\theta}(n) ,$$

siendo $\bar{\theta}(n) = 0$ cuando sea $\theta(n) = 1$, es decir cuando

$$1 - \psi(n+1) > 1 - \psi(n)$$

$$\bar{\psi}(n+1) > \bar{\psi}(n) ,$$

y $\bar{\theta}(n) = 1$ en el caso contrario $\bar{\psi}(n+1) < \bar{\psi}(n)$ (aquí y en la [10] no usamos el signo $\geq$ pues la igualdad $\psi(n+1) = \psi(n)$ está excluída, según IV).

Para $\bar{\psi}$, en cambio de los valores VI, tenemos

$$\text{VI}') \qquad \bar{\psi}(0) = 1 \quad , \quad \bar{\psi}(1) < 1$$

18. — Estudiaremos paralelamente las funciones « complementarias » ψ, $\bar{\psi}$. De la V resulta, para $n = 0$

$$\psi(1) - \psi(0) = \delta - \theta(0) \quad , \quad \bar{\psi}(1) - \bar{\psi}(0) = \bar{\delta} - \bar{\theta}(0).$$

Pero, según VI y VI′, debe ser

$$\psi(0) = 0 , \theta(0) = 0 \quad , \quad \bar{\psi}(0) = 1 , \bar{\theta}(0) = 1 ;$$

es decir,

$$\psi(1) = \delta \quad , \quad \bar{\psi}(1) = \bar{\delta} ,$$

y entonces, de la V para $n = 1$, se tiene:

$$\psi(2) = \psi(1) + \delta - \theta(1) = 2\delta - \theta(1)$$

$$\bar{\psi}(2) = \bar{\psi}(1) + \bar{\delta} - \bar{\theta}(1) = 2\bar{\delta} - \bar{\theta}(1) .$$

Supongamos ahora, por ejemplo, que $\theta(1) = 0$. Será entonces $\bar{\theta}(1) = 1$, y por la III:

$$0 \leq 2\delta \leq 1 \quad , \quad 0 \leq 2\bar{\delta} - 1 \leq 1$$

$$0 \leq \delta \leq \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{2} \leq \bar{\delta} \leq 1 .$$

El caso de igualdad debe excluirse, porque δ (y $\bar{\delta}$) resultaría racional, y queda

$$0 < \delta < \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{2} < \bar{\delta} < 1 , \tag{13}$$

y por consiguiente

$$\delta < \bar{\delta} . \tag{14}$$

Si hubiéramos supuesto que $\theta(1)$ tiene el valor 1 en lugar de 0, hubiéramos permutado los papeles de δ, $\bar{\delta}$ y tendríamos todas las propiedades de ψ para $\bar{\psi}$ y viceversa, salvo naturalmente las que se refieren a los valores VI y VI′.

Con respecto a la función θ puede demostrarse ahora que: *si para un valor m de la variable es $\theta(m) = 1$, necesariamente es $\theta(m+1) = 0$* (y entonces, naturalmente $\bar{\theta}(m) = 0$, $\bar{\theta}(m+1) = 1$). En efecto, siendo por III:

$$\psi(m) \leq 1 \quad , \quad \bar{\psi}(m) \geq 0 ,$$

y por IV y [14]:

$$\psi(m+1) = \psi(m) + \delta - 1 \leq 1 + \delta - 1 = \delta < \bar{\delta}\,,$$

$$\bar{\psi}(m+1) = \bar{\psi}(m) + \bar{\delta} \geq \bar{\delta} > \delta\,,$$

resulta, por la misma [9]:

$$\psi(m+2) = \psi(m+1) + \delta - \theta(m+1) < \bar{\delta} + \delta - \theta(m+1)\,,$$

$$\bar{\psi}(m+2) = \bar{\psi}(m+1) + \bar{\delta} - \bar{\theta}(m+1) > \delta + \bar{\delta} - \bar{\theta}(m+1)\,,$$

es decir,

$$\psi(m+2) < 1 - \theta(m+1) \quad , \quad \bar{\psi}(m+2) > 1 - \bar{\theta}(m+1)\,,$$

y entonces, si fuera $\theta(m+1) = 1$, $\bar{\theta}(m+1) = 0$, resultaría

$$\psi(m+2) < 0 \quad , \quad \bar{\psi}(m+2) > 1\,,$$

lo que es absurdo, en virtud de la [8].

Resulta de aquí que, como hemos supuesto $\theta(1) = 0$, existirá un cierto valor ν_1 tal que

$$\theta(1) = \theta(2) = \ldots = \theta(\nu_1 - 1) = 0\,,\ \theta(\nu_1) = 1$$

$$\bar{\theta}(1) = \bar{\theta}(2) = \ldots = \bar{\theta}(\nu_1 - 1) = 1\,,\ \bar{\theta}(\nu_1) = 0\,,$$

y entonces será $\theta(\nu_1 + 1) = 0$, $\bar{\theta}(\nu_1 + 1) = 1$, y a partir de $\nu_1 + 1$ podrá construirse otra sucesión parcial en que los valores de θ son todos nulos (los de $\bar{\theta}$ todos 1) hasta llegar a otro índice ν_2, en que

$$\theta(\nu_2) = 1\ ,\ \theta(\nu_2 + 1) = 0\ [\bar{\theta}(\nu_2) = 0\ ,\ \bar{\theta}(\nu_2 + 1) = 1]\,,$$

y así sucesivamente. En general, pues, quedan definidos así los índices $\nu_0 = 0$, ν_1 , ν_2 , . . . , ν_p , . . . tales que

$$\left.\begin{array}{l} \theta(n) = 0 \quad , \quad \bar{\theta}(n) = 1 \\ \theta(\nu_p) = 1 \quad , \quad \bar{\theta}(\nu_p) = 0 \\ \text{para} \qquad \nu_{p-1} < n \leq \nu_p - 1 \\ \qquad\quad p = 1, 2, 3, \ldots \end{array}\right\} \qquad [15]$$

Si queremos determinar los valores de los ν_p, comencemos por sumar la [9] desde un valor n hasta otro valor $n + h - 1$ del índice. Obtenemos así las expresiones generales

$$\begin{aligned} \psi(n+h) - \psi(n) &= h\delta - \sum_{n}^{n+h-1} \theta(i) \\ \bar{\psi}(n+h) - \bar{\psi}(n) &= h\bar{\delta} - \sum_{n}^{n+h-1} \bar{\theta}(i) . \end{aligned} \qquad [16]$$

En estas fórmulas, que juegan un papel importante en lo que sigue, tomemos primero $n = 0$ y h comprendido entre $\nu_{p-1} + 1$ y ν_p: $\nu_{p-1} + 1 \leq h \leq \nu_p$. Recordando que $\psi(0) = 0$, $\bar{\psi}(0) = 1$, resulta:

$$\psi(h) = h\delta - \sum_{0}^{h-1} \theta(i) \quad , \quad \bar{\psi}(h) = 1 + h\bar{\delta} - \sum_{0}^{h-1} \bar{\theta}(i) .$$

En la sumatoria que interviene en la primera de estas fórmulas, el índice i va desde el valor 0 hasta $h - 1$. Pero $\nu_{p-1} \leq h - 1 \leq \nu_p - 1$, es decir, que el índice i llega ciertamente hasta ν_{p-1}, pero no hasta ν_p. Luego las únicas $\theta(i)$ no nulas (iguales a 1) que aparecen en esta sumatoria, son: $\theta(\nu_1)$, $\theta(\nu_2)$, ..., $\theta(\nu_{p-1})$, y la suma vale $p - 1$. Y como

$$\sum_{0}^{h-1} \theta(i) + \sum_{0}^{h-1} \bar{\theta}(i) = \sum_{0}^{h-1} [\theta(i) + \bar{\theta}(i)] = h$$

(pues cada término $\theta(i) + \bar{\theta}(i)$ vale 1 y hay h términos), la sumatoria de la segunda fórmula tendrá el valor $h - (p - 1)$. Queda entonces:

$$\begin{aligned} \psi(h) &= h\delta - (p-1) \\ \bar{\psi}(h) &= 1 + h\bar{\delta} - h + (p-1) = p - h(1 - \bar{\delta}) \end{aligned} \qquad [16']$$

Teniendo en cuenta la III, resulta de aquí

$$0 \leq h\delta - (p-1) \leq 1 \quad , \quad 0 \leq p - h(1 - \bar{\delta}) \leq 1 .$$

Cuando h alcanza su valor máximo, y con él la expresión $h\delta -- (p-1)$, o bien su valor mínimo, las desigualdades deben seguir valiendo; y lo mismo dígase para la segunda fórmula, en la cual sin embargo, a causa del signo —, el máximo de h corresponde al mínimo de $p - h(1-\bar{\delta})$ y viceversa. Se tiene así:

$$\nu_p \delta - (p-1) \leq 1 \quad , \quad p - (\nu_{p-1}+1)(1-\bar{\delta}) \leq 1$$

$$(\nu_{p-1}+1)\delta - (p-1) \geq 0 \quad , \quad p - \nu_p (1-\bar{\delta}) \geq 0 \, ,$$

de donde resulta:

$$\nu_p \leq \frac{p}{\delta} \quad , \quad \nu_{p-1} \geq \frac{p-1}{1-\bar{\delta}} - 1$$

$$\nu_{p-1} \geq \frac{p-1}{\delta} - 1 \quad , \quad \nu_p \leq \frac{p}{1-\bar{\delta}} \, ,$$

desigualdades que se resumen en:

$$\frac{p}{\delta} - 1 < \nu_p < \frac{p}{\delta} \cdot \qquad [17]$$

En esta fórmula hemos excluído los casos de igualdad por una razón ya antes expresada, o sea que de producirse dicha igualdad, δ resultaría racional, lo que es absurdo.

La [17] también puede escribirse

$$\nu_p = E\left(\frac{p}{\delta}\right) = \frac{p}{\delta} - F\left(\frac{p}{\delta}\right), \qquad [17']$$

utilizando las notaciones del § 14 para la parte entera y la fraccionaria de un número.

De aquí resulta

$$\nu_{p+1} - \nu_p = \frac{p+1}{\delta} - F\left(\frac{p+1}{\delta}\right) - \frac{p}{\delta} + F\left(\frac{p}{\delta}\right),$$

pero, por la [5]

$$F\left(\frac{p+1}{\delta}\right) = F\left(\frac{p}{\delta}\right) + F\left(\frac{1}{\delta}\right) - \theta\left(\frac{p+1}{\delta}, \frac{p}{\delta}\right),$$

y por lo tanto, simplificando, queda.

$$\nu_{p+1} - \nu_p = \frac{1}{\delta} - F\left(\frac{1}{\delta}\right) + \theta\left(\frac{p+1}{\delta}, \frac{p}{\delta}\right),$$

o sea:

$$\nu_{p+1} - \nu_p = E\left(\frac{1}{\delta}\right) + \theta\left(\frac{p+1}{\delta}, \frac{p}{\delta}\right).$$

En particular, para $p = 0$, y teniendo en cuenta que $\nu_0 = 0$ y además, que $\theta\left(\frac{1}{\delta}, 0\right) = 0 \left(\text{por ser } F\left(\frac{1}{\delta}\right) > F(0) = 0\right)$ se tiene.

$$\nu_1 = E\left(\frac{1}{\delta}\right)$$

y por lo tanto:

$$\nu_{p+1} - \nu_p = \nu_1 + \theta\left(\frac{p+1}{\delta}, \frac{p}{\delta}\right), \qquad [18]$$

fórmula que utilizaremos más tarde y que nos dice por lo pronto que las diferencias $\nu_{p+1} - \nu_p$ son « casi » constantes, pues no pueden diferir de ν_1 más que en una unidad.

19. — Podemos ahora pasar a demostrar otras dos propiedades de la función ψ (ó $\overline{\psi}$) que nos conducirán rápidamente a la demostración del teorema.

a) En las [16′], h está comprendido entre $\nu_{p-1} + 1$ y ν_p, de modo que se puede escribir

$$h = \nu_{p-1} + \mu \quad , \quad 1 \leq \mu \leq \nu_p - \nu_{p-1} \, ,$$

y entonces

$$\psi(\nu_{p-1} + \mu) = (\nu_{p-1} + \mu)\,\delta - (p - 1)$$

$$\overline{\psi}(\nu_{p-1} + \mu) = p - (\nu_{p-1} + \mu)\,(1 - \overline{\delta}) \, .$$

Pero, según [17]

$$p - 1 - \delta < \nu_{p-1}\,\delta < p - 1 \, .$$

Luego (teniendo en cuenta que $1 - \bar{\delta} = \delta$):

$$p - 1 - \delta + \mu\delta - (p-1) < \psi(\nu_{p-1} + \mu) < p - 1 + \mu\delta - (p-1)$$

$$p - (p-1) - \mu\delta < \bar{\psi}(\nu_{p-1} + \mu) < p - (p - 1 - \delta) - \mu\delta ,$$

es decir:

$$(\mu - 1)\,\delta < \psi(\nu_{p-1} + \mu) < \mu\delta$$

$$1 - \mu\delta < \bar{\psi}(\nu_{p-1} + \mu) < 1 - (\mu - 1)\,\delta .$$

Las cotas superior e inferior de ψ y $\bar{\psi}$ difieren en δ, en ambos casos, y por otra parte, no dependen de p. Quiere decir que dando a p los infinitos valores de que es capaz, ψ y $\bar{\psi}$ toman infinitos valores, *distintos* en virtud de IV, y todos comprendidos en el intervalo $[(\mu - 1)\,\delta, \mu\delta)]$ para ψ, ó $[1 - \mu\delta, 1 - (\mu - 1)\,\delta]$ para $\bar{\psi}$. Imaginando entonces tomar en una recta, a partir del punto 0 hasta 1 (del punto 1 hasta 0) y en el sentido positivo (negativo) intervalos sucesivos iguales a δ (los que, naturalmente, no llenan todo el intervalo, por ser δ irracional), en cada uno de esos intervalos caen infinitos valores de la función ψ (de la función $\bar{\psi}$). La amplitud de esos intervalos es, según la [13], *siempre inferior a* $\frac{1}{2}$.

b) Para $n = \mu$, $h = \nu_{p-1}$, la fórmula [16] da:

$$\psi(\nu_{p-1} + \mu) - \psi(\mu) = \nu_{p-1}\,\delta - \sum_{\mu}^{\nu_{p-1}+\mu-1} \theta(i) ,$$

$$\bar{\psi}(\nu_{p-1} + \mu) - \bar{\psi}(\mu) = \nu_{p-1}\,\bar{\delta} - \sum_{\mu}^{\nu_{p-1}+\mu-1} \bar{\theta}(i) .$$

Tomemos ahora $1 \leq \mu < \nu_1$. Teniendo en cuenta que, por la [18],

$$\nu_1 = \nu_p - \nu_{p-1} - \theta\left(\frac{p}{\delta}, \frac{p-1}{\delta}\right),$$

se ve que la sumatoria de la primera fórmula consta de $\nu_{p-1} + \mu - 1 - \mu + 1 = \nu_{p-1}$ términos, de modo que, siendo $\mu < \nu_1$, el máximo índice en esa sumatoria será $< \nu_1 + \nu_{p-1} = \nu_p - \theta\left(\frac{p}{\delta}, \frac{p-1}{\delta}\right)$, o sea, en todos los casos, inferior a ν_p (pero $\geq \nu_{p-1}$). En esa sumatoria, las únicas $\theta(i)$ no nulas son, pues, $\theta(\nu_1)$, $\theta(\nu_2)$, ..., $\theta(\nu_{p-1})$, y la sumatoria vale $p - 1$. Entonces, por un razonamiento ya hecho, la otra sumatoria vale $\nu_{p-1} - (p - 1)$ y se tiene:

$$\begin{aligned} \psi(\nu_{p-1} + \mu) - \psi(\mu) &= \nu_{p-1}\,\delta - (p - 1)\,, \\ \bar{\psi}(\nu_{p-1} + \mu) - \bar{\psi}(\mu) &= \nu_{p-1}\,\bar{\delta} - \nu_{p-1} + (p - 1)\,, \end{aligned} \qquad [19]$$

y los valores de los segundos miembros *no dependen de* μ. Lo que ocurra para ψ en el primer intervalo $(0, \delta)$ [para $\bar{\psi}$ en el intervalo $(1, 1 - \delta)$] se repetirá exactamente en cada uno de los intervalos subsiguientes, y en consecuencia nos bastará estudiar por ejemplo las diferencias ($\mu = 1$) $\psi(\nu_{p-1} + 1) - \psi(1)$, $\bar{\psi}(\nu_{p-1} + 1) - \bar{\psi}(1)$; o, lo que para nuestro objeto es equivalente, los valores de las nuevas funciones

$$\bar{\psi}_1(p) = \frac{\psi(\nu_p + 1)}{\delta} \quad , \quad \psi_1(p) = 1 - \bar{\psi}_1(p)\,.$$

Ahora bien: podemos probar que ψ_1 (ó $\bar{\psi}_1$) tiene las mismas propiedades I a VI (o VI′) que ψ (ó $\bar{\psi}$). En efecto:

I) $\bar{\psi}_1(p)$ está definida solo para valores enteros (y no negativos) de p;

II) Sus valores son siempre irracionales [salvo $\bar{\psi}_1(0)$];

III) Para todo p, según [19] y [17], es

$$p - \delta + \delta - p \leq \psi(\nu_p + 1) = (\nu_p + 1)\,\delta - p \leq p + \delta - p\,,$$

o sea:

$$0 \leq \bar{\psi}_1(p) = \frac{\psi(\nu_p + 1)}{\delta} \leq 1\,;$$

IV) Es $\bar{\psi}_1(p) = \bar{\psi}_1(q)$ cuando $\psi(\nu_p + 1) = \psi(\nu_q + 1)$, o sea, solo cuando $p = q$;

V) La diferencia $\Delta\bar{\psi}_1$ es:

$$\Delta\bar{\psi}_1 = \frac{1}{\delta}\,[\psi(\nu_{p+1} + 1) - \psi(\nu_p + 1)] =$$

$$= \frac{1}{\delta}\,[(\nu_{p+1} - \nu_p)\,\delta - 1] = \nu_{p+1} - \nu_p - \frac{1}{\delta}$$

o, por las [18] y [17′]

$$\Delta\bar{\psi}_1 = \nu_1 - \frac{1}{\delta} + \theta\left(\frac{p+1}{\delta}, \frac{p}{\delta}\right) = \left[1 - F\left(\frac{1}{\delta}\right)\right] -$$

$$- \left[1 - \theta\left(\frac{p+1}{\delta}, \frac{p}{\delta}\right)\right],$$

de modo que si ponemos

$$\bar{\delta}_1 = 1 - F\left(\frac{1}{\delta}\right) \quad , \quad \bar{\theta}_1(p) = 1 - \theta\left(\frac{p+1}{\delta}, \frac{p}{\delta}\right),$$

se tiene

$$\Delta\bar{\psi}_1 = \bar{\delta}_1 - \bar{\theta}_1(p) .$$

y como $\bar{\theta}_1(p)$ solo puede valer 0 ó 1, será 0 cuando $\Delta\bar{\psi}_1 > 0$, es decir:

$$\bar{\theta}_1(p) = \begin{cases} 0 \text{ si } \bar{\psi}_1(p+1) > \bar{\psi}_1(p) \\ 1 \text{ » } \bar{\psi}_1(p+1) < \bar{\psi}_1(p) . \end{cases}$$

Finalmente:
VI y VI′) es

$$\bar{\psi}_1(0) = 1 , \bar{\psi}_1(1) < 1 ; \psi_1(0) = 0 , \psi_1(1) > 0 .$$

A las funciones ψ_1, $\bar{\psi}_1$ pueden aplicarse, por lo tanto, todos los razonamientos anteriores. En particular, ambas funciones admiten infinitos valores en cada intervalo de amplitud $\bar{\delta}_1$ ó $\delta_1 = 1 - \bar{\delta}_1$, el que resulte menor de los dos (y por tanto menor que $\frac{1}{2}$); supongamos, para fijar las ideas, que sea $\bar{\delta}_1$. Como

$$\psi(\nu_p + 1) = \delta\bar{\psi}_1(p) ,$$

al intervalo $\bar{\delta}_1 < \frac{1}{2}$ de la función $\bar{\psi}_1(p)$ corresponde un intervalo $\delta\bar{\delta}_1 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$ para la función ψ, en el cual habrá infinitos valores de ésta. Y así se puede continuar indefinidamente, resultando que ψ admite infinitos valores en todo intervalo de amplitud $\left(\frac{1}{2}\right)^k$, con k arbitrario, y tomando k suficientemente grande, ese intervalo puede hacerse tan pequeño como se quiera. Resulta así, como queríamos demostrar, que *los valores de* $\psi(n) = F(n\pi)$ *se distribuyen densamente en todo el intervalo* $(0, 1)$.

Este teorema significa que, dada una $\Gamma^{p_1 \cdots p_r}$ con un número arbitrario de armónicos arbitrarios, es posible reproducir un sonido cualquiera dado de antemano en la octava fundamental, o bien exactamente, o bien con la aproximación que se desee. Más adelante veremos, como aplicación de este importante teorema [1], que aumentando suficientemente el número de notas, las *comas* (que definiremos) podrán disminuirse todo lo que se quiera.

20. — Los desarrollos anteriores pueden presentarse bajo otro punto de vista, que nos llevará a interesantes consecuencias.

La expresión de una frecuencia cualquiera (reducida o no) de nuestra gama, puede expresarse (§ 14)

$$\nu = 2^{n_0} \,.\, p_1^{n_1} \,.\, p_2^{n_2} \ldots p_r^{n_r} \,.$$

donde los enteros $n_1, n_2, \ldots, n_r$ se han supuesto no negativos, mientras que n_0 puede tomar cualquier valor entero.

Ahora bien: no hay inconveniente en establecer para los exponentes $n_1, n_2, \ldots, n_r$ un campo de variabilidad más amplio, admitiendo que pueden también asumir valores negativos. En efecto: ¿qué significado tendría un valor negativo de n_1 por ejemplo?

No hay que olvidar que la expresión ν, al mismo tiempo que una frecuencia, representa también un intervalo; o mejor dicho (pues las frecuencias de que se trata son siempre relativas) ν representa solamente un intervalo, medido desde la nota fundamental. En el caso de n_1 positivo, ese intervalo es hacia arriba, hacia las frecuencias más altas; y si n_1 es negativo, el intervalo se medirá hacia las notas más graves. Y lo mismo que se dice de n_1 puede decirse de $n_2, n_3, \ldots, n_r$, separadamente o en conjunto. Así pues, la *admisión de valo-*

[1] El teorema, en su forma abstracta, no es sino un caso especial del *teorema de aproximación de Kronecker* (*Die Periodensysteme von Funktionen reeller Variablen*, Berichte d. K. Preuss. Ak. d. W. zu Berlin, 1884), precisado por Bohl, Sierpinski y Weyl en 1910, en el sentido de que la distribución de valores no es solo densa, sino *uniformemente densa* en el intervalo (0,1). La demostración dada por nosotros permite también llegar a esta conclusión. Véase el trabajo de H. WEYL: *Uber die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins.* Math. Annalen, t. 77 (1916), p. 313, donde se tratan cuestiones análogas, y se hacen interesantes aplicaciones geométricas y mecánico-estadísticas.

res negativos para los exponentes n_i solo significa que nuestra gama puede contener los mismos intervalos hacia abajo que hacia arriba.

La not fundamental viene a constituirse así en una especie de centro de simetría de la gama. Ya veremos más tarde las consecuencias de esta simetría.

Si medimos las frecuencias (o intervalos) en ω, esa medida será

$$\log_2 \nu = n_0 + \log_2 (p_1^{n_1} \, . \, p_2^{n_2} \ldots p_r^{n_r})$$

o sea, con la notación (3):

$$\log_2 \nu = n_0 + \sum_1^r n_i \, \pi_i \, . \qquad [20]$$

Naturalmente, si convenimos, como siempre, en reducir las frecuencias a la octava fundamental, el entero n_0, lo mismo que la parte entera de $\Sigma \, \pi_i \, n_i$, no tiene influencia alguna en la nota de que se trate.

Esto nos sugiere el siguiente procedimiento: el conjunto de números reales de la forma [20] (donde los π_i son irracionales dados, y las n_i, incluyendo n_0, son enteros variables) puede ser dividido en clases de números *equivalentes*, llamando así a dos de los números [20] que solo difieren en un entero.

Cada número del tipo [20] pertenece así a una clase, que está determinada por los exponentes $n_1, n_2, \ldots, n_r$, y solo a una (pues dos sistemas distintos de valores de $n_1, \ldots, n_r$ dan, § 15, dos notas distintas).

Existe, pues, una correspondencia biunívoca entre las clases y los sistemas $n_1, \ldots, n_r$, por lo cual no hay inconveniente en denotar a cada clase con el símbolo $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ del sistema que le corresponde. Así por ejemplo: el símbolo $(0, 0, \ldots, 0)$ corresponde a la clase

$$n_0 + \Sigma \, \pi_i \, . \, 0 = n_0 \qquad (n_0 \text{ arbitrario})$$

es decir, a la clase constituída por la nota fundamental y todas las que están con ella a intervalos de octavas justas.

La expresión [20], cuando $n_0, n_1, \ldots, n_r$ tengan valores asignados, fijos, puede considerarse como un número *representante de la clase* $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$.

Sean ahora dos expresiones [20]:

$$n_0 + \Sigma \, \pi_i \, n_i \quad , \quad m_0 + \Sigma \, \pi_i \, m_i \, ,$$

representantes, respectivamente, de las clases $(n_1, \ldots, n_r)$, $(m_1, \ldots, m_r)$. La suma de los dos intervalos es

$$(n_0 + m_0) + \Sigma\, \pi_i\, (n_i + m_i)\ ,$$

que representa a su vez a la clase $(n_1 + m_1, \ldots, n_r + m_r)$, y ésta no depende de los representantes elegidos, es decir, de n_0, m_0, sino solo de las *clases*, es decir, de los sistemas $n_1, \ldots, n_r$; $m_1, \ldots, m_r$. Puede por tanto, con derecho, llamarse *suma* de las clases dadas. Es decir, que *dadas dos clases* $(n_1, \ldots, n_r)$, $(m_1, \ldots, m_r)$, *llamamos suma de ellas a la clase*

$$(n_1\,, \ldots, n_r) + (m_1\,, \ldots, m_r) = (n_1 + m_1\,, \ldots, n_r + m_r)\ , \qquad [21]$$

y esta suma goza evidentemente de las mismas propiedades, conmutativa y asociativa, que la suma ordinaria de números.

Análogamente podremos definir la *diferencia*:

$$(n_1\,, \ldots, n_r) - (m_1\,, \ldots, m_r) = (n_1 - m_1\,, \ldots, n_r - m_r)\ . \qquad [22$$

Las *clase cero*, $(0\,, 0\,, \ldots, 0)$ es la que sumada con cualquier otra da esta última; la diferencia de dos clases iguales es la clase cero. Si sumamos k veces (k entero y positivo) la clase $(n_1, \ldots, n_r)$ consigo misma, obtenemos el *múltiplo* k de esa clase, que será evidentemente la clase $(kn_1, \ldots, kn_r)$:

$$k\,(n_1\,, \ldots, n_r) = (kn_1\,, \ldots, kn_r)\ . \qquad [23]$$

Es obvio cómo pueda extenderse la [23] para $k \leq 0$.

Las propiedades [22] y [23] de las clases expresan que:

a) la *diferencia* de dos clases es otra clase;

b) el *múltiplo*, o sea el producto de una clase por un entero, es otra clase.

Debido a estas dos propiedades, el conjunto de las clases constituye lo que se llama un *módulo* con respecto al campo E de los números enteros, o un *E-módulo*. Dos clases $(n_1, \ldots, n_r)$, $(m_1, \ldots, m_r)$ son iguales cuando las sumas $\Sigma\, \pi_i\, n_i$, $\Sigma\, \pi_i\, m_i$ difieren en un entero, lo que expresamos así:

$$\Sigma\, \pi_i\, n_i \equiv \Sigma\, \pi_i\, m_i \quad (\text{mód. } 1).$$

Claro es que las clases definidas en este § no difieren sino aparentemente de las notas $\gamma_{n_1 \dots n_r}^{p_1 \dots p_r}$ definidas en el § 14. Tenemos así una doble notación para esas notas:

$$\gamma_{n_1 \dots n_r}^{p_1 \dots p_r} = F\,(\Sigma\,\pi_i\,n_i) = (n_1\,,\,\dots\,,\,n_r)\,. \qquad [24]$$

La primera da la expresión efectiva, numérica, de la $\gamma_{n_1 \dots n_r}^{p_1 \dots p_r}$. La segunda es una expresión simbólica muy útil para lo que va a seguir.

Notemos solamente, por ahora, que el símbolo $(n_1\,,\,\dots\,,\,n_r)$ puede considerarse como representación de un *vector* r-dimensional, pues según [21] y [23] estos símbolos, en cuanto a su suma y su producto por un número (entero) siguen las mismas leyes que los vectores. Ya veremos más adelante la importancia de esta representación.

Solo hemos mencionado este hecho aquí, para justificar la denominación que introduciremos desde ahora, llamando *gama a r dimensiones* o *r-dimensional*, a toda $\Gamma^{p_1 \dots p_r}$, que tiene r armónicos generadores (aparte del armónico 2).

(Continuará)

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA MÚSICA

Por A. E. SAGASTUME BERRA

(*Continuación* *)

Capítulo III

EL PROBLEMA DE LA ATEMPERACIÓN

21. — Con el estudio que hemos hecho del conjunto $\Gamma^{p_1 \cdots p_r}$ ya estamos en condiciones de realizar ahora el paso ulterior que anunciamos en el § 14, y cuya necesidad hemos puesto de manifiesto en las reflexiones hechas en el § 13. Hasta ahora hemos construído, en forma que nos parece natural y lógica, un conjunto de frecuencias o notas, $\Gamma^{p_1 \cdots p_r}$; pero este conjunto es infinito, y ya hemos visto que debemos adoptar un conjunto *finito* de notas para tener una escala apta para ser utilizada prácticamente.

Se trata de estudiar, pues, el procedimiento más conveniente para limitar, en alguna forma, el número de notas de nuestra $\Gamma^{p_1 \cdots p_r}$: a este procedimiento lo llamaremos la *atemperación*. Entendemos, pues, por *atemperación* de una gama, en el sentido abstracto que venimos dando a los conceptos musicales, *un proceso que nos permita elegir, entre las frecuencias que componen una* $\Gamma^{p_1 \cdots p_r}$, *un número finito de ellas, para así obtener la gama* (que llamaremos, para diferenciarla, *gama atemperada*) *apta para ser utilizada musicalmente*.

La única restricción que imponemos, como se ve, al proceso de la atemperación, consiste en que las notas resultantes sean « aptas para ser utilizadas musicalmente »; expresión ésta un tanto vaga, sobre todo desde el punto de vista abstracto. Tocamos aquí una de las fronteras entre ciencia y arte a que nos referíamos en la Introducción; y forzoso es que nos veamos compelidos en este punto a utili-

* Ver T. CXXIII, Entregas I y II.

zar criterios y medios musicales más bien que matemáticos. Procuraremos, sin embargo, fijar y precisar en lo posible las ideas; y para ello, lo primero que haremos será estudiar varios casos concretos, conocidos ya, para pasar luego a la generalización de conceptos necesaria para nuestro estudio.

En los ejemplos que seguirán a continuación, y valga esta advertencia para el resto de este trabajo, cuando nos sea necesario nombrar las notas, lo haremos dando, además del nombre, y entre paréntesis, una indicación de la gama a que pertenecen, por ejemplo: *do* (*Pit.*), el *do* pitagórico; *do* (*Tol.*), el *do* de Tolomeo; etc. La notación es análoga a la que usan los naturalistas en sus clasificaciones zoológicas y botánicas, y obedece a razones análogas, esto es, que estos sonidos varían, en general, de una a otra gama, y es menester en consecuencia distinguirlos cuidadosamente, so pena de caer en lamentables confusiones.

22. — Comenzaremos por un ejemplo clásico, de una gama unidimensional, en la que por consiguiente r, el número de armónicos generadores (excluído el armónico 2) es igual a 1, y p_1 tiene el mínimo valor posible, a saber $p_1 = 3$. Se trata, pues, de la Γ^3.

Las notas $\gamma_{n_1}{}^3$ de esta gama tendrán por expresión

$$\gamma_{n_1}{}^3 = F\,(n_1\,\pi_1)$$

donde, según la ecuación [3] del capítulo anterior,

$$\pi_1 = \log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} = 1{,}58496.$$

Por consiguiente, será

$$\gamma_{n_1}{}^3 = F\,(1{,}58496\,n_1)$$

y calculando sucesivamente los valores en esta fórmula se obtiene la siguiente tabla:

n_1	$\gamma_{n_1}{}^3$	n_1	$\gamma_{n_1}{}^3$	n_1	$\gamma_{n_1}{}^3$
0	0,00000	6	0,50977	12	0,01955
1	0,58496	7	0,09474	13	0,60451
2	0,16992	8	0,67970	14	0,18947
3	0,75489	9	0,26466	15	0,77444
4	0,33985	10	0,84962		
5	0,92481	11	0,43459		

Naturalmente, como ya se dijo en el § 14, las frecuencias $\gamma_{n_1}^3$ de esta tabla están medidas en ω (octavas).

Con respecto a la atemperación, se presentan aquí varias posibilidades. Claro es que a partir de la nota γ_0^3 (o de cualquier otra de la Γ^3, ya que la altura absoluta no interesa) conviene tomar para nuestra gama atemperada, otras notas lo más afines o próximas posibles, y naturalmente las más afines son las que tienen números de orden más bajos. De aquí que convenga tomar en este caso todas las notas a partir de γ_0^3 hasta una cierta $\gamma_{n_1}^3$. El problema está entonces en fijar un criterio que nos permita obtener el índice n_1.

El criterio adoptado, y que es en realidad muy plausible, consiste en cerrar con las notas γ_0^3 a $\gamma_{n_1}^3$ una especie de ciclo (que en este caso los músicos llaman *ciclo de quintas*) de tal modo que la primera nota excluída, $\gamma^3_{n_1+1}$ venga a reemplazar después del ciclo a la fundamental γ_0^3. Claro es que el ideal sería que el ciclo se cerrara efectivamente, es decir, que $\gamma^3_{n_1+1}$ diera nuevamente la nota γ_0^3; pero sabemos que esto no es posible (§ 15). Sin embargo, existen, por el teorema del § 16 y siguientes, valores n_1 tales que $\gamma^3_{n_1+1}$ difiere tan poco como se quiera de 0. El adoptar uno de esos valores es, pues, cuestión de la « precisión », por así decir, que se quiera dar a la gama. La diferencia $\gamma^3_{n_1+1} - \gamma_0^3 = \gamma^3_{n_1+1}$, o bien $1 - \gamma^3_{n_1+1}$ según cuál de las dos resulte menor, es una medida de esa « precisión » y es lo que se llama la *coma*. El hecho de adoptar, no el valor de $\gamma^3_{n_1+1} - \gamma_0^3$, sino el mínimo de los dos números $\gamma^3_{n_1+1}$, $1 - \gamma^3_{n_1+1}$ en esta definición, corresponde al hecho de que la $\gamma^3_{n_1+1}$ puede aproximarse, o bien por exceso a la nota fundamental, o bien por defecto a su octava, cuya altura tiene la medida 1.

Por otra parte, la « precisión » está limitada por razones prácticas, pues el número de notas de la gama atemperada no puede pasar un límite razonable, y este límite sería sin duda sobrepasado si impusiéramos una pequeñez excesiva a la coma.

Haciendo uso de una representación gráfica se aclarará lo que hemos dicho. Para eso podemos representar en un eje de abscisas los valores 0, 1, 2,... del índice n_1, y tomar en cada uno de esos puntos, como ordenada, el valor correspondiente de $\gamma_{n_1}^3$; así por ejemplo, la ordenada correspondiente al punto $n_1 = 0$ es $\gamma_0^3 = 0$, la de $n_1 = 2$ es $\gamma_2^3 = 0{,}16992$, etc. Se obtienen así los puntos representados en la figura 4. En esta figura se han trazado, además, algunas de las líneas rectas sobre las cuales se disponen los puntos representativos, y que pueden servir de guía para hallar rápidamente algunas propiedades que nos interesan. Así por ejemplo, se ve que para $n_1 + 1 = 5$, el punto representativo está muy cercano al valor límite 1; y en efecto, si cerramos allí el ciclo, tenemos un error o *coma* que vale

$$1 - \gamma_5^3 = 1 - 0{,}92481 = 0{,}07519\,\omega\,.$$

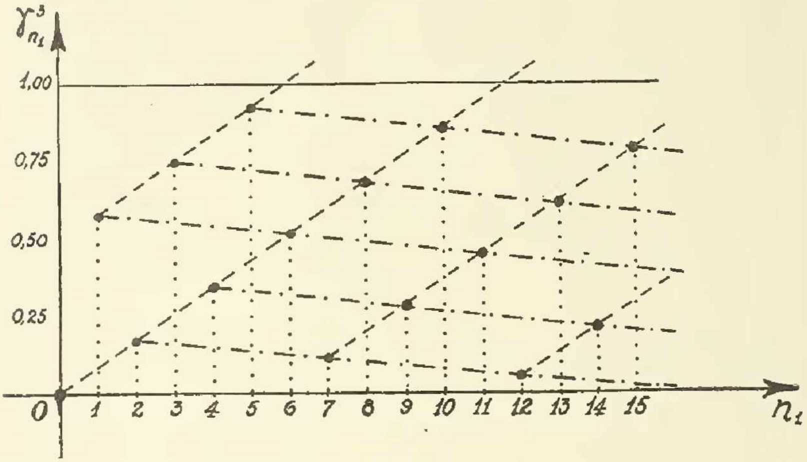

Fig. 4

Tendríamos así una gama cuyas notas, dispuestas por orden creciente del índice, son γ_0^3, γ_1^3, γ_2^3, γ_3^3, γ_4^3. Como el intervalo entre γ_0^3 y γ_1^3, o sea $0{,}58496\,\omega$, es lo que se llama una quinta (χ), tendríamos así un ciclo de cuatro quintas, de modo que, llamando por ej. *fa* a la nota fundamental, las notas de nuestra gama serían:

$$\gamma_0^3 = fa \quad ; \quad \gamma_1^3 = do \quad ; \quad \gamma_2^3 = sol \quad ; \quad \gamma_3^3 = re \quad ; \quad \gamma_4^3 = la$$

o, dispuestas en orden creciente:

$$\gamma_0^3 = fa \quad ; \quad \gamma_2^3 = sol \quad ; \quad \gamma_4^3 = la \quad ; \quad \gamma_1^3 = do \quad ; \quad \gamma_3^3 = re$$

que a su vez, si utilizamos el do y el re de la octava inferior, se transforma en: do-re-fa-sol-la, que no es sino la gama pentatónica o de cinco notas, utilizada por la música primitiva asiria, china, griega (gama de Terpandro), incaica, celta, y en general por todos los pueblos primitivos. De ahí que llamemos a esta gama (atemperada) la *gama primitiva*, y abreviaremos (*prim.*).

Otra posibilidad de atemperación, que salta a la vista en el gráfico, es tomar $n_1 + 1 = 7$, pero, puesto que $\gamma_7{}^3 = 0{,}09474 > 0{,}07519$, no se gana en precisión tomando $n_1 + 1 = 7$ en lugar de 5, pues la coma resultaría aumentada. Sin embargo las notas $\gamma_0{}^3$ hasta $\gamma_6{}^3$ inclusive constituyen las notas llamadas *diatónicas* (¹) de la gama de Pitágoras que veremos enseguida, y dispuestas por orden creciente reciben los nombres siguientes:

$$\gamma_0{}^3 = fa \quad ; \quad \gamma_2{}^3 = sol \quad ; \quad \gamma_4{}^3 = la \quad ; \quad \gamma_6{}^3 = si \quad ; \quad \gamma_1{}^3 = do \quad ;$$
$$\gamma_3{}^3 = re \quad ; \quad \gamma_5{}^3 = mi \, ,$$

a los que agregaremos, cuando sea necesario, la indicación (*Pit.*), como ya se ha explicado.

El valor $n_1 + 1 = 12$ sí nos da una gama mejor, pues su coma es

$$\gamma_{12}{}^3 - \gamma_0{}^3 = 0{,}01955\,\omega \, .$$

Es ésta la *gama de Pitágoras*, calculada matemáticamente por el célebre filósofo de los números, cuyas notas, dispuestas por orden ascendente, toman los nombres:

$$\gamma_0{}^3 = fa \quad ; \quad \gamma_7{}^3 = fa\,\# \quad ; \quad \gamma_2{}^3 = sol \quad ; \quad \gamma_9{}^3 = sol\,\# \quad ;$$
$$\gamma_4{}^3 = la \quad ; \quad \gamma_{11}{}^3 = la\,\#$$

$$\gamma_6{}^3 = si \quad ; \quad \gamma_1{}^3 = do \quad ; \quad \gamma_8{}^3 = do\,\# \quad ; \quad \gamma_3{}^3 = re \quad ; \quad \gamma_{10}{}^3 = re\,\# \quad ;$$
$$\gamma_5{}^3 = mi \qquad (\# \text{ se lee } \textit{sostenido}).$$

Si se quisiera disminuir aún más la coma, sería preciso tomar $n_1 + 1 = 53$, pues recién para ese índice obtenemos un valor menor de la coma, $\gamma_{53}{}^3 = 0{,}00301\,\omega$, pero el número 53 parece ya excesivo. Sin embargo, esta gama ya fué considerada por M. Mersenne (*X*) en 1648, y R. H. M. Bosanquet construyó un instrumento utilizándola (²).

23. — En los casos tratados, para efectuar la atemperación, limitamos las notas a tomar por medio de un segmento comprendido, en el gráfico de la figura 4, entre el punto 0 y un cierto punto n_1 del

(¹) En sentido distinto del que damos más adelante a esta denominación.
(²) Véase Murray Barbour (XI), de donde tomamos estas referencias.

eje de abscisas. Prescindiendo, por un momento, de la representación por medio de abscisas y ordenadas, consideremos solo el eje de abscisas, y sobre él los puntos de coordenadas enteras y no negativas, $n_1 = 0, 1, 2, 3, \ldots$. A cada uno de esos puntos podemos coordinarle la nota correspondiente $\gamma_0^3, \gamma_1^3, \gamma_2^3, \gamma_3^3, \ldots$ y en esta forma la Γ^3 está representada por la sucesión infinita de estos puntos equidistantes. Al atemperar la gama, venimos a tomar un segmento del eje, el segmento $(0, n_1)$, que contiene a todos los puntos de la gama atemperada. Hay, pues, una correspondencia biunívoca entre las distintas gamas atemperadas y los segmentos, y en consecuencia podemos individualizar cada gama atemperada por medio del segmento que le corresponde. Así, la gama primitiva se puede indicar con $\Gamma^3{}_{(0,4)}$ la gama de Pitágoras con $\Gamma^3{}_{(0,11)}$ y la de Mersenne, de 53 notas, con $\Gamma^3{}_{(0,52)}$.

Si tomamos ahora dos notas cualesquiera γ_n^3, γ_m^3, suponiendo por ejemplo $m \geq n$, ellas determinan un intervalo cuya medida es $\gamma_m^3 - \gamma_n^3$, que puede ser negativo, pues γ_m^3 puede tener una altura inferior a la γ_n^3 (por ej., en la figura 4, esto sucede para $n = 3$, $m = 6$). Como γ_m^3 es equivalente, como ya dijimos (§ 20) a $\gamma_m^3 + 1$, que es su octava, no hay inconveniente en considerar, en lugar del intervalo negativo $\gamma_m^3 - \gamma_n^3$ (si tal resultara), el intervalo positivo equivalente $1 + \gamma_m^3 - \gamma_n^3 = 1 - (\gamma_n^3 - \gamma_m^3)$. Esto tiene la ventaja siguiente: si efectuamos una traslación, por ejemplo de una unidad en el sentido positivo, del segmento (n, m) determinado por los puntos representativos, se tendrán los puntos $(n+1, m+1)$, y

$$\gamma^3{}_{m+1} - \gamma^3{}_{n+1} = F((m+1)\pi_1) - F((n+1)\pi_1) = F(m\pi_1) + F(\pi_1) -$$

$$- \theta(m\pi_1, \pi_1) - F(n\pi_1) - F(\pi_1) + \theta(n\pi_1, \pi_1) = \gamma_m^3 - \gamma_n^3 -$$

$$- \theta(m\pi_1, \pi_1) + \theta(n\pi_1, \pi_1),$$

habiendo utilizado el Lema I del § 16.

