PUBLICACIONES DEL OBSERVATORIO ASTRONOMICO DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
DIRECTOR : CAPITÁN DE FRAGATA (R.) GUILLERMO O. WALLBRECHER
SERIE ASTRONOMICA. — Tomo XXV, Nº 1

TEORIA SOBRE LA ACUMULACION DE LOS PERIHELIOS Y NODOS DE LOS ASTEROIDES

POR

ALEXANDER WILKENS

LA PLATA
OBSERVATORIO ASTRONÓMICO
—
1949

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

RECTOR

DOCTOR CARLOS IGNACIO RIVAS

SECRETARIO GENERAL DE LA UNIVERSIDAD

DOCTOR VICTOR M. ARROYO

SECRETARIO PRIVADO DEL RECTOR

DOCTOR ENRIQUE A. PIZARRO

PROSECRETARIO GENERAL DE LA UNIVERSIDAD

SEÑOR ENRIQUE I. ROSSI

DECANOS

Facultad de Ciencias Jurídicas y Sociales : Doctor Julio M. Laffitte.
Facultad de Química y Farmacia : Doctor Roberto Crespi Gherzi.
Facultad de Ciencias Médicas : Doctor Julio H. Lyonnet.
Facultad de Ciencias Físicomatemáticas : Ingeniero Héctor Ceppi.
Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación : Doctor Roberto H. Marfany.
Facultad de Agronomía : Ingeniero Agrónomo César A. Ferri.
Facultad de Medicina Veterinaria : Doctor Guido Pacella.

DIRECTORES DE INSTITUTOS SUPERIORES

Instituto del Museo : Doctor Emiliano J. Mac Donagh.
Instituto del Observatorio Astronómico : Capitán de Fragata (r.) Guillermo O. Wallbrecher.
Escuela de Bellas Artes : Profesor César Sforza.

INSTITUTO DEL OBSERVATORIO ASTRONOMICO Y ESCUELA SUPERIOR DE ASTRONOMIA Y GEOFISICA

DIRECTOR

CAPITAN DE FRAGATA (R.) GUILLERMO O. WALLBRECHER

SECRETARIO

ABOGADO ANDRES GUILLEN

PROSECRETARIO

RICARDO J. NOWINSKI

PERSONAL DOCENTE Y CIENTÍFICO

Jefes de Departamento y Profesores : ING. MIGUEL A. AGABIOS (Coordinador Interdepartamental-Astrometría, Segundo Curso) ; AGRIM. ÁNGEL A. BALDINI (Geodesia-Gravimetría y Mareas) ; ING. SIMÓN GERSHÁNIK (Geofísica-Sismología) ; DR. LIVIO GRATTON (Astrofísica-Astrofísica, I y II Curso) ; AGRIM. MIGUEL ITZIGSOHN (Astrometría-Astrometría, Primer Curso) ; DR. ALEXANDER WILKENS (Astronomía teórica y Cosmogonía-Mecánica Celeste).

Profesores : AGRIM. GUILLERMO H. BOREL (Astronomía General) ; DR. REYNALDO P. CESCO (Cálculos Científicos) ; GEOD. MANUEL GONZÁLEZ FERNÁNDES (Geodesia Superior y Determinaciones Geográficas) ; AGRIM. VÍCTOR J. MENECLIER (Astronomía Esférica) ; DR. LEÓNIDAS SLAUCITAJS (Magnetismo Terrestre y Electricidad Atmosférica).

PERSONAL CIENTÍFICO

Jefes de División y Astrónomos de Primera : AGRIM. GUILLERMO H. BOREL (Círculo Meridiano) ; DR. REYNALDO P. CESCO (Astronomía Teórica) ; PROF. SILVIO MANGARIELLO (Círculo Meridiano) ; AGRIM. HUGO A. MARTÍNEZ (Círculo Meridiano) ; DR. FRANZ PINGSDORF (Estrellas Variables) ; DR. PASCUAL SCONZO (Efemérides, Pequeños Planetas) ; DR. SERGIO SLAUCITAJS (Círculo Meridiano) ; ING. NUMA TAPIA (Fotometría Fotográfica) ; DR. HERBERT WILKENS (Estadística Estelar).

PERSONAL DOCENTE Y AUXILIAR

Jefe de Biblioteca ; PROF. LIDIA ETHEL GUILLAMÓN.

Jefe de Trabajos Prácticos : Capitán de Fragata (R.) DOMINGO A. SANTÁNGELO (Gravimetría y Mareas) ; DR. PASCUAL SCONZO (Astronomía Esférica).

Ayudantes de Trabajos Prácticos : SRTA. ALICIA B. DI BELLA (Idioma Inglés) ; SRTA. ARACELI STICHLING (Idioma Alemán).

PERSONAL TÉCNICO DE TALLERES

Jefes : ING. ELIO MAFFI (Departamento de Optica) ; SR. CARLTON J. PEARSON (Taller de Optica) ; SR. ATLANTO FRESNEDA (Taller Mecánico de Precisión) ; SR. ANTONIO PALUMMO (Taller de Ebanistería) ; SR. MARIO A. TOMASINI (Taller de Electricidad).

TEORIA SOBRE LA ACUMULACION DE LOS PERIHELIOS Y NODOS DE LOS ASTEROIDES

Como primeras palabras de la presente memoria, el autor desea expresar sus agradecimientos más profundos al Director del Observatorio Astronómico de la Universidad Nacional de La Plata, Capitán de Fragata (R) Guillermo O. Wallbrecher, por su amable interés y el deseo de hacerla imprimir cuanto antes facilitando toda la ayuda posible, y permitiendo, también, la adición de un apéndice en alemán para la mejor divulgación en el mundo científico.

Además el autor desea manifestar sus agradecimientos más cordiales a la señorita Hulda Alicia Hartmann por la ejecución de la mayor parte de los cálculos numéricos ; a su amigo doctor F. Pingsdorf por la concienzuda revisión del texto castellano, y al señor Antonio Guillén por su escrupulosa preparación de la memoria para la impresión.

En virtud de superar la masa del gran planeta Júpiter no sólo la de cada uno de los grandes planetas, sino también la masa total de todos ellos, más del 95 % de las perturbaciones en el sistema solar se deben a la atracción de Júpiter, y por consiguiente la atracción secular de dicho planeta regula, en grado preponderante, las órbitas de todos los otros planetas. Un efecto de esta influencia sobre las órbitas es, quizás, el fenómeno, conocido desde cerca de 50 años, de la acumulación sorprendente de las direcciones de los perihelios de las órbitas en torno a la dirección del perihelio de Júpiter. Pero, por falta de una base teórica del problema, no sabemos todavía si esta acumulación observada se trata de una concentración o de una disolución.

Por una composición de los elementos de los asteroides del tomo 1940 del Berliner Astronomisches Recheninstitut en su publicación « Kleine Planeten » resulta la siguiente cuenta de las longitudes — perihelios de los planetoides conocidos hasta entonces ; la planilla tiene por argumento las longitudes eclipticales de 60° hasta 60°, correspondiendo la longitud 13° al perihelio de Júpiter y n al número de las longitudes — perihelio contenidas en cada intervalo de 60°, es decir número de planetoides. (Ver cuadro adjunto).

Perihelios

Longitud	n
193° — 253	154
253 — 313	238
313 — 13	393
13 — 73	372
73 — 133	209
133 — 193	147

Obsérvase una repartición casi simétrica de los n en torno a la longitud-perihelio 13° de Júpiter, con una disminución simultánea considerable a los dos lados. Los dos primeros intervalos en torno al perihelio de Júpiter ya contienen 765 asteroides, es decir un poco más que la mitad de los 1513 casos. La otra mitad está repartida sobre un intervalo doble de 240° de longitudes respecto de la extensión-longitud. Por eso una acumulación de los perihelios en torno del perihelio de Júpiter está bien pronunciada. Respecto de las longitudes de los nodos resultan los siguientes datos en la planilla siguiente, siendo la longitud del nodo de Júpiter igual a 100°. (Ver cuadro adjunto).

Nodos

Longitud	n
280°—340°	237
340 — 40	277
40 —100	277
100 —160	262
160 —220	257
220 —280	203

Aquí sorprende en seguida que la repartición de las longitudes de los nodos es casi completamente igual en los dos lados del nodo de Júpiter hasta + 120°, solamente entonces ocurre una disminución perceptible de los n en los dos lados, de modo que, en cuanto a las líneas de los nodos existe una acumulación mucho menos pronunciada en torno al nodo de Júpiter que en el caso de los perihelios.

Una primera condición aproximada en el caso de una libración de los perihelios de los asteroides la formuló 44 años antes Charlier, en el Nr. 12 de los *Meddelanden fran Lunds Observatorium,* del año 1904, reproducido en sus *Vorlesungen zur Mechanik des Himmels,* Tomo 1, pág. 420. Conociéndose entonces casi 450 asteroides, resultaron sólo 9 casos de libración, es decir sólo el 2 °/₀ de todos los asteroides, con una oscilación de los perihelios de una amplitud de menos de 90° en torno del perihelio de Júpiter. Todos los otros casos son de rotación, es decir los perihelios adelantan secularmente con la velocidad constante de rotación.

Una investigación análoga respecto de una libración o rotación de las líneas de los nodos en torno a la línea del nodo de Júpiter, no ha sido realizada hasta ahora, y será el objeto de la siguiente exposición.

Anticipando que de los 1500 planetoides conocidos en el año 1940 resultan en la primera aproximación, sólo 43 casos de libración respecto de los perihelios, es decir sólo el 3 °/₀ de todos los planetoides, la frecuencia del fenómeno de libración aparece como de poca importancia frente al hecho de una acumulación pronunciada de los perihelios. Por eso desde ahora destácase, especialmente desde el punto de vista cosmogónico, la pregunta respecto a la justificación de la conclusión de que las libraciones y la acumulación de los perihelios fijen, no el comienzo sino el final de los dos fenómenos, que radican en el pasado o en el porvenir infinitamente distante, pero que han sido destruídos mientras tanto en el tiempo por la inestabilidad de las órbitas en base a la atracción secular de todos los demás planetas del sistema solar. Frente a tal estado del problema corresponde solamente un examen más preciso de la cualidad de los movimientos de los perihelios, por lo que, primeramente, hay que extenderse en una ampliación esencial de la condición aproximada de un fenómeno de libración. Si resultara que por la investigación, existieran hoy día, principalmente, sólo fenómenos de rotación de los perihelios y nodos, sigue luego la conclusión de que la acumulación de los perihelios de los asteroides representa, por el momento, un proceso de dispersión, pero en el pasado o futuro infinitamente lejano representarán un fenómeno general, el cual, en el primer caso estaría relacionado con el origen de los asteroides y la órbita de Júpiter, y en el segundo caso se basaría en la atracción secular preponderante del gran planeta Júpiter.

Ya que la primera condición aproximada relativa a una solución de libración solamente se refiere a los términos más bajos, es decir a los términos del 2° grado de la parte secular de la función perturbadora respecto de Júpiter, hay que considerar, con el objeto de profundizar la cuestión de la estabilidad, los términos de grado más alto, no solamente agregando la atracción secular de todos los grandes planetas del sistema solar. Hay que destacar que los términos del próximo grado más alto de la función perturbadora respecto de la atracción por Júpiter, son del mismo orden que el efecto secular producido por todos los otros grandes planetas, de modo que la decisión pueda depender simultáneamente, también de los términos del grado más alto de la atracción ejercida por Júpiter.

Por eso nuestra tarea se identifica con una representación lo más exacta posible de una solución del problema de las perturbaciones seculares, en el caso del problema de los tres cuerpos asteróidicos y mediante una representación general de las perturbaciones seculares por medio de series de Fourier, en analogía a la forma de las perturbaciones periódicas, de modo que la solución sea aplicable también, en general, a las perturbaciones seculares de los planetoides, fuera de la finalidad de esta memoria.

§ 1. LAS ECUACIONES DIFERENCIALES RELATIVAS A LAS VARIABLES-EXCENTRICIDAD Y SU INTEGRACIÓN

Vamos a considerar al formar las ecuaciones diferenciales que en primera aproximación el gran planeta Júpiter sea el único cuerpo perturbador y que sus elementos sean constantes. Entonces valen, en base de las ecuaciones diferenciales conocidas relativas a la excentricidad e y la longitud del perihelio $\tilde{\omega}$, las nuevas ecuaciones diferenciales relativas a las variables-excentricidad $\xi = e \operatorname{sen} \tilde{\omega}$, $\eta = e \cos \tilde{\omega}$, análogamente respecto a las variables inclinación correspondientes $p = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta$ y $q = \operatorname{sen} \varphi \cos \theta$ (φ = inclinación y θ = longitud del nodo de la órbita), aplicando las mismas designaciones para el gran planeta Júpiter, es decir $\xi' = e' \operatorname{sen} \tilde{\omega}'$, $\eta' = e' \cos \tilde{\omega}'$ y $p' = \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} \theta'$, $q' = \operatorname{sen} \varphi' \cos \theta'$:

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\frac{\partial R}{\partial \eta} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\frac{\xi}{1+\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \frac{\eta \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}{na^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\partial R}{\partial \varphi}\\
-\frac{d\eta}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\frac{\partial R}{\partial \xi} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\frac{\eta}{1+\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \frac{\xi \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}{na^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\partial R}{\partial \varphi}\\
\frac{dp}{dt} &= \frac{\cos\varphi}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial q} - \frac{p\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi\right)}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\eta\frac{\partial R}{\partial \xi} - \xi\frac{\partial R}{\partial \eta} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right)\\
-\frac{dq}{dt} &= \frac{\cos\varphi}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial p} + q\frac{\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi\right)}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\eta\frac{\partial R}{\partial \xi} - \xi\frac{\partial R}{\partial \eta} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right)
\end{aligned}
$$

donde hay que representar todavía la derivada $\frac{\partial R}{\partial \varphi}$ como función de p y q, mientras que los términos respecto de $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$ se eliminan en la teoría de las perturbaciones seculares. Las variables-excentricidad ξ y η, y asimismo las variables-inclinación p y q son elegidas como variables en lugar de e, $\tilde{\omega}$ y φ, θ para evitar la existencia de polos en las ecuaciones diferenciales y sus soluciones respecto de e y φ, si e y φ son valores pequeños. En lo demás significan a y n el semieje mayor y el movimiento medio de los planetoides. Primero elegimos la eclíptica como plano fundamental. Además significa ε la longitud media de la época, y hay que considerar las relaciones:

$$e^2 = \xi^2 + \eta^2 \quad \text{y} \quad e'^2 = \xi'^2 + \eta'^2$$

Nuestra primera tarea es el desarrollo de la parte secular de la función perturbadora R hasta los términos del 6° grado en las variables-excentricidad e inclinación. Por eso hay que transformar la forma clásica de Laplace-Le Verrier respecto de su dependencia de $e, e', \omega, \tilde{\omega}'$ y $\gamma = \operatorname{sen} \frac{1}{2} J$ (J = inclinación mutua de las órbitas del planetoide y Júpiter), además de τ y τ', las longitudes de los puntos de intersección de las dos órbitas, y finalmente de $\omega = \tilde{\omega} + \tau' - \tau$, de modo que, entonces, R es una función de ξ, η, p, q, ξ', η', p', q'. Según la forma de Le Verrier en el tomo X de los *Annales de L'Observatoire de Paris*, pág. 38, pero limitada al 4° grado de γ y por eso ampliada en esta memoria a los términos del 6° de γ en base a las investigaciones de Le Verrier en el primer tomo, págs. 277-99 y las *Additions*, II, pág. 358, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
(2) \qquad R = k^2 m' \, [&C_0 + C_2(e^2 + e'^2) + C_4 e^4 + C_4' e'^4 + C_4'' e^2 e'^2 \\
&+ (C_2' ee' + D_4 e^3 e' + D_4' ee'^3) \cos(\tilde{\omega}' - \omega) \\
&+ D_4'' e^2 e'^2 \cos(2\tilde{\omega}' - 2\omega) + D_4''' \gamma^2 + D_4^{\text{IV}} (e^2 \gamma^2 + e'^2 \gamma^2) \\
&+ D_4^{\text{V}} \gamma^4 + D_4^{\text{VI}} ee' \gamma^2 \cos(\tilde{\omega}' - \omega) + D_4^{\text{VII}} e^2 \gamma^2 \cos(2\omega - 2\tau') \\
&+ D_4^{\text{VIII}} ee' \gamma^2 \cos(\tilde{\omega}' + \omega - 2\tau') + D_4^{\text{IX}} e'^2 \gamma^2 \cos(2\tilde{\omega}' - 2\tau') \\
&+ E_6' e^6 + E_6'' e^4 e'^2 + E_6''' e^2 e'^4 + E_6^{\text{IV}} e'^6 \\
&+ (G_6' e^5 e' + G_6'' e^3 e'^3 + G_6''' ee'^5) \cos(\tilde{\omega}' - \omega) \\
&+ (H_6' e^4 e'^2 + H_6'' e^2 e'^4) \cos(2\tilde{\omega}' - 2\omega) \\
&+ J_6 e^3 e'^3 \cos(3\tilde{\omega}' - 3\omega) + K' e^4 \gamma^2 + K'' e^2 e'^2 \gamma^2 \\
&+ K''' e'^4 \gamma^2 + K^{\text{IV}} \gamma^4 + K^{\text{V}} e^2 \gamma^4 + K^{\text{VI}} e'^2 \gamma^4 + K^{\text{VII}} \gamma^6 \\
&+ L' e^3 e' \gamma^2 \cos(\tilde{\omega}' - \omega) + L'' ee'^3 \gamma^2 \cos(\tilde{\omega}' - \omega) \\
&+ L''' ee' \gamma^4 \cos(\tilde{\omega}' - \omega) + M' e^2 e'^2 \gamma^2 \cos(2\tilde{\omega}' - 2\omega) \\
&+ M'' e^4 \gamma^2 \cos(2\omega - 2\tau') + M''' e^2 e'^2 \gamma^2 \cos(2\omega - 2\tau') \\
&+ M^{\text{IV}} e^2 \gamma^4 \cos(2\omega - 2\tau') + N' e^3 e' \gamma^2 \cos(\tilde{\omega}' + \omega - 2\tau') \\
&+ N'' ee'^3 \gamma^2 \cos(\tilde{\omega}' + \omega - 2\tau') + N''' ee' \gamma^4 \cos(\tilde{\omega}' + \omega - 2\tau') \\
&+ O' e^2 e'^2 \gamma^2 \cos(2\tilde{\omega}' - 2\tau') + O'' e'^4 \gamma^2 \cos(2\tilde{\omega}' - 2\tau') \\
&+ O''' e'^2 \gamma^4 \cos(2\tilde{\omega}' - 2\tau') + P' e^3 e' \gamma^2 \cos(\tilde{\omega}' - 3\omega - 2\tau') \\
&+ P'' ee'^3 \gamma^2 \cos(3\tilde{\omega}' - \omega - 2\tau').
\end{aligned}
$$

Los coeficientes tienen, como funciones de las transcendentes de Laplace, el siguiente significado:

$$C_0 = \frac{1}{2} A^0, \quad C_2 = \frac{1}{4}(A_1{}^0 + A_2{}^0), \quad C_4 = \frac{3}{16}(A_3{}^0 + A_4{}^0)$$

$$C_4' = \frac{3}{16}(A_1{}^0 + 3A_2{}^0 + 3A_3{}^0 + A_4{}^0)$$

$$C_4'' = \frac{1}{8}(A_1{}^0 + 7A_2{}^0 + 12A_3{}^0 + 6A_4{}^0)$$

$$C_2' = \frac{1}{2}(A_0{}^1 - A_1{}^1 - A_2{}^1)$$

$$D_4 = -\frac{1}{8}(2A_2{}^1 + 9A_3{}^1 + 6A_4{}^1)$$

$$D_4' = +\frac{1}{8}(A_0{}^1 - A_1{}^1 - 11A_2{}^1 - 15A_3{}^1 - 6A_4{}^1)$$

$$D_4'' = \frac{3}{16}(A_0{}^2 - A_1{}^2 + A_2{}^2 + 4A_3{}^2 + 2A_4{}^2)$$

$$D_4''' = -\frac{1}{2} E^0, \quad D_4{}^{\mathrm{IV}} = -\frac{1}{4}(E_1{}^0 + E_2{}^0), \quad D_4{}^{\mathrm{V}} = \frac{1}{2} G^0$$

$$D_4{}^{\mathrm{VI}} = \frac{1}{2}(-E_0{}^1 + E_1{}^1 + E_2{}^1), \quad D_4{}^{\mathrm{VII}} = \frac{1}{8}(3B_0{}^1 + 3B_1{}^1 + B_2{}^1)$$

$$D_4{}^{\mathrm{VIII}} = \frac{1}{4}(B_0{}^0 - B_1{}^0 - B_2{}^0), \quad D_4{}^{\mathrm{IX}} = \frac{1}{8}(B_0{}^1 - B_1{}^1 - B_2{}^1)$$

$$E_6' = \frac{5}{32}(A_5{}^0 + A_6{}^0)$$

$$E_6'' = \frac{1}{32}(18A_3{}^0 + 78A_4{}^0 + 105A_5{}^0 + 45A_6{}^0)$$

$$E_6''' = \frac{1}{32}(3A_1{}^0 + 39A_2{}^0 + 144A_3{}^0 + 228A_4{}^0 + 165A_5{}^0 + 45A_6{}^0)$$

$$E_6{}^{\mathrm{IV}} = \frac{1}{32}(5A_1{}^0 + 25A_2{}^0 + 50A_3{}^0 + 50A_4{}^0 + 25A_5{}^0 + 5A_6{}^0)$$

$$G_6' = -\frac{1}{16}(9A_4{}^1 + 25A_5{}^1 + 15A_6{}^1)$$

$$G_6'' = -\frac{1}{16}(6A_2{}^1 + 57A_3{}^1 + 141A_4{}^1 + 135A_5{}^1 + 45A_6{}^1)$$

$$G_6''' = \frac{1}{16}(A_0{}^1 - A_1{}^1 - 29A_2{}^1 - 86A_3{}^1 - 109A_4{}^1 - 65A_5{}^1 - 15A_6{}^1)$$

$$H_6' = \frac{1}{32}(A_0{}^2 - A_1{}^2 + A_2{}^2 + 4A_3{}^2 + 44A_4{}^2 + 70A_5{}^2 + 30A_6{}^2)$$

$$H_6'' = \frac{1}{32}(3A_0{}^2 - 3A_1{}^2 + 3A_2{}^2 + 72A_3{}^2 + 144A_4{}^2 + 110A_5{}^2 + 30A^2{}_6)$$

$$J_6 = \frac{1}{16}(A_0^3 - A_1^3 + A_2^3 - A_3^3 - 13A_4^3 - 15A_5^3 - 5A_6^3)$$

$$K' = \frac{1}{16}(-3E_3^0 - 3E_4^0), \qquad K'' = \frac{1}{16}(-2E_1^0 - 14E_2^0 - 24E_3^0 - 12E_4^0)$$

$$K''' = \frac{1}{16}(-3E_1^0 - 9E_2^0 - 9E_3^0 - 3E_4^0), \qquad K^{IV} = \frac{1}{2}G^0$$

$$K^{V} = \frac{1}{4}(G_1^0 + G_2^0), \qquad K^{VI} = \frac{1}{4}(G_1^0 + G_2^0), \qquad K^{VII} = -\frac{1}{2}H^0$$

$$L' = \frac{1}{16}(4E_2^1 + 18E_3^1 + 12E_4^1)$$

$$L'' = \frac{1}{16}(-2E^1 + 2E_1^1 + 22E_2^1 + 30E_3^1 + 12E_4^1)$$

$$L''' = \frac{1}{16}(2G^1 - 2G_1^1 - 2G_2^1)$$

$$M' = \frac{1}{16}(-3E^2 + 3E_1^2 - 3E_2^2 - 12E_3^2 - 6E_4^2)$$

$$M'' = \frac{1}{16}(B^1 - B_1^1 - B_2^1 + 4B_3^1 + 2B_4^1)$$

$$M''' = \frac{1}{16}(6B_1^1 + 18B_2^1 + 18B_3^1 + 6B_4^1)$$

$$M^{IV} = \frac{1}{4}(-3L^0 - 3L_1^0 - 1L_2^0)$$

$$N' = \frac{1}{16}(-2B_2^0 - 9B_3^0 - 6B_4^0)$$

$$N'' = \frac{1}{16}(B^0 - B_1^0 - 11B_2^0 - 15B_3^0 - 6B_4^0)$$

$$N''' = \frac{1}{4}(-2L^1 + 2L_1^1 + 2L_2^1)$$

$$O' = \frac{1}{16}(6B_3^1 + 6B_5^1)$$

$$O'' = \frac{1}{16}(B^1 - B_1^1 + B_2^1 + 4B_3^1 + 2B_4^1)$$

$$O''' = \frac{1}{16}(-L^2 + L_1^2 - L_2^2)$$

$$P' = \frac{1}{16}(2B^2 - 2B_1^2 - 8B_2^2 - 7B_3^2 - 2B_4^2)$$

$$P'' = \frac{1}{16}(B^2 - B_1^2 + B_2^2 - B_3^2 - 2B_4^2)$$

Para pasar ahora a las nuevas variables hay que realizar las siguientes transformaciones :

$$
\begin{aligned}
(3) \qquad & e^2 = \xi^2+\eta^2, \quad e'^2 = \xi'^2+\eta'^2, \quad ee' \cos(\tilde\omega'-\tilde\omega) = \xi\xi'+\eta\eta', \quad ee' \sin(\tilde\omega'-\tilde\omega) = \eta\xi'-\xi\eta' \\
& e^2e'^2 \cos 2(\tilde\omega'-\tilde\omega) = 2(\eta\eta'+\xi\xi')^2 - (\xi^2+\eta^2)(\xi'^2+\eta'^2) = (\eta\eta'+\xi\xi')^2 - (\xi\eta'-\eta\xi')^2 \\
& e^2e'^2 \operatorname{sen} 2(\tilde\omega'-\tilde\omega) = 2(\eta\eta'+\xi\xi')(\eta\xi'-\xi\eta') \\
& e^3e' \cos(\tilde\omega'-\tilde\omega) = (\xi^2+\eta^2)(\eta\eta'+\xi\xi') \\
& e^3e' \operatorname{sen}(\tilde\omega'-\tilde\omega) = (\xi^2+\eta^2)(\eta\xi'-\xi\eta') \\
& ee'^3 \cos(\tilde\omega'-\tilde\omega) = (\xi'^2+\eta'^2)(\eta\eta'+\xi\xi') \\
& ee'^3 \operatorname{sen}(\tilde\omega'-\tilde\omega) = (\xi'^2+\eta'^2)(\eta\xi'-\xi\eta') \\
& e^3e^3 \cos(\tilde\omega'-\tilde\omega) = (\xi^2+\eta^2)(\xi'^2+\eta'^2)(\xi\xi'+\eta\eta') \\
& e^3e'^3 \operatorname{sen}(\tilde\omega'-\tilde\omega) = (\xi^2+\eta^2)(\xi'^2+\eta'^2)(\eta\xi'-\xi\eta')
\end{aligned}
$$

En las fórmulas clásicas no aparece la longitud del perihelio $\tilde\omega$, sino sólo : $\omega=\tilde\omega+\tau'-\tau$, donde la diferencia $\tau'-\tau$ es del 2°grado por lo menos respecto de las inclinaciones orbitales ; por el desarrollo hasta el 4° grado inclusive, resulta la expresión :

$$
(4) \qquad \tau'-\tau = \Delta\tau = 2 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi' \operatorname{sen}(\theta'-\theta) - \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi' \operatorname{sen} 2(\theta'-\theta).
$$

Este desarrollo alcanza el 6° grado, ya que la magnitud $\tau'-\tau$ está unida en el término del grado más bajo, con el término de 2° grado : $e \,.\, e' \cos(\tilde\omega'-\omega)$.

La magnitud $\Delta\tau=\tau'-\tau$, además $(\tau'-\tau)^2$ dependientes de las variables-inclinación, tienen la forma siguiente, hasta el 4° grado inclusive :

$$
(5) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\Delta\tau &= \frac{1}{2}(qp'-pq') + \frac{1}{8}(qp'-pq')(p^2+q^2+p'^2+q'^2) \\
&\quad - \frac{1}{8}[(q^2-p^2)p'q' - (q'^2-p'^2)pq] \\
(\Delta\tau)^2 &= \frac{1}{4}(qp'-pq')^2
\end{aligned}
\right.
$$

Finalmente obtiénese respecto del coeficiente γ y sus potencias, saliendo de las fórmulas básicas en el triángulo esférico correspondiente formado por los nodos de las dos órbitas y su punto de intersección :

$$
\begin{aligned}
(6) \qquad \gamma^2 &= \frac{1}{4}[(p-p')^2+(q-q')^2] + \frac{1}{16}[p^2+q^2-p'^2-q^{2'}]^2 \\
&\quad + \frac{1}{32}[p^2+q^2-p'^2-q'^2]^2[p^2+q^2+p^{2'}+q'^2] \\
\gamma^4 &= \frac{1}{16}[(p-p')^2+(q-q')^2]^2 + \frac{1}{32}[(p-p')^2+(q-q')^2][p^2+q^2-p'^2-q'^2]^2 \\
\gamma^6 &= \frac{1}{64}[(p-p')^2+(q-q')^2]^3
\end{aligned}
$$

formando además, por medio del mismo triángulo, las fórmulas correspondientes a: sen J sen τ y sen J cos τ como funciones de φ, φ', θ y θ', se obtiene asimismo las expresiones correspondientes a: $\gamma^2 \operatorname{sen} 2\tau$ y $\gamma^2 \cos 2\tau \gamma^2 \operatorname{sen} 2\tau'$, $\gamma^2 \cos 2\tau'$ y finalmente $\gamma^2 \operatorname{sen}(\tau' + \tau)$ y $\gamma^2 \cos(\tau' + \tau)$, desarrolladas según potencias de $\Delta\tau = 2^{\circ}$ grado, de modo que, desarrollando hasta el 6° grado, es suficiente un desarrollo sólo hasta $(\Delta\tau)^2$ ya que todos los factores mencionados están afectados por la 2ª ó 4ª potencia de las excentricidades. Sucesivamente se obtienen los desarrollos en la forma siguiente, saliendo del término de grado más bajo: $e \,.\, e' \cos(\tilde{\omega}' - \omega) = e \,.\, e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) + \Delta\tau e e' \operatorname{sen}(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) - \frac{1}{2}(\Delta\tau)^2 e e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega})$.

Siendo ya por las representaciones anteriores:

$$e \,.\, e' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) = \xi\xi' + \eta\eta' \qquad \text{y} \qquad e \,.\, e' \operatorname{sen}(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) = \eta\xi' - \xi\eta',$$

resultan por medio de los desarrollos de $\Delta\tau$ y $(\Delta\tau)^2$ las siguientes expresiones:

$$(7) \qquad e \,.\, e' \cos(\tilde{\omega}' - \omega) = \xi\xi' + \eta\eta' + \frac{1}{2}(qp' - pq')(\xi'\eta - \eta'\xi) + \frac{1}{8}(\xi'\eta - \eta'\xi) \times$$
$$\{(qp' - pq')(p^2 + q^2 + p'^2 + q'^2) - (q^2 - p^2)p'q' + (q'^2 - p'^2)pq\}$$
$$- \frac{1}{8}(qp' - pq')^2(\xi\xi' + \eta\eta')$$

$$(8) \qquad e^3 e' \cos(\tilde{\omega}' - \omega) = (\xi^2 + \eta^2)(\xi\xi' + \eta\eta') + \frac{1}{2}(qp' - pq')(\xi'\eta - \eta'\xi)(\xi^2 + \eta^2)$$

$$(9) \qquad e e'^3 \cos(\tilde{\omega}' - \omega) = (\xi'^2 + \eta'^2)(\xi\xi' + \eta\eta') + \frac{1}{2}(\xi'^2 + \eta'^2)(\xi'\eta - \eta'\xi)(qp' - pq')$$

$$(10) \qquad e^5 e' \cos(\tilde{\omega}' - \omega) = (\xi^2 + \eta^2)^2(\xi\xi' + \eta\eta')$$

$$(11) \qquad e^3 e'^3 \cos(\tilde{\omega}' - \omega) = (\xi^2 + \eta^2)(\xi'^2 + \eta'^2)(\xi\xi' + \eta\eta')$$

$$(12) \qquad e e'^5 \cos(\tilde{\omega}' - \omega) = (\xi'^2 + \eta'^2)^2(\xi\xi' + \eta\eta')$$

$$(13) \qquad e e' \gamma^2 \cos(\tilde{\omega}' - \omega) = \frac{1}{4}(\xi\xi' + \eta\eta')[(p - p')^2 + (q - q')^2] + \frac{1}{16}(\xi\xi' + \eta\eta')(p^2 + q^2 - p'^2 - q'^2)^2$$
$$+ \frac{1}{8}(qp' - pq')(\xi'\eta - \eta'\xi)[(p - p')^2 + (q - q')^2]$$

$$(14) \qquad e^2 e'^2 \cos(2\tilde{\omega}' - 2\omega) = 2(\xi\xi' + \eta\eta')^2 - (\xi^2 + \eta^2)(\xi'^2 + \eta'^2)$$
$$+ 2(\xi'\eta - \eta'\xi)(\xi\xi' + \eta\eta')(qp' - pq')$$

$$(15) \qquad e^4 e'^2 \cos(2\tilde{\omega}' - 2\omega) = 2(\xi^2 + \eta^2)(\xi\xi' + \eta\eta')^2 - (\xi^2 + \eta^2)^2(\xi'^2 + \eta'^2)$$

$$(16) \qquad e^2 e'^4 \cos(2\tilde{\omega}' - 2\omega) = 2(\xi'^2 + \eta'^2)(\xi\xi' + \eta\eta')^2 - (\xi^2 + \eta^2)(\xi'^2 + \eta'^2)^2$$

$$(17) \qquad e^3 e'^3 \cos(3\tilde{\omega}' - 3\omega) = 2(\xi\xi' + \eta\eta')^3 - (\xi^2 + \eta^2)(\xi'^2 + \eta'^2)(\xi\xi' + \eta\eta')$$
$$- 2(\xi'\eta - \eta'\xi)^2(\xi\xi' + \eta\eta')$$

$$(18) \qquad e^2\gamma^2 \cos(2\omega - 2\tau') = e^2\gamma^2 \cos(2\tilde{\omega} - 2\tau) = e^2 \cos 2\tilde{\omega}\gamma^2 \cos 2\tau + e^2 \operatorname{sen} 2\tilde{\omega}\gamma^2 \operatorname{sen} 2\tau$$
$$= (\eta^2 - \xi^2)\left\{\frac{1}{4}[(q - q')^2 - (p - p')^2] + \frac{1}{4}(qq' + pp')[-(p - p')p\right.$$

$$+ (q-q')\,q] + \frac{1}{4}(p'^2+q'^2)\,[(p-p')\,p - (q-q')\,q]$$

$$+ \frac{1}{16}[q-q')^4 - (p-p')^4]\Big\} + 2\xi\eta\Big\{\frac{1}{2}(p-p')\,(q-q')$$

$$+ \frac{1}{4}(qq'+pp')\,[(p-p')\,q + (q-q')\,p] - \frac{1}{4}(p'^2+q'^2)\times[$$

$$[(p-p')\,q + (q-q')\,p] + \frac{1}{8}(p-p')\,(q'-q')\;[(q-q')^2 + (p-p')^2]\Big\}$$

$$(19)\qquad ee'\gamma^2\cos(\tilde\omega' + \omega - 2\tau') = ee'\gamma^2\cos[\tilde\omega' + \tilde\omega - (\tau' + \tau)] = ee'\cos(\tilde\omega' + \tilde\omega)\,\gamma^2\cos(\tau'+\tau)$$

$$+ ee'\,\mathrm{sen}\,(\tilde\omega' + \tilde\omega)\,\gamma^2\,\mathrm{sen}\,(\tau' + \tau)$$

$$= (\eta\eta' - \xi\xi')\Big\{\frac{1}{4}[(q-q')^2 - (p-p')^2] + \frac{1}{4}[(qq' + pp')\times[$$

$$[+ (q-q')\,q - (p-p')\,p] + \frac{1}{4}(p'^2 + q'^2)\,[(p-p')\,p - (q-q')\,q]$$

$$+ \frac{1}{16}[(q-q')^4 - (p-p')^4] - \frac{1}{4}(qp' - pq')\,(p-p')\,(q-q')\Big\}$$

$$+ (\xi'\eta + \eta'\xi)\Big\{\frac{1}{2}(p-p')\,(q-q') + \frac{1}{4}(qq'+pp')\,[(p-p')\,q$$

$$+ (q-q')\,p] - \frac{1}{4}(p'^2 + q'^2)\,[(p-p')\,q + (q-q')\,p]$$

$$+ \frac{1}{8}(p-p')\,(q-q')\,[(q-q')^2 + (p-p')^2] + \frac{1}{8}(qp'-pq')\,[(q-q')^2$$

$$- (p-p')^2]\Big\}$$

$$(20)\qquad e'^2\gamma^2\cos(2\tilde\omega' - 2\tau') = e'^2\cos 2\tilde\omega'\gamma^2\cos 2\tau' + e'^2\,\mathrm{sen}\,2\tilde\omega'\gamma^2\,\mathrm{sen}\,2\tilde\omega'$$

$$= (\eta'^2 - \xi'^2)\Big\{\frac{1}{4}[q-q')^2 - (p-p')^2] + \frac{1}{4}(qq'+pp')\,[(q-q')\,q$$

$$- (p-p')\,p] + \frac{1}{4}(p'^2+q'^2)\,[(p-p')\,p - (q-q')\,q]$$

$$+ \frac{1}{16}[(q-q')^4 - (p-p')^4] - \frac{1}{2}(qp'-pq')\,(p-p')\,(q-q')\Big\}$$

$$+ 2\xi'\eta'\Big\{\frac{1}{2}(p-p')\,(q-q') + \frac{1}{4}(qq' + pp')\,[(p-p')\,q + (q-q')\,p]$$

$$- \frac{1}{4}(p'^2+q'^2)\,[(p-p')\,q + (q-q')\,p] + \frac{1}{8}(p-p')\,(q-q')\,[(q-q')^2 + (p-p')^2]$$

$$+ \frac{1}{4}(qp' - pq')\,[(q-q')^2 - (p-p')^2]\Big\}$$

(21) $$e^3 e' \gamma^2 \cos(\tilde{\omega}' - \omega) = e^2 \, . \, ee' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \, . \, \gamma^2$$
$$= \frac{1}{4} (\xi^2 + \eta^2)(\xi\xi' + \eta\eta')\left[(p-p')^2 + (q-q')^2\right]$$

(22) $$ee'^3 \gamma^2 \cos(\tilde{\omega}' - \omega) = e'^2 \, . \, ee' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \, . \, \gamma^2$$
$$= \frac{1}{4} (\xi'^2 + \eta'^2)(\xi\xi' + \eta\eta')\left[(p-p')^2 + (q-q')^2\right]$$

(23) $$ee' \gamma^4 \cos(\tilde{\omega}' - \omega) = ee' \cos(\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}) \, . \, \gamma^4$$
$$= \frac{1}{16} (\xi\xi' + \eta\eta') \cdot \left[(p-p')^2 + (q-q')^2\right]^2$$

(24) $$e^2 e'^2 \gamma^2 \cos(2\tilde{\omega}' - 2\omega) = e^2 e'^2 \cos(2\tilde{\omega}' - 1\tilde{\omega}) \, . \, \gamma^2$$
$$= \gamma^2 \left[2(\xi\xi' + \eta\eta')^2 - (\xi^2 + \eta^2)(\xi'^2 + \eta'^2)\right] = \gamma^2 \left[\xi\xi' + \eta\eta')^2 - (\xi'\eta - \eta'\xi)^2\right], \quad \text{wo}$$
$$\gamma^2 = \frac{1}{4}\left[(p-p')^2 + (q-q')^2\right]$$

(25) $$e^4 \gamma^2 \cos(2\omega - 2\tau') = e^2 \, . \, e^2 \cos 2\tilde{\omega} \, . \, \gamma^2 \cos 2\tau + e^2 \, . \, e^2 \operatorname{sen} 2\tilde{\omega} \gamma^2 \operatorname{sen} 2\tau$$
$$= \frac{1}{4} (\xi^2 + \eta^2)(\eta^2 - \xi^2)\left[(q-q')^2 - (p-p')^2\right] + \xi\eta(\xi^2 + \eta^2)(p-p')(q-q')$$

(26) $$e^2 e'^2 \gamma^2 \cos(2\omega - 2\tau') = e'^2 \, . \, e^2 \cos 2\tilde{\omega} \gamma^2 \cos 2\tau + e'^2 e^2 \operatorname{sen} 2\tilde{\omega} \gamma^2 \operatorname{sen} 2\tau$$
$$= \frac{1}{4} (\xi'^2 + \eta'^2)(\eta^2 - \xi^2)\left[(q-q')^2 - (p-p')^2\right] + (\xi'^2 + \eta'^2)\xi\eta(p-p')(q-q')$$

(27) $$e^2 \gamma^4 \cos(2\omega - 2\tau') = \gamma^2 e^2 \cos 2\tilde{\omega} \gamma^2 \cos 2\tau + \gamma^2 e^2 \operatorname{sen} 2\tilde{\omega} \gamma^2 \operatorname{sen} 2\tau$$
$$= \frac{1}{16}\left[(q-q')^4 - (p-p')^4\right](\eta^2 - \xi^2) + \frac{1}{4} \xi\eta(p-p')(q-q')\left[(p-p')^2 + (q-q')^2\right]$$

(28) $$e^3 e' \gamma^2 \cos(\tilde{\omega}' + \omega - 2\tau') = e^2 \, . \, ee' \cos(\tilde{\omega}' + \tilde{\omega}) \gamma^2 \cos(\tau' + \tau)$$
$$+ e^2 \, . \, ee' \operatorname{sen}(\tilde{\omega}' + \tilde{\omega}) \gamma^2 \operatorname{sen}(\tau' + \tau) = \frac{1}{4} (\xi^2 + \eta^2)(\eta\eta' - \xi\xi')\left[(q-q')^2\right.$$
$$\left. - (p-p')^2\right] + \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2)(\xi'\eta + \eta'\xi)(p-p')(q-q')$$

(29) $$ee'^3 \gamma^2 \cos(\tilde{\omega}' + \omega - 2\tau') = e'^2 ee' \gamma^2 \cos\left[\tilde{\omega}' + \tilde{\omega} - (\tau' + \tau)\right]$$
$$= \frac{1}{4} (\xi'^2 + \eta'^2)(\eta\eta' - \xi\xi')\left[(q-q')^2 - (p-p)^2\right] + \frac{1}{2} (\xi'^2 + \eta'^2)(\xi'\eta + \eta'\xi)(p-p')(q-q')$$

(30) $$ee' \gamma^4 \cos(\tilde{\omega}' + \omega - 2\tau') = \gamma^2 \, . \, ee' \gamma^2 \cos\left[\tilde{\omega}' + \tilde{\omega} - (\tau' + \tau)\right]$$
$$= \frac{1}{16}\left[(q-q')^4 - (p-p')^4\right](\eta\eta' - \xi\xi') + \frac{1}{8}\left[(p-p')^2 + (q-q')^2\right](p-p')(q-q')(\xi'\eta + \eta'\xi)$$

(31)
$$e^2e'^2\gamma^2\cos(2\tilde{\omega}'-2\tau') = e^2\,.\,e'^2\cos 2\tilde{\omega}'\gamma^2\cos 2\tau' + e^2e'^2\operatorname{sen} 2\tilde{\omega}'\gamma^2\operatorname{sen} 2\tau'$$
$$= \frac{1}{4}(\xi^2+\eta^2)(\eta'^2-\xi'^2)[(q-q')^2-(p-p')^2] + (\xi^2+\eta^2)(p-p')(q-q')\xi'\cdot\eta'$$

(32)
$$e'^4\gamma^2\cos(2\tilde{\omega}'-2\tau') = e'^2e'^2\cos 2\tilde{\omega}'\gamma^2\cos 2\tau' + e'^2e'^2\operatorname{sen} 2\tilde{\omega}'\gamma^2\operatorname{sen} 2\tau'$$
$$= \frac{1}{4}(\xi'^2+\eta'^2)(\eta'^2-\xi'^2)[(q-q')^2-(p-p')^2] + (\xi'^2+\eta'^2)(p-p')(q-q')\xi'\eta'$$

(33)
$$e'^2\gamma^4\cos(2\tilde{\omega}'-2\tau') = \gamma^2\,.\,e'^2\cos 2\tilde{\omega}'\,.\,\gamma^2\cos 2\tau' + \gamma^2e'^2\operatorname{sen} 2\tilde{\omega}'\gamma^2\operatorname{sen} 2\tau'$$
$$= \frac{1}{16}(\eta'^2-\xi'^2)[-(p-p')^4+(q-q')^4] + \frac{1}{4}\xi'\eta'[(p-p')^2+(q-q')^2](p-p')(q-q')$$

(34)
$$e^3e'\gamma^2\cos(\tilde{\omega}'-3\omega+2\tau') = e'e^3\gamma^2\cos[\tilde{\omega}'-3\tilde{\omega}+2\tau-(\tau'-\tau)]$$
$$= e'e^3\cos(\tilde{\omega}'-3\tilde{\omega})\gamma^2\cos 2\tau - e'e^3\operatorname{sen}(\tilde{\omega}'-3\tilde{\omega})\gamma^2\operatorname{sen} 2\tau$$
$$= \frac{1}{4}[(q-q')^2-(p-p')^2][(\xi\xi'+\eta\eta')(\eta^2-\xi^2)+2\xi\eta(\xi'\eta-\eta'\xi)]$$
$$- \frac{1}{2}(p-p')(q-q')[(\xi'\eta-\eta'\xi)(\eta^2-\xi^2)-2(\xi\xi'+\eta\eta')\xi\eta]$$

(35)
$$ee'^3\gamma^2\cos(3\tilde{\omega}'-\omega-2\tau') = ee'^3\gamma^2\cos[\tilde{\omega}-3\tilde{\omega}'+2\tau^1+(\tau'-\tau)]$$
$$= \frac{1}{4}[(q-q')^2-(p-p')^2]\{(\xi\xi'+\eta\eta')(\eta'^2-\xi'^2)+2\xi'\eta'(\xi\eta'-\eta\xi')\}$$
$$- \frac{1}{2}(p-p')(q-q')\{(\xi\eta'-\eta\xi')(\eta'^2-\xi'^2)-2(\xi\xi'+\eta\eta')\cdot\xi'\eta'\}$$

(36)
$$e^2\gamma^2 = \frac{1}{4}(\xi^2+\eta^2)\{(p-p')^2+(q-q')^2+\frac{1}{4}(p^2+q^2-p'^2-q'^2)^2\}$$

(37)
$$e'^2\gamma^2 = \frac{1}{4}(\xi'^2+\eta'^2)\{(p-p')^2+(q-q')^2+\frac{1}{4}(p^2+q^2-p'^2-q'^2)\}$$

los términos deducidos, de los cuales 10 términos son en su expresión original del 2° y 4° grado, han sido desarrollados todos hasta el 6° grado inclusive; como funciones de ξ, η, p, q, ξ', η', p' y q'.

Para controlar sean agregados los desarrollos respecto de $\gamma^2\operatorname{sen} 2\tau$ etc. (38-43):

(38)
$$\gamma^2\operatorname{sen} 2\tau = \frac{1}{2}(p-p')(q-q') + \frac{1}{4}(pp'+qq')[(p-p')q+(q-q')p]$$
$$- \frac{1}{4}(p'^2+q'^2)[(p-p')q+(q-q')p] + \frac{1}{8}(p-p')(q-q')[(p-p')^2+(q-h')^2]$$

(39)
$$\gamma^2\cos 2\tau = \frac{1}{4}[(q-q')^2-(p-p')^2] + \frac{1}{4}(pp'+qq')[(q-q')q-(p-p')p]$$
$$+ \frac{1}{4}(p'^2+q'^2)[(p-p')p-(q-q')q] + \frac{1}{16}[(q-q')^4-(p-p')^4]$$

$$(40)\qquad \gamma^2 \operatorname{sen} 2\tau' = \frac{1}{2}(p-p')(q-q') + \frac{1}{4}(pp'+qq')[(p-p')q+(q-q')p]$$
$$-\frac{1}{4}(p'^2+q'^2)[(p-p')q+(q-q')p] + \frac{1}{8}(p-p')(q-q')[(p-p')^2+(q-q')^2]$$
$$+\frac{1}{4}(qp'-pq')[(q-q')^2-(p-p')^2]$$

$$(41)\qquad \gamma^2 \cos 2\tau' = \frac{1}{4}[(q-q')^2-(p-p')^2] + \frac{1}{4}(pp'+qq')[(q-q')q-(p-p')p]$$
$$+\frac{1}{4}(p'^2+q'^2)[(p-p')p-(q-q')q] + \frac{1}{16}[(q-q')^4-(p-p')^4]$$
$$-\frac{1}{2}(qp'-pq')(p-p')(q-q')$$

$$(42)\qquad \gamma^2 \operatorname{sen}(\tau'+\tau) = \frac{1}{2}(p-p')(q-q') + \frac{1}{4}(pp'+qq')[(p-p')q+(q-q')p]$$
$$-\frac{1}{4}(p'^2+q'^2)[(p-p')q+(q-q')p] + \frac{1}{8}(p-p')(q-q')[(p-p')^2+(q-q')^2]$$
$$+\frac{1}{8}(qp'-pq')[(q-q')^2-(p-p')^2]$$

$$43)\qquad \gamma^2 \cos(\tau'+\tau) = \frac{1}{4}[(q-q')^2-(p-p')^2] + \frac{1}{4}(pp'+qq')[(q-q')q-(p-p')p]$$
$$+\frac{1}{4}(p'^2+q'^2)[(p-p')p-(q-q')q] + \frac{1}{16}[(q-q')^4-(p-p')^4]$$
$$-\frac{1}{4}(qp'-pq')(p-p')(q-q')$$

En base a los desarrollos mencionados, resulta, aplicando los coeficientes C_2, C_4, etc., la nueva forma de la función perturbadora según potencias de las nuevas variables: $\xi, \eta, \xi', \eta', p, q, p'$ y q'; pero no parece necesario componer, explícitamente, esta nueva forma.

Respecto a las ecuaciones diferenciales referentes a las variables ξ y η resultan en la primera aproximación, es decir, por limitación de los segundos miembros a los términos del 1$^{\text{er}}$ grado respecto de ξ y η provenientes de los términos del 2° grado de la función perturbadora, las siguientes ecuaciones (44):

$$(44)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= a_1 + a_2\xi + a_3\eta \\ -\frac{d\eta}{dt} &= b_1 + b_2\xi + b_3\eta \end{aligned}\right.$$

siendo los coeficientes a_3 y b_2, del grado 0; con relación a ξ' y η', son iguales respecto al grado 0, como se verifica por la expresión de R. Los coeficientes a_1 y b_1 son ambos del grado 1, el primero respecto de η', y el otro respecto de ξ', además los coeficientes a_2 y b_3 son del grado 2, es decir, dependientes del producto $\xi' . \eta'$ y son iguales por la definición : $a_2 = \frac{\partial^2 R}{\partial\xi\partial\eta} = b_3$ respecto de todos los grados de ξ' y η'. Por eso resulta que los términos $a_3\eta$ y $b_2\xi$ son los términos principales en las ecuaciones diferenciales ; además las constantes a_1 y b_1 son también el 1er grado. Simultáneamente todos los términos son del 1er orden de la masa perturbadora m'. Los coeficientes mencionados están definidos por las siguientes expresiones, inclusive los términos del 4° grado de R : (45)

$$(45)\quad \begin{array}{lll} a_1 = f[C_2'\eta' + D_4'\eta'(\xi'^2+\eta'^2)], & a_2 = 4fD_4''\xi'\eta', & a_3 = f[2C_2 + 2C_4''(\xi'^2+\eta'^2) + 2D_4''(\eta'^2-\xi'^2)] \\ b_1 = f[C_2'\xi' + D_4\xi'(\xi'^2+\eta'^2)], & b_2 = f[2C_2 + 2C_4''(\xi'^2+\eta'^2) + 2D_4''(\xi'^2-\eta'^2)] & b_3 = 4fD4''\xi' . \eta' \end{array}$$

siendo definido el coeficiente $f = \frac{k^2 . m'}{na^2}$ ó aplicando la 3ª ley de Kepler, es decir $k^2 . (1+m) = a^3 . n^2$: $f = \frac{nam'}{1+m}$.

Para eliminar las partes inhomogéneas de las 2 ecuaciones diferenciales (44) se pone : (46) $\xi = x + \Delta x$, $\eta = y + \Delta y$, de modo que las 2 ecuaciones diferenciales pierden sus partes constantes, si Δx y Δy son calculadas por las siguientes ecuaciones (47)

$$(47)\quad \begin{aligned} a_1 + a_2\,\Delta x + a_3\Delta y &= 0 \\ b_1 + b_2\Delta x + b_3\Delta y &= 0, \end{aligned}$$

de modo que :

$$\Delta x = \frac{1}{N}(-a_1a_2 + b_1a_3), \qquad \Delta y = \frac{1}{N}(-a_2b_1 + a_1b_2)$$

donde la determinante N está definida por $N = a_2{}^2 - a_3b_2$.

En base al grado de los coeficientes, fijado anteriormente, resulta entonces en la primer aproximación:

$$(48)\quad \begin{aligned} \Delta x &= -\frac{b_1}{b_2} = -\frac{C_2'}{C_2}\cdot\xi' = 1^{\text{er}}\text{ grado} \\ \Delta y &= -\frac{a_1}{a_3} = -\frac{C_2'}{C_2}\eta' = 1^{\text{er}}\text{ grado} \end{aligned}$$

respecto de e'.

Sustituyendo entonces, por la solución de las ecuaciones diferenciales, la siguiente forma relativa a x e y : (48) : $x = c_1e^{s.t}$ $y = c_2e^{s.t}$ (e = base de los logaritmos naturales) resulta por definición del coeficiente característico s de la solución :

$$(49)\quad s = -\frac{1}{2}(b_3 - a_2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(b_3 - a_2)^2 + a_2b_3 - b_2a_3}$$

Siendo en general $b_3 - a_2 \neq 0$, s puede ser real o complejo, es decir $s = s_1 + is_2$, de modo que las soluciones x e y fijan una solución asintótica o mixta-secular de la forma : $e^{s_1t} . \cos s_2t$, es decir inestable en cada caso. Pero en nuestro caso especial de las perturbaciones seculares aparece el caso extraordinario de que la parte real de s : $s_1 = -\frac{1}{2}(b_3 - a_2) = 0$, y, como ya hemos demostrado, respecto de todas las potencias de ξ' y η', por ser $a_2 = \dfrac{\partial^2 R}{\partial\xi\,\partial\eta} = b_3$ en general. Por eso la solución de las ecuaciones diferenciales se representa como periódica pura, por ser (50) $-s^2 = +\sigma^2 = a_3b_2 - a_2b_3 > 0$, de modo que los dos valores de s son imaginarios, ya que a_3 y b_2 son iguales respecto de los términos del grado 0, y por eso $a_3b_2 > 0$ y del grado 0, mientras que $a_2b_3 = 4^\circ$ grado. Cambiando nuevamente el coeficiente real σ con la letra s, la solución periódica de las ecuaciones diferenciales tiene la forma (51)

$$x = \alpha \operatorname{sen} A, \tag{51}$$

$$y = \alpha \frac{s}{a_3} \cos A - \alpha \frac{a_2}{a_3} \operatorname{sen} A.$$

donde el argumento angular es : $A = st = \beta$, fijando las dos magnitudes α y β las dos constantes de integración. El período del sistema es determinado por el coeficiente s, definido por la igualdad de a_3 y b_2 : $s = a_3 +$ términos del grado 2, etc. (funciones de ξ' y η'). Por eso el coeficiente $\dfrac{s}{a_3}$ en el 1er término de la definición de y tiene en la 1^a aproximación el valor 1, hasta términos de 2° grado, mientras que el coeficiente $\dfrac{a_2}{a_3}$ del 2° término de y es del 2° grado hasta términos del 4° grado, siendo a_2 del 2° grado respecto de ξ' y η'. Siendo ahora : $\xi = e \operatorname{sen} \omega = x + \Delta x$ y $\eta = e . \cos\tilde{\omega} = y + \Delta y$ del 1er grado, asimismo las constantes Δx y Δy ; el coeficiente α en $x = \alpha \operatorname{sen} A$ es del 1er grado ; por eso el coeficiente $\alpha \dfrac{s}{a_3} =$ 1er grado + términos del 3er grado, etc. ; pero el coeficiente $\alpha \dfrac{a_2}{a_3} =$ 3er grado + terminos del grado 5°.

En el caso de que $e' = 0$, por eso $a_2 = b_3 = 0$, las soluciones respecto de x e y son definidas en la 1^a aproximación por $x = \alpha \operatorname{sen} A$ e $y = \alpha \cos A$.

El punto principal del resultado es que la 1^a solución aproximada es una solución periódica por estar cumplida la condición $a_2 = b_3 = 0$. — En cuanto a la cuestión relativa a la estabilidad, la pregunta esencial es, si en la ampliación de la solución por la consideración sucesiva de términos de más alto grado de la función perturbadora los nuevos coeficientes a_2' y b_3' siguen cumpliendo la condición fundamental de la solución periódica.

Interpretemos primero la solución periódica del 1er paso de aproximación. Prescindiendo primero del término del 3er grado en la representación para y, y estableciendo, en la 1^a aproximación, $\dfrac{s}{a_3} = 1$, resulta la siguiente y sencilla integral :

$$x^2 + y^2 = \alpha^2 \quad \text{o} \quad (\xi - \Delta x)^2 + (\eta - \Delta y)^2 = \alpha^2 \tag{52}$$

es decir la órbita de los ξ y η es un círculo ; siendo $\xi = e \operatorname{sen} \tilde{\omega}$ y $\eta = e \cos \tilde{\omega}$; las coordenadas polares son la excentricidad e y el ángulo $90 - \tilde{\omega}$. El radio del círculo es $r = \alpha$ y las coordenadas del centro son los valores Δx y Δy proporcionales a la excentricidad de Júpiter. Por el centro del círculo como origen, pasa el sistema x, y, paralelo al sistema ζ, η ; siendo $x = \alpha \operatorname{sen} A$ e $y = \alpha \cos A$, el ángulo polar en el centro corresponde a $90° - A$. Al tiempo $t = 0$ corresponde $A = A_0 = \beta$, de modo que el ángulo polar $90° - \beta$ corresponde al punto P_0 respecto $t = 0$. En el caso de que sea $e' = 0$, resulta $\Delta x = \Delta y = 0$, es decir, el centro del círculo coincide con el origen de las coordenadas ξ y η, de modo que la excentricidad, por la ecuación $e^2=\xi^2+\eta^2=\alpha^2$ resulta una constante secular; respecto a la longitud del perihelio resulta, ya que ahora $\xi=e$ sen $\tilde{\omega}=\alpha$ sen $(st+\beta)$ y $\eta=e$ cos $\tilde{\omega}=\alpha$ cos $(st+\beta)$ y por ello $\tilde{\omega}=st+\beta$, una rotación en torno al origen. La velocidad de rotación es s, por eso el período de la revolución del perihelio $P=\frac{2\pi}{s}$. Siendo los valores de los semiejes de las órbitas de los planetoides, en la mayoría entre 2 y 4, el coeficiente s varía entre 20″ hasta 500″ por año, de ahí que el período de la revolución de los perihelios se halle entre 64800 y 25920 años.

Considerando, en general, la representación exacta de la coordenada y poniendo : $\frac{s}{a_3}=1$ + términos del 2° grado, y asímismo $\frac{a_2}{a_3}=2°$, resulta, en lugar del círculo $P(\xi\eta)$ una elipse transformada sencillamente por los términos del 2° grado.

Si no coincide el centro del círculo con el origen de los $\xi\eta$, es decir, si $e'\neq 0$, de modo que la distancia d de los dos sistemas de coordenadas sea $d=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, el criterio de la existencia de una libración o rotación de los perihelios depende de la desigualdad $d \gtrless r$, siendo $r=\alpha$ el radio del círculo; en el caso de $d>r$, las direcciones perihelios están encerradas en el ángulo entre las tangentes desde el origen de las ξ, η al círculo, de modo que hay libración, mientras en el caso de $d<r$, la dirección-perihelio describe un círculo en torno al origen de las ξ, η, de modo que tiene lugar una rotación del perihelio.

En el caso de que haya que deducir la curva exacta del punto $P(\xi\eta)$, considerando todas las potencias de las excentricidades, hay que salir de las ecuaciones diferenciales originales (1), las cuales admiten, como es visible en seguida, una integral exacta, si prescindimos de las variables-inclinación. Resulta directamente de las ecuaciones (1) : $\frac{\partial R}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial R}{\partial \eta}d\eta=0$, por eso, por integración se tiene :

$$R(\xi,\eta)=\text{const.}=R_0. \tag{53}$$

Esta integral se reduce, limitando el desarrollo de R a los términos del segundo grado de las x, y, a la órbita circular del punto $P(\xi,\eta)$ deducida anteriormente : $(\xi-\Delta x)^2+(\eta-\Delta y)^2=$ const., donde Δx, Δy tienen el significado ya deducido anteriormente, siendo $\xi-\Delta x=x$; y $\eta-\Delta y=y$. En el caso general, considerando todas las potencias de ξ y η en R resulta numéricamente muy sencilla la construcción de la órbita del punto P.

Los puntos singulares de la curva $R(\xi,\eta)=R_0=$ const. resultan por las condiciones : $\frac{\partial R}{\partial \xi}=\frac{\partial R}{\partial \eta}=0$, por medio de las cuales se obtiene las magnitudes especiales ξ_0 y η_0, cuya substitución en la ecuación $R(\xi,\eta)=R_0$ permite la deducción de los valores singulares de R_0. Ya sabemos que por medio de la limitación del desarrollo de R, según potencias de ξ y η, a los términos del grado más bajo, los puntos singulares correspondientes tienen las coordenadas : $\xi_0=\Delta x$ y $\eta_0=\Delta y$, de modo que el centro de la órbita circular fija, aproximadamente, el punto singular buscado. Otros puntos singulares no hay, en general, ya que la determinante de las dos ecuaciones $\frac{\partial R}{\partial \xi}=0$, $\frac{\partial R}{\partial \eta}=0$ es distinto de 0, generalmente. El valor singular especial de R, se reduce por eso a $R(\Delta x\,.\,\Delta y)=C_0$ y depende de la razón de los ejes mayores de las órbitas del planetoide y Júpiter, además de la excentricidad e' de Júpiter. Limitándose la órbita perteneciente a P a un único punto, la excentricidad del planetoide queda constante, es decir, la distancia del punto singular al origen de las coordenadas, de modo que $e = d = \text{const.} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ y la dirección del perihelio del planetoide también queda constante, coincidiendo con la dirección del perihelio de Júpiter, fijado por la línea que une el origen de coordenadas con el centro del circular orbital. En el caso de que exista una conmensurabilidad de los movimientos medios, una conmensurabilidad mayor del 2° grado, de modo que los términos que se hacen seculares por la conmensurabilidad, no ganan influencia en los términos del grado más bajo, la órbita hallada singular del planetoide corresponde a una solución periódica del 2° tipo de Poincaré, considerando todavía las ubicaciones iniciales de los dos cuerpos perturbante y perturbado.

En el caso general $R = \text{const.}$, la curva correspondiente desviará siempre sólo de la órbita circular anteriormente deducida, en cuanto las excentricidades, pueden ser consideradas pequeñas, del 1er grado; entonces habrá libración, si el origen de coordenadas está fuera de la curva. La magnitud máxima de la oscilación de la diferencia de los perihelios $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'$ resulta mediante la definición de $\tilde{\omega}$ por medio de $\operatorname{tg} \tilde{\omega} = \frac{\xi}{\eta}$ por la condición $\frac{d\xi}{dt}\eta - \frac{d\eta}{dt}\xi = 0$, de modo que, aplicando las ecuaciones diferenciales $\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \eta}$ y $\frac{d\eta}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \eta}$ resulta que la nueva forma de la condición: $\xi \frac{\partial R}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial R}{\partial \eta} = 0$.

Esta condición hay que relacionarla todavía con la integral $R = \text{const.}$, para deducir las dos coordenadas ξ_0 y η_0 que corresponden a los valores extremos de la longitud del perihelio $\tilde{\omega}$ o a la diferencia de los perihelios $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'$.

Pero los valores de e que resultan de estos valores de ξ y η no son valores extremos. Los extremos de e resultan en base a la definición $e^2 = \xi^2 + \eta^2$ por medio de la condición: $\xi \frac{d\xi}{dt} + \eta \frac{d\eta}{dt} = 0$; por eso considerando las ecuaciones diferenciales respecto de ξ y η la condición definitiva es: $\xi \frac{\partial R}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial R}{\partial \xi} = 0$; hay que tomar en cuenta la integral $R = \text{const.}$, para obtener el valor extremo de e y un valor correspondiente de la longitud $\tilde{\omega}$ del perihelio que coincide casi con la dirección del perihelio de Júpiter, como ocurre en el caso de las pequeñas excentricidades, siendo la órbita del punto $P(\xi, \eta)$ un círculo.

Una consecuencia importante de la existencia de la integral $R = C = \text{const.}$, siendo R una serie de potencias convergente; en el caso de pequeños valores de los parámetros ξ y η, es la siguiente; si la constante C tiene un pequeño valor en cualquier momento, por ser pequeño el valor de $e =$ 1er grado, el parámetro e siempre permanece pequeño, del 1er grado. Por eso resulta que, si la solución sucesiva en base de una consideración también sucesiva de nuevos términos ascendentes de ξ y η origina perturbaciones seculares o términos de Poisson mixtos-seculares de la forma $t \,.\, \operatorname{sen} A$ o $t \,.\, \cos A$, estos términos de inestabilidad pueden acrecer sin límite, con el tiempo t, de modo que representan un engaño por las aproximaciones sucesivas y resultan inadmisibles en cuanto a mayores intervalos de tiempo.

Volviendo ahora, en el caso de pequeñas excentricidades, al criterio fijado anteriormente respecto a una libración o rotación del perihelio, es decir $d \gtrless r$, si queremos transformar la condición, en cuanto el radio r, en el triángulo formado por el origen O del sistema ξ, η, en el punto P del círculo y su centro, se puede expresar como función de d, de la distancia $PO = e$ y del ángulo entre d y e, es decir, $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'$: $r^2 = e^2 + d^2 - 2ed \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}')$. Por eso resulta, en base a la desigualdad $r \lesseqgtr d$, la nueva forma del criterio como función de elementos de la órbita: $e^2 \gtrless 2e \,.\, d \,.\, \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}')$, forma que sólo es posible, si $\cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') > 0$ es decir $(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}) < 90°$. Siendo además $d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \frac{1}{2}\frac{c_2'}{c_2} e'$, resulta finalmente : $e \gtrless \frac{c_2'}{c_2} \,.\, e \cos (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}')$; el factor $\frac{c_2'}{c_2} = K$ depende sólo de la razón de los ejes mayores $\alpha = \frac{a}{a'}$, de modo que por eso, en el sistema de los planetoides, con Júpiter de cuerpo perturbante, α está entre 1 . 2 y 2. Esta simple forma de la primera aproximación ya la dió Charlier en sus *Vorlesungen zur Mechanik des Himmels*, tomo I, pág. 422 y *Meddelanden fran Lunds Observatorium Nr. 12*. Pero como ya vamos a ver, esta primera aproximación es insegura, porque puede ser influenciada en una forma decisiva, por los términos del grado próximo más alto y las perturbaciones periódicas respecto a la deducción de las constantes de integración, de modo que una libración de primera aproximación puede ser transformada en una rotación. Aplicando el criterio sencillo, no está permitido, como Charlier lo hizo, sustituir los elementos osculatrices, sino los elementos liberados de las perturbaciones periódicas, es decir, los elementos seculares, especialmente $\xi = e \,.\, \text{sen}\, \tilde{\omega}$ y $\eta = e \cos \tilde{\omega}$. La parte especial de la función perturbadora que origina las perturbaciones periódicas, resulta lo más sencillo en base a los desarrollos de la función perturbadora de Le Verrier en los *Annales de l'Observatoire de Paris*, tomo 10, pág. 41. Transformando estos desarrollos, pasando de los e y $\tilde{\omega}$, e' y $\tilde{\omega}'$ a los ξ y η ; ξ' y η', se obtiene hasta los términos del 2° grado de estos parámetros inclusive, para llegar, en las ecuaciones diferenciales, hasta los términos del 1er grado :

$$
\begin{aligned}
(54) \qquad a'R = k^2 \,.\, m' \Big\{ & \frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} a'A^i \cos i\,(l' - l) + \frac{1}{8}(\xi^2 + \eta^2 + \xi'^2 + \eta'^2) \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} (-4i^2 a'A^i \\
& + 2a'A_1{}^i + 2a'A_2{}^i) \cos i\,(l' - l) + \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-2a'A^i - a'A_1{}^i)\{[\eta \cos [il' - (i-1)\,l] \\
& + \xi \,\text{sen}\, [il' - (i-1)\,l]\} + \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}[(2i+1)\,a'A^i + a'A_1{}^i] \,\{[\eta' \cos [(i+1)\,l' - il] \\
& + \xi' \,\text{sen}\, [(i+1)\,l' - il]\} + \frac{1}{8}\sum_{-\infty}^{+\infty}[(4i^2 - 5i)\,a'A^i + (4i-2)\,a'A_1{}^i + 2a'A_2{}^i]\,\{(\eta^2 - \xi^2) \times \\
& \cos [il' - (i-2)\,l] + 2\xi\eta \sin [il' - (i-2)\,l]\} + \frac{1}{4}\sum_{-\infty}^{+\infty}\{[(4i^2 + 2i)\,a'A^i \\
& - 2a'A_1{}^i - 2a'A_2{}^i]\,[(\xi\xi' + \eta\eta') \cos (i+1)\,l' - (i+1)\,l] + (\xi'\eta - \eta'\xi) \,\text{sen}\, [\\
& [(i+1)\,l' - (i+1)\,l]\} + \frac{1}{4}\sum_{-\infty}^{+\infty}[(-4i^2 - 2i)\,a'A^i + (-4i-2)\,a'A_1{}^i - 2a'A_2{}^i] \\
& \{[(\eta\eta' - \xi\xi') \cos [(i+1)\,l' - (i-1)\,l] + (\eta\xi' + \xi\eta') \,\text{sen}\, [(i+1)\,l' - (i-1)\,l]\}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{8}\sum_{-\infty}^{+\infty}[(4i^2+9i+4)\,a'A^i+(4i+6)\,a'A_1{}^i+2a'A_2{}^i]\{[(\eta'^2-\xi'^2)\cos[(i+2)\,l'-$$

$$-il]+2\xi'\eta'\operatorname{sen}[(i+2)\,l'-il]\}-\alpha\cos(l'-l)+\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2+\xi'^2+\eta'^2)\times$$

$$\alpha\cos(l'-l)-\alpha[(\eta\eta'+\xi\xi')\cos(2l'-2l)+(\xi'\eta-\eta'\xi)\operatorname{sen}(2l'-2l)]$$

$$-\frac{1}{2}\alpha[\eta\cos(l'-2l)-\xi\sin(l'-2l)]+\frac{3}{2}\alpha[\eta\cos l'+\xi\operatorname{sen}l'],$$

donde los términos finales dependientes explícitamente de $\alpha=\frac{a}{a'}$ tienen su origen en la parte complementaria de la función perturbadora R. Los términos dependientes de las inclinaciones orbitales no se tomaron en cuenta, ya que ellos comienzan con el coeficiente γ^2 y originan por lo tanto en $\frac{\partial R}{\partial \xi}$ y $\frac{\partial R}{\partial \eta}$ términos que por lo menos son del 2° grado en ξ y η y de los cuales hemos prescindido en las integrales respectivas. En cuanto a las perturbaciones del grado o que resultan en nuestro caso especial, y que provienen de las perturbaciones de 1er grado en R, nos concretaremos a fijar los términos $p(\xi)$ y $p(\eta)$ que son del grado o :

$$(55)\qquad p(\xi)=\alpha m'\left\{+\frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty}(-2ia'A^i-a'A_1{}^i)\,\frac{n\operatorname{sen}[il'-(i-1)\,i]}{in'-(i-1)n}-\frac{1}{2}\alpha\frac{n}{n'-2n}\operatorname{sen}(l'-2l)\right.+$$
$$\left.+\frac{3}{2}\alpha\frac{n}{n'}\operatorname{sen}l'\right\}$$

$$p(\eta)=\alpha m'\left\{+\frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty}(-2ia'A^i-a'A_1{}^i)\,\frac{n}{in'-(i-1)\,n}\cos[il'-(i-1)\,l]+\frac{1}{2}\alpha\frac{n}{n'-2n}\cos(l'-2l)\right.$$
$$\left.+\frac{3}{2}\alpha\,.\,\frac{n}{n'}\cos l'\right\}$$

La solución total es la siguiente :

$$(56)\qquad \begin{aligned}\xi&=x+\Delta x+p(\xi)=\alpha\operatorname{sen}(st+\beta)+\Delta x+p(\xi)\\ \eta&=y+\Delta y+p(\eta)=\alpha\cos(st+\beta)+\Delta y+p(\eta),\end{aligned}$$

de modo que las constantes de integración α y β resultan por medio de los valores ξ y η que corresponden al tiempo $t=0$:

$$(57)\qquad \begin{aligned}\alpha\operatorname{sen}\beta&=\xi_0-\Delta x-p(\xi_0)\\ \alpha\cos\beta&=\eta_0-\Delta y-p(\eta_0),\end{aligned}$$

En el caso que consideramos, las perturbaciones seculares de los grandes planetas, los valores Δx Δy ya no son constantes, sino que deben ser reemplazados por la representación secular de las variables excentricidad de los grandes planetas, de modo que en lugar de Δx hay que sustituir : $\sum \alpha_i \operatorname{sen}(s_i t + \beta_i)$, y en lugar de Δy : $\sum \alpha_i \cos(s_i t + \beta_i)$ donde : $\alpha_i = \dfrac{E_i}{s - s_i}$ (Charlier, *Mechanik des Himmels*, tomo I, pág. 415 ; y de esta memoria las fórmulas (119) y (120)), siendo el índice $i = 1, 2, \ldots\ldots, 8$; fijando especialmente s_7 el movimiento medio secular del perihelio de Júpiter. Formando en este caso general, por aplicación de los factores correspondientes, las funciones $e \operatorname{sen}(\tilde{\omega} - s_7 - \beta_7)$ y $e \cos(\tilde{\omega} - s_7 - \beta_7)$ se obtiene la nueva ecuación decisiva respecto de libración o rotación : $\operatorname{tg}(\tilde{\omega} - s_7 t - \beta) = \dfrac{Z}{N}$, siendo la significación de Z y N :

$$
\begin{aligned}
Z = {} & \alpha \operatorname{sen}[(s - s_7)\, t + \beta - \beta_7] + \textstyle\sum' \alpha_i \operatorname{sen}[(s_i - s_7)\, t + \beta_i - \beta_7] + \\
& + p(\xi)\cos(s_7 t + \beta_7) - p(\eta)\operatorname{sen}(s_7 t + \beta_7)
\end{aligned}
\tag{58}
$$

$$
\begin{aligned}
N = {} & \alpha_7 + \alpha \cos[(s - s_7)\, t + \beta - \beta_7] + \textstyle\sum' \alpha_i \cos[(s_i - s_7)\, t + \beta_i - \beta_7)] + \\
& + p(\xi)\operatorname{sen}(s_7 t + \beta_7) + p(\eta)\cos(s_7 t + \beta_7).
\end{aligned}
\tag{59}
$$

El acento del signo-suma expresa que $i = 7$ no viene al caso, por reducirse el término correspondiente a s_7 el primer término del segundo miembro. Entonces la condición relativa a una libración del perihelio $\tilde{\omega}$ del planetoide en torno al perihelio movido de Júpiter, con una velocidad angular s_7, exige que el denominador N debe ser distinto de O, siempre, es decir, tiene lugar la condición :

$$
|\alpha_7| > |\alpha| + \textstyle\sum'(\alpha_i) + \sum |C_{ik}| + \sum |S_{ik}|
\tag{60}
$$

Los coeficientes C_{ik} y S_{ik} resultan del desarrollo de $p(\xi)$ y $p(\eta)$, siendo :

$$
p(\xi) = \textstyle\sum S_{ik} \operatorname{sen}(il' + kl)\,; \qquad p(\eta) = \sum C_{ik} \cos(il' + kl)
\tag{60a}
$$

Limitando el cálculo de las perturbaciones periódicas $p(\xi)$ y $p(\eta)$ a los términos principales, es decir los del grado o, ya fijados anteriormente, hay que calcular, respecto de las trascendentes de Laplace, sólo los coeficientes b^i y b^i_1, ya que $a'A^i = b^i$ y $a'A^i_1 = b^i_1$, sólo dependen $\alpha = \dfrac{a}{a'}$ de modo que pueden obtenerse cómodamente por medio de las tablas de Runkle (Smithsonian Contributions to Knowledge 9, Washington 1857, Appendix 1885).

Finalizando este capítulo, vamos todavía a representar la excentricidad y la longitud del perihelio del asteroide en forma analítica como función del tiempo t, en cuanto se trata de la primera aproximación. En este caso hemos fijado la forma :

$$
\left.
\begin{aligned}
\xi &= e \operatorname{sen}\omega = x + \Delta x = \alpha \operatorname{sen} A + f e' \operatorname{sen}\tilde{\omega} \\
\eta &= e \cos\omega = y + \Delta y = \alpha \cos A + f e' \cos\tilde{\omega}'
\end{aligned}
\right\}
\tag{61}
$$

donde $f = -\dfrac{1}{2}\dfrac{C_2'}{C_2}$ es una magnitud del grado o y orden o, y $A = st + \beta$.

Aplicando ahora los multiplicadores correspondientes respecto de las ecuaciones (61) para pasar a la diferencia $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'$, resultan las nuevas relaciones :

$$\left.\begin{aligned} e \operatorname{sen}(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}') &= \alpha \operatorname{sen}(\Lambda-\tilde{\omega}') \\ e \cos(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}') &= f \cdot e' + \alpha \cos(\Lambda-\tilde{\omega}') \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

de modo que :

$$\operatorname{tg}(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}') = \frac{\mathrm{L} \operatorname{sen}(\Lambda-\tilde{\omega}')}{1+\mathrm{L}\cos(\Lambda-\tilde{\omega}')} \tag{63}$$

donde $\mathrm{L} = \frac{\alpha}{f \cdot e'}$ ó por $f \cdot e' = d$, $\alpha = r$, también : $\mathrm{L} = \frac{r}{d} < 1$, en el caso de la libración. Entonces el denominador nunca desaparece, de modo que $|\tilde{\omega}-\tilde{\omega}'| < 90°$ por eso la diferencia $\tilde{\omega}-\tilde{\omega}'$ es desarrollable, por un teorema bien conocido, en una serie periódica según múltiplos de $\Lambda - \tilde{\omega}'$ y cuyos coeficientes, simultáneamente progresan según potencias de L, de manera que :

$$\tilde{\omega}-\tilde{\omega}' = \mathrm{L}\operatorname{sen}(\Lambda-\tilde{\omega}') - \frac{1}{2}\mathrm{L}^2 \operatorname{sen} 2(\Lambda-\tilde{\omega}') + \frac{1}{3}\mathrm{L}^3 \operatorname{sen} 3(\Lambda-\tilde{\omega}') \mp \ldots \tag{64}$$

Asimismo el logaritmo de la excentricidad e, siendo

$$e^2 = \alpha^2 + f^2e'^2 + 2\alpha f e' \cos(\Lambda-\omega')$$

puede desarrollarse en la siguiente serie periódica :

$$\log e = \mathrm{M} ln e = \mathrm{M}\left[\mathrm{L}\cos(\Lambda-\tilde{\omega}') - \frac{1}{2}\mathrm{L}^2\cos 2(\Lambda-\tilde{\omega}') + \frac{1}{3}\mathrm{L}^3\cos 3(\Lambda-\tilde{\omega}') \mp \ldots\right] \tag{65}$$

siendo log el logaritmo decimal, *ln* el logaritmo natural y M el módulo del logaritmo decimal. En estas soluciones que significan una libración, el movimiento del perihelio secular del asteroide es nulo, siempre que el perihelio de Júpiter se considere fijo, pero debe distinguirse bien de las variaciones de longitud del perihelio y de la excentricidad momentánea, a saber $\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$ y $\frac{de}{dt}$ que pueden desarrollarse fácilmente en base de las ecuaciones

$$\xi = e \operatorname{sen} \tilde{\omega} \qquad \text{y} \qquad \eta = e \cos \tilde{\omega}$$

que las definen.

Vamos a establecer desarrollos análogos en el caso de la rotación de los perihelios, por saber ya que, también en este caso, existe una periodicidad de la excentricidad aunque el perihelio esté rotando. En el caso de la rotación vale (66)

$$e > \frac{C_2'}{C_2} \cdot e' \cos(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}')$$

comenzando el paso de la libración a la rotación en el momento que el círculo típico de la solución pasa por el origen del sistema de coordenadas $(\xi\eta)$. En este caso se pone $r = d = f \cdot e'$ y $|\tilde{\omega}-\omega'|$ alcanza el máximo, cuando $|\tilde{\omega}-\tilde{\omega}'| = 90°$ y la excentricidad disminuye a o, mientras que el valor máximo es :

$e = 2r = 2d = 2f \,.\, e'$. Inmediatamente antes y después del pasaje por el origen mencionado, la longitud del perihelio varía bruscamente en 180°. Siendo en este caso $L = 1$, resulta por la fórmula anteriormente deducida respecto de $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'$: $\operatorname{tg}(\omega - \omega') = \operatorname{sen}(A - \tilde{\omega}')[1 + \cos(A - \omega')]^{-1} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(A - \tilde{\omega}')$ de modo que:

$$\tilde{\omega} - \tilde{\omega}' = \frac{1}{2}(A - \tilde{\omega}') = \frac{1}{2}st + \frac{1}{2}(\beta - \tilde{\omega}') \tag{67}$$

y de ahí que el movimiento secular del perihelio es $\frac{1}{2}s$, y por eso necesita la rotación del perihelio el tiempo $P_1 = \frac{4\pi}{s}$ mientras que una libración necesita el período de: $P_2 = \frac{2\pi}{s}$. La contradicción se disipa por el hecho de que la posición del perihelio realiza en el origen, siendo $e = 0$, un salto de 180°, de modo que el arco actualmente recorrido por el perihelio es sólo 180° y por eso la duración necesitada es $\frac{\pi}{\frac{1}{2}s} = \frac{2\pi}{s} = P_2$.

Finalmente, el origen está dentro del círculo, de modo que sólo es posible una rotación de los perihelios, y entonces puede establecerse un sistema análogo correspondiente al caso de la libración, pero con una interpretación completamente distinta, aplicando primero el sistema de multiplicadores $\cos A$ y $-\operatorname{sen} A$, y segundo: $\operatorname{sen} A$ y $\cos A$, en el sistema (61), y así resultan las ecuaciones:

$$\begin{cases} e \operatorname{sen}(\omega - t) = f \,.\, e' \operatorname{sen}(\tilde{\omega}' - A) \\ e \cos(\omega - t) = \alpha + f \,.\, e' \cos(\omega' - A) \end{cases} \tag{68}$$

de modo que:

$$e^2 = \alpha^2 + f^2 e'^2 + 2\alpha f e' \cos(\tilde{\omega}' - A) \tag{69}$$

y

$$\operatorname{tg}(\tilde{\omega} - A) = \frac{R \operatorname{sen}(\tilde{\omega}' - A)}{1 + R\cos(\tilde{\omega}' - A)} \tag{70}$$

siendo $R = \frac{f \,.\, e'}{\alpha} = \frac{d}{r} < 1$, el valor recíproco de L y por eso se obtiene una forma de la solución análoga al caso de la libración. El desarrollo de $\tilde{\omega} - A$ en una serie periódica según múltiplos de $\tilde{\omega}' - A$, es, análogamente:

$$\tilde{\omega} - A = R \operatorname{sen}(\omega' - A) - \frac{1}{2} R^2 \operatorname{sen} 2(\tilde{\omega}' - A) + \frac{1}{3} R^3 \operatorname{sen} 3(\tilde{\omega}' - A) \mp \ldots \tag{71}$$

Asímismo resulta respecto a la excentricidad, la serie correspondiente:

$$\log e = M l n e = M\left[R\cos(\tilde{\omega}' - A) - \frac{1}{2} R^2 \cos 2(\tilde{\omega}' - A) + \frac{1}{3} R^3 \cos 3(\tilde{\omega}' - A) \mp \ldots\right] \tag{72}$$

Ya que el argumento A tiene la forma $A = st + \beta$, se obtiene

$$\tilde{\omega} = st + \beta + R \operatorname{sen}(\tilde{\omega}' - A) - \ldots$$

de manera que el perihelio tiene exactamente el movimiento medio secular s, pero simultáneamente, según (70), tiene lugar una oscilación periódica entorno a la dirección A que adelanta uniformemente con el tiempo, resultando la media oscilación entorno a la dirección A, siempre menor de 90°, ya que $R < 1$.

La semi oscilación máxima, en el caso de la rotación, entorno a la dirección A, resulta por la fórmula correspondiente, cambiando sólo L con $R = \frac{1}{L}$ de modo que:

$$\operatorname{tg}(\tilde\omega - A) = \frac{\frac{fe'}{\alpha}}{\sqrt{1 - \left(\frac{fe'}{\alpha}\right)^2}}. \tag{73}$$

La siguiente tabla demuestra los valores numéricos del máximum de $y = |\tilde\omega - \tilde\omega'|$ e $y = \tilde\omega - A$ respectivamente, en el caso de la libración o rotación en cada caso. Según la fórmula básica $\operatorname{tg} y = \frac{a \operatorname{sen} x}{1 + a \cos x}$ resulta el máximum de y por la fórmula $\operatorname{tg}(y \text{ máx}) = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}$. En el caso de la libración de $a = \frac{\alpha}{fe'} < 1$ y en el de la rotación $a = \frac{fe'}{\alpha} < 1$, es que, poniendo $a = \operatorname{sen} \varphi$: y (máx) $= \varphi$, el máximum y resulta por la tabla común del seno. (Ver cuadro adjunto).

Tabla

a	φ
0.0	0° 0
0.1	5 44
0.2	11 31
0.3	17 27
0.4	23 35
0.5	30 0
0.6	36 52
0.7	44 26
0.8	53 8
0.9	64 10
1.0	90 0

Si simplificamos ahora las ecuaciones diferenciales, primitivas para ξ y η en cuanto á los términos en p y q, es decir, las variables inclinación, debemos dejar constancia de que los términos correspondientes según la construcción de la función perturbadora, tienen su origen en los términos del 4° grado, en R, de modo tal que las derivadas $\frac{\partial R}{\partial \xi}$ y $\frac{\partial R}{\partial \eta}$ por lo menos son del 3^er^ grado; los términos agregados del grado más bajo, es decir el 1^er^ grado en p y q, deben ser afectados de los términos del 2° grado respecto de ξ', η', p', q'. Las ecuaciones ampliadas tienen entonces la forma:

$$\left\{\begin{aligned} x &= a_1 + a_2 x + a_3 y + c_2 p + c_3 q \\ -y &= b_1 + b_2 x + b_3 y + d_2 p + d_3 q \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

cuya integración la podemos ejecutar recién después de la integración de las ecuaciones inclinación.

§ 2. LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE LAS VARIABLES-INCLINACION Y SU INTEGRACION

Para calcular las derivadas $\frac{dp}{dt}$ y $\frac{dq}{dt}$ nos limitamos por el momento a los términos lineales en p y q, como en el caso de las variables-excentricidad, y obtenemos las ecuaciones lineales siguientes;

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= a_1' + a_2'p + a_3'q \\ -\frac{dq}{dt} &= b_1' - b_2'p + b_3'q \end{aligned}\right\} \tag{74a}$$

teniendo los coeficientes el siguiente significado :

$$a_1' = K_1 q' \; ; \quad a_2' = b_3' = \frac{\partial^2 R}{\partial p \partial q} = K = 2^{\circ}\,\text{grado} \; ; \quad a_3' = -K_1 \tag{75}$$
$$b_1' = K_1 p' \; ; \quad b_2' = -K_1.$$

La igualdad $a_3' = b_2'$ vale sólo dentro de los términos del 2° grado respecto de ξ', η', p', q', análogamente al caso de las variables excentricidad, mientras que la relación $a_2' = b_3'$ es correcta respecto a todos los grados de los parámetros mencionados. Hay que fijar respecto al grado de los coeficientes : $a_1' = 1^{er}$ grado ; $a_3' = b_2' =$ grado o ; a_2' y $b_3' = K = 2^{\circ}$ grado al menos, respecto de p' y q'.

Comparando los coeficientes a' y b' con los correspondientes en el caso de las variables-excentricidad, obtenemos el resultado esencial $a_3' = -a_3$, y $b_2' = -b_2$ (véase *p. e.* Tisserand, *Traité de Mécanique céleste,* tomo I, página 406, o Charlier, *Vorlesungen über Mechanik des Himmels,* tomo I, páginas 342, 413 y 415, considerando el significado de los elementos). Por la sustitución de nuevas variables para homogeneizar las ecuaciones diferenciales (74*a*) por medio de $p = p_1 + \Delta p$ y $q = q_1 + \Delta q$, resultan las siguientes definiciones :

$$\Delta p = \frac{1}{N}[-a_1'b_3' + b_1'a_3'] \quad \text{y} \quad \Delta q = \frac{1}{N}[-a_2'b_1' + a_1'b_2'] \tag{76}$$

siendo la determinante $N = a_2'b_3' - a_3'b_2'$. Considerando sólo el 1^{er} grado, obtenemos aplicando las definiciones anteriores $\Delta p = p'$ y $\Delta q = q'$. La solución de las ecuaciones diferenciales acepta entonces la forma :

$$\left.\begin{aligned} p &= \varphi \operatorname{sen}\theta = \alpha' \operatorname{sen}(-K_1 t + \beta') + \Delta p' \\ q &= \varphi \cos\theta = \alpha' \frac{s'}{a_3'} \cos(-K_1 t + \beta') - \alpha' \frac{a_2'}{a_3'} \operatorname{sen}(-K_1 t + \beta') + \Delta q' \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

significando $s' = -K_1$ y α' . y β' las dos constantes arbitrarias, además valen las relaciones $a' \dfrac{s'}{a_3'} = \alpha' = 1er$ grado y $-\alpha' \dfrac{a_2'}{a_3'} = \alpha' \cdot \dfrac{K}{K_1} = 3er$ grado, porque $K = 2^{\circ}$ grado y $K_1 =$ grado o. Por eso valen hasta los términos del 1^{er} grado, las relaciones :

$$\left.\begin{aligned} p &= \varphi \operatorname{sen}\theta = \alpha' \operatorname{sen}(-K_1 t + \beta') + \varphi' \operatorname{sen}\theta' \\ q &= \varphi \cos\theta = \alpha' \cos(-K_1 t + \beta') + \varphi' \cos\theta' \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

de modo que existe la integral :

$$(p - \Delta p)^2 + (q - \Delta q)^2 = \alpha'^2$$

Fijemos ahora, análogamente al caso de las variables-excentricidad, un sistema de coordenadas del punto P con p y q como abcisas y ordenadas, la curva de los puntos P es un círculo cuyo centro tiene las coordenadas Δp y Δq, el radio del círculo es α'. Por eso las coordenadas polares del centro del círculo coinciden por la definición de los valores Δp y Δq con los parámetros φ' y θ' de la órbita de Júpiter ; además las coordenadas polares del punto P son por definición los parámetros φ y $90-\theta$ de la órbita del asteroide. Por eso en el caso de la libración, estando el origen de los puntos p, q, fuera del círculo y por ende $\alpha' < \varphi'$, los extremos de la inclinación están definidos inmediatamente por los cortes del círculo y la recta por el origen de los p, q, y el centro del círculo, mientras que los extremos de la longitud del nodo están definidos por las tangentes desde el origen al círculo.

Las fórmulas convenientes que corresponden al caso de libración resultan por aplicación de un sistema de multiplicadores, de modo que :

$$(79) \qquad \begin{cases} \varphi \operatorname{sen}(\theta-\theta') = \alpha' \operatorname{sen}(-K_1 t + \beta' - \theta') \\ \varphi \cos(\theta-\theta') = \varphi' + \alpha' \cos(-Kt + \beta' - \theta') \end{cases}$$

Por eso la ecuación característica del movimiento del nodo es definida por

$$(80) \qquad \operatorname{tg}(\theta-\theta') = \frac{L' \operatorname{sen} D}{1 + L' \cos D}$$

donde $L' = \frac{\alpha'}{\varphi'} < 1$, de modo que el denominador nunca puede ser o y en consecuencia la diferencia de los nodos $|\theta-\theta'|$ siempre es menor de 90°, es decir vale el caso de la libración. Fijando φ_0 y θ_0 la inclinación y la longitud del nodo para $t = 0$, se obtienen las constantes de integración α' y β' por medio de las fórmulas :

$$(81) \qquad \begin{cases} \alpha' \operatorname{sen}\beta' = \varphi_0 \operatorname{sen}\theta_0 - \varphi' \operatorname{sen}\theta' \\ \alpha' \cos\beta' = \varphi_0 \cos\theta_0 - \varphi' \cos\theta' \end{cases}$$

De ahí que α' está definido por la relación $\alpha'^2 = \varphi_0^2 + \varphi'^2 - 2\varphi_0\varphi' \cos(\theta_0 - \theta')$ de modo que la condición de libración anterior $\alpha' < \varphi'$ pasa a la nueva forma : $\varphi_0^2 - 2\varphi_0\varphi' \cos|\theta_0 - \theta') < 0$, de suerte que otra forma de la condición es la siguiente :

$$(82) \qquad \frac{\varphi_0}{2\varphi' \cos(\theta_0 - \theta')} < 1$$

siendo siempre $|\theta_0 - \theta'| < 90°$. Este criterio sorprende por el hecho que, contrario al criterio respecto de las variables-excentricidad, aparece totalmente independiente de la función perturbadora, es decir independiente de los coeficientes K_1 y K_2 en las ecuaciones diferenciales, dando la impresión de que se trata de un efecto geométrico-cinemático puro, lo que debemos estudiar todavía más adelante. Primero desarrollaremos la diferencia de longitudes de los nodos, según (80) en una serie periódica cuyo argumento depende del tiempo t en el caso de la libración, si $L = \frac{\alpha'}{\varphi'} < 1$;

$$(83) \qquad \theta - \theta' = L' \operatorname{sen} D - \frac{1}{2} L'^2 \operatorname{sen} 2D + \frac{1}{3} L'^3 \operatorname{sen} 3D - \dots$$

siendo el argumento $D = -K_1 t + \beta' - \psi'$ de modo que el período de la oscilación del nodo es $P = \frac{2\pi}{K_1}$ sin movimiento secular del nodo del asteroide. Además resulta por (79) la ecuación necesaria para el desarrollo de φ y θ en una serie periódica:

$$(84) \qquad \varphi^2 = \alpha'^2 + \varphi'^2 + 2\alpha'\varphi' \cos(-K_1 t + \beta' - \theta')$$

de manera que, en analogía al desarrollo de $\log e$, pero sustituyendo $L' = \frac{\alpha'}{\varphi'}$, obtenemos la relación:

$$(85) \qquad \mathrm{Lg}\,\varphi = M l n \varphi = M\left[L' \cos D - \frac{1}{2} L'^2 \cos 2D + \frac{1}{3} L'^3 \cos 3D - \dots\right]$$

Los extremos de φ corresponden, según (84), a los argumentos $D = 0$ y $D = 180°$, en tal forma que $\varphi\,(\text{máx}) = \varphi' + \alpha'$ y $\varphi\,(\text{mín}) = \varphi' - \alpha'$ y según las fórmulas (78) sólo en los puntos que corresponden a $\theta - \theta' = 0$; por estar excluído el valor $\theta - \theta' = 180°$ en la libracion entorno a θ'. Los términos relativos a los extremos de θ resultan por medio de (80) en base a la condición $\cos D = -L'$, de manera que $D = -K_1 t_e + \beta' + \theta' = \pm D'$ y por eso es respecto de los momentos de los extremos: $t_e = \frac{1}{K_1}(\beta' - \theta' \mp D')$. Los momentos de los extremos de la inclinación φ calcúlanse en base a las condiciones $D = 0$ y $D = 180°$, de modo que: $t_e = \frac{1}{K_1}(\beta' - \theta')$ o $t_e = \frac{1}{K_1}(\beta' - \theta' - 180°)$ respectivamente.

El valor nominal de la oscilación del nodo θ en torno a θ' resulta en base a la condición ya deducida de que debe ser: $\cos D = -L'$, y así es que, según:

$$(86) \qquad \mathrm{tg}\,(\theta - \theta') = \frac{\alpha'}{\sqrt{i'^2 - \alpha'^2}}.$$

Las inclinaciones, φ_1 que corresponden a estos valores extremos de $\theta - \theta'$, resultan por medio de las ecuaciones (79), por eliminación de los términos en t_1, de modo que: $\alpha'^2 = \varphi^2 + \varphi'^2 - 2\varphi\varphi' \cos(\theta - \theta')$ y de ahí $\varphi_1 = \sqrt{\varphi'^2 - \alpha'^2}$.

Consideramos ahora, en el caso del fenómeno del movimiento de rotación, primeramente el caso-límite: $L' = \frac{\alpha'}{\varphi'} = 1$, es decir: $\alpha' = \varphi'$, obteniendo en base de la ecuación (80) la fórmula: $\mathrm{tg}\,(\theta - \theta') = \mathrm{tg}\,\frac{1}{2} D$ y por eso $\theta - \theta' = \frac{1}{2} D$ ó $\theta - \theta' = \frac{1}{2} D + 180°$, de suerte que: $\theta = \frac{1}{2}\left(\theta' - \frac{1}{2} K_1 t + \beta'\right)$ por cuya causa el nodo realiza un movimiento de retroceso secular $-\frac{1}{2} K_1$ sin ninguna oscilación. Sustituyendo las magnitudes $\alpha' = \varphi'$ y $\theta - \theta' = \frac{1}{2} D$ en la relación mencionada anteriormente: $\alpha'^2 = \varphi^2 + \varphi'^2 - 2\varphi\varphi' \cos(\theta - \theta')$, resulta $\varphi = 2\varphi' \cos \frac{1}{2} D$. Por medio de la ecuación $\theta - \theta' = \frac{1}{2}(-K_1 t + \beta' - \theta')$ obtenemos para el momento $t = 0$, es decir $\theta = \theta_0$, la relación $\theta_0 - \theta' = \frac{1}{2}(\beta' - \theta')$ siguiendo luego:

(86) $\varphi = 2\varphi' \cos\left(-\frac{1}{2}K_1 t + \theta_0 - \theta'\right)$ y análogamente $\theta = \theta' - \frac{1}{2}Kt + \frac{1}{2}(\beta' - \theta') = \theta_0 - \frac{1}{2}K_1 . t$

lo que significa que, en el caso-límite, la velocidad secular del movimiento del nodo, en analogía al caso-límite del movimiento del perihelio, es $-\frac{1}{2}K_1$, es decir el promedio algebraico del movimiento nodal o en el caso-libración y el movimiento $-K$ en el caso de la rotación. Por el movimiento nodal $-\frac{1}{2}K_1 = \frac{1}{2}s$ aparece la duración de la rotación como el doble del período $\frac{2\pi}{K_1}$ en el caso de la libración, pero esta contradicción es sólo aparente como en el caso análogo de la libración del perihelio y el correspondiente del paso, ya que en este caso que corresponde el paso del círculo de P por el origen del sistema de coordenadas tiene lugar un salto de 180° respecto de la longitud del nodo que realmente recorre sólo 180° por el período, y por eso resulta un período de sólo $\frac{\pi}{\frac{1}{2}s} = \frac{2\pi}{s}$ es decir un período que equivale al de la libración.

Pasando ahora al caso de $L' > 1$, es decir $\alpha' > \varphi'$, tiene lugar una rotación. Análogamente a la rotación de las líneas de los ápsides, resulta, aplicando el sistema correspondiente de factores, la fórmula correspondiente básica :

$$\operatorname{tg}(\theta - D) = \frac{R'' \operatorname{sen}(\theta' - D)}{1 + R'' \cos(\theta' - D)} \tag{87}$$

siendo el argumento $D = -K_1 t + \beta'$ y el factor $R'' = \frac{\varphi'}{\alpha'} < 1$, el denominador no puede desaparecer nunca y el ángulo $|\theta - D|$ siempre menor de 90°, realiza un oscilación-libración. La serie periódica correspondiente al ángulo $\theta - D$ es la siguiente :

$$\theta - D = R'' \operatorname{sen}(\theta' - D) - \frac{1}{2}R''^2 \operatorname{sen} 2(\theta' - D) + \frac{1}{3}R''^3 \operatorname{sen} 3(\theta' - D) - \ldots \tag{88a}$$

de donde resulta la expresión relativa a la longitud del nodo

$$\theta = -K_1 t + \beta' + R'' \operatorname{sen}(\theta' - D) - \frac{1}{2}R''^2 \operatorname{sen} 2(\theta' - D) + \ldots \tag{88b}$$

Por eso la línea del nodo ejecuta un movimiento secular de retroceso $-K_1 t$ por una parte, pero por otra parte ejecuta una oscilación entorno a la dirección D en el período $P = \frac{2\pi}{K_1}$ rotando D secularmente con la misma velocidad $-K_1$ de la línea del nodo. La inclinación φ es desarrollable en una serie periódica análoga al caso de la libración, pero ahora, ya que $R'' = \frac{\varphi'}{\alpha} < 1$, con el argumento : $D - \theta$ resulta :

$$\lg \varphi = M \; ln\, \varphi = R'' \cos(D - \theta') - \frac{1}{2}R''^2 \cos 2(D - \theta') + \frac{1}{3}R''^3 \cos 3(D - \theta') - \ldots, \tag{89}$$

Las oscilaciones de la inclinación orbital φ están entre los valores extremos φ (máx) $= r'' + \varphi'$ y φ (mín) $= r'' - \varphi'$, ya que los puntos correspondientes, sobre el círculo del radio $r'' = \alpha'$ están en los extremos del diámetro del origen del sistema de coordenadas, de modo que la oscilación total es $2\varphi'$. Analizando ahora el triángulo esférico formado por los dos puntos-nodos θ y θ' sobre la eclíptica y el corte de las dos órbitas, cuya inclinación mútua es J, resulta la relación: $\cos J = \cos\varphi \cos\varphi' + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\varphi' \times \cos(\theta - \theta')$. Considerando φ y φ' como valor pequeño de primer grado, lo es también J en general, y desarrollando las funciones de la última ecuación hasta el 2° grado, inclusive, resulta la nueva ecuación:

(90)
$$J^2 = \varphi'^2 + \varphi^2 - 2\varphi\varphi' \cos(\theta - \theta').$$

Por otra parte ya conocemos la relación siguiente, deducida de las integrales anteriores:

(90 *a*)
$$\alpha'^2 = \varphi'^2 + \varphi^2 - 2\varphi\varphi' \cos(\theta - \theta'),$$

de modo que resulta inmediatamente por la comparación de las dos últimas ecuaciones (90): $J = \alpha' =$ const. es decir, la inclinación mútua de las órbitas de Júpiter y del planetoide es constante, ó: la inclinación orbital de los planetoides es una constante secular, si la órbita de Júpiter está libre de perturbaciones; y si prescindimos de los términos de la función perturbadora mayores del 2° grado. En lo que sigue vamos a demostrar que, considerando también los términos mayores del 2° grado, puede ser sostenida la forma trigonométrica de la solución. Ya que ahora, en el caso de la libración de la línea de los nodos, vale la desigualdad $\alpha' < \varphi'$, resulta por $J = \alpha'$ como nueva forma de condición de una libración de las líneas del nodo (90 *a*): $J < \varphi'$.