En esta fórmula pueden presentarse varios casos:

a) $\theta(m\pi_1, \pi_1) = \theta(n\pi_1, \pi_1)$. Entonces $\gamma^3{}_{m+1} - \gamma^3{}_{n+1} = \gamma_m^3 - \gamma_n^3$ y $1 - (\gamma^3{}_{n+1} - \gamma^3{}_{m+1}) = 1 - (\gamma_n^3 - \gamma_m^3)$, de modo que, ya sea $\gamma_m^3 - \gamma_n^3$ negativo o no, el intervalo entre estas notas es igual al de las notas $\gamma^3{}_{n+1}$, $\gamma^3{}_{m+1}$.

b) $\theta(m\pi_1, \pi_1) = 0$, $\theta(n\pi_1, \pi_1) = 1$. Entonces $\gamma^3{}_{m+1} - \gamma^3{}_{n+1} = 1 + \gamma_m^3 - \gamma_n^3$, de modo que $\gamma_m^3 - \gamma_n^3$ debe ser negativo, pues de lo contrario $\gamma^3_{m+1} - \gamma^3_{n+1}$, sería mayor que 1, lo que es absurdo. Entonces el segundo miembro, por supuesto positivo, mide el intervalo entre γ_n^3 y γ_m^3, y el primero el de γ^3_{n+1}, γ^3_{m+1} y ellos son por lo tanto iguales.

c) $\theta\,(m\pi_1\,,\pi_1) = 1$, $\theta\,(n\pi_1\,,\pi_1) = 0$. Entonces $\gamma^3_{m+1} - \gamma^3_{n+1} = \gamma_m^3 - \gamma_n^3 - 1$, ó $1 + \gamma^3_{m+1} - \gamma^3_{n+1} = \gamma_m^3 - \gamma_n^3$, y el razonamiento *b*) puede aplicarse permutando los papeles de n, m, con $n+1$, $m+1$ respectivamente. Ambos intervalos son nuevamente iguales.

El caso *a*) ocurre, por ejemplo, para $n = 4$, $m = 7$ [donde $\theta\,(n\pi_1\,,\pi_1) = \theta\,(m\pi_1\,,\pi_1) = 0$], o para $n = 5$, $m = 13$ [donde $\theta\,(n\pi_1\,,\pi_1) = \theta\,(m\pi_1\,,\pi_1) = 1$]; el *b*), para $n = 4$, $m = 8$; el *c*), para $n = 5$, $m = 9$. La figura 4 hace claros todos estos razonamientos.

Trasladando sucesivamente el segmento $(n\,,m)$ varias unidades, ya sea en sentido positivo o negativo, como en cada traslación unitaria no varía el intervalo $(\gamma_n^3\,,\gamma_m^3)$, tampoco variará en la traslación total. Es decir, que: *por una traslación arbitraria (de un número entero de unidades) en la dirección del eje, no se alteran los intervalos.*

Lo que caracteriza la Γ^3, y toda gama atemperada que derive de ella, como la de Pitágoras, $\Gamma^3_{(0,11)}$, es la existencia del armónico 3. Por consiguiente, si tomamos una nota, por ejemplo la fundamental γ_0^3, y le agregamos la siguiente, γ_1^3, que representa precisamente su tercer armónico, el conjunto de estas dos notas forma un *acorde* que es característico de esta gama, que puede servir para individualizarla, cualquiera sea la atemperación adoptada. Lo podemos llamar *acorde tonal* o *perfecto*, y colocarlo, con justa razón, en la base de toda teoría armónica (en el sentido que los músicos dan a la *armonía*), referente a la Γ^3. Como al trasladar el segmento $(0\,,1)$ los intervalos, como acabamos de ver, no varían, podremos formar acordes perfectos con dos notas inmediatas cualesquiera, $\gamma_n^3\,,\gamma^3_{n+1}$. Así por ejemplo, la $\Gamma^3_{(0,11)}$ de Pitágoras, contiene los acordes perfectos siguientes:

fa-do; do-sol; sol-re; re-la; la-mi; mi-si; si-fa #; fa #-do #; do #-sol #; sol #-re #; re #-la #.

Del teorema demostrado respecto a la invariancia de los intervalos por traslación resulta también otra consecuencia, a saber: *en una gama atemperada* $\Gamma^3_{(0\,,\,n_1)}$, *la coma es el mínimo de los intervalos en-*

tre la nota $\gamma^3_{n_1+1}$ *y todas las de la gama, es decir, todas las* γ_m^3 *con* $0 \leq m \leq n_1$.

En efecto, hemos definido la coma como el intervalo $(\gamma_0^3, \gamma^3_{n_1+1})$. Si hubiera un intervalo menor que la coma, formado entre una γ_m^3 con $0 < m \leq n_1$ y $\gamma^3_{n_1+1}$, trasladando el segmento (m, n_1+1) hasta hacer coincidir su extremo inferior con el origen, es decir, en m unidades, lo tendríamos en la posición $(0, n_1 - m + 1)$, no habiendo variado el intervalo en virtud del teorema; pero entonces el intervalo $(\gamma_0^3, \gamma^3_{n_1-m+1})$ sería, por hipótesis, menor que el $(\gamma_0^3, \gamma^3_{n_1+1})$, y no tendríamos ventaja alguna haber tomado $n_1 + 1$ notas en la atemperación, cuando al tomar solo $n_1 - m + 1$ la coma disminuiría.

Otra circunstancia importante que implícitamente se ha tenido en cuenta en la atemperación, es la *regularidad* de los intervalos en que queda dividida la octava. Ordenemos, en efecto, por orden creciente de magnitudes, las notas de las gamas atemperadas $\Gamma^3(0, n_1)$, limitándonos, por brevedad, a los casos $n_1 = 4$ y $n_1 = 11$ (gamas primitiva y de Pitágoras, respectivamente) y calculemos los intervalos sucesivos. Tendremos así los siguientes cuadros:

Gama primitiva

Notas	Intervalos
0,00000	
	0,16992
0,16992	
	0,16993
0,33985	
	0,24511
0,58496	
	0,16993
0,75489	
	0,24511
1,00000	

Gama de Pitágoras

Notas	Intervalos	Notas	Intervalos
			0,07519
0,00000		0,58496	
	0,09474		0,09474
0,09474		0,67970	
	0,07518		0,07519
0,16992		0,75489	
	0,09474		0,09473
0,26466		0,84962	
	0,07519		0,07519
0,33985		0,92481	
	0,09474		0,07519
0,43459		1,00000	
	0,07518		—
0,50977		—	

En ambos casos, la octava ha quedado dividida en intervalos de dos magnitudes distintas. Ahora bien: una vez admitida la coma como límite de error tolerable, puede considerarse en ambos casos que todos los intervalos, dentro de esa tolerancia, son *iguales*. En efecto:

$$0{,}16992 + \text{coma (prim.)} = 0{,}16992 + 0{,}07519 = 0{,}24511$$

$$0{,}07519 + \text{coma (Pit.)} = 0{,}07519 + 0{,}01955 = 0{,}09474\,.$$

Los dos intervalos 0,16992 y 0,24511 de la $\Gamma^3{}_{(0,4)}$ son, pues, iguales salvo un error de una coma, y otro tanto ocurre con los intervalos 0,07519 y 0,09474 de la $\Gamma^3{}_{(0,11)}$ (las pequeñas diferencias en la quinta cifra decimal provienen, como ya dijimos en el final del § 10, de que los valores son aproximados, pero no de un verdadero error en las notas mismas, representadas por esos valores).

Las dos gamas $\Gamma^3{}_{(0,4)}$ y $\Gamma^3{}_{(0,11)}$ presentan, pues, la misma regularidad, pues ambas dan una división uniforme (dentro de los errores admitidos en cada caso) de la octava, en intervalos iguales; pero la $\Gamma^3{}_{(0,11)}$ de Pitágoras, aparte de ser más rica, posee una coma considerablemente más pequeña, y de ahí su superioridad sobre la otra.

En general, en la tabla de las notas de una gama atemperada, dispuestas por orden de magnitud creciente, los intervalos sucesivos no son sino las *diferencias primeras* de estas notas (diferencias entre dos notas consecutivas). Si formamos las *diferencias segundas,* o sea las diferencias de las diferencias (una vez corregidas las diferencias primeras en una coma, en más o en menos, según haya lugar), el *número* de las primeras y la *magnitud* de las segundas nos dan dos índices para juzgar de la regularidad de la gama atemperada, ya que es evidente que cuanto mayores sean dichos número y magnitudes, tanto menor será la regularidad. Por ejemplo, según lo que acabamos de ver, en las dos gamas $\Gamma^3{}_{(0,4)}$ y $\Gamma^3{}_{(0,11)}$, el número de diferencias primeras es 1, y la magnitud de las diferencias segundas es 0, condiciones óptimas en cuanto a regularidad.

En resumen: de la exposición de la Γ^3 y su atemperación, hemos obtenido tres criterios para juzgar la bondad de una gama atemperada, a saber: en primer término, la *coma*, límite del error admisible; en segundo lugar, el número N de notas; en tercero, el *número* de las diferencias primeras entre las notas, y la *magnitud* de las diferencias segundas (una vez corregidas las primeras) que miden la regularidad de la gama.

No sería difícil idear con estos elementos alguna expresión matemática que nos permitiera medir por un número la bondad de una gama; pero no nos es necesaria tal medida. Solo adoptaremos las notaciones: ε para la coma, N para el número de notas, ν para el número de diferencias primeras, y Δ^2 para las diferencias segundas (que colocaremos unas a continuación de otras, entre paréntesis). Así por ej.:

En $\Gamma^3_{(0,4)}$: $\varepsilon = 0{,}07519$; $N = 5$; $\nu = 1$; $\Delta^2 = (0)$

En $\Gamma^3_{(0,11)}$: $\varepsilon = 0{,}01955$; $N = 12$; $\nu = 1$; $\Delta^2 = (0)$.

24. — Pasemos a otro caso, algo más complejo. Tomemos ahora $r = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$. Esta $\Gamma^{3,5}$ consta de las notas

$$\gamma^{3,5}_{n_1,n_2} = F(\pi_1 n_1 + \pi_2 n_2)$$

donde

$$\pi_1 = \log_2 3 = 1{,}58496$$

$$\pi_2 = \log_2 5 = 2{,}32193$$

y por consiguiente

$$\gamma^{3,5}_{n_1,n_2} = F\,(1{,}58496\, n_1 + 2{,}32193\, n_2)\,.$$

Siendo ésta una gama bidimensional, y dos los índices variables, sus notas podrán disponerse en un cuadro a doble entrada, así:

$n_1 \rightarrow$ / $n_2 \downarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0,00000	0,58496	0,16992	0,75489	0,33985	0,92481	0,50977	0,09474
1	0,32193	0,90689	0,49185	0,07682	0,66178	0,24674	0,83170	0,41667
2	0,64386	0,22882	0,81378	0,39875	0,98371	0,56867	0,15363	0,73860
3	0,96578	0,55074	0,13570	0,72067	0,30563	0,89059	0,47555	0,06052
4	0,28771	0,87267	0,45763	0,04260	0,62756	0,21252	0,79748	0,38245
5	0,60964	0,19460	0,77956	0,36453	0,94949	0,53445	0,11941	0,70438
6	0,93157	0,51653	0,10149	0,68646	0,27142	0,85638	0,44134	0,02631
7	0,25350	0,83846	0,42342	0,00839	0,59335	0,17831	0,76327	0,34824
8	0,57542	0,16038	0,74534	0,33031	0,93527	0,50023	0,08519	0,67016
9	0,89735	0,48231	0,06727	0,65224	0,23720	0,82216	0,40712	0,99209
10	0,21928	0,80424	0,38920	0,97417	0,55913	0,14409	0,72905	0,31402

La $\Gamma^{3,5}$ puede representarse gráficamente en forma análoga a la Γ^3; solo que en este caso, como es bidimensional, necesitaríamos dos ejes coordenados para los dos índices n_1, n_2 y, si se quiere, un tercer eje para los valores de $\gamma^{3,5}_{n_1 n_2}$. Obtendríamos así una serie de puntos representativos en el espacio, análogos a los puntos en el plano, de la figura 4. En general no haremos uso de esa representación, bastándonos con representar los pares de valores de n_1, n_2 en un sistema cartesiano plano (fig. 5). Obtenemos así, en el cuadrante positivo, un reticulado formado por los puntos cuyas dos coordenadas son números naturales. Cada uno de esos puntos determina la correspondiente nota. Por consiguiente, si P es un punto del reticulado, de coordenadas n_1, n_2, podremos indicar con $\gamma_P^{3,5}$ a la $\gamma_{n_1 n_2}^{3,5}$.

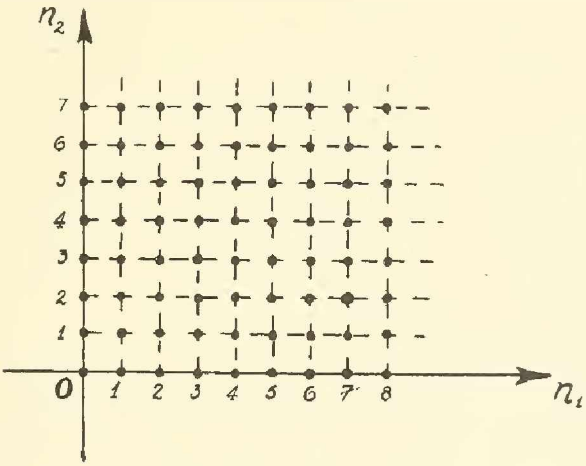

Fig. 5

Tomemos ahora, en la $\Gamma^{3,5}$, dos elementos cualesquiera, $\gamma_{n_1 n_2}^{3,5}$, $\gamma_{m_1 m_2}^{3,5}$. Su intervalo, según ya convinimos en el § anterior, es, de las dos cantidades $\gamma_{m_1 m_2}^{3,5} - \gamma_{n_1 n_2}^{3,5}$, $1 - (\gamma_{n_1 n_2}^{3,5} - \gamma_{m_1 m_2}^{3,5})$, la que resulte positiva y menor que la unidad. Los puntos (n_1, n_2) y (m_1, m_2) determinan, en la representación gráfica, un vector. Dando a este vector una traslación arbitraria, podemos verificar (como en el caso del § anterior) que el intervalo de las dos notas correspondientes no varía. Para ello, notemos simplemente que una traslación cualquiera puede descomponerse en sus componentes según los dos ejes. La traslación en dirección de n_1 hace variar solo las abscisas de los puntos, mientras que las ordenadas quedan constantes; a esta traslación puede, pues, aplicarse íntegramente el razonamiento del § anterior. Otro tanto ocurre con la otra componente en dirección del eje n_2, en la cual solo varían las ordenadas, quedando fijas las abscisas. En resumen, pues, el intervalo no ha variado durante las traslaciones componentes, y tampoco en la total.

En particular, si trasladamos el eje de las n_1 obtendremos, en la representación geométrica, una recta paralela. Por otra parte, según el teorema, los intervalos de las notas correspondientes a sus puntos no han variado; y como esas notas forman la Γ^3, obtenemos el resultado siguiente: *en toda recta de la figura 5 paralela al eje de abscisas, los puntos representan notas de una* Γ^3, *idéntica a la que corresponde al propio eje, salvo que tiene distinta nota fundamental.* Y un teorema análogo vale para las paralelas al eje n_2: *toda recta paralela al eje de ordenadas contiene una* Γ^5 *idéntica a la que corresponde al eje, salvo que con distinta nota fundamental.*

De acuerdo con estos resultados, si quisiéramos atemperar la $\Gamma^{3,5}$ manteniéndonos sobre una recta paralela a alguno de los ejes, no construiríamos en realidad una gama bidimensional, sino una Γ^3 o una Γ^5. Debemos, pues, efectuar de otra manera la atemperación. Es, naturalmente, plausible que, junto con la nota fundamental $\gamma^{3,5}_{0,0}$, aparezcan en la gama atemperada las dos notas $\gamma^{3,5}_{1,0}$ y $\gamma^{3,5}_{0,1}$ que corresponden a los armónicos 3 y 5 de la fundamental, y que caracterizan precisamente la $\Gamma^{3,5}$: y así vemos que la gama atemperada debe extenderse en las dos dimensiones, pues los puntos representativos deben contener, por lo menos, el triángulo formado por los puntos $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. En general, podemos decir que los puntos representativos de la gama atemperada constituirán, en el diagrama, los vértices y puntos internos de un cierto polígono Φ, que llamaremos *polígono atemperante.*

Sean ahora $P_1, P_2, \ldots, P_N$ los vértices y puntos interiores y de contorno del polígono Φ (N es el número de notas de la gama atemperada). Para cada vértice o punto del contorno, supongamos P_k, existirán en el reticulado cuatro puntos *vecinos,* es decir, a la distancia unitaria de él, y entre esos cuatro puntos podrán existir algunos exteriores a Φ, y a los cuales llamaremos genéricamente *puntos* Q. Designaremos por $Q_1, Q_2, \ldots, Q_M$ todos los puntos Q así obtenidos. Por ejemplo, en el caso de la figura 6, el polígono Φ tiene 7 vértices, y hay además otros cuatro puntos reticulados situados en el contorno, y cuatro internos: son, pues, en total, 15 puntos P, que hemos numerado de 1 a 15. Los puntos vecinos a algún P y exteriores al polígono son, en el cuadrante positivo, los ocho puntos Q_7 y Q_9 a Q_{15}, a los que tenemos que agregar los demás, que tienen al menos una de sus coordenadas negativa.

Hecho esto, formemos los intervalos entre las notas representadas por un punto P y un punto Q, es decir, todos los intervalos correspondientes a los segmentos $P_k Q_h$, donde $k = 1, 2, \ldots, N$; $h = 1, 2, \ldots, M$. El mínimo de esos intervalos se llamará la *coma* de la $\Gamma^{3,5}$ atemperada y se indicará, como ya se dijo, con la letra ε.

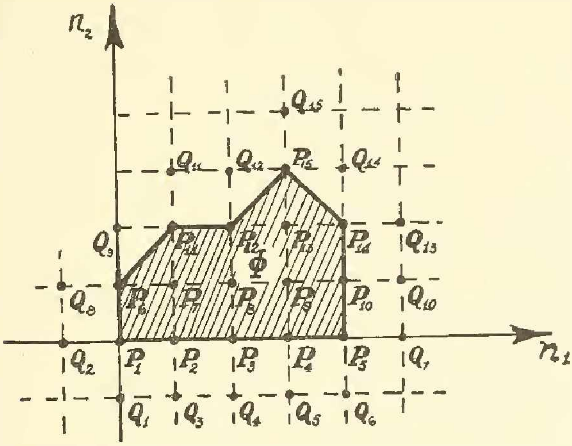

Fig. 6

Siendo ε el intervalo entre una nota perteneciente a la gama atemperada y otra que no le pertenece, pero que es « vecina » (en el sentido que la representación gráfica aclara, según lo dicho), es decir, un intervalo de la forma $(\gamma^{3,5}_{Q_h}, \gamma^{3,5}_{P_k})$, ó $(\gamma^{3,5}_{P_k}, \gamma^{3,5}_{Q_h})$ resulta que ε es el error que se comete al sustituir la nota $\gamma^{3,5}_{Q_h}$ por la $\gamma^{3,5}_{P_k}$. Los demás intervalos de este tipo son mayores que la coma (por la definición misma) y deben considerarse como intervalos pertenecientes a la gama atemperada, salvo la corrección de una coma.

Naturalmente, el problema está en determinar el polígono atemperante de modo tal que la coma sea lo suficientemente pequeña, y tratando de cumplir también las condiciones que mencionamos al final del § anterior respecto al número de notas N y a la regularidad, medida por los números ν y las Δ^2, definidas en este caso en la misma forma que en aquél. A la gama atemperada de tal manera, por medio de un polígono atemperante Φ, la designaremos con $\Gamma^{3,5}_{\Phi}$.

25. — Con estos principios, pasemos a atemperar nuestra $\Gamma^{3,5}$. Como al trasladar el polígono Φ no varían los intervalos, podemos suponer a dicho polígono ubicado de tal modo que todos los puntos Q resulten ubicados en el cuadrante positivo, para así evitarnos cálculos con notas negativas.

Observemos ahora en el cuadro de la $\Gamma^{3,5}$ dado en el § 24, que las notas $\gamma_{4,0}^{3,5} = 0,33985\ \omega$ y $\gamma_{0,1}^{3,5} = 0,32193\ \omega$ están a un intervalo de

$$0,33985 - 0,32193 = 0,01792\ \omega\ ,$$

intervalo que ya en el § 10 encontramos, contando precisamente 4 quintas (es decir, tomando la nota pitagórica $\gamma_{4,0}^{3,5}$) y restándole una *tercera* [que es el intervalo $(\gamma_{0,0}^{3,5}, \gamma_{0,1}^{3,5})$], reduciendo el intervalo en

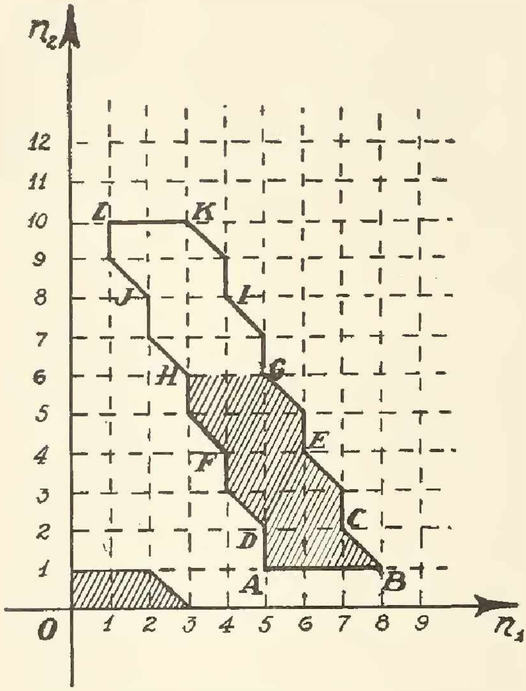

Fig. 7

$2\ \omega$. Lo llamamos la *coma tolemaica* o *sintónica*, y constituye un límite de error bastante aceptable para tomarlo como coma de nuestra gama. Si dejamos de lado la $\gamma_{4,0}^{3,5}$ y tomamos en cambio la $\gamma_{0,1}^{3,5}$, cometiendo un error de una coma, habremos iniciado así la construcción del polígono atemperante, que tendrá un vértice en el punto $(0, 0)$ y otro en el punto $(3, 0)$. Estudiando la tabla de valores, se ve que resulta conveniente cerrar el polígono bajo la forma de un trapecio, cuyos otros dos vértices son $(0, 1)$ y $(2, 1)$, trapecio que hemos rayado en la figura 7.

Haciendo un paréntesis a nuestras consideraciones, y para aclarar más los conceptos, veamos cuáles son las frecuencias relativas de las notas que así se obtienen. Como la altura absoluta no interesa, podemos asumir como frecuencia de la nota fundamental el número $\frac{2}{3}\cdot$ Como el índice n_1 corresponde a la progresión según el armónico 3, las notas representadas por los puntos $(1,0)$, $(2,0)$ y $(3,0)$ tendrán las frecuencias $\frac{2}{3}\times 3$, $\frac{2}{3}\times 3^2$ y $\frac{2}{3}\times 3^3$ respectivamente, o sea 2, 6 y 18. La nota representada por el punto $(0,1)$ tiene la frecuencia $\frac{2}{3}\times 5 = \frac{10}{3}$, pues el índice n_2 (ordenada) corresponde a la progresión según el armónico 5. A partir de este punto, los $(1,1)$ y $(2,1)$ progresan pitagóricamente, de modo que las correspondientes frecuencias serán $\frac{10}{3}\times 3$ y $\frac{10}{3}\times 3^2$, o sea 10 y 30 respectivamente. Hemos obtenido así las frecuencias

$$\frac{2}{3}\ ,\ 2\ ,\ 6\ ,\ 18\ ,\ \frac{10}{3}\ ,\ 10\ ,\ 30$$

o, si las reducimos a la octava fundamental $(1,2)$ multiplicando o dividiendo por la potencia conveniente de 2:

$$\frac{2}{3}\times 2 = \frac{4}{3}\ ,\ 2\times 2^{-1} = 1\ ,\ 6\times 2^{-2} = \frac{3}{2}\ ,\ 18\times 2^{-4} = \frac{9}{8}\ ,$$

$$\frac{10}{3}\times 2^{-1} = \frac{5}{3}\ ,\ 10\times 2^{-3} = \frac{5}{4}\ ,\ 30\times 2^{-4} = \frac{15}{8}$$

y, dispuestas por orden creciente:

$$1\ ,\ \frac{9}{8}\ ,\ \frac{5}{4}\ ,\ \frac{4}{3}\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ \frac{5}{3}\ ,\ \frac{15}{8}\ .$$

En esta forma, se ve que estas frecuencias no constituyen otra cosa sino la llamada *gama de los físicos* o *de Zarlino*, que debe atribuirse en realidad a Tolomeo. Los nombres de estas notas, en el orden últimamente escrito, son: *do, re, mi, fa, sol, la, si,* a los que agregaremos, cuando sea necesario, la denominación (*Tol.*) para distinguirlas de las homónimas pitagóricas (§ 23).

La coma tolemaica es, como vimos, el intervalo entre las notas $\gamma^{3,5}_{4,0}$ y $\gamma^{3,5}_{0,1}$. Como la $\gamma^{3,5}_{3,0}$, según acabamos de ver, tiene la frecuencia $\frac{9}{8}$, la $\gamma^{3,5}_{4,0}$ tendrá la frecuencia $\frac{9}{8} \times 3 = \frac{27}{8}$ ó, reducida, $\frac{27}{16}$, mientras que la $\gamma^{3,5}_{0,1}$ tiene la frecuencia reducida $\frac{5}{3}$ · Luego la coma sintónica es

$$\frac{27}{16} \cdot / \cdot \frac{5}{3} = \frac{81}{80},$$

valor clásicamente conocido y cuya medida en ω es precisamente 0,01792 ω.

Continuando nuestros razonamientos, ahora que tenemos ya construído el polígono atemperante, podemos trasladarlo por ejemplo a la posición *ABCD* de la figura 7, y esto para facilitar los cálculos. Coloquemos ahora en cada uno de los puntos de nuestro polígono y en los vecinos, los valores de las notas correspondientes en ω, obteniendo así la « tabla gráfica » siguiente:

n_2 ↑ / n_1 →	4	5	6	7	8	9
3 →		0,89059	0,47555	0,06052		
2 →	0,98371	0,56867 $= \gamma^{3,5}_{D}$ —	0,15363 —	0,73860 $= \gamma^{3,5}_{C}$	0,32356	
1 →	0,66178	0,24674 $= \gamma^{3,5}_{A}$ —	0,83170 —	0,41667 —	0,00163 $= \gamma^{3,5}_{B}$	0,58659
0 →		0,92481	0,50977	0,09474	0,67970	0,26466

donde están indicados los valores de las abscisas (n_1) y ordenadas (n_2) y también los de las notas correspondientes, no solo al polígono *ABCD*, sino también a los puntos vecinos. Ordenemos las notas de la gama así atemperada, $\Gamma^{3,5}_{ABCD}$, por orden creciente, y calculemos los intervalos:

Nota	Intervalo	Nota	Intervalo
			0,15200
0,00163		0,56867	
	0,15200		0,16993
0,15363		0,73860	
	0,09311		0,09310
0,24674		0,83170	
	0,16993		0,16993
0,41667		1,00163	

Hemos colocado al final de la tabla el valor $\gamma_B^{3,5} + 1\,\omega = 1{,}00163\,\omega$ para cerrar el ciclo. Con ayuda de esta tabla y la anterior es fácil comprobar que, efectivamente, la coma $\varepsilon = 0{,}01792\,\omega$ es el mínimo de los intervalos entre las notas $\gamma_{Q_h}^{3,5}$ y $\gamma_{P_k}^{3,5}$.

Tenemos en esta tabla, en primer lugar, el intervalo $0{,}09311\,\omega$, y además, los dos intervalos $0{,}16993$ y $0{,}15200$ que, por diferir solo en una coma, debemos considerar iguales. Luego, el número ν de intervalos realmente distintos es 2; y las diferencias segundas se reducen a una sola:

$$0{,}16992 - 0{,}09311 = 0{,}07681$$

Por tanto, las características de nuestra gama son:

$$\varepsilon = 0{,}01792\,\omega \quad ; \quad N = 7 \quad ; \quad \nu = 2 \quad ;$$

$$\Delta^2 = (0{,}07681\,\omega).$$

26. — Claro es que hay otras posibilidades de atemperación de la $\Gamma^{3,5}$. Aparte de una muy interesante que veremos en el capítulo siguiente, las principales están representadas en la misma figura 7, y consisten en tomar, en lugar del trapecio *ABCD*, los polígonos *ABEF*, *ABGH*, *ABIJ* y *ABKL*. La $\Gamma_{ABEF}^{3,5}$ no es superior a la $\Gamma_{ABCD}^{3,5}$, pues sin disminuir la coma aumenta los números de notas N y de intervalos ν, si bien disminuyen algo las Δ^2. La $\Gamma_{ABGH}^{3,5}$ ya es más ventajosa, pues tiene una coma que es la tercera parte de la tolemaica, no habiendo aumentado sino a 3 el número ν y habiendo disminuído sensiblemente las Δ^2; el número N de notas no es excesivamente elevado.

A partir de aquí, las $\Gamma_{ABIJ}^{3,5}$ y $\Gamma_{ABKL}^{3,5}$ conservan la coma inalterada, así como las Δ^2 que no disminuyen gran cosa; el número ν aumenta a 4 en la $\Gamma_{ABKL}^{3,5}$; pero además, estas gamas tienen respectivamente 28 y 35 notas. No es aconsejable aumentar el número N sin obtener, como se ve, ventajas sensibles.

Por lo dicho, es oportuno que digamos algo acerca de la mejor de estas gamas: la $\Gamma_{ABGH}^{3,5}$, cuyo correspondiente polígono ha sido rayado en la figura 7. Como se ve, este polígono contiene además de *ABCD*, otros dos trapecios congruentes a él, que son los que tienen sus bases menores en *EF* y *GH* respectivamente, y colocados en forma análoga al *ABCD*. Esto quiere decir que nuestra gama se compondrá de tres sistemas, cada uno de 7 notas, que constituyen una gama tolemaica. Las notas $\gamma^{3,5}_{A} = \gamma^{3,5}_{5,1}$ y $\gamma^{3,5}_{4,3}$ tienen los valores

$$\gamma^{3,5}_{A} = 0{,}24674\,\omega \qquad ; \qquad \gamma^{3,5}_{4,3} = 0{,}30563\,\omega\,,$$

de modo que su intervalo es 0,05889 ω. Así pues, al pasar del primer trapecio *ABCD* al segundo, y análogamente del segundo al tercero, las notas tolemaicas sufren una elevación de 0,05889 ω, que es lo que se llama un *semitono cromático*. Si distinguimos a las notas del primer trapecio con el signo ♭ (*bemol*) y a las del tercero con el signo # (*sostenido*) y reducimos todas las notas de modo que el *do* $= \gamma^{3,5}_{3,5}$ tenga el valor 0 ω, el cuadro completo de la $\Gamma^{3,5}_{ABGH}$ es el siguiente:

Denominación	Nota	Intervalo	Denominación	Nota	Intervalo
					0,05214
do	0,00000		*sol* ♭	0,52608	
		0,05890			0,05888
do #	0,05890		*sol*	0,58496	
		0,05214			0,05890
re ♭	0,11104		*sol* #	0,64386	
		0,05889			0,03424
re	0,16993		*la* ♭	0,67808	
		0,05889			0,05889
re #	0,22882		*la*	0,73697	
		0,03422			0,05890
mi ♭	0,26304		*la* #	0,79587	
		0,05889			0,05214
mi	0,32193		*si* ♭	0,84801	
		0,03422			0,05888
fa ♭	0,35615		*si*	0,90689	
		0,02468			0,03422
mi #	0,38083		*do* ♭	0,94111	
		0,03421			0,02468
fa	0,41504		*si* #	0,96579	
		0,05890			0,03421
fa #	0,47394		*do*	1,00000	

El intervalo $(\gamma^{3,5}_{Q_h}, \gamma^{3,5}_{P_k})$ mínimo se produce entre $\gamma^{3,5}_{8,0} = 0{,}67970$ y $\gamma^{3,5}_{3,6} = 0{,}68646$, siendo el primero un punto *Q* y el segundo un punto *P*. La coma vale, pues

$$\varepsilon = 0{,}68646 - 0{,}67970 = 0{,}00676\,\omega\,,$$

y, salvo diferencias de una coma, la gama presenta los siguientes intervalos y diferencias segundas:

Δ	Δ^2
0,02468	
	0,00954
0,03422	
	0,02467
0,05889	

Las características de nuestra gama son, pues:

$$\varepsilon = 0{,}00676\,\omega \quad ; \quad N = 21 \quad ; \quad \nu = 3 \quad ; \quad \Delta^2 = (0{,}00954 \; ; \; 0{,}02467)\,,$$

que resultan, por cierto, bastante satisfactorias.

27. — Como se ve, las consideraciones hechas sobre la $\Gamma^{3,5}$ y su atemperación no son sino generalizaciones de los conceptos análogos expuestos para la Γ^3 unidimensional. Hay aún otro punto, el referente a los acordes, que se transporta también a este caso.

Lo que caracteriza a la $\Gamma^{3,5}$ es su fundamento armónico, es decir, la presencia de los únicos armónicos fundamentales 3 y 5; para cada punto reticulado de nuestra representación gráfica (fig. 7), el armónico 3 de la nota correspondiente está representado por el punto vecino situado a la derecha sobre su misma horizontal, esto es, cuya abscisa es una unidad mayor y su ordenada la misma; y el armónico 5, por el punto vecino situado encima, cuya abscisa es la misma y la ordenada es una unidad mayor. Si el punto elegido tiene las coordenadas (n_1, n_2), sus armónicos 3 y 5 tendrán, por consiguiente, las coordenadas $(n_1 + 1, n_2)$ y $(n_1, n_2 + 1)$. Los tres puntos son los vértices de un triángulo rectángulo, y las notas correspondientes $\gamma^{3,5}_{n_1,n_2}$ $\gamma^{3,5}_{n_1+1,n_2}$, $\gamma^{3,5}_{n_1,n_2+1}$ dan un *acorde perfecto,* del cual $\gamma^{3,5}_{n_1 n_2}$ es la *nota fundamental.* Así por ejemplo, la gama de Tolomeo $\Gamma^{3,5}_{ABCD}$ contiene los siguientes acordes perfectos:

fa-la-do ; *do-mi-sol* ; *sol-si-re*

o sea:

$$(\gamma^{3,5}_{5,1}\,,\,\gamma^{3,5}_{5,2}\,,\,\gamma^{3,5}_{6,1}) \quad ; \quad (\gamma^{3,5}_{6,1}\,,\,\gamma^{3,5}_{6,2}\,,\,\gamma^{3,5}_{7,1}) \quad ; \quad (\gamma^{3,5}_{7,1}\,,\,\gamma^{3,5}_{7,2}\,,\,\gamma^{3,5}_{8,1})\,,$$

cuyas notas fundamentales son, respectivamente: $\gamma^{3,5}_{5,1} = fa$ (*Tol.*), $\gamma^{3,5}_{6,1} = do$ (*Tol.*), $\gamma^{3,5}_{7,1} = sol$ (*Tol.*).

La gama $\Gamma^{3,5}_{ABGH}$, que podemos llamar *gama tolemaica cromática* y abreviar *Tol. cr.*, presenta en cambio los siguientes acordes perfectos (en los cuales la primera nota escrita es la fundamental, y se sobreentiende la especificación *Tol. cr.*).:

fa♭-la♭-do♭ ; *do♭-mi♭-sol♭* ; *sol♭-si♭-re♭* ; *la♭-do♭-mi♭* ; *mi♭-sol-si♭* ;

fa-la-do ; *do-mi-sol* ; *sol-si-re* ; *la-do♯-mi* ; *mi-sol♯-si*;

fa♯-la♯-do♯ ; *do♯-mi♯-sol♯* ; *sol♯-si♯-re♯*.

Aquí se presenta, sin embargo, una circunstancia nueva. En los acordes anteriores, la nota fundamental *produce*, por así decir, sus armónicos 3 y 5 o, en el lenguaje de los músicos, su quinta y su tercera respectivamente. Pero también puede considerarse a la nota fundamental como *producida* por progresión de quintas y terceras; es decir, dada una nota fundamental, $\gamma^{3,5}_{n_1, n_2}$, podemos buscar una nota cuya quinta sea la nota dada, y otra cuya tercera sea también la nota dada. Es evidente que estas notas son, respectivamente, la $\gamma^{3,5}_{n_1-1, n_2}$ y la $\gamma^{3,5}_{n_1, n_2-1}$. Estas tres notas también caracterizan las cualidades armónicas de la $\Gamma^{3,5}$, y nos dan por consiguiente una nueva clase de acordes perfectos, que para diferenciar de los anteriores (a los que llamaremos ahora *mayores*) se llamarán *acordes perfectos* (o *tonales*) *menores*. Por ejemplo, a continuación damos los acordes menores de la gama tolemaica cromática, entre los cuales los no impresos en bastardilla son los de la gama tolemaica simple:

mi♭-do♭-la♭ ; *si♭-sol♭-mi♭* ; *do-la♭-fa* ; *sol-mi♭-do* ; *re-si♭-sol* ;

mi-do-la ; si-sol-mi ; *do♯-la-fa♯* ; *sol♯-mi-do♯* ; *re♯-si-sol♯*

mi♯-do♯-la♯ ; *si♯-sol♯-mi♯*.

Obsérvese que, geométricamente, los acordes perfectos menores están representados por triángulos rectángulos simétricos de los que representan a los mayores, con respecto al vértice rectángulo. Así, en el reticulado, los acordes mayor mi-sol♯-si y menor mi-do-la están ubicados en la posición que indica la figura 8, en que el triángulo correspondiente al acorde mayor ha sido rayado.

En la Γ^3 estudiada anteriormente, esta simetría no produce nada nuevo, pues el acorde está representado por un segmento, cuyo simétrico es un segmento análogo. Hay, sin embargo, una diferencia, pues en el acorde mayor la nota fundamental es la que produce su quinta, mientras que en el menor, la fundamental es la quinta de la otra, y en consecuencia, si el primer acorde se considera como

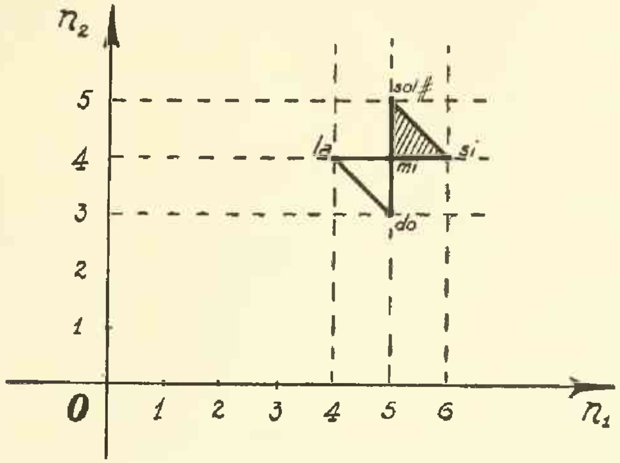

Fig. 8

ascendente, el segundo será descendente. Los músicos que sigan nuestros desarrollos reconocerán en esto un resabio de los *modos auténticos* y *modos plagales* de la música eclesiástica, basados en la misma gama, pero en los que permutaban sus papeles la tónica y su quinta. Esta distinción ha desaparecido ya para nosotros, y efectivamente, no tiene razón de ser allí donde la gama sea de dimensión superior a 1; o mejor dicho, está reemplazada por los modos mayor y menor, basados a su vez en los acordes respectivos.

28. — Una vez tratados (en lo que nos es necesario por ahora) los casos anteriores, ellos nos ilustran suficientemente sobre el método a seguir en el caso general, que vamos a tratar.

Sea, pues, una $\Gamma^{p_1, p_2, \ldots p_r}$ con los r armónicos fundamentales $p_1, p_2, \ldots, p_r$, de modo que los valores, en ω, de nuestras notas, estarán dados (§ 14) por:

$$\gamma^{p_1 p_2 \ldots p_r}_{n_1 n_2 \ldots n_r} = F\left(\sum_{i=1}^{r} n_i \pi_i\right),$$

donde

$$\pi_i = \log_2 p_i$$

En este caso, para efectuar una representación gráfica, no nos basta un eje o un diagrama plano como en los ejemplos tratados; puesto que tenemos r índices o coordenadas para las notas, tendremos que utilizar lo que llamamos un *espacio a r dimensiones*, o *r-dimensional*.

Claro es que este espacio, apenas sea $r > 3$, es una concepción abstracta, a la que podemos aplicar sin embargo las nociones de: punto, vector, rectas, planos, etc. en un sentido que, si bien es familiar para los matemáticos, no estará de más recordar siquiera someramente aquí, de acuerdo con los propósitos enunciados en la Introducción de este trabajo.

Un *punto* en un espacio r-dimensional no es sino un conjunto de r números dispuestos en un cierto orden. Podemos limitarnos, por ejemplo, a suponer que los números de que se trata sean reales. Así, en el caso $r = 4$, los números $\frac{2}{3}$; 1 ; -5 ; 2,3, dispuestos en este orden, definen un punto, que denotaremos *el punto* $\left(\frac{2}{3}\,; 1; -5; 2,3\right)$, y los números mismos se llamarán *primera, segunda,... r-ésima coordenada* del punto. Demás está decir que, como hemos supuesto dadas las coordenadas en un cierto orden, los mismos números dispuestos en otro orden definen otro punto; por ejemplo $\left(1\,; 2,3\,; \frac{2}{3}\,; -5\right)$ es otro punto distinto del anterior, en el espacio a 4 dimensiones.

Si indicamos con $x_1, x_2, \ldots, x_r$ las r coordenadas de un punto P, con $y_1, y_2, \ldots, y_r$ las de otro punto distinto Q, y formamos las expresiones

$$\begin{gathered} z_1 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)\, y_1 \quad , \quad z_2 = \lambda x_2 + \\ + (1 - \lambda)\, y_2 \quad , \quad \ldots , \quad z_r = \lambda x_r + (1 - \lambda)\, y_r \, , \end{gathered} \qquad [1]$$

donde λ es un número (real) variable a nuestra voluntad, para cada valor que atribuyamos a λ tendremos un sistema de valores de $z_1, z_2, \ldots, z_r$, y por tanto, un punto $(z_1, z_2, \ldots, z_r)$ del espacio. Si hacemos $\lambda = 1$, obtenemos $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2, \ldots, z_r = x_r$, es decir, el punto P; y en cambio para $\lambda = 0$ resulta $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2, \ldots$, $z_r = y_r$, o sea el punto Q. A los infinitos valores de λ corresponden así infinitos puntos, que por definición, constituyen una *recta*. Esta recta contiene a los puntos P y Q. Tenemos así verificado un postulado fundamental de la geometría: *dos puntos determinan una recta, que los contiene.*

En particular, el punto $O(0, 0, \ldots, 0)$ cuyas coordenadas son todas nulas, o sea el *origen*, y el punto $U_1(1, 0, \ldots, 0)$, cuya primera coordenada vale 1 y las demás 0, determinan la recta cuyos puntos tienen las coordenadas

$$z_1 = \lambda \, . \, 0 + (1 - \lambda) \, . \, 1 \quad , \quad z_2 = \lambda \, . \, 0 + (1 - \lambda) \, . \, 0 \quad , \quad \ldots ,$$
$$z_r = \lambda \, . \, 0 + (1 - \lambda) \, . \, 0 \, ,$$

esto es

$$z_1 = 1 - \lambda \quad , \quad z_2 = z_3 = \ldots = z_r = 0 \, ,$$

y esta recta, donde solo la primera coordenada tiene un valor arbitrario, mientras que las demás son nulas, se llama *primer eje coordenado*. Análogamente, el origen y el punto $U_2(0, 1, 0, \ldots, 0)$ determinan el *segundo eje coordenado*, en donde solo la segunda coordenada tiene un valor arbitrario y las demás son nulas, y así sucesivamente, hasta llegar al *r-ésimo eje coordenado, OU_r,* donde las coordenadas de U_r son $(0, \ldots, 0, 1)$.

Si en la recta (1) determinada por los puntos $P(x_1, \ldots, x_r)$, $Q(y_1, \ldots, y_r)$ tomamos dos puntos distintos (correspondientes a dos valores λ', λ'' del parámetro λ) tendremos las coordenadas:

$$\text{de } Z': \quad z'_1 = \lambda' x_1 + (1 - \lambda') y_1 \quad , \quad \ldots , \quad z'_r = \lambda' x_r + (1 - \lambda') y_r$$
$$\text{de } Z'': \quad z''_1 = \lambda'' x_1 + (1 - \lambda'') y_1 \quad , \quad \ldots , \quad z''_r = \lambda'' x_r + (1 - \lambda'') y_r ,$$

y si queremos ahora trazar la recta $Z'Z''$, las coordenadas de un punto cualquiera $V(v_1, \ldots, v_r)$ de ella serán:

$$v_1 = \mu z'_1 + (1 - \mu) z''_1 = \mu\lambda' x_1 + \mu (1 - \lambda') y_1 + (1 - \mu) \lambda'' x_1 + (1 - \mu)(1 - \lambda'') y_1 =$$
$$= [\lambda'' + \mu (\lambda' - \lambda'')] \, x_1 + [1 - \lambda'' - \mu (\lambda' - \lambda'')] \, y_1$$
$$v_2 = \mu z'_2 + (1 - \mu) z''_2 = \mu\lambda' x_2 + \mu (1 - \lambda') y_2 + (1 - \mu) \lambda'' x_2 + (1 - \mu)(1 - \lambda'') y_2 =$$
$$= [\lambda'' + \mu (\lambda' - \lambda'')] \, x_2 + [1 - \lambda'' - \mu (\lambda' - \lambda'')] \, y_2$$

. . . .

$$v_r = \mu z'_r + (1 - \mu) z''_r = \mu\lambda' x_r + \mu (1 - \lambda') y_r + (1 - \mu) \lambda'' x_r + (1 - \mu)(1 - \lambda'') y_r =$$
$$= [\lambda'' + \mu (\lambda' - \lambda'')] \, x_r + [1 - \lambda'' - \mu (\lambda' - \lambda'')] \, y_r ,$$

de modo que si ponemos:

$$\Lambda = \lambda'' + \mu (\lambda' - \lambda''),$$

se tendrá

$$1 - \Lambda = 1 - \lambda'' - \mu (\lambda' - \lambda''),$$

y

$$v_1 = \Lambda x_1 + (1 - \Lambda) y_1 \quad , \quad \ldots , \quad v_r = \Lambda x_r + (1 - \Lambda) y_r$$

Siendo arbitrario el valor del parámetro μ, también resulta tal el parámetro Λ, y entonces las coordenadas $v_1, \ldots, v_r$ solo en apariencia difieren de $z_1, \ldots, z_r$. En términos geométricos, hemos demostrado así la validez de otro postulado elemental, a saber: *dos puntos de una recta determinan la misma recta.*

(Continuará)

FUNDAMENTOS MATEMATICOS DE LA MÚSICA

Por A. E. SAGASTUME BERRA

*(Continuación *)*

Si ahora tomamos tres puntos $P(x_1, \ldots, x_r)$, $Q(y_1, \ldots, y_r)$, $R(z_1, \ldots, z_r)$ de tal modo que R no esté en la recta PQ, y formamos las combinaciones

$$u_1 = \lambda x_1 + \mu y_1 + (1 - \lambda - \mu) z_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad u_r = \lambda x_r + \mu y_r + (1 - \lambda - \mu) z_r \qquad [2]$$

el punto $U(u_1, u_2, \ldots, u_r)$, al variar los parámetros arbitrarios λ, μ, describe lo que se llama un *plano*. Luego: *tres puntos no alineados determinan un plano*, y podríamos demostrar asimismo que *tres puntos de un plano determinan el mismo plano.*

Si tomamos 4 puntos no coplanares, determinaremos en forma análoga un *espacio a 3 dimensiones*, todo contenido en el espacio r-dimensional; y así sucesivamente, de modo que en general $h + 1$ puntos que no estén en un espacio de $h - 1$ dimensiones determinan un espacio h-dimensional contenido en el espacio total. En particular, los espacios de $r - 1$ dimensiones se llaman *hiperplanos*, por su analogía con los planos (de 2 dimensiones) del espacio ordinario tridimensional.

Se pueden generalizar asimismo los teoremas sobre intersecciones de rectas, planos, etc., pero no necesitaremos esas generalizaciones.

Notemos que los puntos O, U_1 y U_2 por ejemplo, determinan un plano, de tal modo que las coordenadas de sus puntos, por las [2], serán

$$u_1 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 + (1 - \lambda - \mu) \cdot 0 \;\; ; \;\; u_2 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 + (1 - \lambda - \mu) \cdot 1 \; ;$$
$$u_3 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 + (1 - \lambda - \mu) \cdot 0 \quad ; \quad \ldots$$

o sea:

$$u_1 = \mu \quad ; \quad u_2 = 1 - \lambda - \mu \quad ; \quad u_3 = u_4 = \ldots = u_r = 0 \, .$$

* Ver T. CXXIII. Entregas I, II y III.

Análogamente, O, U_1 y $U_3(0, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ determinan un plano, las coordenadas de cuyos puntos son de la forma $(\mu, 0, 1-\lambda-\mu, 0, \ldots, 0)$, y así sucesivamente; son los *planos coordenados*, que contienen a los ejes coordenados y se cortan en ellos; así por ejemplo, los planos OU_1U_2 y OU_1U_3 se cortan en el eje OU_1, común a ambos. De la misma manera podrían definirse los *espacios coordenados h-dimensionales* para $h = 3, 4, \ldots, r-1$.

Si a las coordenadas según el eje OU_1 por ejemplo, de los puntos de una recta, un plano, etc. del espacio r-dimensional, se les suma una cantidad constante a_1, se obtiene nuevamente una recta, plano, etc., respectivamente (*paralelo* al anterior), que se dice obtenido del primero por *traslación* de magnitud a_1 en la dirección del eje OU_1 y análogamente respecto a los demás ejes; de tal modo que si a las coordenadas según OU_1 sumamos la cantidad a_1, a las coordenadas según OU_2 la cantidad a_2, etc., la nueva figura se dice obtenida por traslación de *componentes* $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$, y puede representarse esta traslación por un segmento dirigido desde el origen O al punto P de coordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$. El conjunto de segmentos dirigidos obtenidos de uno dado por medio de traslaciones se llama un *vector*, y queda determinado por sus componentes $(a_1, \ldots, a_r)$, o bien dando el origen y el extremo de uno de los segmentos dirigidos que lo representan.

29. — Aplicaremos estas nociones a nuestro problema, representando la nota $\gamma^{p_1 p_2 \ldots p_r}_{n_1 n_2 \ldots n_r}$ por el punto A de coordenadas $(n_1; n_2; \ldots; n_r)$ en el espacio r-dimensional, que llamaremos E_r para abreviar. La $\gamma^{p_1 \ldots p_r}_{n_1 \ldots n_r}$ puede entonces indicarse también con $\gamma^{p_1 \ldots p_r}_{A}$. Venimos a utilizar así solo los puntos de coordenadas enteras y no negativas de E_r, que forman un *reticulado*, análogo al reticulado recto o plano que vimos en los ejemplos, de tal modo que para cada punto existen *puntos vecinos*, que son los que se obtienen trasladando aquél en una unidad, positiva o negativamente, en el sentido de cada uno de los ejes. Es claro entonces que los puntos vecinos del punto $(n_1, n_2, \ldots n_r)$ serán los $2\,r$ puntos:

$$\begin{array}{ccc}
(n_1 - 1, n_2, \ldots, n_r) & ; & (n_1 + 1, n_2, \ldots, n_r) \\
(n_1, n_2 - 1, n_3 \ldots, n_r) & ; & (n_1, n_2 + 1, n_3, \ldots, n_r) \\
(n_1, n_2, n_3 - 1, n_4, \ldots, n_r) & ; & (n_1, n_2, n_3 + 1, n_4, \ldots, n_r) \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
(n_1, \ldots, n_{r-1}, n_r - 1) & ; & (n_1, \ldots, n_{r-1}, n_r + 1)\,.
\end{array}$$

Se observará que en cada una de estas expresiones varía una sola de las coordenadas, en una unidad positiva o negativa, con respecto a las coordenadas originales del punto.

Podemos definir el intervalo de dos notas, $\gamma^{p_1 \dots p_r}_{n_1 \dots n_r}$, $\gamma^{p_1 \dots p_r}_{m_1 \dots m_r}$, lo mismo que en el § 23, es decir, como el número $\gamma^{p_1 \dots p_r}_{m_1 \dots m_r} - \gamma^{p_1 \dots p_r}_{n_1 \dots n_r}$ o bien $1 - (\gamma^{p_1 \dots p_r}_{n_1 \dots n_r} - \gamma^{p_1 \dots p_r}_{m_1 \dots m_r})$, según cuál de ambas cantidades resulte positiva y menor que 1. Y entonces se verifica el siguiente

TEOREMA. — *El intervalo entre dos notas no varía trasladando arbitrariamente los puntos representativos en E_r.*

Dem.: Sea una traslación cualquiera de componentes $(a_1, a_2, \dots, a_r)$. Ella puede, como es natural, descomponerse en sucesivas traslaciones de a_1 unidades en dirección del primer eje, de a_2 unidades en dirección del segundo, ..., de a_r unidades en dirección del último eje. Y a su vez una cualquiera de éstas, por ejemplo la a_k en dirección del eje OU_k, se compone de traslaciones de ± 1 en dirección de ese eje. Bastará, pues, que demostremos que en una traslación de una unidad positiva en la dirección del eje OU_k no varía el intervalo, pues entonces tampoco variará en la traslación total.

La traslación unitaria en dirección OU_k significa reemplazar $\gamma^{p_1 \dots p_r}_{n_1 \dots n_r}$ por $\gamma^{p_1, \dots, p_k, \dots, p_r}_{n_1, \dots, n_k+1, \dots, n_r}$, es decir, hacer variar solo el índice n_k en una unidad, y análogamente para $\gamma^{p_1 \dots p_r}_{m_1 \dots m_r}$. Ahora bien: utilizando el Lema I del 16, se tiene:

$$\gamma_{m+1} - \gamma_{n+1} = \gamma^{p_1, \dots, p_k, \dots, p_r}_{m_1, \dots, m_k+1, \dots, m_r} - \gamma^{p_1, \dots, p_k, \dots, p_r}_{n_1, \dots, n_k+1, \dots, n_r} =$$

$$= F\left(\sum_i m_i \pi_i + \pi_k\right) - F\left(\sum_i n_i \pi_i + \pi_k\right) =$$

$$= F\left(\sum_i m_i \pi_i\right) + F(\pi_k) - \theta\left(\sum_i m_i \pi_i, \pi_k\right) - F\left(\sum_i n_i \pi_i\right) -$$

$$- F(\pi_k) + \theta\left(\sum_i n_i \pi_i, \pi_k\right) = \gamma_m - \gamma_n - \theta_m + \theta_n,$$

habiendo puesto, para abreviar:

$$\gamma_m = \gamma^{p_1, \dots, p_r}_{m_1, \dots, m_r} \; ; \; \gamma_n = \gamma^{p_1, \dots, p_r}_{n_1, \dots, n_r} \; ; \; \gamma_{m+1} = \gamma^{p_1, \dots, p_k, \dots, p_r}_{m_1, \dots, m_k+1, \dots, m_r}$$

$$; \; \gamma_{n+1} = \gamma^{p_1, \dots, p_k, \dots, p_r}_{n_1, \dots, n_k+1, \dots, n_r} \; ; \; \theta_m = \theta\left(\sum_i m_i \pi_i, \pi_k\right)$$

$$\theta_n = \theta\left(\sum_i n_i \pi_i, \pi_k\right).$$

Aquí pueden presentarse los siguientes casos:

a) $\theta_m = \theta_n$. Entonces $\gamma_{m+1} - \gamma_{n+1} = \gamma_m - \gamma_n$, y $1 - (\gamma_{n+1} - \gamma_{m+1}) = 1 - (\gamma_n - \gamma_m)$, de modo que los intervalos son iguales.

b) $\theta_m = 0$, $\theta_n = 1$. Luego $\gamma_{m+1} - \gamma_{n+1} = 1 - (\gamma_n - \gamma_m)$, de modo que $\gamma_n - \gamma_m$ debe ser positivo, pues de lo contrario $\gamma_{m+1} - \gamma_{n+1}$ sería mayor que 1, lo que es absurdo. Entonces el segundo miembro mide el intervalo (γ_n, γ_m), y el primero el $(\gamma_{n+1}, \gamma_{m+1})$, y ellos son por consiguiente iguales.

c) $\theta_m = 1$, $\theta_n = 0$. Entonces $\gamma_{m+1} - \gamma_{n+1} = \gamma_m - \gamma_n - 1$, o sea $1 - (\gamma_{n+1} - \gamma_{m+1}) = \gamma_m - \gamma_n$, y el razonamiento *b*) puede aplicarse permutando los papeles de los índices n y m con $n + 1$, $m + 1$. Ambos intervalos son nuevamente iguales. Y el teorema queda demostrado.

De este teorema resultan análogas consecuencias que en los ejemplos tratados. Si tomamos, por ejemplo, el eje OU_k, sobre él existe una gama unidimensional Γ^{p_k}. Sobre una recta cualquiera paralela a ese eje resultará existir entonces la misma Γ^{p_k}, solo que con distinta fundamental, puesto que tal recta puede obtenerse por traslación del eje. Si tomamos el plano OU_hU_k, sobre él existe una Γ^{p_h, p_k}, que se conservará en todo plano paralelo; y así sucesivamente.

Esto trae a su vez como consecuencia, en cuanto al problema de la atemperación de $\Gamma^{p_1 \cdots p_r}$, que los puntos representativos de la gama atemperada deben llenar realmente una porción del espacio E_r, sin estar contenidos en un espacio de menor número de dimensiones, pues si estuvieran contenidos, por ejemplo, en un hiperplano E_{r-1}, paralelo a $r - 1$ de los ejes coordenados, la gama no contendría en realidad más que los $r - 1$ armónicos fundamentales correspondientes a los $r - 1$ ejes, pero no el restante. Se trataría, pues, de una gama $r - 1$-dimensional.

Se puede decir, siguiendo un razonamiento análogo al que hicimos para el caso $r = 2$ en el § 24, que si tomamos en E_r, además del origen O, los puntos U_1, U_2, ..., U_r tales que en U_k la única coordenada no nula y que vale $+1$ es la que ocupa el lugar k (o sea, para abreviar, los *puntos-unidad* sobre cada uno de los ejes), la gama atemperada debe contener a todos esos puntos. Los tales puntos determinan en E_r una figura compuesta por esos puntos, las rectas que los unen dos a dos, los planos que los unen 3 a 3,..., los hiperplanos que los unen r a r; estos hiperplanos son en número de $r + 1$ (uno opuesto a cada uno de los puntos), y pueden llamarse *caras* de esa figura, que será en E_r lo análogo a un *poliedro* en el espacio ordinario. Como este poliedro tiene $r+1$ caras, lo llamaremos $r+1$-*edro* de E_r. Para tener una noción más clara de estos $r+1$-*edros*, piénsese en el caso $r=3$ (espacio E_3 ordinario) en donde la figura es un *tetraedro* formado por 4 puntos O, U_1, U_2, U_3, 6 aristas OU_1, OU_2, OU_3, U_1U_2, U_2U_3, U_3U_1 y 4 caras triangulares OU_1U_2, OU_2U_3, OU_3U_1, $U_1U_2U_3$.

Resulta, pues, que la gama atemperada, o por mejor decir, los puntos representativos en E_r, deben contener al menos un $r+1$-edro. En general, pues, esos puntos constituirán un cierto *poliedro a r dimensiones* Φ, que podremos llamar el *poliedro atemperante*.

Si la gama atemperada $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$ contiene en total N notas, el poliedro Φ contendrá en su interior y contorno, precisamente N puntos reticulares, que designaremos con P_1, P_2, ..., P_N. Entre los puntos vecinos a cada uno de estos *puntos P*, habrá ciertamente algunos exteriores a Φ, es decir, que no sean internos ni de contorno; a tales puntos los llamaremos, genéricamente, *puntos Q*, y si hay M de ellos, los indicaremos con Q_1, Q_2, ..., Q_M

Si formamos ahora los intervalos $(\gamma_{Q_h}^{p_1 \dots p_r}, \gamma_{P_k}^{p_1 \dots p_r})$ entre una nota correspondiente a un punto P_k (donde $k=1, 2, \dots, N$) y otra correspondiente a un punto $Q_h (h=1, 2, \dots, M)$, tendremos así NM valores de intervalos, que pueden no ser todos distintos. El mínimo de ellos será, por definición, la *coma* de $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$ y la indicaremos con ε. Cabe aquí repetir lo que se dijo en los casos $r=1$ y $r=2$: como la coma ε es el intervalo entre una nota γ_{P_k} *perteneciente* a la gama, y otra γ_{Q_h} que *no* le pertenece, ε representa una corrección a efectuar cuando se reemplaza γ_{Q_h} por γ_{P_k}, es decir, que la coma mide la *precisión* de la gama atemperada.

Naturalmente, el problema de la atemperación no consiste en calcular ε dado Φ, sino por el contrario: *dado un límite superior para la coma* ε, *determinar el poliedro* Φ *más conveniente, de modo que la coma no pase el valor fijado*, y se satisfagan además las condiciones que enunciamos a continuación.

Estas condiciones son independientes del número de dimensiones r, de modo que son las mismas que ya dimos para $r=1$ y $r=2$, y no vamos a repetir aquí las consideraciones ya hechas; solamente recordaremos que las condiciones son: *que el número total N de notas debe estar comprendido entre límites razonables, y que el número ν de diferencias primeras (corregidas dentro del error $\pm \varepsilon$) y la* *magnitud de las diferencias segundas* Δ^2 *de las notas, deben ser tan bajos como sea posible.* [Estos dos últimos caracteres, ν y Δ^2, son los que miden la *regularidad* de la $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$]

Finalmente, pueden generalizarse a este caso los conceptos de *acorde perfecto, mayor* y *menor,* que ya vimos en los ejemplos tratados. Preferimos, sin embargo, dejar para más adelante (Cap. V) estas cuestiones.

Capitulo IV

LAS GAMAS MUSICALES

30. — En el capítulo anterior hemos analizado el problema de la *atemperación* de una $\Gamma^{p_1 \dots p_r}$ dada, y hemos dado para este problema, no una solución, sino un criterio para obtener la $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$ utilizable musicalmente, de acuerdo con los principios acústicos del Cap. I, que nos sirvieron para construir en el Cap. II las $\Gamma^{p_1 \dots p_r}$, las cuales no son prácticamente utilizables.

La aplicación de ese criterio puede conducir a distintas soluciones del problema, como ya vimos en el caso de la Γ^3, que da origen a las gamas primitiva, de Pitágoras, y de Mersenne-Bosanquet, y la adopción de una solución en lugar de otra, depende principalmente de la precisión que quiera darse a la gama, o sea de la *coma* ε. Aquí aparece el rol fundamental del teorema del § 16: si existieran dos sistemas de valores de los índices $n_1, \dots, n_r$ o, en el lenguaje hiperespacial, dos puntos distintos A, B de E_r, tales que $\gamma_A^{p_1 \dots p_r} = \gamma_B^{p_1 \dots p_r}$ podríamos hallar un « ciclo » de notas desde la primera a la segunda, con una *coma cero.* Eso no es posible (cualesquiera sean los números primos $p_1, p_2, \dots, p_r$) pero puede obtenerse aproximadamente, con la aproximación que se desee, y esa aproximación está medida precisamente por la *coma.* Esta debe, pues, existir necesariamente; y si bien teóricamente puede disminuirse cuanto se quiera, ello se verifica a cambio de aumentar, a veces excesivamente, el número N de notas. Esto nos obliga a adoptar una solución intermedia, en la que N no sea excesivo ni ε demasiado grande; y tratando de satisfacen también a las condiciones secundarias respecto al número ν de intervalos o diferencias primeras, y a la magnitud Δ^2 de las diferencias segundas (véase el final del § 29 anterior).

Esto es, en resumen, lo que nos da la teoría expuesta. Ahora, en el presente capítulo, veremos cómo se comportan las distintas gamas conocidas con respecto a dichas conclusiones teóricas, haciendo en cada caso las observaciones y críticas que esas gamas nos sugieran.

Efectuemos ante todo una observación de carácter general. Si disponemos por orden creciente las notas de una *gama práctica* cualquiera, y hallamos sus diferencias de magnitud, o sea sus intervalos sucesivos, tendremos en todo caso un número finito de intervalos (número que, en el caso de las gamas atemperadas deducidas teóricamente hemos llamado ν). Por consiguiente, como el intervalo desde la nota fundamental hasta una nota cualquiera se compone de la suma de todos los intervalos sucesivos hasta dicha nota, tendremos que *existe siempre un número finito* ν *de intervalos* $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ *que, junto con la coma* ε, *nos permiten expresar toda nota* $\gamma_{n_1 \ldots n_r}^{p_1 \ldots p_r}$ *de la gama mediante una expresión del tipo*

$$\gamma_{n_1 \ldots n_r}^{p_1 \ldots p_r} = x_1 i_1 + x_2 i_2 + \ldots + x_\nu i_\nu \pm x \varepsilon , \qquad [1]$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_\nu, x$ *son números enteros y no negativos.* A todo sistema de intervalos $(i_1, i_2, \ldots, i_\nu, \varepsilon)$ (el último de los cuales es la coma) que goce de esta propiedad, lo llamaremos una *base* de la gama práctica o atemperada de que se trate.

Claro es que la base no está determinada unívocamente, pues, entre otras posibilidades, cabría la de tomar, en lugar de los intervalos $i_1, \ldots, i_\nu$, submúltiplos cualesquiera de ellos, por ejemplo:

$$i'_1 = \frac{i_1}{k_1} \; ; \; i'_2 = \frac{i_2}{k_2} \; ; \; \ldots \; ; \; i'_\nu = \frac{i_\nu}{k_\nu} \qquad (k_1 , \ldots , k_\nu \text{ enteros} > 0) ,$$

y entonces la [1] podría escribirse también

$$\gamma_{n_1 \ldots n_r}^{p_1 \ldots p_r} = (x_1 k_1)\, i'_1 + (x_2 k_2)\, i'_2 + \ldots + (x_\nu k_\nu)\, i'_\nu \pm x \varepsilon =$$
$$= x'_1 i'_1 + x'_2 i'_2 + \ldots + x'_\nu i'_\nu \pm x \varepsilon,$$

donde $x_1' = x_1 k_1, \ldots$ serían enteros y no negativos; es decir, que $(i'_1, \ldots, i'_\nu, \varepsilon)$ es también una base.

No obstante la indeterminación que existe en la elección de una base, podemos sin embargo utilizarla desde el punto de vista práctico, por la comodidad que representa; pero sin olvidar el inconveniente apuntado, así como el de que los intervalos $i_1, i_2, \ldots, i_\nu, \varepsilon$, que son siempre irracionales, están representados por fracciones decimales racionales, y por tanto aproximadas, lo que no hay que perder de vista cuando se trate de cálculos precisos.

31. — Comencemos por la gama *pentatónica* o primitiva. En la tabla del § 23 están indicadas sus notas que, como ya se dijo, toman los nombres *fa, sol, la, do, re:* como las mismas notas forman parte también de la gama de Pitágoras, no hay por qué denominarlas en especial « primitivas », sino simplemente, pitagóricas. El intervalo 0,16992 ω se llama el *tono* pitagórico, *tono* (*Pit.*), y es el intervalo *fa* (*Pit.*)-*sol* (*Pit.*) = *sol* (*Pit.*)-*la* (*Pit*) = *do* (*Pit.*)-*re* (*Pit.*). La coma de la gama primitiva, ε (*prim.*) = 0,07519 ω, que aparece en el carácter de un intervalo de la gama pitagórica, es el *semitono diatónico* (*Pit*) [1] o *lima* (*Pit.*). Según ya vimos, la gama primitiva contiene solo un intervalo de base ($\nu = 1$) y en consecuencia, toda nota de $\Gamma^3_{(0,4)}$ se expresa:

$$\left.\begin{array}{c} \gamma^3\,(\text{prim.}) = x_1 i_1 \pm x\,\varepsilon \\ i_1 = \text{tono (Pit.)} = 0.16992 \quad ; \quad \varepsilon = \text{lima (Pit.)} = 0.07519 \end{array}\right\} \qquad [2]$$

Así, se tiene:

$$\text{fa (Pit.)} = 0\,.\,i_1 + 0\,.\,\varepsilon \;\; ; \;\; \text{sol (Pit.)} = 1\,.\,i_1 + 0\,.\,\varepsilon \;\; ; \;\; \text{la (Pit.)} = 2i_1 + 0\,.\,\varepsilon$$

$$\text{do (Pit.)} = 3\,i_1 + 1\,.\,\varepsilon \;\; ; \;\; \text{re (Pit.)} = 4\,.\,i_1 + 1\,.\,\varepsilon \;\; ; \;\; 1\,\omega = 5\,i_1 + 2\,\varepsilon\,.$$

En cuanto al número de notas, $N = 5$, número de intervalos, $\nu = 1$, y magnitud de las diferencias segundas, $\Delta^2 = (0)$, la gama primitiva es muy satisfactoria. Desgraciadamente, la magnitud de la coma es excesiva. El intervalo 0,07519 no puede ser tomado como una « corrección », es demasiado grande; y como esta magnitud es la que debe ser considerada en primer término, de ahí que la $\Gamma^3_{(0,4)}$ haya perdido su interés práctico, desde la creación de la gama de Pitágoras, y no haya sido utilizada sino por pueblos en estado primitivo de su evolución.

En la $\Gamma^3_{(0,11)}$ de Pitágoras aparecen, además de las notas anteriores, otras intermedias, de tal modo que, conservando los valores

[1] Advertimos que los calificativos *diatónico, cromático,* serán usados más adelante en una significación más general. Aquí tienen, por ahora, la acepción que es corriente entre los músicos.

$\nu = 1$, $\Delta^2 = 0$, el número N es ahora 12, bastante aceptable, y además la coma disminuye a ε (*Pit.*) $= 0{,}01955\,\omega$. Este valor, en unión de la *lima* (*Pit.*) o *semitono diatónico* (*Pit.*) constituyen, como se ve en la tabla del § 23, una base de $\Gamma^3_{(0\,,\,11)}$. Es decir, que

$$\left.\begin{array}{c} \gamma^3 \text{ (Pit.)} = x_1 i_1 \pm x\varepsilon \\ i_1 = \text{lima (Pit.)} = 0.07519 \quad ; \quad \varepsilon = \text{coma (Pit.)} = 0{,}01955 \end{array}\right\} \quad [3]$$

Así por ejemplo, se tiene (ver § 23) :

$$\text{tono (Pit.)} = 2 i_1 + 1 \,.\, \varepsilon = 2 \times 0.07519 + 0.01955 = 0.16993\,\omega\,,$$

y el intervalo de *semitono cromático* (*Pit.*) o *apótome* (*Pit.*) es

$$\text{semitono cromático (Pit.)} = 0.09474\,\omega = 1 \,.\, i_1 + 1 \,.\, \varepsilon.$$

Un tono se compone, pues, de un semitono cromático más uno diatónico, o de dos diatónicos y una coma, o de dos cromáticos menos una coma.

La gama pitagórica es bastante mejor que la primitiva, y es una de las mejores que aún tenemos; esto explica, a nuestro modo de ver, su persistencia a través del tiempo y de los pueblos (1) : las gamas orientales, persa, turca, etc. tienen todas, aún hoy, un carácter netamente pitagórico. Sin embargo, su coma es aún algo excesiva.

Para obviar este inconveniente, dentro de la Γ^3, no hay otro recurso que la gama de Mersenne, u otras con mayor número de notas. Pero siendo ya muy grande este número, $N = 53$ para la gama de Mersenne, estas gamas no presentan interés práctico.

32. — Pasemos ahora al caso de la $\Gamma^{3,5}$. En la atemperación tolemaica, ya vimos que el número de intervalos-base es $\nu = 2$, y esos intervalos son: el $0{,}16993\,\omega$, que es el *tono* (*Pit.*) y que aquí toma también el nombre de *tono mayor* (*Tol.*), y el intervalo $0{,}09311\,\omega$, que se llama *semitono diatónico* (*Tol.*). Por consiguiente, toda nota tolemaica podrá expresarse mediante

$$\left.\begin{array}{l} \gamma^{3,5} \text{ (Tol.)} = x_1 i_1 + x_2 i_2 \pm x\varepsilon \\ \qquad i_1 = \text{tono mayor (Tol.)} = 0.16993\,; \\ \qquad i_2 = \text{semitono diatónico (Tol.)} = 0{,}09311 \\ \qquad \varepsilon = \text{coma (Tol.)} = 0.01792\,\omega\,. \end{array}\right\} \quad [4]$$

(1) MURRAY BARBOUR (XI).

La coma (Tol.) es aproximadamente 0,001 ω menor que la coma (Pit.). El otro intervalo secundario, 0,15200 ω que aparece en la gama tolemaica (ver § 25), se denomina *tono menor* (*Tol.*), y se tiene la equivalencia

$$\text{tono menor (Tol.)} = \text{tono mayor (Tol.)} - \text{coma (Tol.)} = i_1 - \varepsilon\,.$$

La $\Gamma^{3,5}_{ABCD}$ tolemaica es sumamente satisfactoria, ya sea por su pequeña coma, su reducido número de notas, $N = 7$, así como sus otros dos caracteres, $\nu = 2$, $\Delta^2 = (0{,}07681\ \omega)$.

Las notas de la $\Gamma^{3,5}_{ABCD}$ que figuran en la tabla del § 25 toman, como ya se dijo, los nombres: *re-mi-fa-sol-la-si-do,* en el orden en que están escritas en dicha tabla. Transformando sus magnitudes de modo que el *do* tenga la medida 0,00000 ω, lo que equivale a restar 0,83170 ω a todas las notas o a sus octavas, tendremos la nueva tabla ordenada siguiente:

Denominación	Nota	Intervalo	Denominación	Nota	Intervalo
					0.16992
do	0.00000		sol	0.58496	
		0.16993			0.15201
re	0.16993		la	0.73697	
		0.15200			0.16993
mi	0.32193		si	0.90690	
		0.09311			0.09310
fa	0.41504		do	1.00000	

Vemos así que los intervalos se disponen en este orden: tono mayor: do-re; tono menor; re-mi; semitono diatónico: mi-fa; tono mayor: fa-sol; tono menor: sol-la; tono mayor: la-si; semitono diatónico: si-do. O brevemente: dos tonos, un semitono, tres tonos y un semitono.

Esta sucesión de intervalos es lo que constituye la llamada *escala diatónica mayor* (sobreentendiendo *tolemaica*), y la posición de sus notas ha dado origen a la nomenclatura adoptada por los músicos para los intervalos. Así por ejemplo, a partir del *do* fundamental, los intervalos se designan de acuerdo con el número de notas que ellos limitan, incluyendo las extremas:

intervalo de *segunda*: do-re
» » *tercera*: do-mi
» » *cuarta*: do-fa ,

y así sucesivamente. Esta es la razón de las denominaciones adoptadas en el § 9.

Claro es que el intervalo re-mi por ejemplo, es también una segunda; pero del examen de la tabla resulta que es distinto de la segunda do-re; y surge entonces la necesidad de clasificar los distintos tipos de segundas, y lo mismo de las terceras, cuartas, etc., habiendo adoptado los músicos los calificativos de *mayores* y *menores*, *aumentadas* y *disminuídas*, *justas*, etc. En general, no nos interesan estas denominaciones sino en cuanto puedan hacer más claras para los músicos nuestras consideraciones; preferimos siempre dar la magnitud de los intervalos que consideremos, y si alguna vez nos apartamos de esta norma, será para « traducir » nuestras medidas abstractas a un lenguaje familiar al músico. Por lo demás, hay que tener buen cuidado de no confundir los intervalos homónimos de gamas distintas, y aún de la misma gama. Así por ejemplo, la quinta tolemaica do-sol $= 0{,}58496\,\omega = 1\,\chi$ (ver § 9) coincide con la pitagórica homónima, pero no con la quinta tolemaica re-la $= 0.56704\,\omega$; su diferencia es una coma tolemaica. En la misma $\Gamma^{3,5}_{ABCD}$ hay, como se aprecia de inmediato en la tabla anterior, tres clases de segundas que no hay que confundir y que son: el tono mayor, el menor y el semitono diatónico; asimismo, hay tres tipos de terceras, representados por los intervalos: do-mi $= 0{,}32193\,\omega$, re-fa $= 0{,}24511\,\omega$ y mi-sol $= 0{,}26304\,\omega$; estas dos últimas difieren solo en una coma (Tol.) y toman el nombre común de *terceras menores*, y la primera es la *tercera mayor*.

Si consideramos la otra posibilidad de atemperación de la $\Gamma^{3,5}$ (§ 26), que es la $\Gamma^{3,5}_{ABGH}$, o sea la *gama tolemaica cromática* (abreviado: *Tol. cr.*), según la denominación introducida en el § 27, tendremos los valores característicos:

$$\varepsilon = 0.00676\,\omega \quad ; \quad N = 21 \quad ; \quad \nu = 3 \quad ; \quad \Delta^2 = (0.00954\,\omega \quad ; \quad 0.02467\,\omega)\,,$$

como ya se vió en el § 26. Los tres intervalos-base de esta gama son:

$$\begin{aligned} i_0 &= 0.05889\,\omega = \textit{semitono cromático (Tol. cr.)} \\ i_1 &= 0.03422\,\omega = \textit{diesis enharmónica (Tol. cr.)} \\ i_2 &= 0.02468\,\omega\,. \end{aligned}$$

El intervalo i_2 no tiene un nombre especial. Por lo demás, al semitono cromático lo hemos denominado i_0, en contra de nuestra convención general, porque por ser

$$i_0 = i_1 + i_2,$$

en realidad podemos eliminar a i_0 de la base, y mantener solo i_1 e i_2. Así se tiene:

$$\left.\begin{array}{c} \gamma^{3,5}\,(Tol.\ cr.) = x_1 i_1 + x_2 i_2 \pm x \\ i_1 = \textit{diesis enharmónica}\ (Tol.\ cr.) = 0.03422\,\omega \quad ; \quad i_2 = 0.02468\,\omega \\ \varepsilon = 0.00676\,\omega\,. \end{array}\right\} \quad [5]$$

33. — Un caso sumamente interesante, y que nos ilustrará sobre el método hiperespacial del capítulo anterior, lo tenemos en la $\Gamma^{3,5,7}$ tridimensional y su atemperación. Las notas de esta gama tendrán por expresión

$$\gamma^{3,5,7}_{n_1,n_2,n_3} = F(\pi_1 n_1 + \pi_2 n_2 + \pi_3 n_3)$$

donde las constantes fundamentales son:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \log_2 3 = 1.58496 \\ \pi_2 &= \log_2 5 = 2.32193 \\ \pi_3 &= \log_2 7 = 2.80735\,, \end{aligned}$$

y por consiguiente:

$$\gamma^{3,5,7}_{n_1 n_2 n_3} = F\,(1.58496\,n_1 + 2.32193\,n_2 + 2.80735\,n_3)\,.$$

Las notas de esta gama podrán representarse, como vimos en el capítulo anterior, mediante los puntos reticulares del espacio ordinario E_3, y la atemperación se efectuará aquí mediante un poliedro ordinario Φ, cuyos puntos interiores y de contorno darán las notas de la $\Gamma^{3,5,7}_{\Phi}$ atemperada.

Precisamente, el Sr. Juan Domínguez Berrueta estudia este caso en dos publicaciones de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid [1], publicaciones cuya lectura recomendamos a quienes nos hayan seguido, ya que, además del punto especial que desarrollaremos ahora, contiene muchos puntos de vista interesantes y concordantes con los expuestos aquí.

El Sr. Domínguez Berrueta, basándose en distintas consideraciones, establece su gama *tetrarmónica*, como él la llama, que no es sino una $\Gamma^{3,5,7}_{\Phi}$ atemperada por medio del poliedro Φ que hemos representado

[1] (IV) y (V).

en la figura 9. Hay 17 puntos P, indicados en la figura con P_1 a P_{17}, y 42 puntos Q, que numeraremos Q_1 a Q_{42}, pero que no hemos representado en la figura, en obsequio a la claridad. En la tabla siguiente damos: las coordenadas de los puntos P, el valor y nombre de la correspondiente nota, y además, para cada punto P, los puntos Q que le corresponden y que no estén ya computados, así como los va-

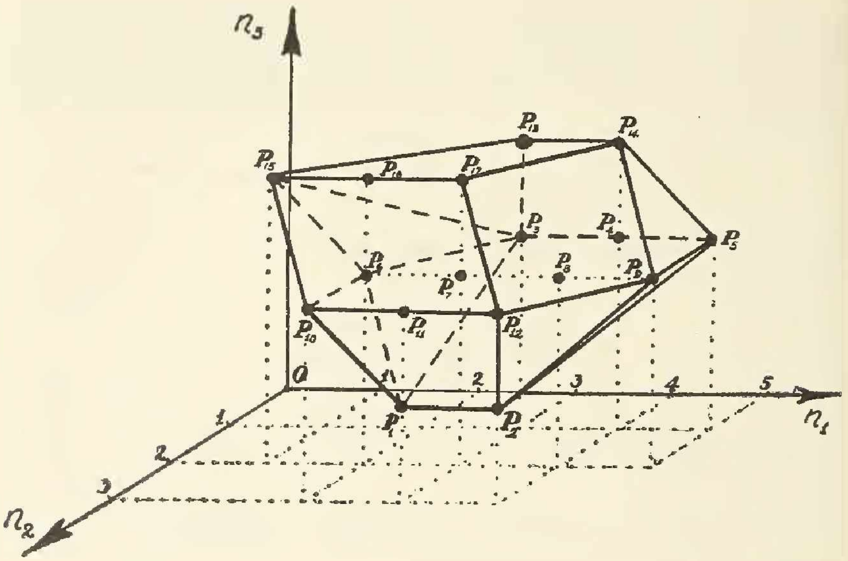

Fig. 9

lores $\gamma_{Q_h}^{3,5,7}$. Las coordenadas de los puntos vecinos a un P_k se obtienen modificando en $\pm$ 1 sucesivamente cada una de las coordenadas de P_k. Si éstas son (n_1, n_2, n_3), las de los puntos vecinos son: $(n_1 \pm 1, n_2, n_3)$, $(n_1, n_2 \pm 1, n_3)$, $(n_1, n_2, n_3 \pm 1)$; se obtienen así 6 puntos (según que se adopte el signo $+$ o el $-$) que pueden no ser todos puntos Q nuevos, pues pueden coincidir con otros puntos P u otros Q ya considerados.

La coma, mínimo de los intervalos $(\gamma_{Q_h}^{3,5,7}, \gamma_{P_h}^{3,5,7})$ vale aquí $\varepsilon = 0.00642\,\omega$, y se produce por ejemplo entre $\gamma_{Q_5}^{3,5,7}$ y $\gamma_{P_3}^{3,5,7}$.

Las notas $\gamma_{P_3}^{3,5,7}$ á $\gamma_{P_{12}}^{3,5,7}$, situadas en el plano $n_3 = 2$, tienen un carácter tolemaico, pues ese plano corta al poliedro Φ en una figura formada por un *trapecio tolemaico* (ver § 25) y la base de otro. Para la nota $\gamma_{P_{17}}^{3,5,7}$ adoptamos la denominación *te* en lugar de *la* $\#$, de acuerdo con lo que propone el Sr. Domínguez Berrueta en los trabajos citados ([1]). Además adoptaremos para todas esas notas la abreviatura (*D. B.*), en homenaje a dicho autor, a quien se debe, como dijimos, la $\Gamma^{3,5,7}_{\Phi}$.

Punto P_k	$\gamma^{3,5,7}_{P_k}$	Puntos Q_h	$\gamma^{3,5,7}_{Q_h}$
P_1 (3,3,1) = = sol ♭	0.52802	Q_1 (2,3,1)	0.94306
		Q_2 (3,2,1)	0.20610
		Q_3 (3,4,1)	0.84995
		Q_4 (3,3,0)	0.72067
P_2 (4,3,1) = = re ♭	0,11299	Q_5 (5,3,1)	0.69795
		Q_6 (4,2,1)	0.79106
		Q_7 (4,4,1)	0.43491
		Q_8 (4,3,0)	0.30563
P_3 (3,1,2) = = la ♭	0.69152	Q_9 (2,1,2)	0.10656
		Q_{10}(3,0,2)	0.36960
		Q_{11}(3,1,1)	0.88417
P_4 (4,1,2) = = mi ♭	0.27649	Q_{12}(4,0,2)	0.95456
		Q_{13}(4,1,1)	0.46913
P_5 (5,1,2) = = si ♭	0.86145	Q_{14}(6,1,2)	0.44641
		Q_{15}(5,0,2)	0.53952
		Q_{16}(5,1,1)	0.05409
		Q_{17}(5,1,3)	0.66880
P_6 (2,2,2) = = fa	0.42849	Q_{18}(1,2,2)	0.84353
		Q_{19}(2,2,1)	0.62113
P_7 (3,2,2) = = do	0.01345	—	—
P_8 (4,2,2) = = sol	0.59841	Q_{20}(4,2,3)	0.40577

Punto P_k	$\gamma^{3,5,7}_{P_k}$	Puntos Q_h	$\gamma^{3,5,7}_{Q_h}$
P_9 (5,2,2) = = re	0.18338	Q_{21}(6,2,2)	0.76834
		Q_{22}(5,3,2)	0.50530
		Q_{23}(5,2,1)	0.37602
		Q_{24}(5,2,3)	0.99073
P_{10}(2,3,2) = = la	0.75042	Q_{25}(1,3,2)	0.16546
		Q_{26}(2,4,2)	0.07235
		Q_{27}(2,3,3)	0.55777
P_{11}(3,3,2) = = mi	0.33538	Q_{28}(3,4,2)	0.65731
		Q_{29}(3,3,3)	0.14273
P_{12}(4,3,2) = = si	0.92034	Q_{30}(4,4,2)	0.24227
		Q_{31}(4,3.3)	0.72770
P_{13}(3,1,3) = = fa ♯	0.08384	Q_{32}(2,1,3)	0.91392
		Q_{33}(3,0,3)	0.17695
		Q_{34}(3,1.4)	0.30623
P_{14}(4,1,3) = = do ♯	0,08384	Q_{35}(4,0,3)	0.76191
		Q_{36}(4,1,4)	0.89120
P_{15}(1,2,3) = = sol ♯	0.65088	Q_{37}(0,2,3)	0.06592
		Q_{38}(1,1,3)	0.32895
		Q_{39}(1,3,3)	0.97281
		Q_{40}(1,2,4)	0.45824
P_{16}(2,2,3) = = re ♯	0,23584	Q_{41}(2,2,4)	0,04320
P_{17}(3,2,3) = = te	0.82801	Q_{42}(3,2,4)	0.62816

Disponiendo las $\gamma^{3,5,7}_{P_k}$ por orden creciente, y de modo que *do* (*D. B.*) $= 0{,}00000\ \omega$ (lo que equivale a restar todas el valor $\gamma^{3,5,7}_{P_7} = 0{,}01345\ \omega$) tendremos las notas siguientes:

([1]) La razón de esa denominación es análoga a la que tienen las demás notas usadas hasta hoy. Esas denominaciones fueron tomadas por Guido Aretino de las primeras sílabas de los versos del himno a San Juan, de autor desconocido:

Ut queant laxis *mi*ra gestorum *sol*ve polluti Sanc*te* Johannes.
*re*sonare fibris *fa*muli tuorum *la*bii reatus

Denominación	Nota	Intervalo	Denominación	Nota	Intervalo
					0.02914
do (*D.B.*)	0.00000		sol♭ (*D.B.*)	0.51457	
		0.07039			0.07039
do♯ »	0.07039		sol »	0.58496	
		0.02915			0.05247
re♭ »	0.09954		sol♯ »	0.63743	
		0.07039			0.04064
re »	0.16993		la♭ »	0.67807	
		0.05246			0.05890
re♯ »	0.22239		la »	0.73697	
		0.04065			0.07039
mi♭ »	0.26304		te »	0.80736	
		0.05889			0.04064
mi »	0.32193		si♭ »	0.84800	
		0.09311			0.05889
fa »	0.41504		si »	0.90689	
		0.07039			0.09311
fa♯ »	0.48543		do »	1.00000	

Teniendo en cuenta el valor de la coma, los intervalos distintos Δ, y las Δ^2, son:

Δ	Δ^2
0.02915	
	0.01149
0.04064	
	0.01825
0.05889	
	0.01150
0.07039	
	0.02272
0.09311	

y por tanto, las características de $\Gamma_{\Phi}^{3,5,7}$ son:

$$\varepsilon = 0.00642\,\omega \ ; \ N = 17 \ ; \ \nu = 5 \ ; \ \Delta^2 = (0.01149 \ ; 0.01825 \ ; 0.02272).$$

La comparación de esta gama con la $\Gamma_{ABGH}^{3,5}$ muestra su superioridad. En efecto, la coma (D. B.) es algo menor que la coma (Tol.), lo mismo que el número N de notas; y si bien ν es algo mayor, las Δ^2 son sensiblemente menores.