En el caso de que la órbita de Júpiter sea el plano fundamental, resulta, por ser $\varphi' = 0$ y $\varphi = J$ en base a las integrales generales mencionadas:

(91)
$$\left\{\begin{aligned} J \operatorname{sen}\theta &= \alpha' \operatorname{sen}(-K_1 t + \beta') \\ J \cos\theta &= \alpha' \cos(-K_1 t + \beta') \end{aligned}\right\}$$

de modo que valen las relaciones: $J = \alpha'$ y $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(-K_1 t + \beta')$ es decir:

(91 *a*)
$$\theta = -K_1 t + \beta' \quad \text{o} \quad \theta = -K_1 t + \beta' + 180°.$$

Por eso resulta que el movimiento del nodo de un planetoide sobre la órbita de Júpiter, es independiente del caso de una rotación o libración y tiene lugar con una velocidad constante secular:

$$\frac{d\theta}{dt} = -K_1.$$

En consecuencia, el nodo de la órbita del planetoide, sobre el plano de Júpiter, recorre toda la órbita de Júpiter, mientras que el nodo correspondiente sobre la eclíptica recorre, en el caso de una libración, sólo una parte de la eclíptica, pero en el caso de una rotación, recorre la eclíptica entera. Resulta que la condición deducida respecto a la libración del movimiento del nodo es nada más que una condición cinemática pura sobre una base geométrica, independiente de toda limitación de la función perturbadora, siempre que el movimiento secular del nodo del planetoide sobre la órbita de Júpiter esté asegurado respecto a todas las potencias de las variables en la función perturbadora.

Considerando de nuevo el triángulo esférico formado por los dos nodos θ y θ' del planetoide y del de Júpiter sobre la eclíptica y el corte S de las dos órbitas, el lado $\theta'S = K$ es conocido, según el resultado obtenido más arriba respecto al movimiento de S sobre la órbita de Júpiter, de modo que $\theta'S$ es proporcional al tiempo t. Entonces resulta en el triángulo $S\theta\theta'$ el siguiente sistema de ecuaciones :

$$(92) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} (\theta - \theta') = \operatorname{sen} J \operatorname{sen} K \\ &\operatorname{sen} \varphi \cos (\theta - \theta) = \cos J \operatorname{sen} \varphi' + \operatorname{sen} J \cos \varphi' \cos K \end{aligned} \right\}$$

de suerte que :

$$(93) \qquad \operatorname{tg} (\theta - \theta') = + \frac{\operatorname{tg} J \operatorname{sen} K}{\operatorname{sen} \varphi' + \operatorname{tg} J \cos \varphi' \cos K}$$

donde K es la única magnitud variable. Por eso hay libración sólo en el caso de que el denominador no sea cero, de modo que siempre es $|\theta = \theta'| < 90^\circ$, y por eso $\operatorname{sen} \varphi' > \operatorname{tg} J \,.\, \cos \varphi'$, es decir si $J < \varphi'$. Por ello la condición anterior $J < \varphi'$ deducida ya anteriormente es idéntica, limitándonos en la función perturbadora a los términos del 2° grado, a la condición exacta deducida por un método puramente cinemático. Entonces la condición :

$$J^2 = \varphi^2 + \varphi'^2 - 2\varphi\varphi' \cos (\theta - \theta') < \varphi'^2.$$

también es idéntica con la otra

$$(94) \qquad \varphi - 2\varphi' \cos (\theta - \theta') < 0$$

si $|\theta - \theta'| < 90^\circ$, de modo que el caso de una libración condicionada por $|\theta - \theta'| > 90^\circ$ no es posible, como ya hemos demostrado geométricamente.

Completando nuestras deduciones vamos a demostrar que una libración bajo la condición $|\theta - \theta'| > 90^\circ$ no podrá ser posible, sino que por el contrario para el caso $|\theta - \theta'| = 180^\circ$ se produce una rotación, es decir siempre que $|\theta - \theta'| > 90^\circ$. Partiendo de las ecuaciones básicas (92) se deducen las siguientes posibilidades, para cuando $J > \varphi'$ de tal modo que el caso $|\theta - \theta'| = 90^\circ$ pueda ser posible, en estos casos especiales :

(I) $K = 0$; entonces resulta por la primera de las ecuaciones mencionadas : *a*) $\theta - \theta' = 0$, por eso por la 2ª ecuación : $\operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} (\varphi' + J)$, es decir $\varphi = \varphi' + J > 0$ ó : $\varphi > 2\varphi'$ por ser $J > \varphi'$; pero en el caso *b*) $\theta - \theta' = 180^\circ$, resulta por la 2ª ecuación : $-\operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} (\varphi' + J) > 0$, lo que debe excluirse por ser imposible.

(II) $K = 180^\circ$; de donde resulta por la 1ª ecuación : *a*) $\theta - \theta' = 0$, por eso por la segunda ecuación : $\operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} (\varphi' - J)$, es decir $\varphi = \varphi' - J < 0$, lo que es imposible y debe excluirse, mientras que en el caso *b*) $\theta - \theta' = 180^\circ$ resulta por la segunda ecuación que : $-\operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} (\varphi' - J)$, de donde $\varphi = J - \varphi' > 0$, lo que es admisible. Además hallamos que $\theta - \theta' = 90^\circ$, en cuanto, según (93), el denominador $\operatorname{sen} \varphi' + \operatorname{tg} J \cos \varphi' \cos K = 0$, y por eso para $K = K_1$ se tiene un ángulo obtuso, mientras que en el caso $K = 90^\circ$ el ángulo $\theta - \theta'$ es un ángulo agudo. En sumario resulta la imagen siguiente respecto de los valores correspondientes de K y $\theta - \theta'$:

$$\begin{array}{ll} K = 0 & \theta - \theta' = 0 \\ K = \text{ángulo agudo} & \theta - \theta' = \text{ángulo agudo} \\ K = 90^\circ & \theta - \theta' = \text{ángulo agudo} \\ K = K_1 \text{ (ángulo obtuso)} & \theta - \theta' = 90^\circ \\ K = 180^\circ & \theta - \theta' = 180^\circ \end{array}$$

y análogamente hasta $K = 360^\circ$ de modo que, en el caso $J > \varphi'$, siempre resulta una rotación de los nodos y no es posible una libración, si $|\theta = \theta'| > 90^\circ$.

Además de la condición que debe ser $J < \varphi'$ en el caso de una libración, hay que deducir ahora la condición exacta respecto de la inclinación φ misma. Resulta por el triángulo esférico ya mencionado que: $\cos\varphi = \cos\varphi' \cos J - \operatorname{sen}\varphi' \operatorname{sen} J \cos K$, de modo que, en el caso $K = 0$, resulta el máximum de φ, es decir $\varphi_0 = J + \varphi'$, pero en el caso $K = 180^\circ$ el mínimum de φ, es decir $\varphi_{180} = \pm J \mp \varphi'$, fijando el signo superior el caso de la rotación y el inferior el de la libración.

Además resulta por el mismo triángulo $\cos J = \cos\varphi' \cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi' \operatorname{sen}\varphi \cos(\theta - \theta')$, de modo que, en base a la condición-libración exacta: $J < \varphi'$ y por eso $\cos J > \cos\varphi'$: $\cos\varphi' \cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi' \operatorname{sen}\varphi \cos(\theta - \theta') > \cos\varphi'$, debe ser también: $\cos\varphi'(1 - \cos\varphi) < \operatorname{sen}\varphi' \operatorname{sen}\varphi \cos(\theta - \theta')$ y en definitiva:

$$\text{(95)} \qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi < \operatorname{tg}\varphi' \cos(\theta - \theta')$$

es la condición exacta necesaria respecto a la existencia de una libración de los nodos. Si las inclinaciones son pequeñas y si despreciamos los términos del 3er grado en φ y φ', nos queda la fórmula aproximada ya deducida $\varphi < 2\varphi' \cdot \cos(\theta - \theta')$.

En el caso de la rotación, es decir $J > \varphi'$, se deduce en general, sin considerar el orden de J y φ', aplicando los correspondientes factores al sistema de salida (92), el nuevo sistema con el argumento $\theta - \theta' - K$:

$$\text{(96)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}(\theta - \theta' - K) = -\cos J \operatorname{sen}\varphi' \operatorname{sen} K + \operatorname{sen} J \operatorname{sen} K \cos K (1 - \cos\varphi') \\ \operatorname{sen}\varphi \cos(\theta - \theta' - K) = \cos J \operatorname{sen}\varphi' \cos K + \operatorname{sen} J [\operatorname{sen}^2 K + \cos^2 K \cos\varphi'] \end{array} \right.$$

Respecto del sistema solar, en el cual la inclinación de la órbita de Júpiter $\varphi' = 1^\circ 20'$, es pequeña, mientras que J respecto de los planetoides puede ascender hasta 50°, resulta por la última fórmula, bajo la condición de que $a = \operatorname{ctg} J \operatorname{sen}\varphi' < 1$, y despreciando los términos del segundo grado, la fórmula ya antes deducida:

$$\text{(96a)} \qquad \operatorname{tg}(\theta - \theta' - K) = -\frac{a \operatorname{sen} K}{1 + a \cos K}$$

Por eso se deduce, en este caso especial, $J < \varphi'$, mientras que J tiene cualquier valor, pero siendo $a < 1$, la desigualdad $|\theta - \theta' - K| < 90^\circ$. Por tal motivo la longitud θ del nodo desvía periódicamente siempre menos de 90° de la longitud $\theta' + K$ del punto K que progresa, sobre la órbita de Júpiter, con una velocidad uniforme. El máximum de esta desviación periódica se realiza, si $\cos K = -a$, de suerte que la desviación correspondiente resulta por la ecuación:

$$\text{Máx}\,|\operatorname{tg}(\theta-\theta'-K)| = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{\operatorname{sen}\varphi'}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 J - \operatorname{sen}^2\varphi'}}$$

Además se obtiene, según los desarrollos análogos anteriores, la serie periódica siguiente relativa a la desviación mencionada :

$$\theta-(\theta'+K) = -a\operatorname{sen}K + \frac{1}{2}a^2\operatorname{sen}2K - \frac{1}{3}a^3\operatorname{sen}2K - \frac{1}{3}a^3\operatorname{sen}3K + \ldots \tag{97}$$

La planilla anterior puede ser aplicada también en el caso presente, si el argumento a tiene el significado: $a = \operatorname{sen}\varphi' \operatorname{ctg} J$.

§ 3. LA CONSIDERACION DE LOS TERMINOS MAYORES AL SEGUNDO GRADO EN LA FUNCION PERTURBADORA

Hasta ahora hemos considerado, en los segundos miembros de las ecuaciones diferenciales de las variables-excentricidad e inclinación, sólo los términos lineales respecto de ξ, η ó p y q respectivamente. Además se consideró, en los coeficientes a_3 y b_2, sólo los términos del grado o respecto a los parámetros ξ', η' ó p' y q' respectivamente, en a_2 y b_3 los términos que empiezan con el segundo grado de los parámetros mencionados ; finalmente, en a_1 y b_1 los términos del primer grado de los mismos parámetros. Según ya hemos comprobado, la forma periódica de la solución se sostiene sólo, si primeramente, al considerar los términos del grado mayor que 2, en la función perturbadora, la diferencia de los nuevos coeficientes a_2 y b_3, es decir : $a_2 - b_3 = 0$; por eso los términos nuevos que se agregan a a_2 y b_3 se eliminen por su igualdad ; también, más general, en el caso de que consideramos términos del 3$^{\text{er}}$ grado en ξ^3, etc., apareciendo también términos de la forma $c \,.\, x$ o $d \,.\, y$ respectivamente, en las ecuaciones diferenciales relativas a $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$, de modo que debería ser $c = d$, para no peligrar una solución periódica. En nuestras ecuaciones diferenciales $\frac{d\xi}{dt} = g\frac{\partial R}{\partial\eta}$ y $-\frac{d\eta}{dt} = g\frac{\partial R}{\partial\xi}$ el término $a_2\xi$ o $a_2 x$ respectivamente, se origina, en la primera ecuación, por el término $\xi\eta$ de la función R, análogamente el término $b_3\eta$ o $b_3 y$, en la 2ª ecuación, por el mismo término $\xi\eta$ por lo que los coeficientes a_2 y b_3, independientemente del grado respecto de ξ' y η', siempre son iguales, es decir iguales a : $\left(\frac{\partial^2 R}{\partial\xi\partial\eta}\right)_{\xi=\eta=0}$. Estos coeficientes a_2 y b_3 no pueden comenzar con los términos del grado o, siendo su forma en R : $\xi\eta = \frac{1}{2}e^2\operatorname{sen}2\tilde{\omega}$, es decir un término-seno, mientras que la función perturbadora, en base a sus características puede ser compuesta sólo por términos-cosenos respecto a sus argumentos-ángulo ; por eso $e^2\operatorname{sen}2\tilde{\omega}$ debe completarse con un factor dependiente de e', es decir un término seno del 2° grado, al menos respecto de e', y más allá del grado 4, 6, etc. por lo menos el factor $e'^2\operatorname{sen}2\tilde{\omega}'$.

Considerando que la suma de los coeficientes numéricos de ω y $\bar{\omega}$ en los argumentos de R siempre debe ser o, resulta el término buscado del 4° grado al menos :

$$D_4'' e^2 e'^2 \cos(2\omega - 2\bar{\omega}') = D_4''[2(\xi\xi' + \eta\eta')^2 - (\xi^2 + \eta^2)(\xi'^2 + \eta'^2)] = D_4''[(\eta^2 - \xi^2)(\eta'^2 - \xi'^2) + 4\xi\eta\xi'\eta']$$

de modo que entonces los coeficientes $a_2 = b_3$ aceptan el término, ya fijado, del 2° grado. El próximo término, contribuyendo con los términos lineales $a_2\xi$ o $b_3\eta$ respectivamente, y ahora del 6° grado en R origina, según las calidades de R, del término ya mencionado del 4° grado bajo adición de los factores e o e' respectivamente, de modo que se mantiene la condición $a_2 = b_3$. Por otra parte, la igualdad de $a_3 = b_2$ vale, según nuestras definiciones anteriores, sólo hasta el 2° grado de R, siendo $a_3 = c\left(\frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2}\right)_{\xi=\eta=0}$ $b_2 = c\left(\frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2}\right)_{\xi=\eta=0}$ donde el coeficiente c es el mismo en las dos relaciones. Por eso la diferencia $a_3 - b_2$ es del 4° grado. Según la representación analítica, los términos del 4° grado : a_3 y b_2, tienen el mismo valor absoluto, pero signo contrario.

Considerando ahora los términos hasta el 4° grado en R, es decir hasta el 3er grado inclusive en las ecuaciones diferenciales, éstas tienen la forma :

$$(98)\quad \left\{\begin{aligned} &(\mathrm{I}) && \frac{d\xi}{dt} = \sqrt{1-e^2}\,[a_1 + a_2\xi + a^3\eta + a_4\xi^2 + a_5\xi\eta + a_6\eta^2 + a_7(\xi^2+\eta^2)\eta] \\ &(\mathrm{II}) && -\frac{d\eta}{dt} = \sqrt{1-e^2}\,(b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi^2 + b_5\xi\eta + b_6\eta^2 + b_7(\xi^2+\eta^2)\xi] \end{aligned}\right.$$

donde :

$$a_4 = fD_4\eta'; \; a_5 = 2fD_4\xi'; \; a_6 = 3fD_4\eta'; \; b_4 = \frac{3}{2}a_5; \; b_5 = 2a_4; \; b_6 = \frac{1}{2}a_5; \; a_7 = b_7 = 4fC_4 = a_8 = b_8$$

Sustituyendo el factor $\sqrt{1-e^2}$ por su desarrollo según potencias de e hasta el 4° grado, de modo que $\sqrt{1-e^2} = 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4$, y sustituyendo además: $\xi = x + \Delta x$ y $\eta = y + \Delta y$, añadiendo finalmente los términos del 5° grado, originándose del 6° grado de R, sin aplicar en este caso la serie de potencias de e, obtenemos el nuevo desarrollo de las ecuaciones diferenciales hasta el 5° grado inclusive. Pero vamos a simplificarla de antemano, reduciendo el factor $\xi^2 + \eta^2 = e^2 = (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2$ que aparece en los términos del 3er y del 5° grado, considerando la integral de la primera aproximación $x^2 + y^2 = \alpha^2 = \text{const.}$, a la forma lineal respecto de x e y : $\xi^2 + \eta^2 = c^2 + 2x\,.\,\Delta x + 2y\,.\,\Delta y$ donde $c^2 = \alpha^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$. Por esa causa los términos de 3er grado de la forma $(\xi^2 + \eta^2)\eta$ y $(\xi^2 + \eta^2)\xi$ respectivamente, aparecen como términos de primer y segundo grado respecto de x e y y por ende son unidos con los términos del primer y segundo grado. Análogamente, los términos del 5° grado : $(\xi^2 + \eta^2)^2\eta$ y $(\xi^2 + \eta^2)^2\xi$, como todos los otros términos del 5° grado, como resulta por la diferenciación de R según ξ y η, se reúnen con los términos del 3er grado en x e y. De ahí que las ecuaciones diferenciales aceptan la forma nueva que aparentemente sólo contiene los términos hasta el 3er grado, pero que en realidad contiene términos hasta el 5° grado inclusive, respecto de x e y :

$$
(99) \qquad
\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= \frac{dx}{dt} = a_1' + a_2'x + a_3'y + a_4'x^2 + a_5'xy + a_6'y^2 + a_9'x^3 + a_{10}'x^2y + a_{11}'xy^2 + a_{12}'y^3 \\
-\frac{d\eta}{dl} &= -\frac{dy}{dt} = b_1' + b_2'x + b_3'y + b_4'x^2 + b_5'xy + b_6'y^2 + b_9'x^3 + b_{10}'x^2y + b_{11}'xy^2 + b_{12}'y^3
\end{aligned}
$$

Si es necesario prescindir de la integral sólo aproximada $x^2+y^2=\alpha^2$, se puede volver a restablecer la forma original, sustituyendo $c^2=x^2+y^2+(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$ y extendiéndose entonces el desarrollo hasta el 5° grado de x e y. Antes de realizar otra simplificarión esencial de los coeficientes, vamos a representarlos explícitamente (100) :

$$
(100) \qquad
\begin{aligned}
a_1 = {} & a_2\Delta x + a_3\Delta y + a_4(\Delta x)^2 + a_5\Delta x\Delta y + a_6(\Delta y)^2 + a_7c^2\Delta y - \frac{1}{2}a_1c^2 \\
& - \frac{1}{2}a_3c^2\Delta y - \frac{1}{8}a_1c^4 - \frac{1}{2}a_2c^2\Delta x - \left(\frac{1}{8}a_3 + \frac{1}{2}a_7\right)c^4\Delta y - \frac{1}{2}a_4c^2(\Delta x)^2 \\
& - \frac{1}{2}a_5c^2\Delta x\Delta y - \frac{1}{2}a_6c^2(\Delta y)^2 + 6E_6'c^4\Delta y + 4E_6''c^2(\xi'^2+\eta'^2)\,\Delta y \\
& + 2E_6'''(\xi'^2+\eta'^2)^2\Delta y + G_6'c^2[4(\xi'\Delta x+\eta'\Delta y)\,\Delta y + c^2\eta'] \\
& + G_6'''(\xi'^2+\eta'^2)[2(\xi'\Delta x+\eta'\Delta y)\,\Delta y + c^2\eta'] + G_6'''(\xi'^2+\eta'^2)^2\cdot\eta' \\
& + H_6'[2\Delta y\,\{2(\xi'\Delta x+\eta'\Delta y)^2 - c^2(\xi'^2+\eta'^2)\} + c^2\{4\eta'(\xi'\Delta x+\eta'\Delta y) \\
& - 2\Delta y(\xi'^2+\eta'^2)\}] + 2H_6''(\xi'^2+\eta'^2)[2\eta'(\xi'\Delta x+\eta'\Delta y) - \Delta y(\xi'^2+\eta'^2)] \\
& + J_6\eta'[2(\xi'\Delta x+\eta'\Delta y)^2 - (\xi'\Delta y-\eta'\Delta x)^2 - c^2(\xi'^2+\eta'^2)] \\
& + J_6(\xi'\Delta x+\eta'\Delta y)[4\eta'(\xi'\Delta x+\eta'\Delta y) - \xi'(\xi'\Delta y-\eta'\Delta x) - 2\Delta y(\xi'^2+\eta'^2)] \\
a_2' = {} & a_2 + 2a_4\Delta x + a_5\Delta y - a_1\Delta x - a_3\Delta x\Delta y + 2a_7\Delta x\Delta y - \frac{1}{2}a_1c^2\Delta x \\
& - \frac{1}{2}a_2[2(\Delta x)^2 + c^2] - 4c^2\Delta x\Delta y\left(\frac{1}{8}a_3 + \frac{1}{2}a_7\right) - a_4[c^2\Delta x + (\Delta x)^3] \\
& - \frac{1}{2}a_5[c^2 + 2(\Delta x)^2]\,\Delta y - a_6\Delta x(\Delta y)^2 + 24E_6'c^2\Delta x\Delta y + 8E_6''(\xi'^2+\eta'^2)\,\Delta x\Delta y \\
& + 2G_6'[2c^2(\xi'\Delta y+\eta'\Delta x) + \Delta x\{4\Delta y(\xi'\Delta x+\eta'\Delta y) + c^2\eta'\}] \\
& + 2G_6''(\xi'^2+\eta'^2)(\xi'\Delta y+\eta'\Delta x) + 2H_6'[2\Delta y\,\{2\xi'(\xi'\Delta x+\eta'\Delta y) - \Delta x(\xi'^2+\eta'^2)\} \\
& + 2c^2\xi'\eta' + 2\Delta x\,\{2\eta'(\xi'\Delta x+\eta'\Delta y) - \Delta y(\xi'^2+\eta'^2)\}] + 4H_6''(\xi'^2+\eta'^2)\,\xi'\eta' \\
& + J_6\eta'[4\{\xi'^2\Delta x + 2\xi'\eta'\Delta y - \eta'^2\Delta x\} - 2(\xi'^2+\eta'^2)\,\Delta x] \\
& + J_6\xi'[12\eta'(\xi'\Delta x+\eta'\Delta y) - 4\xi'(\xi'\Delta y-\eta'\Delta x) - 2(\xi'^2+\eta'^2)\,\Delta y] \\
a_3' = {} & a_3 + a_5\Delta x + 2a_6\Delta y + a_7c^2 + 2a_7(\Delta y)^2 - a_1\Delta y - \frac{1}{2}a_3[c^2 + 2(\Delta y)^2] \\
& - \frac{1}{2}a_1c^2\Delta y - a_2\Delta x\Delta y - \left(\frac{1}{8}a_3 + \frac{1}{2}a_7\right)(c^4 + 4c^2(\Delta y)^2) - a^4(\Delta x)^2\,\Delta y
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1}{2}a_5(c^2\Delta x+2\Delta x(\Delta y)^2)-a_6(c^2+(\Delta y)^2)\Delta y+6E_6'c^2(c^2+4(\Delta y)^2)$$

$$+4\xi_6''(E'^2+\eta'^2)(c^2+2(\Delta y)^2)+E_6'''2\xi_6''(\xi'^2+\eta'^2)^2+G_6'[c^2\{(\xi'\Delta x+\eta'\Delta y)$$

$$+6\eta'\Delta y\}+2\Delta y\{4(\xi'\Delta x+\eta'\Delta y)\Delta y+c^2\eta'\}]$$

$$+G_6''(\xi'^2+\eta'^2)[2(\xi'\Delta x+\eta'\Delta y)+4\eta'\Delta y]+H_6'[4(\xi'\Delta x+\eta'\Delta y)^2$$

$$+4\Delta y\{2\eta'^2\Delta y+2\xi'\eta'\Delta x-(\xi'^2+\eta'^2)\Delta y\}+2c^2(\eta'^2-\xi'^2)$$

$$+4\Delta y\{2(\xi'\Delta x+\eta'\Delta y)\eta'-(\xi'^2+\eta'^2)\Delta y\}]+2H_6''(\xi'^2+\eta'^2)(\eta'^2-\xi'^2)$$

$$a_4'=a_4-\frac{1}{2}a_1(\Delta x)^2-a_2\Delta x-4(\Delta x)^2\Delta y\left(\frac{1}{8}a_3+\frac{1}{2}a_7\right)-\frac{1}{2}a_4(c^2+4(\Delta x)^2)$$

$$-a_5\Delta x\Delta y+24E_6'(\Delta x)^2\Delta y+4G_6'[2\xi'\Delta x\Delta y+\eta'(\Delta x)^2]+4H_6'\xi'[\xi'\Delta y+2\eta'\Delta x]$$

$$+2J_6\eta'(\xi'^2-\eta'^2)+8J_6\xi'^2\eta'$$

$$a_5'=a_5+2a_7\Delta x-a_3\Delta x-a_1\Delta x\Delta y-a_2\Delta y-4\left(\frac{1}{8}a_3+\frac{1}{2}a_7\right)(c^2+2(\Delta y)^2)\Delta x$$

$$-2a_4\Delta x\Delta y-\frac{1}{2}a_5[c^2+2(\Delta x)^2+2(\Delta y)^2]-2a_6\Delta x\Delta y+24E_6'\Delta x[c^2+2(\Delta y)^2]$$

$$+8E_6''(\xi'^2+\eta'^2)\Delta x+4G_6'[c^2\xi'+2\eta'(\Delta x)^2+2\eta'\Delta x\Delta y+2(\xi'\Delta y+\eta'\Delta x)\Delta y$$

$$+2\eta'\Delta x\Delta y]+2G_6''(\xi'^2+\eta'^2)\xi'+4H_6'[4\xi'\eta'\Delta y+(\xi'^2-\eta'^2)\Delta x$$

$$+2\eta'(\xi'\Delta y+\eta'\Delta x)-(\xi'^2+\eta'^2)\Delta x]+6J_6\xi'(3\eta'^2-\xi'^2)$$

$$a_6'=a_6+2a_7\Delta y-a_3\Delta y-\frac{1}{2}a_1(\Delta y)^2-4\left(\frac{1}{8}a_3+\frac{1}{2}a_7\right)[c^2+(\Delta y)^2]\Delta y$$

$$-a_5\Delta x\Delta y-\frac{1}{2}a_6[c^2+4(\Delta y)^2]+24E_6'[c^2+(\Delta y)^2]\Delta y+8E_6''(\xi'^2+\eta'^2)\Delta y$$

$$+4G_6'[c^2\eta'+2\xi'\Delta x\Delta y+5\eta'(\Delta y)^2]+2G_6''(\xi'^2+\eta'^2)\eta'$$

$$+4H_6'[3\eta'^2\Delta y-2\xi'^2\Delta y+2\xi'\eta'\Delta x]+4J_6'\eta'(\eta'^2-2\xi'^2)$$

$$a_9'=-a_4\Delta x$$

$$a_{10}'=-2\left(\frac{1}{4}a_3+a_7\right)(\Delta x)^2-a_4\Delta y-a_5\Delta x+24E_6'(\Delta x)^2+8G_6'\xi'\Delta x+4H_6'\xi'^2$$

$$a_{11}'=-4\left(\frac{1}{4}a_3+a_7\right)\Delta x\Delta y-a_5\Delta y-a_6\Delta x+48E_6'\Delta x\Delta y+8G_6'(\xi'\Delta y+\eta'\Delta x)+8H_6'\xi'\eta'$$

$$a_{12}'=-2\left(\frac{1}{4}a_3+a_7\right)(\Delta y)^2-a_6\Delta y+24E_6'(\Delta y)^2+8G_6'\eta'\Delta y+4H_6'\eta'^2$$

$$b_1'+b_1+b_2\Delta x+b_3\Delta y+b_4(\Delta x)^2+b_5\Delta x\Delta y+b_6(\Delta y)^2+b_7c^2\Delta x$$

$$-\frac{1}{2}b_1c^2-\frac{1}{2}b_2c^2\Delta x-\frac{1}{8}b_1c^4+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}b_2+b_7\right)c^4\Delta x-\frac{1}{2}b_3c^2\Delta y$$

$$- \frac{1}{2} b_4 c^2 (\Delta x)^2 - \frac{1}{2} b_5 c^2 \Delta x \Delta y - \frac{1}{2} b_6 c^2 (\Delta y)^2 + 6 E_6' c^4 \Delta x + 4 E_6'' (\xi'^2 + \eta'^2) c^2 \Delta x$$

$$+ 2 E_6''' (\xi'^2 + \eta'^2)^2 \Delta x + G_6' c^2 [4 (\xi' \Delta x + \eta' \Delta y) \Delta x + \xi' c^2] + G_6'' (\xi'^2 + \eta'^2) [$$

$$2 (\xi' \Delta x + \eta' \Delta y) \Delta x + \xi' c^2] + G_6''' (\xi'^2 + \eta'^2)^2 . \xi' + 2 H_6' [\Delta x \{ 2 (\xi' \Delta x + \eta' \Delta y)^2$$

$$- (\xi'^2 + \eta'^2) c^2 + c^2 \} + c^2 \{ 2 (\xi' \Delta x + \eta' \Delta y) \xi' - (\xi'^2 + \eta'^2) \Delta x \}]$$

$$+ 2 H_6'' (\xi'^2 + \eta'^2) [2 \xi' (\xi' \Delta x + \eta' \Delta y) - (\xi'^2 + \eta'^2) \Delta x] + J_6 \xi' [2 \{ (\xi' \Delta x + \eta' \Delta y)^2$$

$$- (\xi' \Delta y - \eta' \Delta x)^2 \} - (\xi'^2 + \eta'^2) c^2] + 2 J_6 (\xi' \Delta x + \eta' \Delta y) [2 \{ (\xi' \Delta x + \eta' \Delta y) \xi'$$

$$+ (\xi' \Delta y - \eta' \Delta x) \eta' \} - (\xi'^2 + \eta'^2) \Delta x]$$

$$b_2' = b_2 + 2 b_4 \Delta x + b_5 \Delta y + b_7 c^2 + 2 b_7 (\Delta x)^2 - b_1 \Delta x - \frac{1}{2} b_2 [c^2 + 2 (\Delta x)^2]$$

$$- \frac{1}{2} b_1 c^2 \Delta x + \frac{1}{2} \left(- \frac{1}{4} b_2 + b_7 \right) [c^4 + 4 c^2 (\Delta x)^2] - b_3 \Delta x \Delta y$$

$$- b_4 [c^2 \Delta x + (\Delta x)^3] - \frac{1}{2} b_5 [c^2 + 2 (\Delta x)^2] \Delta y - b_6 \Delta x (\Delta y)^2$$

$$+ 6 E_6' [4 (\Delta x)^2 + c^2] c^2 + 4 E_6'' (\xi'^2 + \eta'^2) [c^2 + 2 (\Delta x)^2] + 2 E_6''' (\xi'^2 + \eta'^2)^2$$

$$+ G_6' [c^2 \{ 4 (\xi' \Delta x + \eta' \Delta y) + 6 \xi' \Delta x \} + 2 \Delta x \{ 4 \Delta x (\xi' \Delta x + \eta' \Delta y) + \xi'^2 c^2 \}]$$

$$+ 2 . G_6'' (\xi'^2 + \eta'^2) [\xi' \Delta x + \eta' \Delta y + 2 \xi' \Delta x] + 2 H_6' [2 (\xi' \Delta x + \eta' \Delta y)^2 - (\xi'^2 + \eta'^2) c^2$$

$$+ 4 \Delta x \{ 2 \xi' (\xi' \Delta x + \eta' \Delta y) - (\xi'^2 + \eta'^2) \Delta x \} + c^2 (\xi'^2 - \eta'^2)]$$

$$+ 2 H_6'' (\xi'^2 + \eta'^2) (\xi'^2 - \eta'^2) + 2 J_6 \xi' [4 \{ \xi' (\xi' . \Delta x + \eta' \Delta y) + \eta' (\xi' \Delta y - \eta' \Delta x) \Delta x \}$$

$$- 2 (\xi'^2 + \eta'^2) \Delta x] + 2 J_6 (\xi' \Delta x + \eta' \Delta y) (\xi'^2 - 3 \eta'^2)$$

$$b_3' = b_3 + b_5 \Delta x + 2 b_6 \Delta y + 2 b_7 \Delta x \Delta y - b_1 \Delta y - b_2 \Delta x \Delta y - \frac{1}{2} b_1 c^2 . \Delta y$$

$$- 2 \left(\frac{1}{4} b_2 + b_7 \right) c^2 \Delta x \Delta y - \frac{1}{2} b_3 [c^2 + 2 (\Delta y)^2] - b_4 (\Delta x)^2 \Delta y$$

$$- \frac{1}{2} b_5 [c^2 + 2 (\Delta y)^2] \Delta x - b_6 [c^2 + (\Delta y)^2] \Delta y + 24 E_6' c^2 \Delta x \Delta y$$

$$+ 8 E_6'' (\xi'^2 + \eta'^2) \Delta x \Delta y + 2 G_6' [2 c^2 \{ \xi' \Delta y + \eta' \Delta x \} + \Delta y \{ 4 \Delta x (\xi' \Delta x + \eta' \Delta y) + \xi' c^2 \}]$$

$$+ 2 G_6'' (\xi'^2 + \eta'^2) (\xi' \Delta y + \eta' \Delta x) + 4 H_6' [\Delta x \{ 2 \eta' (\xi' \Delta x + \eta' \Delta y) - (\xi'^2 + \eta'^2) \Delta y \}$$

$$+ \xi' \eta' c^2 + \Delta y \{ 2 \xi' (\xi' \Delta x + \eta' \Delta y) - (\xi'^2 + \eta'^2) \Delta x \}] \, 4 H_6'' (\xi'^2 + \eta'^2) \xi' \eta'$$

$$+ 2 J_6 \xi' [2 \eta' (\xi' \Delta x + \eta' \Delta y) + \xi' (\eta' \Delta x - \xi' \Delta y) - (\xi'^2 + \eta'^2) \Delta y]$$

$$+ 2 J_6 \eta' [6 \xi' (\xi' \Delta x + \eta' \Delta y) + 2 \eta' (\xi' \Delta y - \eta' \Delta x) - (\xi'^2 + \eta'^2) \Delta x]$$

$$b_4' = b_4 + 2 b_7 \Delta x - b_2 \Delta x - \frac{1}{2} b_1 (\Delta x)^2 - 2 \left(\frac{1}{4} b_2 + b_7 \right) [c^2 + (\Delta x)^2] \Delta x$$

$$- \frac{1}{2} b_4 [c^2 + 4 (\Delta x)^2] - b_5 \Delta x \Delta y + 24 E_6' [c^2 + (\Delta x)^2] \Delta x$$

$$+8E_6''(\xi'^2+\eta'^2)\,\Delta x+4G_6'[5\xi'(\Delta x)^2+c^2\xi'+2\eta'\Delta x\Delta y]+2G_6''(\xi'^2+\eta'^2)\,\xi'$$

$$+4H_6'[3\xi'^2\Delta x-2\eta'^2\Delta x+2\xi'\eta'\Delta y]+4J_6(\xi'^2-2\eta'^2)\,\xi'$$

$$b_5'=b_5+2b_7\Delta y-b_2\,.\,\Delta y-b_1\Delta x\,\Delta y-2\left(\frac{1}{8}\,b_2+b_7\right)[c^2+2\,(\Delta x)^2]\,\Delta y$$

$$-b_3\Delta x-2b_4\Delta x\Delta y-b_5\,[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]-2b_6\Delta x\Delta y+24E_6'\,[c^2+2\,(\Delta x)^2]\,\Delta y$$

$$+8E_6''(\xi'^2+\eta'^2)\,\Delta y+4G_6'\,|6\xi'\Delta x\Delta y+2\eta'(\Delta x)^2+c^2\eta'+2\eta'(\Delta y)^2]$$

$$+2G_6''(\xi'^2+\eta'^2)\,\eta'+24H_6'\xi'\eta'\Delta x+6J_6\,(3\xi'^2-\eta'^2)\,\eta'$$

$$b_6'=b_6-\frac{1}{2}\,b_1\,(\Delta y)^2-2\left(\frac{1}{4}\,b_2+b_7\right)\Delta x\,(\Delta y)^2-b_3\Delta y-b_5\Delta x\Delta y$$

$$-\frac{1}{2}\,b_6\,[c^2+4\,(\Delta y)^2]+24E_6'\Delta x\,(\Delta y)^2+4G_6'\,(\xi'\Delta y+2\eta'\Delta x)\,\Delta y$$

$$+4H_6'\,(2\xi'\Delta y+\eta'\Delta x)\,\eta'+2J_6\,(5\eta'^2-\xi'^2)\,\xi'$$

$$b_9'=-2\left(\frac{1}{4}\,b_2+b_7\right)(\Delta x)^2-b_4\Delta x+24G_6'\,(\Delta x)^2+8G_6'\xi'\Delta x+4H_6'\xi'^2$$

$$b_{10}'=-4\left(\frac{1}{4}\,b_2+b_7\right)\Delta x\Delta y-b_4\Delta y-b_5\Delta x+48E_6'\Delta x\Delta y+8G_6'\,(\xi'\Delta y+\eta'\Delta x)+8H_6'\xi'\eta'$$

$$b_{11}'=-2\left(\frac{1}{4}\,b_2+b_7\right)(\Delta y)^2-b_5\Delta y-b_6\Delta x+24E_6'\,(\Delta y)^2+8G_6'\eta'\Delta y+4H_6'\eta'^2$$

$$b_{12}'=-b_6\Delta y.$$

Siendo la parte secular de la función perturbadora R, una función par de los parámetros ξ, η, ξ', η', p, q, p', q', los segundos miembros de nuestras ecuaciones diferenciales son, por ser derivadas según las variables ξ, η, p, q, funciones impares de los parámetros mencionados y variables. Los coeficientes correspondientes a_i' y b_i' de las variables fijan las series que progresan según potencias pares de los parámetros ξ', η', p' y q'. Los coeficientes a_1, a_4, a_5 y a_6 comienzan con un término del primer grado, como asimismo b_1, b_4, b_5 y b_6, pero a_3 y b_2 con el grado o y a_2, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12} y b_3, b_9, b_{10}, b_{11} y b_{12} con el grado dos. Equivalentes a los parámetros son las magnitudes Δx y Δy, en cuanto no alteran las características de los coeficientes, ya que presentan, como ya hemos demostrado, magnitudes del primer grado al menos respecto de ξ' y η'.

Para control y simplificación de las investigaciones, sean fijadas ahora las relaciones que existen entre los coeficientes mencionados, primero los coeficientes ya considerados respecto del primer grado en ξ y η : $a_2=\left(\frac{\partial^2 R}{\partial\eta\partial\xi}\right)_{\xi=\eta=0}=b_3$, siendo por lo menos los dos coeficientes del segundo grado. Además, respecto de los términos del segundo grado de ξ y η : $2a_4=\left(\frac{\partial^3 R}{\partial\xi^2\partial\eta}\right)_{\xi=\eta=0}=b_5$ resulta una relación que se obtiene inmediatamente por la difenciación de las ecuaciones diferenciales anteriores ; de igual modo la relación $a_5=\left(\frac{\partial^3 R}{\partial\xi\partial\eta^2}\right)_{\xi=\eta=0}=2b_6$. Respecto de los términos del tercer grado en ξ y η resulta análogamente :

$$6a_9 = \left(\frac{\partial^4 R}{\partial\xi^3\partial\eta}\right)_{\xi=\eta=0} = 2b_{10}\,; \qquad 2a_{10} = \left(\frac{\partial^4 R}{\partial\xi^2\partial\eta^2}\right)_{\xi=\eta=0} = 2b_{11}\,; \qquad 2a_{11} = \left(\frac{\partial^4 R}{\partial\eta^3\partial\xi}\right)_{\xi=\eta=0} = 6b_{12}$$

Finalmente existe una simple relación entre a_1 y b_1 siendo :

$$a_1 = \left(\frac{\partial R}{\partial\eta}\right)_{\xi=\eta=0} \qquad \text{y} \qquad b_1 = \left(\frac{\partial R}{\partial\xi}\right)_{\xi=\eta=0}$$

donde $a_1 = F\eta'$ y análogamente $b_1 = F\xi'$, de modo que : $\dfrac{a'}{\eta'} = \dfrac{b_1}{\xi'} = F$, donde F es sólo una función de ξ' y η', y comienza con el grado cero. La razón es que la parte secular de R tiene la forma siguiente respecto del término lineal en ξ y η : $\xi\xi' + \eta\eta'$, proveniendo del término $e \,.\, e' \cos(\omega - \tilde{\omega}')$, originándose todos los términos más altos por recibir los factores consecutivos e'^2, e'^4, etc., de tal manera que la forma general de este término es : $(\xi\xi' + \eta\eta') \,.\, (\xi'^2 + \eta'^2)^n$, donde $n = 0, 1, 2, \ldots$

Respecto a los nuevos coeficientes a_i' y b_i' ($i = 1, 2 \ldots$), que se obtiene multiplicando los coeficientes a_i y b_i por $\sqrt{1 - e^2}$, las relaciones simples mencionadas ya no valen en general, puesto que, después del desarrollo según potencias de x e y, hemos puesto: $x^2 + y^2 = \alpha^2$; por consiguiente : $\xi^2 + \eta^2 = \alpha^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + 2x\Delta x + 2y\Delta y$. Por eso la definición relativa a los nuevos coeficientes es :

$$a_2' = \left(\frac{\partial\left(\sqrt{1-e^2}\,\dfrac{\partial R}{\partial\eta}\right)}{\partial x}\right)_{x=y=0} \qquad \text{y} \qquad b_3' = \left(\frac{\partial\left(\sqrt{1-e^{2\prime}}\,\dfrac{\partial R}{\partial\xi}\right)}{\partial y}\right)_{x=y=0}$$

Por la diferenciación explícita resulta, considerando las relaciones $\xi = x + \Delta x$ y $\eta = y + \Delta y$ y $e^2 = \xi^2 + \eta^2$:

$$\left.\begin{aligned} a_2' &= \left[-\frac{\xi}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\partial R}{\partial\eta} + \sqrt{1-e^2}\,\frac{\partial^2 R}{\partial\eta\partial x}\right]_{x=y=0} \\ b_3' &= \left[-\frac{\eta}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\partial R}{\partial\xi} + \sqrt{1-e^2}\,\frac{\partial^2 R}{\partial\xi\,.\,\partial y}\right]_{x=y=0} \end{aligned}\right\}$$

de modo que se obtiene sustituyendo en todas sus partes $x = y = 0$ y por eso : $\xi = \Delta x$ y $\eta = \Delta y$ y $Q_0 = \sqrt{1 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2}$:

$$\text{III}a)\qquad \left.\begin{aligned} a_2' &= -\frac{\Delta x}{Q_0}\left(\frac{\partial R}{\partial\eta}\right)_0 + Q_0\left(\frac{\partial^2 R}{\partial\eta\partial x}\right)_0 \\ b_3' &= -\frac{\Delta y}{Q_0}\left(\frac{\partial R}{\partial\xi}\right) + Q_0\left(\frac{\partial^2 R}{\partial\xi\partial\eta}\right)_0 \end{aligned}\right\} \text{ donde el índice 0, equivale a : } x = y = 0$$

Siendo ahora según (I) de (98) :

$$\text{III}b)\qquad \left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial R}{\partial\eta}\right)_0 &= a_1 + a_2\Delta x + a_3\Delta y + a_4(\Delta x)^2 + \ldots \\ \left(\frac{\partial R}{\partial\xi}\right)_0 &= b_1 + b_2\Delta x + b_3\Delta y + b_4(\Delta x)^2 + \ldots \end{aligned}\right\}$$

y nulos los segundos miembros por la condición anterior relativa a la determinación de Δx, Δy, y siendo respecto a las otras derivadas :

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial\eta\partial x}\right)_0 &= a_2 + 2a_4\Delta x + a_5\Delta y + 2a_7\Delta x\Delta y + \dots\\ \left(\frac{\partial^2 R}{\partial\xi\partial y}\right)_0 &= b_3 + b_5\Delta x + 2b_6\Delta y + \dots\end{aligned}\right\}$$

las expresiones relativas a a'_2 y b'_3 se reducen a los siguientes términos :

$$\left.\begin{aligned}a'_2 &= Q_0(a_2 + 2a_4\Delta x + a_5\Delta y + 2a_7\Delta x\Delta y + \dots)\\ b'_3 &= Q_0(b_3 + b_5\Delta x + 2b_6\Delta y + 2b_7\Delta x\Delta y + \dots)\end{aligned}\right\}$$

Por esto, considerando todavía las relaciones : $a_2 = b_3$, $2a_4 = b_5$, $a_5 = 2b_6$, $a_7 = b_7$, etc. resulta : $a'_2 - b'_3 = 0$, que prueba el objeto propuesto. Luego, agregando también el factor $\sqrt{1-e^2}$ a las ecuaciones diferenciales, se mantiene la condición fundamental respecto a la existencia de una solución periódica de las nuevas ecuaciones.

Comparando las expresiones explícitas relativas a a'_2 y b'_3 según su representación anterior, con el objeto de controlar la condición $a'_2 - b'_3 = 0$, hay que observar que no se consideraron las condiciones anteriores (III*b*) en las representaciones explícitas respecto a : a'_2 y b'_3, de suerte que, para controlar, es necesario substituir las expresiones (III*b*) en las ecuaciones (III*a*) y sustituir, además :

$$e^2 = \alpha^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = x^2 + y^2 + 2x\Delta x + 2y\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

resultando que, por ejemplo, las magnitudes a'_1, a'_2, etc., contienen todavía, en virtud de la susbstitución mencionada, términos de forma x, y, x^2, y^2 etc.

Por esta causa, el control se dificulta, pero se sostiene el hecho decisivo que la condición $a_2' - b_3' = 0$, se mantiene, considerando el factor $\sqrt{1-e^2}$ en las ecuaciones iniciales. Todas las otras relaciones, como $2a_4 = b_5$ etc., no se sostienen, por ser $2a_4' \neq b_5'$, aunque sin influenciar la forma de la solución, pero sí hace más difícil el control de los coeficientes.

Vamos a demostrar la desigualdad respecto del par a_4' y b_5'. La definición de estos coeficientes en base de las ecuaciones anteriores es la siguiente :

$$\text{(IV}a\text{)}\qquad \left.\begin{aligned}2a_4' &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sqrt{1-e^2}\,\frac{\partial R}{\partial\eta}\right)_0\\ b_5' &= \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\sqrt{1-e^2}\,\frac{\partial R}{\partial\xi}\right)_0\end{aligned}\right\}$$

Por medio del cálculo resulta :

$$2a_4' = \left[-\frac{1}{q}\cdot\frac{\partial R}{\partial\eta} - \frac{\xi^2}{q^3}\cdot\frac{\partial R}{\partial\eta} - \frac{2\xi}{q}\cdot\frac{\partial^2 R}{\partial\eta\partial x} + q\cdot\frac{\partial^3 R}{\partial\eta\partial x^2}\right]_0$$

$$b_5 = \left[-\frac{\xi\eta}{q^3}\cdot\frac{\partial R}{\partial\xi} - \frac{\eta}{q}\cdot\frac{\partial^2 R}{\partial\xi\partial x} - \frac{\xi}{q}\cdot\frac{\partial^2 R}{\partial\xi\partial y} + q\cdot\frac{\partial^3 R}{\partial\xi\partial x\partial y}\right].$$

donde el factor $q = \sqrt{1 - e^2} = \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}$ y el sistema de magnitudes $x = y = 0$ corresponde otra vez al sistema $\xi = \Delta x$, $\eta = \Delta y$. Respecto a los dos últimos términos en los segundos miembros, ahora vale, según I y II (98):

$$\left.\begin{aligned} &\text{V)} \qquad \left(\frac{\partial^3 R}{\partial\eta\partial x^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial^3 R}{\partial\eta\partial\xi^2}\right)_0 = 2a_4 + 2a_7\Delta y \\ &\text{VI)} \qquad \left(\frac{\partial^3 R}{\partial\xi\partial x\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial^3 R}{\partial\xi^2\partial\eta}\right)_0 = 2b_5 + 2a_7\Delta y \end{aligned}\right\}$$

de modo que que resulta V = VI eliminándose los dos últimos términos de (IV*b*) en la diferencia $2a_4' - b_5'$ y considerando las dos ecuaciones I y II, se origina finalmente la siguiente expresión de la diferencia investigada:

$$\text{VII)} \qquad 2a_4' - b_5' = -\left(\frac{1}{q_0} + \frac{(\Delta x)^2}{q_0^3}\right)[a_1 + a_2\Delta x + a_3\Delta y + a_4(\Delta x)^2 + \ldots] -$$

$$- \frac{2\Delta x}{q_0}[a_2 + 2a_4\Delta x + a_5\Delta y + \ldots] + \frac{\Delta x\Delta y}{q_0^3}[b_1 + b_2\Delta x + b_3\Delta y + b_4(\Delta x)^2 + \ldots] +$$

$$+ \frac{\Delta y}{q_0}[b_2 + 2b_4\Delta x + b_5\Delta y + \ldots] + \frac{\Delta x}{q_0}[b_3 + b_5\Delta x + 2b_6\Delta y + \ldots]$$

Esta expresión permanece $\neq 0$, aunque desaparece el primer término del segundo miembro, por desaparecer el paréntesis $a_1 + a_2 x + \ldots$ según la suposición relativa a la determinación de Δx y Δy.

Ahora, bajo las suposiciones expresadas, y considerando los términos de mayor grado que 1°, la solución de las ecuaciones diferenciales se desarrolla en la forma siguiente. Respecto a la forma definitiva de nuestras ecuaciones diferenciales, considerando los términos del 3er grado aparente, es decir:

$$a_7'(\xi^2 + \eta^2)\eta \quad \text{en} \quad \frac{d\xi}{dt} \quad \text{y} \quad b_7'(\xi^2 + \eta^2)\xi \quad \text{en} \quad -\frac{d\eta}{dt},$$

hay que observar que los términos mencionados se reducen a términos del 2° grado, en base a la sustitución de la integral de la primera aproximación:

$$\xi^2 + \eta^2 = \alpha^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + 2x\Delta x + 2y\Delta y$$

añadiendo además los factores η y ξ. Por otra parte, por medio de los términos del 1er grado originados por la operación mencionada, resultan términos del 3er grado, por el multiplicador general $\sqrt{1 - e^2} = 1 - \frac{1}{2}e^2 + \ldots$ Luego las ecuaciones diferenciales obtienen la forma (101):

$$(101) \qquad \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{dx}{dt} = a_1' + a_2'x + a_3'y + a_4'x^2 + a_5'xy + a_6'y^2 \\ -\frac{d\eta}{dt} &= -\frac{dy}{dt} = b_1' + b_2'x + b_3'y + b_4'x^2 + b_5'xy + b_6'y^2 \end{aligned}$$

donde los coeficientes a_i' y b_i' ya han sido fijados anteriormente. Primeramente, la solución se realiza en base a los nuevos coeficientes, como antes, considerando sólo los términos lineales en x e y, después de haber homogeneizado las ecuaciones, por medio de las condiciones de que a_1' y b_1' se eliminan, por lo que resulta la determinación de las constantes Δx y Δy. Por tal motivo, la primera solución tiene ahora la forma :

$$(101a)\qquad \left.\begin{aligned} x &= \alpha \operatorname{sen} A \\ y &= \alpha \cos A - \alpha \frac{a_2'}{a_3'} \operatorname{sen} A \end{aligned}\right\}$$

donde : $A = st + \beta$ y $s^2 = a_3'b_2' - a_2'b_3'$. Sustituyendo ahora : $\xi = x + \Delta x = x_1 + x_3 + \Delta x$ y análogamente $\eta = y + \Delta y = y_1 + y_3 + \Delta y$ siendo : $x = x_1 + x_3$ e $y = y_1 + y_3 + \Delta y$, donde x_3 e y_3 son los nuevos términos del tercer grado, resulta esta nueva forma de las ecuaciones anteriores :

$$(102)\qquad \left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{d(x_1+x_3)}{dt} = a_1' + a_2'(x_1+x_3) + a_3'(y_1+y_3) + a_4'(x_1+x_3)^2 + a_5'(x_1+x_3)(y_1+y_3) + a_6'(y_1+y_3)^2 \\ -\frac{d\eta}{dt} &= -\frac{d(y_1+y_3)}{dt} = b_1' + b_2'(x_1+x_3) + b_3'(y_1+y_3) + b_4'(x_1+x_3)^2 + b_5'(x_1+x_3)(y_1+y_3) + b_6'(y_1+y_3)^2 \end{aligned}\right\}$$

Considerando la primera solución aproximada, hay que transformar los términos del segundo grado en x e y, de modo que primeramente, respecto del término $a_4'(x_1+x_3)^2 = a_4'(x_1^2 + 2x_1x_3 + x_3^2)$ resulta la expresión del primer término en x_1^2 : $a_4'x_1^2 = \frac{1}{2}\alpha^2 a_4' - \frac{1}{2}\alpha^2 a_4' \cos 2A$, y mientras que este término es del tercer grado, los otros términos $a_4'x_1x_3$ y $a_4'x_3^2$ son del quinto o séptimo grado respectivamente, pudiéndose omitirlos por el momento. La parte constante $\frac{1}{2}\alpha^2 a_4'$ del término $a_4'x_1^2$ debe sumarse a la parte constante a_1' de las ecuaciones diferenciales, mientras que el término periódico del tercer grado determina una nueva parte inhomogénea de la ecuación.