De lo dicho se desprende que una base de $\Gamma_{\Phi}^{3,5,7}$ está constituída por los intervalos:

$$i_1 = 0.09311\,\omega = \textit{lima menor (D. B.)}$$

$$i_2 = 0.07039\,\omega = \textit{diesis cromática mayor (D. B.)}$$

$$i_3 = 0.05889\,\omega = \textit{diesis cromática media (D. B.)}$$

$$i_4 = 0.04064\,\omega = \textit{diesis enharmónica mayor (D. B.)}$$

entre los cuales no hemos tomado el intervalo 0,02915 ω debido a que éste se puede expresar mediante los demás: 0,02915 $\omega = i_4 - i_2 + i_1$. Luego:

$$\left.\begin{aligned} &\gamma^{3,5,7}\ (D.\ B.) = x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 + x_4 i_4 \pm x\,\varepsilon \\ &i_1 = \textit{lima menor}\ (D.\ B.) = 0.09311\,\omega \\ &i_2 = \textit{diesis cromática mayor}\ (D.\ B.) = 0.07039\,\omega \\ &i_3 = \textit{diesis cromática media}\ (D.\ \ .) = 0.05889\,\omega \\ &i_4 = \textit{diesis enharmónica mayor}\ (D.\ B.) = 0.04064\,\omega \\ &\varepsilon = \textit{coma}\ (D.\ B.) = 0.00642\,\omega \end{aligned}\right\} \qquad [6]$$

Los $r + 1$-*edros* del § 29 son aquí tetraedros ($r = 3$), de tal modo que las notas cuya representación constituye sus vértices, forman los *acordes perfectos mayores*. La $\Gamma_{\Phi}^{3,5,7}$ contiene los siguientes:

(P_3, P_4, P_7, P_{13}) = la♭-do-mi♭-fa# ; (P_4, P_5, P_8, P_{14}) = mi♭-sol-si♭-do# ;

$(P_6, P_7, P_{10}, P_{16})$ = fa-la-do-re# ; $(P_7, P_8, P_{11}, P_{17})$ = do-mi-sol-te ;

en cambio, si consideramos los tetraedros simétricos, obtenidos llevando desde cada punto los vectores unitarios *negativos* en la dirección de cada uno de los ejes, tendremos los *acordes perfectos menores* (véase Cap. V) ; éstos son:

$(P_{11}, P_{10}, P_7, P_1)$ = mi-la-do-sol♭ ; $(P_{12}, P_{11}, P_8, P_2)$ = si-sol-mi-re♭ ;

$(P_{17}, P_{16}, P_{13}, P_7)$ = te-fa#-re#do .

En el capítulo V desarrollaremos estos conceptos.

(Continuará)

FUNDAMENTOS MATEMATICOS DE LA MÚSICA

Por A. E. SAGASTUME BERRA

*(Continuación *)*

34. — En todos los casos que hemos venido tratando, las gamas (atemperadas) obtenidas son, por decir así, *naturales,* en el sentido de que ellas responden a los principios acústicos expuestos en los capítulos I y II, que deben constituir el fundamento lógico (así lo creemos) de la teoría musical. Además, esas gamas presentan otra particularidad que acentúa esa naturalidad. Dicha particularidad es la siguiente: en cada una de ellas aparecen como armónicos primarios, *todos* los números primos hasta un cierto valor: por ejemplo, en las gamas primitiva y pitagórica, los armónicos 2 y 3; en las tolemaicas, 2, 3 y 5; en la de Domínguez Berrueta, 2, 3, 5 y 7; se podría construir una gama con los armónicos 2, 3, 5, 7 y 11, o bien 2, 3, 5, 7, 11 y 13, y así sucesivamente.

Ahora bien, no excluímos la posibilidad de una gama en la cual aparezca un determinado armónico, sin que estén presentes al mismo tiempo algunos armónicos más bajos; por ej., una $\Gamma^{3,11}$, ó $\Gamma^{3,5,13}$, ó Γ^{19}, etc.

Es lógico que estas gamas naturales posibles no presenten, digámoslo así, una « musicalidad » tan perfecta como las anteriores. Por ejemplo, en una $\Gamma^{3,11}$, el músico notará la ausencia de las características terceras tolemaicas, v. gr. do-mi (Tol.), debidas al armónico 5, y le parecerá extraño que un acorde tonal de esta gama sea el do-fa♯-sol (bien entendido, este fa♯ no coincide con ninguna de las notas homónimas que hemos encontrado). Sin embargo, opinamos que al artista puede convenir, en determinadas ocasiones, un conjunto de sonidos tan fuera de nuestros hábitos, precisamente para expresar alguna idea o sentimiento que intervenga en su obra.

Como ejemplo, daremos una Γ^{13} atemperada, muy satisfactoria de acuerdo con los criterios generales que hemos establecido, y que será

(*) Ver Tomo CXXIII y sig.

sumamente extraña y fuera de lo común debido a la ausencia de los armónicos inferiores 3, 5, 7 y 11.

Los valores de las $\gamma_{n_1}^{13}$, teniendo en cuenta que el $\log_2 13 = 3,70044$, serán

$$\gamma_{n_1}^{13} = F\,(3.70044\,n_1)\,,$$

o sea:

n_1	$\gamma_{n_1}^{13}$	n_1	$\gamma_{n_1}^{13}$
0	0.00000	6	0.20264
1	0.70044	7	0.90308
2	0.40088	8	0.60352
3	0.10132	9	0.30396
4	0.80176	10	0.00440
5	0.50220	....	......

La gama atemperada $\Gamma_{(0,9)}^{13}$ tiene por consiguiente una coma $\varepsilon = 0,00440\,\omega$, inferior a todas las anteriores. Disponiendo las $\gamma_{n_1}^{13}$ por orden creciente, se ve que las notas de la gama pueden representarse por

$$\gamma^{13}\,(0,9) = x_1 i_1 \pm x\,\varepsilon$$

donde

$$i_1 = 0.10132\,\omega$$

es el único intervalo entre las notas consecutivas. Por tanto se tiene:

$$\varepsilon = 0.00440 \quad ; \quad N = 10 \;;\quad \nu = 1 \quad ; \quad \Delta^2 = (0)\,,$$

características que son, en sí, mejores que todas las encontradas con anterioridad.

No obstante, repitámoslo, el carácter de esta gama será sin duda extraño, viéndose menoscabada su « naturalidad » por la ausencia de los armónicos inferiores.

35. — Esa falta de naturalidad es, con todo, menos grave que en algunas gamas que vamos a ver ahora, y que gozan sin embargo de gran aceptación. Por lo menos, la $\Gamma_{(0,0)}^{13}$ dada a título de ejemplo en el § anterior, responde a principios acústicos y lógicos aceptables. En cambio, las gamas que vamos a ver ahora provienen de admitir ciertas convenciones cuya aceptabilidad constituirá, precisamente, uno de nuestros puntos fundamentales de discusión.

Comencemos por la llamada ordinariamente *gama atemperada*. Esta gama tiene una importancia enorme en nuestra música actual, pues según ella están afinados todos los instrumentos llamados « de sonidos fijos », el piano por ejemplo.

Dado que las gamas de Pitágoras y Tolomeo (o de Zarlino, o de los físicos) poseen, como necesariamente debe suceder, una *coma*, o sea una corrección a efectuar en una forma oportuna a fin de cerrar el ciclo de notas de la gama, pueden darse para el problema de la atemperación otras soluciones que no responden a los principios que venimos desarrollando.

Una de esas soluciones (no la única, ni siquiera la mejor, como veremos) consiste en dividir sencillamente la octava en 12 intervalos iguales. Cada uno de estos intervalos se llama un *semítono atemperado*, abreviado *semitono* (*at.*), y, como vimos en el § 9, su valor en ω es:

$$\alpha = \frac{1}{12} = 0.08333\ \omega\ .$$

Está, pues, comprendido entre la lima (Pit.) = 0,07519 ω y el semitono diatónico (Tol.) = 0,09311 ω. Como 12 α = 1 ω, se podrán definir en la octava, 12 notas separadas una de otra por un semitono (at.), y constituir así la llamada *gama atemperada*, cuyas notas se expresan todas en función de la base α, y son:

do (at.) = 0	fa♯ (at.) = sol♭ (at.) = 6 α
do♯ (at.) = re♭ (at.) = α	sol (at.) = 7 α
re (at.) = 2 α	sol♯ (at.) = la♭ (at.) = 8 α
re♯ (at.) = mi♭ (at.) = 3 α	la (at.) = 9 α
mi (at.) = 4 α	la♯ (at.) = si♭ (at.) = 10 α
fa (at.) = 5 α	si (at.) = 11 α .

Claro es que esta escala no responde a los principios que hemos establecido: con α, todos los intervalos de que consta son *racionales*, y en consecuencia, ninguno de ellos puede expresarse bajo la forma $F(\Sigma\pi_i n_i)$, es decir, no existen las $\pi_i = \log_2 p_i$ y por tanto, tampoco los armónicos generadores p_i.

Obsérvese que aquí nos estamos refiriendo a intervalos medidos en ω, y no a las relaciones de frecuencias. Es menester tener ésto muy presente para refutar a un posible defensor de la gama atemperada, que quisiera argumentar basado en la mayor sencillez que implican las relaciones racionales. No negamos el valor de este razonamiento, sino que merced a la observación hecha, lo vemos volverse en contra de quien lo esgrima. En efecto, la definición de la unidad ω y el hecho de medir en esta unidad los intervalos, no es sino un artificio matemático, cómodo sin duda (y fecundo, según vemos); pero no olvidemos que el fundamento de tales medidas está en la relación de frecuencias, y si expresamos por sus relaciones de frecuencias los intervalos pitagóricos, tolemaicos y de Domínguez Berrueta, veremos aparecer números racionales muy simples: $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}$, etc. mientras que los intervalos de la gama atemperada serían *irracionales* tan complicados como $\sqrt[12]{2}, \sqrt[6]{2}, \sqrt[12]{2^5}$, etc. Es decir, que el carácter racional o irracional de un intervalo se invierte a veces, como en en este caso, según que lo midamos por su relación de frecuencias o en octavas.

Ya que la gama atemperada no responde a los principios acústicos, naturales y lógicos, desarrollados aquí, podemos preguntarnos a qué principios responde. Más en concreto: ¿en base a qué debe aceptarse la división de la octava en partes iguales? ¿Por qué han de ser precisamente 12 esas partes, y no otro número?

Lo único que puede aducirse para responder a la primera cuestión es la « sencillez » de la solución que así se da al problema de la atemperación. Ya hemos visto que la tal « sencillez » se refleja en la existencia de intervalos que precisamente se caracterizan por su complejidad. Pero aún admitiendo el argumento: ¿a qué precio se obtiene esa sencillez? No existen ya intervalos estrictamente consonantes, es en rigor absurdo decir que *do-mi-sol* (*at.*) sea un acorde perfecto mayor. Más aún, al dar este acorde en un instrumento, el do (at.) por ejemplo, suena conjuntamente con sus armónicos naturales, y el quinto de ellos, que es el mi (Tol.) = 0,32193, choca con el mi (at.) = 0,33333, produciendo una disonancia durísima. Esto es particularmente notable en el órgano, por ejemplo, donde los dos sonidos de frecuencias próximas producen una *pulsación* o *temblequeo* sumamente desagradable.

Pero aún admitiendo la división en partes iguales, queda la segunda cuestión: ¿por qué han de ser precisamente 12 las notas? La única razón que se nos alcanza en esto es de índole histórica, o por mejor decir, atávica. La gama de Pitágoras, que gozó de gran boga en la Edad Media especialmente gracias a los trabajos teóricos de Boecio (siglo VI), contiene 12 notas; y entonces es lógico que posteriormente, al introducirse en tiempos de Bach y Rameau la gama atemperada, lo más conveniente desde el punto de vista práctico fuera conservar esa división de 12 partes. Pero en realidad hay rastros de otras divisiones, en 43, en 17, en 19 partes, etc. Y no hay razón para que así no sea, si se admite la división en partes iguales, «a la manera de una escala termométrica», según expresión del Sr. Domínguez Berrueta (V).

El argumento más fuerte que en su favor tiene la gama atemperada, y que tal vez fué el que decidió a adoptarla a Bach y Rameau, es la posibilidad de la *transposición*, en los instrumentos de sonidos fijos. Expliquemos un poco este punto: la gama atemperada es perfectamente uniforme en toda su extensión; o, dicho más claramente: cualquiera sea la nota que se tome como origen, los intervalos sucesivos son todos iguales a α, y por tanto, se distribuyen de la misma manera en todos los casos. De ahí resulta la posibilidad de trasladar o *transportar* una melodía cualquiera, de un lugar a otro de la escala, conservándose exactamente los intervalos que componen esa melodía. Esto no es posible, por ejemplo, en la gama tolemaica cromática, pues si suponemos que una melodía comience, pongamos por caso, con las notas *do, fa, mi♭*, tendremos, según la tabla del § 26, los intervalos:

$$\text{do-fa} = 0.41504\,\omega \quad ; \quad \text{fa-mi}\flat = -0.15200\,\omega\ ,$$

y si buscamos otra nota de origen para reproducir los mismos intervalos, solo tenemos como posibles las siguientes transposiciones: do# fa#-mi ; mi♭-la♭-sol♭ ; mi-la-sol ; mi#-la#-sol# ; sol-do-si♭ ; sol#-do#-si ; si♭ mi♭-re♭ ; si-mi-re ; si#-mi#-re# ; mientras que por ej. la melodía fa#-si-la no sería una transposición de la dada, pues fa#-si = 0,43295 ω, si-la = — 0,16992 ω. Y naturalmente, si la melodía dada contuviera más notas, las posibilidades de transposición se reducirían.

Es indudable que en ninguna gama natural, ni aún en la $\Gamma^{13}_{(0,9)}$, notable por su regularidad, se presenta semejante posibilidad ilimitada de transposición. Pero ¿es que la transposición tiene tan grande importancia que se le deban sacrificar principios acústicos fundamentales, como los que llevamos expuestos? La respuesta parece, por lo menos, dudosa. Por el contrario, séanos permitido creer que, respetando esos principios acústicos y sacrificando en cambio la transposición estricta, no siendo posible sino una transposición aproximada, como en el caso tolemaico antes tratado do-fa-mi♭ → fa♯-si-la, ganaríamos en riqueza de medios artísticos en lugar de perder. Una misma melodía podrá presentarse entonces en diferentes *modos* (véase lo que decimos en el capítulo VI), con otros tantos matices, dando así una música más rica que si la transposición se redujera a una repetición estricta a otra altura.

Mucho más podríamos decir con respecto a la gama atemperada; creemos, sin embargo, que es suficiente con lo anterior, a lo que agregaremos una última observación. Es dudoso hasta qué punto la afinación de los instrumentos responde hoy día a la gama atemperada. En efecto, una vez tomado el punto de partida, por ejemplo el *la* normal de 435 vibraciones por segundo, las demás notas de un instrumento se afinan a oído, y con el auxilio también de las pulsaciones producidas entre dos sonidos; y ambos medios, el oído y las pulsaciones, se rigen por los fenómenos naturales de los armónicos, es decir, caen dentro de lo que venimos exponiendo. Es, pues, más que probable que la afinación de un instrumento tenga, aún hoy, un carácter pitagórico o tolemaico, alejado sin duda de la atemperación « termométrica » ideal de la gama atemperada.

36. — Si nos hemos extendido un tanto en las razones que hemos dado en contra de la gama atemperada, es porque ellas se aplican, *mutatis mutandis*, a toda una serie de procedimientos artificiales de atemperación que, siendo más o menos malos que la división en partes iguales, poseen análogos inconvenientes. Citaremos varios ejemplos [1].

Como hemos visto, o mejor dicho, como resulta de las consideraciones de los §§ 25 y 26, una vez que se han tomado a partir de una nota cualquiera cuatro quintas pitagóricas, es necesario disminuir una coma tolemaica para obtener exactamente la tercera tolemaica; o, en números,

$$4\chi - \varepsilon\,(\text{Tol.}) - 2\omega = 4 \times 0.58496 - 0.01791 - 2 = 0.32193\ \varepsilon = \tau$$

(véase § 10). Si en lugar de corregir en 0,01791 ω cada cuatro quin-

[1] Para más detalles, consúltese J. MURRAY BARBOUR (XI).

tas, corregimos cada quinta en $\frac{1}{4}$ ε (*Tol.*), obtendremos el mismo resultado final, aunque claro es que no las mismas notas intermedias. Este sistema de atemperación toma el nombre de *entonación media*, o *atemperación media*, y tiene el inconveniente de dar notas, en general, demasiado bajas con respecto a las de la gama tolemaica cromática.

Tiene, por lo demás, defectos análogos a la atemperación común, aunque es algo mejor pues conserva algunos intervalos naturales, en especial las terceras tolemaicas. Puede, pues, decirse que algunas de sus notas pertenecen a la Γ^5 pero en cambio desaparecen las quintas justas, y con ellas toda traza del armónico 3, más importante que el 5. Puede decirse que en la entonación media hay acordes tonales, que constan de una nota y su tercera justa.

El español Francisco de Salinas (siglo XVI) y el italiano Zarlino han estudiado, no sólo esta entonación media, sino también otros dos tipos, en que cada quinta es corregida en $\frac{2}{7}$ ó en $\frac{1}{3}$ de coma sintónica, de los cuales parece ser preferible el último. Se viene así a caer en la división en 19 intervalos propiciada por Aristoxeno, el adversario de Pitágoras. En efecto, $1\,\chi - \frac{1}{3}\,\varepsilon$ (Tol.) $= 0{,}58496 - 0{,}00597 = 0{,}57899\,\omega$, que coincide muy aproximadamente con la undécima nota aristoxénica, pues $\frac{11}{19} = 0{,}57895\,\omega$.

Otro procedimiento es el de Grammateus, quien conserva las notas pitagóricas llamadas *diatónicas*, do-re-mi-fa-sol-la-si, e intercala las cromáticas do# = re♭, re# = mi♭, fa# = sol♭, sol# = la♭, la# = si♭, dividiendo en dos partes iguales los intervalos entre las notas diatónicas. Al contrario de la entonación media, sus notas son, en general, demasiado altas. Posee acordes tonales pitagóricos, formados por las quintas que contiene.

37. — Mucho más natural es la gama del español Ramos Pareja (siglo XV), quien conserva todas las quintas pitagóricas entre las notas diatónicas, a excepción de la quinta sol-re, a la cual corrige en una *coma* (*Tol.*). Puede decirse entonces que esta gama se funda en los armónicos naturales 3 y 5, y precisamente cae bajo nuestra teoría general de la atemperación. Es una $\Gamma^{3,5}_{MNRS}$, designando con *MNRS* el paralelógramo indicado en la figura 10. Hay 12 puntos *P*,

y 18 puntos Q, que hemos indicado también en la figura. Lo mismo

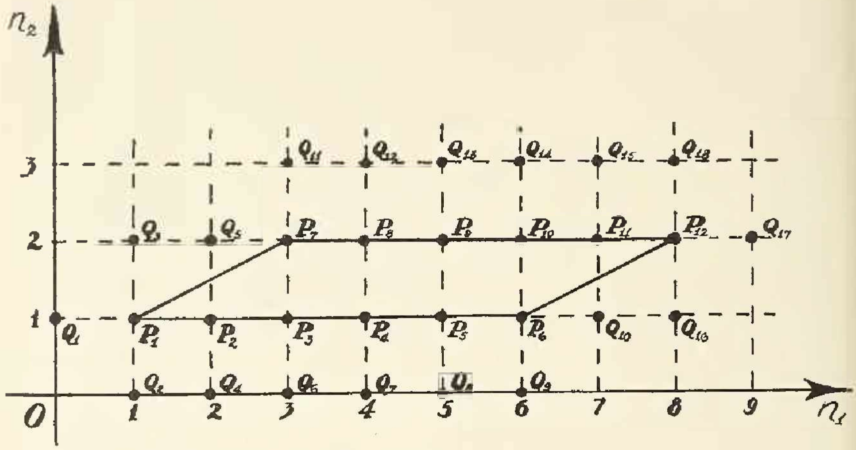

Fig. 10

que hemos hecho en casos anteriores, damos a continuación la tabla correspondiente:

Punto P_k	$\gamma^{3,5}_{P_k}$	Puntos Q_h	$\gamma^{3,5}_{Q_h}$	Punto P_k	$\gamma^{3,5}_{P_k}$	Puntos Q_h	$\gamma^{3,5}_{Q_h}$
P_1 (1,1) = = la♭	0.90689	Q_1 (0,1) Q_2 (1,0) Q_3 (1,2)	0.32193 0.58496 0.22882	P_7 (3,2) = = re	0.39875	Q_{11}(3,3)	0.72067
P_2 (2,1) = = mi♭	0.49185	Q_4 (2,0) Q_5 (2,2)	0.16992 0.81378	P_8 (4,2) = = la	0.98371	Q_{12}(4,3)	0.30563
P_3 (3,1) = = si♭	0.07682	Q_6 (3,0)	0.75489	P_9 (5,2) = = mi	0.56867	Q_{13}(5,3)	0.89059
P_4 (4,1) = = fa	0.66178	Q_7 (4,0)	0.33985	P_{10}(6,2) = = si	0.15363	Q_{14}(6,3)	0.47555
P_5 (5,1) = = do	0.24674	Q_8 (5,0)	0.92481	P_{11}(7,2) = = fa♯	0.73860	Q_{15}(7,3)	0.06052
P_6 (6,1) = = sol	0.83170	Q_9 (6,0) Q_{10}(7,1)	0.50977 0.41667	P_{12}(8,2) = = do♯	0.32356	Q_{16}(8,1) Q_{17}(9,2) Q_{18}(8,3)	0.00163 0.90852 0.64548

La coma vale aquí $\varepsilon = 0{,}00163\,\omega$, y se produce por ejemplo, entre P_1 y Q_{17}. Ordenando ahora las notas de modo que *do* $(R.\,P.) = 0{,}00000\,\omega$, resulta:

Denominación	Nota	Intervalo	Denominación	Nota	Intervalo
					0.09310
do $(R.P.)$	0.00000		sol $(R.P.)$	0.58496	
		0.07682			0.07519
do♯ »	0.07682		la♭ »	0.66015	
		0.07519			0.07682
re »	0.15201		la »	0.73697	
		0.09310			0.09311
mi♭ »	0.24511		si♭ »	0.83008	
		0.07682			0.07681
mi »	0.32193		si »	0.90689	
		0.09311			0.09311
fa »	0.41504		do »	1.00000	
		0.07682			—
fa♯ »	0.49186		—	—	

Los intervalos $0{,}07519\,\omega$ y $0{,}07682\,\omega$ solo difieren en una coma, y por tanto deben considerarse iguales. Además de este intervalo, solo hay otro, el $0{,}09311\,\omega$, de modo que las características de esta gama son:

$$\varepsilon = 0.00163 \quad ; \quad N = 12 \quad ; \quad \nu = 2 \quad ; \quad \Delta^2 = (0.01792\,\omega),$$

y una base está dada por los intervalos ya considerados, de modo que

$$\gamma^{3,5}\,(R.P.) = x_1 i_1 + x_2 i_2 \pm x\,\varepsilon$$

$$i_1 = 0{,}09311\,\omega \quad ; \quad i_2 = 0.07519\,\omega \quad ; \quad \varepsilon = 0.00163\,\omega\,.$$

Las características de esta gama son muy aceptables; compárense con las de la $\Gamma^{8,5}_{ABGIP}$ § 26, y se verá que hay superioridad en todos los caracteres de la gama de Ramos Pareja.

CAPITULO V

FUNDAMENTOS DE LA ARMONIA

38. — Por *armonía* o *harmonía* se entiende en música el estudio de los distintos *acordes* o conjuntos de sonidos, su clasificación, las relaciones existentes entre ellos, sus combinaciones, y las marchas armónicas de las voces o instrumentos de una composición musical. En ésta aparece también otro elemento principalísimo, y en cierto modo contrapuesto a la armonía: es la *melodía,* o sea la sucesión de notas o sonidos (y silencios o pausas) que corresponden a cada voz o instrumento especial. En la mayoría de los casos se reserva el nombre de melodía a la sucesión de notas que corresponden a la voz o instrumento principal; pero hay también melodía en las demás voces, en el sentido más amplio que hemos indicado, y por otra parte, hay casos en que la melodía en sentido restringido no existe, por haber varias voces de primera importancia que ejecutan cada una una sucesión distinta de notas.

La melodía y la armonía son elementos complementarios en sentido análogo a lo que lo son los conceptos de sucesión y simultaneidad, movimiento y reposo. Un acorde o una armonía, está constituído por notas que se ejecutan simultáneamente; una melodía, por notas que se ejecutan sucesivamente; un solo acorde, lo mismo que una melodía puede tener, y tiene por lo general, un significado, nos produce cierta sensación de reposo, majestad, serenidad, o por lo contrario, de movimiento, de inquietud. En cambio, una sola nota de una armonía o melodía no significa absolutamente nada. Es solamente su combinación con las demás, y con las pausas (por medio del *ritmo,* otro elemento importante) lo que tiene un significado de por sí. Partiendo de una nota arbitraria (que no tiene ningún significado armónico ni melódico) podemos construir muchas armonías distintas, y también muchas melodías distintas. La obra musical se extiende así, a partir de su primera nota, en dos sentidos o, para utilizar un símil matemático, según dos coordenadas. Las abscisas representan, por ejemplo, la melodía; las ordenadas, la armonía. Si se nos da la nota inicial y la melodía, las armonías restantes quedan determinadas, hasta cierto punto; viceversa, si se nos da la nota inicial y la armonía (inicial también), queda determinada, dentro de ciertos límites, la melodía.

De acuerdo con ésto, se ve que armonía y melodía no son independientes, sino que por el contrario, se complementan y condicionan mutuamente para formar la obra musical. Son como los sistemas de fibras verticales y horizontales de un tejido, que cada uno no es sino una parte del tejido, que no puede existir y se deshace sin el otro. Hasta en la escritura se hacen patentes estas relaciones, pues se escriben en una misma línea vertical las notas simultáneas, cuyo conjunto determina la armonía, y en sentido horizontal van dispuestos los pentagramas o pautas, donde se escribe la melodía.

Si estudiamos por separado la armonía, así como la melodía y el ritmo, no es sino por razones de metodización científica, siguiendo el principio de pasar de lo particular a lo general y de lo simple a lo complejo.

39. — En una gama natural, fundada en los armónicos $p_1, p_2, \ldots p_r$, es precisamente la presencia de estos armónicos, con exclusión de todo otro, lo que determina el carácter de la $\Gamma^{p_1, \ldots, p_r}$ y la distingue de todas las demás. La atemperación no hace sino delimitar, mediante ciertos procedimientos que ya hemos estudiado en el Capítulo III, las notas que deben tomarse para constituir la gama práctica, atemperada, $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \ldots p_r}$; pero deja subsistente el carácter fundamental a que nos referimos.

No es, pues, extraño, que si tomamos una nota cualquiera $\gamma_{n_1 \ldots n_r}^{p_1 \ldots p_r}$ y a partir de ella las que representan sus propios armónicos $p_1, p_2, \ldots, p_r$, obtengamos un conjunto de notas de $\Gamma^{p_1 \ldots p_r}$ o de $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \ldots p_r}$ (supuesto que en ésta sea también posible tomar esos armónicos) que caracterizan a la gama. Se tiene así un conjunto de sonidos, o sea un *acorde,* que podemos llamar *acorde perfecto* o *tonal, mayor,* y que caracteriza a la $\Gamma^{p_1 \ldots p_r}$ ó $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \ldots p_r}$ de que se trata. Ya hemos visto en lo anterior varios ejemplos.

Nuestro objeto es ahora generalizar aquellas consideraciones, hechas en casos concretos, y dar así las bases de una teoría general de la *armonía,* en la que estos acordes tienen un papel básico.

Si tomamos la $\gamma_{n_1 \ldots n_r}^{p_1 \ldots p_r}$ y tenemos en cuenta la expresión (§ 14)

$$\gamma_{n_1 \ldots n_r}^{p_1 \ldots p_r} = F\left(\sum_i n_i \pi_i\right),$$

la nota que da el armónico p_k de ésta (donde k puede ser 1, 2, ..., r)

se obtendrá sumando a la expresión anterior el número $\pi_k = \log_2 p_k$, o mejor (para reducir a la octava fundamental) su parte fraccionaria, $F(\pi_k)$. El armónico p_k de $\gamma^{p_1 \dots p_r}_{n_1 \dots n_r}$ será así:

$$\gamma^{p_1 \dots p_r}_{n_1 \dots n_r} + F(\pi_k) = F\left(\sum_i n_i \pi_i\right) + F(\pi_k) \; ;$$

pero la suma que figura en el segundo miembro, o sea:

$$F(n_1 \pi_1 + n_2 \pi_2 + \dots + n_k \pi_k + \dots + n_r \pi_r) + F(\pi_k)$$

solo difiere de

$$\gamma^{p_1, \dots, p_k, \dots, p_r}_{n_1, \dots, n_k + 1, \dots, n_r} = F(n_1 \pi_1 + n_2 \pi_2 + \dots + (n_k + 1)\pi_k + \dots + n_r \pi_r)$$

en el número $0\left(\sum_i n_i \pi_i, \; \pi_k\right)$, que puede ser 0 ó 1, pero que es siempre entero, y ésto en virtud del Lema I del § 16 (fórmulas [5] y [5′], donde $\alpha = \sum_i n_i \pi_i$, $\beta = \pi_k$). Es decir, que el armónico que buscamos, reducido a la octava fundamental, da precisamente la nota $\gamma^{p_1, \dots, p_k, \dots, p_r}_{n_1, \dots, n_k + 1, \dots, n_r}$, en la que solamente el índice correspondiente al armónico p_k ha sido aumentado en una unidad, permaneciendo inalterados los otros.

Haciendo sucesivamente $k = 1, 2, \dots, r$, vemos que el acorde perfecto mayor de $\Gamma^{p_1 \dots p_r}$ formado a partir de la nota $\gamma^{p_1 \dots p_r}_{n_1 \dots n_r}$, *nota fundamental* del acorde, está formado por la $r + 1$ notas siguientes:

la nota $\gamma^{p_1, \dots, p_r}_{n_1, \dots, n_r}$, *nota fundamental* del acorde;

su armónico p_1, o sea $\gamma^{p_1, p_2, \dots, p_r}_{n_1 + 1, n_2, \dots, n_r}$;

» » p_2, » » $\gamma^{p_1, p_2, p_3, \dots, p_r}_{n_1, n_2 + 1, n_3, \dots, n_r}$;

» » p_3, » » $\gamma^{p_1, p_2, p_3, \dots, p_r}_{n_1, n_2, n_3 + 1, \dots, n_r}$;

. . . . ;

» » p_r, » » $\gamma^{p_1, \dots, p_{r-1}, p_r}_{n_1, \dots, n_{r-1}, n_r + 1}$.

En la representación hiperespacial (§ 29), los vértices del $r + 1$-edro de E_r, es decir, el origen O y los puntos-unidad $U_1, \dots, U_r$ sobre cada uno de los ejes, forman un acorde perfecto mayor, en virtud de lo que acabamos de ver (en este caso es $n_1 = n_2 = \ldots = n_r = 0$) y de la definición misma de O y de los puntos-unidad U_k. Trasladando este $r+1$-edro de modo que el punto O vaya a ocupar un punto P, de coordenadas $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$, los vértices de este nuevo $r+1$-edro representan precisamente las notas del acorde mayor cuya fundamental es $\gamma_P^{p_1 \cdots p_r}$; y viceversa, dado este acorde, los puntos representativos de sus notas forman un $r+1$-edro que puede ser obtenido por traslación del $OU_1 U_2 \ldots U_r$. Por consiguiente, teniendo en cuenta la invariancia de los intervalos por traslación (§ 29), obtenemos que: *todos los acordes mayores de* $\Gamma^{p_1 \cdots p_r}$ *(o los que existan en* $\Gamma_\Phi^{p_1 \cdots p_r}$*) están formados por iguales intervalos, y se obtienen unos de otros variando en iguales intervalos sus notas constitutivas* (o sea, por *transposición*, § 35).

Según estos resultados, a cada punto reticulado corresponde un acorde perfecto mayor (el que tiene por nota fundamental la representada por el punto) y recíprocamente, de modo que el acorde cuya nota fundamental esté representada por el punto P, de coordenadas $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ puede simbolizarse por $[P]$ o por $[n_1, n_2, \ldots, n_r]$ indistintamente.

El estudio de los acordes perfectos mayores de $\Gamma^{p_1, \ldots, p_r}$ se reduce así al del acorde $[O]$ o $[0, 0, \ldots, 0]$ cuyas notas constitutivas son (véase más arriba):

la fundamental	$\gamma_{0, \ldots, 0}^{p_1, \ldots, p_r}$	$= 0\,\omega$
el armónico p_1, o sea:	$\gamma_{1, 0, \ldots, 0}^{p_1, p_2, \ldots, p_r}$	$= F(\pi_1)$
» » p_2, » » :	$\gamma_{0, 1, 0, \ldots, 0}^{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_r}$	$= F(\pi_2)$
....		
» » p_r, » » :	$\gamma_{0, \ldots, 0, 1}^{p_1 \ldots p_{r-1}, p_r}$	$= F(\pi_r)$.

Por ejemplo: en la $\Gamma^{3,5,7}$ el acorde $[O]$ consta de las 4 notas:

$$\gamma_{0,0,0}^{3,5,7} = 0\,\omega \quad ; \quad \gamma_{1,0,0}^{3,5,7} = F(\log_2 3) = 0{,}58496\,\omega\,.$$

$$\gamma_{0,1,0}^{3,5,7} = F(\log_2 5) = 0{,}32193\,\omega \quad ; \quad \gamma_{0,0,1}^{3,5,7} = F(\log_2 7) = 0{,}80735\,\omega\,.$$

40. — También hay otro acorde característico de una $\Gamma^{p_1 \cdots p_r}$ que es el acorde *perfecto* o *tonal menor*, que vamos a definir ahora. Si tomamos como nota *fundamental* una nota $\gamma_{n_1 \ldots n_r}^{p_1 \ldots p_r}$, podemos conside-

rar aquellas notas de las cuales la dada es el armónico p_1, el $p_2, \ldots$, el p_r. Estas $r+1$ notas dan el acorde perfecto menor.

Por la misma demostración hecha en el § anterior, resulta que si tomamos la nota $\gamma^{p_1, \ldots, p_k, \ldots, p_r}_{n_1, \ldots, n_k - 1, \ldots, n_r}$, el armónico p_k de ésta es precisamente la nota dada $\gamma^{p_1, \ldots p_k, \ldots, p_r}_{n_1, \ldots, n_k, \ldots, n_r}$. Luego, las notas que forman el acorde menor son:

la nota *fundamental* $\gamma^{p_1, \ldots, p_r}_{n_1, \ldots, n_r}$;

aquella de la cual es armónico p_1, o sea $\gamma^{p_1, p_2, \ldots, p_r}_{n_1 - 1, n_2, \ldots, n_r}$;

» » » » » » p_2, » » $\gamma^{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_r}_{n_1, n_2 - 1, n_3, \ldots, n_r}$;

» » » » » » p_3, » » $\gamma^{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_r}_{n_1, n_2, n_3 - 1, \ldots, n_r}$;

. . . .

» » » » » » p_r, » » $\gamma^{p_1, \ldots, p_{r-1}, p_r}_{n_1, \ldots, n_{r-1}, n_r - 1}$.

En el espacio E_r, cuyo reticulado representa la $\Gamma^{p_1 \cdots p_r}$, el punto H de coordenadas $(1, 1, \ldots, 1)$ junto con los puntos: $H_1(0, 1, \ldots, 1)$, $H_2(1, 0, 1, \ldots, 1)$, $H_3(1, 1, 0, 1, \ldots, 1), \ldots, H_r(1, \ldots, 1, 0)$ forman un $r+1$-edro que representa un acorde tonal menor. Cada uno de los puntos H_k está situado en uno de los hiperplanos coordenados (véase § 28), el hiperplano $n_k = 0$, y el $r+1$-edro, una vez efectuada la traslación que lleva H a coincidir con el origen O, se coloca en posición simétrica del que representa el acorde mayor $[O]$. En efecto, la traslación produce una disminución de una unidad en todas las coordenadas de H, y por tanto, de los demás puntos; y entonces H_1 se transforma en el punto $(-1, 0, 0, \ldots, 0)$ simétrico de $U_1(1, 0, \ldots, 0)$ respecto a O; H_2 en el punto $(0, -1, 0, \ldots, 0)$, simétrico de $U_2(0, 1, 0, \ldots, 0)$; ...; H_r en $(0, \ldots, 0, -1)$, simétrico de $U_r(0, \ldots, 0, 1)$.

Como en el caso de los acordes mayores, *todo acorde menor de* $\Gamma^{p_1 \cdots p_r}$ *(o los que existan en una* $\Gamma^{p_1 \cdots p_r}_{\Phi}$*) pueden ser obtenidos por una traslación del que acabamos de considerar, y por consiguiente están constituídos por los mismos intervalos, y se obtienen unos de otros por transposición estricta.*

Podemos también designar a cada acorde menor de acuerdo con su nota fundamental, o el punto que la representa en E_r; si $\gamma^{p_1 \cdots p_r}_{n_1 \cdots n_r} = \gamma^{p_1 \cdots p_r}_{P}$ es la nota fundamental del acorde tonal menor, éste se designará por $\{P\}$ o por $\{n_1, n_2, \ldots n_r\}$. Por ejemplo, el acorde menor que consideramos más arriba como tipo, es el acorde $\{H\} = \{1, 1, \ldots, 1\}$. Este acorde está constituído por las notas:

lamental, $\quad \gamma_H^{p_1 \ldots p_r} = F\left(\sum_i \pi_i\right)$

ılla de la que es armónico p_1, o sea $\quad \gamma_{H_1}^{p \ldots p_r} = F(\pi_2 + \pi_3 + \ldots + \pi_r)$

» » » » » p_2, » » $\quad \gamma_{H_2}^{p_1 \ldots p_r} = F(\pi_1 + \pi_3 + \ldots + \pi_r)$

» » » » » p_3, » » $\quad \gamma_{H_3}^{p_1 \ldots p_r} = F(\pi_1 + \pi_2 + \pi_4 + \ldots + \pi_r)$

. . . .

» » » » » p_r, » » $\quad \gamma_{Hr}^{p_1 \ldots p_r} = F(\pi_1 + \ldots + \pi_{r-1})$

Por ejemplo: en la $\Gamma^{3,5,7}$, el acorde $\{H\}$ consta de las cuatro notas:

$$\gamma_{1,1,1}^{3,5,7} = F(\log_2 3 + \log_2 5 + \log_2 7) = 0{,}71424\,\omega$$

$$\gamma_{0,1,1}^{3,5,7} = F(\log_2 5 + \log_2 7) = 0{,}12928\,\omega$$

$$\gamma_{1,0,1}^{3,5,7} = F(\log_2 3 + \log_2 7) = 0{,}39232\,\omega$$

$$^{3,5,7}_{1,1,0} = F(\log_2 3 + \log_2 5) = 0{,}90689\,\omega\,.$$

En la figura 11 hemos representado el acorde mayor $[O]$ y el menor $\{4, 1, 3\}$ para objetivar nuestras consideraciones.

41. — Por este procedimiento, es decir, tomando una nota fundamental y aquellas que representan sus armónicos contenidos en la $\Gamma^{p_1 \ldots p_r}$, o bien aquellas de las que esa nota proviene como armónico, no es posible construir otras clases de acordes; o por lo menos, si fuera posible, ello excede los límites de todo lo que se ha acostumbrado hasta hoy en la música. Estos acordes *mixtos*, ni mayores ni menores, posibles desde un punto de vista abstracto, estarían formados por una nota fundamental y, para ciertos índices, los armónicos correspondientes, mientras que para los índices restantes, habría que tomar aquellas notas de las cuales proviene $\gamma_{n_1 \ldots n_r}^{p_1 \ldots p_r}$ como armónico. Es decir, que además del punto $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ aparecerían en la representación espacial, algunos puntos del tipo $(n_1, \ldots, n_k + 1, \ldots, n_r)$, y otros del tipo $(n_1, \ldots, n_k - 1, \ldots, n_r)$. Por ejemplo, en la gama tolemaica cromática, un tal acorde mixto estaría constituído por las notas (véase fig. 7):

$$\gamma_{5,3}^{3,5} = \text{do (fundam.)} \quad ; \quad \gamma_{4,3}^{3,5} = \text{fa} \quad ; \quad \gamma_{5,4}^{3,5} = \text{mi};$$

otro, por ejemplo, por las notas

$$\gamma^{3,5}_{5,4} = \text{mi (fundam.)} \quad ; \quad \gamma^{3,5}_{5,3} = \text{do} \quad ; \quad \gamma^{3,5}_{6,4} = \text{si} .$$

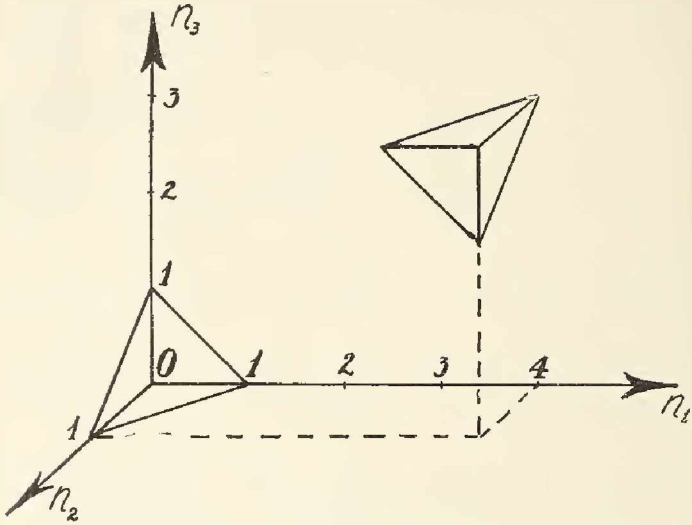

Fig. 11.

Dicho en otros términos: un acorde mixto se compondría de su nota fundamental, y además, r notas vecinas a ella, elegidas arbitrariamente pero de modo que no queden dos de estas notas vecinas sobre la misma paralela a uno de los ejes coordenados. O, si se prefiere, de la nota fundamental llevaríamos en la dirección de cada uno de los ejes un vector de módulo unitario, positivo o negativo a elección, y los extremos de estos vectores nos darían las notas restantes del acorde. Cuando todos los vectores son positivos, obtenemos un acorde mayor; si todos son negativos, uno menor.

Pero, repetimos, estos acordes mixtos « abstractos» presentan, por lo menos hasta ahora, escaso interés musical.

Nótese que según las ideas expuestas acerca de la generación de los acordes menores y mayores, venimos a coincidir en lo esencial, y salvo nuestra mayor generalidad de conceptos, con Rameau y con las ideas expuestas modernamente por H. Riemann, quienes consideran el acorde menor como una especie de inversión del mayor, en el sentido de que sus intervalos, contados *hacia abajo*, son exactamente los mismos que, contados *hacia arriba*, contiene el mayor, y viceversa. De ahí que, con Riemann, consideremos como nota fundamental del acorde menor, no la más baja (caso de los acordes mayores) sino la que usualmente se coloca más alta, por ej. el *mi* en el acorde tolemaico la-do-mi. De ahí también que, llevando más lejos esa « inversión », pueda hablarse, con Domínguez Berrueta, de un principio general (más general de lo que sospechó este autor) análogo al *principio de dualidad* de la Geometría, que permite, de cada composición escrita en modo mayor, deducir otra escrita en modo menor, y viceversa, de tal modo que los intervalos de cada una, en sentido ascendente, son exactamente los mismos que, en sentido descendente, contiene la otra. Pero este principio, como veremos (§ 51) no tiene una validez ilimitada.

Este se traduce geométricamente, por una simetría respecto a un determinado punto de E_r, y se manifiesta, en cuanto a nuestro estudio, como un principio de *economía,* que nos permite reducirnos, hasta cierto punto, al estudio del acorde mayor, pues todo lo que de él digamos se traduce inmediatamente en una proposición *dual* o *recíproca* referente al acorde menor, y viceversa (salvo explícita advertencia en contrario, que cuidaremos de hacer en los casos en que no sea aplicable el principio).

El acorde mayor revela de una manera directa la constitución armónica de la gama, pues al escuchar los sonidos que lo componen, estamos escuchando, con la nota fundamental del acorde, los armónicos que, por pertenecer a la $\Gamma^{p_1 \cdots p_r}$, le dan su carácter, y tales como serían producidos por una cuerda que diera la misma nota fundamental. Es por eso que el acorde mayor presenta una apariencia de cosa terminada, conclusiva, y nos da la impresión de reposo, grandeza, brillantez y análogas.

En cambio en el acorde menor, si bien tenemos también una caracterización de la gama, la interpretación de su concomitancia de sonidos no se produce espontáneamente (por eso ya decía Rameau que el acorde mayor se produce en la naturaleza, mientras que el menor es artificial), y requiere para su comprensión un cierto proceso subjetivo que, por elemental e inconsciente que sea, existe. El fundamento armónico de la gama surge inmediatamente del acorde mayor; mediatamente, en cambio, del menor. De ahí que el acorde menor, también conclusivo, sirva para expresar suavidad, nostalgia, y en general, sentimientos deprimentes.

(Continuará)

FUNDAMENTOS MATEMATICOS DE LA MÚSICA

Por A. E. SAGASTUME BERRA

*(Continuación *)*

42. — Otro principio armónico general, si bien de distinta índole que los anteriores, que nos permite obtener nuevos acordes, es el que llamaremos *principio de sustitución*, y que pasamos a exponer.

A diferencia de los casos anteriores, en que nuestras consideraciones se referían indistintamente a una $\Gamma^{p_1 \cdots p_r}$ o a una gama atemperada $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \cdots p_r}$ (en este último caso la única variación era simplemente limitar el número posible de acordes), debemos ahora referirnos principalmente a una gama atemperada $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \cdots p_r}$.

El principio general de sustitución puede enunciarse así: *es posible sustituir una nota (o varias, simultáneamente) de un acorde que podamos considerar como perteneciente a* $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \cdots p_r}$, *por la nota (o respectivamente, las notas) de valor más próximo de* $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \cdots p_r}$, *sea por exceso, sea por defecto*, y obtener así lo que llamaremos en general un *acorde alterado*.

Para usar de una expresión breve, diremos que una nota se *altera*, en sentido *ascedente* o *descendente*, cuando se la sustituye por la que más se le aproxima dentro de $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \cdots p_r}$ por exceso o, respectivamente, por defecto.

Nótese que este concepto es algo más amplio que el ordinario: ordinariamente, la alteración (*cromática*) ascendente (o descendente) significa lo mismo que simboliza el signo #, *sostenido* (o respectivamente, ♭, *bemol*), mientras que en nuestra definición puede no suceder así. Por ejemplo, en la gama de Ramos Pareja (§ 37) la nota *mi* es la alteración descendente del *fa*, pero no coincide con el *fa*♭, puede esta última nota no existe. En el fondo, ésto es solo cuestión de nomenclatura de las notas: en el ejemplo citado, nada nos impediría llamar *fa*♭ al *mi*.

(*) Ver Tomo CXXIII y sig.

Un acorde alterado proviene, pues, de la alteración de algunas de las notas que lo componen.

Al enunciar el principio de sustitución, hemos usado la frase « acorde que podamos considerar como perteneciente a $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$» por la siguiente razón: el poliedro atemperante Φ sabemos que es un poliedro a r dimensiones, lo cual quiere decir que el espacio de menor número de dimensiones que lo contiene es precisamente un E_r. Pero nada impide que podamos considerar a ese poliedro « sumergido », por así decir, en un espacio E_s de mayor número de dimensiones ($s > r$); por ejemplo, uno de los trapecios tolemaicos (polígono plano, o sea « poliedro » a 2 dimensiones) podemos considerarlo en el espacio ordinario E_3, o en un E_4, E_5, etc. Esto trae como consecuencia que un acorde mayor, pongamos por caso, de $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$, pueda considerarse como una parte del acorde perfecto mayor correspondiente de E_s. En este caso, las notas de un acorde mayor $[n_1, n_2, \dots, n_s]$ que no estén situadas en E_r pueden ser sustituídas, según el principio general, por sus alteraciones de $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$, y obtendremos así un nuevo acorde. En este proceso se ve también cómo difiere del ordinario nuestro concepto de alteración.

A los acordes obtenidos en esta forma, si bien entran en rigor bajo la clasificación de acordes alterados, los llamaremos más especialmente, *acordes imperfectos*, mayores y menores (según sea aquél del que provengan), pues participan en cierto modo de una perfección relativa; a las notas agregadas, provenientes por alteración del acorde $[n_1, \dots, n_s]$, y que no pertenecen al acorde perfecto de $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$ las llamaremos, por una razón que veremos más adelante, *disonancias características* del acorde.

Reservaremos en cambio más particularmente el nombre de *acordes alterados* (propiamente dichos) a los que provienen de alteraciones sin salir del espacio E_r, así como a los que combinan esta posibilidad con la anterior.

En cuanto a la notación, para los acordes imperfectos y alterados, haremos las siguientes convenciones: para los acordes provenientes (por sustitución) de acordes mayores, continuaremos usando los corchetes [ ]; para los provenientes de acordes menores, las llaves { }. Dentro de esos corchetes o llaves colocaremos, si se trata de acordes alterados propiamente dichos, las coordenadas de la nota fundamental del acorde original, agregando en la coordenada que corresponda a la nota alterada [1], una línea —— en su

[1] Téngase presente que, a partir de la nota fundamental, la dirección de cada uno de los ejes, o de los vectores unitarios, determina unívocamente otra de las notas del acorde.

parte superior si se trata de alteración ascendente, y en su parte inferior si es descendente. Si la nota fundamental es también alterada, una línea análoga abarcará todo el corchete o llave.

Si se trata de acordes imperfectos o alterados que combinan ambas posibilidades, será necesario indicar además, dentro de un paréntesis ordinario, los armónicos que corresponden a las dimensiones « extra », con análogos símbolos para las alteraciones. Recuérdese, pues, que los números encerrados en estos últimos paréntesis indican *nuevos armónicos*, a diferencia de los otros, que indican *coordenadas*.

Veamos algunos ejemplos.

Refirámonos a un caso más o menos familiar a los músicos: el de la $\Gamma^{3,5}_{ABGH}$ de Tolomeo o de Zarlino cromática (§ 26).

Del acorde mayor [6 , 2], o sea el formado por las notas

$$\gamma^{3,5}_{6,2} = mi\flat \, , \; \gamma^{3,5}_{6,3} = sol \, , \; \gamma^{3,5}_{7,2} = si\flat$$

se obtienen los siguientes acordes alterados propiamente dichos:

$$[\overline{6,2}] = \text{mi-sol-si}\flat \quad ; \quad [\underline{6,2}] = \text{re}\sharp\text{-sol-si}\flat$$

$$[\bar{6},2] = \text{mi}\flat\text{-sol-si} \quad ; \quad [\underline{6},2] = \text{mi}\flat\text{-sol-la}\sharp$$

$$[6,\bar{2}] = \text{mi}\flat\text{-sol}\sharp\text{-si}\flat \quad ; \quad [6,\underline{2}] = \text{mi}\flat\text{-sol}\flat\text{-si}\flat = \{7,2\}$$

$$[\overline{\bar{6},2}] = \text{mi-sol-si} = \{6,4\} \quad ; \quad [\underline{\underline{6},2}] = \text{re}\sharp\text{-sol-la}\sharp$$

etc. etc.

y, si consideramos el plano tolemaico sumergido en el espacio E_3, cuya tercera coordenada corresponda al armónico 7 ($\log_2 7 = 2.80735$), los siguientes acordes imperfectos mayores:

$$[6,2\,(\bar{7})] = \text{mi}\flat\text{-sol-si}\flat\text{-re}\flat \quad ; \quad [6,2\,(\underline{7})] = \text{mi}\flat\text{-sol-si}\flat\text{-do}\sharp \, ,$$

y los alterados siguientes:

$$[\overline{6,2\,(\bar{7})}] = \text{mi-sol-si}\flat\text{-re}\flat \quad ; \quad [\underline{6,2\,(\underline{7})}] = \text{re}\sharp\text{-sol-si}\flat\text{-do}\sharp$$

$$[\overline{6,2\,(\underline{7})}] = \text{mi-sol-si}\flat\text{-do}\sharp \quad ; \quad [\underline{6,2\,(\bar{7})}] = \text{re}\sharp\text{-sol-si}\flat\text{-re}\flat$$

etc. etc.

Si consideramos el espacio E_4, con un eje más, correspondiente, por ejemplo, al armónico 11 ($\log_2 11 = 3{,}45943$) tendríamos combinaciones como éstas:

$[6, 2(\bar{7}, \overline{11})] =$ mi♭-sol-la-si♭-re♭ ; $[6, 2(\underline{7}, \underline{11})] =$ mi♭-sol-la♭-si♭-do#

etc. etc.

Análogamente, del acorde menor $\{5, 4\}$, formado por las notas

$$\gamma^{3,5}_{5,4} = mi \, , \; \gamma^{3,5}_{5,3} = do \, , \; \gamma^{3,5}_{4,4} = la$$

obtenemos:

$\{\overline{5, 4}\}$ = fa♭-do-la ; $\{\underline{5, 4}\}$ = mi♭-do-la

$\{\bar{5}, 4\}$ = mi-do-la# ; $\{\underline{5}, 4\}$ = mi-do-la♭

$\{5, \bar{4}\}$ = mi-do#-la = [4,4] ; $\{5, \underline{4}\}$ = mi-si#-la

$\{\overline{\bar{5}, 4}\}$ = fa♭-do-la# ; $\{\underline{\underline{5}, 4}\}$ = mi♭-do-la♭ = [5, 2]

etc. etc.

los acordes imperfectos

$\{5, 4(\bar{7})\}$ = mi-do-la-sol♭ ; $\{5, 4(\underline{7})\}$ = mi-do-la-fa#

$\{5, 4(\bar{7}, \overline{11})\}$ = mi-do-si-la-sol♭ ; $\{5, 4(\underline{7}, \underline{11})\}$ = mi-do-si♭-la-fa#

etc. etc.

y los alterados

$\{\overline{5, 4(\bar{7})}\}$ = fa♭-do-la-sol♭ ; $\{\underline{5, 4(\underline{7})}\}$ = mi♭-do-la-fa#

$\{\bar{5}, 4(\bar{7})\}$ = mi-do-la#-sol♭ ; $\{\underline{5}, 4(\underline{7})\}$ = mi-do-la♭-fa#

etc. etc.

Por ejemplo, el acorde $\{5, 4(\bar{7})\}$ se forma tomando el acorde menor tolemaico $\{5, 4\}$ = mi-do-la y agregándole la disonancia característica proveniente del armónico 7. Como $\log_2 7 = 2.80735$, si llevamos a partir del punto $(5, 4)$ correspondiente a la nota mi, y en sentido negativo (por tratarse de un acorde menor) el vector unitario correspondiente al tercer eje, obtendremos el tetraedro de E_3 correspondiente al acorde perfecto menor. La nota obtenida tiene el valor $F\,(\gamma^{3,5}_{5,4} - 2{,}80735) = 0{,}51458$ (pues $\gamma^{3,5}_{5,4} = 0{,}32193$) y está comprendida (véase la tabla del § 26) entre fa♯ y sol♭. Luego: $\{5, 4(\overline{7})\}$ = mi-do-la-sol♭ ; y si se tratara en cambio de $\{5, 4(\underline{7})\}$ obtendríamos mi-do-la-fa♯. Sirva este ejemplo para los casos análogos.

43. — Son de interés algunas observaciones sobre los acordes así obtenidos. En primer lugar, en los ejemplos hemos visto que las alteraciones en un acorde pueden llevarlo a coincidir con otro, como en los casos $[\overline{\overline{6}, 2}] = \{6, 4\}$, $[6, \underline{2}] = \{7, 2\}$, $\{5, \overline{4}\} = [4, 4]$, $\{\underline{\underline{5}}, 4\} = [5, 2]$. Hay, sin embargo, una diferencia *conceptual* entre ambas *acepciones* del acorde. Tomemos, para fijar las ideas, el caso $[6, \underline{2}] = \{7, 2\}$. En la acepción $[6, \underline{2}]$ se trata de un acorde alterado, pero que *no deja de representar* el acorde *mayor* de donde proviene; en cambio, en la otra acepción, $\{7, 2\}$, se trata de un acorde *menor* por esencia, y que no puede por tanto representar en ningún caso un acorde mayor. Dicho de otro modo: los dos acordes, compuestos de las mismas notas, desempeñan *funciones* muy distintas. El acorde $\{7, 2\}$ es, por definición, perfectamente *consonante*, mientras que el $[6, \underline{2}]$ presenta solo lo que se llama una *consonancia aparente*. Estas observaciones se complementan con las que van a continuación, y que se refieren más especialmente a los acordes imperfectos.

Un acorde imperfecto está constituído por dos clases de notas: en primer lugar, las que corresponden al acorde tonal de $\Gamma_\Phi^{p_1 \cdots p_r}$ que son todas consonantes por definición, puesto que admitimos, al construir la gama, la consonancia de los armónicos $p_1, p_2, \ldots, p_r$; en segundo lugar, las notas agregadas, que hemos llamado *disonancias características*. Estas son notas también de $\Gamma_\Phi^{p_1 \cdots p_r}$, disonantes (pues no responden a los principios armónicos en que nos basamos) pero que sin embargo representan, lo más exactamente posible, a otras notas consonantes no pertenecientes a $\Gamma^{p_1 \cdots p_r}$; y decimos consonantes, porque corresponden a otros armónicos $p_{r+1}, \ldots, p_s$ con los que podríamos ampliar la $\Gamma^{p_1 \cdots p_r}$. Tomemos un ejemplo muy simple: la gama de Pitágoras $\Gamma^3_{(0,11)}$ (§ 22); un acorde mayor de ella es, por ejemplo, $[1]$ = do-sol (Pit.). Consideremos ahora el segmento $(0, 11)$ que representa a esta gama, colocado en un plano, paralelamente al eje n_1 de coordenadas, sobre el que se representa el armónico 3; el otro eje coordenado n_2, sea el que representa el armónico 5. Más precisamente, coloquemos nuestro segmento sobre el reticulado de la figura 7, paralelamente al eje n_1, y de modo que el punto representativo de $\gamma_1{}^3 =$ do (Pit.) coincida con el punto $(5, 3)$, que representa precisamente la nota $\gamma^{3,5}_{5,3} =$ do (Tol. cr.). Entonces se tendrá que do (Pit.) $=$ do (Tol. cr.) $= 0{,}00000\,\omega$; y también $\gamma^{3,5}_{6,3} = \gamma_2{}^3 =$ sol (Pit.) $=$ sol (Tol. cr.) $= 0{,}32193\,\omega$. En cambio la nota $\gamma_6{}^3 = \gamma^{3,5}_{10,3} =$ mi (Pit.) $= 0{,}33985\,\omega$ no coincide con la $\gamma^{3,5}_{5,4} =$ mi (Tol. cr.) $= 0{,}32193\,\omega$, sino que difieren precisamente en una *coma* (*Tol.*) $= 0{,}01792\,\omega$. El acorde perfecto mayor $[5, 3] =$ do-mi-sol (Tol. cr.) da origen a los acordes imperfectos mayores de la gama pitagórica $[1\ (\overline{5})] =$ do-mi-sol (Pit.) y $[1\ (\underline{5})] =$ do-re#-sol (Pit.), en los cuales las notas *mi* (*Pit.*), *re#* (*Pit.*) son disonancias características, provenientes de la sustitución del *mi* (*Tol. cr.*) consonante, por sus alteraciones ascendente y descendente respectivamente.

De esta manera se explica la formación del acorde ordinariamente llamado de *séptima de dominante*, por ejemplo *do-mi-sol-si♭* para el tono de fa. Aquí el si♭ es una disonancia característica, que representa a la nota consonante *te* de la gama de Domínguez Berrueta, en la que do-mi-sol-te es el acorde perfecto mayor. Y análogamente, tienen explicación de esta manera otros acordes que la música actual utiliza más o menos frecuentemente, y que revelan armónicos más elevados, de los que, por alteración, resultan ciertas notas componentes.

44. — Consideremos ahora un acorde mayor cualquiera $[n_1, \ldots, n_r]$ de $\Gamma^{p_1, \ldots, p_r}$. Este acorde está compuesto, como sabemos, de las $r + 1$ notas

$$\gamma_{n_1, \ldots, n_r} \quad , \quad \gamma_{n_1+1, n_2, \ldots, n_r} \quad , \quad \gamma_{n_1, n_2+1, \ldots, n_r} \quad , \quad \ldots \quad , \quad \gamma_{n_1, n_2, \ldots, n_r+1}$$

(habiendo escrito por brevedad $\gamma_{n_1 \ldots n_r}$ en lugar de $\gamma^{p_1 \cdots p_r}_{n_1 \ldots n_r}$, etc., lo que no trae confusión alguna). Propongámonos el problema de determinar un acorde menor $\{m_1, \ldots, m_r\}$ tal que, de las notas que componen este último, o sea:

$$\gamma_{m_1, \ldots, m_r} \quad , \quad \gamma_{m_1-1, m_2, \ldots, m_r} \quad , \quad \gamma_{m_1, m_2-1, \ldots, m_r} \quad , \quad \ldots \quad , \quad \gamma_{m_1, m_2, \ldots, m_r-1}$$

coincida con las anteriores el máximo número posible de ellas (naturalmente, sin tener en cuenta el orden en que han sido escritas).

Evidentemente, hay pares de acordes que presentan al menos una coincidencia (por ejemplo, para $m_i = n_i$). Supongamos, pues, que haya por lo menos una coincidencia. Entonces pueden ocurrir tres casos:

a) $\gamma_{n_1 \ldots n_r} = \gamma_{m_1 \ldots m_r}$. Luego $m_i = n_i$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, r$. Otra de las notas del acorde $[n_1 \ldots n_r]$ tiene uno de los índices, por ejemplo el que ocupa el lugar h, una unidad mayor, y es por lo tanto $n_h + 1$, número que no puede coincidir ni con m_h, ni con $m_h - 1$, que son los valores posibles del índice correspondiente, en las notas de $\{m_1, \ldots, m_r\}$. Luego no hay, fuera de la coincidencia supuesta, ninguna otra.

b) $\gamma_{n_1 \ldots n_k \ldots n_r} = \gamma_{m_1 \ldots, m_k - 1, \ldots m_r}$. Entonces se deduce $m_i = n_i$ para todos los $i \neq k$, y en cambio $m_k - 1 = n_k$. Pero entonces es también $\gamma_{n_1 \ldots n_k + 1 \ldots n_r} = \gamma_{m_1 \ldots m_k \ldots m_r}$ es decir, hay otra coincidencia entre las notas de ambos acordes, y no puede existir ninguna más, porque para toda otra nota del primer acorde el índice de lugar k es n_k, y para el segundo acorde, m_k; y estos índices no pueden coincidir.

c) $\gamma_{n_1 \ldots n_h + 1 \ldots n_r} = \gamma_{m_1 \ldots m_k - 1 \ldots m_r}$. Este caso se subdivide en dos, según que sea $h = k$ o $h \neq k$, y corresponden a los casos *a*, *b* en cuanto a los razonamientos y resultados. Si $h = k$, es $m_i = n_i$ para todo $i \neq h$, $n_h + 1 = m_h - 1$, y los índices n_h, m_h difieren en dos unidades, de modo que no pueden coincidir otras dos notas cualesquiera del acorde. En cambio si $h \neq k$, es $n_i = m_i$ para todo $i \neq h$, $i \neq k$, y $m_h = n_h + 1$, $m_k = n_k + 1$. Luego $\gamma_{n_1 \ldots n_k + 1 \ldots n_r} = \gamma_{m_1 \ldots m_h - 1 \ldots m_r}$ y además se demuestra exactamente como en *b*, que no pueden existir otras coincidencias.

Por consiguiente, *el número máximo de coincidencias es 2*, que se producen en los casos *b*, y *c* para $h \neq k$. Los acordes que, con respecto al $[n_1 \ldots n_r]$ están en el caso *b* (es decir, en que una de las m_k es una unidad mayor que la n_k correspondiente, mientras las demás son iguales) son los r siguientes:

$$\{n_1 + 1, n_2, \ldots, n_r\}$$

$$\{n_1, n_2 + 1, \ldots, n_r\}$$

$$\{n_1, n_2, n_3 + 1, \ldots, n_r\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\{n_1, n_2, \ldots, n_r + 1\},$$

y los que están en el caso c $(h \neq k)$, o sea que dos de las m_i son una unidad mayores que las n_i correspondientes, son

$$\begin{array}{c}
\{n_1 + 1 \,,\, n_2 + 1 \,,\, n_3 \,,\, n_4 \,,\, \dots \,,\, n_{r-1} \,,\, n_r\} \\
\{n_1 + 1 \,,\, n_2 \,,\, n_3 + 1 \,,\, n_4 \,,\, \dots \,,\, n_{r-1} \,,\, n_r\} \\
\{n_1 + 1 \,,\, n_2 \,,\, n_3 \,,\, n_4 + 1 \,,\, \dots \,,\, n_{r-1} \,,\, n_r\} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\{n_1 + 1 \,,\, n_2 \,,\, n_3 ,\, n_4 \,,\, \dots \,,\, n_{r-1} \,,\, n_r + 1\} \\
\{n_1 \,,\, n_2 + 1 \,,\, n_3 + 1 \,,\, n_4 \,,\, \dots \,,\, n_{r-1} \,,\, n_r\} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\{n_1 \,,\, n_2 \,,\, n_3 \,,\, n_4 \,,\, \dots \,,\, n_{r-1} + 1 \,,\, n_r + 1\} \,,
\end{array}$$

y son en total $(r-1)+(r-2)+\dots+2+1=\dfrac{r\,(r-1)}{2}$.

Estos acordes, que presentan con el dado el número máximo posible de coincidencias, se llaman los *acordes relativos* de $[n_1, \dots, n_r]$. Su número total será, pues:

$$r + \frac{r\,(r-1)}{2} = \frac{2\,r + r\,(r-1)}{2} = \frac{r\,(r+1)}{2}.$$

Por el principio de dualidad, dado un acorde menor $\{m_1, \dots, m_r\}$, podrán hallarse también $\dfrac{r\,(r+1)}{2}$ acordes relativos, mayores, que serán los siguientes:

$$\begin{array}{c}
[m_1 - 1 \,,\, m_2 \,,\, m_3 \,,\, \dots \,,\, m_r] \\
[m_1 \,,\, m_2 - 1 \,,\, m_3 \,,\, \dots \,,\, m_r] \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
[m_1 \,,\, m_2 \,,\, m_3 \,,\, \dots \,,\, m_r - 1]
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
[m_1 - 1 \,,\, m_2 - 1 \,,\, m_3 \,,\, \dots \,,\, m_{r-1} \,,\, m_r] \\
[m_1 - 1 \,,\, m_2 \,,\, m_3 - 1 \,,\, \dots \,,\, m_{r-1} \,,\, m_r] \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
[m_1 - 1 \,,\, m_2 \,,\, m_3 \,,\, \dots \,,\, m_{r-1} ,\, m_r - 1] \\
[m_1 \,,\, m_2 - 1 \,,\, m_3 - 1 \,,\, \dots \,,\, m_{r-1} \,,\, m_r] \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
[m_1 \,,\, m_2 \,,\, m_3 \,,\, \dots \,,\, m_{r-1} - 1 \,,\, m_r - 1] \,.
\end{array}$$

Los acordes relativos de uno dado, por presentar el máximo número posible de notas comunes con el acorde dado, presentarán un cierto parentesco o afinidad con él, y de ahí su importancia.

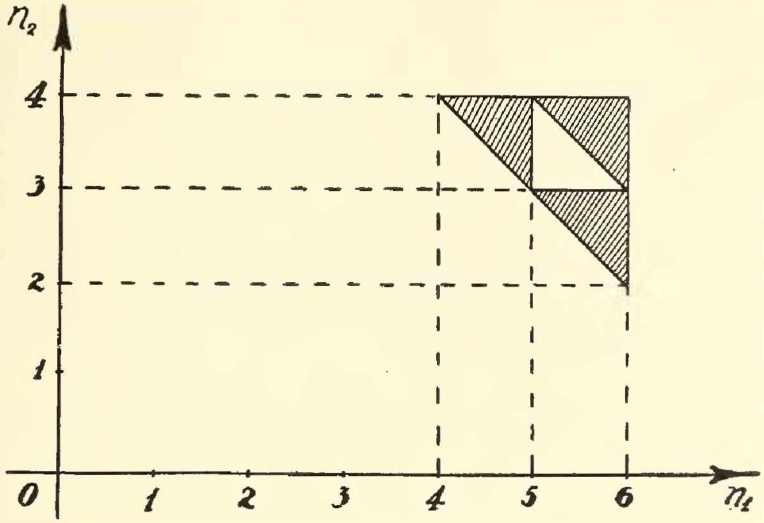

Fig. 12

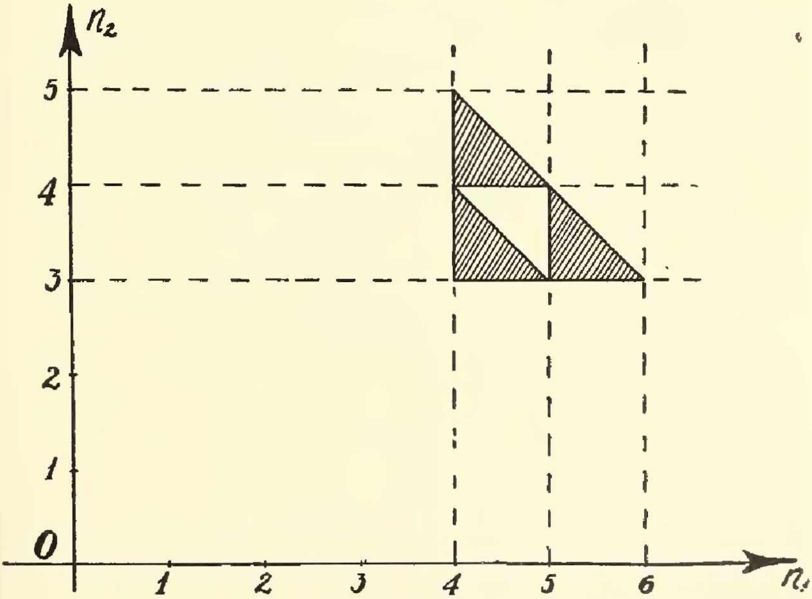

Fig. 12 bis

Ejemplos. — Tomemos, como caso más familiar a los músicos, la gama tolemaica (cromática) y en ella el acorde mayor [5 , 3] = do-mi-sol (ver fig. 7), compuesto por las notas: $\gamma^{3,5}_{5,3} = $ do, $\gamma^{3,5}_{6,3} = $ sol, $\gamma^{3,5}_{5,4} = $ mi. El triángulo que forman estas notas está representado, sin rayar, en la figura 12. Los tres triángulos rayados corresponden en cambio a los tres acordes menores relativos $\left(\text{pues siendo } r = 2 \text{ es } \frac{r\,(r+1)}{2} = 3\right)$, o sea: $\{6,3\} = \left(\gamma^{3,5}_{6,3}, \gamma^{3,5}_{5,3}, \gamma^{3,5}_{6,2}\right) =$ = sol-do-mi♭ : $\{5,4\} = \left(\gamma^{3,5}_{5,4}, \gamma^{3,5}_{4,4}, \gamma^{3,5}_{5,3}\right) =$ mi-la-do ; $\{6,4\} =$ $= \left(\gamma^{3,5}_{6,4}, \gamma^{3,5}_{5,4}, \gamma^{3,5}_{6,3}\right) =$ si-mi-sol.

Dualmente, la figura 12 bis representa los acordes relativos del acorde menor $\{5,4\} =$ mi-la-do, que son: $[4,4] = \left(\gamma^{3,5}_{4,4}, \gamma^{3,5}_{5,4}, \gamma^{3,5}_{4,5}\right) =$ = la-mi-do# ; $[5,3] = \left(\gamma^{3,5}_{5,3}, \gamma^{3,5}_{6,3}, \gamma^{3,5}_{5,4}\right) =$ do-sol-mi ; $[4,3] =$ $= \left(\gamma^{3,5}_{4,3}, \gamma^{3,5}_{5,3}, \gamma^{3,5}_{4,4}\right) =$ fa-do-la.

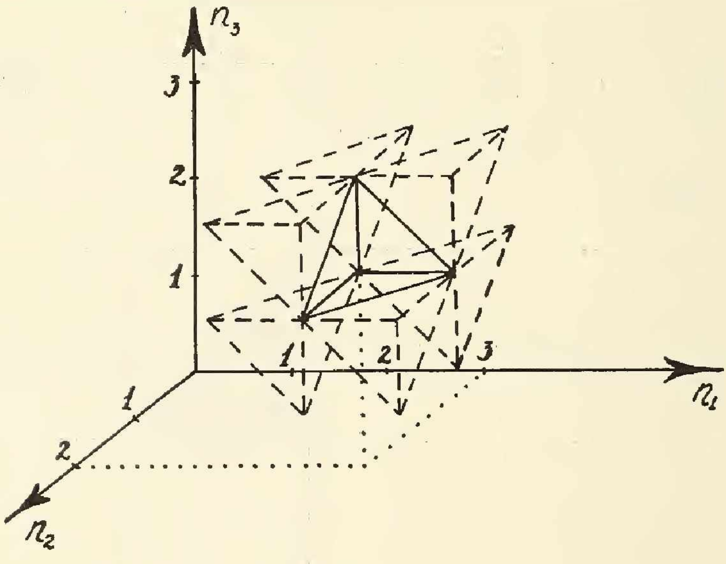

Fig. 13

El caso de la $\Gamma^{3,5,7}_{\Phi}$ de Domínguez Berrueta es también interesante. En la figura 13 hemos dibujado en línea llena, el tetraedro correspondiente al acorde mayor [3, 2, 2], o sea:

$$[3,2,2] = \left(\gamma^{3,5,7}_{3,2,2}, \gamma^{3,5,7}_{4,2,2}, \gamma^{3,5,7}_{3,3,2}, \gamma^{3,5,7}_{3,2,3}\right) = \text{do-mi-sol-te}$$

En líneas de puntos se han dibujado los tetraedros de los acordes relativos, en total $(r = 3)$ $\frac{3\,(3+1)}{2} = 6$, y que son:

$$\{4,2,2\} = \left(\gamma^{3,5,7}_{4,2,2},\ \gamma^{3,5,7}_{3,2,2},\ \gamma^{3,5,7}_{4,1,2},\ \gamma^{3,5,7}_{4,2,1}\right) = \text{sol-do-mi}\flat\text{-?}$$

$$\{3,3,2\} = \left(\gamma^{3,5,7}_{3,3,2},\ \gamma^{3,5,7}_{2,3,2},\ \gamma^{3,5,7}_{3,2,2},\ \gamma^{3,5,7}_{3,3,1}\right) = \text{mi-la-do-sol}\flat$$

$$\{3,2,3\} = \left(\gamma^{3,5,7}_{3,2,3},\ \gamma^{3,5,7}_{2,2,3},\ \gamma^{3,5,7}_{3,1,3},\ \gamma^{3,5,7}_{3,2,2}\right) = \text{te re}\sharp\text{-fa}\sharp\text{-do}$$

$$\{4,3,2\} = \left(\gamma^{3,5,7}_{4,3,2},\ \gamma^{3,5,7}_{3,3,2},\ \gamma^{3,5,7}_{4,2,2},\ \gamma^{3,5,7}_{4,3,1}\right) = \text{si-mi-sol-re}\flat$$

$$\{4,2,3\} = \left(\gamma^{3,5,7}_{4,2,3},\ \gamma^{3,5,7}_{3,2,3},\ \gamma^{3,5,7}_{4,1,3},\ \gamma^{3,5,7}_{4,2,2}\right) = \text{?-te-do}\sharp\text{-sol}$$

$$\{3,3,3\} = \left(\gamma^{3,5,7}_{3,3,3},\ \gamma^{3,5,7}_{2,3,3},\ \gamma^{3,5,7}_{3,2,3},\ \gamma^{3,5,7}_{3,3,2}\right) = \text{?-?-te-mi}$$

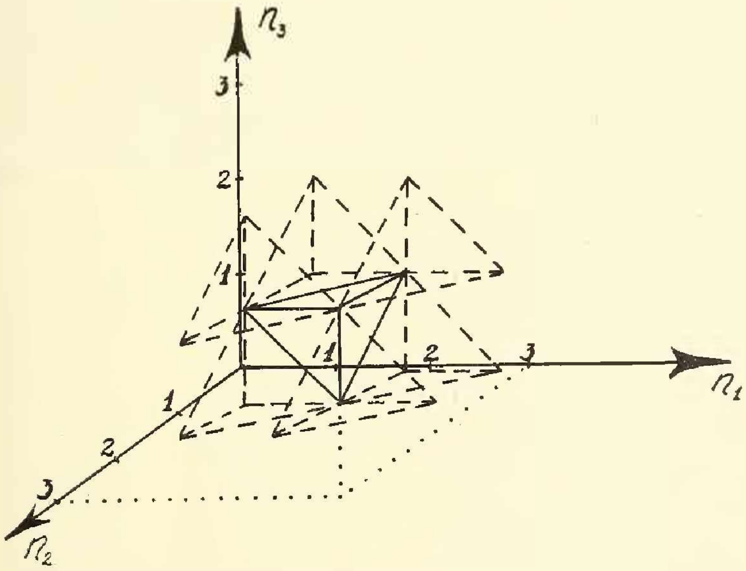

Fig. 13 bis

En la atemperación de Domínguez Berrueta no existen las notas $\gamma^{3,5,7}_{4,2,1}$, $\gamma^{3,5,7}_{4,2,3}$, $\gamma^{3,5,7}_{3,3,3}$ y $\gamma^{3,5,7}_{2,3,3}$; por esta razón las hemos designado con «?». Si se quisieran completar los acordes relativos, habría que tomarlos alterados, y lo más próximos posibles a los originales. Es decir que, teniendo en cuenta que

$$\gamma^{3,5,7}_{4,2,1} = 0{,}79106\,\omega \;\; ; \;\; \gamma^{3,5,7}_{4,2,3} = 0{,}40577\,\omega \;\; ; \;\; \gamma^{3,5,7}_{2,3,3} = 0{,}55777\,\omega$$

$$\gamma^{3,5,7}_{3,3,3} = 0{,}14273\,\omega\,,$$

tendríamos que reemplazar

$$\begin{aligned} &\{4,2,2\} && \text{por} && \{4,2,\bar{2}\} = \text{sol-do-mi}\flat\text{-te} \\ &\{4,2,3\} && \text{»} && \{\overline{4,\overline{2,3}}\} = \text{fa-te-do\#-sol} \\ &\{3,3,3 && \text{»} && \{\underline{\underline{3},3,3}\} = \text{re}\flat\text{-sol}\flat\text{-te-mi}\,. \end{aligned}$$

Análogamente, en la figura 13 bis se ha dibujado el tetraedro correspondiente al acorde menor $\{3, 3, 2\} = \left(\gamma^{3,5,7}_{3,3,2}, \gamma^{3,5,7}_{2,3,2}, \gamma^{3,5,7}_{3,2,2}, \gamma^{3,5,7}_{3,3,1}\right)$ = mi-la-do-sol♭ en línea llena, y en líneas punteadas los correspondientes a los acordes relativos, que son los que se indican a continuación, con las sustituciones o alteraciones correspondientes:

$$[2,3,2] = \left(\gamma^{3,5,7}_{2,3,2}, \gamma^{3,5,7}_{3,3,2}, \gamma^{3,5,7}_{2,4,2}, \gamma^{3,5,7}_{2,3,3}\right) = \text{la-mi-?-?-} \;\; ;$$

$$[2,\bar{3},\underline{2}] = \text{la-mi-do\#-sol}\flat$$

$$[3,2,2] = \left(\gamma^{3,5,7}_{3,2,2}, \gamma^{3,5,7}_{4,2,2}, \gamma^{3,5,7}_{3,3,2}, \gamma^{3,5,7}_{3,2,3}\right) = \text{do-sol-mi-te}$$

$$[3,3,1] = \left(\gamma^{3,5,7}_{3,3,1}, \gamma^{3,5,7}_{4,3,1}, \gamma^{3,5,7}_{3,4,1}, \gamma^{3,5,7}_{3,3,2}\right) = \text{sol}\flat\text{-re}\flat\text{-?-mi} \;\; ;$$

$$[3,\underline{3},1] = \text{sol}\flat\text{-re}\flat\text{-si}\flat\text{-mi}$$

$$[2,2,2] = \left(\gamma^{3,5,7}_{2,2,2}, \gamma^{3,5,7}_{3,2,2}, \gamma^{3,5,7}_{2,3,2}, \gamma^{3,5,7}_{2,2,3}\right) = \text{fa-do-la-re\#}$$

$$[2,3,1] = \left(\gamma^{3,5,7}_{2,3,1}, \gamma^{3,5,7}_{3,3,1}, \gamma^{3,5,7}_{2,4,1}, \gamma^{3,5,7}_{2,3,2}\right) = \text{?-sol}\flat\text{-?-la} \;\; ;$$

$$\overline{[2,\bar{3},1]} = \text{si-sol}\flat\text{-mi}\flat\text{-la}$$

$$[3,2,1] = \left(\gamma^{3,5,7}_{3,2,1}, \gamma^{3,5,7}_{4,2,1}, \gamma^{3,5,7}_{3,3,1}, \gamma^{3,5,7}_{3,2,2}\right) = \text{?-?-sol}\flat\text{-do} \;\; ;$$

$$\underline{[\bar{3},2,1]} = \text{re-te-sol}\flat\text{-do}\,.$$

45. — Será útil en este punto confrontar nuestro concepto de *consonancia* de un acorde, o por mejor decir, la explicación teórica que damos de la consonancia, con otra que se ha propuesto, a nuestro juicio erróneamente.

Según nuestro concepto, es *consonante* un acorde fundado exclusivamente en las propiedades armónicas de una gama. Ya hemos explicado (§ 11) por qué una nota cualquiera, que suene simultáneamente con sus armónicos inmediatos, nos produce una impresión de un todo homogéneo, una verdadera consonancia, hasta en el sentido etimológico de la palabra. De ahí que, al admitir como armónicos primarios de una $\Gamma^{p_1 \ldots p_r}$ los números primos $p_1, \ldots, p_r$, debamos admitir como consonantes con una nota cualquiera, o sea como sonidos acústicamente más afines con ella, aquellas otras notas que representen, directa o indirectamente, sus armónicos $p_1, \ldots, p_r$ y solo ellas. Si esas notas representan directamente esos armónicos, es decir, si tomamos aquellas notas que, a partir de la nota dada, contituyen sus armónicos $p_1, \ldots, p_r$, obtenemos precisamente el acorde perfecto mayor. Si en cambio la representación es indirecta, es decir, si tomamos aquellas notas de las cuales la nota dada es el armónico $p_1, \ldots, p_r$, obtenemos el acorde perfecto menor. Así pues, según este concepto, los únicos acordes estrictamente consonantes son el perfecto mayor y el menor (aquél más directamente consonante que éste) o bien fracciones o partes de ellos.

Ahora bien: observando lo que ocurre en la gama pitagórica o tolemaica, se ha creído encontrar la explicación de la consonancia de los acordes [1] basándose en el fenómeno de los *sonidos diferenciales* o *de Tartini*, descubiertos por el alemán Sorge, y estudiados por el insigne violinista cuyo nombre llevan, y que pasamos a explicar.

Cuando producimos simultáneamente dos sonidos de frecuencias ν_1, ν_2, y dentro de ciertas condiciones, se puede escuchar también un tercer sonido cuya frecuencia es la *diferencia* $\nu_2 - \nu_1$ de las frecuencias de aquéllos, y que por esta razón se llama *sonido diferencial* o también *sonido de Tartini*. Por ejemplo, si las notas son un *la* normal, de frecuencia 435 y el *do* inmediato bajo, de frecuencia 261, el sonido de Tartini tiene la frecuencia $435 - 261 = 174 =$ $= 261 \times \frac{2}{3}$, y representa por tanto el *fa* de la octava inmediatamente inferior.

Este sonido diferencial es un *verdadero* sonido; no es una ilusión de nuestro oído, como puede comprobarse experimentalmente de varias maneras; en especial, es perfectamente capaz de interferir con otros sonidos, y también de dar nuevos sonidos diferencia-

(1) Véase, por ej. BLASERNA y HELMHOLTZ (I).

les con las notas primarias o con otros sonidos diferenciales. Se tienen así sonidos diferenciales de 1º, 2º, 3er, ..., orden.

La explicación teórica de estos sonidos no es nada sencilla [1], pero aquí lo único que nos interesa es la manera « aritmética » como se originan, y que se resume diciendo que dos sonidos se componen por diferencia, en cuanto a sus frecuencias, para dar un sonido diferencial de un orden una unidad mayor que el máximo de los órdenes de los componentes.

Cuando ejecutamos un acorde (de dos notas por lo menos) debemos, por consiguiente, tener en cuenta que el acorde no se compone sólo de esas notas, sino que ellas van acompañadas de todo un cortejo de frecuencias dadas por los sonidos de Tartini de los distintos órdenes.