El próximo término a transformar es el siguiente : $a_5xy = a_5'x_1y_1 + a_5'x_1y_3 + a_5'x_3y_1 + a_5'x_3y_3$, de modo que, sustituyendo la primera aproximación, resulta $a_5'x_1y_1 = \frac{1}{2}\alpha^2 a_5' \operatorname{sen} 2A$ de donde resulta que los tres últimos términos son del quinto o séptimo grado, respectivamente, y por eso pueden omitirse en la segunda aproximación. Finalmente, el último término a considerar en este grupo es :

$$a_6'(y_1+y_3)^2 = a_6'(y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2) = \frac{1}{2}\alpha^2 a_6' + \frac{1}{2}\alpha^2 a_6' \cos 2A = 3er \text{ grado} ;$$

análogas expresiones tienen los términos correspondientes de la segunda ecuación diferencial con los coeficientes b_4', b_5' y b_6'. Hay que reunir las partes constantes de estos términos con las partes constantes a_1' y b_1', mientras que las partes periódicas contribuyen a formar las partes inhomogéneas de las ecuaciones. De este modo resultan las siguientes ecuaciones diferenciales :

$$(103)\qquad \left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{d}{dt}(x_1+x_3) = a_1'' + a_2''(x_1+x_3) + a_3''(y_1+y_3) + \frac{1}{2}\alpha^2(-a_4'+a_6')\cos 2A + \frac{1}{2}\alpha^2 a_5' \operatorname{sen} 2A \\ -\frac{d\eta}{dt} &= -\frac{d}{dt}(y_1+y_3) = b_1'' + b_2''(x_1+x_3) + b_3''(y_1+y_3) + \frac{1}{2}\alpha^2(-b_4'+b_6')\cos 2A + \frac{1}{2}\alpha^2 b_5' \operatorname{sen} 2A \end{aligned}\right\}$$

Por eso las nuevas ecuaciones tienen, en su parte homogénea, la misma forma que las ecuaciones originales con los coeficientes $a^{i\prime}$ y $b^{i\prime}$ los que han sido sometidos sólo a una corrección por términos del tercer grado, mientras que los otros coeficientes no han sido alterados, de tal manera que :

$$a_2'' = a_2', \quad a_3'' = a_3', \quad b_2'' = b_2' \quad \text{y} \quad b_3'' = b_3'.$$

Los nuevos coeficientes a_1'' y b_1'', como funciones de los coeficientes a_1' y b_1' tienen el siguiente significado :

$$a_1'' = a_1' + \frac{1}{2} a_1'\alpha^2 + \frac{1}{2} a_6'\alpha^2 \,; \qquad b_1'' = b_1' + \frac{1}{2} b_4'\alpha^2 + \frac{1}{2} b_6'\alpha^2.$$

Las nuevas ecuaciones vuelven a ser homogéneas, al ponerse :

$$x_1 + x_3 = x + \Delta x \quad \text{y} \quad y_1 + y_3 = y + \Delta y$$

y entonces :

$$\left.\begin{aligned} a_1'' + a_2''\Delta x + a_3''\Delta y &= 0 \\ b_1'' + b_2''\Delta x + b_3''\Delta y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

por la deducción de Δx y Δy.

Queda por ahora la integración de las ecuaciones diferenciales, considerando las partes inhomogéneas relativas a los términos periódicos en sen $2\mathrm{A}$ y $\cos 2\mathrm{A}$. Hay que prever que, en el paso siguiente de la integración, aparecen términos con el argumento 3A, etc., de modo que importa deducir la integral general de las ecuaciones diferenciales siguientes :

$$(104) \qquad \left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_2x + a_3y + \mathrm{C}_1 \cos n\mathrm{A} + \mathrm{S}_1 \operatorname{sen} n\mathrm{A} \\ -\frac{dy}{dt} &= b_2x + b_3y + \mathrm{C}_2 \cos n\mathrm{A} + \mathrm{S}_2 \operatorname{sen} n\mathrm{A} \end{aligned}\right\}$$

donde $n = 1, 2, 3, \ldots$ etc. ; además los coeficientes C_1, S_1, C_2, S_2 son del tercer grado, quedando cumplida nuestra suposición anterior de que $a_2'' - b_3'' = 0$.

En el caso de $n = 1$, el período de la oscilación libre coincidiría con el período de los términos agregados, de modo que la solución particular de la parte inhomogénea de las ecuaciones diferenciales contiene también términos-Poisson de la forma : $t \cos \mathrm{A}$ y t sen A, es decir términos mixtos-seculares por los que la estabilidad anterior sería destruída. También en el caso de $n \neq 1$ se originaría, como ya sabemos, una solución inestable en base a la parte homogénea, si $a_2 - b_3 \neq 0$.

La solución de la parte inhomogénea resulta por la forma :

$$x = \gamma_1 \cos n\mathrm{A} + \sigma_1 \operatorname{sen} n\mathrm{A} \quad \text{y} \quad y = \gamma_2 \cos n\mathrm{A} + \sigma_2 \operatorname{sen} n\mathrm{A} \qquad (n \neq 1)$$

y sustituyéndola en las ecuaciones diferenciales, resulta entonces un sistema de ecuaciones lineales e inhomogéneas para el cálculo de las cuatro incógnitas : γ_1, γ_2, σ_1, σ_2, con la determinante ;

$$(105) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_2, & a_3, & -ns, & 0 \\ ns, & 0, & a_2, & a_3 \\ b_2, & b_3, & 0, & ns \\ 0, & -ns, & b_2, & b_3 \end{vmatrix}$$

su desarrollo da la siguiente forma :

$$\Delta = -(a_3 b_2 - n^2 s^2)^2 - a_2^2 b_3^2 - n^2 s^2 (a_2^2 + b_3^2) + 2a_2 a_3 b_2 b_3$$

En base a nuestras deducciones anteriores respecto, al grado de los coeficientes, el primer término de la determinante, es decir el término principal, es del grado cero, siendo el segundo término del grado ocho; y el tercer y cuarto término del cuarto grado. Por eso resulta, que, en general, la determinante es distinta de cero, excepto el caso de $n = 1$.

Suponiendo en la primera aproximación $a_2 = b_3 = 0$, ya que estos coeficientes son del 2° grado al menos, resultan los siguientes valores aproximados :

$$(106) \qquad \left.\begin{aligned} N_0\gamma_1^0 &= (nsS_1 - a_3C_2), & N_0\sigma_1^0 &= -(S_2 a_3 + nsC_1) \\ N_0\gamma_2^0 &= -(nsS_2 + b_2C_1), & N_0\sigma_2^0 &= -(b_2S_1 - nsC_2 \end{aligned}\right\}$$

donde $N_0 = \sqrt{-\Delta} = a_3 b_2 - n^2 s^2$.

Poniendo, finalmente, en la primera aproximación el coeficiente característico $a_3 = b_2 = s$, las otras fórmulas de aproximación son :

$$(107) \qquad \left.\begin{aligned} \gamma_1^0 &= \frac{1}{s(1-n^2)} nS_1 - C_2) & \sigma_1^0 &= -\frac{1}{s(1-n^2)}(nC_1 + S_2) \\ \gamma_2^0 &= -\frac{1}{s(1-n^2)}(C_1 + nS_2) & \sigma_2^0 &= -\frac{1}{s(1-n^2)}(S_1 - nC_2) \end{aligned}\right\}$$

En base a estas fórmulas, el caso especial $n = 1$, se caracteriza por la aparición del polo $n = 1$, originado por anularse los denominadores para $n = 1$. Respecto a los otros casos, $n = 2$, 3, etc., resulta que todos los coeficientes γ y σ son del tercer grado, y del orden 0, ya que todos los coeficientes C y S son del tercer grado y del primer orden de la masa, y además a_3, b_2 y s, del grado cero y del primer orden.

En el caso especial $n = 1$, es decir en el caso de oscilación-resonancia, que ocurrirá todavía, se obtiene, reduciendo las ecuaciones diferenciales anteriores respecto de x e y, a una sola ecuación del segundo orden, la siguiente ecuación diferencial

$$(108a) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -s^2 x + f_1 \cos \Lambda + f_2 \operatorname{sen} \Lambda$$

donde : $s^2 = a_3 b_2 - a_2 b_3$ y $\left.\begin{aligned} f_1 &= -a_3C_2 + sS_1 + b_3C_1 \\ f_2 &= -a_3S_2 - sC_1 + b_3S_1 \end{aligned}\right\}$ considerando que $a_2 = b_3$.

La solución particular relativa a las partes inhomogéneas respecto a f_1 y f_2, es la siguiente :

$$x = \alpha \operatorname{sen} A + g_1 t \operatorname{sen} A + g_2 t \cos A \tag{108b}$$

donde: $g_1 = \frac{f_1}{2s}$ y $g_2 = -\frac{f_2}{2s}$. Al sustituir esta expresión en la segunda de las ecuaciones diferenciales anteriores resulta entonces, respecto a y:

$$y = \frac{s}{a_3}\alpha \cos A + \gamma \cos A + \sigma \operatorname{sen} A + h_1 t \operatorname{sen} A + h_2 t \cos A$$

donde los coeficientes significan:

$$\gamma = \frac{g_2}{a_3} - \frac{C_1}{a_3} \qquad \sigma = -\left(\frac{a_2}{a_3}\alpha - \frac{g_1}{a_3} + \frac{S_1}{a_3}\right)$$

$$h_1 = -\frac{a_2}{a_3}g_1 - \frac{s}{a_3}g_2 \qquad h_2 = \frac{s}{a_3}g_1 - \frac{a_2}{a_3}g_2 \tag{109}$$

y donde en el primer término respecto de cos A, el factor $\frac{s}{a_3} = 1$ en el caso de la primera aproximación. En nuestro caso especial se tiene ahora primeramente respecto a los términos $n \neq 1$ y del tercer grado, para $n = 2$: $C_1 = S_2 = 0$, además: $S_1 = s_1'' = \frac{1}{2}a_5'\alpha^2$; $C_2 = c_2'' = \frac{1}{2}(b_6' - b_1')$, de modo pues que $\gamma_2' = \sigma_1' = 0$; y $\gamma_1' = -\frac{2S_1 - C_2}{3s}$, $\sigma_2' = -\frac{-S_1 + 2C_2}{3s}$, donde podemos poner en la primera aproximación, con una exactitud suficiente: $s = a_3'' = b_2''$

Por eso resulta, en nuestro caso, la solución correspondiente total, hasta el tercer grado:

$$x = x_1 + x_3 = \alpha \operatorname{sen} A + \gamma_1' \cos 2A \qquad \text{e} \qquad y = y_1 + y_3 = \alpha \cos A + \sigma_2' \operatorname{sen} 2A$$

donde los coeficientes γ_1' y σ_2' son del tercer grado y de orden cero, y entonces:

$$\xi = x_1 + x_3 + \Delta x \qquad \text{y} \qquad \eta = y_1 + y_3 + \Delta y$$

No existiendo términos de resonancia del tipo $n = 1$ respecto de los términos del tercer grado en las ecuaciones diferenciales, podemos pasar ahora a la deducción de los términos del quinto grado, usando no sólo el grupo $a_4'x^2 + a_5'xy + a_6'y^2$, sino también los términos directos del quinto grado, luego de la deducción de x_1, x_3, y_1 e y_3, es decir después de la deducción de $x = x_1 + x_3$ e $y = y_1 + y_3$, como funciones conocidas del tiempo t.

Antes de la deducción explícita de los términos del quinto grado, vamos a realizar ahora una simplificación esencial de todas las fórmulas, basada sobre la cualidad de la función perturbadora de ser independiente del punto cero de las longitudes, ya que depende sólo de las distancias mutuas de los tres cuerpos. Podemos aprovechar esta elección arbitraria del origen de las longitudes para fijar la longitud del perihelio $\tilde{\omega}'$ de Júpiter, apareciendo además, en el problema plano, sólo la longitud del perihelio del planeta perturbado. Fijando $\tilde{\omega}' = 0$ ó $90°$, se eliminaría ξ' o η' y sería efectivo un corte esencial de las expresiones relativas a los coeficientes, como también respecto al cálculo numérico. Por eso también la parte secular de la función perturbadora que en esta investigación sólo viene al caso, puede depender únicamente de la diferencia de las longitudes de los perihelios y de la diferencia de las longitudes de los nodos $\theta - \theta'$. Como se puede ver, por ejemplo, en los *Annales de l'Observatoire de Paris*, tomo X, págs. 38-39, la función perturbadora R parece depender, respecto a las variables-ángulo, de los múltiplos de $\tilde{\omega}' - \omega$, donde $\omega = \tilde{\omega} + \tau' - \tau$, mientras que los factores de las funciones trigonométricas dependen de $\gamma^2 = \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} J$, fijando J la inclinación mutua. En los términos que dependen de γ^2 y son del cuarto grado, $\gamma^2 e^2$, $\gamma^2 e \cdot e'$ y $\gamma^2 e'^2$, los argumentos de las funciones trigonométricas tienen también la forma:

$$2\omega - 2\tau', \quad \tilde{\omega}' + \omega - 2\tau' \quad \text{y} \quad 2\tilde{\omega}' - 2\tau', \text{ etc.}$$

Las magnitudes τ' y τ fijan las longitudes del corte de las dos órbitas planetarias sobre la esfera, contándose τ' sobre la órbita del cuerpo perturbante (Júpiter) y τ sobre la órbita del cuerpo perturbado. Según la definición anterior resulta entonces $\tilde{\omega}' - \omega = \omega' - \tilde{\omega} - (\tau' - \tau)$, donde $\tau' - \tau$ según una ojeada al triángulo esférico, formado por el punto del corte de las órbitas y los dos nodos orbitales, depende sólo de las inclinaciones φ y φ' y la difereneia $\theta' - \theta$, ya que el lado $\tau' - \theta'$ sólo depende de las magnitudes mencionadas, asimismo como el lado $\tau - \theta$, de modo que la diferencia $\tau' - \theta' - (\tau - \theta) = \tau' - \tau - (\theta' - \theta)$, depende sólo de la diferencia $\theta' - \theta$, por eso también $\tau' - \tau$, lo mismo que $\tilde{\omega}' - \omega$ dependen únicamente de la diferencia de los perihelios $\tilde{\omega}' - \omega$, la diferencia de los nodos $\theta' - \theta$ y las inclinaciones de las órbitas φ y φ', y asimismo también los múltiplos de $\tilde{\omega}' - \omega$. Respecto al orden de magnitud de $\tau' - \tau$, hay que observar que, desapareciendo la diferencia de longitudes $\tau' - \tau$ en el caso de $\varphi' = 0$ como también $\varphi = 0$, la magnitud $\tau' - \tau$ debe ser del grado del producto, es decir del segundo grado de las inclinaciones. Además, siendo $\tau' - \tau = 0$, en el caso de que coincidan los dos nodos, la diferencia $\tau' - \tau$ debe ser proporcional a $\operatorname{sen}(\theta' - \theta)$.

Además aparecen en R los otros argumentos a transformar:

$$2\omega - 2\tau' = 2(\tilde{\omega} - \tau), \qquad \tilde{\omega}' + \omega - 2\tau' = \tilde{\omega}' - \tau' + (\tilde{\omega} - \tau), \qquad 2\tilde{\omega}' - 2\tau' = 2(\tilde{\omega}' - \tau')$$

argumentos que por eso en los tres casos dependen sólo de los dos argumentos $\tilde{\omega} - \tau$ y $\tilde{\omega}' - \tau'$; y por consiguiente dependen sólo de las distancias del corte de las órbitas a los dos perihelios, es decir, magnitudes, que son independientes del origen de los nodos y las longitudes de los perihelios.

Finalmente, el factor $\gamma^2 = \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} J$, por depender sólo de la inclinación mutua, es una función de los parámetros φ, φ' y de la diferencia $\theta' - \theta$ exclusivamente, según el triángulo mencionado. Por tal causa resulta en general que la parte secular de la función perturbadora puede ser representada, en una forma sencilla, independiente de la posición del origen de las longitudes, lo que es muy útil respecto a la expresión de R por las variables-excentricidad e inclinación, luego de haber elegido arbitrariamente el origen de las longitudes.

Siendo útil eliminar una de las variables-excentricidad por una elección correspondiente de $\tilde{\omega}'$ y anularla, sea $\eta' = 0$, luego $\tilde{\omega}' = 90°$ ó $270° \equiv -90°$ de tal modo que la longitud $\tilde{\omega}' - 90°$ y $\tilde{\omega}' + 90°$, resp. corresponden al nuevo origen de las longitudes en el sistema anterior, cuyo origen es el punto vernal.

La segunda forma donde $\tilde{\omega}' = 270°$, viene al caso si el argumento de la latitud del perihelio de Júpiter es $\tilde{\omega}_1' > 90°$, de tal modo que el nuevo origen de las longitudes ya no está más sobre la eclíptica, sino sobre la órbita de Júpiter, mientras que en el caso de ser $\tilde{\omega}_1' < 90°$, el nuevo origen permanece sobre la eclíptica. La longitud del perihelio $\tilde{\omega}$ obtiene entonces en el nuevo sistema los valores : $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega} - (\tilde{\omega}' - 90°) = \tilde{\omega} - \tilde{\omega}' + 90°$ ó $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega} + 270 - \tilde{\omega}' \equiv \tilde{\omega} - \tilde{\omega}' - 90°$ respectivamente.

A causa de la nueva elección del origen se originan entonces las siguientes simplificaciones. Las condiciones respecto a la deducción de Δx y Δy fueron las siguientes :

$$0 = a_1'' = a_1' + \frac{1}{2} a_4' \alpha^2 + \frac{1}{2} a_6' \alpha^2 + \text{Términos en } x^3 \text{ etc.}$$

$$0 = b_1'' = b_1' + \frac{1}{2} b_4' \alpha^2 + \frac{1}{2} b_6' \alpha^2 + \text{Términos en } x^3 \text{ etc.}$$

Sustituyendo entonces $\eta' = 0$, en a_1', b_1', etc., resulta, como consecuencia de las representaciones anteriores, la eliminación de un gran número de términos por anularse. En la primera fórmula de definición para a_1 aparece como primer término un coeficiente, que, según la definición $a_1 = \left(\frac{\partial R}{\partial \eta}\right)_{\xi = \eta = 0}$ puede provenir sólo de términos de R multiplicados con $\eta\eta'$, ya que R se compone sólo de términos tales, cuyo producto origina términos-coseno respecto a los argumentos angulares y únicamente de un grado par de las excentricidades o de las variables-excentricidad respectivamente, si en lugar de la representación por ξ, η, ξ', η', p, g, p', g' usamos : e, e', $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}'$, φ, φ', θ, θ'. Correspondiendo ahora $\eta = e \cdot \cos \tilde{\omega}$ a un término-coseno, un término constante $a_1 = \left(\frac{\partial R}{\partial \eta}\right)_0$, puede estar afectado, en el término del grado más bajo, es decir del segundo grado, sólo del factor η' y se anula por eso con $\eta' = 0$.

Respecto a los términos de mayor grado en a_1, se agregan todavía y únicamente potencias de $e'^2 = \xi'^2 + \eta'^2$, por lo que no hay cambio respecto de la eliminación de a_1 por $\eta' = 0$. El próximo término de a'_1 es $a_2 \Delta x$, siendo $a_2 = \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \eta \partial \xi}\right)_0$ en forma análoga proporcional a $\eta'\xi'$, anulándose por eso también con $\eta' = 0'$. Otro término es $a_3 \Delta y$, donde $a_3 = \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2}\right)_0$ fija, en grado menor, una constante independiente de ξ' y η'. El próximo término es $a_4 (\Delta x)^2$ donde $2a_4 = \left(\frac{\partial^3 R}{\partial \eta \partial \xi^2}\right)$ debe tener necesariamente el factor η' y por tal motivo se anula con $\eta' = 0$. Otro término $a_5 \Delta x \Delta y$, está afectado, por ser $a_5 = \left(\frac{\partial^3 R}{\partial \xi \partial \eta^2}\right)_0$, el factor ξ' es distinto de 0, si $\eta' = 0$, pero hay que destacar que este término, distinto de 0 : $a_5 \Delta x \Delta y$, tiene la magnitud Δy de factor común, asimismo como el término $a_3 \Delta y$ deducido anteriormente y distinto de 0. El término siguiente es : $a_6 (\Delta y)^2$, donde $2a_6 = \left(\frac{\partial^3 R}{\partial \eta^3}\right)_0$, y por eso tiene, necesariamente, el factor η', de modo que se anula con $\eta' = 0$. El término siguiente $a_7 c^2 \Delta y$ tiene por a_7 un factor constante de grado más bajo e independiente de ξ' e η', mientras que el factor $C^2 = \alpha^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ depende de las incógnitas Δx y Δy. Nuevamente hay que observar que también este término nuevo, distinto de cero, tiene la magnitud Δy de factor. El siguiente término $-\frac{1}{2} a_1 c^2$ tiene el factor η' y se anula con él. El siguiente término $-\frac{1}{2} a_3 c^2 \Delta y$

es distinto de cero y tiene a Δy como factor. El próximo término nuevo, $-\frac{1}{8}a_1c^4$ tiene a η' de factor y desaparece con él, es decir: En general todos los términos multiplicados por Δy, tienen coeficientes tales que, si $\eta'=0$, son distintos de cero; mientras que los demás tienen a η' como factor y por eso se anulan para $\eta'=0$. Luego a_1' tiene la forma general:

$$a_1' = \Delta y \cdot f + \eta' g, \qquad y \qquad b_1' = \Delta x h + \xi' \cdot k$$

Además aparecen en la expresión anterior relativa a a_1'' los términos $\frac{1}{2}a_4'\alpha^2 + \frac{1}{2}a_6'\alpha^2$ que, según las definiciones correspondientes para a_4' y a_6', se componen de términos proporcionales, por una parte a: η' y por otra parte a: Δy y por eso se unen con los términos ya tratados de a_1'. Asimismo los términos b_4' y b_6', que aparecen en b_1'', se componen de términos que tienen como factores por parte sólo ξ' y por otra parte Δx, por ello es de la misma forma que b_1' el primer término de b_1'', pero cabe destacar que los términos mencionados a_4', a_6' b_4' y b_6', originan, por el factor α^2 términos del tercer grado al menos. Pero la primera solución aproximada relativa a Δx y Δy resulta por los términos del primer grado en las dos ecuaciones $a_1'' = 0$ y $b_1'' = 0$. Por esto resulta de estas dos ecuaciones que, si $\eta' = 0$ siempre es $\Delta y = 0$, mientras que $\Delta x \neq 0$ y proporcional a ξ'. Las definiciones de b_4' y b_6' simplificadas por la sustitución $\eta' = \Delta y = 0$, son las siguientes:

$$\begin{aligned}(110) \qquad b_4' &= b_4 + 2b_7\Delta x - b_2\Delta x - \frac{1}{2}b_1(\Delta x)^2 - 4\left(\frac{1}{8}b_2 + \frac{1}{2}b_7\right)(c^2 + (\Delta x)^2)\Delta x - \\ &- \frac{1}{2}b_4(c^2 + 4(\Delta x)^2) + 24E_6'(c^2 + (\Delta x)^2)\Delta x + 8E_6''\xi'^2\Delta x + \\ &+ 4G_6'(5\xi'(\Delta x)^2 + c^2\xi') + 2G_6''\xi'^3 + 12H_6'\xi'^2\Delta x + 4J_6\xi'^3 \\ b_6' &= b_6 - \frac{1}{2}b_6c^2 - 2J_6\xi'^3\end{aligned}$$

donde ahora es $c^2 = \alpha^2 + (\Delta x)^2$.

La economía de trabajo obtenida es considerable, como resulta de las representaciones de los coeficientes a_1', a_2', etc., de modo que, desde ahora, haremos siempre la suposición de que $\tilde{\omega}' = 90°$, es decir $\xi' = e'$ y $\eta' = 0$. De los coeficientes no mencionados todavía, primero se tiene: $a_5 = \left(\frac{\partial^3 R}{\partial\xi\partial\eta^2}\right)$, que se establece proporcional a ξ' de modo que $a_5' \neq 0$ y entonces:

$$\begin{aligned}(111) \qquad a_5' &= a_5 + 2a_7\Delta x - a_3\Delta x - 4\left[\frac{1}{8}a_3 + \frac{1}{2}a_7\right]c^2\Delta x - \frac{1}{2}a_5[c^2 + 2(\Delta x)^2] + \\ &+ 24E_6'c^2\Delta x + 8E_6''\xi'^2\Delta x + 4G_6'[c^2\xi' + 2\xi'(\Delta x)^2] + \\ &+ 2G_6''\xi'^3 - 6J_6\xi'^3\end{aligned}$$

Bajo las mismas condiciones el próximo coeficiente a_6' se iguala a cero, porque $a_6 = 0$, y asimismo todos los otros términos que aparecen en a_6'. Los otros coeficientes a_7, a_8, b_7 y b_8, están sometidos a la relación

$a_7 = a_8 = b_7 = b_8$, siendo todos los coeficientes, en la primera aproximación, del grado cero, según resulta de la representación anterior y no existen coeficientes a_7', a_8', b_7' y b_8' ya que los términos en a_7, etc. hasta b_8 se reúnen en las ecuaciones diferenciales por la existencia de la integral $\xi^2 + \eta^2 = c^2 + 2x\Delta x + 2y\Delta y$ y respecto de los términos lineales en x e y, con los términos del primer grado al menos.

Los otros coeficientes que aparecen en nuestras ecuaciones diferenciales son, primeramente :

$$
\begin{aligned}
a_5' = {} & a_5 + 2a_7\Delta x - a_3\Delta x - 4\left(\frac{1}{8}a_3 + \frac{1}{2}a_7\right)c^2\Delta x - \frac{1}{2}a_5(c^2 + 2(\Delta x)^2) + \\
& + 24E_6'c^2\Delta x + 8E_6''\xi'^2\Delta x + 4G_6'(c^2\xi' + 2\xi'(\Delta x)^2) + \\
& + 2G_6''\xi'^3 - 6J_6\xi'^3
\end{aligned}
\tag{112}
$$

$a_6' = 0$, ya que : $a_6 = 0$; además $b_5' = 0$ y $a_9' = a_{11}' = a_{12}' = 0$, pero :

$$
a_{10}' = -4\left(\frac{1}{8}a_3 + \frac{1}{2}a_7\right)(\Delta x)^2 - a_5\Delta x + 24E_6'(\Delta x)^2 + 8G_6'\xi'\Delta x + 4H_6'\xi'^2 ;
$$

análogamente resultan las representaciones correspondientes :

$$
\left.
\begin{aligned}
& b_9' = -2\left[\frac{1}{4}b_2 + b_7\right](\Delta x)^2 - b_4\Delta x + 24E_6'(\Delta x)^2 + 8G_6'\xi'\Delta x + 4H_6'\xi'^2, \\
& b_{10}' = 0, \qquad b_{11} = -b_6\Delta x, \qquad b_{12} = 0.
\end{aligned}
\right\}
\tag{112}
$$

Además hay que investigar ahora la influencia de los términos del quinto grado en los coeficientes de las ecuaciones diferenciales y las condiciones $a_2'' - b_3'' = 0$, si sustituímos la solución de la primera aproximación en los términos mencionados. Hay que considerar los términos siguientes del quinto grado, que en base de la integral ya mencionada se transforman en términos del tercer grado respecto de x e y :

$$
a_9'x^3 + a_{10}'x^2y + a_{11}'xy^2 + a_{12}'y^3 \qquad \text{y} \qquad b_9'x^3 + b_{10}'x^2y + b_{11}'xy^2 + b_{12}'y^3
$$

donde ahora todos los coeficientes a_9', a_{10}' ... hasta b_{12}' según resulta por las definiciones anteriores son del segundo grado, en cuanto no se anulan por la condición $\eta' = 0$. Realmente sólo los coeficientes a_{10}', b_9' y b_{11}', son distintos de cero, de modo que hay que considerar exclusivamente los coeficientes x^2y, x^3 y xy^2. La substitución de la primera aproximación $x = \alpha$ sen A, $y = \alpha$. cos A produce, entonces :

$$
a_{10}'x^2y = \frac{1}{4}\alpha^3 a_{10}'(\cos A - \cos 3A)
$$

$$
b_9'x^3 = \frac{1}{4}\alpha^3 b_9'(3 \operatorname{sen} A - \operatorname{sen} 3A) \qquad \text{y} \qquad b_{11}'xy^2 = \frac{1}{4}\alpha^3 b_{11}'(\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} 3A)
$$

de modo que resultan contribuciones sólo inhomogéneas. Los términos periódicos del tercer grado ya deducidos por la condición $\eta' = 0$, se reducen a los términos siguientes ; en

$$\frac{dx}{dt}: \quad + \frac{1}{2} a_5'\alpha^2 \operatorname{sen} 2A \qquad \text{y en} \qquad -\frac{dy}{dt}: \quad -\frac{1}{2} b_4'\alpha^2 \cos 2A + \frac{1}{2} b_6'\alpha^2 \cos 2A$$

Los términos del quinto grado que resultan de los dos grupos

$$a_4'x^2 + a_5'xy + a_6'y^2 \qquad \text{y} \qquad b_4'x^2 + b_5'xy + b_6'y^2$$

originan, después de la substitución de $x = x_1 + x_3$; é $y = y_1 + y_3$, de los términos siguientes, considerando nuevamente $\eta' = 0$:

$$\text{en } \frac{dx}{dt}: \quad a_5'(x_1 y_3 + y_1 x_3) \qquad \text{y en} \qquad -\frac{dy}{dt}: \quad 2b_4'x_1x_3 + 2b_6'y_1 \cdot y_3,$$

de tal modo que primeramente tenemos que representar los términos x_3 e y_3, usando la reducción ya considerada de todos los coeficientes respecto de $\eta' = 0$. Entonces la segunda solución de las ecuaciones diferenciales se reduce a los términos:

$$(113) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{d}{dt}(x_1+x_3) = a_3'(y_1+y_3) + a_5'(x_1+x_3)(y_1+y_3) \\ -\frac{d\eta}{dt} &= -\frac{d}{dt}(y_1+y_3) = b_2'(x_1+x_3) + b_4'(x_1+x_3)^2 + b_6'(y_1+y_3)^2 \end{aligned} \right.$$

donde los coeficientes a_5', b_4', y b_6', son del primer grado, pero a_3' y b_2' del grado cero; los primeros coeficientes resultan por ello términos del tercer grado por medio de los términos:

$$a_5'x_1y_1 = \frac{1}{2} a_5'\alpha^2 \operatorname{sen} 2A$$

$$b_4'x_1^2 = \frac{1}{2} b_4'\alpha^2 - \frac{1}{2} b_4'\alpha^2 \cos 2A$$

$$b_6'y_1^2 = \frac{1}{2} b_6'\alpha^2 + \frac{1}{2} b_6'\alpha^2 \cos 2A$$

ya que han sido consideradas las partes constantes de estos términos en b_1'' y a_1''. Pero, por anularse en las fórmulas los términos a_4', a_6' y b_5' por ser $\eta' = 0$, las ecuaciones se reducen a:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_3''y + s_1'' \operatorname{sen} 2A \\ -\frac{dy}{dt} &= b_2''x + c_2'' \cos 2A \end{aligned} \right\} \quad \text{donde} \quad \left\{ \begin{aligned} s_1'' &= \frac{1}{2} a_5'\alpha^2 = 3^{\text{er}} \text{ grado} \\ c_1'' &= -\frac{1}{2}(b_4' - b_6')\alpha^2 = 3^{\text{er}} \text{ grado} \end{aligned} \right.$$

y donde los coeficientes a_5', b'_4 y b_6' son proporcionales al parámetro ξ'. La solución de las últimas ecuaciones ha sido desarrollada anteriormente (Form. 104), etc.

Respecto a la identificación de los coeficientes resulta, en este caso de $n = 2$.

(113a) $\qquad C_1 = S_2 = 0, \qquad$ además : $S_1 = s_1'' = \frac{1}{2}\alpha^2 a's, \qquad C_2 = c_2'' = \frac{1}{2}\alpha^2(b_8' - b_4')$

de tal modo que es: $\gamma_2' = \sigma_1' = 0 \quad$ y $\quad \gamma_1' = -\frac{1}{3s}(2S_1 - C_2), \qquad \sigma_1' = -\frac{2}{3s}(-S_1 + C_2)$ donde hemos

sustituído, en la primera aproximación satisfactoria $s = a_3'' = b_2''$. De esto resulta la solución total correspondiente, hasta el tercer grado inclusive, siempre considerando que $\eta' = 0$:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + x_3 = \alpha \operatorname{sen} A + \gamma_1' \cos 2A \\ y &= y_1 + y_3 = \alpha \cos A + \sigma_2' \operatorname{sen} 2A \end{aligned}\right\}$$

donde : $\xi = e \operatorname{sen} \tilde{\omega} = x_1 + x_3 + \Delta x\,; \qquad \eta = e \cos \tilde{\omega} = y_1 + y_3$.

En consecuencia ahora podemos pasar a la deducción de los términos del quinto grado, considerando primero los términos en las ecuaciones anteriores relativas a : $\frac{d\xi}{dt}$ y $-\frac{d\eta}{dt}$, es decir : $a_5'(x_1y_3 + y_1x_3)$ en $\frac{d\xi}{dt}$ y $2b_4'x_1x_3 + 2b_6'y_1y_3$ en $-\frac{d\eta}{dt}$, de modo que resulta, sustituyendo las soluciones respecto a : x_1, x_3, y_1 e y_3 : $a_5'(x_1y_3 + y_1x_3) = \frac{1}{2}\alpha a_5'[\sigma_2'(\cos A - \cos 3A) + \gamma_1'(\cos A + \cos 3A)]$, $2b_4'x_1x_3 + 2b_6'y_1y_3 = \alpha[b_4'\gamma_1'(\operatorname{sen} 3A - \operatorname{sen} A) + b_6'\sigma_2'(\operatorname{sen} 3A + \operatorname{sen} A)]$ se ve que aparecen acá, por primera vez, también los términos de resonancia respecto de $\cos A$ y $\operatorname{sen} A$, conviniendo llevar las expresiones anteriores a la forma siguiente :

$$\text{pars}\ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\alpha a'_5(\sigma_2' + \gamma_1')\cos A + \frac{1}{2}\alpha a_5'(\gamma_1 - \sigma_2)\cos 3A$$

$$\text{pars} - \frac{dy}{dt} = \alpha(-b_4'\gamma_1' + b_6'\sigma_2')\operatorname{sen} A + \alpha(b_4'\gamma_1' + b_6'\sigma_2')\operatorname{sen} 3A$$

A estos términos se suman aun los términos del quinto grado, los que ya hemos deducido anteriormente y tendrán pues, ordenados según los términos de resonancia que aparecen aquí también, la forma siguiente :

$$\text{pars}\ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{4}a_{10}'\alpha^3 \cos A - \frac{1}{4}a_{10}'\alpha^3 \cos 3A$$

$$\text{pars}\left(-\frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{3}{4}b_9' + \frac{1}{4}b_{11}'\right)\alpha^3 \operatorname{sen} A + \left(\frac{1}{4}b_{11}' - \frac{1}{4}b_9'\right)\alpha^3 \operatorname{sen} 3A.$$

Primeramente buscaremos las soluciones particulares que corresponden a los términos generales, en este caso al argumento 3A. Ya que la expresión de $\frac{dx}{dt}$ en los dos grupos de términos inhomogéneos, contiene sólo un término respecto a $\cos 3A$, e $-\frac{dy}{dt}$ sólo un término respecto a $\operatorname{sen} 3A$, hay que substituir según las designaciones en las ecuaciones normales tratadas anteriormente : $S_1 = C_2 = 0$, y además :

$$\mathrm{C}_1 = -\frac{1}{4} a_{10}' \alpha^3 + \frac{1}{2} \alpha a_5' (\gamma_1' - \sigma_2'), \qquad \mathrm{S}_2 = \frac{1}{4} (b_{11}' - b_9') \alpha^3 + \alpha (b_4' \gamma_1' + b_6' \sigma_2').$$

De ello resulta según las fórmulas deducidas anteriormente en el caso de $n=3$:

$$\sigma_2' = \gamma_1' = 0 \quad \text{y} \quad \gamma_2' = \frac{1}{8s}(\mathrm{C}_1 + 3\mathrm{S}_2), \qquad \sigma_1' = \frac{1}{8s}(3\mathrm{C}_1 + \mathrm{S}_2)$$

de modo que obtenemos definitivamente la expresión :

$$(114) \qquad \left.\begin{aligned} x &= x_1 + x_3 + x_5 = \alpha \operatorname{sen} \mathrm{A} + \gamma_1' \cos 2\mathrm{A} + \sigma_1' \operatorname{sen} 3\mathrm{A} \\ y &= y_1 + y_3 + y_5 = \alpha \cos \mathrm{A} + \sigma_2' \operatorname{sen} 2\mathrm{A} + \gamma_2' \cos 3\mathrm{A} \end{aligned}\right\}$$

Los términos de resonancia relativos a cos A y sen A que aparecen aquí, por primera vez, son los siguientes, según cálculos anteriores :

$$\left\{\begin{aligned} &\text{pars}\ \frac{dx}{dt} = \mathrm{C}_1{}^1 \cos \mathrm{A} \\ &\text{pars}\left(-\frac{dy}{dt}\right) = \mathrm{S}_2{}^1 \operatorname{sen} \mathrm{A} \end{aligned}\right. \quad \text{donde} \quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{C}_1{}^1 &= \frac{1}{2}\alpha a_5' (\sigma_2' + \gamma_1') + \frac{1}{4}\alpha^3 a_{10}' \\ \mathrm{S}_2{}^1 &= \alpha (b_6' \sigma_2' - b_4' \gamma_1') + \alpha^3 \left(\frac{3}{4} b_9' + \frac{1}{4} b_{11}'\right) \end{aligned}\right.$$

El índice superior 1, se refiere al caso de $n=1$, los coeficientes σ_2', γ_1' ya se fijaron anteriormente, asímismo los coeficientes S_1 y C_2, de los cuales dependen σ_2', γ_1'. Siendo en nuestro caso especial los coeficientes $\mathrm{S}_1{}^1 = 0$ y $\mathrm{C}_2{}^1 = 0$, los coeficientes de la solución inhomogénea se reducen a los valores siguientes : $f_1 = b_3'' \cdot \mathrm{C}_1{}^1$; $f_2 = -s(\mathrm{S}_2{}^1 + \mathrm{C}_1{}^1)$ de modo que : $g_1 = \frac{1}{25} b_3'' \mathrm{C}_1{}^1 = 0$, ya que : $b_3'' = a_2'' = 0$, por ser : $b_3' = a_2' = 0$ y además : $g_2 = \frac{1}{2}(\mathrm{S}_2{}^1 + \mathrm{C}_1{}^1) = 5°$ grado y orden 1, de tal modo que : $g_2 t = st \cdot \frac{g_2}{s} = s \cdot t \cdot g_2'$ donde : $g_2' = \frac{g_2}{s} = 5°$ grado, pero de orden cero, ya que $s =$ grado 0 y primer orden, mientras que el coeficiente $s \cdot t =$ grado 0 y orden 1. Respecto de y, ponemos :

$$h_1 = -\frac{s}{a_3''} g_2 = -g_2 \qquad \text{y} \qquad h_2 = -\frac{a_2''}{a_3''} g_2 = 0,$$

ya que $a_2'' = 0$, de manera que por ello x sólo contiene $g_2 t \cdot \cos \mathrm{A}$ e y sólo $h_1 t \operatorname{sen} \mathrm{A}$, donde $h_1 = 5°$ grado y orden uno, entonces $h_1 t = s \cdot t \cdot h_1'$, donde $h_1' = 5°$ grado y orden cero. Además, en los términos periódicos, el grado y el orden de los coeficientes es el siguiente :

$\frac{s}{a_3} \alpha = 1^{\text{er}}$ grado y orden 0 ; $\frac{g_2}{a_3} = 5°$ grado y orden 0 ; $\frac{\mathrm{C}_1}{a_3} = 5°$ grado y orden 0

$\frac{a_2}{a_3} \alpha = 0$, ya que $\gamma' = 0$, $\frac{g_1}{a_3} = 5°$ grado y orden 0 ; $\frac{\mathrm{S}_1}{a_3} = 5°$ grado y orden 0.

Por eso los términos-Poisson de nuestra solución son del 5° grado y el primer orden, mientras que los términos periódicos sucesivos de la solución son del grado 1, 3, 5, etc. y del orden cero, con los períodos $P = \frac{2\pi}{s}, \frac{2\pi}{2s}$, etc.

Ahora conviene deducir la constante de integración α contenida en todas partes, y al mismo tiempo también la constante β de la fase. Substituyendo en las expresiones relativas a nuestras soluciones $t=0$, quedan los términos siguientes, siempre con $\eta'=0$:

$$\xi_0 = x_0 + \Delta x = \alpha \operatorname{sen}\beta + \Delta x + \gamma_1' \cos 2\beta + \sigma_1' \operatorname{sen} 3\beta$$
$$\eta_0 = y_0 = \alpha \cos\beta + \sigma_2' \operatorname{sen} 2\beta + \gamma_2' \cos 3\beta + \gamma \cos\beta + \sigma \operatorname{sen}\beta$$

al mismo tiempo hay que fijar la ecuación que determina la magnitud Δx, es decir:

$$b_1'' = 0 = b_1' + \frac{1}{2} b_4'\alpha^2 + \frac{1}{2} b_6'\alpha^2$$

donde $b_4' \neq 0$, $b_6' \neq 0$, si $\eta'=0$; la magnitud b_1' contiene nuestra incógnita Δx, siendo por nuestra representación anterior de b_1', si $\eta'=\Delta y=0$ y por ello: $c^2=\alpha^2+(\Delta x)^2$:

$$b_1' = b_1 + b_2 \Delta x + b_4 (\Delta x)^2 + \ldots$$

donde sólo los dos primeros términos del segundo miembro son del primer grado, todos los otros del grado tres y más aun. Los términos del tercer grado contienen Δx explícitamente, y además implícitamente a c^2 y c^4, de modo que hay que deducir Δx por aproximaciones sucesivas, después de haber calculado también α por medio de las condiciones iniciales, es decir en base a las condiciones:

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= e_0 \operatorname{sen}(\tilde{\omega}_0) = \alpha \operatorname{sen}\beta + \Delta x + \text{términos del tercer grado} \\ \eta_0 &= e_0 \cos(\tilde{\omega}_0) = \alpha \cos\beta + \text{términos del tercer grado} \end{aligned}\right\}$$

donde los términos del tercer grado fueron fijados con anterioridad. Hay que considerar que la longitud del perihelio $(\tilde{\omega}_0)$ se cuenta, por ser $\eta' = 0$, desde la longitud $P_0 = \tilde{\omega}' \mp 90°$, si $\tilde{\omega}'$ y $\tilde{\omega}_0$ se consideran desde el punto vernal, de modo que de ello resulta ser: $(\tilde{\omega}_0) = \tilde{\omega}_0 - P = \omega_0 - \tilde{\omega}_0' \pm 90°$. De aquí se tiene primeramente:

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 = (\xi_0 - \Delta x - 3^{er}\,\text{grado})^2 \\ + (\eta_0 - 3^{er}\,\text{grado})^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{y} \quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{sen}\beta &= \frac{1}{\alpha}(\xi_0 - \Delta x - 3^{er}\,\text{grado}) \\ \cos\beta &= \frac{1}{\alpha}(\eta_0 - 3^{er}\,\text{grado}) \end{aligned}\right.$$

que hay que sustituir en c^2 y c^4 en la expresión relativa a b_1' y asimismo en la ecuación $b_1'' = 0$. Con esto se obtiene la ecuación definitiva para determinar Δx, y por la sustitución de pocas aproximaciones resulta entonces el valor final de Δx hasta los términos del quinto grado inclusive.

Corresponde ahora a fin de ampliar la teoría de las perturbaciones seculares más allá de los términos del grado más bajo, exponer un criterio más riguroso respecto a las condiciones de la libración, ya que la aplicación al sistema de los planetoides demostró que surge tal rigor. Aplicando el criterio anterior, es decir considerando sólo los términos lineales respecto a ξ, η ó x e y, respectivamente, resulta que entre los casi mil quinientos planetoides únicamente cuarenta y dos satisfaçen la condición de libración, suponiendo fijo el perihelio de Júpiter. Ampliando el cálculo a un perihelio movible de Júpiter, este número se reduce a sólo cinco mientras que, por otra parte, el hecho de la acumulación de los perihelios entorno al perihelio de Júpiter está constatado por la estadística y no puede ser considerado como fenómeno casual. Además la posición de los perihelios de casi exactamente la mitad de todos los planetoides está en una distancia de sólo $\pm 60°$ al perihelio de Júpiter, y según la planilla existente en la página (5), tiene lugar una disminución rápida de la acumulación de los dos lados de los límites fijados anteriormente. Resulta por eso que la teoría según los cálculos anteriores en base a una primera aproximación no es capaz de explicar los hechos, en cuanto que en la mayoría de los casos, no tienen lugar movimientos estables de libración, sino con preferencia movimientos inestables de rotación de los perihelios ; por ello el hecho de la acumulación momentánea de los perihelios en torno al perihelio de Júpiter hay que explicarla de otro modo y no por la suposición anterior de que la acumulación mencionada se debiera a la atracción secular de Júpiter, salvo formando un criterio más severo en cuanto a los términos de grado mayor para salvar dicha suposición.

Por esto, mediante una investigación más exacta del problema vamos a realizar primero una representación más aguda de la teoría, considerando los términos de mayor graduación que los términos del primer grado en las ecuaciones diferenciales, es decir, términos de tercer grado, en la dedución del criterio. Tales términos se refieren no sólo a la parte Δx en la solución $\xi = x + \Delta x$, sino también a los términos periódicos de x, y asimismo de y, en $\eta = y + \Delta y$, donde $\Delta y = 0$. Los términos del tercer grado de Δx, ya han sido deducidos y se encuentran en la ecuación que define Δx por la condición de que debe ser : $b_1'' = 0$, de modo que tenemos : $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_3$, definiendo los índices el grado del término. Respecto a los términos periódicos del tercer grado, resultaron los términos siguientes : $\delta x_3 = \gamma_1^0 \cos 2\Lambda$ y $\delta y_3 = \sigma_2^0 \operatorname{sen} 2\Lambda$, siendo los coeficientes

$$\gamma_1^0 = -\frac{1}{3s}(2S_1 - C_2) \qquad \text{y} \qquad \sigma_2^0 = -\frac{1}{3s}(S_1 + 2C_2)$$

de modo que la solución completada, considerando que $\Delta y = 0$, es la siguiente :

$$(115) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= e \operatorname{sen} \tilde{\omega} = x + \Delta x = \alpha \operatorname{sen} \Lambda + \Delta x + \gamma_1^0 \cos 2\Lambda \\ \eta &= e \cos \tilde{\omega} = y + \Delta y = \alpha \cos \Lambda + \sigma_2^0 \operatorname{sen} 2\Lambda \end{aligned} \right.$$

donde : $\Lambda = s \, . \, t + \beta$ y $\tilde{\omega}$ se cuenta a partir del nuevo origen. Para obtener ahora la condición relativa a la rotación o libración, respectivamente, aplicamos, como antes, los factores correspondientes para obtener las ecuaciones relativas a la diferencia $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'$, de modo que :

$$(116) \qquad \left. \begin{aligned} e \operatorname{sen}(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') &= Z = \alpha \operatorname{sen}(\Lambda - \tilde{\omega}') + \Delta x \cos \tilde{\omega}' + \gamma_1^0 \cos \tilde{\omega}' \cos 2\Lambda - \sigma_2^0 \operatorname{sen} \tilde{\omega}' \operatorname{sen} 2\Lambda \\ e \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') &= N = \alpha \cos(\Lambda - \tilde{\omega}') + \Delta x \operatorname{sen} \tilde{\omega}' + \gamma_1^0 \operatorname{sen} \tilde{\omega}' \cos 2\Lambda + \sigma_2^0 \cos \tilde{\omega}' \operatorname{sen} 2\Lambda \end{aligned} \right\}$$

Por el coeficiente $\operatorname{tg}(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') = \frac{Z}{N}$ resulta entonces como suposición de un movimiento de libración de la diferencia de los perihelios, que N no puede cambiar el signo; considerando todavía que $\tilde{\omega}' = \pm 90°$, el coeficiente se reduce a:

$$(117) \qquad \operatorname{tg}(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') = \frac{Z_0}{N_0}, \qquad \text{donde:} \quad \left.\begin{array}{l} Z_0 = \alpha \operatorname{sen}(A - \tilde{\omega}') \mp \sigma_2{}^0 \operatorname{sen} 2A \\ N_0 = \pm \Delta x + \alpha \cos(A - \tilde{\omega}') \pm \gamma_1{}^0 \cos 2A \end{array}\right\}$$

Por eso tiene lugar una libración si $|\Delta x| > \alpha + |\gamma_1{}^0|$, donde hay que observar que siempre $a > 0$, y simultáneamente resulta β en base a las ecuaciones que valen para $t = 0$:

$$(117a) \qquad \left.\begin{array}{l} \alpha \operatorname{sen} A_0 = \alpha \operatorname{sen} \beta = e_0 \operatorname{sen} \tilde{\omega}_0 - \Delta x - \gamma_1{}^0 \cos 2\beta \\ \alpha \cos A_0 = \alpha \cos \beta = e_0 \cos \tilde{\omega}_0 - \sigma_2{}^0 \operatorname{sen} 2\beta \end{array}\right\}$$

aplicando un cálculo sucesivo de aproximación, ya que $\gamma_1{}^0$ y $\sigma_2{}^0$ son términos del tercer grado. Por esto resulta,

$$(117b) \qquad \begin{array}{l} \alpha^2 = e_0{}^2 - 2e_0 \operatorname{sen} \tilde{\omega}_0 \Delta x + (\Delta x)^2 - 2\gamma_1{}^0 \cos 2\beta\,(e_0 \operatorname{sen} \tilde{\omega}_0 - \Delta x) + \\ \qquad + (\gamma_1{}^0)^2 \cos^2 2\beta - 2\sigma_2{}^0 \operatorname{sen} 2\beta e_0 \cos \tilde{\omega}_0 + (\sigma_2{}^0)^2 \operatorname{sen}^2 2\beta \end{array}$$

y de la otra parte resulta, en base a la condición de libración: $\alpha < |\Delta x| - |\gamma_1{}^0|$ de manera que por ello, eliminando el término $(\Delta x)^2$ se obtiene la nueva condición completa de libración:

$$(118) \qquad \begin{array}{l} e^2{}_0 - 2e_0 \Delta x \operatorname{sen} \tilde{\omega}_0 - 2\gamma_1{}^0 \cos 2\beta\,(e_0 \operatorname{sen} \tilde{\omega}_0 - \Delta x) - 2\sigma_2{}^0 \operatorname{sen} 2\beta \,.\, e_0 \cos \tilde{\omega}_0 + \\ \qquad + (\gamma_1{}^0)^2 \cos^2 2\beta + (\sigma_2{}^0)^2 \operatorname{sen}^2 2\beta \} < (\gamma_1{}^0)^2 - 2\,|\Delta x|\,|\gamma_1{}^0| \end{array}$$

en lugar de la condición primera anterior: $e_0 < 2\Delta x \cos(\tilde{\omega}_0 - \tilde{\omega}')$ donde todavía hay que sustituir $\tilde{\omega}' = 90°$; esta primera condición resulta enseguida por la ecuación más completa, prescindiendo de los términos del tercer grado.