Observemos ahora lo que ocurre con los acordes más usuales y conocidos. Tomemos como primer ejemplo el acorde pitagórico *do-sol*. Si el do tiene una frecuencia ν, el sol inmediato tiene una frecuencia $\frac{3}{2}\nu$, o sea que ambas frecuencias están en la relación de 1 a $\frac{3}{2}$, o también (multiplicando por 2 ambos números) que ellas son proporcionales a los números 2 y 3. El sonido diferencial de 1er orden estará representado (con el mismo factor de proporcionalidad) por el número $3 - 2 = 1$, y los sonidos de Tartini de 2º orden por los números: $3 - 1 = 2$, $2 - 1 = 1$. Como 1 y 2 ya están entre los sonidos originales o los de 1er orden, se sigue que los sonidos de orden 3º, 4º, ..., serán los mismos. Luego, en este caso, el « cortejo » de frecuencias se compone de los números 1, 2 y 3 solamente. Entre ellos, las notas originales del acorde son las 2 y 3, y el nuevo sonido 1 *representa la octava baja de una de las notas del acorde* (el 2) o sea el do de la octava grave inmediata.

Tomemos otro ejemplo: el acorde tolemaico *do-mi-sol*. Si ν es la frecuencia del do, el mi tiene la frecuencia $\frac{5}{4}\nu$, y el sol, como antes $\frac{3}{2}\nu$. Multiplicando estos números por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es 4, y suprimiendo el factor común ν, resulta el do representado por 4, el mi por 5, el sol por 6.

[1] Ver Lord Rayleigh (XIII) vol. II.

Los sonidos de Tartini son:

De 1er *orden*: $6 - 4 = 2$; $5 - 4 = 1$; $6 - 5 = 1$;

De 2^{o} *orden*: $6 - 2 = 4$; $5 - 2 = 3$; $4 - 2 = 2$; $6 - 1 = 5$;
$5 - 1 = 4$; $4 - 1 = 3$; $2 - 1 = 1$;

De 3er *orden*: $6 - 3 = 3$; $5 - 3 = 2$; $4 - 3 = 1$; $3 - 2 = 1$;
$3 - 1 = 2$.

Al calcular los sonidos de 1er orden, obtenemos dos frecuencias nuevas: 1 y 2; combinando éstas con las notas originales o entre sí, obtenemos los sonidos de 2^{o} orden, de los cuales uno solo nuevo: el 3. Por tanto, para obtener los sonidos de 3er orden nuevos, solo es necesario combinar este 3 con las notas originales y las de 1^{o} y 2^{o} orden; y se observa que no aparece ninguna frecuencia nueva. Es por eso que hemos detenido el proceso, pues evidentemente, entre los sonidos diferenciales de 4^{o} orden no vamos a obtener nada nuevo, y tanto menos con los de órdenes superiores.

El acorde do-mi-sol da así origen a las seis frecuencias: 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Las tres últimas son las notas originales del acorde; la frecuencia 3 es la octava baja de la 6, o sea el sol; la 2, la octava baja del do; y la 1, la octava baja del 2, es decir, la doble octava baja del 4. *Los sonidos del conjunto representan,* también en este caso, *los sonidos originales o sus octavas o dobles octavas bajas.*

Si analizamos desde el mismo punto de vista un acorde tal como el *do-mi-sol-si*♭ (*Tol. cr.*) (considerado como *disonante,* por oposición a los anteriores, todos *consonantes* según la clasificación usual) tendremos que las frecuencias son ahora proporcionales a $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{16}{9}$, o bien multiplicando por el mínimo común múltiplo de los denominadores, proporcionales a 36, 45, 54 y 64. Por tanto, los sonidos de Tartini de 1er orden son:

$$45-36=54-45=9; 54-36=18; 64-36=28; 64-45=19; 64-54=10$$

y, sin necesidad de ir más lejos, observamos que aparecen aquí frecuencias tales como 10, 19 ó 28, *que no representan octavas de ninguno de los sonidos originales.* Naturalmente, lo mismo ocurrirá con los sonidos diferenciales de órdenes más elevados.

46. — De acuerdo con lo que ocurre en estos casos, se ha creído encontrar la explicación de la consonancia o disonancia de un acorde, en el estudio de los sonidos diferenciales. Se ha dicho: un acorde es consonante cuando sus sonidos diferenciales son solo las notas originales o sus octavas, y disonante en caso contrario.

Nuestra opinión es bien distinta: son consonantes aquellos acordes fundados en las propiedades armónicas (o acústicas) de la gama, es decir, solamente los acordes perfectos mayor y menor, y disonantes todos los demás. Bien entendido que estos acordes mayor y menor deben ser formados como ya ha sido explicado en los §§ 39 y 40, y en consecuencia, este concepto es más amplio que el usual.

Según esta opinión, son efectivamente consonantes los acordes do-sol (Pit.) y do-mi-sol (Tol.), y no lo es el acorde do-mi-sol-si$\flat$ (Tol. cr.). Este último es un acorde imperfecto $[5, 3(\overline{7})]$, proveniente del acorde perfecto mayor $[3, 2, 2]$ de la $\Gamma^{3,5,7}_{\Phi}$ de Domínguez Berrueta, o sea do-mi-sol-te. El si$\flat$ (Tol. cr.) es lo que hemos llamado una *disonancia característica,* y proviene de la nota te (D. B.) $= 0{,}80736\,\omega$ (véase la tabla del § 33) que es aproximado, en la gama Tolemaica cromática, por el si$\flat$ (Tol. cr.) $=$ $= 0.84801\,\omega$ (ver la tabla § 26).

El acorde do-mi-sol-te es consonante también en el otro sentido, pues las frecuencias de las notas originales son proporcionales a $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}$, o sea 4, 5, 6, y 7, y se ve entonces que los sonidos diferenciales de los distintos órdenes no dan, aparte de las frecuencias originales, más que los números 1, 2 y 3, todos ellos octavas bajas de notas del acorde.

Por brevedad, permítasenos por un momento llamar *asonantes* a los acordes tales que sus sonidos diferenciales representen solamente notas de entre las originales del acorde, trasladadas en una o más octavas. Reservamos, en cambio, el nombre de *estrictamente consonantes* para los acordes que responden a nuestro concepto, tal como fué explicado en los §§ 39 y 40, y *consonantes* a los acordes que en el concepto usual, bastante vago, « suenan bien », según lo juzgaría un músico o persona cualquiera con disposición musical.

Hemos visto, pues, tres ejemplos de acordes menores que una octava, que son a la vez estrictamente consonantes y asonantes. Ellos son: el do-sol (Pit.) = do-sol (Tol.) = do-sol (D. B.); el do-mi-sol (Tol.) = do-mi-sol (D. B.); y el do-mi-sol-te (D. B.), o sea, los acordes mayores de las gamas de Pitágoras, Tolomeo y Domínguez

Berrueta, respectivamente. Entre otras cosas, demostraremos en lo que sigue que éstos son los únicos que tengan esa propiedad; es decir, que un acorde menor que una octava y que sea la vez estrictamente consonante y asonante debe ser necesariamente uno de los acordes mayores de las gamas de Pitágoras, Tolomeo o Domínguez Berrueta.

Esto ya nos da un primer argumento en contra de la explicación de la « consonancia » por medio de los sonidos de Tartini. En efecto, ningún músico dudará en clasificar como consonante, en el sentido corriente, un acorde menor tolemaico, por ejemplo el la-do-mi. Las frecuencias son aquí proporcionales a $\frac{5}{6}$, 1 y $\frac{5}{4}$, o (multiplicando por 12) a 10, 12 y 15. Entre los sonidos de Tartini de 1er orden aparece ya el 2, que no representa octava baja de ninguno de los sonidos originales.

Se nos objetará tal vez que, en virtud del principio de dualidad, si para los acordes mayores debemos considerar las diferencias de las frecuencias originales, para los menores correspondería considerar las sumas. Esta objeción tiene una triple falla: en primer lugar, el admitir el principio de dualidad ya nos coloca en el terreno de las ideas que vamos exponiendo, en el cual resulta inconsecuente buscar la explicación de la consonancia por otros medios que no sean los que ya hemos explicado; en segundo lugar, los sonidos de Tartini existen realmente, cualquiera sea el acorde o conjunto de notas que consideremos, y no está en nuestras manos el tomarlos o rechazarlos; y si se les atribuye todo el peso de la « explicación » de la consonancia en el caso de los acordes mayores, no vemos por qué se los ha de dejar de lado en este otro caso; y en tercer lugar, aún admitiendo el principio de dualidad y tomando los *sonidos aditivos* (que, como luego veremos, existen realmente) en lugar de los diferenciales, tampoco se explica nada. En el ejemplo del acorde la-do-mi, aparece el sonido (aditivo) de frecuencia $10 + 12 = 22$, octava superior del 11, que no está entre los originales del acorde.

Pero aún hay más: entre los mismos acordes mayores falla la explicación. En efecto, si en lugar de tomar el acorde directo mayor do-mi-sol trasladamos el do una octava hacia arriba, tendremos lo que se llama la primera *inversión*: mi-sol-do (llamado *acorde de sexta*) que *no* es asonante, pues las frecuencias son aquí: 5, 6 y 8; los sonidos diferenciales de primer orden son 3, 2 y 1; y este último, combinado con el sonido 8, nos da un sonido de Tartini de 2º orden $8 - 1 = 7$, que no es octava grave de ninguno de los sonidos originales.

Para mostrar aún más claramente la divergencia de los tres conceptos de consonancia estricta, consonancia y asonancia, presentamos en el pequeño cuadro siguiente algunos ejemplos de acordes con las frecuencias (relativas) de sus notas, y su carácter en cada una de las clasificaciones. Se observará que hay acordes que tienen una propiedad y no las otras, lo que prueba esa divergencia:

Acorde	Frecuencias (relativas)	Estrictamente consonante	Consonante	Asonante
do-mi-sol	4 , 5 , 6	sí	sí	sí
mi-sol-do	5 , 6 , 8	sí	sí	no
do-mi-sol-te (D.B.) . . .	4 , 5 , 6 , 7	sí	no	sí
sol-te-do-mi » . . .	6 , 7 , 8 , 10	sí	no	no
mi-sol-te-do-re »	5 , 6 , 7 , 8 , 9	no	no	sí
do-mi-sol-si♭	36 , 45 , 54 , 64	no	no	no

Se observará que faltan aquí los casos de acordes que sean consonantes sin ser estrictamente consonantes. En efecto, los acordes consonantes en el sentido usual son solo los mayores y menores de la gama tolemaica (y por consiguiente, de la pitagórica y primitiva) y sus inversiones, que son también estrictamente consonantes; pero en cambio, hay acordes estrictamente consonantes que no se clasifican usualmente como consonantes. La clase de aquéllos es, pues, más amplia que la de éstos, y si hemos elegido el calificativo de « estricto » no ha sido para indicar que reduzcamos así las posibilidades (pues como vemos ocurre precisamente lo contrario) sino para significar que ese carácter se refiere « estrictamente » a nuestra teoría armónica.

47. — Para demostrar, en unión de otros puntos también interesantes, nuestra afirmación anterior de que solo hay tres tipos de acordes que sean a la vez estrictamente consonantes y asonantes, conviene que demos previamente algunas nociones y definiciones a efecto sobre todo de abreviar el lenguaje.

Dada una frecuencia cualquiera n, o hablando en términos aritméticos, un número entero y positivo, ese número puede descomponerse siempre, como se sabe, en un producto de factores primos, y la descomposición puede hacerse de una sola manera. Aislemos en esa descomposición todos los factores 2 que aparezcan, y sean por ejemplo, p factores iguales a 2. Como 2 es el único número primo par, los restantes factores, y con ellos su producto, serán impares, y dicho producto tendrá la forma $2q + 1$, siendo q un número entero y no negativo; pues todo número impar es la suma del número par más próximo ($2q$) más la unidad. Por tanto, n quedará expresado bajo la forma

$$n = 2^p(2q + 1) . \qquad [1]$$

Los números (enteros y no negativos) p, q, quedan determinados unívocamente cuando se conozca el número n; y recíprocamente, dados p y q, la expresión anterior determina a n. Dar el número n equivale, pues, a dar el par de números enteros y no negativos p, q.

Por ejemplo: si $n = 120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 15 = 2^3(2 \times 7 + 1)$, se tiene: $p = 3$, $q = 7$. Si $n = 21 = 3 \times 7 = 2^0(2 \times 10 + 1)$, es $p = 0$, $q = 10$. Si $n = 1 = 2^0(2 \times 0 + 1)$, es $p = q = 0$. Recíprocamente, si $p = 5$, $q = 1$ se tiene $n = 2^5(2 \times 1 + 1) = 96$.

Al número p lo llamaremos el *exponente de n*, y a n, un *representante* del número impar $2q + 1$, y diremos que éste *está representado* por n.

Acústicamente, el significado de estos números es muy simple: la expresión [1] nos dice que la frecuencia $2q + 1$, elevada en p octavas (multiplicada por 2 sucesivamente p veces) da la frecuencia n. Esta proviene, pues, del armónico impar $2q + 1$, solamente que está colocada p octavas más alta.

Por otra parte, definiremos las *inversiones* de un acorde. Efectuar una inversión quiere decir simplemente, sustituir la nota más baja del acorde por su octava alta inmediata. Aritméticamente, un acorde está dado por un grupo de números $n_1, n_2, \ldots, n_k$ que son las frecuencias de las notas del acorde. Si n_1 por ejemplo, es la más baja de estas frecuencias, la inversión significa sustituir el número n_1 por su duplo, $2n_1$. Si las frecuencias están dispuestas por orden creciente: $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$, y no llegan a cubrir una octava, de modo que $n_k < 2n_1$, la inversión del acorde es

$$n_2 < n_3 < \ldots < n_k < 2n_1.$$

A partir de aquí pueden efectuarse nuevas inversiones. Después de k de ellas, el grupo de números presenta el siguiente aspecto: $2n_1 < 2n_2 < \ldots < 2n_k$; y bajando una octava todas las frecuencias recaemos en el acorde original. Es decir, que *un acorde de k notas admite k — 1 inversiones.*

Probemos ahora los siguientes teoremas:

TEOREMA I. — *Si μ es un entero no negativo, los números*

$$\mu + 1 , \mu + 2 , \mu + 3 , \ldots , \mu + (\mu + 1) = 2\mu + 1 \qquad [2]$$

representan a todos los números impares, 1, 3, 5, ..., $2\mu + 1$ (naturalmente, en distinto orden, en general).

DEM.: Los números (2) son todos de la forma $\mu + h$, siendo $h = 1, 2, \ldots, \mu + 1$. Dos cualesquiera de ellos, $\mu + h_1$, $\mu + h_2$, representan a impares distintos, porque de lo contrario se tendría:

$$\mu + h_1 = 2^{p_1}(2q + 1) \quad ; \quad \mu + h_2 = 2^{p_2}(2q + 1)$$

y si suponemos por ejemplo que h_1 es menor que h_2, también resultará $p_1 < p_2$. En este caso se tiene, multiplicando la primera ecuación por 2^{p_2}, la segunda por 2^{p_1} y restando:

$$2^{p_2}(\mu + h_1) - 2^{p_1}(\mu + h_2) = 2^{p_1+p_2}(2q + 1) - 2^{p_2+p_1}(2q + 1) = 0 ,$$

de donde:

$$2^{p_2}(\mu + h_1) = 2^{p_1}(\mu + h_2) \quad , \quad \mu + h_2 = 2^{p_2 - p_1}(\mu + h_1) .$$

Como $p_2 > p_1$, la diferencia $p_2 - p_1$ será por lo menos igual a 1, y el factor $2^{p_2 - p_1}$ será mayor, o a lo sumo igual, a 2. Es decir

$$\mu + h_2 \geq 2(\mu + h_1) ,$$

y como $h_1 \geq 1$,

$$\mu + h_2 \geq 2(\mu + 1) = 2\mu + 2 ,$$

de donde, simplificando:

$$h_2 \geq \mu + 2 ,$$

que es absurdo, pues h_2 puede a lo sumo valer $\mu + 1$.

Los números representados por los números (2) son, pues, todos distintos; son $\mu + 1$ números impares, y todos evidentemente menores que $2\mu + 1$, salvo uno que es igual. Como los impares que cumplen estas condiciones son los $\mu + 1$ números 1, 3, 5, ..., $2\mu + 1$, resulta probado el teorema.

TEOREMA II. — *Todo acorde menor que una octava, y en el que estén representados todos los números impares 1, 3, 5, ..., $2\mu+1$ (cada uno una sola vez) puede reducirse, mediante inversiones y traslaciones de una o más octavas, a la forma*

$$\mu+1 < \mu+2 < \ldots < 2\mu+1 . \qquad [2']$$

Este teorema no es sino el recíproco del anterior.

DEM.: Ante todo, el acorde consta por hipótesis, solo de $\mu+1$ notas de la forma

$$2^{p_0}.1 \quad , \quad 2^{p_1}.3 \quad , \quad 2^{p_2}.5 \quad , \quad \ldots \quad , \quad 2^{p_\mu}(2\mu+1) .$$

Si tomamos como octava de referencia la octava comprendida entre la frecuencia 1 y la 2, y puesto que nos es permitido elevar o bajar cualquier número de octavas, bajando p_0 octavas tendremos las frecuencias

$$1 \quad , \quad 2^{p_1-p_0}.3 \quad , \quad 2^{p_2-p_0}.5 \quad , \quad \ldots \quad , \quad 2^{p_\mu-p_0}(2\mu+1) .$$

Como las frecuencias deben ser todas < 2 y ≥ 1, tendremos:

$$1 \leq 2^{p_1-p_0}.3 < 2$$

$$1 \leq 2^{p_2-p_0}.5 < 2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

y en general

$$1 \leq 2^{p_k-p_0}(2k+1) < 2 \qquad \text{para} \quad k = 0,1,2,\ldots,\mu ,$$

de modo que, poniendo $p_k - p_0 = -\alpha_k$, se tiene:

$$\frac{1}{2k+1} \leq 2^{-\alpha_k} < \frac{2}{2k+1}$$

y

$$\frac{2k+1}{2} < 2^{\alpha_k} \leq 2k+1 .$$

Evidentemente, existe (para cada k) un solo α_k que cumpla estas condiciones, pues tomando los logaritmos de base 2 de los tres miembros, se tiene:

$$\log_2(2k+1) - 1 < \alpha_k \leq \log_2(2k+1) ,$$

y siendo α_k entero, resulta:

$$\alpha_k = E\,[\log_2(2k+1)] . \qquad [3]$$

Como el mayor de los α_k es evidentemente α_μ multiplicando todos los números de nuestro grupo,

$$1\ ,\ 2^{-\alpha_1}.\,3\ ,\ 2^{-\alpha_2}.\,5\ ,\ \ldots\ ,\ 2^{-\alpha_k}(2k+1)\ ,\ \ldots,$$
$$2^{-\alpha_{\mu-1}}(2\mu-1)\ ,\ 2^{-\alpha_\mu}(2\mu+1)\ ,$$

por 2^{α_μ} todos ellos se hacen enteros, y se tiene:

$$\begin{gathered}2^{\alpha_\mu}.\,1\ ,\ 2^{\alpha_\mu-\alpha_1}.\,3\ ,\ 2^{\alpha_\mu-\alpha_2}.\,5\ ,\ \ldots\ ,\ 2^{\alpha_\mu-\alpha_k}(2k+1)\ ,\ \ldots,\\ 2^{\alpha_\mu-\alpha_{\mu-1}}(2\mu-1)\ ,\ 2\mu+1\end{gathered} \qquad [4]$$

Supongamos, como primer caso, que μ se pueda escribir en la forma $\mu = 2^h$. Entonces, $2\mu+1 = 2^{h+1}+1$, y por la [3], $\alpha_\mu = h+1$, mientras que $\alpha_{\mu-1} = E[\log_2(2^{h+1}-1)] = h$. Y para el valor $k = 2^{h-1}$, es $2k+1 = 2^h+1$ y $\alpha_k = h$. De las notas [4], la primera es, pues, 2^{h+1}; la 2^{h-1}-ésima es $2^{h+1-h}(2^h+1) = 2^{h+1}+2$, y la última, $2^{h+1}+1$. Es decir, si las disponemos en orden creciente, se tiene:

$$\ldots < 2^{h+1} < 2^{h+1}+1 < 2^{h+1}+2 < \ldots \qquad [4']$$

Probemos ahora que todas las notas restantes son de la forma $2^{h+1}+2\nu$, siendo $\nu = 1, 2, \ldots, 2^h-1$. Por tanto, resultará que 2^{h+1} es la menor de todas las [4′].

Para ello, probemos que toda frecuencia de la forma $2^{h+1}+2\nu$ está en el grupo [4], siendo $\nu = 1, 2, \ldots, 2^h-1$: pues probado ésto, estas 2^h-1 notas, junto con $2\mu = 2^{h+1}$ y $2\mu+1 = 2^{h+1}+1$ que figuran en [4′] nos darán todas las $2^h-1+2 = 2^h+1 = \mu+1$ notas del acorde.

Sea $\alpha \geq 0$ el exponente de ν, y éste un representante de $2p+1$, es decir, sea

$$\nu = 2^\alpha(2p+1)$$

Como el máximo valor de ν, o sea 2^h-1, es inferior a 2^h, resulta ciertamente $\alpha < h$. Además,

$$2p+1 = 2^{-\alpha}\nu \leq 2^{-\alpha}(2^h-1)\ ,$$

y por tanto

$$2p \leq 2^{-\alpha}(2^h-1)-1 < 2^{-\alpha}(2^h-1)\ ,$$

y

$$p < 2^{-\alpha-1}(2^h-1)\ .$$

Por tanto, si tomamos el índice

$$k = 2^{h-\alpha-1} + p$$

resulta, por una parte

$$k < 2^{h-\alpha-1} + 2^{-\alpha-1}(2^h - 1) = 2 \cdot 2^{h-\alpha-1} - 2^{-\alpha-1} = 2^{h-\alpha} - 2^{-\alpha-1} < \mu ,$$

lo que prueba que k es uno de los índices $1, 2, \ldots, \mu - 1$; y además,

$$2k + 1 = 2^{h-\alpha} + 2p + 1 ,$$

y por ser

$$0 < 2p + 1 < 2^{h-\alpha} ,$$

$$2^{h-\alpha} < 2k + 1 < 2 \cdot 2^{h-\alpha} = 2^{h-\alpha+1},$$

luego $\alpha_k = h - \alpha$. Por consiguiente, el número

$$2^{\alpha_\mu - \alpha_k}(2k + 1) = 2^{h+1-(h-\alpha)}(2^{h-\alpha} + 2p + 1) = 2^{h+1} + 2^{\alpha+1}(2p + 1) = 2^{h+1} + 2\nu$$

está en nuestra serie. Esta consta, pues, como ya dijimos, de los siguientes números (ordenados por orden creciente):

$$2^{h+1} < 2^{h+1} + 1 < 2^{h+1} + 2 < 2^{h+1} + 4 < \ldots < 2^{h+1} + 2\nu < \ldots < 2^{h+1} + 2(2^h - 1) = 2^{h+2} - 2 , \qquad [5]$$

de donde, practicando dos inversiones:

$$2^{h+1} + 2 < 2^{h+1} + 4 < \ldots < 2^{h+1} + 2\nu < \ldots < 2^{h+2} - 2 < 2^{h+2} < 2^{h+2} + 2 ,$$

y bajando una octava y reemplazando 2^h por μ:

$$\mu + 1 < \mu + 2 < \ldots < \mu + \nu < \ldots < 2\mu - 1 < 2\mu < 2\mu + 1 , \qquad [6]$$

y el teorema queda demostrado en este caso.

Si ahora fuera $\mu = 2^h + 1$, se tiene $\alpha_u = h + 1 = \alpha_{\mu-1}$, $\alpha_{u-2} = h$, y la nueva nota $2\mu + 1 = 2^{h+1} + 3$ aparece intercalada en [5] entre la 3ª y la 4ª. Practicando entonces cuatro inversiones y bajando una octava, recaemos en la [6]. En general, si $\mu = 2^h + \delta$, siendo

$\delta < 2^h - 1$, el valor de α_μ sigue siendo el mismo, $h+1$, y la nota $2\mu + 1 = 2^{h+1} + 2\delta + 1$ viene a intercalarse en [5] entre las dos inmediatas, $2^{h+1} + 2\delta$ y $2^{h+1} + 2\delta + 2$. Con $2(\delta + 1)$ inversiones y un descenso de octava, la [5] nos da siempre la [6]. Al llegar al valor $\delta = 2^h - 1$, ó $\mu = 2^{h+1} - 1$, la nota $2\mu + 1$ se coloca al final del grupo [5], y la [5] da directamente la [6]. Si $\mu = 2^{h+1} = 2^{h'}$, valen los mismos razonamientos con el valor $h' = h + 1$ en lugar de h. El teorema está, pues, demostrado en todos los casos.

48. — Los dos teoremas anteriores son previos, y sin relación por el momento con los acordes asonantes. Ellos nos dicen que los acordes menores que una octava, en que estén representados los armónicos impares $1, 3, 5, \ldots, 2\mu + 1$ son todos del tipo $\mu + 1 < \mu + 2 < \ldots < 2\mu + 1$ y solamente éstos. Relacionaremos ahora, en los teoremas que van seguir, el acorde-tipo $\mu + 1 < \mu + 2 < \ldots < 2\mu + 1$ con los acordes asonantes.

Teorema III. — *El acorde-tipo* [6] *es asonante.*

Dem.: Como las notas consecutivas de [6] difieren en una unidad, el 1 será uno de los sonidos de Tartini de 1^er^ orden de este acorde; tomando en cambio las notas de dos en dos se obtiene el sonido diferencial 2, de tres en tres el sonido 3, y así sucesivamente. La frecuencia más alta entre los sonidos diferenciales de primer orden es evidentemente $2\mu + 1 - (\mu + 1) = \mu$. Los sonidos diferenciales junto con las notas originales dan, pues, toda la serie numérica $1, 2, \ldots, \mu, \mu + 1, \ldots, 2\mu + 1$. Es entonces evidente que los sonidos diferenciales de 2º orden, o de órdenes superiores, no dan frecuencias nuevas.

Los sonidos diferenciales $1, 2, \ldots, \mu$ representan armónimos impares que no pueden superar evidentemente a $2\mu + 1$; y como ya entre los sonidos originales $\mu + 1, \mu + 2, \ldots, 2\mu + 1$ están representados todos esos armónicos (Teorema I), concluímos, como afirma el teorema, que el acorde-tipo es asonante.

Teorema IV. — *Todo acorde asonante menor que una octava puede reducirse (mediante inversiones y traslaciones de octavas) al tipo* [6].

Dem.: Procederemos a esta demostración por el método de inducción completa, tan conocido de los matemáticos. Ante todo, es inmediato que el único acorde menor que una octava en que estén representados los armónicos 1 y 3 solamente, y cada uno una vez, es el acorde $2 < 3$ (el otro posible, $3 < 4$, se reduce a éste mediante inversión y descenso de una octava), y éste es evidentemente asonante y del tipo [6] ($\mu = 1$). El teorema está así demostrado para el caso especial $\mu = 1$.

Admitamos ahora, por un instante, que hayamos demostrado el teorema para todos los valores $\mu = 1, 2, \ldots, \delta$, es decir, que para cada uno de esos valores de μ, el único acorde asonante menor que una octava en que esté representados los armónicos $1, 3, \ldots, 2\mu + 1$, sea el acorde [6]. Bajo esta suposición, consideremos ahora un acorde menor que una octava, asonante, y en el que estén representados los armónicos hasta el $2(\delta + 1) + 1$, es decir, algunos de los números $1, 3, 5, \ldots, 2\delta + 1, 2(\delta + 1) + 1 = 2\delta + 3$, pudiendo no estar todos, pero debiendo figurar el último. Evidentemente, siempre podremos disponer las notas de ese acorde en orden creciente, de modo que $2\delta + 3$ sea la última (ello solo requiere subir o bajar cierto número de octavas), es decir:

$$\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_m < 2\delta + 3 . \qquad [7]$$

Si consideramos el acorde parcial formado por las notas $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$, éste es menor que una octava. Sus sonidos diferenciales, por estar contenidos entre los del acorde total, no presentan sino armónicos impares no superiores a $2\delta + 3$. Probemos ahora que estos armónicos no pueden alcanzar el valor $2\delta + 3$.

Para ello, llamemos $2q_k + 1$ al armónico que representa ν_k, y sea p_k el exponente de ν_k, para $k = 1, 2, \ldots, m$. Es decir, sea

$$\nu_k = 2^{p_k}(2q_k + 1) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) .$$

Entonces se tiene (puesto que el armónico $2\delta + 3$ no está representado entre los ν_k):

$$2q_k + 1 \leq 2\delta + 1 \quad , \quad \text{ó} \quad q_k \leq \delta . \qquad [8]$$

Consideremos ahora, siendo $k' > k$, el sonido diferencial $\nu_{k'} - \nu_k$, llamando p a su exponente y $2q + 1$ al armónico que él representa:

$$\nu_{k'} - \nu_k = 2^p(2q + 1) = 2^{p_{k'}}(2q_{k'} + 1) - 2^{p_k}(2q_k + 1) . \qquad [9]$$

En esta expresión se presentan tres casos para los valores de p_k, p_k', según que el primero de éstos sea igual, mayor o menor que el segundo.

En el primer caso, $p_k = p_{k'}$, se tiene:

$$\nu_{k'} - \nu_k = 2^{p_k} [(2 q_{k'} + 1)] - (2 q_k + 1)] = 2^{p_k + 1} (q_{k'} - q_k) .$$

Entonces la diferencia $q_{k'} - q_k$, por la [8], es ciertamente no superior a δ, y el factor impar contenido en ella, o sea $2q+1$, resulta a fortiori $\leq \delta$, y por tanto, ciertamente $< 2\delta + 1$.

Si $p_k > p_{k'}$, en la [9] se puede sacar como factor común a $p_{k'}$, obteniéndose así:

$$2^p (2q + 1) = 2^{p_{k'}} [2 q_{k'} + 1 - 2^{p_k - p_{k'}} (2 q_k + 1)] ;$$

la cantidad encerrada entre corchetes, por ser evidentemente impar, coincide con $2q+1$, y por otra parte es $< 2q_{k'} + 1$; luego, se tiene:

$$2q + 1 < 2 q_{k'} + 1 \leq 2\delta + 1 .$$

En el tercer caso, $p_k < p_{k'}$, se puede escribir [9] bajo la forma

$$2^p (2q + 1) = 2^{p_k} [2^{p_{k'} - p_k} (2 q_{k'} + 1) - (2 q_k + 1)] ,$$

en donde nuevamente, la cantidad entre corchetes es $2q+1$. Ahora bien: como el acorde total [7] es menor que una octava, ciertamente es $\nu_{k'} < 2\nu_k$, o sea:

$$2^{p_{k'}} (2 q_{k'} + 1) < 2^{p_k + 1} (2 q_k + 1)$$

y

$$2^{p_{k'} - p_k} (2 q_{k'} + 1) < 2 (2 q_k + 1) .$$

Por consiguiente, se tiene:

$$2q + 1 = 2^{p_{k'} - p_k} (2 q_{k'} + 1) - (2 q_k + 1) < 2 (2 q_k + 1) -$$
$$- (2 q_k + 1) = 2 q_k + 1$$

y, como antes, $2q + 1 < 2\delta + 1$.

En todos los casos resulta, pues, que los sonidos diferenciales del acorde parcial $\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_m$ representan armónicos $< 2\delta + 1$. En otros términos, este acorde parcial, donde solo intervienen armónicos de la serie $1, 3, \ldots, 2\delta + 1$, es asonante. Luego, en virtud de lo que hemos admitido, este acorde puede reducirse a la forma $\delta + 1 < \delta + 2 < \ldots < 2\delta + 1$. Invirtiendo una vez y agregando la nota excluída $2\delta + 3$, se tiene el acorde total en la forma

$$\delta + 2 < \delta + 3 < \ldots < 2\delta + 1 < 2\delta + 2 < 2\delta + 3 ,$$

que no es sino el acorde-tipo [6], en donde μ tiene el valor $\delta + 1$.

Vemos, pues, que, admitido el teorema para los valores $\mu \leq \delta$, resulta también cierto para $\mu = \delta + 1$. Como ya sabemos que el teorema es cierto para $\mu \leq 1$, resulta cierto también para $\mu = 2$; siendo cierto para $\mu \leq 2$, resulta cierto para $\mu = 3$; y así sucesivamente, quedando demostrado en general.

49. — De estos resultados se obtiene inmediatamente el

Teorema V. — *Los acordes asonantes menores que una octava son todos aquellos en que están representados todos los armónicos impares (y cada uno una sola vez) desde* 1 *hasta un impar cualquiera* $2\mu + 1$ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$, *y solamente ellos. Tales acordes pueden reducirse siempre al acorde-tipo*

$$\mu + 1 < \mu + 2 < \ldots < 2\mu + 1 \qquad [6]$$

y recíprocamente.

Dem.: Un acorde asonante menor que una octava se reduce al tipo [6] (Teorema IV), y éste contiene representantes de todos los armónicos impares $1, 3, 5, \ldots, 2\mu + 1$, cada uno una sola vez (Teor. I). Recíprocamente, todo acorde que contenga dichos representantes se reduce a la forma [6] (Teor. II) y éste es asonante (Teor. III).

Resulta así que los únicos acordes asonantes menores que una octava son:

para $\mu = 0$: 1,	(acorde «impropio» de una sola nota);
» $\mu = 1$: $2 < 3$,	do-sol, acorde mayor pitagórico, *estrictamente consonante*;
» $\mu = 2$: $3 < 4 < 5$,	sol-do-mi, inversión del acorde mayor Tol., *estrictamente consonante*;
» $\mu = 3$: $4 < 5 < 6 < 7$,	do-mi-sol-te, acorede mayor de D. B., *estrictamente consonante*;
» $\mu = 4$: $5 < 6 < 7 < 8 < 9$,	mi-sol-te-do-re, no estrictamente consonante;
» $\mu = 5$: $6 < 7 < 8 < 9 < 10 < 11$,	sol-te-do-re-fa♯ (?), no estrictamente consonante;
» $\mu = 6$: $7 < 8 < 9 < 10 < 11 < 12 < 13$,	te-do-re-mi-fa♯ (?)-sol-la♭ (?), no estrictamente consonante;
	etc.

(las notas *fa♯* (?) y *la♭* (?) indican notas que no tienen equivalente exacto en nuestros actuales sistemas, pues la primera pertenece a una Γ^{11} y la segunda a una Γ^{13}).

Como se ve, los únicos acordes estrictamente consonantes y a la vez asonantes son los que ya mencionamos en el § 46, pues la serie de los números primos impares 1, 3, 5, 7, 11, 13,... coincide con la de los números impares solo hasta el 7, pero a partir de aquí ya aparece el 9, que es impar pero no primo.

CAPITULO VI

ARMONIA Y MELODIA

50. — Estudiemos un poco más de cerca el conjunto de sonidos que acompañan a un acorde, y que parcialmente mencionamos en el § 45. Distinguiremos en el acorde, por una parte los sonidos originales, que podemos también llamar *sonidos diferenciales de orden 0;* por otra parte, los sonidos diferenciales de orden 1, 2, 3,... ; y además, los armónicos sucesivos de las notas del acorde.

El conjunto de frecuencias que se ponen en acción al ejecutar un acorde, da así por lo pronto esos tres conjuntos parciales. Ahora bien: si tomamos una frecuencia cualquiera del conjunto total, sea ν, un múltiplo cualquiera de esa frecuencia está también en el conjunto total. En efecto: si esa frecuencia es uno de los sonidos originales, ya sabemos que también los armónicos de ella están en el conjunto; y estos armónicos no son sino los múltiplos sucesivos de ν. Si ν es un sonido diferencial de 1er orden, igual a la diferencia $\nu' - \nu''$ de dos sonidos originales, como también están en el conjunto los múltiplos $k\nu', k\nu''$ (donde $k = 1, 2, 3, \ldots$), estos múltiplos dan a su vez el sonido diferencial $k\nu' - k\nu'' = k(\nu' - \nu'') = k\nu$. Si ν es un sonido diferencial de 2º orden, igual a $\nu' - \nu''$ siendo ν', ν'' sonidos de orden 0 ó 1, como acabamos de probar que también $k\nu'$ y $k\nu''$ están en el conjunto, nuevamente deducimos la misma consecuencia para $k\nu$; y en general, se prueba lo mismo para sonidos diferenciales de cualquier orden (inducción completa). Finalmente, si ν es un armónico de uno de los sonidos originales, entonces es igual a un cierto múltiplo $h\nu'$ de una de las frecuencias originales ν'; pero entonces también está en el conjunto del múltiplo $kh\nu' = k\nu$.

Análogamente se prueba que si tomamos dos frecuencias ν_1, ν_2 del conjunto ($\nu_1 > \nu_2$), la diferencia $\nu_1 - \nu_2$ también está en él. O, más brevemente: como ν_1, ν_2 son sonidos realmente existentes en el conjunto, dan un sonido diferencial que es $\nu_1 - \nu_2$.

El conjunto total de frecuencias puestas en juego al ejecutar un acorde es, pues, un conjunto de números enteros (y positivos) que tiene las siguientes propiedades: la diferencia de dos de ellos está en el conjunto, y un múltiplo cualquiera de uno de ellos está también en el conjunto. Todo conjunto de números que goce de estas propiedades se llama en álgebra un *ideal* en el campo de números enteros. Por consiguiente: *al ejecutar un acorde, se pone en juego un conjunto de frecuencias que constituyen un ideal en el campo de los números enteros.*

Ahora bien: un razonamiento bien conocido ([1]) nos permite afirmar que *un ideal en el campo de los números enteros está constituído por los múltiplos de un cierto número* β, *y solamente por ellos.* Estos múltiplos, siendo β una frecuencia, no representan sino los armónicos sucesivos de β.

Por consiguiente: *al ejecutar un acorde, se dejan oir, no sólo las notas originales de ese acorde, sino todos los armónicos de una cierta nota* β, *y solamente ellos* (los sonidos originales figuran, naturalmente, entre dichos armónicos).

La nota β, definida así unívocamente para cada acorde, no es sino lo que en casos particulares ya Rameau llamaba el *bajo fundamental* del acorde, solo que presentado y definido en una forma más general y completa ([2]).

Notemos que si el acorde se reduce a una sola nota, el conjunto de frecuencias puestas en juego consta precisamente de los armóni-

([1]) Este razonamiento es el siguiente: sea $a > 0$ el mínimo entero positivo que está en el ideal I; y sea b otro elemento cualquiera de I. Efectuando la división de b por a obtendremos un cociente q y un resto r, de modo que se podrá escribir

$$\frac{b}{a} = q + \frac{r}{a} \quad , \qquad \text{ó} \qquad b = aq + r \, ,$$

y siendo r el resto, deberá ser no negativo y menor que el divisor: $0 \leq r < a$. Ahora bien: por estar a y b en I, también aq y $b - aq$ están en I. Pero $b - aq = r$, luego r está en I. En el ideal está entonces el número no negativo r, menor que a; y como a era el mínimo entero positivo del ideal, se deduce que necesariamente es $r = 0$, lo que prueba que $b = aq$ es múltiplo de a.

Todo número del ideal es, pués, múltiplo de a; y recíprocamente, por la definición misma de I, todo múltiplo de a forma parte de él. El ideal I consta, pues, de todos los múltiplos de a (inclusive 0) y sólo de ellos.

([2]) Este concepto se aproxima en realidad más, por su definición aritmética, al *sonido genitor* de M. Gandillot. Véase (VI).

cos de esa nota, de modo que nuestras consideraciones se pueden aplicar también a este caso: *la única diferencia es que el bajo fundamental* β *coincide con la nota misma,* en lugar de ser un verdadero « bajo ».

51. — ¿Cómo se halla el bajo fundamental β conociendo las frecuencias $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ que constituyen las notas del acorde? Desde luego, por su misma definición, β debe ser un divisor común de $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$, y por tanto, divisor del máximo común divisor δ de estos números: es decir, existe un entero k tal que

$$\delta = k\beta .$$

Ahora bien: el ideal es el conjunto *mínimo* que contiene a los números dados $\nu_1, \ldots, \nu_m$. Como los múltiplos de δ constituyen un ideal que contiene a $\nu_1, \ldots, \nu_m$, es necesario que todo múltiplo de δ lo sea también de β y viceversa. Pero de aquí resulta $k = 1$ y $\delta = \beta$, pues de lo contrario, por ejemplo el número $(k+1)\beta = \frac{k+1}{k}\delta$ sería multiplo de β sin serlo de δ. Por tanto: *el bajo fundamental* β *es el máximo común divisor de las frecuencias de las notas del acorde,* $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$.

Si el acorde se traslada en un intervalo cualquiera, es claro que su bajo fundamental se traslada en el mismo intervalo; por ejemplo, si elevamos una octava todas las frecuencias $\nu_1, \ldots, \nu_m$, o sea si las duplicamos, también quedará duplicado β. Podrá pensarse talvez que si en lugar de tomar el intervalo de octava tomamos uno fraccionario, por ejemplo una quinta, o sea $\frac{3}{2}$, algunas de las frecuencias se hacen fraccionarias y ello podría traer dificultades; pero es evidente que tales dificultades son ilusorias, y que podemos siempre evitarlas; en el caso propuesto como ejemplo, podemos, si se quiere, adoptar como unidad de tiempo para la medida de las frecuencias el doble segundo, en cuyo caso las frecuencias originales se hacen $2\nu_1, 2\nu_2, \ldots, 2\nu_m$, y al efectuar la traslación del intervalo $\frac{3}{2}$ se transforman en $3\nu_1, 3\nu_2, \ldots, 3\nu_m$. El bajo fundamental 2β se transforma en 3β o, volviendo a la unidad primitiva (el segundo), en $\frac{3}{2}\beta$, y hemos eliminado la dificultad.

Podemos aprovechar esta circunstancia para suprimir todo factor común a las frecuencias originales (lo que equivale a bajarlas en un mismo intervalo), en cuyo caso los números $\nu_1, \ldots, \nu_m$ se hacen primos entre sí, y β se reduce a la unidad. *En el caso de frecuencias* $\nu_1, \ldots, \nu_m$ *primas entre sí, resulta* $\beta = 1$ *y el ideal consta de todos los números enteros.*

En lo que sigue, al referirnos a las frecuencias $\nu_1, \ldots, \nu_m$ de las notas de un acorde, entenderemos que ellas sean *primas entre sí,* habiéndose suprimido sus factores comunes, en cuyo caso el bajo fundamental es la frecuencia 1. Si las frecuencias no fueran primas entre sí, de modo que tuvieran un factor común, ese factor es precisamente la frecuencia del bajo fundamental β. Resulta de aquí que siempre es posible expresar las frecuencias originales de un acorde bajo la forma $\beta\nu_1, \beta\nu_2, \ldots, \beta\nu_m$, siendo β la frecuencia de su bajo fundamental y $\nu_1, \ldots, \nu_m$ números primos entre sí.

Por ejemplo: calculemos el bajo fundamental del acorde fa-la-do tolemaico. Si adoptamos el la normal de frecuencia 435, entonces el fa tiene la frecuencia 348 y el do la frecuencia 522. Como

$$348 = 87 \times 4 = \beta\,\nu_1$$

$$435 = 87 \times 5 = \beta\,\nu_2$$

$$522 = 87 \times 6 = \beta\,\nu_3\,,$$

resulta $\beta = 87$, y $\nu_1 = 4$, $\nu_2 = 5$, $\nu_3 = 6$. Como $\beta\,.\,2^2 = fa$, resulta que el bajo fundamental β es la doble octava baja del fa del acorde.

El mismo resultado se obtiene, naturalmente, si se toman las frecuencias relativas en lugar de las absolutas. Sabemos ya que en el acorde mayor tolemaico (sea éste el fa-la-do, el do-mi-sol, o cualquier otro) las tres frecuencias están en relación de los números 4, 5 y 6. Entonces (por ser estos números primos entre sí) el bajo fundamental es 1, doble octava baja de la nota 4, o sea, en el caso propuesto, el fa. Los resultados coinciden.

En el caso del acorde mayor pitagórico, de frecuencias 2 y 3, el bajo fundamental es la octava baja de la nota 2, fundamental o tónica. En la gama de Domínguez Berrueta, el acorde mayor es do-mi-sol-te o 4, 5, 6, 7, y el bajo fundamental se halla nuevamente dos octavas abajo del do.