Finalmente, vamos a ampliar más los fundamentos y condiciones, considerando la excentricidad y la longitud del perihelio de Júpiter como función del tiempo, motivado por la atracción de todos los otros planetas. En este caso las ecuaciones diferenciales son las siguientes, considerando sólo los términos lineales en ξ y η y agregando los términos referentes a la atracción secular por todos los grandes planetas, cuyos coeficientes hay que sacar de la teoría secular de los mismos (véase p. e. Charlier *Mechanik des Himmels*) tomo 1, pág. 415):

$$(119) \qquad \left.\begin{array}{l} \dfrac{d\xi}{dt} = a_3\eta - \sum\limits_{r=1}^{n} \cos(s_r t + \beta_r) \\ -\dfrac{d\eta}{dt} = b_2\xi - \sum\limits_{r=1}^{n} \operatorname{sen}(s_r t + \beta_r) \end{array}\right\}$$

Sacamos las magnitudes auxiliares necesarias al cálculo numérico de *Hülfstafeln zur Berechnung der säkularen Störungen der kleinen Planeten*, de G. Norén y S. Raab, *Meddelanden fran Lunds Observatorium*, Serie II, núm. 2; además de las tablas de Charlier, *Mechanik des Himmels*, págs. 387 y 294. Por medio de la integración de las ecuaciones (119) resultan las soluciones:

(120)
$$\left.\begin{aligned}\xi &= e \operatorname{sen} \omega = \alpha \operatorname{sen}(st+\beta) + \sum_{r=1}^{n} \alpha_r \operatorname{sen}(s_r t+\beta_r)\\ \eta &= e \cos \omega = \alpha \cos(st+\beta) + \sum_{r=1}^{n} \alpha_r \cos(s_r t+\beta_r)\end{aligned}\right\}$$

donde $\alpha_r = \dfrac{E_r}{s-s_r}$ y E_r, se obtienen mediante la tabla mencionada.

El índice $r=7$, caracteriza, por medio de α_7, β_7 y s_7 el movimiento secular del perihelio del gran planeta Júpiter (Charlier, I, pág. 389). Por eso, por la deducción de la condición relativa a una libración con Júpiter, hay que fijar el argumento $\tilde{\omega}-(s_1 t+\beta_7)$, aplicando los multiplicadores correspondientes al sistema anterior para ξ y η y añadiendo los términos del tercer grado obtenidos anteriormente, respecto de γ_1^0 y σ_2^0, resultando las expresiones siguientes:

(121)
$$\begin{aligned}e \operatorname{sen}(\tilde{\omega}-s_7 t-\beta_7) = Z' &= \alpha \operatorname{sen}[(s-s_7)t+\beta-\beta_7] + \textstyle\sum' \alpha_i \operatorname{sen}[(s_i-s_7)t+\beta_1-\beta_7]\\ &+ \gamma_1^0 \cos 2(st+\beta)\cos(s_7 t+\beta_7) - \sigma_2^0 \operatorname{sen} 2(st+\beta)\operatorname{sen}(s_7 t+\beta_7)\\ e \cos(\tilde{\omega}-s_7 t-\beta_7) = N' &= \alpha \cos[(s-s_7)t+\beta-\beta_7] + \alpha_7 + \textstyle\sum' \alpha_i \cos[(s_i-s_7)t+\beta_i-\beta_i]\\ &+ \gamma_1^0 \cos[2(st+\beta)]\operatorname{sen}(s_7 t+\beta_7) + \sigma_2^0 \operatorname{sen}[2(st+\beta)]\cos(s_7 t+\beta)\end{aligned}$$

de modo que $\operatorname{tg}(\tilde{\omega}-s_7 t-\beta_7) = \dfrac{Z'}{N'}$, de donde resulta siempre una libración en torno al perihelio de Júpiter, si el denominador N' se mantiene distinto de cero, es decir cuando:

(122)
$$\alpha_7 > \alpha + \textstyle\sum' |\alpha_i| + |\gamma_1^0| + |\sigma_2|,$$

indicando el apóstrofe del signo suma ($\sum'$) que debe suprimirse el término del índice 7, como antes se anticipó. En el caso de un perihelio fijo de Júpiter, es decir cuando $s_7=0$, corresponde el término en α_7 al término agregado antes a Júpiter y proporcional a e' o ξ' respectivamente. Por esto la condición anterior se redujo a la desigualdad $\alpha_7 > \alpha$. Según la magnitud numérica de los coeficientes de nuestra nueva ecuación de condición, los términos agregados pueden decidir, en muchos casos, la posibilidad de una libración o rotación del perihelio de un planetoide en torno al perihelio de Júpiter. Por tal motivo vamos a establecer las fórmulas necesarias a la deducción de las trascendentes de Laplace respecto a los términos agregados.

Las fórmulas correspondientes a $\gamma_1^0 = -\dfrac{1}{3s}(2S_1-C_2)$ y $\sigma_2^0 = -\dfrac{1}{3s}(-S_1+2C_2)$ están contenidas en las definiciones anteriores, como asimismo las definiciones respecto de S_1 y S_2. Además, los coeficientes a_5 asterisco, b_4 asterisco y b_6 están definidos por las fórmulas (98) y finalmente los coeficientes: a_5', b_4' y b_6' por las fórmulas:

$$a_5' = 2D_4\xi' f; \qquad b_4' = 3D_4\xi' f \qquad \text{y} \qquad b_6' = D_4\xi' f$$

donde D_4 es el coeficiente ya anteriormente definido de: e^3, $e'\cos(\omega'-\omega)$ (ver fórm. 2); además

$f = \frac{k^2 m'}{na^2} = \frac{nam'}{1+m}$; el coeficiente D_4 es explicitamente: $D_4 = -\frac{1}{8}(2A_2^1 + 9A_3^1 + 6A_4^1)$

Según el tomo 10, página 30, de los *Anales del Observatorio de París*, los coeficientes A_k^i están definidos por:

$$a'A_2^i = \frac{1}{2} b_2^i; \qquad a'A_3^i = \frac{1}{3!} b_3^i; \qquad a'A_4^i = \frac{1}{4!} b_4^i;$$

de modo que se necesitan los coeficientes siguientes: b_2^1, b_3^1 y b_4^1 cuyo cálculo se realiza según la página 24 de los citados *Anales*, en base a b^0 y b^1, siendo primero: $(1-\alpha^2) b_1^1 = \alpha \,.\, b^0 - b^1$, de donde sigue:

$$(1-\alpha^2) b_2^1 = 3\alpha^2 \,.\, b_1^1 - b_1^1 + b^1$$

(123) de modo que b_3^1 resulta por medio de:

$$(1-\alpha^2) b_3^1 = \alpha^2 (7b_2^1 + 9b_1^1) - 3b_2^1,$$

de donde finalmente se tiene b_4^1 por la fórmula:

$$(1-\alpha^2) b_4^1 = \alpha^2 (10b_3^1 + 23b_2^1 + 9b_1^1) - 4b_3^1.$$

Los valores iniciales de b^0 y b^1 resultan en forma numérica por las expresiones calculadas por Le Verrier como funciones de α, página 18, tomo X, de los *Anales* citados. Se pueden calcular todos los coeficientes en base a la representación general de todas las transcendentes de Laplace mediante las transcendentes β_n^s de Gylden, según mi comprobación en *Astronomische Nachrichten*, tomo 166, número 3974. Esta representación supera mucho a la de Le Verrier, por su exactitud, ya que las fórmulas de Le Verrier son fórmulas diferencias, mientras que la representación por las β_n^s está compuesta sólo por sumandos positivos; además estos coeficientes β_n^s ya han sido calculados por Hans Masal, en el tomo 4 de *Jakttagelser* del Observatorio de Estocolmo, en un intervalo conveniente, de tal modo que en el intervalo de $\alpha = 0.30$ hasta 0.82, que corresponde al sistema de los planetoides, pueden calcularse en forma rápida y segura los coeficientes necesarios de Laplace.

Finalmente añadimos, para que sea más exacta la condición relativa a la libración o a la rotación, respectivamente, un término que resulta de la representación de las magnitudes x e y, considerando que el exponente característico s, sólo en la primera aproximación, sea igual a: $s = a_3 = b_2$, siendo a_3 y b_2 magnitudes del primer grado por lo menos. En forma más rígida, la primera solución es: $x = \alpha$ sen A; e $y = \alpha \cdot \frac{s}{a_3} \cdot \cos A - \alpha \frac{a_2}{a_3}$ sen A, donde en el caso de $\eta' = 0$, el coeficiente $a_2 = 0$, de modo que el segundo término de y se elimina, mientras que el coeficiente del primer término de y se reduce a: $\frac{s}{a_3} = 1 + \varepsilon^2$, donde el término complementario ε^2 según los resultados anteriores, es del segundo grado por lo menos. De aquí que la magnitud y puede ser descompuesta en está forma: $y = \alpha \cos A + \alpha\varepsilon^2 \cos A$, donde el término complementario es del tercer grado. Resta por esto la deducción de ε^2 para sustituirlo en la ecuación de condición relativa a la libración, es decir, hay que agregar en lugar de ε^2 a las funciones

$$Z = e \text{ sen } (\tilde{\omega} - s_7 t - \beta_7) \quad \text{y} \quad N = e \cos (\tilde{\omega} - s_7 t = \beta_7)$$

de acuerdo a los desarrollos anteriores de $e\cos\tilde\omega$ y $e \operatorname{sen}\tilde\omega$ a las funciones mencionadas Z y N, las siguientes magnitudes del tercer grado:

$$Z = -\alpha\varepsilon^2 \cos A \operatorname{sen}(s_7 t + \beta_7) \quad \text{y} \quad N = +\alpha\varepsilon^2 \cos A \cos(s_7 t + \beta_7)$$

Por esto resulta la condición ampliada relativa a la libración:

$$\alpha_7 > \alpha + \textstyle\sum'\alpha_i + |\gamma_1^0| + |\sigma_2^0| + \alpha\varepsilon^2.$$

El coeficiente ε^2 que todavía tenemos que calcular, lo determinamos de la siguiente manera: según la definición, el coeficiente característico s está fijado por:

$$s^2 = a_3 b_2 - b_3 a_2 = a_3 b_2, \quad \text{ya que:} \quad a_2 = b_3 = 0, \quad \text{si} \quad \eta' = 0.$$

Pongamos:

$$a_3 = a_3^0 + \Delta a_3 \quad \text{y} \quad b_2 = b_2^0 + \Delta b_2, \quad \text{donde} \quad a_3^0 \quad \text{y} \quad b_2^0$$

fijan las partes del grado cero, de manera que las partes complementarias Δa_3 y Δb_2, fijan las de grado mayor al segundo grado, por lo menos. Desarrollando el exponente s según potencias de Δa_3 y Δb_2, resulta, poniendo todavía:

$$a_3^0 = b_2^0 = s_0, \qquad s = s_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta b_2}{s_0} + \frac{1}{2}\frac{\Delta a_3}{s_0}\right)$$

de modo que:

$$\frac{s}{a_3} = 1 + \varepsilon^2 = 1 + \frac{1}{2s_0}(\Delta b_2^0 - \Delta a_3)$$

dentro de los términos hasta el segundo grado inclusive. Por esto ε^2 se define como: $\varepsilon^2 = \frac{1}{2s_0}(\Delta b_2 - \Delta a_3)$ donde la diferencia $\Delta b_2 - \Delta a_3$ satisface, en base a nuestra representación de la función perturbadora, a la siguiente expresión, hasta el segundo grado inclusive: $\Delta b_2 - \Delta a_3 = 4f \,.\, D'' \,.\, \xi'^2$, cuando $\eta' = 0$.

Las mismas meditaciones valen, si pasamos ahora desde los coeficientes a_3 y b_2, por medio del factor $\sqrt{1-e^2}$ de nuestras ecuaciones diferenciales y además, por la sustitución de la primera solución aproximada en los términos del segundo grado o más, a los coeficientes a_3'' y b_2''.

§ 4. LA INFLUENCIA DE LOS TÉRMINOS-INCLINACIÓN EN LA INTEGRACIÓN DE LAS VARIABLES-EXCENTRICIDAD

Agregando a las anteriores ecuaciones diferenciales de las variables-excentricidad ξ y η las variables-inclinación dependientes de las inclinaciones orbitales, es conveniente considerar al principio sólo los términos lineales respecto a las variables-inclinación p y q, conjuntamente con los términos lineales en ξ y η. Entonces obtenemos las ecuaciones siguientes:

(124)
$$\frac{d\xi}{dt} = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + c_1p + c_2q, \qquad \frac{dp}{dt} = a_1' + a_2'p + a_3'q + c_1\xi + c_2\eta$$
$$-\frac{d\eta}{dt} = b_1 + b_2\xi + b_3\eta + d_1p + d_2q, \qquad -\frac{dq}{dt} = b_1' + b_2'p + b_3'q + f_1\xi + f_2\eta$$

Antes de homogeneizar estas ecuaciones hay que constatar el grado de los nuevos coeficientes de las incógnitas. Primero destacamos que los términos relativos a ξ, η, ξ' y η', mezclados con las nuevas variables p, q, p' y q' son del grado 4 por lo menos, referente a la parte secular de la función perturbadora. Los coeficientes obtienen, después de algunos cálculos intermediarios, los valores siguientes, si fijamos primero los términos complementarios en las ecuaciones diferenciales anteriores :

(124a)
$$c_1 = f\frac{\partial^2 R}{\partial\eta\partial p} = -2fJ_7\eta' p' + \frac{1}{2}fJ_9(\eta' p - q'\xi') - \frac{1}{2}fJ_{11}\xi' q'$$
$$c_2 = f\frac{\partial^2 R}{\partial\eta\partial q} = -2fJ_7\eta' q' - \frac{1}{2}fJ_9(\eta' q' + \xi' p') + \frac{1}{2}fJ_{11}\xi' p'$$
$$d_1 = f\frac{\partial^2 R}{\partial\xi\partial p} = -2fJ_7\xi' p' - \frac{1}{2}fJ_9(\xi' p' + \eta' q') + \frac{1}{2}fJ_{11}\eta' q'$$
$$d_2 = f\frac{\partial^2 R}{\partial\xi\partial q} = -2fJ_7\xi' q' + \frac{1}{2}fJ_9(\xi' q' - \eta' p') - \frac{1}{2}fJ_{11}\eta' p'$$

donde todos los coeficientes son las segundas derivadas de la función perturbadora y del grado 2 por lo menos. Respecto a los coeficientes de los términos principales en los dos sistemas (124), es decir : a_2, a_3, b_2, b_3, a'_2, a_3', b_2' y b_3' las partes independientes de p' y q' de una parte, y de ξ' y η' de otra parte, ya han sido definidas, de modo que ahora sólo hay que constatar las partes complementarias Δa_2, Δa_3, Δb_2, Δb_3, $\Delta a_2'$, $\Delta a_3'$, $\Delta b_2'$, $\Delta b_3'$. Resultan las siguientes definiciones respecto a estas partes de los coeficientes :

(124b)
$$\Delta a_2 = \Delta\left(f\frac{\partial^2 R}{\partial\eta\partial\xi}\right) = \Delta b_3 = fp'q'J_8, \quad \Delta a_3 = \Delta\left(f\frac{\partial^2 R}{\partial\eta^2}\right) = \frac{1}{2}f(p'^2 + q'^2)J_5 + \frac{1}{2}f(q'^2 - p'^2)J_8$$
$$\Delta b_2 = \Delta\left(f\frac{\partial^2 R}{\partial\xi^2}\right) = \frac{1}{2}f(p'^2 + q'^2)J_5 - \frac{1}{2}f(q'^2 - p'^2)J_8, \quad \Delta a_2' = \Delta\left(f\frac{\partial^2 R}{\partial p\partial q}\right) = \Delta b_3' = \frac{1}{2}fp'q'J_6 + f\xi'\eta' J_{10}$$
$$a_3' = f\frac{\partial^2 R}{\partial q^2} = \frac{1}{4}f[2 - (p'^2 + q'^2)]J_4 + \frac{1}{2}f(\xi'^2 + \eta'^2)J_5 + \frac{1}{4}f(p'^2 + 3q'^2)J_6 + \frac{1}{2}f(\eta'^2 - \xi'^2)J_{10}$$
$$b_2' = f\frac{\partial^2 R}{\partial p^2} = \frac{1}{4}f[2 - (p'^2 + q'^2)]J_4 + \frac{1}{2}f(\xi'^2 + \eta'^2)J_5 + \frac{1}{4}f(q'^2 + 3p'^2)J_6 - \frac{1}{2}f(\eta'^2 - \xi'^2)J_{10}$$
$$b_3' = \Delta a'^2 = 2^\circ \text{ grado.}$$

No contando ya en nuestros cálculos las longitudes de los perihelios desde el punto vernal, sino desde un punto cuya longitud ecliptical es $P_1 = \tilde{\omega}' \mp 90^\circ$, de modo que la nueva longitud del perihelio es $\tilde{\omega}_1' = \pm 90^\circ$, tenemos que contar, también ahora, por la alteración mencionada, las longitudes de los nodos desde el punto fijado. Por eso las nuevas longitudes de los nodos son : $\theta_1' = \theta' - P_1$ y $\theta_1 = \theta - P_1$. Por ser

$\eta'=0$ se eliminan también muchos términos de los coeficientes anteriormente deducidos, sin que sea necesario volver a fijar explícitamente los coeficientes alterados. Los factores de los coeficientes: J_α $(\alpha=4, 5 \ldots 11)$, tienen el significado siguiente como funciones de las transcendentes de Laplace-Le Verrier:

$$(124c) \quad \begin{aligned} &J_4 = -\frac{1}{2}E^0, \quad J_5 = -\frac{1}{4}(E_1^0+E_2^0), \quad J_6 = \frac{1}{2}G_0, \quad J_7 = \frac{1}{8}(-E_0^1+E_2^1), \quad J_8 = \frac{1}{8}(3B_0^1+3B_1^1+B_2^1) \\ &J_9 = \frac{1}{4}(B_0^0-B_1^0-B_2^0), \quad J_{10} = \frac{1}{8}(B_0^1-B_1^1+B_2^1), \quad J_{11} = C_2' = \frac{1}{2}(A_0^1-A_1^1-A_2^1) \end{aligned}$$

Siendo todos los coeficientes c_1, c_2, d_1, d_2, e_1, e_2, f_1 y f_2 de los términos complementarios del 2º grado, los términos complementarios en nuestras ecuaciones diferenciales son del grado tres por lo menos, mientras que los términos principales son del primer grado. Según la lista anterior de los coeficientes, los coeficientes a_3' y b_2' de los términos principales de las ecuaciones relativas a $\frac{dp}{dt}$ y $-\frac{dq}{dt}$ contienen además de los términos del grado 0, también tales del grado dos respecto a ξ', η' como también a p' y q'. Puesto que ahora la forma sólo lineal respecto a ξ, η, p y q ya contiene términos del grado 3 en las ecuaciones diferenciales, es necesario, en rigor, considerar de antemano los términos del grado 2 y 3 respecto a ξ, η, p y q en las ecuaciones diferenciales para $\frac{dx}{dt}$, $-\frac{dy}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$ y $-\frac{dq}{dt}$. Buscando una solución, y aceptando en cada par de ecuaciones, la solución en base a los términos lineales en x, y o p, q respectivamente, resultaría la 2ª aproximación por la substitución de la 1ª aproximación en las ecuaciones diferenciales. De ahí que resultan términos inhomogéneos, en las 4 ecuaciones diferenciales, del mismo período de la primera aproximación, en la que la solución relativa a las variables-excentricidad e -inclinación tiene, como sabemos, el mismo exponente característico s, es decir el mismo período, realizándose el movimiento del perihelio en el sentido positivo y, el del nodo en el sentido negativo, siendo s positivo en el primer caso, pero negativo en el segundo. Por esta igualdad de los períodos de la oscilación libre y forzada resulta por la integración, el origen de términos inestables de Poisson, de la forma: $t \, . \, \mathrm{sen}\, A$ y $t \, . \cos A$, donde $A = st + \beta$. De esta manera simple y formal, se obtiene una solución práctica pura, pero sólo respecto a intervalos de tiempo limitados, y sin poder sacar ninguna consecuencia de mayor alcance. Por otra parte, sabemos, por las investigaciones de Poincaré, en sus *Leçons de Mécanique céleste,* tomo 1, pág. 235, que muy generalmente y considerando todas las potencias de las variables en el desarrollo de la función perturbadora, existe una solución de las ecuaciones seculares de la forma periódica pura. En lo que sigue, vamos a estudiar esta representación periódica por ser nuestro propósito llegar a una representación periódica útil del problema asteroídico de los tres cuerpos.

Pero antes de pasar a esta investigación en el próximo § 5, vamos a informarnos si las ecuaciones diferenciales respecto a ξ, η, p y q, ampliadas a la consideración simultánea de las variables-inclinación o excentricidad respectivamente en su forma lineal, originan en el primer paso una solución periódica o no. A tal efecto realizamos una integración exacta de las ecuaciones diferenciales con respecto a los términos principales. Para simplificar las ecuaciones hay que elegir el punto de la longitud $\tilde{\omega}' \mp 90°$ como punto cero de las longitudes de los perihelios y las de los nodos. Entonces valen las relaciones $\xi' = \pm e'$ y

$\eta' = 0$, de modo que por eso $a_1 = a_2 = b_3 = 0$, de manera que las ecuaciones diferenciales se reducen a las siguientes :

$$(125)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= + a_3\eta + c_1 p + c_2 q \\ -\frac{d\eta}{dt} &= b_1 + b_2\xi + d_1 p + d_2 q \\ \frac{dp}{dt} &= a_1' + a_2' p + a_3' q + e_1\xi + e_2\eta \\ -\frac{dq}{dt} &= b_1' + b_2' p + b_3' q + f_1\xi + f_2\eta \end{aligned}\right.$$

Para hacer homogéneas estas ecuaciones, hay que poner :

$$(125)a \qquad \xi = x + \Delta x, \quad \eta = y + \Delta y, \quad p = p_1 + \Delta p \quad \text{y} \quad q = q_1 + \Delta q,$$

de modo que las nuevas constantes Δx, Δy, Δp y Δq son determinadas por las siguientes ecuaciones :

$$(126)\quad \left\{\begin{aligned} a_3\Delta y + c_1\Delta p + c_2\Delta q &= 0 \\ b_2\Delta x + d_1\Delta p + d_2\Delta q &= -b_1 \\ e_1\Delta x + e_2\Delta y + a_2'\Delta p + a_3'\Delta q &= -a_1' \\ f_1\Delta x + f_2\Delta y + b_2'\Delta p + b_3'\Delta q &= -b_1' \end{aligned}\right.$$

donde hay que observar todavía las relaciones : $a_2' = b'_3 = \dfrac{\partial^2 R}{\partial p \partial q} = 2°$ grado en p', q', prescindiendo de los términos del 4° grado. Respecto al orden de magnitud hay que tomar en cuenta que a_3, b_2, a_3', b_2' son del grado 0, además b_1, a_1', b_1' del grado 1, y a_2', b_3', c_1, c_2, d_1, d_2, e_1, e_2, f_1 y f_2 del grado 2, de suerte que, según la 1ª ecuación de (3), en la 1ª aproximación : $\Delta y = 0$, además, según la 2ª ecuación : $\Delta x = -\dfrac{b_1}{b_2} = 1^{er}$ grado, según la 3ª ecuación : $\Delta q = -\dfrac{a_1'}{a_3'}$, y finalmente según la 4ª ecuación : $\Delta p = -\dfrac{b_1'}{b_2'}$. Además destacamos que respecto a los términos del grado 0 : $a_3' = -a_3$ y $b_2' = -b_2$. Después de la homogenización, las ecuaciones (1) son las siguientes :

$$(127)\qquad \frac{dx}{dt} = a_3 y + e_1 p_1 + c_2 q_1 \qquad -\frac{dy}{dt} = b_2 x + d_1 p_1 + d_2 q_1$$

$$\frac{dp_1}{dt} = a_2' p_1 - a_3 q_1 + e_1 x + e_2 y \qquad -\frac{dq_1}{dt} = -b_2 p_1 + b_3' q_1 + f_1 x + f_2 y$$

con las soluciones : (127*a*) $x = A \,.\, e^{st}$, $y = Be^{st}$ $p = Ce^{st}$ y $q = De^{st}$. Substituyendo estas soluciones en las ecuaciones diferenciales (4), resultan las siguiente 4 ecuaciones (6) para calcular las 4 constantes A, B, C y D, además el coeficiente característico s :

$$
\begin{aligned}
&sA - a_3B - c_1C - d_1D = 0\\
&b_2A + sB + d_1C + d_2D = 0\\
&- c_1A - c_2B + (s - a_2')\,C + a_3D = 0\\
&f_1A + f_2B - b_2C + (s + b_3')\,D = 0
\end{aligned}
\tag{128a}
$$

Ya que al menos una de las 4 constantes arbitrarias de integración A, B, C y D debe ser distinta de o, la determinante del sistema homogéneo debe ser nulo, de modo que por eso :

$$
\Delta = \begin{vmatrix} s, & -a_3, & -c_1, & -d_1\\ b_2, & s. & d_1, & d_2\\ -e_1, & -e_2, & s-a_2', & a_3\\ f_1, & f_2, & -b_2, & s+b'_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{128b}
$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos para la determinación del coeficiente característico s otra forma de la determinante :

$$
\begin{aligned}
\Delta = {} & s\,[s\,\{s^2+a_3b_2+s\,(b_3'-a_2') - a'_2b_3'\} - d_1\,(-c_2s-a_3f_2-c_2b_3') + d_2\,(e_2b_2-sf_2\\
& + a_3'f_2)] + a_3\,[b_2\,\{s^2+a_3b_2+s\,(b_3'-a_2') - a_2'b_3'\} - d_1\,(-e_1s-a_3f_1-e_1b_3')\\
& + d_2\,(e_1b_2-sf_1+f_1a_2')] - c_1\,[b_2\,(-c_2s-a_3f_2-c_2b_3') - s\,(-c_1s-a_3f_1-e_1b_3')\\
& + d_2\,(-e_1f_2+e_2f_1)] + c_2\,[b_2\,(e_2b_2-sf_2+a_2'f_2) - s\,(e_1b_2-sf_1+a_2'f_1)\\
& + d_1\,(-e_1f_2+e_2f_1)] = 0
\end{aligned}
\tag{129}
$$

Sumando los primeros términos de los corchetes de los primeros dos factores s y a_3, resulta que la determinante puede ser transformada a la forma siguiente simplificada :

$$(s^2+a_3b_2)^2 + \varepsilon\,(s) = 0, \tag{130a}$$

donde

$$\varepsilon\,(s) = g_0 + g_1s + g_2s^2 + g_3s^3, \tag{130b}$$

siendo las definiciones de los coeficientes $g_i\,(i = 0,\ 1,\ 2$ y $3)$ las siguientes :

$$
\left\{
\begin{aligned}
g_0 = {} & a_3\,[d_1a_3f_1 + d_2e_1b_2 - b_2a_2'b_3' + d_1e_1b_3' + d_2f_1a_2'] - c_1\,[-b_2a_3f_2 - b_2e_2b_3'\\
& + d_2\,(-e_1f_2 + e_2f_1)] + c_2\,[b_2^2e_2 + b_2a_2'f_2 + d_1\,(-e_1f_2 - e_2f_1)]\\
g_1 = {} & d_1a_3f_2 + d_2e_2b_2 + a_3d_1e_1 - a_3d_2f_1 + c_1b_2e_2 - c_1a_3f_1 - c_2b_2f_2 - c_2e_1b_2\\
& + d_1e_2b_3' + d_2a_2'f_2 + a_3b_2\,(b_3'-a_2') - c_1e_1b_3' - c_2a_2'f_1\\
g_2 = {} & d_1e_2 - d_2f_2 - c_1e_1 + c_2f_1 - a_2'b_3'\\
g_3 = {} & b_3' - a_2'
\end{aligned}
\right.
\tag{130c}
$$

La forma (130a) de la determinante resulta necesaria, ya que, prescindiendo de las partes complementarias de los coeficientes c_1, c_2, d_1, d_2, e_1, e_2, f_1 y f_2, los dos sistemas de las variables ξ, η y p, q quedan independientes uno del otro, siendo entonces también $a_2' = b_3' = 0$, si el punto cero de las longitudes de los nodos es elegido convenientemente, como antes en el caso de las longitudes de los perihelios, de manera que entonces, en este caso más simple : $\Delta = (s^2 + a_3 b_2)^2 = 0$, desapareciendo la función $\varepsilon(s)$ con los coeficientes c_1, etc.

La representación anterior explícita de g_0, g_1, g_2 y g_3 admite ahora abreviar esencialmente la investigación de las raíces. Primero es directamente visible que $g_3 = b_3' - a_2' = 0$, según las anotaciones anteriores a las fórmulas (126).

Además los coeficientes c_1, c_2, d_1 y d_2, según su definición, no son independientes del otro grupo de los coeficientes del 2° grado : e_1, e_2, f_1 y f_1 y f_2, por las siguientes relaciones :

(130d)
$$c_1 = \frac{\partial^2 R}{\partial\eta\partial p}, \qquad c_2 = \frac{\partial^2 R}{\partial\eta\partial q}, \qquad d_1 = \frac{\partial^2 R}{\partial\xi\partial p}, \qquad d_2 = \frac{\partial^2 R}{\partial\xi\partial q}$$
$$e_1 = \frac{\partial^2 R}{\partial q\partial\xi}, \quad e_2 = \frac{\partial^2 R}{\partial q\partial\eta}, \quad f_1 = \frac{\partial^2 R}{\partial p\partial\xi}, \qquad c_2 = \frac{\partial^2 R}{\partial p\partial\eta}$$

de modo que, en lo que sigue, el segundo grupo será expresado por el primer grupo, siendo :

(130e)
$$e_1 = d_2, \qquad e_2 = c_2, \qquad f_1 = d_1, \qquad f_2 = c_1.$$

La substitución en las expresiones relativas a los coeficientes g_0, g_1 y g_2 transforma a éstos en los siguientes, considerando que $b_2 = a_3$ hasta términos del 2° grado y $b'_3 = a'_2$:

(131)
$$g_0 = a^2{}_3(d_1{}^2 + d_2{}^2 + c_1{}^2 + c_2{}^2) + (c_1 d_2 - c_2 d_1)^2 + a_3(-b_2 a_2' b'_3 + d_1 e_1 b'_3 + d_2 f_1 a'_2)$$
$$+ c_1 b_2 e_2 b_3' + c_2 b_2 a_2 f_2\,; \quad g_1 = d_1 a_3 c_1 + d_2 b_2 c_2 + a_3 d_1 d_2 - a_3 d_2 d_1 + c_1 b_2 c_2 - c_1 a_3 d_1$$
$$- c_2 b_2 c_1 - c_2 b_2 d_2 + d_1 e_2 b_3' + d_2 a_2' f_2 + a_3 b_2 (b_3' - a_2') - c_1 e_1 b_3' - c_2 a_2' f_1$$

Además resulta que, por la substitución mencionada, todos los términos de g_1 se destruyen mutuamente, independientemente de que $a_3 = b_2$, pero siempre que es $a_2' = b_3'$, de modo que $g_1 = 0$. Además resulta respecto a g_2, directamente :

(131a)
$$g_2 = 2(d_1 c_2 - d_2 c_1) - a_2' b_3'$$

de modo que nuestra ecuación fundamental (130a) respecto a s pasa a la siguiente :

(132)
$$(s^2 + a_3 b_2)^2 + g_0 + g_2 s^2 = 0.$$

Respecto al orden de magnitud de los coeficientes, considerando que los coeficientes c_i, d_i, e_i y f_i son del grado 2, el primer término de g_0 es del grado 4 y el orden 4, el 2° término del grado 8 y el orden 4 ; además el próximo término $-a_3 b_2 a_2' b_3'$ es del grado 4 y el orden 4, mientras que los 3 restantes son del grado 6 y el orden 4. Por eso g_0, en lo esencial, es, por el 1er término, del grado 4 y el orden 4, y por eso, por la forma cuadrática de este término es siempre $> o$, mientras que el 3er término, siempre negativo, también es del grado 4 y el orden 4. Finalmente g_0 está compuesto sólo por términos del 4° grado y el 2° orden, de modo que hay que observar, respecto a la solución de la ecuación respecto a s^2, que la magnitud $a_3 b_2 =$ grado o y el orden 2, mientras que g_0 y g_2 son del grado 4, pero $g_0 =$ orden 4 y $g_2 =$ orden 2, pero $g_2 s^2 =$ grado 4 y orden 4. Prescindiendo, en primera aproximación, de los términos mencionados del grado 4 y el orden 4, la ecuación en s se reduce a la forma anterior : $s^2 + a_3 b_2 = o$.

En el caso de aplicar esta primera aproximación : $s^2 = -a_3 b_2$ al cálculo de la suma : $g_0 + g_2 s^2$, el efecto sería la eliminación del término del 4° grado y el 4° orden : $-a_3 b_2 a_2' b'_3$ en g_0 con el término en $g_2 s^2$: $-a_2' b_3' s^2 = +a_2' b_3' a_3 b_2$, de modo que g_2 se reduce, según (130c) sólo al primer término. Entonces $\varepsilon(s)$ se reduce a los términos siguientes, sustituyendo además en la 1ra aproximación : $s^2 = -a_3 b_2 = -a_3^2$, ya que en la primera aproximación $a_3 = b_2$:

$$\varepsilon(s) = g_0 + g_2 s^2 = a_3^2 (d_1^2 + d_2^2 + c_1^2 + c_2^2) + (c_1 d_2 - c_2 d_1)^2 - 2a_3^2 (d_1 c_2 - d_2 c_1) + a_3 d_1 d_2 b'_3 + c_1 b_2 c_2 b_3' + c_2 b_2 a_2' c_1$$

Considerando todavía que $b_3' = a_2'$, resulta definitivamente :

$$\varepsilon(s) = g_0 + g_2 s^2 = a_3^2 [(d_1 - c_2)^2 + (d_2 + c_1)^2] + (c_1 d_2 - c_2 d_1)^2 + a_3 a_2' d_1 d_2 + 2c_1 c_2 b_2 a'_2 \tag{133}$$

donde el primer término es del grado 4, el 2° término del grado 8, el 3er y 4° término del grado 6, y todos del orden 4, de manera que $\varepsilon(s)$ representa una pequeña cantidad del 4° grado y el 4° orden, y además, según el 1er término, siempre $\varepsilon(s) > o$. Siendo ahora en la primera aproximación, despreciando $\varepsilon(s)$, es decir términos del 4° grado y 4° orden: $(s^2 + a_3 b_2)^2 = o$, es decir $s^2 = -a_3 b_2 = -a_3^2 < o$, resulta respecto a la ecuación completa : $(s^2 + a_3 b_2)^2 + \varepsilon(s) = o$, que por ser siempre el 1er término y también $\varepsilon(s) > o$, la solución s^2 debe ser compleja, de modo que $s^2 = -\delta + i\tau$, donde sustituímos : $\sigma^2 = \sigma_0^2 + \delta$, fijando $\sigma_0^2 = a_3 b_2$, ya que prescindiendo de $\varepsilon(s) = 4°$ grado y 4° orden, debe ser $\tau = o$ y $s^2 = -a_3 b_2$, por eso $\delta = o$. Por consiguiente también s^1 es una magnitud compleja de la forma $s = \sigma_1 + i\sigma_2$, donde hay que determinar σ_1 y σ_2 como funciones de σ y τ, y estas magnitudes como funciones de $a_3 b_2$, g_0 y g_2. Por eso la forma de las variables x, y, p y q corresponde a la ecuación general :

$$x = Ae^{st} = Ae^{\sigma_1 t} \cdot e^{i\sigma_2 t} \tag{134}$$

y análogamente respecto a las otras variables, las que por eso obedecen a la forma de oscilaciones armónicas amortiguadas cuya parte periódica tiene el período $P = \frac{2\pi}{\sigma_2}$. Por eso las soluciones, en primera aproximación periódicas puras respecto a x, y, p y q prescindiendo sólo de los complementos lineales relativos a las variables-inclinación o excentricidades respectivamente, han pasado a oscilaciones amortiguadas inestables, a pesar de que los coeficientes complementarios son del grado 2 en las ecuaciones diferenciales, mientras que los términos lineales y principales en x,y o p, q respectivamente contienen coeficientes del grado o. Queda por constatar que el coeficiente σ_1 de la parte inestable, proporcional al tiempo t, es del 2° grado y el orden o, mientras que el coeficiente σ_2 del tiempo t en la parte periódica pura es del grado o, pero del orden 1, como también σ_2.

La dedución de δ y τ resulta en base a la ecuación principal en s, transformada a las incógnitas δ y τ, de modo que :

$$(135) \qquad (-\delta+i\tau)^2+g_0+g_2(-\sigma_0^2-\delta+i\,.\,\tau)=0.$$

Por la separación de esta ecuación en su parte real e imaginaria resultan entonces las 2 siguientes ecuaciones para la deducción de δ y τ:

$$(136) \qquad \left\{\begin{array}{r} \delta^2-\tau^2+g_0-g_2\sigma_0^2-g_2\delta=0 \\ -2\delta\tau+g_2\tau=0 \end{array}\right\}$$

de este modo que por la 2ª ecuación para $\tau\neq 0$, fijando $\tau=0$ la primera aproximación:

$$(136a) \qquad \delta=\frac{1}{2}g_2,$$

con lo que está determinado σ^2, siendo $\sigma^2=\sigma_0^2+\delta=a_3b_2+\frac{1}{2}g_2$, donde el 1er término $a_3b_2=$grado 0, orden 2, el segundo respecto de g_2: grado 4, orden 2. Por la substitución de $\delta=\frac{1}{2}g_2$ en la 1ª ecuación resulta entonces la resolución relativa a τ^2: (136b) $\tau^2=-\frac{1}{4}g_2^2+g_0-g_2\sigma_0^2$ donde el 1er término es del grado 8, el 2º del grado 4, del mismo el 3er término, y todos del orden 4. Por eso la parte principal de τ^2 es: $g_0-g_2\sigma^2$ y, como hemos demostrado, siempre >0, de modo que por eso: (136c) $\tau=\pm\sqrt{g_0-g_2\sigma_0^2-\frac{1}{4}g_2^2}=$ magnitud real del grado 2 y el orden 2. Por eso resulta (137a) $s^2=\rho+i\tau$, donde $\rho=-\sigma_0^2-\delta=-a_3b_2-\frac{1}{2}g_2$. Sustituyendo entonces (137b) $s=\sigma_1+i\sigma_2$ en la ecuación (137a), resultan las 2 ecuaciones para la determinación de σ_1 y σ_2:

$$(137c) \qquad \left\{\begin{array}{l} \sigma_1^2-\sigma_2^2=\rho=-a_3b_2-\frac{1}{2}g_2 \\ 2\sigma_1\sigma_2=\tau=\pm\sqrt{g_0-g_2\sigma_0^2-\frac{1}{4}g_2^2} \end{array}\right.$$

donde $\tau=0$, por eso también con $g_0=g_2=0$ debe anularse la parte real de s, es decir: $\sigma_1=0$; por consiguiente hay que substituir en la primera ecuación de (137c): $\sigma_1=\frac{\tau}{2\sigma_2}$, de modo que obtenemos la ecuación respecto a σ_2^2: $\sigma_2^4+\rho\sigma_2^2=\frac{1}{4}\tau^2$, y por eso: $\sigma_2^2=-\frac{1}{2}\rho\pm\frac{1}{2}\sqrt{\rho^2+\tau^2}$. Por la definición de ρ y τ según (136c) y (137c) resulta ahora: $\rho^2+\tau^2=(a_3b_2)^2+g_0^2$, y por eso: (139) $\sigma_2^2=\frac{1}{2}\left(a_3b_2+\frac{1}{2}g_2\right)\pm\sqrt{a_3^2b_2^2+g_0^2}$, donde bajo el signo-raíz: $(a_3b_2)^2=$grado 0, orden 4, y $g_0=$grado 4 y orden 4, de manera que g_0^2 fija sólo un complemento del 4º grado respecto a $a_3^2b_2^2$, de modo que, según el signo superior y con $g_0=0$, por eso $\tau=0$, resulta: $\sigma_2^2=a_3b_2$, como debe ser, mientras con el signo inferior resulta: $\sigma_2^2=0$, es decir una raíz que no viene al caso. Por consiguiente obtenemos, desarrollando según potencias de g_0^2 y limitándose a g_0^2:

$$\sigma_2^2 = a_3 b_2 + \frac{1}{4} g_2 + \frac{1}{4} g_0^2 (a_3 b_2)^{-1}, \tag{140}$$

de modo que después del desarrollo resulta:

$$\sigma_2 = \pm \sqrt{a_3 b_2}\left(1 + \frac{1}{8} g_2 (a_3 b_2)^{-1} + \text{términos de grado más alto}\right) \tag{141}$$

donde $\sqrt{a_3 b_2}$ = grado o y orden 1, además $g_2 (a_3 b_2)^{-1}$ = grado 4, orden o, mientras el término despreciado en g_0^2 es del grado 8 y el orden 4. Además resulta, según (136c), en base a la definición de σ_1:

$$\sigma_1 = \frac{\tau}{2\sigma_2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{g_0 - g_2\sigma_0^2 - \frac{1}{4} g_2^2 (a_3 b_2)^{-1/2}}\left[1 - \frac{1}{8} g_2 (a_3 b_2)^{-1}\right] = 2^{\circ} \text{ grado, orden } 1 \tag{142}$$

siendo la raíz del numerador del grado 2, orden 2, el coeficiente $(a_3 b_2)^{-1/2}$ = grado o, orden -1, y el complemento de 1 en el corchete del grado 4 y el orden o. Por eso el coeficiente σ_2 en la ecuación $s = \sigma_1 + i\sigma_2$ es del grado o, orden 1; mientras que σ_1 es del grado 2 y también del orden 1, de modo que en el coeficiente característico de la solución de nuestras ecuaciones diferenciales: $st = \sigma_1 t + i\sigma_2 t$, el argumento $\sigma_2 t$ que origina los términos periódicos, es del grado o y el orden 1, mientras que la parte $\sigma_1 . t$ es del 2º grado y el orden 1.

Las soluciones múltiples que corresponden a σ_1 y σ_2 son ahora las siguientes:

$$s_1 = \sigma_1 + i\sigma_2, \qquad s_2 = \sigma_1 - i\sigma_2, \qquad s_3 = -\sigma_1 + i\sigma_2, \qquad s_4 = -\sigma_1 - i\sigma_2 \tag{143}$$

donde 4 constantes A, B, C y D corresponden a cada valor de s, pero siendo arbitraria cada vez una de estas constantes. Siendo los coeficientes e^{st} complejos, por definición de s, hay que suponer complejos también los coeficientes A, B, C y D, poniendo $A = A' + iA''$, $B = B' + iB''$, $C = C' + C''$ y $D = D' + D''$, de modo que resulta primero según (5) separando las partes reales e imaginarias:

$$\begin{aligned} x &= e^{\sigma_1 t}[A' \cos\sigma_2 t - A'' \operatorname{sen}\sigma_2 t + i(A' \operatorname{sen}\sigma_2 t + A'' \cos\sigma_2 t)] \\ y &= e^{\sigma_1 t}[B' \cos\sigma_2 t - B'' \operatorname{sen}\sigma_2 t + i(B' \operatorname{sen}\sigma_2 t + B'' \cos\sigma_2 t)] \\ p_1 &= e^{\sigma_1 t}[C' \cos\sigma_2 t - C'' \operatorname{sen}\sigma_2 t + i(C' \operatorname{sen}\sigma_2 t + C'' \cos\sigma_2 t)] \\ q_1 &= e^{\sigma_1 t}[D' \cos\sigma_2 t - D'' \operatorname{sen}\sigma_2 t + i(D' \operatorname{sen}\sigma_2 t + D'' \cos\sigma_2 t)] \end{aligned} \tag{144}$$

siendo e la base de los logaritmos naturales. Para determinar las constantes de integración, según (6), hay que formar análogamente primero los coeficientes siguientes en (6):

$$\begin{aligned} sA &= \sigma_1 A' - \sigma_2 A'' + i(A'\sigma_2 + A''\sigma_1) \\ sB &= \sigma_1 B' - \sigma_2 B'' + i(B'\sigma_2 + B''\sigma_1) \\ (s - a_2')C &= (\sigma_1 - a_2')C' - \sigma_2 C'' + i[C'\sigma_2 + C''(\sigma_1 - a'_2)] \\ (s + b_3')D &= (\sigma_1 + b_3')D' - \sigma_2 D'' + i[D'\sigma_2 + D''(\sigma_1 + b_3')] \end{aligned} \tag{145}$$

Por eso resultan, respecto a las partes reales, según (128*a*), las siguientes ecuaciones entre los coeficientes A, B, C, D, A″, B″, C″ y D″ :

(146)
$$
\begin{aligned}
&a) \quad \sigma_1 A' - \sigma_2 A'' - a_3 B' - c_1 C' - c_2 D' = 0 \\
&b) \quad b_2 A' - \sigma_2 B'' + \sigma_1 B' + d_1 C' + d_2 D' = 0 \\
&c) \quad -e_1 A' - \sigma_2 C'' - e_2 B' + (\sigma_1 - a_2') C' + a_3' D' = 0 \\
&d) \quad f_1 A' - \sigma_2 D'' + f_2 B' - b_2' C' + (\sigma_1 + b_3') D' = 0
\end{aligned}
$$

referidas a las raíces positivas σ_1 y σ_2. Considerando ahora las magnitudes A′, B′, C′ y D′ como las 4 constantes independientes de integración de nuestras soluciones, resultan las siguientes representaciones respecto a las A″, B″, C″ y D″, atribuyendo a las magnitudes que corresponden a las raíces $+\sigma_1$ y $+\sigma_2$ el índice 1 :

(147)
$$
\begin{aligned}
\sigma_2 A_1'' &= \sigma_1 A' - a_3 B' - c_1 C' - c_2 D' \\
\sigma_2 B_1'' &= b_2 A' + \sigma_1 B' + d_1 C' + d_2 D' \\
\sigma_2 C_1'' &= -e_1 A' - e_2 B' + (\sigma_1 - a_2') C' + a_3 D' \\
\sigma_2 D_1'' &= f_1 A' + f_2 B' - b_2 C' + (\sigma_1 + b_3') D'
\end{aligned}
$$

Si pasamos ahora a la 2ª solución relativa a s : $s_2 = \sigma_1 - i\sigma_2$, las magnitudes A_1'', etc. pasan, hallándose σ_2 sólo en los primeros miembros de las ecuaciones, a los valores contrarios, de modo que :

(148)
$$
A_2'' = -A_1'', \quad B_2'' = -B_1'', \quad C_2'' = -C_1'', \quad D_2'' = -D_1''.
$$

Pasando ahora a la 3ª raíz : $s_3 = -\sigma_1 + i\sigma_2$, resulta por (146) ó (147) :

(149)
$$
\begin{aligned}
A_3'' &= \frac{1}{\sigma_2}\left[-\sigma_1 A' - a_3 B' - c_1 C' - c_2 D'\right] \\
B_3'' &= \frac{1}{\sigma_2}\left[b_2 A' - \sigma_1 B' + d_1 C' + d_2 D'\right] \\
C_3'' &= \frac{1}{\sigma_2}\left[-e_1 A' - e_2 B' - (\sigma_1 + a_2') C' + a_3 D'\right] \\
D_3'' &= \frac{1}{\sigma_2}\left[f_1 A' + f_2 B' - b_2 C' + (-\sigma_1 + b_3') D'\right]
\end{aligned}
$$

Cambiando finalmente en el caso de s_3 : σ_2 con $-\sigma_2$, de modo que se presenta el caso $s_4 = -\sigma_1 - i\sigma_2$, resulta :

(150)
$$
A_4'' = -A_3'', \quad B_4'' = -B_3'', \quad C_4'' = -C_3'', \quad D_4'' = -D_3''.
$$

Por consiguiente, componiendo la solución general por las 4 soluciones particulares que corresponden a las 4 raíces de s, resulta la solución general :

$$(151)\quad \begin{aligned} x &= e^{\sigma_1 t}[2A'\cos\sigma_2 t - 2A_1''\,\text{sen}\,\sigma_2 t] + e^{-\sigma_1 t}[2A'\cos\sigma_2 t - 2A_3''\,\text{sen}\,\sigma_2 t] \\ y &= e^{\sigma_1 t}[2B'\cos\sigma_2 t - 2B_1''\,\text{sen}\,\sigma_2 t] + e^{-\sigma_1 t}[2B'\cos\sigma_2 t - 2B_3''\,\text{sen}\,\sigma_2 t] \\ p_1 &= e^{\sigma_1 t}[2C'\cos\sigma_2 t - 2C_1''\,\text{sen}\,\sigma_2 t] + e^{-\sigma_1 t}[2C'\cos\sigma_2 t - 2C_3''\,\text{sen}\,\sigma_2 t] \\ q_1 &= e^{\sigma_1 t}[2D'\cos\sigma_2 t - 2D_1''\,\text{sen}\,\sigma_2 t] + e^{-\sigma_1 t}[2D'\cos\sigma_2 t - 2D_3''\,\text{sen}\,\sigma_2 t] \end{aligned}$$

siendo definidos los coeficientes A_1'', A_3'', B_1'', B_3'', C_1'', C_3'', D_1'' y D_3'' por las fórmulas anteriores (147) y (149).

Resta todavía la dedución de las 4 constantes de integración A', B', C', y D' como funciones de los elementos iniciales. Fijando x_0, y_0, p_{10} y q_{10} los valores de x, y, p_1 y q_1 para la época $t=0$, resultan las siguientes relaciones según (151): $x_0=4A'$, $y_0=4B_0'$, $p_{10}=4C_0'$ y q_{10}, $4D_0'$ de modo que por eso la sencilla definición de las constantes de integración es la siguiente: $A' = \frac{1}{4}x_0$, $B' = \frac{1}{4}y_0$, $C' = \frac{1}{4}\cdot p_{10}$ y $D = \frac{1}{4}\cdot q_{10}$. Además, siendo $x_0=\xi_0-\Delta x$, $y_0=\eta_0-\Delta y$, $p_{10}=p_0-\Delta p$, $q_{10}=q_0-\Delta q$, las constantes de integración aceptan las siguientes definiciones en base de los elementos iniciales e_0 y $\tilde{\omega}_0$:

$$(152)\quad \left\{\begin{aligned} A' &= \frac{1}{2}(e_0\,\text{sen}\,\tilde{\omega}_0 - \Delta x), \qquad & B' &= \frac{1}{4}(e_0\cos\tilde{\omega}_0 - \Delta y) \\ C' &= \frac{1}{2}(\text{sen}\,\varphi_0\,\text{sen}\,\theta_0 - \Delta p), \qquad & D' &= \frac{1}{4}(\text{sen}\,\varphi_0\cos\theta_0 - \Delta q) \end{aligned}\right.$$

donde hay que observar todavía que las longitudes de los perihelios y nodos no están referidas al punto vernal, sino al punto de la longitud $\tilde{\omega}'-90°$, referida al punto vernal.

Siendo A, B, C y D del 1er grado, si los parámetros x_0, y_0, p_0 y q_0 son del mismo 1er grado que las excentricidades e inclinaciones, los coeficientes A_i''. B_i'', C_i'' y D_i'' están compuestos, según su definición (147) y (149) de un término del grado 1 y el orden 0, además 3 términos del grado 3 y el orden 0, observándose que $\sigma_1=2°$ grado y 1er orden, σ_2=grado 0 y orden 1, además a_3 y b_2 términos del grado 0 y el orden 1, mientras que todos los otros coeficientes: c_1, c_2, d_1, d_2, e_1, e_2, f_1, f_2, a_2' y b_3' son de 2° grado y el 1er orden. Por consiguiente cada corchete en la representación (151) respecto a los x, y, p_1 y q_1 está compuesto de términos del 1er y 3er grado, pero todos del mismo orden 0.

Al final de estos cálculos tenemos que hacer la siguiente observación respecto de la solución anterior de las ecuaciones diferenciales complementadas por términos en p y q en el caso de las variables-excentricidad, o términos en ξ y η en el caso de las variables-inclinación respectivamente. Desarrollando los factores asintóticos: $e^{\sigma_1 t}$ y $e^{-\sigma_1 t}$ según potencias de los exponentes, resulta: $e^{\pm\sigma_1 t}=1\pm\sigma_1 t$ en la primera aproximación, donde σ_1 fija un término del 2° grado y el 1er orden. Considerando la masa m' de Júpiter, representante del 1er orden, como una magnitud del 2° grado por lo menos, por ser $m'=0.001=(0.1)^3$, la magnitud σ_1 es del 4° grado, mientras que los términos principales de la solución: $\alpha\,\text{sen}\,A$ y $\alpha\cos A$ son del 1er grado (orden 0). Por eso el efecto asintótico es representado por términos que tienen un grado por lo menos 3 unidades más alto que la solución básica periódica. Pero se mantiene el resultado que la solución ampliada es una solución asintótica, de suerte que la consideración de otros términos de la función perturbadora respecto a p, q o x, y respectivamente, no podría variar la forma asintótica de las ecuaciones ampliadas por los términos complementarios. De otra parte se mantiene el teorema de Poincaré que las perturbaciones seculares, en general, pueden representarse en la forma periódica, pero en el caso general hay que realizar transformaciones canónicas de los elementos comunes antes de integrar las ecuaciones diferenciales. El caso tratado en esta memoria ha sido un caso especial respecto a la posiblidad de representar ya los elementos comunes ξ, η y p, q en una forma periódica según series de Fourier, es decir el caso de las variables-excentricidad sólo o el de las variables-inclinación sólo, mientras que el caso mixto respecto a los 2 tipos de variables, asintótico ya en base a los términos lineales en la primera aproximación, necesita las transformaciones canónicas de Poincaré para obtener una solución en la forma de series de Fourier.

§ 5. UNA SOLUCION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE LAS PERTURBACIONES SECULARES, POR MEDIO DE LAS SERIES DE FOURIER

En una forma muy general Poincaré comprobó en sus mencionadas *Leçons de Mécanique céleste*, tomo I, pág. 235, en el capítulo sobre la teoría de las perturbaciones seculares, cómo puede lograrse, en base a una serie de transformaciones canónicas de los elementos, una representación periódica por medio de series trigonométricas, como en el caso de las perturbaciones periódicas. Seguidamente vamos a demostrar cómo es posible, en el caso del problema asteróidico de los tres cuerpos, llegar directamente a una representación de las perturbaciones seculares, por medio de las series de Fourier.

En la solución de la primera aproximación de nuestras ecuaciones diferenciales, aplicando sólo los términos lineales respecto a las variables x e y, habíamos aprovechado la integral que existe en este caso : $x^2 + y^2 = \alpha^2$, para lograr una simplificación de las ecuaciones por medio de la reducción, entonces posible, del grado de los términos al tercer grado en x e y, desarrollando la función perturbadora hasta el sexto grado. Ahora debemos prescindir de esta integral aproximada y restablecer la forma original de las ecuaciones diferenciales. Para eso es necesario volver a sustituir en los coeficientes de las ecuaciones diferenciales, los parámetros c^2 y c^4, por sus expresiones como funciones de x é y : $c^2 = x^2 + y^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$. Además hay que considerar que $\eta' = 0$. Resultan entonces las nuevas ecuaciones diferenciales siguientes, basándose en todos los términos de la función perturbadora hasta el sexto grado inclusive, limitándonos primeramente, al problema plano :

$$(153) \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1' + a_3'y + a_5'xy + a'_{10}x^2y + a'_{12}y^3 + a'_{13}x^3y + a'_{14}xy^3 + a'_{17}y(x^2+y^2)^2 \\ -\frac{dy}{dt} &= b_1' + b_2'x + b_4'x^2 + b_6'y^2 + b_9'x^3 + b_{11}'xy^2 + b_{13}'x^4 + b_{14}'x^2y^2 + b_{15}'y^4 + b_{16}'x(x^2+y^2)^2 \end{aligned}$$

Ya que la función perturbadora R es una función sólo de grado par respecto a las cuatro magnitudes x, y, ξ, η', las ecuaciones diferenciales se reducen por ser derivadas de R, según las magnitudes mencionadas, o sea a términos de grado impar, en x, y, y ξ', η'. De aquí que el coeficiente a_1, y asimismo b_1, se componen sólo de términos impares de ξ' y η', y del primer grado al menos.

El próximo coeficiente, a_3', por ser una serie según ξ' y η' y $a_3'y$ un término del primer grado al menos, debe comenzar con términos del grado cero y progresar entonces según potencias de ξ' y η'. Además el próximo término $a_5'xy$ debe ser del tercer grado por lo menos, por eso a_5' es del primer grado como mínimo. Análogamente el próximo coeficiente a'_{10}, debe ser del grado cero por lo menos; y asimismo a'_{12}; además los coeficientes a'_{13} y a'_{14} son del primer grado por lo menos y finalmente a'_{17} del grado cero. En la segunda ecuación relativa a $-\frac{dy}{dt}$ son del segundo grado al menos los coeficientes b'_2, b_9', b'_{11} y b'_{16}; del primer grado y mayores b_1', b_4', b_6', b'_{13}, b'_{14} y b'_{15} aumentando su graduación los términos siguientes a los términos iniciales, siempre en dos, cuatro... grados. Entonces se obtienen las expresiones siguientes respecto de los coeficientes, suponiendo siempre que $\eta'=0$, $a_1'=0$, por lo que antes ya resultó $\Delta y=0$:

(154) $$a_3' = a_3 + a_5\Delta x + a_7(\Delta x)^2 - \frac{1}{2}a_3(\Delta x^2) - \left(\frac{1}{8}a_3 + \frac{1}{2}a_7\right)(\Delta x)^4 \ldots$$

(155) Por $a_1'=0$ antes se tenía con $\eta'=0$: $\Delta y=0$

$$a_3' = a_3 + a_5\Delta x + a_7(\Delta x)^2 - \frac{1}{2}a_3(\Delta x)^2 - \left(\frac{1}{8}a_3 + \frac{1}{2}a_7\right)(\Delta x)^4 - \frac{1}{2}a_5(\Delta x)^3$$
$$+ 6E_6'(\Delta x)^4 + 4E_6''\xi'^2(\Delta x)^2 + 2E_6''\xi'^4 + 4G_6'\xi'(\Delta x)^3 + 2G_6''\xi'^3\Delta x$$
$$+ 2H_6'\xi'^2(\Delta x)^2 - 2H_6''\xi'^4 - 6J_6\xi'^3\Delta x$$

$$a_5' = a_5 + 2a_7\Delta x - a_3\Delta x - 2\left(\frac{1}{4}a_3 + a_7\right)(\Delta x)^3 - \frac{3}{2}a_5(\Delta x)^2 + 24E_6'(\Delta x)^3$$
$$+ 8E_6'''\xi'^3 + 12G_6'\xi'(\Delta x)^2 + 2G_6''\xi'^3 - 6J_6\xi'^3$$

$$a'_{10} = -2\left(\frac{1}{4}a_3 + a_7\right)(\Delta x)^2 - \frac{3}{2}a_5\Delta x + 24E_6'(\Delta x)^2 + 12G_6'\xi'\Delta x + a_7 - \frac{1}{2}a_3 + 4E_6''\xi'^2 + 2H_6'\xi'^2$$

$$a'_{12} = a_7 - \frac{1}{2}a_3 - \frac{1}{2}a_5\Delta x + 4E_6''\xi'^2 + 4G_6'\xi'\Delta x - 2H_6'\xi'^2$$

$$a'_{13} = -2\left(\frac{1}{4}a_3 + a_7\right)\Delta x - \frac{1}{2}a_5 + 24E_6'\Delta x + 4G_6'\xi'$$

$$a'_{14} = a'_{13}, \qquad a'_{17} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}a_3 + a_7\right) + 6E_6'$$

$b_1'=0$ sirve a la deducción de Δx por medio de:

$$b_1' = 0 = b_1 + b_2\Delta x + b_4(\Delta x)^2 + b_7(\Delta x)^3 - \frac{1}{2}b_1(\Delta x)^2 - \frac{1}{2}b_2(\Delta x)^3 - \frac{1}{8}b_1(\Delta x)^4$$
$$+ \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}b_2 + b_7\right)(\Delta x)^5 - \frac{1}{2}b_4(\Delta x)^4 + 6E_6'(\Delta x)^5 + 4E_6''\xi'^2(\Delta x)^3$$
$$+ 2E_6'''\xi'^4\Delta x + 5G_6'\xi'(\Delta x)^4 + 3G_6''\xi'^3(\Delta x)^2 + G_6''\xi'^6 + 4H_6'\xi'^2(\Delta x)^3$$
$$+ 2H_6''\xi'^4\Delta x + 3J_6\xi'^3(\Delta x)^2$$

$$b_2' = b_2 + 2b_4\Delta x + 3b_7(\Delta x)^2 - b_1\Delta x - \frac{3}{2}b_2(\Delta x)^2 - \frac{1}{2}b_1(\Delta x)^3$$

$$+\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{4}b_2+b_7\right)(\Delta x)^4-2b_4(\Delta x)^3+30E_6'(\Delta x)^4+12E_6''\xi'^2(\Delta x)^2$$
$$+2E_6''\xi'^4+20G_6'\xi'(\Delta x)^3+6G_6''\xi'^3\Delta x+12H_6'\xi'^2(\Delta x)^2+2H_6''\xi'^4$$
$$+6J_6\xi'^3\Delta x$$

$$b_4'=b_4+2b_7\Delta x-b_2\Delta x-\frac{1}{2}b_1(\Delta x)^2-4\left(\frac{1}{4}b_2+b_7\right)(\Delta x)^3-\frac{5}{2}b_4(\Delta x)^2$$
$$+48E_6'(\Delta x)^3+8E_6''\xi'^2\Delta x+24G_6'\xi'(\Delta x)^2+2G_6''\xi'^3+12H_6'\xi'^2\Delta x$$
$$+4J_6\xi'^3-\frac{1}{2}b_1-\frac{1}{2}b_2\Delta x-\frac{1}{2}b_4(\Delta x)^2+4E_6''\xi'^2\Delta x+4G_6'\xi'(\Delta x)^2$$
$$+G_6''\xi'^3-J_6\xi'^3$$

$$b_6'=b_6-\frac{1}{2}b_6(\Delta x)^2-2J_6\xi'^3-\frac{1}{2}b_1-\frac{1}{2}b_2\Delta x-\frac{1}{4}b_4(\Delta x)^2+4E_6''\xi'^2\Delta x$$
$$+4G_6'\xi'(\Delta x)^2+G_6''\xi'^3-J_6\xi'^3$$

$$b_9'=-2\left(\frac{1}{4}b_2+b_7\right)(\Delta x)^2-b_4\Delta x+24E_6'(\Delta x)^2+8G_6'\xi'\Delta x+4H_6'\xi'^2$$
$$+b_7-\frac{1}{2}b_2-\frac{1}{2}b_1\Delta x+2\left(-\frac{1}{4}b_2+b_7\right)(\Delta x)^2-b_4\Delta x$$
$$+24E_6'(\Delta x)^2+4E_6''\xi'^2+12G_6'\xi'\Delta x$$

$$b'_{11}=-b_6\Delta x-b_7-\frac{1}{2}b_2-\frac{1}{2}b_1\Delta x+2\left(-\frac{1}{4}b_2+b_7\right)(\Delta x)^2-b_4\Delta x$$
$$+24E_6'(\Delta x)^2+4E_6''\xi'^2+12G_6'\xi'\Delta x$$

$$b'_{13}=-\frac{1}{8}b_1-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}b_2+b_7\right)\Delta x+6E_6'\Delta x+G_6'\xi'-\frac{1}{2}b_4+24E_6'\Delta x+4G_6'\xi'$$

$$b'_{14}=-\frac{1}{4}b_1+\left(-\frac{1}{4}b_2+b_7\right)\Delta x+12E_6'\Delta x+2G_6'\xi'-\frac{1}{2}b_6$$

$$b'_{15}=-\frac{1}{8}b_1+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}b_2+b_7\right)\Delta x+6E_6'\Delta x+G_6'\xi'-\frac{1}{2}b_6$$

$$b'_{16}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}b_2+b_7\right)+6E_6'$$

Respecto de algunos coeficientes, los términos correspondientes de menor grado, no se encuentran al principio de la fórmula, sino en el lugar que les correspondieron por el cálculo, a fin de facilitar el control.

Limitando las ecuaciones diferenciales a los términos lineales respecto a x e y, hallamos la solución en la fórmula $x=\alpha \operatorname{sen} \Lambda$ e $y=\alpha\dfrac{s}{a_3}\cos\Lambda$, donde $\Lambda=st+\beta$, siendo $s^2=a_3b_2$; respecto a las ecuaciones ampliadas a todas las otras potencias de x e y, y haremos ahora la expresión generalizada correspondiente a una serie de Fourier, de modo que :

$$
(156) \qquad \begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{\infty} (s_i \operatorname{sen} i\mathrm{A} + c_i \cos i\mathrm{A}) \\ y &= \sum_{i=1}^{\infty} (s_i \operatorname{sen} i\mathrm{A} + c_i \cos i\mathrm{A}) \end{aligned} \qquad \mathrm{A} = st + \beta
$$

La sustitución de esta forma para x e y, y de las mismas potencias y productos en las ecuaciones diferenciales, exige primeramente la representación general de x^2, xy, etc., como series de Fourier, progresando según múltiplos de A. Resulta primero:

$$
\begin{aligned} x^2 = \sum_{i,k=0}^{\infty} \Big\{ & \left[\frac{1}{2} s_i c_k + \frac{1}{2} c_i s_k\right] \operatorname{sen}(i+k)\mathrm{A} + \left[-\frac{1}{2} s_i s_k + \frac{1}{2} c_i c_k\right] \cos(i+k)\mathrm{A} + \\ & + \left[\frac{1}{2} s_i c_k - \frac{1}{2} c_i s_k\right] \operatorname{sen}(i-k)\mathrm{A} + \left[\frac{1}{2} s_i s_k + \frac{1}{2} c_i c_k\right] \cos(i-k)\mathrm{A} \end{aligned}
$$

Pasando los argumentos $i \pm k$ al mismo argumento $n\mathrm{A}$, resulta la nueva representación, considerando que los coeficientes s_m y c_m desaparecen, si $m \leqq 0$:

$$
(157) \qquad \begin{aligned} x^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0,\, i=1}^{\infty} \Big\{ & [s_i c_{n-i} + c_i s_{n-i} + s_i c_{i-n} - c_i s_{i-n} - s_i c_{i+n} + c_i s_{i+n}] \operatorname{sen} n\mathrm{A} \\ & + [-s_i s_{n-i} + c_i c_{n-i} + s_i s_{i-n} + c_i c_{i-n} + s_i s_{i+n} + c_i c_{i+n}] \cos n\mathrm{A} \Big\} = \\ = \frac{1}{2} \sum_{n=0,\, i=1}^{\infty} \Big\{ & [s_i (c_{n-i} + c_{i-n} - c_{i+n}) + c_i (s_{n-i} - s_{i-n} + s_{i+n})] \operatorname{sen} n\mathrm{A} + \\ & + [s_i (-s_{n-i} + s_{i-n} + s_{i+n}) + c_i (c_{n-i} + c_{i-n} + c_{i+n})] \cos n\mathrm{A} \Big\} \end{aligned}
$$

La serie correspondiente para y^2, resulta de la serie para x^2, por acentuación de todos los coeficientes c_m y s_m. Resulta además la serie respecto de $x \cdot y$ en forma análoga a la de x^2, reducida de nuevo al argumento común $n\mathrm{A}$:

$$
(158) \qquad \begin{aligned} xy = \frac{1}{2} \sum_{n=0,\, i=1}^{\infty} \Big\{ & [s_i (c'_{n-i} + c'_{i-n} + c'_{i+n}) + c_i (s'_{n-i} - s'_{i-n} + s'_{i+n})] \operatorname{sen} n\mathrm{A} + \\ & + [s_i (-s'_{n-i} + s'_{i-n} + s'_{i+n}) + c_i (c'_{n-i} + c'_{i-n} + c'_{i+n})] \cos n\mathrm{A} \Big\} \end{aligned}
$$

Hay que observar respecto a la representación de las combinaciones más altas de x e y que la multiplicidad de los números-índices aumentan; en la representación de x^2, xy e y^2 hubo otro índice corriente cuando el argumento es $n\mathrm{A}$, pero en la próxima potencia más alta hay dos índices corrientes, etc. En los términos del segundo grado x^3, etc. los términos principales tienen la forma c_1^3, s_1^3, $c_1 s_1$, $c_1'^3$, etc. y son por eso del segundo grado o más, mientras que los otros términos, por ejemplo $c_1 s_2$, etc., son ya del tercer grado por lo menos, siendo c_1 del primer grado, pero s_2, como vamos a demostrar en breve, es del tercer grado, de modo que $c_1 s_2 = 4^{\circ}$. Por eso resulta que $x^2 y$, y todos los otros términos, son del tercer grado, teniendo lugar un aumento del índice de los coeficientes, y aumentando rápidamente el grado de los términos, en los de grado más alto. Por esta causa es conveniente limitar los índices, para no llevar términos innecesarios de mayor graduación, por no tener importancia desde el punto de vista práctico.

Por ello vamos a considerar en la presente memoria sólo las combinaciones de los índices uno y dos respecto a la deducción de las series relativas a x^3, x^2y, xy^2, etc. En casos de excepción vamos a agregar más adelante algunos términos con el índice tres.

Correspondientemente resultan entonces las representaciones siguientes de los coeficientes mayores de segundo grado en x e y, por el siguiente motivo. La solución parcial $x = s_1 \operatorname{sen} A = \alpha \operatorname{sen} A$; $y = c_1' \cos A = \alpha \frac{s}{a_3'} \cos A$, era la solución genéral del sistema lineal fundamental de las ecuaciones diferenciales, siendo α y β las dos constantes arbitrarias de la integración. La otra solución parcial $x = c_1 \cos A_1$ e $y = s_1' \operatorname{sen} A_1$ es idéntica con la solución ya fijada, ya que, poniendo $c_1 = \alpha$, $s_1' = -\alpha \frac{s}{a_3'}$ y permutando al mismo tiempo A_1 con A-90°, resulta : $x = \alpha \operatorname{sen} A$; e $y = \alpha \frac{s}{a_3'} \cos A$. Por esto en el caso de aceptar la primera solución, de modo que sean s_1 y c_1' distintos de cero, es admisible poner $c_1 = s_1' = 0$. Considerando esta suposición resultan las siguientes expresiones de los coeficientes :

$$(159) \quad x^3 = \frac{1}{2} s_1^3 \left[\frac{3}{2} \operatorname{sen} A - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 3A\right] + \frac{1}{2} s_1 s_2^2 \left[3 \operatorname{sen} A + \frac{3}{2} \operatorname{sen} 3A - \frac{3}{2} \operatorname{sen} 5A\right]$$
$$+ \frac{1}{2} s_1 c_2^2 \left[3 \operatorname{sen} A - \frac{3}{2} \operatorname{sen} 3A + \frac{3}{2} \operatorname{sen} 5A\right] + \frac{1}{2} s_1^2 s_2 \left[3 \operatorname{sen} 2A - \frac{3}{2} \operatorname{sen} 4A\right]$$
$$+ \frac{1}{2} s_1^2 c_2 \left[-\frac{3}{2} + 3 \cos 2A - \frac{3}{2} \cos 4A\right] + \frac{1}{2} s_1 s_2 c_2 [3 \cos 3A - 3 \cos 5A]$$
$$+ \frac{1}{2} s_2^3 \left[\frac{3}{2} \operatorname{sen} 2A - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 6A\right] + \frac{1}{2} s_2 c_2^2 \left[2 \operatorname{sen} 2A + \frac{3}{2} \operatorname{sen} 6A\right] + \frac{1}{2} s_2^2 c_2 \left[\frac{3}{2} \cos 2A - \right.$$
$$\left. - \frac{3}{2} \cos 6A\right] + \frac{1}{2} c_2^3 \left[\frac{3}{2} \cos 2A + \frac{1}{2} \cos 6A\right] - \frac{1}{4} s_1^2 s_3 [\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} 5A]$$

donde el último término con el argumento 5A fija el término más bajo de 5° grado respecto de 5A, necesitado junto con el término $b_9' x^3$. Además resultan :

$$(160) \quad x^2 y = \frac{1}{2} s_1^2 c_1' \left[\frac{1}{2} \cos A - \frac{1}{2} \cos 3A\right] + \frac{1}{2} s_2^2 c_1' \left[\cos A - \frac{1}{2} \cos 3A - \frac{1}{2} \cos 5A\right]$$
$$+ \frac{1}{2} c_2^2 c_1' \left[\cos A + \frac{1}{2} \cos 3A + \frac{1}{2} \cos 5A\right] + \frac{1}{2} s_1 s_2 c_1' [1 - \cos 4A]$$
$$+ \frac{1}{2} s_1 c_2 c_1' \operatorname{sen} 4A + \frac{1}{2} s_1^2 c_2' \left[-\frac{1}{2} + \cos 2A - \frac{1}{2} \cos 4A\right]$$
$$+ \frac{1}{2} s_2^2 c_2' \left[\frac{1}{2} \cos 2A - \frac{1}{2} \cos 6A\right] + \frac{1}{2} c_2^2 c_2' \left[\frac{3}{2} \cos 2A + \frac{1}{2} \cos 6A\right]$$
$$+ \frac{1}{2} s_1 s_2 c_2' \left[\cos 3A - \cos 5A\right] + \frac{1}{2} s_1 c_2 c_2' [2 \operatorname{sen} A - \operatorname{sen} 3A + \operatorname{sen} 5A]$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}s_2c_2c_2'\left[\operatorname{sen}2A+\operatorname{sen}6A\right]+\frac{1}{2}s_1^2s_2'\left[\operatorname{sen}2A-\frac{1}{2}\operatorname{sen}4A\right]\\
&+\frac{1}{2}s_2^2s_2'\left[\frac{3}{2}\operatorname{sen}2A-\frac{1}{2}\operatorname{sen}6A\right]+\frac{1}{2}c_2^2s_2'\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}2A+\frac{1}{2}\operatorname{sen}6A\right]\\
&+\frac{1}{2}s_1s_2s_2'\left[2\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}3A-\operatorname{sen}5A\right]\\
&+\frac{1}{2}s_1c_2s_2'\left[\cos 3A-\cos 5A\right]+\frac{1}{2}s_2c_2s_2'\left[\cos 2A-\cos 6A\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(161)\qquad xy^2=&\ \frac{1}{4}s_1c_1'^2\left[\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}3A\right]+\frac{1}{2}s_1c_1'c_2'\operatorname{sen}4A+\frac{1}{2}s_1s_2'c_1'\left[1-\cos 4A\right]\\
&+\frac{1}{4}s_2c_1'^2\left[2\operatorname{sen}2A+\operatorname{sen}4A\right]+\frac{1}{2}s_2c_1'c_2'\left[\operatorname{sen}3A+\operatorname{sen}5A\right]\\
&+\frac{1}{2}s_2s_2'c_1'\left[2\cos A-\cos 3A-\cos 5A\right]+\frac{1}{4}c_2c_1'^2\left[1+2\cos 2A+\cos 4A\right]\\
&+\frac{1}{2}c_2c_2'c_1'\left[\cos A+\frac{1}{2}\cos 3A+\frac{1}{2}\cos 5A\right]+\frac{1}{4}c_2s_2'c_1'\left[2\operatorname{sen}3A+2\operatorname{sen}5A\right]\\
&+\frac{1}{4}s_1c_2'^2\left[2\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}3A+\operatorname{sen}5A\right]+\frac{1}{2}s_1's_2'c_2'\left[\cos 3A-\cos 5A\right]\\
&+\frac{1}{4}s_2c_2'^2\left[\operatorname{sen}2A+\operatorname{sen}6A\right]+\frac{1}{4}s_2s_2'c_2'\left[\cos 2A-2\cos 6A\right]\\
&+\frac{1}{4}c_2c_1'c_2'\left[2\cos A+\cos 3A+\cos 5A\right]+\frac{1}{4}c_2c_2'^2\left[\frac{3}{2}\cos 2A+\frac{1}{2}\cos 6A\right]\\
&+\frac{1}{4}c_2c_2's_2'\left[2\operatorname{sen}2A+2\operatorname{sen}6A\right]+\frac{1}{4}s_1c_1's_2'\left[1-\cos 4A\right]\\
&+\frac{1}{4}s_1s_2'^2\left[2\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}3A-\operatorname{sen}5A\right]+\frac{1}{2}s_2s_2'^2\left[\frac{3}{2}\operatorname{sen}2A-\frac{1}{2}\operatorname{sen}6A\right]\\
&+\frac{1}{4}c_2s_2'^2\left[\cos 2A-\cos 6A\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(162)\qquad y^3=&\ \frac{1}{2}s_2'^2c_1'\left[3\cos A-\frac{3}{2}\cos 3A-\frac{3}{2}\cos 5A\right]+\frac{1}{2}c_1'^3\left[\frac{3}{2}\cos A+\frac{1}{2}\cos 3A\right]\\
&+\frac{1}{2}c_2'^2c_1'\left[3\cos A+\frac{3}{2}\cos 3A+\frac{3}{2}\cos 5A\right]+\frac{1}{2}s_2'c_1'^2\left[3\operatorname{sen}2A+\frac{3}{2}\operatorname{sen}4A\right]\\
&+\frac{1}{2}s_2'c_2'c_1'\left[3\operatorname{sen}3A+3\operatorname{sen}5A\right]+\frac{1}{2}c_1'^2c_2'\left[\frac{3}{2}+3\cos 2A+\frac{3}{2}\cos 4A\right]
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{2}s_2'^2c_2'\left[\frac{3}{2}\cos 2A-\frac{3}{2}\cos 6A\right]+\frac{1}{2}c_2'^3\left[\frac{3}{2}\cos 2A+\frac{1}{2}\cos 6A\right]$$

$$+\frac{1}{2}s_2'c_2'^2\left[\frac{3}{2}\operatorname{sen} 2A+\frac{3}{2}\operatorname{sen} 6A\right]+\frac{1}{2}s_2'^3\left[\frac{3}{2}\operatorname{sen} 2A-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 6A\right]$$

Para representar los términos del cuarto grado x^4, x^3y, etc., son suficientes los términos siguientes:

$$x^4=\frac{1}{2}s_1^4\left[1-\frac{5}{4}\cos 2A+\frac{1}{4}\cos 4A\right]$$

$$x^3y=\frac{1}{2}s_1^3c_1'\left[\frac{3}{4}\operatorname{sen} 2A-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4A\right]$$

$$x^2y^2=\frac{1}{8}c_1'^2s_1^2\left[1-\cos 4A\right] \tag{163}$$

$$xy^3=\frac{1}{4}c_1'^3s_1\left[\operatorname{sen} 2A+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 4A\right]$$

$$y^4=\frac{1}{8}c_1'^4\left[3+4\cos 2A+\cos 4A\right]$$

Los términos a considerar del 5° grado son los siguientes:

$$(x^2+y^2)^2x=\left[\frac{3}{8}s_1^4+\frac{3}{8}c_1'^4+\frac{1}{4}s_1^2c_1'^2\right]s_1\operatorname{sen} A-\frac{1}{4}s_1(s_1^4-c_1'^4)\left[-\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} 3A\right]+$$
$$+\frac{1}{16}s_1(s_1^2-c_1'^2)^2\left[-\operatorname{sen} 3A+\operatorname{sen} 5A\right]$$

$$(x^2+y^2)^2y=\left[\frac{3}{8}s_1^4+\frac{3}{8}c_1'^4+\frac{1}{4}s_1^2c_1'^2\right]c_1'\cos A-\frac{1}{4}c_1'(s_1^4-c_1'^4)\left[\cos A+\cos 3A\right]+$$
$$+\frac{1}{16}c_1'(s_1^2-c_1'^2)\left[\cos 3A+\cos 5A\right]$$

Hay que observar que el coeficiente K de s_1 sen A en $(x^2+y^2)x$ y el de c_1' cos A, en $(x^2+y^2)y$ satisface a la misma expresión que originariamente se ha representado por la siguiente:

$$K=\frac{1}{4}(s_1^2+c_1'^2)^2+\frac{1}{8}(s_1^2-c_1'^2)^2=4° \text{ grado}$$

ahora en la primera aproximación es:

$$s_1=\alpha \quad \text{y} \quad c_1'=\alpha\frac{s}{a_3'}$$

así se obtiene:

$$s_1^2-c_1'^2=\alpha^2\left(1-\frac{s^2}{a_3'^2}\right), \quad \text{o siendo } s^2=a_3'b_2':$$

$$s_1^2 - c_1'^2 = \varkappa^2\left(1 - \frac{b_2'}{a_3'}\right), \quad \text{donde}: \frac{b_2'}{a_3'} = 1 + \varepsilon_2, \text{ siendo } \varepsilon_2 = 2^\circ \text{ grado},$$

$$\text{luego}: s_1^2 - c_1'^2 = -\varkappa^2\varepsilon_2 = 4^\circ \text{ grado}; \qquad \text{y} \qquad (s_1^2 - c_1'^2)^2 = 8^\circ \text{ grado}$$

por eso se anula el término $(s_1^2 - c_1'^2)^2$ en K y asimismo los términos en $s_1^4 - c_1'^4$ en las expresiones para:

$$(x^2+y^2)^2 x \quad \text{y} \quad (x^2+y^2)^2 y, \text{ ya que}: s_1^4 - c_1'^4 = (s_1^2 + c_1'^2)(s_1^2 - c_1'^2) = 6^\circ \text{ grado}$$

de modo que en suma, por no venir al caso los coeficientes del grado 9 y 7, los términos del 5° grado en x e y, se reducen a:

$$\left.\begin{aligned}(x^2+y^2)^2 x &= \frac{1}{4} s_1 (s_1^2 + c_1'^2) \operatorname{sen} A \\ (x^2+y^2)^2 y &= \frac{1}{4} c_1' (s_1^2 + c_1'^2) \cos A\end{aligned}\right\}$$

donde los coeficientes de sen A y cos A son del quinto grado.

Ahora podemos iniciar la deducción de los coeficientes de las series de Fourier reemplazando en los primeros y segundos miembros de nuestras ecuaciones diferenciales las variables x e y, junto con sus potencias y productos por las series de Fourier mencionadas, formando además, en los primeros miembros, las derivadas de las series que definen x e y; entonces se obtiene por la comparación sucesiva de los coeficientes de las mismas funciones cos nA o sen nA, respectivamente, ($n = 1$, 2, etc.), las relaciones que determinan los coeficientes de las series de Fourier y la frecuencia s. Los primeros coeficientes a determinar son s_1 y c_1', comparando el coeficiente de cos A en $\frac{dx}{dt}$ y sen A en $-\frac{dy}{dt}$. Por esto se obtiene en el primer paso las ecuaciones:

$$(164a)\left\{\begin{aligned}
&(1a) \quad \cos A, \left(\frac{dx}{dt}\right): +s_1 s = a_3' c_1' + a_5'\Big[\frac{1}{2} s_1 s_2' + \frac{1}{2} s_2 s_1' + \frac{1}{2} s_2 s_3' + \frac{1}{2} s_3 s_2' + \frac{1}{2} s_3 s_4' + \frac{1}{2} s_4 s_3' + \\
&+ \frac{1}{2} s_4 s_5' + \frac{1}{2} s_5 s_4' + \frac{1}{2} c_1 c_2' + \frac{1}{2} c_2 c_1' + \frac{1}{2} c_2 c_3' + \frac{1}{2} c_3 c_2' + \frac{1}{2} c_3 c_4' + \frac{1}{2} c_4 c_3' + \frac{1}{2} c_4 c_5' + \\
&+ \frac{1}{2} c_5 c_4'\Big] + a'_{10}\left[\frac{1}{4} s_1^2 c_1' + \frac{1}{2} s_2^2 c_1' + \frac{3}{4} c_1^2 c_1' + \frac{1}{2} c_2^2 c_1'\right] + a'_{12}\Big[\frac{1}{2} s_2'^2 c_1' + \frac{3}{4} c_1'^3 + \frac{1}{2} c_2'^2 c_1' + \\
&+ c_1' c_2'^2 + s_2'^2 c_1'\Big] + \frac{1}{4} a'_{17} c_1' (s_1^2 + c_1'^2)^2 \\
&(1b) \quad \operatorname{sen} A, \left(-\frac{dy}{dt}\right): c_1' s = b_2' s_1 + b_4'[-s_1 c_2 + s_2 c_1 - s_2 c_3 + s_3 c_2 - s_3 c_4 + s_4 c_3 - s_4 c_5 + s_5 c_4 + \\
&+ b_6'[-s_1' c_2' + s_2' c_1' - s_2' c_3' + s_3' c_2' - s_3' c_4' + s_4' c_3' - s_4' c_5' + s_5' c_4'] + b_9'\Big[\frac{3}{4} s_1^3 + \frac{1}{2} s_2^2 s_1 + \\
&+ \frac{1}{4} c_1^2 s_1 + \frac{1}{2} c_2^2 s_1 + s_1 s_2^2 + s_1 c_2^2\Big] + b_{11}'\left[\frac{1}{4} s_1 c_1'^2 + \frac{1}{2} s_1 c_2'^2 + \frac{1}{2} s_1 s_2'^2\right] + \frac{1}{4} b'_{16} s_1 (s_1^2 + c_1'^2)^2
\end{aligned}\right.$$

Según los resultados de nuestra primera aproximación anterior, la frecuencia s es del grado cero, de modo que el primer miembro, ya que s_1 y c_1' son del primer grado en base a la primera solución aproximada, es del primer grado, como también el primer término del segundo miembro, mientras que todos los términos complementarios son de un grado mayor de uno, siendo la suma de los índices de los factores de un término cualquiera mayor que uno, por lo menos igual a tres.

Se agrega todavía el grado del factor a_5', etc., de modo que el grado del término fijado puede aumentarse. Los términos en a'_{10} y b_3' comprueban que el grado más bajo de los términos complementarios es tres. Por eso las dos ecuaciones se reducen en la primera aproximación, omitiendo los términos del tercer grado, a las siguientes : (141)

$$\begin{cases} s_1 s = a_3' c_1^1 \\ c_1' s = b_2' s_1 \end{cases}$$

es decir, resultan ecuaciones ya conocidas desde la primera aproximación. Debiendo anularse ambas incógnitas o la determinante, pero siendo al menos una de las incógnitas distinta de cero, resulta, por ser igual a cero, la determinante, que $s^2 = a_3' \,.\, b_2' =$ grado 0, en primera aproximación. Fijando la incógnita $s_1 = \alpha =$ primer grado de la primera constante arbitraria de nuestras ecuaciones diferenciales, resulta la otra incógnita, $c_1' = \dfrac{s}{a_3'}\alpha =$ primer grado, mientras s lo mismo que a_3' son de cero grado. La nota saliente de la solución es entonces la de originar una corrección de la solución anterior en base de cada otro nuevo par de coeficientes ; y asimismo respecto a la frecuencia s, resultando las correcciones de un grado siempre más alto. Para poder considerar los términos más altos, necesitamos primeramente la deducción aproximada de los mismos, para poder comprender el algoritmo del cálculo del número infinito de las incógnitas.

Las dos constantes arbitrarias $\alpha = s_1$ y β pueden ser consideradas como las dos constantes de integración de nuestras ecuaciones diferenciales (129). Por eso todas las otras constantes, que aparecen en el curso de la integración, es decir, todos los otros coeficientes s_i, c_i, s_i', c_i' con excepción de s_1 son funciones sólo de s_1 y β, primero c_1, como hemos visto antes.

La primera consecuencia resulta, en primer lugar, de la deducción del par siguiente de coeficientes c_1 y s_1', a cuya deducción se refiere el par de ecuaciones (1 c) y (1 d), comparando los coeficientes de sen A en $\dfrac{dx}{dt}$; y cos A en $-\dfrac{dy}{dt}$, en base a la ecuación (153) :

$$(164b)\left\{\begin{aligned} &(1c)\ \text{sen A}, \left(\frac{dx}{dt}\right):\ -sc_1 = a_3's_1' + a_5'\Big[-\frac{1}{2}s_1c_2' + \frac{1}{2}s_2c_2' - \frac{1}{2}s_2c_3' + \frac{1}{2}s_3c_2' - \frac{1}{2}s_3c_4' + \frac{1}{2}s_4c_3' - \\ &\qquad - \frac{1}{2}s_4c_5' + \frac{1}{2}s_5c_4' + \frac{1}{2}c_1s_2' - \frac{1}{2}c_2s_1' + \frac{1}{2}c_2s_3' - \frac{1}{2}c_3s_2' + \frac{1}{2}c_3s_4' - \frac{1}{2}c_4s_3' + \\ &\qquad + \frac{1}{2}c_4s_5' - \frac{1}{2}c_5s_4'\Big] + a'_{10}\Big[\frac{1}{2}s_1c_1c_1' + s_1c_2c_2' + s_1s_2s_2' + \frac{3}{8}s_1's_1^2 + \frac{1}{4}s_1'c_1^2 + \\ &\qquad + \frac{1}{2}s_1'c_2^2\Big] + a'_{12}\Big[\frac{1}{4}s_1'c_1'^2 + \frac{1}{2}c_1'^2s_1'\Big] \end{aligned}\right.$$

$$
(164b)\left\{\begin{aligned}
&(1d)\cos A,\left(-\frac{dy}{dt}\right):\ -s\,.\,s_1'=b_2'c_1+b_4'\,[s_1s_2+s_2s_3+s_3s_1+c_1c_2+c_2c_3+c_3c_4+c_4c_5]\\
&\quad+b_6'\,[s_1's_2'+s_2's_3'+s_3's_1'+c_1'c_2'+c_2'c_3'+c_3'c_4'+c_4'c_5']\,+\\
&\quad+b_9'\left[\frac{1}{2}s_1^2c_1+\frac{3}{2}s_2^2c_1+c_1^3+s_2c_1c_2\right]+b'_{11}\left[\frac{1}{4}s_1s_1'c_1'+\frac{1}{2}s_2s_2'c_1'\,+\right.\\
&\quad+\frac{1}{2}c_2c_2'c_1'+c_1c_2'^2+\frac{1}{2}c_2c_1'c_2'+\frac{1}{2}s_2c_1's_2'+\frac{1}{4}c_2s_1's_2'\,+\\
&\quad\left.+\frac{1}{4}s_1's_1c_1'+\frac{1}{4}s_1'^2c_1\right]
\end{aligned}\right.
$$

donde, en los segundos miembros, los términos que siguen a los términos principales $a_3'\,.\,s_1'$ y $b_2'\,.\,c_1$, son todos del tercer grado por lo menos, como ya es visible por la suma de los índices, que es por lo menos del tercer grado; prescindiendo todavía del grado de los coeficientes a_i' y b_i', mientras que los dos primeros términos de cada ecuación relativa a c_1 y s_1' están multiplicados con coeficientes del grado cero. Despreciando los otros términos del tercer grado por lo menos, las ecuaciones ($1c$) y ($1d$) fijan dos ecuaciones lineales homogéneas respecto a c_1 y s_1'.

La determinante del sistema es la misma que la de las ecuaciones ($1a$) y ($1b$), de ($140a$); es decir, $\Delta=s^2-b_2'a_3'$, igual a cero, por la prueba anterior. Por ello c_1 es una función lineal de s_1' e inversamente $c_1=-\dfrac{a_3'}{s}s_1'$, de modo que c_1 o s_1' parece fijar otra constante arbitraria, que por otra parte no es posible después de aceptar las constantes $\alpha=s_1$ y β como constantes de integración. Por consiguiente c_1 debe ser cero, por esto también s_1', de modo que el término cos A en x y el término sen A en y, no existen, respecto de la primera aproximación. Después de obtener una primera aproximación respecto a los otros coeficientes, podemos volver en la segunda aproximación, al problema de ver si el resultado de la primera aproximación $c_1=s_1'=0$, vale también respecto a la siguiente o a todas las otras aproximaciones, respectivamente.

El próximo paso se refiere a la comparación de los coeficientes de cos 2A, en $\dfrac{dx}{dt}$ y sen 2A en $-\dfrac{dy}{dt}$, y análogamente de los coeficientes de sen 2A, en $\dfrac{dx}{dt}$ y cos 2A en $-\dfrac{dy}{dt}$, por la comparación de los pares de coeficientes s_2, c_2' o s_2', c_2, respectivamente. Las ecuaciones correspondientes son:

$$
(165)\left\{\begin{aligned}
&(2a)\cos 2A,\left(\frac{dx}{dt}\right):\ 2s_2s=a_3'c_2'+a_5'\left[\frac{1}{2}s_1s_3'+\frac{1}{2}s_2s_4'+\frac{1}{2}s_3s_5'+\frac{1}{2}s_4s_2'+\frac{1}{2}s_5s_3'\,+\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{2}c_2c_4'+\frac{1}{2}c_3c_1'+\frac{1}{2}c_3c_5'+\frac{1}{4}c_4c_2'+\frac{1}{2}c_5c_3'\right]+a_{10}'\left[\frac{1}{2}s_1s_2c_1'+\frac{1}{2}s_1^2c_2'+\frac{1}{4}s_2^2c_2'\,+\right.\\
&\quad\left.+\frac{3}{4}c_2^2c_2'+\frac{1}{2}s_2c_2s_2'\right]+a'_{12}\left[+c_1'^2c_2'+\frac{1}{4}s_2'^2c_2'+\frac{1}{2}c_1'^2c_2'+\frac{3}{4}c_2'^3+\frac{1}{2}s_2'^2c_2'\right]\\
&(2b)\operatorname{sen}2A,\left(-\frac{dy}{dt}\right):\ 2c_2's=b_2's_2+b_4'\,[-s_1c_3-s_2c_4-s_3c_5+s_4c_2+s_5c_3]+b_6'\,[-s_2'c_4'\,+\\
&\quad+s_3'c_1'-s_3'c_5'+s_4'c_2'+s_5'c_3']+b_9'\left[\frac{3}{2}s_1^2\,.\,s_2+\frac{3}{4}s_2^3+\frac{3}{4}c_2^2s_2\right]+\\
&\quad+b_{11}'\left[\frac{1}{2}c_1'^2s_2+\frac{1}{4}s_2c_2'^2+\frac{1}{4}c_2s_2'c_2'+\frac{3}{4}s_2s_2'^2+\frac{1}{4}c_2c_2's_2'\right]
\end{aligned}\right.
$$

En estas dos ecuaciones aparecen las dos incógnitas s_2 y c_2' en el primer término del primer miembro y en el primer término del segundo miembro, multiplicados por los factores del grado cero, es decir s, a_3' y b_2', mientras que todos los otros términos en s_2 y c_2', multiplicados por el factor de grado uno : a_5' y b_4', asimismo, como todos los otros términos están multiplicados por factores de grado más alto de cero, de modo que todos los términos en a_5' y b_4' y los otros coeficientes de las ecuaciones diferenciales respecto de $\frac{dx}{dt}$ y $-\frac{dy}{dt}$ pueden omitirse en la primera aproximación. De ahí que resulten las siguientes ecuaciones :

$$(166)\qquad \begin{cases} 2ss_2 - a_3' . c_2' = 0 \\ b_2's_2 - 2s . c_2' = 0 \end{cases}$$

donde la determinante $\Delta = -4 . s^2 + a_3'b_2'$ es distinta de o, ya que en el primer paso hemos hallado que $-s^2 + a^{3\prime} . b_2' = 0$, de manera que la determinante se reduce a : $\Delta = -3s^2 \neq 0$. Por eso resulta respecto a las incógnitas $s_2 = 0$ y $c_2' = 0$. Este resultado está conforme con otro deducido anteriormente, fijando los términos del tercer grado, según el método anterior de aproximación (véanse las fórmulas 113*a*, etc.) con el resultado de que $\gamma_2' = \delta_1' = 0$, es decir $s_2 = c_2' = 0$, y además $\gamma_1' \neq 0$, análogamente $\delta_2' \neq 0$, lo que corresponde a c_2 y $s_2' \neq 0$, lo que queremos probar ahora por medio del sistema (2*c*) y (2*d*) paralelo a (2*a*) y (2*b*), es decir en base a los coeficientes de las co-funciones de cos 2A y sen 2A, respecto de (2*a*) y (2*b*) :

(167) (2*c*) sen 2A, $\left(\frac{dx}{dt}\right)$:

$$\begin{aligned}
-2c_2s = a_3's_2' + a_5' \Big[& \frac{1}{2} s_1c_1' - \frac{1}{2} s_1c_3' - \frac{1}{2} s_2c_4' + \frac{1}{2} s_3c_1' - \frac{1}{2} s_3c_5' + \frac{1}{2} s_4c_2' + \\
& + \frac{1}{2} s_5c_3' + \frac{1}{2} c_2s_4' + \frac{1}{2} c_3s_5' - \frac{1}{2} c_4s_2' - \frac{1}{2} c_5s_3' \Big] + a'_{10} \Big[\frac{1}{2} s_2c_2 . c_2' + \\
& + \frac{1}{2} s_1^2s_2' + \frac{3}{4} s_2^2s_2' + \frac{1}{4} c_2^2s_2' \Big] + a'_{12} \Big[s_2'c_1'^2 + \frac{1}{2} s_2c_2'^2 + \frac{3}{4} s_2'^3 + \frac{1}{2} c_1'^2s_2' + \\
& + \frac{1}{4} c_2'^2s_2' \Big] + \frac{3}{8} a'_{13}s_1^3c_1' + \frac{1}{4} a'_{14}c_1'^3s_1
\end{aligned}$$

(2*d*) cos 2A, $\left(-\frac{dy}{dt}\right)$:

$$\begin{aligned}
-2s_2's = b_2'c_2 + b_4' \Big[& -\frac{1}{2} s_1^2 + s_1s_3 + s_2s_4 + c_2c_4 + c_3c_5 \Big] + b_6' \Big[-\frac{1}{2} s_2'^2 + \\
& + \frac{1}{2} c_1'^2 + s_1's_3' + s_2's_4' + c_1'c_3' + c_2'c_4' + c_3'c_5' \Big] + b_9' \Big[s_1^2c_2 + \frac{1}{2} s_2^2c_2 + \\
& + \frac{1}{2} s_1^2c_2 + \frac{1}{4} s_2^2c_2 + \frac{3}{4} c_2^3 \Big] + b'_{11} \Big[\frac{1}{2} c_2c_1'^2 + \frac{3}{4} c_2c_2'^2 + \frac{1}{4} s_2c_2's_2' + \\
& + \frac{1}{4} c_2s_2'^2 \Big] - \frac{5}{8} b'_{13}s_1^4 + \frac{1}{2} b'_{15}c_1'^4
\end{aligned}$$

donde en base al resultado anterior, hay que sustituir $s_2 = c_2' = 0$.

Los coeficientes s, a_3' y b_2' de ambas incógnitas c_2 y s_2', en los primeros términos de los dos miembros de las últimas ecuaciones son del grado cero ; por otra parte el segundo término del segundo miembro de (2c) de (144), es decir $1/2\, a_5' s_1 c_1'$ es del tercer grado, según la determinación anterior de que $s_1 = 1^{er}$ grado, $c_1' = 1^{er}$ grado, asimismo como a_5', de modo que este término es del grado tres, es decir del grado mínimo posible, siendo todos los otros coeficientes, según los índices, de grado mayor. Asimismo el primer término de (2d), libre de las incógnitas c_2 y s_2' : $-1/2\, b_4' s_1^2$, además otro término $1/2\, b_6' c_1'^2$ son del tercer grado, mientras que todos los otros términos son de grado más alto y por eso pueden omitirse. Por consiguiente resultan los dos coeficientes incógnitos c_2 y s_2' en la primera aproximación, en base al sistema inhomogéneo

$$(168) \qquad \left\{ \begin{aligned} -2s \,.\, c_2 - a_3' s_2' &= 1/2\, a_5' s_1 c_1' \\ b_2' c_2 + 2 s s_2' &= 1/2\, b_4' s_1^2 - 1/2\, b_6' c_1'^2 \end{aligned} \right.$$

donde la determinante del sistema es : $\Delta = -4 \,.\, s^2 + a_3' b_2' \neq 0$, siendo idéntico con la determinante del sistema (2a) y (2b) y del grado cero. Por otra parte, las partes inhomogéneas son, según la prueba, del tercer grado, de modo que las incógnitas c_2 y s_2' son del tercer grado. Resulta (146) :

$$(169) \qquad \left\{ \begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{\Delta}\left[s a_5' s_1 c_1' + \frac{1}{2} a_3' b_4' s_1^2 - \frac{1}{2} a_3' b_6' c_1'^2 \right] = 3er \text{ grado} \\ s_2 &= \frac{1}{\Delta}\left[-\frac{1}{2} a_5' b_2' s_1 c_1' - s b_4' s_1^2 + s b_6' c_1'^2 \right] = 3er \text{ grado} \end{aligned} \right.$$

y de orden 0, porque s_1 y c_1' son de orden 0 ; pero s, b_4', b_6', a_3', b_2', a_5' son de orden uno ; y la determinante Δ es de orden dos. Por esto resulta que las partes inhomogéneas de las ecuaciones en la determinación de c_2 y s_2' son funciones de los coeficientes s_1 y c_1' deducidos en el paso anterior, de tal modo que desde ahora podemos sacar en conclusión de que todos los otros coeficientes son deducibles, en general, de funciones de los coeficientes obtenidos anteriormente.

Al considerar el próximo paso hay que deducir los coeficientes con el índice tres, primeramente c_3 y s_3' de modo que en primer lugar debemos deducir los coeficientes de sen 3A en $\frac{dx}{dt}$ y de cos 3A en $-\frac{dy}{dt}$. Análogamente al paso anterior, y considerando que $c_1 = s_1' = c_2' = s_2 = 0$, obtenemos las ecuaciones

$$(170) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(3a) \text{ sen } 3A, \left(\frac{dx}{dt}\right) : -3 c_3 s = a_3' s_3' + a_5' \left[\frac{1}{2} s_1 c_2' - \frac{1}{2} s_1 c_4' + \frac{1}{2} s_2 c_1' + \frac{1}{2} c_4 s_1' + \frac{1}{2} c_2 s_5' - \frac{1}{2} c_5 s_2' \right] + 0 \\ &(3b) \cos 3A, \left(-\frac{dy}{dt}\right) : -3 s_3' s = b_2' c_3 + b_4' [s_1 s_4 + c_2 c_5] + 0 \end{aligned} \right.$$

significando la cifra cero en los segundos miembros que todos los coeficientes siguientes ya han sido considerados y que las expresiones de todos los factores se eliminan.

Los coeficientes de losparéntesis de a_5' en (3a) y de b_4' y b_6' en (3b) son, también aquí, simples productos de los coeficientes s_i, c_i, s_i' y c_i', pero no apareciendo sólo el índice uno de los dos factores, de modo que no existe, respecto a este índice sólo, ningún término distinto de cero. Ahora bien, uno de los factores de cada término puede ser afectado del índice uno o dos, pero como podrá verse, todos estos términos se anulan en virtud de las relaciones $c_1 = s_1' = c_2' = s_2 = 0$.

Además uno de los factores puede tener el índice cuatro o cinco, de modo que el grado de los términos es mayor de tres, es decir un supuesto grado respecto de las incógnitas c_3 y s_3', pero exactamente estos coeficientes con el índice cuatro y cinco se eliminan, como vamos a ver en el próximo paso. Además los coeficientes de a'_{10} y a'_{12} como asimismo los de b_9' y b'_{11}, todos conteniendo tres factores, son nulos. Por eso las incógnitas c_3 y s_3' y la determinante $\Delta = 9s^2 - a_3' \,.\, b_2' = 8s^2 \neq 0$, por $s^2 - a_3'b_2' = 0$, son de un grado mayor que tres, por ello resulta nulo en la primera aproximación : $c_3 = s_3' = 0$.