En general, un acorde mayor de la $\Gamma^{p_1, \ldots, p_r}$ consta de notas de frecuencias proporcionales a: $\dfrac{p_1}{2^{\alpha_1}}, \dfrac{p_2}{2^{\alpha_2}}, \ldots, \dfrac{p_r}{2^{\alpha_r}}$, siendo las α_1, $\ldots, \alpha_r$ enteros determinados en tal forma que sea siempre

$$1 < \frac{p_k}{2^{\alpha_k}} < 2$$

o sea

$$\frac{p_k}{2} < 2^{\alpha_k} < p_k\,,$$

de donde:

$$\log_2 p_k - 1 < \alpha_k < \log_2 p_k$$

y, recordando la definición de las magnitudes π_k (ver fórmulas [3], § 14) y de la parte entera de un número (fórmulas [2], § 14), resulta finalmente:

$$\alpha_k = E(\pi_k) = E(\log_2 p_k)\,.$$

Como las α_k crecen al crecer k (pues $p_1 < p_2 < \ldots p_r$), multiplicando las frecuencias del acorde por $2^{E(\pi_r)}$, que es la mayor potencia de 2 que aparece en los denominadores, todas las fracciones se hacen enteras:

$$2^{E(\pi_r)}\,,\; 2^{E(\pi_r)-E(\pi_1)}.\,p_1\,,\; 2^{E(\pi_r)-E(\pi_2)}.\,p_2\,,\; \ldots\,,$$
$$2^{E(\pi_r)\,E-(\pi_{r-1})}.\,p_{r-1}\,,\; p_r\,.$$

Y como ninguno de estos números, salvo el último, contiene el factor primo p_r, es evidente que son primos entre sí. El bajo fundamental es $1 = 2^{E(\pi_r)}\,.\,2^{-E(\pi_r)}$, es decir, está $E(\pi_r)$ octavas más abajo que la primera nota o *tónica* del acorde. Por consiguiente:

El bajo fundamental de un acorde mayor de una $\Gamma^{p_1 \cdots p_r}$ *está* $E(\pi_r)$ *octavas debajo de la nota fundamental o tónica del acorde mismo; y no depende, por consiguiente, sino del armónico más alto,* p_r, *que da origen a la gama, pero no de los demás.*

Por ejemplo, en todas las $\Gamma^{\cdots,7}$ cuyo armónico más alto sea el 7 (estén o no los armónicos 3, 5 entre los generadores de la gama), el bajo fundamental de los acordes mayores está $E(\log_2 7)$ octavas debajo de la tónica. Como $2^2 < 7 < 2^3$, se tiene $E(\log_2 7) = 2$, conforme ya lo vimos en la gama de Domínguez Berrueta. En una $\Gamma^{\cdots,11}$ como $E(\log_2 11) = 3$, el bajo fundamental estaría tres octavas abajo de la tónica.

Análogamente podemos operar con los acordes menores: un acorde menor (véase § 40) se compone de las notas: $1, \dfrac{2^{\lambda_1}}{p_1}, \dfrac{2^{\lambda_2}}{p_2}, \ldots,$ $\dfrac{2^{\lambda_r}}{p_r}$, donde los exponentes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ deben determinarse en forma semejante a las α_k del acorde mayor, es deicr, de tal modo que

$$\frac{1}{2} < \frac{2^{\lambda_k}}{p_k} < 1$$

(esto teniendo en cuenta que la nota fundamental 1 es *la más alta* del acorde); o sea:

$$\frac{1}{2} p_k < 2^{\lambda_k} < p_k$$

$$\log_2 p_k - 1 < \lambda_k < \log_2 p_k .$$

Por consiguiente, se tiene nuevamente:

$$\lambda_k = E(\pi_k) .$$

Multiplicando las frecuencias por el producto $p_1 \ldots p_r$, que es el mínimo común múltiplo de los denominadores, tendremos las frecuencias

$$p_1 p_2 \ldots p_r \ , \ 2^{E(\pi_1)} p_2 \ldots p_r \ , \ 2^{E(\pi_2)} p_1 p_3 \ldots p_r \ ,$$
$$\ldots \ , 2^{E(\pi_r)} p_1 p_2 \ldots p_{r-1} ,$$

evidentemente primas entre sí. El bajo fundamental es ahora 1, y por tanto se obtiene dividiendo la frecuencia de la nota fundamental (la primera de las escritas) por $p_1 p_2 \ldots p_r$.

El bajo fundamental de un acorde menor de una $\Gamma^{p_1 \ldots p_r}$ *se obtiene dividiendo la frecuencia de la nota fundamental por el producto* $p_1 p_2 \ldots p_r$; *y depende, por lo tanto, de todos los armónicos generadores de la gama.*

Por ejemplo: en la Γ^3 de Pitágoras, el acorde menor do-fa (donde do, nota fundamental es la más alta) tiene las frecuencias relativas $1, \frac{2}{3}$, ó 3 , 2. El bajo fundamental se encuentra dividiendo por 3 la frecuencia del do, lo que da el fa de la octava inmediatamente inferior al fa del acorde. En la $\Gamma^{3,5}$ de Tolomeo, las frecuencias son 15, 12, 10 y el bajo fundamental se halla dividiendo por $15 = 3 \times 5$ la frecuencia de la nota fundamental, lo que da por ejemplo para el acorde mi-do-la, un fa situado en la cuarta octava baja a partir del mi. En efecto, si tomamos, como es costumbre, el do como frecuencia 1, el mi tiene la frecuencia $\frac{5}{4}$; la frecuencia del bajo fundamental β es la 15-ava parte de esta última, o sea

$$\beta = \frac{5}{4} \times \frac{1}{15} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2^4} ,$$

es, decir el fa $\left(\frac{4}{3}\right)$ bajado cuatro octavas.

Es digno de notarse que con respecto a la teoría del bajo fundamental, *no se verifica el principio de dualidad.* Ello tiene su explicación en el hecho de que los sonidos diferenciales provienen todos, como múltiplo, de un sonido de frecuencia mínima, que es precisamente el bajo fundamental. En cambio los sonidos aditivos (que habría que considerar, en el caso de las acordes menores, como duales de los de Tartini) no admiten un máximo, del cual todos ellos sean submúltiplos. Ficticiamente podríamos hallar el mínimo común múltiplo de las frecuencias $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ de un acorde, y construir con ayuda de este « tiple fundamental » una teoría análoga a la del bajo fundamental, restableciendo así la ley de dualidad. Pero ello no tendría sentido acústicamente, pues hay siempre armónicos que sobrepasan en altura a ese « tiple fundamental », el cual pierde, por lo mismo, toda su importancia.

(Continuará)

FUNDAMENTOS MATEMATICOS DE LA MUSICA

POR A. E. SAGASTUME BERRA

(*Conclusión* *)

52. — Aunque los acordes que admitimos como consonantes en sentido estricto son solamente, como ya lo hemos dicho, los acordes mayores y menores, podemos sin embargo, basándonos en la teoría del bajo fundamental, dar un concepto de *consonancia relativa* que sirva para precisar la noción más o menos vaga que de ello se tiene.

Supongamos, para ello, un acorde cuyas notas originales pueden escribirse (§ 51) bajo la forma $\beta\nu_1$, $\beta\nu_2$, ..., $\beta\nu_m$ (no excluímos el caso $m = 1$, y entonces $\nu_1 = 1$). Aquí β es la frecuencia (absoluta) del bajo fundamental.

Cuando el bajo fundamental está cerca de las notas dadas, ello indica que éstas son armónicos relativamente bajos de aquél, y en consecuencia, el acorde es « consonante ». Viceversa, si los intervalos entre el bajo fundamental y las notas originales del acorde son grandes, éste es más o menos « disonante ». A consecuencia de esta observación, podemos entonces, para precisar los conceptos, definir primero la *altura relativa* l del acorde. Por definición, la altura relativa será la media geométrica de las frecuencias relativas del acorde o, lo que es lo mismo, la media geométrica de las frecuencias absolutas, dividida por la frecuencia del bajo fundamental:

$$l = \sqrt[m]{\nu_1 \cdot \nu_2 \dots \nu_m} = \frac{\sqrt[m]{\beta\nu_1 \cdot \beta\nu_2 \dots \beta\nu_m}}{\beta} \,. \qquad [1]$$

La *altura absoluta* L del acorde será en cambio la media geométrice de las alturas absolutas de sus notas originales:

$$L = \sqrt[m]{\beta\nu_1 \cdot \beta\nu_2 \dots \beta\nu_m} = \beta\sqrt[m]{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m} = \beta l \,. \qquad [2]$$

(*) Ver Tomo CXXIII y sig.

La magnitud

$$K = \log_2 \frac{L}{l} = \log_2 \beta \qquad [3]$$

se llamará la *consonancia* (*relativa*) del acorde (¹).

Esta definición que tiende, como decimos, a precisar el concepto común de « consonancia » (relativa) de una nota o acorde, se justifica, no sólo por la observación puesta al principio de este párrafo (cuanto menor es l mayor es la « consonancia ») sino también por el hecho de que, a mayor altura (absoluta) de una nota o acorde, corresponde también mayor « consonancia »; pues según la [3], K depende no sólo de l, sino también de L.

Las alturas, relativa y absoluta, pueden ser también medidas en octavas, tomando los logaritmos de base 2. Sus respectivas medidas λ, Λ en este sistema serán, pues:

$$\lambda = \frac{1}{m} (\log_2 \nu_1 + \log_2 \nu_2 + \ldots + \log_2 \nu_m) \qquad [4]$$

$$\Lambda = \frac{1}{m} [\log_2 (\beta \nu_1) + \log_2 (\beta \nu_2) + \ldots + \log_2 (\beta \nu_m)] = \log_2 \beta + \lambda , \qquad [5]$$

de donde resulta también

$$K = \Lambda - \lambda . \qquad [6]$$

Si trasladamos el acorde en un intervalo cualquiera α ($\alpha \gtrless 0$) medido en ω, ello equivale a multiplicar las frecuencias originales por 2^α. Entonces β también queda multiplicado por 2^α (§ 51), y por tanto, si l', L', λ', Λ', K' son las magnitudes análogas a l, L, λ, Λ, K para el nuevo acorde, se tendrá:

$$l' = l \quad ; \quad L' = 2^\alpha L \quad ; \quad \lambda' = \lambda \quad ; \quad \Lambda' = \alpha + \Lambda \quad ; \quad K' = \alpha + K .$$

En particular, la consonancia resulta aumentada en la magnitud constante α. Podemos, según ésto, reducirnos por ejemplo a estudiar los acordes formados en las inmediaciones del la normal de 435 vibraciones por segundo. El do bajo de esta octava (generalmente se lo llama do_3) resulta tener así la frecuencia $435 \times \frac{3}{5} = 261$, y el do alto ($do_4$), la frecuencia 522.

(¹) Compárense estas definiciones con las de A. Guillemin (VII).

Obsérvese que en el caso de una sola nota, la altura relativa es 1, y la absoluta coincide con la frecuencia. Por tanto, en este caso, la consonancia es simplemente el logaritmo (de base 2) de la frecuencia. Así por ejemplo, para el do_3, la consonancia es:

$$K = \log_2 261 = 8{,}02790 \, .$$

Para el acorde mayor de una gama, como ya vimos (§ 51), las v_k son los números:

$$2^{E(\pi_r)}, \; 2^{E(\pi_r) - E(\pi_1)} \, . \, p_1 \, , \; 2^{E(\pi_r) - E(\pi_2)} \, . \, p_2 \, , \; \ldots \, ,$$

$$2^{E(\pi_r) - E(\pi_{r-1})} \, . \, p_{r-1} \, , \; p_r \, .$$

Si hacemos coincidir la nota fundamental del acorde con el do_3, tendremos entonces

$$2^{E(\pi_r)} \beta = 261 \, ,$$

de donde

$$\beta = 261.2^{-E(\pi_r)}$$

y

$$K_M = \log_2 261 - E(\pi_r) = 8{,}02790 - E(\log_2 p_r) \, , \qquad [7]$$

fórmula que nos permite calcular la consonancia relativa de los diversos acordes mayores.

La medida en octavas de la altura relativa de este acorde será, según la [4]:

$$\lambda_M = \frac{1}{r+1} \left[\log_2 \left(2^{E(\pi_r)}\right) + \log_2 \left(2^{E(\pi_r) - E(\pi_1)} \, . \, p_1\right) + \ldots + \right.$$

$$\left. + \log_2 \left(2^{E(\pi_r) - E(\pi_k)} \, . \, p_k\right) + \ldots + \log_2 p_r\right] .$$

Pero el término $\log_2 (2^{E(\pi_r) - E(\pi_k)} \, . \, p_k)$ es igual a $E(\pi_r) - E(\pi_k) + \log_2 p_k = E(\pi_r) - E(\pi_k) + \pi_k$. Luego:

$$\lambda_M = \frac{1}{r+1} \left[E(\pi_r) + E(\pi_r) - E(\pi_1) + \pi_1 + E(\pi_r) - E(\pi_2) + \right.$$

$$\left. \pi_2 + \ldots + E(\pi_r) - E(\pi_{r-1}) + \pi_{r-1} + \pi_r\right] = E(\pi_r) +$$

$$+ \frac{1}{r+1} \left[F(\pi_1) + F(\pi_2) + \ldots + F(\pi_r)\right] \qquad [8]$$

Por tanto, la altura absoluta, medida en octavas, será (siendo do_3 la tónica) por las fórmulas [6,], [7] y [8]:

$$\Lambda_M = K_M + \lambda_M = \log_2 261 + \frac{1}{r+1} [F(\pi_1) + F(\pi_2) + \ldots + (F(\pi_r)]. \quad [9]$$

Las formulas [8] y [9], teniendo en cuenta que $F(\pi_k) = \gamma^{p_1, \ldots, p_k, \ldots, p_r}_{0, \ldots, 1, \ldots, 0}$, se pueden escribir también

$$\lambda_M = E(\pi_r) + \frac{1}{r+1} [\gamma^{p_1 p_2 \ldots p_r}_{1, 0, \ldots, 0} + \gamma^{p_1 p_2 \ldots p_r}_{0, 1, \ldots, 0} + $$

$$+ \ldots + \gamma^{p_1 p_2 \ldots p_r}_{0, 0, \ldots, 1}] \quad [8']$$

$$\Lambda_M = \log_2 261 + \frac{1}{r+1} [\gamma^{p_1 p_2 \ldots p_r}_{1, 0, \ldots, 0} + \gamma^{p_1 p_2 \ldots p_r}_{0, 1, \ldots, 0} + $$

$$+ \ldots + \gamma^{p_1 p_2 \ldots p_r}_{0, 0, \ldots, 1}] . \quad [9']$$

Teniendo en cuenta que $\gamma^{p_1 p_2 \ldots p_r}_{0, 0, \ldots, 0} = 0$, se ve que el segundo termino del último miembro de estas fórmulas no es sino el promedio aritmético de las notas del acorde mayor, expresadas en ω.

Análogamente podemos obtener las alturas relativa y absoluta y la consonancia de los acordes menores. Según el § 51, las v_k son en este caso

$$p_1 p_2 \ldots p_r, 2^{E(\pi_1)} p_2 \ldots p_r, 2^{E(\pi_2)} p_1 p_3 \ldots p_r, \ldots, 2^{E(\pi_r)} p_1 p_2 \ldots p_{r-1}$$

Por lo tanto, si do_4 es la fundamental, se tiene

$$\beta p_1 p_2 \ldots p_r = 522,$$

de donde

$$\beta = \frac{522}{p_1 p_2 \ldots p_r}$$

y

$$K_m = \log_2 522 - (\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_r) = 9{,}02790 -$$

$$- (\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_r) .$$

Por otra parte, por la [4], será

$$\lambda_m = \frac{1}{r+1} [\log_2 (p_1 p_2 \ldots p_r) + \log_2 (2^{E(\pi_1)} p_2 \ldots p_r) + \ldots +$$

$$+ \log_2 (2^{E(\pi_k)} p_1 \ldots p_{k-1} p_{k+1} \ldots p_r) + \ldots + \log_2 (2^{E(\pi_r)} p_1 p_2 \ldots p_{r-1})]$$

El término

$$\log_2 (2^{E(\pi_k)} p_1 \ldots p_{k-1} p_{k+1} \ldots p_r)$$

se calcula así:

$$\log_2 (2^{E(\pi_k)} . p_1 \ldots p_{k-1} p_{k+1} \ldots p_r) = E(\pi_k) + \pi_1 + \ldots + \pi_{k-1} +$$

$$+ \pi_{k+1} + \ldots \pi_r = E(\pi_k) - \pi_k + (\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_r) ,$$

mientras que el primer término es simplemente $\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_r$. Esta suma aparece así repetida $r + 1$ veces, y teniendo en cuenta además que $E(\pi_k) - \pi_k = - F(\pi_k)$, resulta:

$$\lambda_m = \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_r - \frac{1}{r+1} [F(\pi_1) + F(\pi_2) + \ldots + F(\pi_r)] . \quad [11]$$

Por lo tanto,

$$\Lambda_m = K_m + \lambda_m = \log_2 522 - \frac{1}{r+1} [F(\pi_1) + F(\pi_2) + \ldots + F(\pi_r)] , \quad [12]$$

y estas dos fórmulas pueden escribirse también:

$$\lambda_m = \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_r - \frac{1}{r+1} [\gamma^{p_1 p_2 \ldots p_r}_{1,0,\ldots,0} + \gamma^{p_1 p_2 \ldots p_r}_{0,1,\ldots,0} +$$

$$+ \ldots + \gamma^{p_1 p_2 \ldots p_r}_{0,0,\ldots,1}] \quad [11']$$

$$\Lambda_m = \log_2 522 - \frac{1}{r+1} [\gamma^{p_1 p_2 \ldots p_r}_{1,0,\ldots,0} + \gamma^{p_1 p_2 \ldots p_r}_{0,1,\ldots,0} +$$

$$+ \ldots + \gamma^{p_1 p_2 \ldots p_r}_{0,0,\ldots,1}] \quad [12']$$

Haciendo uso de estas fórmulas [3] a [12′], hemos calculado en la tabla siguiente los valores λ, Λ , K para algunos acordes entre los más comunes, especificando en cada caso la gama a que pertenecen.

Acorde	Gama	r_k	λ	Λ	K
do_3	cualquiera	1	0,00000	8,02790	8,02790
do_3-sol_3	prim. ó Pit.	2 , 3	1,29248	8,32038	7,02790
do_3-mi_3-sol_3	Tol. ó Tol. cr.	4 , 5 , 6	2,30230	8,33020	6,02790
do_3-mi_3 sol_3-te_3	D. B.	4 , 5 , 6 , 7	2,42856	8,45646	6,02790
do_3-mi_3 fa$\#_3$(?)-sol_3-te_3	$\Gamma^{3,5,7,11}$	8 , 10 , 11 , 12 , 14	3,43473	8,26263	5,02790
do_3-mi_3 fa$\#_3$(?)-sol_3-la$\flat_3$(?)-te_3	$\Gamma^{3,5,7,11,13}$	8 , 10 , 11 , 12 , 13 , 14	3,47902	8,50692	5,02790
do_4-fa_3	prim. ó Pit.	3 , 2	1,29248	8,73542	7,44294
do_4-la$\flat_3$-fa_3	Tol. ó Tol. cr.	15 , 12 , 10	3,60459	8,72560	5,12101
mi_4-do_4-la_3-sol$\flat_3$ (*)	D. B.	105 , 84 , 70 , 60	6,28568	8,92127	2,63559
do_3-mi_3-sol_3-si$\flat_3$	Tol. cr.	36 , 45 , 54 , 64	5,60417	8,46215	2,85798
cualquiera	at.	irracionales	∞	arbitr.	$-\infty$

Hemos incluído entre los « acordes », a una sola nota, el do_3 que es el punto de partida, para que sus valores de λ, Λ y K sirvan de comparación con los restantes. De acuerdo con esto vemos, por ejemplo, que para la altura absoluta del do_3, o sea 261 vibraciones por segundo, el máximo de consonancia está dado por el $\log_2 261 = 8,02790$; y en efecto, todos los demás acordes tienen una consonancia menor.

En la segunda sección del cuadro van una serie de acordes mayores de distintas gamas. Las notas seguidas de (?), por ejemplo fa$\#_3$, (?), indican notas que no tiene equivalente exacto en nuestros sistemas actuales. Obsérvese cómo disminuye la consonancia al aumentar los armónicos generadores de la gama (como la altura absoluta Λ varía poco, esa disminución se debe al aumento de la altura relativa λ, o sea al alejamiento del bajo fundamental con respecto a las notas del acorde).

En la tercera sección del cuadro van los acordes menores. Como éstos se consideran engendrados en sentido inverso a los mayores, es decir, con la tónica como nota más alta, hemos tomado para ésta el do_4 en lugar del do_3, salvo el marcado con asterisco en la gama de Domínguez Berrueta, pues en ella no existe una nota [la llamaríamos *re*(?)] que completa el acorde menor do_4-la$\flat_3$-fa_3-re_3(?); en este caso hemos partido de la tónica mi_4. La consonancia de los acordes menores es más baja que la de los mayores, y ya el acorde menor tolemaico do_4-la$\flat_3$-fa_3 es muy poco más consonante que los mayores de las gamas $\Gamma^{3,5,7,11}$ y $\Gamma^{3,5,7,11,13}$ que contienen armónicos elevados.

El acorde que figura en la cuarta sección es, entre los disonantes, uno de los más usados. Es un acorde de *séptima de dominante*, como se le llama, con respecto a la tonalidad de fa. Obsérvese su baja consonancia, apenas superior a la del acorde menor de Domínguez Berrueta. Para nosotros es uno de los acordes que hemos llamado imperfectos (véase § 42) y proviene del acorde mayor do_3-mi_3-sol_3-te_3 de la gama de Domínguez Berrueta, por sustitución de la nota te_3 por su más próxima tolemaica, $si\flat_3$. Nótese cuánto se pierde en el cambio.

Finalmente, en la quinta sección del cuadro tratamos el caso de la gama atemperada. Cualquier intervalo ($< 1\,\omega$) de esta gama es *irracional*, de la forma $\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{\alpha}$, donde $\alpha = 1, 2, \ldots, 11$. No existiendo relaciones racionales entre las v_k, éstas pueden representarse solo aproximadamente por números enteros, y éstos crecen a medida que la aproximación es mayor. Con ellos sus logaritmos, y por tanto λ, crecen indefinidamente. De ahí el valor-límite ∞ que hemos indicado para λ. La altura absoluta Λ puede ser arbitraria, pero en cualquier caso la consonancia K tiene, por la [6], el valor-límite $-\infty$. En este ejemplo se ve claramente la notable diferencia entre una gama « natural », como la de Tolomeo o Domínguez Berrueta, y la gama atemperada « artificialmente » (aún admitiendo que los valores de K no correspondan sino groseramente a lo que entendemos intuitivamente por « consonancia »).

53. — Supongamos tener dos acordes A', A'', de frecuencias $\beta'v'_1$, $\beta'v'_2, \ldots, \beta'v'_{m'}$ el primero, $\beta''v''_1$, $\beta''v''_2, \ldots, \beta''v''_{m''}$ el segundo; por lo tanto, los frecuencias de los bajos fundamentales son β', β''. Tomando en conjunto todas estas $m' + m''$ notas, se forma otro acorde A cuyas alturas λ, Λ y bajo fundamental β queremos hallar, suponiendo conocidas las magnitudes análogas λ', Λ', β' ; λ'', Λ'', β'' relativas a los acordes dados.

Por la misma definición del bajo fundamental β, éste debe ser el máximo común divisor de todas las frecuencias dadas. Este máximo común divisor puede hallarse así: hallemos primero el m. c. d. de las frecuencias de A', con lo que obtenemos β'; por separado el m. c. d. de las frecuencias de A'', que es β''; y luego, el m. c. d. de estos dos números. Resulta entonces que β es simplemente el m. c. d. de β', β''. El máximo común divisor de dos números a, b suele indicarse con (a, b). Así pues, se tiene:

$$\beta = (\beta', \beta'') . \qquad [13]$$

Ahora bien: el m. c. d. de dos números es una función lineal (y homogénea) de ellos; y por otra parte, es naturalmente submúltiplo de esos mismos números. Por tanto, la [13] equivale a decir que existen cuatro números enteros a', a'', k' k'' (los dos últimos positivos) tales que:

$$\beta = a'\beta' + a''\beta'' \qquad [14]$$

$$\beta' = k'\beta \quad ; \quad \beta'' = k''\beta \,. \qquad [15]$$

La altura absoluta Λ es también una función lineal homogénea de Λ', Λ''. En efecto, se tiene:

$$\Lambda = \frac{1}{m' + m''} [\log_2 (\beta' \nu'_1) + \ldots + \log_2 (\beta' \nu'_{m'}) + \log_2 (\beta'' \nu''_1) +$$

$$+ \ldots + \log_2 (\beta'' \nu''_{m''})] = \frac{m'}{m' + m''} \frac{\log_2 (\beta'\nu'_1) + \ldots + \log_2 (\beta'\nu'_{m'})}{m'} +$$

$$+ \frac{m''}{m' + m''} \frac{\log_2 (\beta'' \nu''_1) + \ldots + \log_2 (\beta'' \nu''_{m''})}{m''}$$

y, teniendo en cuenta la definición de Λ', Λ'' [fórmula (5)]:

$$\Lambda = \frac{1}{m' + m''} (m' \Lambda' + m'' \Lambda'') \,, \qquad [16]$$

lo que prueba la afirmación. Λ resulta ser una *media ponderal* de Λ', Λ'', con los *pesos* m', m'', respectivamente.

Para calcular λ, hay que tener en cuenta que el único factor común a todas las frecuencias del acorde total A es β, y que esas frecuencias pueden expresarse, por las [15], en la forma: $\beta . k'\nu'_1, \ldots, \beta . k'\nu'_{m'}, \beta . k''\nu''_1, \ldots, \beta . k''\nu''_{m''}$. Luego las ν_i para el acorde total A son ahora los números: $k'\nu'_1, k'\nu'_2, \ldots, k'\nu'_{m'}, k''\nu''_1, \ldots, k''\nu''_{m''}$, cuyo promedio logarítmico, según la [4], es λ. Es decir:

$$\lambda = \frac{1}{m' + m''} [\log_2 (k' \nu'_1) + \ldots + \log_2 (k' \nu'_{m'}) + \log_2 (k'' \nu''_1) +$$

$$+ \ldots + \log_2 (k'' \nu''_{m''})] = \frac{1}{m' + m''} [m' \log_2 k' + \log_2 \nu'_1 + \ldots +$$

$$+ \log_2 \nu'_{m'} + m'' \log_2 k'' + \log_2 \nu''_1 + \ldots + \log_2 \nu''_{m''}] \,,$$

y, teniendo en cuenta que, por la [4], $\log_2 v'_1 + \ldots + \log_2 v'_{m'} = m'\lambda'$, y análogamente para λ'', resulta finalmente:

$$\lambda = \frac{1}{m' + m''} [m' (\lambda' + \log_2 k') + m'' (\lambda'' + \log_2 k'')] \qquad [17]$$

La [17] nos dice que también λ es una función lineal (no homogénea) de λ', λ''. Si consideramos por un instante como altura relativa *ficticia* del primer acorde, a la magnitud $\lambda' + \log_2 k'$, y análogamente, $\lambda'' + \log_2 k''$ para el acorde A'', la [17] nos dice que λ es la media ponderal, con pesos m', m'', de esas alturas ficticias.

Estas consideraciones pueden ser útiles para calcular la altura relativa, o el bajo fundamental, de acordes complejos. Por ejemplo, vamos a calcular por este procedimiento λ y β para el acorde de séptima dominante que aparece en la tabla final de § anterior. El acorde A está formado por la superposición del acorde A': do$_3$-mi$_3$-sol$_3$, y del « acorde » de una sola nota A'': si$\flat_3$. Para el primero, se tiene $m' = 3$ (número de notas), $v'_1 = 4$, $v'_2 = 5$, $v'_3 = 6$, y $\beta' = \frac{261}{4} = 65{,}25$ o, adoptando como unidad de tiempo el cuádruple segundo, $\beta' = 65{,}25 \times 4 = 261$. El valor de λ', que no depende de la altura absoluta, es el dado por la tabla, o sea $\lambda' = 2{,}30230$. Para el acorde A'', es $m'' = 1$, $v''_1 = 1$, y $\lambda'' = 0$. En cambio β'' es $\frac{261 \times 64}{36} = 464$, o, adoptando la misma unidad de tiempo, $\beta'' = 464 \times 4 = 1856$. Siendo

$$261 = 9 \times 29 \qquad ; \qquad 1856 = 64 \times 29$$

y 9 y 64 primos entre sí, se tendrá $k' = 9$, $k'' = 64$, el m. c. d. de β', β'' será 29 y, volviendo al segundo como unidad de tiempo, $\beta = \frac{29}{4} = 7{,}25$, de donde

$$K = \log_2 7{,}25 = \log_2 \frac{29}{4} = 4{,}85798 - 2 = 2{,}85798 ,$$

en concordancia con el valor de la tabla. Aplicando ahora la [17], será:

$$\lambda = \frac{1}{4}[3\,(2{,}30230 + \log_2 9) + 1\,(0 + \log_2 64)] =$$

$$= \frac{1}{4}[3\,(2{,}30230 + 3{,}16992) + 1 \times 6] = 5{,}60416\,,$$

también de acuerdo con la tabla (el error en la última cifra no tiene importancia, y se elimina usando más cifras decimales en los logaritmos).

Resumiendo los resultados de este §, podemos enunciar el teorema: *Superponiendo dos acordes A', A'', se obtiene un acorde compuesto A, cuyo bajo fundamental y alturas absoluta y relativa son funciones lineales (y las dos primeras homogéneas) de las correspondientes magnitudes para los acordes A', A''.* En particular: *el bajo fundamental β es el máximo común divisor de los bajos fundamentales β', β'' de los acordes dados.*

Esta última proposición puede enunciarse también, en forma más útil para nuestro objeto, así: *el bajo fundamental β de un acorde A, compuesto de los acordes A', A'', coincide con el bajo fundamental del acorde de dos notas formado por los bajos fundamentales β', β'' de los acordes componentes.*

Pues si consideramos el acorde formado por las notas β', β'', su bajo fundamental es el m. c. d. de estos números, es decir, β.

54. — Si queremos, pues, estudiar con respecto a su consonancia tales acordes *compuestos* mediante otros dos, convendrá considerar previamente los acordes de dos notas formados por los bajos fundamentales.

Como la altura absoluta, para este efecto, es arbitraria, podemos hacer coincidir uno de los bajos fundamentales, por ejemplo β', con el do_3 de 261 vibraciones por segundo. Estudiaremos, pues, los acordes de dos notas formados por este do_3 y otra nota cualquiera, dentro de las distintas gamas que hemos dado en los capítulos III y IV.

Comencemos por la gama pitagórica, o sea la $\Gamma^3_{(0,11)}$, que consta de las notas fa, do, sol, re, la, mi, si, fa#, do#, sol#, re#, la#, engendradas por quintas sucesivas (véase §§ 22, 23), de modo que cada nota se obtiene de la anterior multiplicando su frecuencia por 3 y reduciendo a la octava. Si tomamos para el do_3 la frecuencia (relativa) 1, esas notas, en el orden escrito, tienen las frecuencias:

$$\frac{4}{3},\ 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{9}{8},\ \frac{27}{16},\ \frac{81}{64},\ \frac{243}{128},\ \frac{729}{512},\ \frac{2187}{2048},\ \frac{6561}{4096},\ \frac{19683}{16384},\ \frac{59049}{32768}.$$

Para el acorde do_3-fa_3, las frecuencias relativas son, pues, 1 y $\frac{4}{3}$, ó 3 y 4. El bajo fundamental es 1 (pues esas frecuencias son primas entre sí) y representa un fa dos octavas más bajo que el original, o sea fa_1 (el subíndice, ya sea positivo, cero o negativo, indica la octava a que pertenece la nota, contada de do a si, y considerando como octava 3 la que contiene el la normal de 435 vibraciones por segundo, o para nuestro caso, la que comienza con el do de frecuencia 261). El bajo fundamental será la frecuencia absoluta de este fa_1, o sea $\beta = 261 \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{2^2} = 87$. Aquí 261 es la frecuencia del do_3; multiplicándola por $\frac{4}{3}$ tendremos la del fa_3, y bajando dos octavas, o sea multiplicando por $\frac{1}{2^2}$, tendremos la del fa_1, que es el bajo fundamental. Teniendo en cuenta la fórmula [3] obtenemos la consonancia: $K = \log_2 87 = 6,44294$.

Con el acorde do_3-sol_3 operamos análogamente: las frecuencias relativas son 2 y 3. Bajo fundamental, do_2, de frecuencia $\beta = \frac{261}{2} = 130,5$. Consonancia $K = \log_2 130,5 = 7,02790$. Y así seguiríamos con las demás notas pitagóricas, obteniendo finalmente la siguiente tabla:

Gama pitagórica					
Acorde	Bajo fund.	K	Acorde	Bajo fund.	K
do_3 - fa_3	fa_1	6,44294	do - $fa\#_3$	do_{-6}	—0,97210
» - sol_3	do_2	7,02790	» - $do\#_3$	do_{-8}	—2,97210
» - re_3	do_0	5,02790	» - $sol\#_3$	do_{-9}	—3,97210
» - la_3	do_{-1}	4,02790	» - $re\#_3$	do_{-11}	—5,97210
» - mi_3	do_{-3}	2,02790	» - $la\#_3$	do_{-12}	—6,97210
» - si_3	do_{-4}	1,02790			

Para la gama tolemaica cromática, debemos tener en cuenta ante todo que las frecuencias relativas (tomando el do_3 como unidad), según los §§ 25 y 26, son:

$$\frac{32}{25}, \frac{48}{25}, \frac{36}{25}, \frac{27}{25}, \frac{8}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5}, \frac{4}{3}, 1, \frac{3}{2}, \frac{9}{8}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{15}{8},$$

$$\frac{25}{18}, \frac{25}{24}, \frac{25}{16}, \frac{75}{64}, \frac{125}{72}, \frac{125}{96}, \frac{125}{64},$$

correspondiendo, respectivamente, a las notas:

fa$\flat_3$, do$\flat_3$, sol$\flat_3$, re$\flat_3$, la$\flat_3$, mi$\flat_3$, si$\flat_3$, fa$_3$, do$_3$, sol$_3$, re$_3$, la$_3$, mi$_3$, si$_3$,

fa$\sharp_3$, do$\sharp_3$, sol$\sharp_3$, re$\sharp_3$, la$\sharp_3$, mi$\sharp_3$, si$\sharp_3$.

Efectuando cálculos análogos a los del caso anterior, obtendremos ahora el cuadro siguiente:

Gama tolemaica cromática

Acorde	Bajo fund.	K	Acorde	Bajo fund.	K
do$_3$ - fa$\flat_3$	fa$\flat_{-2}$	3,38405	do$_3$ - la$_3$	fa$_1$	6,44294
» - do$\flat_3$	fa$\flat_{-2}$	3,38405	» - mi$_3$	do$_1$	6,02790
» - sol$\flat_3$	fa$\flat_{-2}$	3,38405	» - si$_3$	do$_0$	5,02790
» - re$\flat_3$	fa$\flat_{-2}$	3,38405	» - fa$\sharp_3$	si$\flat_{-2}$ (?)	3,85798
» - la$\flat_3$	la$\flat_0$	5,70598	» - do$\sharp_3$	fa$_{-2}$	3,44294
» - mi$\flat_3$	la$\flat_0$	5,70598	» - sol$\sharp_3$	do$_{-1}$	4,02790
» - si$\flat_3$	la$\flat_0$	5,70598	» - re$\sharp_3$	do$_{-3}$	2,02790
» - fa$_3$	fa$_1$	6,44294	» - la$\sharp_3$	si$\flat_{-4}$ (?)	1,85798
» - sol$_3$	do$_2$	7,02790	» - mi$\sharp_3$	fa$_{-4}$	1,44294
» - re$_3$	do$_0$	5,02790	» - si$\sharp_3$	do$_{-3}$	2,02790

Obsérvese que, en conjunto, esta gama presenta mayores consonancias que la pitagórica.

Mayores aún serán esas consonancias para la gama de Domínguez Berrueta, que vamos a estudiar ahora. Su frecuencias relativas (§ 33) son:

$$\frac{10}{7},\frac{15}{14},\frac{8}{5},\frac{6}{5},\frac{9}{5},\frac{4}{3},1,\frac{3}{2},\frac{9}{8},\frac{5}{3},\frac{5}{4},\frac{15}{8},\frac{7}{5},\frac{21}{20},\frac{14}{9},\frac{7}{6},\frac{7}{4}.$$

para las notas, respectivamente:

sol$\flat_3$, re$\flat_3$, la$\flat_3$, mi$\flat_3$, si$\flat_3$, fa$_3$, do$_3$, sol$_3$, re$_3$, la$_3$, mi$_3$, si$_3$,

fa$\sharp_3$, do$\sharp_3$, sol$\sharp_3$, re$\sharp_3$, te$_3$.

Con estos datos construiremos ahora la tabla correspondiente, que es:

Gama de Domínguez Berrueta

Acorde	Bajo fund.	K	Acorde	Bajo fund.	K
do$_3$ - sol$\flat_3$	mi$\flat\flat_0$ (?)	5,22055	do$_3$ - la$_3$	fa$_1$	6,44294
» - re$\flat_3$	m$\flat\flat_{-1}$ (?)	4,22055	» - mi$_3$	do$_1$	6,02790
» - la$\flat_3$	la$\flat_0$	5,70598	» - si$_3$	do$_0$	5,02790
» - mi$\flat_3$	la$\flat_0$	5,70598	» - fa$\sharp_3$	la$\flat_0$	5,70598
» - si$\flat_3$	la$\flat_0$	5,70598	» - do$\sharp_3$	la$\flat_{-2}$	3,70598
» - fa$_3$	fa$_1$	6,44294	» - sol$\sharp_3$	si$\flat_{-1}$ (?)	4,85798
» - sol$_3$	do$_2$	7,02790	» - re$\sharp_3$	fa$_0$	5,44294
» - re$_3$	do$_0$	5,02790	» - te$_3$	do$_1$	6,02790

En esta tabla y la anterior, los bajos indicados con (?) [por ejemplo, si$\flat_{-2}$ (?)] indican, como de costumbre, notas que no pertenecen a la gama respectiva, pero que se aproximan a ella.

Se observa en todos los casos un máximo de consonancia para el acorde do$_3$-sol$_3$, y el valor inmediatamente inferior a éste corresponde, también en todos los casos, al acorde do$_3$-fa$_3$.

55. — Estos hechos pueden ser tratados en general, de la siguiente manera: sea un acorde de dos notas do_3-c, donde c indica una nota de la octava 3ª perteneciente a la $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \ldots p_r}$ atemperada que consideramos. Si asignamos la frecuencia 1 al do$_3$, a la nota c corresponderá una frecuencia fraccionaria, comprendida entre 1 y 2 (incluído el extremo inferior) y el numerador y denominador de esa fracción no podrán admitir otros factores primos que 2 y los $p_1, \ldots, p_r$, generadores de la gama. Se puede escribir, pues:

$$c = \frac{2^{n_0} \cdot p_1^{n_1} \, p_2^{n_2} \ldots p_r^{n_r}}{2^{m_0} \cdot p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \ldots p_r^{m_r}} \qquad [18]$$

donde los números $n_0, \ldots, n_r$; $m_0, \ldots, m_r$ son enteros, positivos o nulos.

Si suponemos ya simplificada la fracción, de modo que no haya factores comunes al numerador y al denominador, ello significa que si un exponente n_i por ejemplo, es positivo, su correspondiente m_i debe ser nulo (en caso contrario podríamos aún simplificar uno o más factores p_i) y viceversa; sin que esto excluya el caso, también posible, de que simultáneamente sea $n_i = m_i = 0$. Esta condición que imponemos (evidentemente sin menoscabo de la generalidad) a los números n_i, m_i puede expresarse brevemente diciendo que su producto $n_i m_i$ ha de ser nulo en todos los casos:

$$n_i m_i = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, r) \tag{19}$$

Por otra parte, como hemos dicho, la fracción [18] debe estar comprendida entre 1 y 2, lo que da:

$$2^{m_0} . p_1^{m_1} \ldots p_r^{m_r} \leq 2^{n_0} . p_1^{n_1} \ldots p_r^{n_r} < 2^{m_0+1} . p_1^{m_1} \ldots p_r^{m_r},$$

condición que utilizaremos bajo la forma logarítmica, es decir, tomando los logaritmos de base 2 de los tres miembros; teniendo en cuenta que $\log_2 p_i = \pi_i$, se tiene:

$$m_0 + m_1 \pi_1 + \ldots + m_r \pi_r \leq n_0 + n_1 \pi_1 + \ldots + n_r \pi_r <$$
$$< m_0 + m_1 \pi_1 + \ldots + m_r \pi_r + 1,$$

lo cual, si escribimos:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_m &= m_0 + m_1 \pi_1 + \ldots + m_r \pi_r \\ \varphi_n &= n_0 + n_1 \pi_1 + \ldots + n_r \pi_r , \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

queda en la forma:

$$\varphi_m \leq \varphi_n < \varphi_m + 1 . \tag{21}$$

Las notas de nuestro acorde tienen las frecuencias relativas 1 y c, o, por la [18] $2^{m_0} p_1^{m_1} \ldots p_r^{m_r}$ y $2^{n_0} p_1^{n_1} \ldots p_r^{n_r}$, y estos números son primos entre sí. En virtud de esta circunstancia, el bajo fundamental estará representado, con el mismo factor de proporcionalidad, por la frecuencia relativa 1, y por tanto la frecuencia absoluta

$$\beta = \frac{261}{2^{m_0} . p_1^{m_1} \ldots p_r^{m_r}}$$

(pues el do_3, de frecuencia absoluta 261, tiene la frecuencia relativa $2^{m_0} . p_1^{m_1} \ldots p_r^{m_r}$). De aquí resulta, tomando logaritmos de base 2 y recordando la fórmula [3]:

$$K = \log_2 261 - m_0 - m_1 \pi_1 - \ldots - m_r \pi_r ,$$

o sea, por la [20]:

$$K = \log_2 261 - \varphi_m = 8{,}02790 - \varphi_m .$$

La función φ_m (y con ella la consonancia K), por depender de las variables enteras $m_0, m_1, \ldots, m_r$, solo toma una sucesión discreta de valores. Como K y φ_m varían en sentidos opuestos, convendrá estudiar la función φ_m a partir de su valor mínimo, para ir obteniendo así los valores de K que sean mayores, que son los que más nos interesan.

El mínimo absoluto de φ_m es 0, valor que se obtiene cuando todas las m_i son nulas. En este caso, por la [21], φ_n está comprendido entre 0 y 1, incluído el extremo inferior 0; y como todas las π_i son mayores que 1, es para ello forzoso que sea $n_1 = n_2 = \ldots = n_r = 0$, con lo que la ecuación [21] queda reducida a

$$0 \leq n_0 < 1 ,$$

de donde resulta $n_0 = 0$; por la [18] es entonces $c = 1$, y recaemos en el do_3. Naturalmente, el acorde reducido a una sola nota presenta, como ya observamos, la máxima consonancia posible.

En general, la ecuación [21] puede también escribirse

$$0 \leq \varphi_n - \varphi_m < 1 ,$$

y observando que $\varphi_n - \varphi_m$ es otra función del mismo tipo, solo que las variables son ahora $n_0 - m_0,\ n_1 - m_1, \ldots,\ n_r - m_r$ (y *pueden tomar valores negativos*) y por tanto podemos indicar a esa función con la notación φ_{n-m}, o bien φ_h, si ponemos:

$$h_i = n_i - m_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, r) , \tag{23}$$

queda

$$0 \leq \varphi_h < 1 . \tag{21'}$$

Dado un cierto valor de φ_m, que corresponde biunívocamente a un sistema de valores de $m_0, m_1, \ldots, m_r$, queda fijado un valor de la consonancia K. Las ecuaciones [21'], [23] y la condición [19] nos permiten entonces determinar un número finito de sistemas de valores $n_0, n_1, \ldots, n_r$ de tal manera que los acordes $do_3 - c$ correspondientes presenten esa consonancia. En efecto, si una m_i es distinta de cero, en virtud de [19] debe ser $n_i = 0$, y por la [23], $h_i = -m_i < 0$. En cambio si $m_i = 0$, pudiendo n_i tomar cualquier valor, resulta $h_i = n_i \geq 0$. Pero es claro que basta con que se sepa cuáles de las h_i deben ser negativas (debe haber, excluyendo el caso del acorde de una sola nota, al menos una $m_i \neq 0$) para limitar las posibilidades, reduciéndolas a un número finito.