Pasemos ahora a la deducción de los coeficientes correspondientes s_3 y c_3' en base a los coeficientes de cos 3A en $\dfrac{dx}{dt}$ y sen 3A en $-\dfrac{dy}{dt}$; entonces resultan las ecuaciones siguientes :

(171)

$$(3c) \cos 3A, \left(\frac{dx}{dt}\right):$$

$$+3s_3s = a_3'c_3' + a_5'\left[-\frac{1}{2}s_1s_2' + \frac{1}{2}s_1s_4' + \frac{1}{2}s_2s_5' + \frac{1}{2}s_5s_2' + \frac{1}{2}c_2c_1' + \frac{1}{2}c_2c_5' + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}c_4c_1' + \frac{1}{2}c_5c_2'\right] + a'_{10}\left[-\frac{1}{2}s_1^2c_1' + \frac{1}{4}c_2^2c_1' + \frac{1}{2}s_1c_2s_2'\right] +$$
$$+ a'_{12}\left[-\frac{1}{4}s'^2_2c_1' + \frac{1}{4}c'^3_1 - \frac{1}{2}s_2'c_1's_2'\right]$$

$$(3d) \text{ sen } 3A, \left(-\frac{dy}{dt}\right):$$

$$+3c_3's = b_2's_3 + b_4'[s_1c_2 - s_1c_4 + s_5c_2] + b_6'[s_2'c_1' - s_2'c_5' + s_4'c_1']$$
$$+ b_9'\left[-\frac{1}{4}s_1^3 - \frac{1}{4}c_2^2s_1 - \frac{1}{2}s_1c_2^2\right] + b'_{11}\left[\frac{1}{4}s_1c'^2_1 + \frac{1}{4}c_2s_2'c_1' + \frac{1}{4}s_1s'^2_2 + \frac{1}{4}c_2c_1's_2'\right]$$

Los términos de menor grado, es decir del tercer grado, se encuentran en los segundos miembros de las dos ecuaciones (3c) y (3d) sólo en los coeficientes de a'_{10} y a'_{12}, b_9' y b'_{11}, de grado cero, es decir los coeficientes : $-\frac{1}{2}s_1^2c_1'$ en a'_{10} ; $+\frac{1}{4}c'^3_1$ en a'_{12} ; $-\frac{1}{4}s_1^3$ en b_9' y $+\frac{1}{4}s_1c'^2_1$ en b'_{11}, de modo que todos estos términos, incluyendo los factores a'_{10}, a'_{12}, b_9' y b'_{11} son del tercer grado. Por eso las incógnitas s_3 y c_3' son términos del tercer grado, ya que también en este caso la determinante es la misma que en el caso antes tratado, distinto de cero y del grado cero, de modo que en la primera aproximación tenemos :

(172)

$$s_3 = \frac{1}{\Delta}\left\{3s\left[-\frac{1}{2}s_1^2c_1'a'_{10} + \frac{1}{4}c'^3_1a'_{12}\right] + a_3'\left[-\frac{1}{4}s_1^3b_9' + \frac{1}{4}s_1c'^2_1b'_{11}\right]\right\} = 3^{\text{er}} \text{ grado}$$

$$c_3' = \frac{1}{\Delta}\left\{b_2'\left[-\frac{1}{2}s_1^2c_1'a'_{10} + \frac{1}{4}c'^3_1a'_{12}\right] + 3s\left[-\frac{1}{4}s_1^3b_9' + \frac{1}{4}s_1c'^2_1b'_{11}\right]\right\} = 3^{\text{er}} \text{ grado}$$

El orden de los coeficientes respecto a la masa perturbante también en el caso presente es cero, ya que las magnitudes entre paréntesis son, con relación al orden de los coeficientes, del segundo orden, y la determinante Δ misma es del segundo orden también.

Ahora los coeficientes próximos a deducir son c_4, s_4' y c_4', s_4 en base a los términos en sen 4A y cos 4A de nuestras ecuaciones diferenciales, es decir por medio de :

$$(173)\quad \begin{cases} (4a)\ \operatorname{sen} 4A \left(\dfrac{dx}{dt}\right) : \\ \quad -4c_4 s = a_3' s_4' + a_5'\left[\dfrac{1}{2}s_1c_3' - \dfrac{1}{2}s_1c_5' + \dfrac{1}{2}s_3c_1' + \dfrac{1}{2}s_5c_1' + \dfrac{1}{2}c_2s_2'\right] + \\ \quad\quad + a'_{10}\left[\dfrac{1}{2}s_1c_2c_1' - \dfrac{1}{4}s_1^2s_2'\right] + \dfrac{3}{4}c'^2_1 s_2' a'_{12} - \dfrac{1}{8}s_1^3c_1'a'_{13} + \dfrac{1}{8}c'^3_1 s_1 a'_{14} \\ (4b)\ \cos 4A\left(-\dfrac{dy}{dt}\right) : \\ \quad -4s_4's = b_2'c_4 + b_4'\left[\dfrac{1}{2}c_2^2 - s_1s_3\right] + b_6'\left[-\dfrac{1}{2}s'^2_2 + c_1'c_3' + c_1'c_5'\right] - \dfrac{3}{4}s_1^2 \cdot c_2b_9' + \\ \quad\quad + b'_{11}\left[-\dfrac{1}{2}s_1s_2'c_1' + \dfrac{1}{4}c_2c'^2_1\right] + \dfrac{1}{8}s_1^4b'_{13} - \dfrac{1}{8}c'^2_1s_1^2b'_{14} + \dfrac{1}{8}c'^4_1b'_{15} \end{cases}$$

considerando que algunos de los coeficientes hasta ahora deducidos son nulos. En todos los coeficientes entre paréntesis de a_5', a'_{10} etc. hasta b'_{15}, hay términos distintos de cero, al menos del quinto grado inclusive los coeficientes a_5' etc. Estos términos son los siguientes :

$$(174)\quad \begin{cases} (4a) : \quad a_5'\left[\dfrac{1}{2}s_1c_3' + \dfrac{1}{2}s_3c_1'\right] + a'_{10}\left[\dfrac{1}{2}s_1c_2c_1' - \dfrac{1}{4}s_1^2s_2'\right] + \dfrac{3}{4}a'_{12}s_2'c'^2_1 - \dfrac{1}{8}a_3's_1^3c_1' + \\ \quad\quad + \dfrac{1}{8}c'^3_1s_1a'_{14} \\ (4b) : \quad -s_1s_3b_4' + c_1'c_3'b_6' - \dfrac{3}{4}s_1^2c_2b_9' + \left[-\dfrac{1}{2}s_1s_2'c_1' + \dfrac{1}{4}c_2c'^2_1\right]b'_{11} + \\ \quad\quad + \dfrac{1}{8}s_1^4b'_{13} - \dfrac{1}{8}c'^2_1s_1^2b'_{14} + \dfrac{1}{8}c'^4_1b'_{15} \end{cases}$$

Siendo la determinante del sistema $\Delta = 16\,s^2 - a_3'b_2' = 15\,s^2 \neq 0$, y del grado 0, las incógnitas c_4 y s_4' son distintas de cero también, y, en los segundos miembros, del quinto grado y del orden cero, como los coeficientes anteriores.

Por la deducción de los coeficientes correspondientes c_4' y s_4 formamos las ecuaciones correspondientes en base a cos 4A en $\dfrac{dx}{dt}$ y sen 4A en $-\dfrac{dy}{dt}$:

(175)

$$(4c) \cos 4A \left(\frac{dx}{dt}\right): \; + 4s_4 s = a_3' c_4' + a_5' \left[\frac{1}{2} s_1 s_5' + \frac{1}{2} c_5 c_1'\right] = a_3' c_4' +$$

términos del 7° grado por lo menos ya que c_5 y s_5' son, probablemente, del 5° grado por lo menos.

$$(4d) \operatorname{sen} 4A \left(-\frac{dy}{dt}\right): \; 4c_4' s = b_2' s_4 - b_4' s_1 c_5 + b_6' s_5' c_1 = b_2' s_4 +$$

términos del 7° grado por lo menos, por el mismo motivo que en $(4c)$.

En las dos ecuaciones casi todos los factores se destruyen en base a los resultados anteriores, de manera que, en los coeficientes a_5' y b_{11}', permanecen sólo los factores antes fijados y distintos de cero. Estos términos dependen de los coeficientes c_5 y s_5' todavía incógnitos que serán determinados en el paso siguiente, pero ya podemos anticipar que los dos coeficientes se anulan como es de suponer según la determinación anterior de los coeficientes, siendo $c_1 = s_1' = c_3 = s_3' = 0$. Siendo la determinante del sistema la misma que en el sistema paralelo $\Delta = 16s^2 - a_3' b_2' = 15s^2 \neq 0$, resulta que las incógnitas $s_4 = c_4' = 0$.

Además vamos a deducir ahora los próximos coeficientes s_5 y c_5', por comparación de los coeficientes de cos 5A en $\frac{dx}{dt}$ y sen 5A en $-\frac{dy}{dt}$. Obtenemos entonces las dos ecuaciones siguientes:

(176)

$$(5a) \cos 5A, \left(\frac{dx}{dt}\right): \; + 5s_5 s = a_3' c_5' + a_5' \left[-\frac{1}{2} s_1 s_4' + \frac{1}{2} s_3 s_2' + \frac{1}{2} c_2 c_3' + \frac{1}{2} c_4 c_1'\right] + a'_{10} \times \left[\frac{1}{4} c_2^2 c_1' - \frac{1}{2} s_1 c_2 s_2'\right] - \frac{1}{4} s_1 c_1' s_3 a'_{10} + \frac{1}{4} c_1'^2 c_3' a'_{12}$$

$$(5b) \operatorname{sen} 5A, \left(-\frac{dy}{dt}\right): \; + 5c_5' s = b_2' s_5 - \frac{1}{4} s_1^2 s_3 b_9' + \frac{1}{4} s_1 c_1' c_3' b'_{11} +$$

términos del 7° grado.

Los términos de menor graduación, es decir, del quinto grado, aparecen en los factores de a'_{10}, a'_{12}, b_9' y b'_{11}, nuevamente como funciones sólo de los coeficientes ya deducidos, mientras que todos los otros términos, y también los coeficientes a_i' y b_k' inclusive, son del séptimo grado. Siendo la determinante $\Delta = 25s^2 - a_3' b_2' = 24s^2 \neq 0$, las incógnitas s_5 y c_5' son distintos de cero y del grado cinco, de modo que:

(177)

$$s_5 = \frac{1}{\Delta}\left[5s\left(-\frac{1}{4} s_1 c_1^2 s_3 a'_{10} + \frac{1}{4} c_1'^2 c_3' a'_{12}\right) + a_3'\left(-\frac{1}{4} b_9' s_1^2 s_3 + \frac{1}{4} b'_{11} s_1 c_1' c_3'\right)\right]$$

$$c_5' = \frac{1}{\Delta}\left[b_2'\left(-\frac{1}{4} a'_{10} s_1 c_1' s_3 + \frac{1}{4} a'_{12} c_1'^2 c_3'\right) + 5s\left(-\frac{1}{4} b_9' s_1^2 s_3 + \frac{1}{4} b'_{11} s_1 c_1' c_3'\right)\right]$$

Por un método análogo se obtiene, comparando los coeficientes de sen 5A en $\frac{dx}{dt}$ y simultáneamente de cos 5A en $-\frac{dy}{dt}$ las ecuaciones que sirven a la determinación de c_5 y s_5'; el resultado corresponde a las deducciones anteriores relativas a un índice menor de cinco, resultando, como se podía esperar, $c_5 = s_5' = 0$.

La determinación de los coeficientes, en cuanto se refiere el desarrollo de la función perturbadora hasta el sexto grado, está terminada ahora. La planilla siguiente contiene una composición de los resultados de la determinación de los coeficientes

(178)	s_1 y $c_1' \neq 0$, Grado $= 1$	c_1 y $s_1' = 0$
	s_2 » $c_2' = 0$	c_2 » $s_2' \neq 0$, Grado $= 3$
	s_3 » $c_3' \neq 0$, Grado $= 3$	c_3 » $s_3' = 0$
	s_4 » $c_4' = 0$	c_4 » $s_4' \neq 0$, Grado $= 5$
	s_5 » $c_5' \neq 0$, Grado $= 5$	c_5 » $s_5' = 0$

donde la recursión en la estimación de los coeficientes es visible.

Ahora debemos volver a las ecuaciones de salida, para establecer la segunda y más altas aproximaciones de la deducción de las incógnitas. Especialmente hay que constatar que el primer grupo para la deducción de s_1 y c_1' en base a las ecuaciones (1*a*) y (1*b*), se reduce siempre a una ecuación homogénea cuya determinante Δ en s, debe ser cero, a fin de que al menos una de las incógnitas sea distinta de cero y de tal modo que generalmente resulta una solución, al mismo tiempo que una corrección de las raíces s de cada aproximación, es decir del período de la solución.

En la ecuación (1*a*) el término que debemos considerar primero después de los dos términos principales respecto de s_1 y c_1' es el siguiente: $\frac{1}{2} a_5' s_1 s_2' = 5°$ grado, ya que $a_5' = 1^{\text{er}}$ grado, $s_1 = 1^{\text{er}}$ grado y $s_2' = 3^{\text{er}}$ grado, según la deducción anterior de estas magnitudes, siendo s_2' una función del segundo grado respecto de s_1 y c_1' solamente. Por consiguiente tenemos ahora la posibilidad de unir el término mencionado en la segunda aproximación, con el término principal $s_1 s$, de manera que se origina el nuevo término $s_1\left(s - \frac{1}{2} a_5' s_2'\right)$ y por eso el factor s aparece corregido por una magnitud del cuarto grado. El próximo término a considerar es $+\frac{1}{2} a_5' s_2 s_1'$, pero se anula por ser $s_1' = 0$. También el siguiente término $\frac{1}{2} a_5' s_2 s_3'$ se anula por ser $s_2 = 0$. El término siguiente $\frac{1}{2} a_5' s_3 s_2'$, es distinto de cero, pero del séptimo grado y puede ser compuesto con los dos términos principales de (1*a*) por la proporcionalidad de los dos factores s_3 y s_2' a s_1 y c_1' de modo que los coeficientes de s_1 y c_1' son corregidos por términos del sexto grado, ya que s_1 y c_1' son del primer grado, etc., hasta que se llega al término $\frac{1}{2} a_5' c_2 c_1' = 5°$ grado, término que se puede componer directamente por el factor c_1', con el término principal correspondiente a c_1'. Continuando sucesivamente este procedimiento, llegamos primero a términos menores del quinto grado con el término $a'_{10} s_1^2 c_1' = 3^{\text{er}}$ grado, puesto que a'_{10} = grado cero y s_1 y c_1' es del grado uno, de modo que también aquí resulta una unión con uno de los términos principales. Además se nota que todos los términos en a'_{10} tienen el factor c_1', y por eso pueden combinarse con el mismo término principal correspondiente. Los términos en a'_{13} y a'_{14} son nulos, mientras que el término en a'_{17} tiene nuevamente el factor c_1'.

Pasando ahora a la ecuación ($1b$), se puede ver que, en el segundo miembro, como en ($1a$) los términos del grado más bajo, son los del tercer grado, y no aparecen desde b_9', proveniendo de los términos del cuarto grado de la función perturbadora R ; se trata de los 2 términos $b_9's_1^3 + \frac{1}{4} b'_{11}s_1c_1'^2 =$ 3*er* grado. Teniendo el factor común s_1, los 2 términos se reúnen con el término correspondiente principal en s_1 ; todos los otros términos son del quinto grado por lo menos, cuando no son cero, y tienen todos el factor común s_1. Por eso también la ecuación ($1b$) vuelve a reducirse a una ecuación homogénea pura, sólo con coeficientes alterados con términos de grado mayor, de modo que resulta, en lugar de ($1a$) y ($1b$) :

(179a)

$$(1a): \quad (s+\Delta_1)\, s_1 - (a_3' + \Delta a_3')\, c_1' = 0$$

$$(1b): \quad (s+\Delta_2)\, c_1' - (b_2' + \Delta b_2')\, s_1 = 0$$

donde las correcciones Δ_1, Δ_2, $\Delta a_3'$ y $\Delta b_2'$, de los coeficientes principales son del segundo grado por lo menos respecto de las incógnitas s_1 y c_1' las que no se anulan y progresan siempre en unidades dobles de grado. La primera aproximación relativa a los coeficientes s_1 y c_1' resultó con $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta a_3' = \Delta b_2' = 0$, asimismo la frecuencia s por medio de la determinante $\Delta = 0$. Por la substitución de la primera aproximación en los complementos resulta entonces la segunda aproximación relativa a las incógnitas y a la frecuencia s, etc. Siendo s_1, según nuestras ecuaciones anteriores, una función lineal de c_1' e inversamente, de manera que s_1 o c_1' es considerada como una de las constantes arbitrarias de la solución de nuestras ecuaciones diferenciales, la constante en el argumento $A = s\,.\,t + \beta$, es como antes, la otra constante arbitraria de la solución. Pasando ahora a la deducción de la segunda aproximación relativa al par de ecuaciones para c_1, s_1', que corresponden a s_1, c_1' según ($140b$) con las dos ecuaciones ($1c$) y ($1d$), resulta primeramente que, por la substitución de los primeros valores aproximados para los coeficientes s_i, c_i, s_i' y c_i' en el resto de las ecuaciones, desaparecen muchos términos, mientras que los otros términos tienen como factores las incógnitas c_1 y s_1', de modo que pueden unirse con los términos principales c_1 y s_1' de cada ecuación ; entonces originan dos nuevas ecuaciones homogéneas relativas a c_1 y s_1', cuyos coeficientes han ganado sólo un acrecentamiento de términos del segundo grado por lo menos, mientras que los coeficientes son del grado cero. Resultan las nuevas ecuaciones por la suma de los términos del segundo grado a los coeficientes principales :

(179b)

$$(1c) \quad c_1\left[s + \frac{1}{2} a'_{10} s_1 c_1'\right] + s_1'\left[a_3' + \frac{3}{8} a'_{10} s_1^2\right] = 0$$

$$(1d) \quad c_1\left[b_2' + \frac{1}{2} b_9' s_1^2\right] + s_1'\left[s + \frac{1}{4} b'_{11} s_1 c_1'\right] = 0$$

La determinante del sistema es $D'' = s^2 - a_3' b_2' +$ términos del segundo grado, mientras que la determinante de la primera aproximación resulta : $\Delta = s^2 - a_3' b_2' = 0$, la de la segunda aproximación en base al sistema de ecuaciones ($156a$) es : $D' = s^2 - a_3' b_2' +$ términos del segundo grado, de modo que las determinantes D′ y D″ se anulan hasta los términos del segundo grado. Siendo así la determinante, respecto a la segunda aproximación para c_1 y s_1' distinto de cero, resultan $c_1 = s_1' = 0$ también en la segunda aproximación. Pero también en el caso de que la determinante sea considerada igual a cero, de tal manera que c_1 según las ecuaciones homogéneas, sea considerada como una función de s_1' o inversamente, debe ser $s_1' = 0$, por eso también $c_1 = 0$, ya que, con excepción de las dos constantes arbitrarias de integración α y β, no pueden existir otras constantes independientes.

Análogamente se desarrolla el estudio relativo a la segunda aproximación en todos los grupos siguientes de los pares s_2, c_2' y c_2, s_2' además s_3, c_3' y c_3, s_3' etc ; en la parte inhomogénea siempre hay una serie de términos que tiene a las incógnitas como factores, de modo que pueden unirse con los términos principales, sumándose términos de un grado siempre mayor a los coeficientes, mientras que los residuos inhomogéneos permanecen distintos de cero en las ecuaciones de un par del grupo, pero se anulan en el otro par. Siendo la determinante del sistema para s_i, c_i, s_i', c_i' distinto de cero, si $i \neq 0$, según la prueba, de modo que $\Delta = i^2s^2 - a_3'b_2'$, prescindiendo aun de los términos restantes en las determinantes, las incógnitas, en el caso de las ecuaciones inhomogéneas, son distintas de cero ; en el otro caso, es decir para el otro par, son nulas.

Para finalizar tenemos que determinar todavía las partes constantes en $\frac{dx}{dt}$ y $-\frac{dy}{dt}$ las que resultan por el desarrollo de los segundos miembros según series de Fourier y las que hay que sumar a las partes constantes ya conocidas a_1' y b_1' siendo hasta ahora $a_1'=0$, por la suposición de que sea $\eta'=0$ por la elección conveniente de $\tilde{\omega}'$. Entonces resulta respecto de $\frac{dx}{dt}$ que los coeficientes sueltos desde a_5' son siempre multiplicados por uno de los factores s_1', s_2, s_3', s_4, … c_1, c_2', c_3, c_4' … y por eso se anulan, de modo que la contribución $\Delta a_1'=0$, es nula. En el caso de b_1' resulta una constante distinta de cero, es decir :

$$\Delta b_1' = \frac{1}{2} b_4' s_1^2 + \frac{1}{2} b_6' c_1'^2 - \frac{3}{4} b_9' s_1^2 c_2 + b'_{11}\left(\frac{1}{2} s_1 c_1' s_2' + \frac{1}{4} c_1'^2 c_2\right) + \frac{1}{2} b'_{13} s_1^4 + \frac{1}{8} b'_{14} s_1^2 c_1'^2 + \frac{3}{8} b'_{15} c_1'^4 \tag{180}$$

donde los dos primeros términos relativos a b_4' y b_6' son del tercer grado ; todos los otros del quinto grado.

§ 6. APLICACIONES DE LA TEORÍA A OTROS PROBLEMAS

La representación anterior fijada relativa a las perturbaciones de las variables-excentricidad e inclinación en la forma periódica puede ser aplicada no sólo al caso de las perturbaciones seculares planetarias, sino también al caso general de las perturbaciones planetarias, si no existe una conmensurabilidad aproximada de los movimientos medios. Fuera de la aplicación directa, es de utilidad en la consideración de las perturbaciones periódicas, en cuanto que se reemplazca los coeficientes de las funciones trigonométricas en las ecuaciones diferenciales generales respecto a ξ, η, p y q, y sus potencias antes de integrarlas, por medio de las series deducidas anteriormente

$$(181)\qquad \begin{aligned}\xi &= x + \Delta x = \alpha \operatorname{sen} \Lambda + c\alpha^3 \cos 2\Lambda + \ldots\\ \eta &= y + \Delta y = \alpha \cos \Lambda + d\alpha^3 \operatorname{sen} 2\Lambda + \ldots\end{aligned}$$

Por eso los argumentos Λ, 2Λ, etc. se suman a los argumentos de los términos periódicos de las perturbaciones, de modo que, por ejemplo, en el grado más bajo de las variables-excentricidad, resulta el argumento de la forma : $\Lambda_1 = k\Lambda + il' - (i-1)l$, donde $k = 1, 2, \ldots$ e $i = \pm 1, \pm 2, \ldots$ de manera que $\Lambda_1 = [ks + i \,.\, n' - (i-1)n]\,t + \beta'$, etc. y por eso, los divisores d son, por la integración del término correspondiente según t, de la forma $d = k \,.\, s + in' - (i-1) \,.\, n$; en el centro del anillo de los planetoides resulta, p. e. $s = 120''$ por año, de modo que el producto ks alcanza en treinta años el valor de un grado, por lo que debe tomarse en consideración desde la primera aproximación. Hay que recordar que hemos supuesto que $N = in' - (i-1) \,.\, n$ no sea pequeño, ya que, en caso contrario, si se trata de una conmensurabilidad aproximada de los movimientos medios, serían posibles fuertes variaciones periódicas, de modo que, en este caso, ya no es admisible una integración suponiendo que n y n' tengan valores fijos, ni siquiera en la primera aproximación, como sabemos por las investigaciones correspondientes. Pero en el caso de que la distancia a la posición de la conmensurabilidad sea bastante grande, de modo que $N = in' - (i-1)\,n$, puede ser considerado constante en la primera aproximación, pero siendo N moderadamente pequeño, de manera que una primera integración de las ecuaciones diferenciales seculares se realiza considerando los términos mencionados periódicos en R ; resultan en este caso ecuaciones diferenciales lineales, pero con coeficientes periódicos, cuya integración ha sido publicada por el autor en el tomo 51 del año 1905 en *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, en Berlín. Por eso mencionábamos sólo el resultado de que la solución es periódica, sin considerar los términos inclinación en la integración de ξ, η o las variables-excentricidad en la integración de p, q. Notable es el caso de excepción relativo a los tres satélites de Júpiter, por la relación de Laplace, respecto a la conmensurabilidad, es decir, $n - 2n' = n' - 2n'' = \text{const.} = 0^\circ 739507$, de modo que la constante es, además, muy pequeña, y a pesar de eso la solución del problema es periódica, fijando un caso muy raro de excepción y que se sostiene a pesar de la suposición de la posibilidad de una existencia sólo transitoria, de una solución periódica.

Finalmente, es posible ampliar la teoría anterior a cuerpos con excentricidades mucho mayores que las consideradas hasta ahora, es decir a los cometas periódicos, donde las excentricidades son mayores que 0,5 y por eso las ecuaciones diferenciales anteriores, según potencias de las variables-excentricidad, no pueden aplicarse más. En estos casos sea $\xi = \xi_0 + \delta\xi$ y $\eta = \eta_0 + \delta\eta$, siendo ξ_0 y η_0, los valores iniciales relativos al momento $t = 0$. Análogamente ponemos, respecto a las variables inclinación, $p = p_0 + \delta p$ y $q = q_0 + \delta q$, en este caso de los cometas periódicos, también de gran excentricidad, es de gran importancia un hecho que facilita mucho el cálculo, a saber, que las inclinaciones orbitales en general son pequeñas, de modo que las anteriores ecuaciones diferenciales respecto a las variables-inclinación, son aplicables en la primera aproximación, también en el caso de los cometas periódicos, prescindiendo en este caso de la influencia de las variables-excentricidad.

Partiendo otra vez de las ecuaciones diferenciales (1), es decir en forma abreviada :

$$(182)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= R_1\\ -\frac{d\eta}{dt} &= R_2\end{aligned}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= R_3\\ -\frac{dq}{dt} &= R_4\end{aligned}\right.$$

donde R_1 y R_2, los segundos miembros de nuestras ecuaciones, ya han sido fijadas explícitamente en (1) y resultan compuestas de las primeras derivadas de la función perturbadora R, según las variables ξ, η, p y q, considerando sólo que, según (161), el coeficiente común a las dos primeras ecuaciones :

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\frac{\partial R}{\partial\varphi}}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)\right]\left[1-\frac{3}{8}(p^2+q^2)\right]\left(p\frac{\partial R}{\partial p}+q\frac{\partial R}{\partial q}\right) \tag{183}$$

además el coeficiente común a las dos últimas ecuaciones :

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1-e^2}}\left(\eta\frac{\partial R}{\partial\xi}-\xi\frac{\partial R}{\partial\eta}\right) = \left[1-\frac{1}{4}(p^2+q^2)\right]\left[1+\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)\right]\left(\eta\frac{\partial R}{\partial\xi}-\xi\frac{\partial R}{\partial\eta}\right) \tag{184}$$

Desarrollando entonces los segundos miembros de las ecuaciones (182) según las potencias de las perturbaciones $\delta\xi$, $\delta\eta$, δp, δq, prescindiendo, por la próxima aplicación venidera a las perturbaciones seculares, de las variaciones del semi-eje mayor, resultan, limitando el desarrollo a los términos lineales respecto $\delta\xi$, etc., las siguientes ecuaciones :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= \frac{d\delta\xi}{dt} = a_1 + a_2\delta\xi + a_3\delta\eta + c_1\delta p + c_2\delta q \\
-\frac{d\eta}{dt} &= -\frac{d\delta\eta}{dt} = b_1 + b_2\delta\xi + b_3\delta\eta + d_1\delta p + d_2\delta q \\
\frac{dp}{dt} &= \frac{d\delta p}{dt} = e_1 + e_2\delta p + e_3\delta q + g_1\delta\xi + g_2\delta\eta \\
-\frac{dq}{dt} &= -\frac{d\delta q}{dt} = f_1 + f_2\delta p + f_3\delta q + h_1\delta\xi + h_2\delta\eta
\end{aligned}\right\} \tag{185}$$

Los coeficientes $a_i b_i \ldots h_i$ son, según la definición de los segundos miembros de (1), funciones lineales de la primera y segunda derivada de la función perturbadora R respecto a los elementos ξ, η, p y q, pero a calcular con los valores iniciales ξ_0, η_0, p_0 y q_0, mientras que, en el caso planetario, todos los coeficientes a_i, $b_i \ldots$ etc., hasta h_i se calculan con los valores $\xi=\eta=p=q=0$, y por eso sólo dependen de los parámetros ξ', η', p' y q', de modo que los valores anteriores de los coeficientes experimentan alteraciones, especialmente considerando de antemano, los términos-inclinación. En cuanto a la representación explícita de los coeficientes $a_i b_i$ etc., en el momento no existe ninguna necesidad, pudiendo presentarse en un caso concreto de la teoría de las perturbaciones. Ya que la función perturbadora R y también sus derivadas según los elementos ξ, η, etc., son funciones periódicas de las longitudes, pero las excentricidades en el caso de los cometas periódicos tienen grandes valores mayores de 0,5, los coeficientes a_i, etc., son calculables sólo en base a una cuadratura mecánica, es decir, en base a los métodos para determinar los coeficientes de las series de Fourier con dos argumentos, las longitudes medias del cometa y del cuerpo perturbante.

En el caso de las perturbaciones seculares todos los coeficientes a_i, b_i etc. se reducen a las constantes de las series periódicas mencionadas, de modo que el tipo de las ecuaciones diferenciales comparado con el caso planetario se mantiene aparentemente sin alteración. Pero a pesar de eso existe una diferencia esencial en cuanto al caso de los cometas, las ecuaciones diferenciales progresan según potencias de los $\delta\xi$, $\delta\eta$, etc., es decir según potencias de la masa perturbante, pero en el caso planetario según potencias de las variables ξ, η, p y q. Por consiguiente, en el segundo caso, todos los términos en las ecuaciones diferenciales son del primer orden de la masa, ya que todos los a_i ... etc. son del primer orden de la masa perturbante, mientras que en el caso de los cometas sólo los primeros términos a_1, b_1, e_1 y f_1 son del primer orden de la masa, pero todos los otros, es decir $a_2\delta\xi$, $a_3\delta\eta$, ... hasta $h_2\delta\eta$ del segundo orden, ya que los $\delta\xi$ etc. son del orden uno de la masa.

Una integración exacta de las cuatro ecuaciones diferenciales del primer orden respecto de las variables significaría en el caso de los cometas la consideración inmediata de los términos del segundo orden de la masa perturbante. Tal solución tendría, comparada con la del problema planetario, un carácter sólo formal, puesto que los términos relativos a $\delta\xi$, etc. en las ecuaciones diferenciales son del segundo orden, mientras que los demás ya mencionados son del primer orden, de modo que los términos en $\delta\xi$ etc. son, por largo tiempo, de importancia secundaria. Por eso resulta como primera solución aproximada:

$$\delta\xi = a_1 t, \quad \delta\eta = b_1 t, \quad \delta p = e_1 t \quad \text{y} \quad \delta q = f_1 t,$$

de suerte que, sustituyendo esta solución en los términos del segundo orden de la masa en las ecuaciones diferenciales, resulta la siguiente solución aproximada:

$$\delta\xi = \left(a_1 + \frac{1}{2} a_2 a_1 t + \frac{1}{2} a_3 b_1 t + \frac{1}{2} c_1 e_1 t + \frac{1}{2} c_2 f_1 t\right) t \tag{186}$$

$$\delta\eta = \left(b_1 + \frac{1}{2} b_2 a_1 t + \frac{1}{2} b_3 b_1 t + \frac{1}{2} d_1 e_1 t + \frac{1}{2} d_2 e_2 t\right) t$$

$$\delta p = \left(e_1 + \frac{1}{2} e_2 e_1 t + \frac{1}{2} e_3 f_1 t + \frac{1}{2} g_1 a_1 t + \frac{1}{2} g_2 b_1 t\right) t$$

$$\delta q = \left(f_1 + \frac{1}{2} f_2 e_1 t + \frac{1}{2} f_3 f_1 t + \frac{1}{2} h_1 a_1 t + \frac{1}{2} h_2 b_1 t\right) t$$

de modo que las perturbaciones seculares del segundo orden de la masa están multiplicados con la segunda potencia del tiempo.

§ 7. LOS RESULTADOS RELATIVOS AL PROBLEMA DE LA LIBRACION DE LOS PERIHELIOS DE LOS ASTEROIDES

Primeramente se aplicó el criterio más sencillo relativo a la existencia de una libración o rotación del perihelio de un asteroide a los 1513 asteroides compuestos en la publicación del Astronomisches Rechen Institut: *Kleine Planeten, Jahrgang*, 1941; es decir la última edición llegada a La Plata durante la segunda guerra mundial.

El primer criterio exige que la siguiente desigualdad sea cumplida en el caso de una libración :

$$e < 2Ke' \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') \quad \text{o} \quad f = \frac{e}{2Ke' \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}')} < 1 \tag{53a}$$

Entre los 1513 planetoides, 43 planetoides obedecieron entonces a la desigualdad fijada :

LIBRACIONES

	Nr.	$\tilde{\omega}-\tilde{\omega}'$	f		Nr.	$\tilde{\omega}-\tilde{\omega}'$	f		Nr.	$\tilde{\omega}-\tilde{\omega}'$	f
1....	40	− 10°6	0.914	16...	514	+ 15°9	0.625	31...	1260	− 57°8	0.933
2....	117	+ 25.9	0.462	17...	581	+ 37.5	0.469	32...	1262	− 76.4	0.171
3....	147	− 19.7	0.333	18...	589	+ 23.0	0.626	33...	1265	+ 27.2	0.591
4....	168	+ 30.6	0.887	19...	702	− 31.9	0.513	34...	1280	− 1.4	0.544
5....	189	− 2.8	0.662	20...	799	+ 23.5	0.439	35...	1285	+ 14.2	0.832
6....	205	+ 11.2	0.590	21...	803	− 57.0	0.750	36...	1300	+ 45.8	0.151
7....	215	− 29.0	0.629	22...	813	− 9.9	0.519	37...	1356	− 10.0	0.682
8....	252	− 5.3	0.990	23...	837	− 1.4	0.789	38...	1390	− 12.3	0.508
9....	286	+ 46.2	0.583	24...	866	− 22.3	0.835	39...	1409	+ 10.3	0.967
10....	292	− 42.3	0.744	25...	891	+ 28.7	0.506	40...	1411	+ 4.0	0.847
11....	300	− 21.0	0.569	26...	1175	− 54.5	0.706	41...	1424	− 5.0	0.960
12....	334	− 56.6	0.977	27...	1201	− 6.8	0.638	42...	1469	+ 20.0	0.962
13....	338	+ 29.8	0.361	28...	1248	+ 43.6	0.331	43...	1481	+ 4.2	0.272
14....	447	+ 18.9	0.719	29...	1256	+ 1.7	0.419				
15....	483	− 47.4	0.906	30...	1258	− 24.6	0.844				

Estos 43 planteoides representan casi exactamente el 3 °/₀ de los planetoides conocidos hasta 1940, de modo que por eso sólo un porcentaje relativamente pequeño cumple la condición-libración, con el resultado de que los perihelios de estos planetoides desvían siempre menos de 90° de la dirección perihelio, supuesto como fijo, del gran planeta Júpiter. Pero para la exactitud de este resultado es necesario aplicar otro criterio más exacto que considera la atracción por todos los grandes planetas y el movimiento secular de los perihelios de los grandes planetas. Este criterio exige que sea cumplida según la fórmula (60) la siguiente desigualdad : (196) $\alpha_7 > \alpha + \sum_{i=1}^{i=n}{}' \alpha_i$, suprimiendo el acento a la letra $\sum$ el índice $i = 7$ y suponiendo todavía que hemos prescindido de la influencia de las perturbaciones periódicas en la determinación de las constantes. Las constantes α y β relativas a cada uno de los planetoides resultan en base a las fórmulas (57) que corresponden al momento $t = 0$, en la solución general, si reemplazamos Δx y Δy por las sumas correspondientes a las atracciones de los planetas :

$$\sum a_i \operatorname{sen}(s_i t + \beta_i) \quad \text{ó} \quad \sum a_i \cos(s_i t + \beta_i) \quad \text{respectivamente.}$$

Resulta entonces muy sorprendente que sólo seis de los cuarenta y tres planetoides mencionados cumplen la desigualdad anteriormente formulada :

1) Nr. 300 ; 2) Nr. 1201 ; 3) Nr. 1256 ; 4) Nr. 1280 ; 5) Nr. 1356 ; 6) Nr. 1390.

Estos seis planetoides tienen todavía que someterse a la tercera prueba, considerando las perturbaciones periódicas correspondientes a la época o respecto a la determinación de las constantes. De antemano ya hay que eliminar el primer planeta núm. 300, por su movimiento medio $n = 617''$, de modo que el planeta pertenece al grupo Hécuba, el caso más difícil de la mecánica celeste, que debe ser sometido a un tratamiento especial.

Por la aplicación del cálculo numérico a las fórmulas (55) hasta (60) resulta entonces respecto a los cuatro planetoides (3 hasta 6) la no existencia de una libración; queda el único y último caso 2) nº 1201, en el que está cumplida la condición: $\alpha_7 > \alpha + \sum' \alpha_i + |p(\xi)| + |p(\eta)| = r$. Pero, numéricamente, resulta en este caso $a_7 = 0.028310$ y $r = 0.028273$, de modo que a_7 resulta sólo imperceptiblemente mayor que r y por eso el último caso permanece dudoso.

En total resulta por eso que, considerando todos los planetas descubiertos hasta el momento, no existe en el sistema de los planetoides del sistema solar ningún caso real de libración relativa al movimiento del perihelio entorno al perihelio del gran planeta Júpiter, tampoco respecto a Saturno, según el resultado simultáneo de los cálculos, no siendo a_6 nunca mayor que r. Pero contrariamente a eso, permanece en pie el hecho de la acumulación de los perihelios de los asteroides en torno a la posición del perihelio de Júpiter, es decir como un resultado estadístico seguramente constatado por la observación, a pesar o por el efecto de la atracción ejercida por Júpiter y los otros grandes planetas por largo tiempo. Por eso puede aparecer la posibilidad de que, bajo la suposición del origen simultáneo del gran planeta Júpiter y los planetoides en base al mismo fenómeno cosmogónico, las direcciones de los perihelios coincidieran, de modo que hubiera libraciones de los perihelios en torno al perihelio de Júpiter, continuando desarrollándose o transformándose en el curso de los tiempos, en rotaciones por efecto gravitacional secular de todos los grandes planetas. Pero también queda justificada la posibilidad de que, suponiendo originariamente una repartición arbitraria de los perihelios, la atracción secular preponderante de Júpiter lentamente ha originado una acumulación de los perihelios en torno a la posición de su perihelio, junto con un movimiento-libración de los perihelios de los planetoides, pero en un futuro lejano, lo que parece ser el resultado de los cálculos en esta memoria.

§ 8. LOS RESULTADOS RELATIVOS AL PROBLEMA DE LA LIBRACION DE LAS LINEAS-NODO DE LOS ASTEROIDES

Respecto a la libración de las líneas-nodo de las órbitas de los asteroides en torno a la línea del nodo del gran planeta Júpiter, y respecto a los cálculos numéricos correspondientes tenemos primero que recordar el resultado antes deducido que una libración de las líneas de los nodos de los planetoides únicamente representa un fenómeno cinemático-geométrico, en cuanto sólo depende de la elección del plano fundamental. Pues la condición relativa a una libración del nodo era la siguiente: $J < \varphi'$, donde J significa la inclinación mutua de las órbitas de Júpiter y el planetoide, es decir una magnitud que es independiente del plano fundamental, por eso también de φ'. Por consiguiente la condición-libración $\varphi' > J$ es posible respecto de cada planetoide, sólo por la elección correspondiente del plano fundamental. En el caso de la mayoría de los planetoides el ángulo φ es menor que 20°, por eso también J, debido a la pequeña inclinación φ' de sólo 1°8 de la órbita de Júpiter respecto a la eclíptica, de modo que en la mayoría de los casos la elección de un plano fundamental con $\varphi' > 20°$ satisface la condición de libración. En el caso extremo la inclinación φ asciende, por ejemplo para n° 2 Pallas, a más de 30°, por ello también la magnitud φ' para cumplir la condición $\varphi' > J$. Por otra parte hay que cumplir todavía una segunda condición relativa a la existencia de una libración de los nodos ; es decir $|\theta - \theta'| < 90°$. Además hay que observar que un plano fundamental a que corresponde un alto valor de φ', ya no tiene un significado cosmogónico, comparándole con la eclíptica, la órbita terrestre, la que tiene con la órbita de Júpiter y todos los otros grandes planetas y la mayoría de los planetoides una relación cosmogónica e interpretación reconocida hace mucho tiempo.

Pero considerando que en el caso de una libración debe ser cumplida la condición también en la forma $\varphi < 2\varphi' \cos(\theta - \theta')$, por eso también $\varphi << 2\varphi'$, es decir $\varphi << 3°6$, resulta que en el caso de una inclinación pequeña φ aunque φ' y φ experimentan una alteración por pocos grados por una elección correspondiente del plano fundamental, muchos planetoides se tornan libratóricos, si la variante J satisface a la condición $J < \varphi'$. Por eso resulta que una libración de las líneas de los nodos tiene una importancia menor en vista de la cosmogonía, especialmente también con la libración de los perihelios. Hay que destacar, caracterizando la diferencia entre una libración de los perihelios y los nodos, que los parámetros decisivos e y e' en el caso de los perihelios, son invariantes absolutos, mientras que las inclinaciones φ y φ' en el caso de los nodos dependen de un plano fundamental arbitrario, de modo que las condiciones establecidas en este caso no son transferibles al problema de los perihelios.

Componiendo ahora, primeramente, los resultados numéricos tabulando los planetas que satisfacen la primera condición de libración, siendo Júpiter el único cuerpo atrayente con órbita fija, de modo que el movimiento nodal es o, resulta la planilla siguiente :

	Nr.	φ	θ−θ′	J	f		Nr.	φ	θ−θ′	F	f		Nr.	φ	θ−θ′	F	f
1....	24	0°8	−63.3	1.2	0.693	11....	279	2.4	−24.3	1.3	0.984	21....	946	1.5	−29.9	0.7	0.643
2....	27	1.6	− 5.5	0.3	0.610	12....	296	1.7	+21.8	0.7	0.716	22....	954	1.1	−64.4	1.3	989
3....	62	2.2	+26.9	1.2	0.941	13....	300	0.8	−56.9	1.1	0.533	23....	991	2.1	−35.5	1.3	985
4....	90	2.3	−27.6	1.3	0.982	14....	316	2.4	+23.9	1.3	990	24....	1003	1.8	+41.1	1 2	932
5....	149	0.9	+59.6	1.2	0.698	15....	431	1.8	+17.4	0.7	728	25....	1074	0.9	−61.0	1.2	682
6....	171	2.6	+ 1.6	1.2	0.973	16....	468	0.5	−78.9	1.3	972	26....	1091	1.2	−19.5	0.4	473
7....	182	2.0	+ 7.7	0.7	0.772	17....	515	2.0	+22.9	1.0	833	27....	1097	1.5	+34.0	0.8	695
8....	222	2.2	−19.2	1.0	0.877	18....	644	1.0	+ 9.2	0.3	402	28....	1128	1.0	−40.3	0.8	515
9....	240	2.1	+16.0	0.9	0.832	19....	710	1.7	+41.1	1.1	871	29....	1156	1.4	−10.1	0.2	535
10....	268	2.4	+21.8	1.3	1.000	20....	767	2.4	−19.5	1.3	983	30....	1239	1.7	−26.6	0.8	717
												31....	1448	2.3	−10.0	1.0	887
												32....	1487	2.5	− 1.8	1.2	943

La planilla contiene : 1) el número del planetoide en la lista general de los planetoides ; 2) la inclinación ecliptical correspondiente al planetoide para los que $\varphi < 2\varphi' \cos(\theta - \theta')$ y para los que 3) la diferencia de las longitudes del nodo $|\theta - \theta'| < 90°$; 4) el cociente f que decide en la primera aproximación respecto a una libración, es decir $f = \varphi : 2\varphi' \cos(\theta - \theta') < 1$, finalmente 5) la magnitud J, la inclinación orbital mutua entre el planetoide y Júpiter calculada según la fórmula :

$$J = \sqrt{\varphi_0^2 + \varphi'^2 - 2\varphi_0\varphi' \cos(\theta - \theta')}$$

La planilla indica 32 planetoides que satisfacen la primera condición aproximada relativa a la existencia de una libración de la línea del nodo en torno a la línea fija del nodo de Júpiter, es decir resultan sólo 2 % de los planetoides descubiertos hasta 1940, es decir un número relativamente pequeño de planetoides está en libración respecto de los nodos. Tomando en cuenta todos los planetoides para los que vale $\varphi < 2\varphi'$ pero $J > \varphi'$ obtenemos 48 otros casos en los que, no siendo J esencialmente mayor que φ', una variación no muy grande de la posición del plano fundamental es suficiente para obtener $J < \varphi'$ y causar por eso un movimiento de libración nodal en los 48 casos mencionados. A pesar de eso permanecen en lo esencial sólo los primeros 32 casos de interés cosmogónico y además de interés teórico respecto a la mecánica celeste, aunque ahora hay que examinar, si los casos de libración mencionados resisten también a una condición más severa, la cual es impuesta por la consideración de las perturbaciones seculares de todos los grandes planetas, es decir en el caso de un nodo móvil de Júpiter. En el caso de los perihelios permanecieron, según la investigación anterior, sólo casos de rotación, de modo que también aquí existe la posibilidad de que los casos de libración pasen a ser rotaciones. Por eso tenemos que fijar primeramente la solución de las ecuaciones diferenciales correspondientes de las variables-inclinación, considerando la atracción secular de todos los grandes planetas.

Las ecuaciones diferenciales limitadas al primer grado de las variables $p = \text{sen}\,\varphi\ \text{sen}\,\theta$ y $q = \text{sen}\,\varphi \times \cos\theta$ según (74) en el caso de la ampliación de los coeficientes a_1' y b_1' en cuanto dependen de p' y q' son las siguientes, en base a las representaciones de las perturbaciones seculares según Stockwell (véase por ejemplo Charlier, *Mechanik des Himmels*, tomo I, págs. 415-416), pero variando las designaciones :

$$(187)\qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = - K_1 q + \sum\limits_{n=1}^{n} F_r \cos\,(s_r' t + \beta_r') \\ \dfrac{dq}{dt} = + K_1 p - \sum\limits_{r=1}^{n} F_r \,\text{sen}\,(s_r' t + \beta_r') \end{cases}$$

de modo que resulta la solución (198) :

$$\begin{cases} p = \text{sen}\,\varphi\ \text{sen}\,\theta = \alpha' \,\text{sen}\,(s' t + \beta') + \sum\limits_{r=1}^{n} \alpha_r' \,\text{sen}\,(s_r' t + \beta') \\ q = \text{sen}\,\varphi \cos\theta = \alpha' \cos\,(s' t + \beta') + \sum\limits_{r=1}^{n} \alpha_r' \cos\,(s_r' t + \beta') \end{cases}$$

donde $\alpha_r' = \dfrac{F_r}{-s' + s_r'}$, y $s' = - K_1$ y donde las magnitudes auxiliares F_r, s_r' y β_r deben sacarse de las tablas auxiliares ya mencionadas de Norén y Raab, además de las tablas de Charlier en su *Mechanik des Himmels*. Además hay que observar que los elementos orbitales de los grandes planetas usados por Stockwell están referidos al plano invariable de Laplace, de modo que eso vale también respecto a las variables usadas p y q. Por eso hay que transformar los elementos eclipticales de las órbitas $p_e = \text{sen}\,\varphi_e \times \text{sen}\,\theta_e$ y $q_e = \text{sen}\,\varphi_e \,.\, \cos\theta_e$ a los correspondientes φ, θ, p y q lo que es posible, despreciando los términos del tercer grado, en la forma más simple, por las fórmulas siguientes :

$$(188)\qquad \left.\begin{aligned} p_e &= \text{sen}\,\varphi_e\,\text{sen}\,\theta_e = \text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta + \text{sen}\,\gamma\,\text{sen}\,\Pi \\ q_e &= \text{sen}\,\varphi_e \cos\theta_e = \text{sen}\,\varphi\cos\theta + \text{sen}\,\gamma\cos\Pi \end{aligned}\right\}$$

donde γ significa la inclinación del plano de Laplace relativo a la eclíptica y Π la longitud de su nodo ascendente sobre la eclíptica. Resulta por el cálculo numérico :

$$(189)\qquad \left.\begin{aligned} \gamma &= 1^\circ 35' 1''.15 \\ \pi &= 107^\circ 11' 42''.9 \end{aligned}\right\} \text{ Eclíptica 1950}$$

La sustitución en las ecuaciones anteriores relativas a p y q dan entonces la representación :

$$(190)\qquad \left.\begin{aligned} \varphi_e \operatorname{sen} \theta_e &= \alpha' \operatorname{sen}(s't+\beta') + \sum_{r=1}^{n} \alpha_r' \operatorname{sen}(s_r't+\beta_r') + \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\pi \\ \varphi_e \cos \theta_e &= \alpha' \cos(s't+\beta') + \sum_{r=1}^{n} \alpha_r' \cos(s_r't+\beta_r') + \operatorname{sen}\gamma \cos\pi \end{aligned}\right\}$$

Ya que ahora el coeficiente del tiempo $s_7 = 25''.935$ corresponde al movimiento medio del nodo de la órbita de Júpiter, el denominador en la expresión correspondiente a $\operatorname{tg}(\theta - s_7't - \beta_7')$ en el caso de que el plano invariable sea el plano fundamental, debe ser siempre distinto de o, en analogía a los casos de la libración de los perihelios, es decir (202) :

$$\alpha_7' > \alpha' + \sum_{r=1}^{n}{}' \,|\alpha_r'|$$

donde el acento al signo de la suma indica que el término $r = 7$ debe suprimirse.

En el caso de que la eclíptica sea el plano fundamental, resulta según la fórmula (190) :

$$(191)\qquad \alpha_7' > \alpha' + \sum_{r=1}^{n} |\alpha_r'| + \operatorname{sen}\gamma$$

donde las constantes α' y β' son deducidas por medio de los valores de φ_0 y θ_0, que valen para $t = 0$, de modo que :

$$(192)\qquad \left.\begin{aligned} \alpha' \operatorname{sen}\beta' &= \varphi_0 \operatorname{sen}\theta_0 - \sum_{r=1}^{n} \alpha_r' \operatorname{sen}\beta_r' \\ \alpha' \cos\beta' &= \varphi_0 \cos\theta_0 - \sum_{r=1}^{n} \alpha_r' \cos\beta_r' \end{aligned}\right\}$$

El cálculo numérico establece entonces en el caso de 29 de los planetoides, contenidos en la planilla anterior y en la primera aproximación del tipo de libración, el estado de rotación, de modo que permanecen sólo tres casos de libración. Respecto a estos últimos vale la siguiente lista relativa a las constantes consideradas decisivas :

	α	$\Sigma'\alpha r'$	α_7'
Nr. 27	0.0146	0.0021	0.0171
Nr. 644	0.0055	0,0021	0.0117
1156	0.0145	0.0021	0.0213

de modo que la condición $\alpha_7' > \alpha' + \sum' |\alpha_r'|$ está cumplida.