Consideremos, por ejemplo, el caso (el más importante) en que $p_1, p_2, \ldots, p_r$ coincidan con los números primos sucesivos 3, 5, 7, 11,... sin faltar ninguno, o que por lo menos, sea $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $p_3 = 7$. Entonces $\pi_1 = 1{,}58$ (no necesitamos más que dos cifras decimales), $\pi_2 = 2{,}32$, $\pi_3 = 2{,}81$, etc. Por tanto

$$\varphi_m = m_0 + 1{,}58\, m_1 + 2{,}32\, m_2 + 2{,}81\, m_3 + \ldots + \pi_r m_r ,$$

expresión que, sustituyendo las m_i por las h_i, nos da φ_h.

a) Evidentemente, excluído el valor 0, φ_m no puede tomar un valor menor que 1, el cual corresponde a $m_0 = 1$, $m_1 = m_2 = \ldots = m_r = 0$. Entonces la ecuación [21′] se transforma en:

$$0 \leq h_0 + 1{,}58\, h_1 + 2{,}32\, h_2 + \ldots + \pi_r h_r < 1 ,$$

con $h_0 = -1$, $h_i \geq 0$ para $i > 0$. Es claro que ningua de las h_i para $i \geq 2$ puede ser positiva, pues ya φ_h resultaría mayor que 1. Luego $h_2 = h_3 = \ldots = h_r = 0$, y la ecuación se convierte en:

$$0 \leq 1{,}58\, h_1 - 1 < 1 ,$$

de donde la única solución $h_1 = 1$. Por la [23] se tiene entonces:

$$n_0 = 0 \quad , \quad n_1 = h_1 = 1 \quad , \quad n_2 = \ldots = n_r = 0 ,$$

y la nota c, por la [18], es $\frac{3}{2}$, o sea el sol$_3$.

b) El valor inmediato de φ_m superior a 1 es 1,58, para $m_0 = 0$, $m_1 = 1$, $m_2 = \ldots = m_r = 0$. Entonces $h_1 = -1$, $h_i \geq 0$ para $i \neq 1$ y la [21′] da:

$$0 \leq h_0 - 1{,}58 + 2{,}32\, h_2 + \ldots + \pi_r h_r < 1 .$$

Para $h_0 \geq 3$ no hay solución, pues φ_h resulta $\geq 1{,}42$. Para $h_0 = 2$ se tiene la solución $h_2 = \ldots = h_r = 0$. Para $h_0 = 1$ nuevamente no hay solución, pues $\varphi_h = -0{,}58 + 2{,}32\, h_2 + \ldots + \pi_r h_r$, que no puede estar comprendido entre 0 y 1; para $h_0 = 0$, existe la solución $h_2 = 1$, $h_3 = \ldots = h_r = 0$; y no hay más soluciones. Los valores de las n_i son, en el primer caso, $n_0 = 2$, $n_1 = n_2 = \ldots = n_r = 0$ y en el segundo, $n_2 = 1$, $n_0 = n_1 = n_3 = \ldots = n_r = 0$, que corresponden, respectivamente, a $c = \frac{4}{3}$ o sea el fa$_3$, y $c = \frac{5}{3}$, el la$_3$ tolemaico.

c) Inmediatamente al valor 1,58, tendremos para φ_m el valor 2,32, para $m_0 = m_1 = 0$, $m_2 = 1$, $m_3 = \ldots = m_r = 0$. Entonces $h_2 = -1$, y las demás $h_i \geq 0$, de modo que la [21'] es:

$$0 \leq h_0 + 1{,}58\, h_1 - 2{,}32 + 2{,}81\, h_3 + \ldots + n_r h_r < 1\,.$$

Como $p_4 \geq 11$, es $\pi_4 \geq 3{,}46$ (pues $\log_2 11 = 3{,}46$) y con mayor razón $\pi_5, \ldots, \pi_r$ serán todos números mayores que 3,46. Por consiguiente, es necesario, para que la condición anterior se verifique, que $h_4 = h_5 = \ldots = h_r = 0$, y queda entonces

$$0 \leq h_0 + 1{,}58\, h_1 - 2{,}32 + 2{,}81\, h_3 < 1\,.$$

Para $h_0 \geq 4$ no hay soluciones, lo mismo que para $h_0 = 2$. Para $h_0 = 3$, tenemos la solución $h_1 = h_3 = 0$. Para $h_0 = 1$, tenemos la posibilidad $h_1 = 1$, $h_3 = 0$; y para $h_0 = 0$ hay dos soluciones: $h_1 = 0$, $h_3 = 1$, y $h_1 = 2$, $h_3 = 0$.

Las únicas soluciones para este valor de φ_m, es decir para $m_0 = m_1 = m_3 = \ldots = m_r = 0$, $m_2 = 1$ son, pues:

$$h_0 = 3\,,\; h_1 = 0\,,\; h_2 = -1\,,\; h_3 = h_4 = \ldots = h_r = 0\,;$$

luego

$n_0 = 3\,, n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_r = 0\,;\, c = \frac{8}{5}$, la♭$_3$ (Tol. cr.) o (D. B.)

$$h_0 = 1 = h_1\,,\; h_2 = -1\,,\; h_3 = h_4 = \ldots = h_r = 0\,;$$

luego

$n_0 = 1 = n_1\,, n_2 = n_3 = \ldots = n_r = 0\,;\, c = \frac{6}{5}$, mi♭$_3$ (Tol. cr.) o (D. B.)

$$h_0 = 0 = h_1 \, , h_2 = -1 \, , h_3 = 1 \, , h_4 = \ldots = h_r = 0 \; ;$$

luego

$$n_0 = 0 = n_1 = n_2 \, , n_3 = 1 \, , n_4 = \ldots = n_r = 0 \; ; c = \frac{7}{5} \, , \text{fa}\#_3 \text{ (D. B.)}$$

$$h_0 = 0 \, , h_1 = 2, \; h_2 = -1 \, , h_3 = h_4 = \ldots h_r = 0 \; ;$$

luego

$$n_0 = 0 \, , n_1 = 2 \, , n_2 = n_3 = \ldots = n_r = 0 ; c = \frac{9}{5} \, , \text{ si}\flat_3 \text{ (Tol.cr.) o (D.B.)}$$

Y así podríamos continuar: para cada *nivel* de la función φ_m hay un número finito de notas c tales que el acorde do$_3$-c presenta la misma consonancia, dada por la fórmula [22]; y estas consonancias van disminuyendo a medida que aumentan los valores de φ_m.

Nótese que, en el caso *a*), la única hipótesis realmente necesaria es que en la $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \ldots p_r}$ sea $p_1 = 3$, pues entonces $p_2 \geq 5$, y $\pi_2 \geq \log_2 5 = 2{,}32$, y valen todas las conclusiones obtenidas. Análogamente, en el caso *b*), todas las conclusiones son válidas con la sola hipótesis que sea $p_1 = 3$, $p_2 = 5$; y en el caso *c*), con la hipótesis $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $p_3 = 7$. Los demás armónicos podrán ser arbitrarios.

Si llamamos *tónica* a la nota do$_3$ que nos ha servido de punto de partida, y que es la que corresponde a la consonancia máxima o al nivel 0 de φ_m, podremos llamar *dominantes primeras* a las notas que corresponden al nivel siguiente de φ_m, o sea al nivel 1, *dominantes segundas* (1) a las del nivel siguiente [en el caso *b*), o sea para $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, este nivel es 1,58]; luego vendrán las *dominantes terceras, cuartas,* etc., cada vez más alejadas armónicamente de la nota fundamental o tónica. La primera dominante (única) en el caso $p_1 = 3$, o sea el sol, se suele llamar simplemente *dominante;* y en cambio se llama *subdominante* a una de las dominantes segundas, el fa (en las gamas que contengan el armónico $p_1 = 3$).

Naturalmente, las consideraciones anteriores pueden aplicarse a cualquier otra nota de la gama, y cualquiera sea su altura absoluta; lo único necesario entonces para que sigan valiendo las conclusiones,

(1) Esta acepción difiere de la que se usa algunas veces. Los músicos suelen llamar *segunda dominante* a la dominante de la dominante. Así, si la tónica es do, su dominante sol, la segunda dominante sería la dominante de sol, o sea *re*. En cambio en nuestra denominación, y en la gama tolemaica por ejemplo, las segundas dominantes son *fa* y *la*.

es trasladar en un mismo intervalo todas las notas de que se trata. Así por ejemplo, si tomamos como tónica el *re* (*Pit.*) en cualquier octava, en lugar del sol su dominante 1ª sería el la (Pit.), que corresponde al intervalo $\frac{3}{2}$, si el re es la unidad. Nótese que pueden aparecer así *dominantes que no pertenezcan a la gama atemperada;* por ejemplo, si tomamos como tónica el re (Tol. cr.), su primera dominante sería una nota a intervalo $\frac{3}{2}$ con respecto a ella. Reduciéndonos como de costumbre al do como unidad, el re (Tol. cr.) tiene la altura $\frac{9}{8}$, y su dominante, la altura $\frac{9}{8} \times \frac{3}{2} = \frac{27}{16}$, que no es el la (Tol. cr.) ni ninguna otra nota de la $\Gamma^{3,5}_{ABGH}$. Esta nota difiere de la (Tol. cr.) $\left(\text{que es } \frac{5}{3}\right)$ en el intervalo $\frac{27}{16} \,/\, \frac{5}{3} = \frac{81}{80}$ que no es sino una coma sintónica. Análogamente, si calculáramos por el procedimiento anterior las quintas dominantes de do en la gama de Domínguez Berrueta, obtendremos una sola, $\frac{10}{7}$, que es el sol$\flat$ (D. B.), mientras que las otras, $\frac{8}{7}$, $\frac{9}{7}$ y $\frac{12}{7}$, no pertenecen a esa gama.

56. — Volvamos ahora a los acordes. Ya vimos (§ 53) que un acorde A, compuesto mediante la superposición de dos acordes A', A'', tiene como bajo fundamental, el bajo fundamental del acorde (de dos notas) formado por los bajos fundamentales de los acordes A', A''. Ello nos condujo a estudiar con cierto detenimiento esos acordes de dos notas, clasificando su consonancia, con lo que hemos llegado a clasificar todas las notas de una gama atemperada cualquiera, con respecto a una nota fundamental o tónica, en una serie de *niveles*, de tal modo que a cada nivel pertenece una o más notas que, junto con la tónica, dan acordes igualmente consonantes. A estos niveles, o mejor dicho, a las notas que se encuentran en cada uno, las hemos llamado, según su importancia armónica o sea según su consonancia con la tónica, *primeras, segundas, terceras,... dominantes* de ésta.

Partamos ahora de un acorde mayor cualquiera, por ejemplo el que tiene como fundamental o tónica la nota do. Su bajo fundamental es también un do, situado (§ 51) un cierto número de octavas debajo de la tónica. Consideremos ahora las dominantes 1as, 2as, etc. hasta un cierto orden determinado k, de esa nota do, y los acordes mayores que tienen como bajos fundamentales esas dominantes. En virtud del mismo teorema citado del § 51, esos acordes serán aquellos que tienen como notas fundamentales las homónimas, solo que elevadas nuevamente a la octava original a que pertenece la tónica. Esos acordes se llamarán *acordes de 1ª, 2ª, . . ., k-ésima dominante* relativos a la tónica do, o a la *tonalidad*, o *tono*, de *do mayor*. Son, por su misma definición, los acordes que presentan mayor afinidad armónica con el acorde de tónica.

Tomemos ahora en conjunto, todas las notas que pertenecen a todos esos acordes (incluso el de tónica): las llamaremos *notas diatónicas* pertenecientes a la tonalidad; a las demás notas existentes en la gama atemperada, las llamaremos *notas cromáticas;* y diremos que las notas diatónicas constituyen la *escala* o *gama melódica* (mayor), dentro de la gama total atemperada, a la que podremos llamar ahora, para diferenciarla, *gama armónica*. La gama melódica está, pues, constituída solamente por las notas diatónicas; y la gama armónica, por éstas y las cromáticas. Bien entendido que esta definición se refiere esencialmente a una tónica o tonalidad, y a un cierto orden k de las dominantes cuya afinidad con la tónica consideramos como admisible o aceptable.

La importancia del concepto de notas diatónicas está en lo siguiente: si construímos una *melodía* o sucesión de notas utilizando exclusivamente la gama melódica, es claro que cada una de esas notas, y por tanto, toda la melodía, podrá *armonizarse* o acompañarse con uno (al menos) de los acordes de tónica o dominantes hasta el orden k, es decir, precisamente aquellos acordes que hemos aceptado como más afines al de tónica.

Las mismas consideraciones que hemos hecho para las tonalidades mayores pueden aplicarse también a las *tonalidades menores,* a saber: si partimos de un acorde menor (de *tónica*), podemos considerar su bajo fundamental, las dominantes 1ª, 2ª, . . ., k-ésima de ese bajo, y los acordes menores que tienen como bajos fundamentales esas notas. Las notas de todos esos acordes en conjunto forman la *gama melódica menor* de esa tonalidad, las demás notas, no *diatónicas,* son las *cromáticas*. Una melodía que conste solo de notas diatómicas podrá armonizarse con los acordes que hemos considerado. La única diferencia está en que ahora la nota del bajo fundamental no es homónima con la fundamental de cada acorde, como en el caso mayor, pero aparte de eso, todo lo dicho se mantiene aplicable.

Para cada tonalidad (ya sea mayor o menor) se suelen considerar solo las que llamaremos *dominantes principales* de los distintos órdenes. Una dominante principal de k-ésimo orden ($k = 1, 2, \ldots$) de una $\Gamma_\Phi^{p_1 \ldots p_r}$ es una dominante de k-ésimo orden común a todas las $\Gamma_\Phi^{p_1}$, $\Gamma_\Phi^{p_1 p_2}$, ..., $\Gamma_\Phi^{p_1 p_2 \ldots p_r}$ contenidas en la gama dada. Toda dominante principal de k-ésimo orden pertenece, pues, en el mismo carácter, a la $\Gamma_\Phi^{p_1}$ contenida en $\Gamma_\Phi^{p_1 \ldots p_r}$ (recuérdese que p_1 es el armónico más bajo); pero recíprocamente, toda dominante k-ésima de $\Gamma_\Phi^{p_1}$ es también una dominante k-ésima de $\Gamma_\Phi^{p_1 \ldots p_r}$. En efecto, si esa dominante corresponde (ver § anterior) a un cierto nivel $\varphi_m = m_0 + m_1 \pi$ de la función φ_m relativa a $\Gamma_\Phi^{p_1}$, se ve fácilmente que ese mismo nivel puede obtenerse para la $\varphi_m\, m_0 + m_1 \pi_1 + \ldots + m_r \pi_r$, con el mismo número de orden k (tomando $m_2 = \ldots = m_r = 0$) con lo que se obtiene la misma dominante para $\Gamma_\Phi^{p_1 \ldots p_r}$.

Por otra parte, toda $\Gamma_\Phi^{p_1}$ admite a lo sumo *una* dominante de cada orden, pues la ecuación [21′] con las condiciones [19] y [23] es en este caso

$$0 \leq h_0 + h_1 \pi_1 < 1$$

en la cual por lo menos una de las h_i es un número conocido y negativo. Si las dos h_i están en estas condiciones (o sea, si $m_0, m_1 \neq 0$), esta ecuación no tiene solución, mientras que si una de las h_i es incógnita, o no hay solución o hay una sola. En conclusión, pues:

Las dominantes principales de una $\Gamma_\Phi^{p_1 \ldots p_r}$ *son simplemente las dominantes de la* $\Gamma_\Phi^{p_1}$ *contenida en ella, y para cada orden existe a lo sumo una dominante principal.*

Así, en la Γ^3, las dominantes sucesivas son:

de 1er. orden: $\frac{3}{2}$

» 2° » : $\frac{4}{3}$

» 3er. » : no existen

» 4° » : » »

» 5° » : $\frac{9}{8}$

etc.

Como ejemplo de todo lo dicho, tomemos primero la gama tolemaica cromática. Si tomamos la tónica do, en virtud de lo que hemos visto en el § 51, *a*), la primera dominante es sol; en virtud de *b*) las segundas dominantes son fa y la (solo la primera es principal); las terceras dominantes, consideradas en *c*), son el la♭, mi♭ y si♭ (ninguna principal), aparte de otra $\left(\frac{7}{5}\right)$ que ya no pertenece a la gama. Los acordes respectivos son:

de	*do*:	do-mi-sol
»	*sol*:	sol-si-re
»	*fa*:	fa-la-do
»	*la*:	la-do♯-mi
»	*la♭*:	la♭-do-mi♭
»	*mi♭*:	mi♭-sol-si♭
»	*si♭*:	si♭-re-fa(?) .

Por consiguiente, obtendríamos las siguientes gamas melódicas:

Con una dominante 1ª: do-re-mi-sol-si
» » » » y una dominante 2ª: do-re-mi-fa-sol-la-si
» » » » » dos » 2ª: do-do♯-re-mi-fa-sol-la-si

y así sucesivamente.

Hay que tener en cuenta que la dominante segunda que aparece en esta gama, no es principal, es decir, no aparece en tal carácter en la gama pitagórica, mientras que el fa es común a ambas gamas (principal). Como ya hemos dicho, usualmente se prescinde de esta dominante la (así como de las de órdenes superiores), y queda así la gama melódica mayor de todos conocida: do-re-mi-fa-sol-la-si. Obsérvese que si en lugar de la gama tolemaica hubiéramos tomado la pitagórica, como en ésta los acordes son de dos notas, habríamos tenido que tomar cinco dominantes (véase la tabla del § 54), a saber: sol, fa, re, la y mi, para llegar a obtener, con los acordes respectivos: do-sol, sol-re, fa-do, re-la, la-mi, mi-si la gama melódica homónima.

En la gama melódica tolemaica usual, las dos dominantes principales sol y fa se designan ordinariamente como *dominante* y *subdominante* respectivamente, como ya dijimos.

Para el ejemplo correspondiente a las tonalidades menores, en la gama tolemaica cromática, consideraremos como tónica el sol. El acorde menor de tónica es entonces sol-mi♭-do, en sentido descendente, y si el sol es la unidad, el mi♭ es $\frac{4}{5}$ y el do $\frac{4}{3}$. La primera dominante es el re (principal), las segundas do (principal) y mi (no principal). Detengámonos aquí, ya que el proceso se aprecia ya claramente en este ejemplo. Se tiene ahora:

Acordes menores: de *sol*: sol--mi♭-do
» *re*: re-si♭-sol
» *do*: do-la♭-fa
» *mi*: mi-do-la ,

y las gamas melódicas son:

con una dominante 1ª: sol-mi♭-re-do-si♭
» » » » y una dominante 2ª: sol-fa-mi♭-re-do-si♭-la♭
» » » » » dos » » : sol-fa-mi-mi♭-re-do-si♭ la-la♭
etc.

Generalmente, y por razones análogas a las del caso anterior, se adopta la segunda de estas gamas, que se suele escribir en sentido ascendente y a partir del do, así: do-re-mi♭-fa-sol-la♭-si♭. Como en el caso de la tonalidad mayor, el re se llama generalmente la dominante y el do la subdominante.

En el caso de la gama de Domínguez Berrueta, las dominantes 1as y 2as son las mismas que en el caso tratado; pero todos los acordes están formados por cuatro notas, de las cuales algunas faltan sin embargo en la $\Gamma_{\Phi}^{3,5,7}$. Así, para el acorde mayor de tónica do, hay que agregar la nota te; para la 1ª dominante (principal) sol, habría que agregar una nota mi# (?) que no existe; y para las segundas dominante fa, la, hay que agregar respectivamente las notas re# y fa × (?) (el signo × equivale a doble sostenido, ##) ésta última inexistente. Así, la gama melódica mayor de do sería do-re-re#-mi-fa-sol-la-te-si [1] (con solo dos dominantes principales). Análogamente, la gama menor de sol sería sol-sol♭-fa-mi♭-re-do-si♭-la♭, faltando en la gama tres notas mi♭♭ (?), si♭♭ (?) y fa♭ (?) que forman parte de los acordes de las dominantes.

57. — Ya hemos indicado que las nociones de tónica y dominantes (en particular, dominante y subdominante) son de importancia básica en la armonía, así como los conceptos de notas diatónicas y cromáticas juegan un papel preponderante en la melodía. En lo anterior, el músico que haya seguido nuestras consideraciones habrá notado que hemos dado a estos conceptos un sentido más amplio que el usual. Creemos que ello es necesario: por una parte, esta mayor amplitud de conceptos nos es sugerida por la teoría misma, tal como la hemos presentado, y esta teoría no tiene otros fundamentos que los hechos acústicos que se observan en la naturaleza. Por eso hemos criticado en el capítulo correspondiente la gama atemperada usual, así como otras gamas « artificiales », donde se ha hecho caso omiso de los fenómenos acústicos que de por sí, naturalmente, nos están señalando el camino a seguir; hemos errado el buen camino, y creemos que se debe volver a él. Por otra parte, los músicos nos darán la razón, cuando probemos a la luz de ejemplos que daremos oportunamente, que ellos mismos han tendido, y particularmente en los tiempos actuales, a salir del estrecho marco de la gama atemperada, intuyendo, consciente o inconscientemente, un *plus ultra* fuera de los cánones. Ese plus ultra es el que creemos haber puesto en claro en lo que antecede, o por lo menos, haber dado las bases para una teoría más completa y más racional sobre todo, de la música.

Antes de dar esos ejemplos, hagamos algunas observaciones sobre los últimos puntos tratados.

La teoría de la tonalidad se completa con el estudio de las *cadencias*. Se efectúa una cadencia cuando se pasa de un acorde de una de las dominantes al acorde de tónica. Este último es como el eje alrededor del cual gira toda la trama armónica de una composición o un trozo, o la meta armónica a donde nos dirigimos; el acorde de tónica da, pues, la sensación de final, de reposo, es el punto donde *decae* la tensión (de ahí el nombre de la cadencia). Como se ve, damos también una mayor amplitud a este concepto, admitiendo cadencias a partir de cualquiera de las dominantes aceptadas. El esquema más simple e inmediato de una cadencia es: dominante-tónica,

[1] Discrepamos en este punto con Domínguez Berrueta, que no admite el re♯ como nota diatónica.

y entre éstas, las más simples son: dominante (en el sentido usual)-tónica, o sea la cadencia *perfecta*, y subdominante-tónica, o cadencia *plagal*. Por ejemplo, en do mayor: sol-do y fa-do.

La teoría de la *modulación* puede también desarrollarse en base a lo dicho. Se entiende por modulación un cambio, suficientemente estable, de tonalidad. La modulación a un tono nuevo va precedida, generalmente, de una cadencia sobre la nueva tónica, o sobre una de sus dominantes. Podemos repetir aquí que con la amplitud de conceptos adoptada, las posibilidades de modulación se hacen más ricas. También los acordes llamados *modulantes* son más numerosos y se prestan a más variadas combinaciones.

En las modulaciones debemos tener en cuenta una circunstancia importante, debida en esencia a la desigualdad de los intervalos de toda $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \ldots p_r}$. Si consideramos, por ejemplo, el cuadro de notas de la $\Gamma_{ABGH}^{3,5}$ tolemaica cromática (§ 26), observaremos que a partir del do, los intervalos se distribuyen irregularmente así:

$$
\begin{array}{lllllll}
0{,}05890\ ; & 0{,}05214\ ; & 0{,}05889\ ; & {}^{*}\,0{,}05889\ ; & 0{,}03422\ ; & 0{,}05889\ ; & 0{,}03422; \\
0{,}02468\ ; & 0{,}03421\ ; & 0{,}05890\ ; & 0{,}05214\ ; & 0{,}05888\ ; & 0{,}05890\ ; & 0{,}03424; \\
0{,}05889\ ; & 0{,}05890\ ; & 0{,}05214\ ; & 0{,}05888\ ; & 0{,}03422\ ; & 0{,}02468\ ; & 0{,}03421;
\end{array}
$$

o sea, con las notaciones de la fórmula [5] del § 32:

$$
\begin{array}{lllllll}
i_1+i_2\ ; & i_1+i_2-\varepsilon\ ; & i_1+i_2\ ; & {}^{*}\,i_1+i_2\ ; & i_1\ ; & i_1+i_2\ ; & i_1\ ; \\
i_2\ ; & i_1\ ; & i_1+i_2\ ; & i_1+i_2-\varepsilon\ ; & i_1+i_2\ ; & i_1+i_2\ ; & i_1\ ; \\
i_1+i_2\ ; & i_1+i_2\ ; & i_1+i_2-\varepsilon\ ; & i_1+i_2\ ; & i_1\ ; & i_2\ ; & i_1\,.
\end{array}
$$

Por consiguiente, si adoptamos en lugar del do otra tónica, por ejemplo re, a partir de esta nota los intervalos ya no se disponen en la misma forma, sino que comienzan con el marcado con asterisco, siguen en orden hasta el último escrito, y luego vienen los tres primeros; o sea, en resumen, que estos tres han pasado a último término, pero conservando el orden cíclico total. En consecuencia, algunos de los intervalos de la gama original, por ejemplo el intervalo de quinta:

$$
1\,\chi = 0{,}58496\,\omega = 6\,(i_1+i_2) + 2\,(i_1+i_2-\varepsilon) + 3\,i_1 + i_2 =
$$

$$
= 11\,i_1 + 9\,i_2 - 2\varepsilon\,,
$$

no puede formarse a partir de la nueva tónica. La gama armónica no pierde por ésto su carácter tolemaico, pero está, diremos, en otro *modo* [1]. Al alterarse así la disposición de los intervalos por el cambio de modo, claro está que la gama melódica también cambia en general. De ahí que se produzcan variaciones en las relaciones armónicas: algunas dominantes pueden desaparecer, o aparecer otras nuevas, o aunque no sufran tales modificaciones las notas fundamentales de los acordes de las dominantes, pueden aparecer o desaparecer algunas de las restantes notas de esos acordes, etc. Sin embargo, como la gama total no ha perdido su carácter (en este caso, el hecho de que es siempre una $\Gamma^{3,5}$) podemos aquí, con buen derecho, hacer uso del principio de sustitución (§ 42) para restablecer los acordes o notas que falten por medio de notas de la misma gama. La « distorsión », si se nos permite esta expresión, es así menor que en cualquier otro caso en que intervengan armónicos extraños.

Para no extendernos demasiado, bastará para nuestro objeto con dos ejemplos. El primero, es el que ya hemos tomado, que completaremos en sus detalles: cambio de tonalidad de do mayor a re mayor en la gama tolemaica cromática, con el correspondiente cambio de modo. Los intervalos de esta gama son los ya indicados.

Limitémonos al caso de la gama melódica usual: do-re-mi-fa-sol-la-si para el tono de do (mayor), es decir, admitamos solo las dos dominantes principales sol y fa, situadas, con respecto a la tónica, a una quinta, $1\,\chi = 0{,}58496\,\omega$, y una cuarta $= 1\,\omega - 1\,\chi = 0{,}41504\,\omega$. A partir de la tónica re admitiremos también las dos dominantes, y veremos cómo puede formarse la nueva gama melódica de re mayor con esas dos dominantes. El acorde de tónica de do es do-mi-sol, con los intervalos:

quinta: $\text{do-sol} = 1\,\chi = 0{,}58496\omega = 11\,i_1 + 9i_2 - 2\,\varepsilon$

tercera: $\text{do-mi} = 1\tau = 0{,}32193\omega = 6\,i_1 + 5i_2 - \varepsilon\,.$

El acorde de dominante sol-si-re solo agrega las notas si, re, cuyos intervalos con el do son:

séptima: $\text{do-si} = 0{,}90689\,\omega = 17\,i_1 + 14\,i_2 - 3\,\varepsilon$

segunda: $\text{do-re} = 0{,}16993\,\omega = 3\,i_1 + 3\,i_2 - \varepsilon$

[1] Esta noción de modo no coincide con los usuales modos mayor y menor, a los que propondríamos llamar *sistemas* mayor y menor, aunque tiene análogo fundamento, a saber, la distinta disposición de los intervalos sucesivos.

y el de subdominante fa-la-do agrega las notas fa, la, con los intervalos:

cuarta: do-fa $= 0{,}41504\,\omega = 8\,i_1 + 6\,i_2 - \varepsilon$

sexta: do-la $= 0{,}73697\omega = 14 i_1 + 11 i_2 - 2\varepsilon$,

de modo que la gama melódica se compone de estos intervalos, a partir del valor 0,00000 ω correspondiente al do. Si formamos los mismos intervalos a partir del re (reduciendo siempre a la octava) tendremos:

quinta: $0{,}16993 + 0{,}58496 = 0{,}75489\,\omega = 14\,i_1 + 12\,i_2 - 3\varepsilon$:
inexistente — Nota más próxima: *la* $= 0{,}73697\,\omega$

tercera: $0{,}16993 + 0{,}32193 = 0{,}49186\,\omega = 9\,i_1 + 8\,i_2 - 2\varepsilon$:
inexistente — Nota más próxima: *fa#* $= 0{,}47394\,\omega$

séptima: $0{,}16993 + 0{,}90689 - 1 = 0{,}07682\omega = i_1 + 2\,i_2 - \varepsilon$:
inexistente — Nota más próxima: *do#* $= 0{,}05890\,\omega$

segunda: $0{,}16993 + 0{,}16993 = 0{,}33986\,\omega = 6\,i_1 + 6\,i_2 - 2\varepsilon$:
inexistente — Nota más próxima: *mi* $= 0{,}32193\,\omega$

cuarta: $0{,}16993 + 0{,}41504 = 0{,}58497\,\omega = 11\,i_1 + 9\,i_2 - 2\varepsilon =$ *sol*

sexta: $0{,}16993 + 0{,}73697 = 0{,}90690\,\omega = 17\,i_1 + 14\,i_2 - 3\varepsilon =$ *si*.

Luego, en rigor, la gama melódica de re mayor constaría solo de las notas re-sol-si. En estos casos es donde tiene su aplicación más legítima y fecunda el principio de sustitución: sustituímos las notas inexistentes por sus representantes más próximas, que tienen en este caso la propiedad de no alterar el carácter de la gama, pues no introducen armónicos nuevos; y obtenemos así la gama melódica: re-mi-fa#-sol-la-si-do#. Obsérvese que ya el acorde de tónica no es exactamente el acorde mayor que correspondería (los de dominante y subdominante sí lo son) y en ésto se manifiesta el cambio de modo, que si bien no produce un cambio de carácter en la gama, lo produce en la melodía. En esto creemos ver la razón de que se atribuya a determinadas tonalidades un carácter propio, unas veces brillante, otras suave y melancólico, y así sucesivamente. En el ejemplo que hemos tomado, obsérvese que las notas alteradas son más bajas que las que corresponderían, en la magnitud constante 0,01792 ω. Este descenso de altura produce una cierta disminución de la brillantez y energía propias del tono de do mayor.

El segundo ejemplo, tal vez más luminoso (debido a los intervalos más grandes y más diferentes entre sí) es el de la gama pentatónica que, como ya dijimos, puede representarse aproximadamente en nuestro sistema actual por las notas: do-re-fa-sol-la. Pueden distinguirse así cinco modos, que son:

Modo	I - Do-re-fa-sol-la;	sin	3ª	ni	7ª	(con relación a la gama tolemaica);
»	II - Re-fa-sol-la-do;	»	2ª	»	6ª ;	
»	III - Fa-sol-la-do-re;	»	4ª	»	7ª ;	
»	IV - Sol-la-do-re-fa;	»	3ª	»	6ª ;	
»	V - La-do-re-fa-sol;	»	2ª	»	5ª .	

Véase el estudio que hace Helmholtz (VIII) de estas gamas.

Mediante esos cambios de modo se explica a veces la discrepancia aparente entre las tablas de una misma gama. Por ejemplo, es posible que algunas de las tablas que hemos dado en los §§ 23, 24 para las gamas pitagórica y tolemaica no coincidan aparentemente con las de otros autores (1), pero disponiendo en otra forma los intervalos, sin variar su orden cíclico, esta discrepancia desaparece. Lo esencial en una gama atemperada no es la sucesión de notas, ni los nombres de éstas, sino la sucesión de intervalos.

En estrecha conexión con estos cambios de modo se presenta la cuestión de la *transposición* o *transporte*. Incidentalmente hemos tocado ya este punto en el § 35, pero ahora se nos presenta a plena luz: es en general imposible, en una $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \cdots p_r}$, cualquiera transportar o transponer una melodía dada en un tono a otra tonalidad, conservando estrictamente los intervalos de esa melodía. Lo que acabamos de decir con respecto a los acordes de una tonalidad y a la gama melódica se aplica íntegramente al caso de una melodía cualquiera. Esta puede aparecer así en diversos modos, diríamos también con diversos matices, y ello, lejos de ser un inconveniente, puede constituir en manos del artista, un recurso de extraordinaria fecundidad y belleza; recurso al que renunciamos voluntariamente, cuando adoptamos la gama atemperada, exactamente uniforme en toda su extensión.

(1) Por ejemplo Murray Barbour (XI).

58. — Trataremos de confirmar finalmente con algunas reflexiones y ejemplos, no sólo el hecho de que la teoría expuesta no está tan alejada de la realidad como parece, sino que, consciente o inconscientemente (ya lo hemos dicho) la música tiende a salirse del estrecho marco que le fija la gama atemperada, en busca de cauces más naturales. En particular en las obras contemporáneas, es fácil descubrir, aún bajo la máscara de nuestro sistema melódico y armónico, esa tendencia.

En primer lugar, procedamos a una experiencia fácil de realizar, y también de explicar: imaginemos un violinista en trance de templar su instrumento, y con nuestro piano (bien afinado) procedamos a « darle el la », como es usual. El violinista procederá a templar la segunda cuerda de su instrumento de acuerdo con ese la_3 y, si tiene por lo menos una relativa práctica, lo conseguirá exactamente. Pero ahora dejémoslo que afine sus otras cuerdas a oído, sin confirmar su afinación por medio del piano. Sabido es que el violín se afina por quintas, de modo que si la segunda cuerda es el la_3, la primera cuerda o *prima* dará el mi_4, la tercera el re_3, y la cuarta el sol_2: estas dos últimas son más bajas, la primera más alta que el la_3 de donde partimos. Confrontemos en seguida su afinación con la del piano. Pues bien: creemos no equivocarnos al afirmar que, en la gran mayoría de los casos, habrá afinado la primera demasiado alta, y las otras dos cuerdas demasiado bajas.

¿Qué explicación tiene ésto? ¿Por qué se ha equivocado el violinista? O más bien: ¿quién está equivocado: el violinista o el piano? Observemos ante todo que las diferencias en la afinación reconocen una causa común: el violinista ha estimado las quintas demasiado grandes (con relación a las del piano); pues así se explica que, con respecto al punto de partida fijo y común para ambos instrumentos, el la_3, las notas más altas (el mi_4), aparezcan más elevadas aún en el violín que en el piano; mientras que las más bajas (el re_3 y el sol_2) aparezcan más bajas. Esto sentado, la explicación surge inmediatamente: la quinta justa, natural, o sea la quinta pitagórica, es, en efecto, mayor que la quinta atemperada. La quinta pitagórica vale 0,58496 ω (véase el cuadro de equivalencias del § 10), mientras que la quinta atemperada, que consta de siete semitonos atemperados, vale $7\,\alpha = 7 \times 0{,}08333 = 0{,}58333\,\omega$. El oído nos lleva a apreciar muy exactamente las quintas justas, y de ahí que el violín, afinado por quintas justas, aparezca desafinado respecto al piano. Es, pues, a este último y no al violinista a quien debemos calificar de « desafinado » (con respecto a la afinación natural).

La misma explicación tienen otros fenómenos que se observan muy frecuentemente. Supongamos, por ejemplo, una melodía que, del tono de do mayor, module a mi mayor, luego a sol# mayor, y finalmente regrese a do mayor; o más simplemente aún, supongamos que la melodía se reduzca a estas cuatro notas: do_3-mi_3-$sol\#_3$-do_4. Si nuestro violinista ejecuta esas cuatro notas « de oído », partiendo del do_3 en concordancia exacta con el piano, su do_4 final será más bajo que el do_4 del piano. La explicación es que esas cuatro notas forman entre sí (aproximadamente las dos últimas) tres terceras tolemaicas, y la tercera tolemaica $1\,\tau = 0{,}32193\,\omega$ es menor que la tercera atemperada, compuesta por cuatro semitonos, o sea $4\,\alpha = 4 \times 0{,}08333 = 0{,}33333\,\omega$; al ejecutar tres terceras sucesivas, no se ha hecho sino acentuar el fenómeno, multiplicando la discrepancia. Análogamente, es un hecho sabido que los instrumentos de metal por ejemplo, dan las quintas « muy altas », siendo necesario a veces recurrir a la obstrucción parcial del pabellón, o al uso de pistones u otros mecanismos para bajar las notas (mecanismos que, por otra parte, restan naturalidad y frescura al sonido). Lo que ocurre es que esas quintas son exactamente pitagóricas, y se las debe bajar para hacer concordar esos instrumentos con el resto de la orquesta. Un fenómeno semejante ocurre a veces con las voces humanas.

Todo esto contribuye a probar que el fenómeno de los armónicos sucesivos, cuya realidad objetiva está fuera de discusión, constituye el fundamento lógico y natural para una teoría acústico-musical. Toda persona con algún oído, y por escasa que sea su cultura musical, es capaz de dar con muy grande exactitud los intervalos de quinta y tercera justas, y aún el de séptima do-te, o de apreciarlos en un instrumento de sonidos variables, como el violín; en cambio los cantantes y violinistas se ven obligados a corregirse a cada paso, para no discordar o « desafinar » con el instrumento que los acompaña: de ahí la sensación de belleza y majestad que nos producen los coros *a cappella* y los conjuntos de cuerdas solas (por ejemplo los cuartetos), en donde las voces no tienen aquella traba, y pueden desenvolverse libremente según los dictados del sentido musical de los ejecutantes. ¿No es ésto una prueba de que marchamos por un camino equivocado, y debemos volver al bueno?

59. — Como un ejemplo magnífico (y por otra parte, muy conocido) de aplicación de la escala armónica en toda su pureza (salvo la atemperación de los instrumentos) podemos citar el Prólogo del « Oro del Rhin ». En él, Wagner, para dar la sensación de la naturaleza que despierta poco a poco, nos hace oir, para comenzar, una

sola nota, profunda y larga, un mi$\flat_1$, al que se van agregando luego, en su orden, las notas: mi$\flat_2$ (la octava del anterior), si$\flat_2$ (la quinta de la octava, o sea el armónico 3), mi$\flat_3$ (la doble octava, o armónico 4) y sol$_3$ (tercera de la doble octava, o armónico 5). Estos armónicos, oídos así en su orden natural, dan a maravilla la sensación requerida. Siguen luego arpegios y otras figuraciones, con notas tomadas exclusivamente entre esos armónicos, que forman en conjunto un simple acorde mayor gigantesco, que se hace oir durante 136 compases. Esas figuraciones representan los movimientos de las aguas, y la sensación es tan exacta y nítida que no nos sorprendemos cuando, al levantarse el telón, nos encontramos en el fondo del gran río.

No sólo los armónicos 3 y 5 (correspondientes a las quintas y terceras, respectivamente) presentan un carácter de evidencia para la intuición musical, sino también los armónicos superiores, especialmente el siguiente, o sea el 7. Este se introduce subrepticiamente en la música, ya desde Monteverdi, particularmente bajo la forma, alterada, del acorde de séptima de dominante; por ejemplo, do-mi-sol-si♭. Este no es sino un acorde imperfecto, donde la nota si♭ está sustituyendo, lo más próximamente posible, a la nota te que representa precisamente el armónico 7 en su pureza.

Si bien al principio no se usó este acorde como conclusivo (acorde de tónica) ello está sucediendo ahora, y no sólo entre los autores de música seria, sino que ha llegado ya al terreno popular: en la música de *jazz* es corriente encontrarlo como acorde de tónica; no necesitamos citar ejemplos especiales.

Por otra parte, ya hemos visto ejemplos de acordes, cuyo uso es muy común desde hace tiempo, y que se interpretan sin dificultad como acordes imperfectos o alterados en los que interviene el armónico 7. En el § 42 hemos visto, entre otros, los ejemplos: $[6, \overline{2(\bar{7})}] =$ $=$ mi-sol-si♭-re♭ ; $[\overline{6, 2}(\underline{\bar{7}})] =$ mi-sol-si♭-do# ; $\{\underline{5, 4}(\underline{\underline{7}})\}$ = mi♭-do-la-fa#, acordes modulantes por excelencia, así como los siguientes, utilizados más modernamente: $[\bar{6}, 2(\bar{7}, \overline{11})] =$ mi♭-sol-la-si-re♭, ó $[\bar{6}, 2(\bar{7}, \overline{11})] =$ mi♭-sol-la-si-re♭ o $[\bar{6}, 2(\underline{7}, \overline{11})] =$ mi♭-sol-la-si-do# $\{\bar{5}, 4(\bar{7})\} =$ mi-do-la#-sol, $\{\underline{5}, 4(\underline{7})\} =$ mi-do-la♭-fa#, etc.

En « El amor brujo » de Manuel de Falla, en la « Danza del fuego », los primeros compases están armonizados por un acorde que se reduce a: do-mi♭-sol-la. Este acorde, escrito en forma descendente (sol-mi♭-do-la) se reconoce fácilmente como representante de un acorde de la gama de Domínguez Berrueta, el acorde menor de sol: $\{4, 2, 2\}$ (véase el cuadro de esta gama en el § 33).

Los acordes ya citados $[\overline{6}, 2(\underline{7}, \overline{11})] =$ mi$\flat$-sol-la-si-do$\sharp$ y análogos sirven también para explicar la procedencia de la « escala de tonos enteros » usada con frecuencia entre los autores modernos, Debussy, Ravel, etc. Véase por ejemplo en los « Six épigraphes antiques » de Debussy, el segundo : « Pour un tombeau sans nom », donde se hace un uso preponderante de esa escala, armonizada con acordes análogos al que tratamos.

También en la misma obra, en el primer epígrafe : « Pour invoquer Pan, dieu du vent d'été », es de notar el uso de la gama pentatónica, que es muy frecuente en toda la literatura musical contemporánea ; véase por ejemplo, del mismo autor : « Pagodes », o aún mejor, la pieza de Ravel « Laideronnette, impératrice des pagodes » (de la suite « Ma mère l'Oye »), cuya melodía está construída exclusivamente con las notas negras del piano, que constituyen justamente una gama pentatónica. La misma idea de las « pagodas » aparece así, en ambos autores, expresada de igual manera, mediante el uso de esta gama primitiva.

Podríamos multiplicar los ejemplos, y aún dar otros en que resultara palpable la presencia, disfrazada, de armónicos más elevados, el 13 por ejemplo. Pero creemos que basta ya con lo dicho. Séanos permitido, para terminar, repetir una vez más lo que ya dijimos en la Introducción : la matemática sola no es capaz de explicarlo todo en música, y ni siquiera pretendemos que la teoría expuesta explique todo lo que la matemática puede explicar en tan interesante terreno. Solamente hemos querido con esta publicación, resumir ideas conocidas y algunas nuevas, o presentadas en forma nueva, mostrando que la matemática tiene también un papel que cumplir en este campo. Está fuera de duda que no llegaremos a « escribir música en ecuaciones » (ni lo desearíamos), pero la parte científica de la música, tan abandonada por los músicos, puede ser tratada con medios matemáticos, lográndose así darle un fundamento general, sólido y de mayor amplitud y profundidad.

A. E. SAGASTUME BERRA