Resulta por eso, respecto a la eclíptica que, siendo sen $\gamma=0{,}027636$, para ningún planetoide es posible una libración del nodo. Por eso no vale la pena considerar términos de más alto grado ni las perturbaciones periódicas. Pero, ya que, buscando casos de libración según el primer criterio, resultó un número de planetoides, es decir 23, para los que el factor crítico f es un poco mayor que uno, estos casos sospechosos fueron examinados nuevamente, considerando la atracción de todos los grandes planetas según el segundo criterio, con el resultado de que un solo planeta : N° 641, satisface la condición de libración, deduciéndose : $\alpha=0.0200$, $\sum'\alpha_r'=0.0021$ y $\alpha_7'=0.0238$ por eso $\alpha_7'>\alpha'+\sum'\alpha_r'$.

Por eso resulta, en general, respecto al problema de la libración de las longitudes de los nodos, que existe sólo un pequeñísimo número de libraciones (4), de modo que también en este caso valen las mismas concluciones que en el caso de las líneas de los perihelios. Siendo tan pequeño el número de las libraciones recién después de un gran intervalo de tiempo podrá decidirse, si la acumulación momentánea de las líneas nodales en torno al nodo de Júpiter corresponde a un pasado infinitamente lejano o a un porvenir igualmente infinitamente lejano ; además, si las pocas libraciones presentes, en torno al perihelio de Júpiter o su nodo respectivamente, significan el fin o el principio de los casos de libración.

Desde el punto de vista cosmogónico el sistema solar ha realizado sólo una pequeña parte de su desarrollo y por consiguiente las libraciones parecen fijar recién el principio de estos fenómenos, coincidiendo los nodos de los planetas, asimismo sus perihelios, en otro tiempo con la dirección correspondiente de la órbita de Júpiter ; por otra parte parece posible que, en base a la teoría de las perturbaciones, la atracción secular prevaleciente de Júpiter, puede forzar en el rumbo del tiempo, el fenómeno de la acumulación de los perihelios y nodos junto con las libraciones, siendo mucho mayores los espacios de tiempo respecto al origen de las libraciones, que los de la acumulación de los perihelios, como parece resultar de las investigaciones de esta Memoria.

§ 8. SUMARIO EN IDIOMA ALEMÁN

UEBER DAS PHÄNOMEN DER HÄUFUNG DER PERIHEL-UND KNOTENLINIEN DER ASTEROIDEN UM DIE DES PLANETEN JUPITER NEBST EINER THEORIE DER SÄKULARSTÖRUNGEN

Von ALEXANDER WILKENS

Da der große Jupiter alle anderen großen Planeten sowohl einzeln wie auch zusammen an Masse übertrifft, so beruhen, zumal bei der Bahnlage des Jupiter, allgemein mehr als 95 % der Störungen im System der Planetoiden auf der Jupiteranziehung. Deshalb liegt es nahe, zu vermuten, daß die säkulare Jupiteranziehung die Bahnen der übrigen Planeten in überwiegendem Grade und in bestimmter weise reguliert. Als eine der Wirkungen einer solchen Regulierung der Bewegungen im System der Planetoiden erscheint die seit etwa 50 Jahren beobachtete auffallende Anhäufung der Perihelrichtungen ihrer Bahnen um die Perihellage des Jupiter. Die Frage, ob es sich hierbei umgekehrt um einen Auflösungsprozeß der Anhäufung handeln könne, ist und konnte bisher nicht behandelt werden, weil bisher keine theoretische Behandlung des Problems vorgenommen worden ist.

Aus der Elementenzusammenstellung der Asteroiden im Jahrgang 1940 der vom Berliner Astronomischen Recheninstitut herausgegebenen Veröffentlichung « Kleine Planeten » ergibt sich die folgende Abzählung der Perihellängen der bis dahin bekannten Planetoiden; die kleine Tabelle enthält als Argument die ekliptikalen Längen von 60° zu 60°, wobei die Länge 13° dem Perihel des Jupiter entspricht und n die Anzahl der in jedem 60° Jntervall vorhandenen Perihellängen d. h. Planetoiden fixiert.

Perihele

Länge	n
193-253	154
253-313	238
313-13	393
13-73	372
73-133	209
133-193	147

Man ersieht, daß um die Perihellänge 13° des Jupiter eine fast symmetrische Verteilung der n über alle Jntervalle stattfindet, bei zugleich beträchtlicher Abnahme nach beiden Seiten. Die beiden ersten Jntervalle um das Jupiterperihel enthalten allein schon 765 Asteroiden, d. h. schon etwas mehr als die Hälfte der 1513 Fälle. Die andere Hälfte verteilt sich auf ein doppelt so großes Jntervall von 240° Längenausdehnung. Eine Häufung der Perihele um das Jupiterperihel ist also stark ausgesprochen.

Knoten

Länge	n
280-340	237
340-40	277
40-100	277
100-160	262
160-220	257
220-280	203

Jn Bezug auf die Knotenlängen ergeben die Abzählungen die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Resultate, wobei zu beachten ist, daß die Knotenlänge des Jupiter der Länge 100° entspricht.

Hier fällt sofort auf, daß die Verteilung der Knotenlängen zu beiden Seiten des Jupiterknotens bis zu 120° fast ganz gleich ist, erst dann erfolgt nach beiden Seiten hin eine merkliche Abnahme der Werte n, sodaß im Falle der Knotenlinien eine viel weniger ausgesprochene Anhäufung der Knotenlagen um die des Jupiter stattfindet als bei den Perihelien.

Eine erste genäherte Bedingung für den Fall einer Libration der Perihelien der Asteroiden um die Perihellage des großen Planeten Jupiter hat vor mehr als 40 Jahren Charlier aufgestellt, und zwar in Nr. 12 der Meddelanden fran Lunds Observatorium vom Jahre 1904, reproduziert in seinen *Vorlesungen zur Mechanik des Himmels*, Bd. 1, pág. 420. Bei dem damals vorhandenen Material von rund 450 Planetoiden ergaben sich nur 9 Fälle von Libration, d. h. bei nur 2 % aller Asteroiden findet eine Schwingung der Perihelien mit einer Amplitude von weniger als 90° um die Perihellage des Jupiter statt. Alle anderen Fälle sind solche der Rotation, d. h. solche, deren Perihelien säkular mit einer konstanten Rotationsgeschwindigkeit fortschreiten.

Die analoge Untersuchung in Bezug auf eine Libration oder Rotation der Knotenlinien um die Knotenlinie des Jupiter wurde bisher nicht vorgenommen, sie wird in der folgenden Darlegung geschehen.

Nehmen wir hier vorweg, daß sich auf Grund des 1940 vorhandenen Materials von 1500 Planetoiden gemäß der I. Näherung nur 43 Librationsfälle in Bezug auf die Perihelien ergeben, also nur rund 3 % aller Planetoiden, so erscheint die Häufigkeit des Librationsphänomens nur gering gegenüber der Beobachtungstatsache einer ausgesprochenen Häufung der Perihelien. Deshalb erhebt sich schon jetzt, besonders vom kosmogonischen Standpunkt aus die Frage, ob nicht der Schluß gerecht fertigt ist, ob die vorhandenen Librationen und die Anhäufung der Perihele nicht den Anfang, sondern das Ende beider Phänomene fixieren, die in der unendlich fernen Vergangenheit allgemein gültig waren, inzwischen aber durch die Instabilität der Bahnen auf Grund der Anziehung durch alle übrigen Planeten des Sonnensystems mit der Zeit zerstört worden sind. Einer solchen Fragestellung gegenüber verbleibt nur eine genauere Untersuchung der Stabilität der Perihelbewegungen, weshalb zuerst eine wesentliche Erweiterung der genäherten Bedingung einer Librationserscheinung vorzunehmen ist. Ergibt die Untersuchung dann, daß heute wesentlich nur Rotationserscheinungen der Perihelien möglich sind, so folgt daraus, daß die beobachtete Anhäufung der Perihelien der Asteroiden nur noch ein Dispersionsprozeß sein kann, wenn sie auch in der Vergangenheit eine allgemeine Erscheinung im Asteroidensystem war, die mit der Erzeugung desselben und der Bahn des großen Planeten Jupiter in Zusammenhang steht.

Da sich die erste genäherte Bedingung für eine Librationslösung nur auf die Zugrundelegung der Terme niedrigsten, d. h. 2. Grades des Säkularteils der Störungsfunktion in Bezug auf Jupiter bezieht, so sind für den Zweck einer Verschärfung der Stabilitätsfrage die Terme höheren Grades heranzuziehen, nicht nur unter Mitnahme der säkularen Anziehung aller großen Planeten des Sonnensystems. Denn die Terme des nächsthöheren Grades der Störungsfuntion in Bezug auf die Jupiteranziehung sind von derselben Ordnung wie die Säkularwirkung aller übrigen großen Planeten, sodaß die Entscheidung zugleich auch von den Termen höheren Grades der Jupiteranziehung abhängen kann.

Deshalb kombiniert sich unsere Aufgabe mit der möglichst exakten Darstellung einer Lösung des Problems der Säkularstörungen im Falle des asteroidischen Dreikörperproblems, und zwar unter Darstellung der Säkularstörungen durch Fourierreihen in Analogie zur Form der periodischen Störungen, sodaß die Lösung allgemein auch auf die Säkularstörungen der Planetoiden für andere Zwecke als hier Verwendung finden kann.

§ 1. DIE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER EXZENTRIZITÄTS VARIABLEN UND IHRE INTEGRATION

Um bei der Integration von Polen frei zu sein, bilden die Exzentrizitäts-und Neigungsvariablen die Ausgangselemente in Bezug auf die Exzentrizität und Perihellänge einerseits und die Neigung und Knotenlänge andererseits. Die entsprechenden Differentiagleichungen sind im System (1) dargestellt, wobei e, $\tilde{\omega}$, φ und θ die Exzentrizität, Perihellänge, Neigung und Knotenlänge fixieren, zusammengefaßt in den Exzentrizitätsvariablen $\xi = e \sin \tilde{\omega}$, $\eta = e \cos \tilde{\omega}$, $p = \sin \varphi \sin \theta$ und $q = \sin \varphi \cos \theta$.

Die Darstellung von R als Potenzreihe nach den soeben definierten Variablen, sowie den analogen für den störenden Körper geltenden Parameter $\xi' = e' \sin \tilde{\omega}'$, $\eta' = e' \cos \tilde{\omega}'$, $p' = \sin \varphi'$ sind θ' und $q' = \sin \varphi' \cos \theta'$ ist in (2) bis zum 6. Grade der genannten Größen gegeben, und zwar auf Grund einer umfangreichen Transformation der Le Verrierschen Form von R im 10. Bande der *Annales de l'Observatoire de Paris*, Formeln (3)-(43).

Eine erste Näherung der Lösung der Säkulargleichungen des zunächst als eben betrachteten Problems bietet die auf die linearen Terme der Variablen ξ und η beschränkte Gleichung (44). Der allgemein komplexe charakteristische Exponent (49) der Lösung der Lineargleichungen wird auf Grund einer speziellen Eigenschaft der Koeffizienten der Variablen rein imaginär, und die Lösung deshalb eine periodische Funktion der Zeit (51). Die geometrische Jnterpretation des entsprechenden Jntegrals (52) ergibt, daß der Punkt P mit den rechtwinkligen Koordinaten ξ und η zeitlich einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunktskoordinaten den dem Jupiter entsprechenden Koordinaten $\xi' = e' \sin \tilde{\omega}'$ und $\eta' = e' \cos \tilde{\omega}'$ proportional sind, sodaß die Verbindungslinie Kreismittelpunkt-Koordinatenanfang die Jupiter-Perihelrichtung fixiert. Liegt der Koordinatenanfang außerhalb des genannten Kreises, so ist die Lösung eine Libration, indem der Kreispunkt P, dem die Polarkoordinaten e und $90-\tilde{\omega}$ entsprechen, einen beschränkten Winkelraum in Bezug auf $\tilde{\omega}$ durchläuft, der zwischen den Tangenten vom Koordinatenanfang an den Kreis enthalten und symmetrisch zur Lage des Jupiterperihels gelegen ist. Liegt der Koordinaten-anfang aber innerhalb des genannten Kreises, so entspricht einem Umlauf des Punktes P auf seinem Kreise eine entsprechende Rotation des Perihels, sodaß eine Anhäufung der Perihelrichtungen nicht möglich ist. Das Kriterium, ob Libration oder Rotation stattfändet, hängt also in 1. Näherung davon ab, ob der Abstand des Kreismittelpunktes d vom Koordinatenanfang $>$ oder $<$ als der Kreisradius ist, ausgedrückt durch die entsprechende Ungleichheit (53 *a*).

Jm allgemeinen Falle existiert nach (1) im Falle der Säkularstörungen im ebenen Problem das strenge Jntegral (53) $R = \text{const.} = R_0$, darstellbar als die schon definierte Potenzreihe nach ξ und η, sodaß bei anfänglich kleinem ξ und η, also kleinem e, die entsprechende Kurve ξ, η stets nur wenig von dem oben definierten Kreise abweichen kann, sodaß Libration besteht, wenn der Anfangspunkt außerhalb der Kurve (ξ, η) gelegen ist, woraus die wichtige Folgerung resultiert, daß, wenn sich bei einer sukzessiven Potenzdarstellung von ξ und η etwa Säkularterme der Zeit oder gemischt-säkulare Poisson-Terme der Form $t \cdot \sin A$ oder $t \cdot \cos A$ ergeben, wo A eine Funktion der Zeit, solche instabilen Terme nur durch die Form der sukzessiven Näherrungen vorgetäuscht sein können. Die allgemeine Stabilitätsfrage der Lösung stellt die Forderung nach Aufrechterhaltung der in erster Näherung periodischen Lösung bei sukzessiver Mitnahme aller höheren Terme der Störungsfunktion.

Zur Verbesserung des ersten Librationskriteriums ist es zuerst zweckmäßig zur Berechnung der Jntegrationskonstanten der Librationslösung die periodischen Störungen zu berücksichtigen; deshalb ist die Entwickelung des periodischen Teiles von R (54), wenigstens bis zum 1. Grade einschließlich, nach ξ, η, ξ' und η' und die Darstellung der periodischen Störungen von ξ und η vorzunehmen (55). Zu weiterer Verstärkung des Kriteriums ist bei der Jntegration der Differentialgleichungen für ξ und η die Mitnahme der Säkularstörungen durch alle großen Planeten, in ihrer periodischen Form nach Stockwell, zu berücksichtigen, sodaß die Bedingung der Libration des Asteroiden um das bewegliche Jupiterperihel nunmehr in der Form (60) erscheint.

Zum Schluß werden die Darstellungen der Librationsgröße $\tilde{\omega}$-$\tilde{\omega}'$ sowie von log e in der Form konvergenter periodischer Reihen, bezogen auf die 1. Näherung, gegeben (64) und (65).

§ 2. DIE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER NEIGUNGSVARIABLEN UND IHRE INTEGRATION

Die Form der Differentialgleichungen (74) ist der der Exzentrizitätsvariablen analog, aber in der Lösung hat der Phasenkoeffizient bekanntlich das entgegengesetzte Vorzeichen, entsprechend dem Rückschreiten der Knotenlinien gegenüber dem Vorrücken der Apsidenlinien. Das Librationskriterium ist analytisch wie geometrisch dem für die Exzentrizitätsvariablen analog, hat aber, wenn φ und φ' die Neigungen, θ und θ' die Knotenlängen des Asteroiden und Jupiter bezeichnen, die Form (82) : $\varphi_0 < 2\,\varphi' \cos(\theta - \theta')$ *d. h.* es ergibt sich eine Relation, die vollkommen unabhängig von der Störungsfunktion erscheint, sodaß die Librationserscheinung in der 1. Näherung nur ein geometrisch-kinematischer Effekt ist. Dieses Ergebnis beruht darauf, daß aus der Integraldarstellung der Neigungsvariablen in Verbindung mit einer Betrachtung an der Sphäre bezüglich des Verhaltens des Neigungswinkels J zwischen den Bahnen des Asteroiden und Jupiter folgt, daß $J =$ const. sein muß. Deshalb durchläuft der Schnittpunkt der Bahnen des Asteroiden u. Jupiters die ganze Jupiterbahn mit einer konstanten säkularen Geschwindigkeit $- K_1$ (91 *a*), während gleichzeitig der entsprechende Knotenpunkt auf der Ekliptik eine Librations- oder Rotationsbewegung ausführen kann, je nachdem die geometrische Librationsbedingung (82) oder die mit ihr identische Bedingung (94) erfüllt ist; bezogen auf den Winkel J lautet die Librationsbedingung (90 *a*) $J < \varphi'$. Auf Grund einer geometrisch-sphärischen Betrachtung wird in (95) eine noch strengere Bedingung für eine Librationserscheinung abgeleitet. Im Falle der Libration werden in (83) und (85) die entsprechenden periodischen Reihen für die Knotenbewegung wie für log i entwickelt und analog in (88) und (89) die einer Rotation, die mit einer libratorischen Bewegung des Knotens, nicht um den Knoten Jupiters, sondern um eine Richtung D verbunden ist, die sich wie die Knotenlinie mit derselben Geschwindigkeit $- K_1$ säkular dreht.

§ 3. DIE BERÜCKSICHTIGUNG DER GLIEDER HÖHER ALS 2. GRADES DER STÖRUNGSFUNKTION

Die Hinzufügung der Terme höher als 1. Grades in den Gleichungen für $\frac{d\xi}{dt}$ und $-\frac{d\eta}{dt}$ veranlaßt zugleich die Frage nach der Möglichkeit der Aufrechterhaltung der periodischen Lösung der 1. Näherung. In Bezug auf die linearen Terme in ξ und η war die Bedingung : $a_2 - b_3 = 0$ in Bezug auf alle Koeffizienten in ξ', η' erfüllt, weil $a_2 = b_3 = \left(\frac{\partial^2 R}{\partial\xi\partial\eta}\right)_{\xi=\eta=0}$ aus demselben Term in $\xi\,.\,\eta$ entstehen, unabhängig vom Grade in ξ', η' der a_2 und b_3. In Bezug auf die Erhaltung der periodischen Lösung gegenüber der Mitnahme der Terme 2. Grades : ξ^2, η^2, $\xi\,.\,\eta$ in $\frac{\partial R}{\partial\eta}$ und $\frac{\partial R}{\partial\xi}$ ist eine Sonderuntersuchung anzustellen. Jn den Differentialgleichungen (98), in denen die Terme sogleich bis zum 4. Grade einschließlich in R Berücksichtigung finden, tritt $\xi^2 + \eta^2$ als Faktor von ξ und η auf. Jnfolge der Existenz des Jntegrals der 1. Näherung nach (52) : $x^2 + y^2 = \alpha^2 =$ Jntegrationskonstante sinken die gesamten Terme 3. Grades in den Differentialgleichungen (98) bei Substitution von (52), da $\xi = x + \Delta x$ und $\eta = y + \Delta y$ wo Δx und Δy aus der Homogenitätsbedingung abgeleitet werden, auf den 2. Grad herab, um mit den schon vorhandenen Termen 2. Grades vereinigt zu werden. Analog zeigt die Gleichung (99), wie bei Berücksichtigung des 6. Grades in R, also 5. Grades in $\frac{d\xi}{dt}$ und $-\frac{d\eta}{dt}$, die Differentialgleichungen aus demselben Grunde auf den 3. Grad heruntergehen. Die Koeffizienten $a_1', a_2' \ldots b'_{12}$ in den neuen Differentialgleichungen (99) für x und y genügen dann in (100) der dort gegebenen Darstellung; zur Kontrolle und Vereinfachung der Untersuchungen werden noch die zwischen den Koeffizienten bestehenden Relationen fixiert.

Zur weiteren Jntegration der Differentialgleichungen, soweit sie bis zum 2. Grade in x und y entwickelt sind, gemäß (101), wird jetzt $x = x_1 + x_3$ und $y = y_1 + y_3$ gesetzt, wo x_1 und y_1 die Lösung (101*a*) der 1. Näherung unter Benutzung nur der Linearterme in x und y fixiert, und x_3, y_3 die neuen Zusatzterme auf Grund der Mitnahme der Terme 3. Grades : $a_4'x^2$, $a_5'xy \ldots b_6'y^2$, wo a_4', $a_5' \ldots b_6'$ mindestens vom 1. Grade in ξ' und η' sind. Da alsdann zuerst : $a_4'(x_1+x_3)^2 = a_4'x_1^2 + 2a_4'x_1x_3 + a_4'x_3^2$, wo nur $a_4'x_1^2 = 3$. Grad, alle übrigen Terme aber vom 5. und 7. Grade sind, da $x_3 = 3$. Grad, so bleibt als Term 3. Grades nur : $\frac{1}{2}\alpha^2 a_4' - \frac{1}{2}\alpha^2 a_4' \cos 2\mathrm{A}$, sodaß jetzt die neuen Gleichungen (103) entstehen mit nur abgeänderten homogenen Teillen a_1'' und b_1''. Die neuen Gleichungen haben also die Form linearer inhomogener Differntialgleichunged, mit inhomogenen von der Zeit t abhängigen Termen der periodischen Form : $\mathrm{C} \,.\, \cos n\mathrm{A} + \mathrm{S} \,.\, \sin n\mathrm{A}$, wo $n = 1, 2$ etc. und wo die Koeffizienten C, S vom 3. Grade sind (104). Bei $n = 1$ fällt die Periode der freien Schwingung mit der Periode der Zusatzterme zusammen, sodaß in diesem Falle in der Lösung ausnahmsweise gemischt-säkulare Terme der Poisson-Form erscheinen, *d. h. t*. $\sin \mathrm{A}$ und $t \,.\, \cos \mathrm{A}$ (A linear in t), sodaß die ursprünglich stabile Lösung vernichtet wird, während bei $n \neq 1$ die Lösung die Form hat : $x = \gamma_1 \cos n\mathrm{A} + \sigma_1 \sin n\mathrm{A}$, analog y ; die Koeffizienten γ_1, σ_1 etc. werden nach Substitution in die Differentialgleichungen mittels (105)-(107) erhalten, wobei in diesen Definitionen der Fall $n = 1$ durch den entsprechenden Pol als Sonderfall charakterisiert und deshalb für sich zu behandeln ist (108-109). Wie wir oben gesehen haben, gibt die Berücksichtigung der Terme 3. Grades in den Differentialgleichungen noch keinen Anlaß zu Resonanztermen vom Typus $n = 1$, weshalb wir jetzt zur Berücksichtigung der Terme 5. Grades in den Differntialgleichungen übergehen können, sowohl unter Heranziehung der Gruppe : $a_4'x^2 + a_5'xy + a_1'y^2$ als auch der direkten Terme 5. Grades aus den Termen 6. Grades in R, nach Ableitung und Substitution der Terme x_1, x_3, y_1 und y_3 als Funktionen der Zeit. Dabei kann eine erhebliche Abkürzung der Formeln eintreten, wenn wir eine der Grundeigenschaften der Störungsfunktion berücksichtigen, daß sie unabhängig vom Nullpunkte der Längenzählung ist. Diesen Umstand wollen wir benutzen, den Anfangspunkt so zu wählen, daß ξ^3 oder η' verschwinden, womit eine ganz wesentliche Reduktion der Ausdrücke für die Koeffizienten der Differentialgleichungen eintreten würde. Es werde $\eta' = 0$ gesetzt, also $\tilde{\omega}' = 90°$ angenommen, sodoß alsdann $\Delta y = 0$ für alle Grade der ξ', η' und ferner Δx proportional ξ' ist. *d. h.* jetzt gleich e'. Die Ubertragung auf die verschiedenen Phasen der Lösung (110-114) bis zum Uebergang auf die Berücksichtigung der Terme 5. Grades in den Differentialgleichungen ergibt dann für den letzteren Grad bei Integration das Auftreten von Poisson-Termen, womit eine Jnstabilität der Lösung auf dem beschrittenen Wege zum Ausdruck kommt, wenn sie auch erst bei den Termen 6. Grades in R beginnt, aber infolge des oben abgeleiteten Jntegrales $R = \text{const.}$ nicht zulässig ist, weil ξ und η hiernach bei ursprünglich kleinen Werten immer klein bleiben müssen, während sie nach unserem Jntegrations-Näherungsverfahren mit der Zeit über alle Grenzen ansteigen würden.

Entsprechend der Erweiterung der Theorie der Säkularstörungen über den niedrigsten 2. Grad in R hinaus bis zum 4. Grade wird in (118) eine weitere Verschärfung des letzten Kriteriums für eine Libration entwickelt. Schließlich erfolgt eine neue Verschärfung des Kriteriums durch die auch hier hinzugefügten Terme auf Grund der Anziehung aller großen Planeten nach Stockwell, vermittelst der Gleichungen (120) und (121). Da unter den 8 Wurzeln der Fundamentalgleichung des Säkularproblems der großen Planeten die Wurzel s_7 der mittleren Säkularbewegung des Jupiterperihels entspricht, so bedarf es nur der Kombination von $\tilde{\omega}$ und $s_7 t + \beta_7$, um bei der Darstellung von $e \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} (\tilde{\omega} - s_7 t - \beta_7)$ mittels ihrer Division das Kriterium für eine Libration (122) zu erhalten, das zum Ausdruck bringt, daß der Nenner des genannten Bruches nie verschwinden darf, damit der Winkel $\tilde{\omega} - s_7 t - \beta_7$ als der Winkel zwischen den Perihelien des Asteroiden u. Jupiters nur eine Schwingung zeigt, die zudem kleiner als 90° bleibt.

§ 4. EINFLUß DER NEIGUNGSGLIEDER AUF DIE JNTEGRATION DER EXCENTRIZITÄTS-VARIABLEN

Die Berücksichtigung der Neigungsvariablen hat zur Folge, daß in den Differentialgleichungen der Exzentrizitätsvariablen (124) mindestens in p und q lineare Glieder hinzutreten, deren Koeffizienten aber vom mindestens 2. Grade in den Parametern ξ', η', p' und q' sind (126); aber auch allgemein sind die Zusatzglieder bei kleinen Werten von p, q, p' und q' vom 3. Grade gegenüber den Termen 1. Grades in ξ, η oder x, y in den Gleichungen der 1. Näherung.

Würde man andererseits versuchen, die Differentialgleichungen näherungsweise zu lösen, indem man in den Termen 3. Grades die Faktoren p, q, p^2, q^2 etc., und analog im 2. System die Faktoren x, y, x^2, x^2, y^2 etc., durch die 1. Näherungslösung als Funktion der Zeit ausdrücken würde, so erhielte man inhomogene Gleichungen mit Resonanztermen derselben Periode wie Ausgangslösung sie besitzt, sodaß die neue Lösung Poisson-Terme der Form $t \sin A$ und $t \cdot \cos A$ enthalten würde, die eine scheinbare Jnstabilität der Lösung herbeiführen und nichts in Bezug auf die wahre Lösung aussagen. Deshalb ziehen wir es vor, von dieser Lösung abzusehen, um dann in den folgenden Kapiteln eine andere Lösung zu suchen, darauf basierand, daß Poincaré (*Leçons de Mécanique céleste*, Bd. 1, pág. 235) ganz allgemein nachgewiesen hat, daß unter gleichzeitiger Berücksichtigung aller Potenzen der Neigungs-und Exzentrizitätsvariablen eine Lösung des Problems der Säkularstörungen in rein periodischer Form existiert; wir können aber zeigen, daß diese Lösung im Falle des asteroidischen Dreikörpeproblems in der Ebene ohne Poincarés kanonische Transformationen durchführbar ist. Bevor wir aber zu dieser Untersuchung im nächsten § 5 übergehen, wollen wir uns vorher darüber informieren, ob die Differentialgleichungen in ξ, η, p und q, erweitert unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Neigungs — respektive Exzentrizitätsvariablen in ihren linearen Teilen, im ersten Schritte eine periodische Lösung zur Folge haben oder nicht. Deshalb wollen wir zu diesen Zwecke eine exakte Jntegration mit Rücksicht auf die Hauptterme vornehmen. Zur Vereinfachung der Gleichungen (124) wollen wir die Längen von dem Punkte zählen, der wie schon früher, in Bezug auf den Frühlingspunkt die Länge $\tilde{\omega}' \mp 90°$ hat, sodaß $\xi' = \pm e'$ und $\eta' = 0$ ist, also auch $a_1 = a_2 = b_3 = 0$. Dann lauten die reduzierten Differentialgleichungen der Exzentrizitäts — und Neigungsvariablen wie unter (125) gegeben. Nach Homogenisierung auf Grund von (125*a*) mittels der Gleichungen (126) lauten die neuen Differentialgleichungen in Bezug auf x, y, p und q gemäß (127), deren Lösung auf Grund des Ansatzes (127*a*) erfolgt, der bei Sustitution das in den Konstanten A, B, C und D homegene Gleichungssystem (128*a*) zur Folge hat. Da mindestens eine dieser Konstanten von o verschieden sein muß, muß die Determinante des Systems verschwinden und damit die Gleichung (128*b*) und (129) den charakteristischen Koeffizienten s liefern. Die explizite Form (129) führt dann zur vereinfachten Form (130*a*) der Determinante, wobei $\varepsilon(s)$ die Bedeutung (130*b*) hat. und die Koeffizienten g_i ($i = 0$, 1, 2 und 3) durch die Ausdrücke (130*c*) definiert sind.

Auf Grund der durch (130*d*) und (130*e*) fixierten Beziehungen zwischen den beiden Koeffizientengruppen c_1, d_1, c_2, d_2 und e_1, f_1, e_2, f_2, ergeben sich noch wesentliche Vereinfachungen der Koeffizienten, sodaß unter Verschwinden von g_1 und g_3 die für s definitive Form (132) der Gleichung entsteht. Jm Hinblick auf die Lösung von (130*a*) ist zu beachten, daß $a_3 b_2$ vom Grade o und der Ordnung 2 ist während g_0 und g_2 beide vom Grade 4, aber g_0 von der Ordnung 4, g_2 von der Ordnung 2, wobei aber $g_2 s^2$ vom Grade 4 und der Ordnung 4, wie g_0 ist. Folglich ergibt sich nach (132), daß $s^2 + a_3 b_2 = \pm \sqrt{-g_0 - g_2 s^2} =$ Grad 2, Ordnung 2 ist, sodaß unsere bekannte, ohne Rüchsicht auf $\varepsilon(s)$ bestehende 1. Näherungslösung $s^2 = -a_3 b_2 =$ (Grad o. Ordnung 2) bei Berücksichtigung von ε um Terme des Grades 2 und der Ordnung 2 zu korrigieren ist. Substitukert man deshalb die 1. Näherungslösung $s^2 = -a_3 b_2$ in $\varepsilon(s)$, den Zusatz höheren Grades als $a_3 b_2$, so folgt aus der Darstellung (133), daß $\varepsilon(s) = g_0 + g_2 s^2 > 0$, sodaß die durch (132) fixierte Summe positiver Terme nur mittels eines komplexen s^2 gleich o sein kann, indem also $s^2 = -\sigma^2 + i\tau$, wo also $\sigma^2 = \sigma_0^2 + \delta$ mit $\sigma_0^2 = a_3 b_2 = 1$. Näherungswert $u \,.\, \tau = \delta = 0$ mit $\varepsilon(s) = 0$. Da jetzt: $s = \sigma_1 + i\sigma_2$, müssen $x = Ae^{st} = Ae^{\sigma_1 t}(\cos \sigma_2 t + i \sin \sigma_2 t)$, ebenso y, p und q gedämpfte Schwingungen mit der Periode $P = \frac{2\pi}{\sigma_2}$ darstellen und σ_2 sehr nahe gleich dem ersten Näherungswerte s ist, während σ_1 mit ε verschwindet. Die Substitution von $s = \sigma_1 + i\sigma_2$ in die Gleichung (130*a*) für s ergibt dann mittels der Gleichungen (135) bis (142) die Darstellungen von σ_1 und σ_2 mittels (141) und (142), wobei σ_2 vom Grade o und der Ordnung 1, entsprechend der 1. Näherungslösung für s, während der durch $\varepsilon \neq 0$ hervorgebrachte Koeffizient σ_1 vom Grade 2, aber auch von der Ordnung 1 ist. Die den Variablen x, y, p und q entsprechenden Lösungen, aufgetrennt in den reellen und imaginären Teil, fixiert das System (144), und die zwischen den Konstanten bestehenden Beziehungen enthalten die aus (128*a*) hervorgehenden Systeme (145) und (146). Betrachtet man die Konstanten A′, B′, C′ und D′ als die 4 willkürlichen Jntegrationskonstanten, so folgen die adjungierten Konstanten A_1'', B_1'', C_1'' und D_1'' mittels (147), entsprechend der Lösung $s_1 = \sigma_1 + i\sigma_2$, sodaß alsdann die übrigen Lösungen gemäß (143), d. h. $s_i = \pm\sigma_1 \pm i\sigma_2$ unter Permutation der Vorzeichen von σ_1 und σ_2 und Berücksichtigung der Beziehungen (148) und (150), in (149) und (151) ersichtlich sind. Die schließlich aus der linearen Zusammensetzung der 4 partikulären Lösungen hervorgehenden Gesamtlösungen sind in (151) dargestellt. Die Darstellung der 4 Jntegrations konstanten durch die Anfangselemente e_0, $\tilde{\omega}_0$, φ_0 und θ_0 geben die Beziehungen (152).

Entwickelt man den asymptotischen Koeffizienten $e^{\pm\sigma_1 \cdot t}$ nach Potenzen von $\sigma_1 t$, so zeigt sich, daß der asymptotische Effekt durch säkulare Zusatzterme dargestellt wird, die mindestens um 3 Grade höher sind als die periodische Ausgangslösung. Andererseits bleibt das Theorem Poincarés bestehen, daß die säkularen Störungen in jedem Falle allgemein in periodischer Form darstellbar sind, wozu aber suzessive kanonische Transformationen der Elemente vorzunehmen sind. Die in der vorliegenden Abhandlung behandelten Fälle der nicht kanonischen Exzentrizitäts- Variablen ξ, η einerseits und der Neigungsvariablen p, q andererseits stellen Ausnahmefälle dar, in denen von vorneweg periodische Darstellungen durch Fourierreihen möglich sind, während die in diesen Fällen auf beide Variablengruppen zugleich ausgedehnte Jntegration schon in der 1. Näherung auf eine asymptotische Darstellung führt.

§ 5. EINE LÖSUNG DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER ASTEROIDISCHEN SÄKULARSTÖRUNGEN DURCH FOURIERREIHEN

Die Differentialgleichungen in x und y reduzieren sich, zunächst im ebenen Problem falls $\tilde{\omega}'=90°$ also $\eta'=0$, auf eine Gleichung (153) mit einer verminderten Zahl von Termen. Die variablen x und y werden als allgemeine Fourierreihen (156) nach sinit und cos $i\Lambda$, wo $i=0, 1, 2 \ldots$ bis ∞ dargestellt, wobei das Argument $\Lambda = s \cdot t + \beta$. Unsere Auigabe ist die Bestimmung der Koeffizienten der Fourierreihen und des Phasenkoeffizienten s, und zwar auf Grund des Vergleiches der Koeffizienten von sin $i\Lambda$ und cos $i\Lambda$ auf beiden Seiten der Differentialgleichungen. Deshalb werden zuerst die Koeffizienten x^2, $x \cdot y$, x^3, $x^2 \cdot y$ etc. analytisch als Fourierreihen dargestellt (157), bis (163). Bei den höheren Kombinationen, d. h. von der 3. Potenz an, steigt die Mannigfaltigkeit der Jndexzahlen an, zugleich die Graderhöhung dieser Terme, weshalb vom praktischen Gesichtspunkt aus eine Beschränkung der Jndices vorzunehmen ist, um nicht unnötige Terme höheren Grades mitschleppen zu müssen, weil sie vom praktischen Gesichtspunkt aus nicht in Frage kommen. Die Basis ist, daß der Koeffizient α in der Darstellung von x und y in der 1. Näherungslösung vom 1. Grade ist.

Jm ersten Schritt der Vergleichung der Koeffizienten von cos Λ in $\frac{dx}{dt}$ und sin Λ in $-\frac{dy}{dt}$ ergibt sich dann das Gleichungssystem (164a). Bei Beschränkung zunächst nur auf den 1. Grad finden wir unser 1. lineares, homogenes Näherungssystem wieder; seine Determinante $\Delta = s^2 - a_3'b_2' = 0$ ergibt den Phasenkoeffizienten s, und betrachten wir eine der Urbekannten s_1 oder c' als gegebene von 0 verschiedene Größe, d. h. als Jntegrationskonstante, so folgt die andere Größe als lineare Kunktion der ersten. Zusammen mit β als willkürlicher Größe können wir dann β und s_1 als die beiden Jntegrationskonstanten unserer beiden linearen Differentialgleichungen betrachten. Das Wesen der Lösung besteht dann darin, mit der Ableitung jedes weiteren, im Grade höheren Koeffizientenpares eine Verbesserung der vorhergehenden Lösung herbeizuführen, ebenso in Bezug auf die Frequenz s, sodaß die Verbesserungen schrittweise von immer höherem Grade werden.

Der 2. Teil unseres 1. Schrittes besteht in Analogie zum 1. Teil in dem Vergleich der Koeffizienten von sin Λ in $\frac{dx}{dt}$ und cos Λ in $-\frac{dy}{dt}$ (164b) zwecks Ableitung der Koeffizienten c_1 und s_1'; diese Koeffizienten hattan in unserer früheren 1. Lösung in § 1, indem $x = s_1$ sin Λ und $y = c_1'$ cos Λ war, die Werte 0, sie traten garnicht auf. Jetzt aber sind die Gleichungen zu fixieren, die beweisen, daß mit Rücksicht auch auf alle höheren Terme in den Differentialgleichungen die Koeffizienten $c_1 = s_1' = 0$ sind und zwar mit Rücksicht auf alle Näherungen. Jn der ersten Näherung reduzieren sich die Gleichungen (164b) auf ein in den beiden Koeffizienten c_1 und s_1' homogenes System, dessen Determinante dieselbe wie im ersten System für s_1 und c_1' ist, nämlich $\Delta = s^2 - a_3'b_2'$ also $= 0$, sodaß die Koeffixienten c_1 und s_1' von o verschieden sein könnten, aber doch verschwinden müssen, weil sonst eine weitere unabhängige Konstante neben den schon vorhandenen beiden Jntegrationskonstanten s_1 und β auftreten würde, sodaß also $c_1 = s_1' = 0$.

Zur Ableitung weiterer Koeffizienten dient im nunmehr folgender 2. Schritt der Vergleich der Koeffizienten von cos 2A in $\frac{dx}{dt}$ und sin 2A in $-\frac{dy}{dt}$ (165) zur Bestimmung der Koeffizienten s_2 und c'_2, die, weil die Determinante des entsprechenden homogenen Systems $\Delta_2 = -4s^2 + a'_3b'_2 = -3s^3 \neq 0$, weil $-s^2 + a'_2b_2' = 0$, deshalb in der 1. Näherung verschwinden müssen. Dagegen folgt aus dem korrespondierenden System in Bezug auf c_2 und s'_2 (167) gültig für sin 2A in $\frac{dx}{dt}$ und cos 2A in $-\frac{dy}{dt}$; daß infolge Reduktion dieses Systems auf ein inhomogenes System, dessen inhomogener Teil auf Grund der Restglieder vom 3. Grade ist und dessen Determinante auch gleich $\Delta_2 \neq 0$ ist, die unbekannten Koeffizienten c_2 und s'_2 deshalb vom 3. Grade sind und zwar Funktionen der vom ersten Schritt her schon bekannten Koeffizienten s_1 und c'_1 also von s_1, allein. Deshalb läßt sich schon jetzt übersehen, daß alle weiteren Koeffizienten immer als Funktionen der schon vorher abgeleiteten Koeffizienten darstellbar sind, also folglich als Funktionen von s_1 allein. Die Fortsetzung des obigen Algorithmus liefert dann die in (155) gegebene Zusammenstellung der Koeffizienten, deren Rekursion ersichtlich ist.

Kehren wir jetzt nach Erledigung der 1. Annäherung zu den Ausgangsgleichungen (164 *a*) etc. zurück, um die 2. Näherung vorzunehmen, indem wir die als Restglieder bezeichneten Terme jeder Gleichung berücksichtigen, so ergibt sich das folgende Bild. Jn den Gleichungen zuerst für s_1 und c'_1, die beide vom 1. Grade sind, zeigt sich, daß die Restglieder auf Grund der 1. Näherung der abgeleiteten Koeffizienten mindestens vom 2. Grade sind und stets in die Unbekannten s_1 und c'_1 multipliziert sind, soweit sie nicht o sind, weil oft einer der Faktoren der Restterme auf Grund der 1. Näherung o ist. Jm ersteren Falle lassen sich die Restglieder infolge der Faktoren s_1 und c_1' mit den Hauptgliedern in s_1 und c_1' zusammenziehen, sodaß wie in der ersten Näherung auch jetzt in der 2. Näherung 2 homogene Gleichungen in s_1 und c_1' entstehen, deren Determinante $D_1 = 0$, wo D_1 gegenüber der Darstellung der 1. Näherung nur um Terme 2. Grades korrigiert ist, sodaß die Wurzel s um Terme 2. Grades verbessert wird, ebenso wie die Unbekannten s_1 oder c_1, je nach der Wahl der einen oder anderen Größe als Jntegrationskonstante. Das Analoge gilt für das System der korrespondierenden Koeffizienten c_1 und s_1', (164 *b*), indem wieder eine homogene Gleichung entsteht, wobei die Determinante bis auf Terme 2. Grades dieselbe ist, also eine kleine Größe im vorliegenden Falle, sodaß deswegen die Unbekannten c_1 und s'_1 verschwinden müssen, auch in dem Falle, daß man die Determinante als verschwindend ansieht, sodaß die Unbekannten von o verschieden sein könnten, aber doch, unter Befriedigung der Gleichungen, gleich o sein müssen, weil sonst eine neue Konstante über die schon vorhandenen beiden Jntegrationskonstanten hinaus eingeführt würde.

Analog verfährt man mit den weiteren Gleichungsparen: s_2, c'_2 und c_2, s'_2, aber von jetzt ab mit dem Unterschiede, daß die Determinanten der Systeme: $D = i^2 s^2 - a'_3\, b'_2 \neq 0$ stets, weil von jetzt ab $i = 2, 3\ldots$, und ferner bei dem einen Par die Restglieder $\neq 0$, beim anderen aber o sind, sodaß das eine System homogen, das andere inhomogen ist, und folglich allgemein die unbekannten Koeffizienten des einen Pares $\neq 0$, die des anderen $= 0$ sind, wie schon aus der obigen Koeffiziententabelle auf Grund der ersten Näherung ersichtlich war, zugleich unter Festlegung des wachsenden Grades der Koeffizienten.

Die obige Darstellung der säkularen Exzentrizitätsvariablen mittels Fourierreihen nach dem Argument $A = s \cdot t + \beta$ fordert dazu auf, eine Erweiterung des Problems auf gleichzeitige Berücksichtigung der Neigungsvariablen vorzunehmen. Die dadurch hinzutretenden Terme, auf Grund der Differentialgleichungen (1) sind in den Gleichungen (158) und (162) niedergelegt. Analytisch sind die Koeffizienten in (159) und (162) wiedergegeben.

Die Verallgemeinerung besteht dann in einer Darstellung der säkularen Exzentrizitäts-und Neigungsvariablen mittels der Fourierreihen nach 2 Argumenten A und B, wo $A = s \cdot t + B$ und $B = - s' t + \delta$; dabei ist nach der allgemeinen Theorie der Säkularstörungen bekannt, daß s' sehr nahe gleich s ist und die Vorzeichenänderung von t in A und B darauf beruht, daß die Perihelien voran-, die Knoten aber rückwärtslaufen.

Aber wie schon oben am Schluß von §. 4 auf Grund der Ausgangslösung in Bezug auf die in p, q, und gemischten, aber auf ihre linearen Teile beschränkten Differentialgleichungen gezeigt wurde, ist die Ausgangslösung eine asymptotische, sodaß die analytische Fortsetzung der Lösung unter Mitnahme aller Terme 3. und höheren Grades in den Differentialgleichungen keine periodische bleiben kann. Erst bei Anwendung kanonischer Ausgangselemente und kanonischer Transformationen ist nach Poincarés Vorgang eine periodische Darstellung der säkular-gemischten Störungen möglich.

§ 6. ANWENDUNGEN DER THEORIE

Als eine erste Anwendung der Fourierdarstellung der Säkularstörungen über diese hinaus ergibt sich unmittelbar die Nutzbarmachung auf den allgemeinen Fall der planetaren Störungen, indem die von den Elementen ξ, η, p und q abhängigen Koeffizienten der periodischen Terme in den Differentialgleichungen für die periodischen Störungen durch die trigonometrische Form der Säkularstörungen ersetzt werden, so daß die Divisoren der periodischen Störungen bei der Jntegration der Gleichungen sowie die Argumente Änderungen erfahren, die einer Berücksichtigung von Termen 2. Ordnung der störenden Masse gleichkommen.

Ferner ist eine Anwendung und Erweiterung der Theorie über die kleinen planetaren Exzentrizitäten hinaus auf Körper mit großen Exzentrizitäten, speziell die periodischen Kometen, wo die Exzentrizität zwischen 0.5 bis fast zur Einheit gelegen ist, möglich. Hierfür ist statt einer Potenzentwickelung der Störungsfunktion und ihrer Ableitungen nach den Exzentrizitäten und Neigungsvariablen eine Potenzentwickelung nach den Störungen $\delta\xi$, $\delta\eta$, δp und δq erforderlich, um dadurch dieselbe Form der Differentialgleichungen wie im planetaren Falle zu erhalten, wenn auch jetzt die Koeffizienten a_i, b_i ... infolge der großen Exzentrizitäten nicht mehr nach Potenzen der ξ, η, p und q darstellbar sind, sondern auf Grund mechanischer Quadratur allgemein als Fourierreihen nach den mittleren Längen des Kometen und des störnden Körpers zu entwickeln sind. Bei Berücksichtigung nur der konstanten Teile der Koeffzienten erhalten wir dann im kometaren Falle dieselbe Form der Differentialgleichungen (194) wie im Planetenproblem, wenn auch bei den Planeten die Entwickelung nach den ξ, η, p und q, im Kometenfalle nach den $\delta\xi$, $\delta\eta$, δp und δq vor sich geht. Da diese letzteren Terme in $\delta\xi$ etc., noch mit Koeffizienten von der Ordnung der störenden Masse multipliziert sind, ist jeder Term der Differentialgleichung von der 2. Ordnung der störenden Masse, während der von den $\delta\xi$ etc., unabhängige konstante Teil jeder Gleichung nur von der 1. Ordnung ist und die Säkularstörungen 1. Ordnung vermittelt. Deshalb ist allerdings vom praktischen Gesichtspunkt aus eine strenge Jntegration unter gleichzeitiger Berücksichtigung der in $\delta\xi$ etc., linearen Terme nicht notwendig, wohl aber vom theoretischen Gesichtspunkt aus zum Studium des säkularen Verhaltens der Exzentrizitaten wie der Bahnneigungen für größere Zeiträume.

§ 7. DIE ERGEBNISSE ZUM LIBRATIONSPROBLEM DER PERIHELIEN UND KNOTENLINIEN DER ASTEROIDEN

Die Anwendung des ersten, einfachsten Kriteriums zur Exitenz einer Libration der Perihelien der 1513 Asteroiden, die bis 1940 bekannt waren, ergibt, unter alleiniger Anziehung des großen Planeten Jupiter, 43 Fälle einer Libration, d. h. nur rund 3 % aller Planetoiden. Berücksichtigen wir weiter die Anziehung durch alle großen Planeten und Beweglichkeit des Jupiterperihels, so bleibt nur noch für 6 Planetoiden der Fall einer Libration um das bewegliche Jupiterperihel bestehen. Schließlich verbleibt bei Berücksichtigung der periodischen Störungen bei der Konstantenbestimmung nur ein einziger Planet, Nr. 1201 (Strenua), als Librationsfall, der aber auch noch zweifelhaft bleibt, weil das Kriterium numerisch nur ganz unmerklich erfüllt ist, sodaß überraschenderweise überhaupt kein Librationsfall besteht. Weiterhin wird diese Uberraschung noch bestäigt in Bezug auf die Frage nach einer Libration der Knotenlinien, indem sich nur 4 Fälle einer Libration der Knoten um das bewegliche Knotenlinie des Jupiter ergeben, nachdem die erste Näherung für 32 Planeten eine Knotenlibration ergeben hatte.

Demgegenüber bleibt aber die Häufung der Perihelien der Planetoidem um die Perihellage Jupiters als statistisch durch die Beobachtung einwandfrei festgestelltes Ergebnis bestehen und zwar trotz der lange Zeiträume hindurch bestehenden Gravitationswirkung Jupiters und der anderen großen Planeten. Es scheint hieraus die Möglichkeit zu folgen, daß bei der Annahme einer gleichzeitig erfolgten Entstehung des großen Planeten Jupiter und der Planetoiden, auf Grund desselben kosmogonischen Ereignisses, die Perihelrichtungen zusammenfielen und Librationen der Perihele um das Jupiterperihel eintraten und sich weiter entwickeln, oder aber im Laufe der Zeiten infolge der säkularen Gravitationswirkung aller großen Planeten in Rotationen transformiert werden. Ebenso berechtigt erscheint aber auch die Möglichkeit, daß bei ursprünglich willkürlicher Verteilung der Perihelien die überwiegende säkulare Anziehung durch Jupiter mit der Zeit eine Anhäufung der Perihelien um die Perihellage Jupiters hervorgebracht hat, verbunden mit einer aber erst in sehr ferner Zukunft zu erwartenden Librationsbewegung der Perihelien der Planetoiden, was als Ausdruck des Resultates der obigen Untersuchungen und als Zielpunkt neuer Untersuchungen zu betrachten ist.

INDICE

SE TERMINÓ DE IMPRIMIR EL DÍA 15 DE FEBRERO DE 1949
EN LA IMPRENTA Y CASA EDITORA « CONI »
CALLE PERÚ 684, BUENOS AIRES

OBSERVATORIO ASTRONÓMICO DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

SERIE ASTRONÓMICA – Tomo XXV, Nº 2

SOBRE LAS SOLUCIONES HOMOGRAFICAS DEL PROBLEMA DE LOS TRES CUERPOS

POR

R. P. CESCO

LA PLATA

1959

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

1959

PRESIDENTE

Doctor DANILO CARLOS VUCETICH

VICEPRESIDENTE

Doctor CONSTANTINO BRANDÁRIZ

SECRETARIO GENERAL

Doctor JULIO MARIO MARTÍN

PROSECRETARIO GENERAL

Lic. CÉSAR AMÍLCAR DUMM

GUARDASELLOS

Doctor JOSÉ DOMINGO MÉNDEZ

CONSEJO SUPERIOR

Decanos: Ing. Agron. Edgardo Néstor Camugli, Ing. Alberto R. Gray, Dr. Enrique M. Barba, Dr. Amílcar A. Mercader, Dr. Constantino Brandáriz, Dr. Humberto Giovambattista, Dr. Federico E. B. Christmann, Dr. Simón Jansenson, Dr. Sebastián Guarrera y *Director del Observatorio Astronómico:* Dr. Reynaldo P. Cesco.

Delegados de los profesores: Ing Agr. Ítalo N. Constantino, Ing. Juan Sábato, Prof. José M. Lunazzi, Dr. Raúl Dumm, Dr. Edilberto Fernández Ithurrat, Dr. José Méndez, Dr. Ricardo R. Rodríguez, Dr. Samson Leiserson y Dr. Ángel L. Cabrera.

Delegados de los graduados: Ing. Agr. Luis G. Cornejo, Agr. Octavio de la Colina, Prof. Juan M. Sadi, Dr. César Ves Losada, Dr. Vicente A. Antonini, Dr. Pedro J. Aymonino, Dr. Néstor O. Ladd, Contador Ángel R. Mugetti y Dr. Constante P. Moneda.

Delegados de los alumnos: Oscar de Córdova, Eduardo Medrano, Jorge Alfredo Crespi, Humberto Maxwell, Enzo Reccia, Roberto Manuel Catávolo, Hugo A. Crego, Heriberto Zardini y Roberto Carpinetti.

SOBRE LAS SOLUCIONES HOMOGRAFICAS DEL PROBLEMA DE LOS TRES CUERPOS [1]

Por R. P. Cesco

Summary. The object of this paper is to prove the following theorem: *The only homographic solutions of the three-body problem of celestial mechanics with a law of attraction inversely proportional to any power r^α of the distance r are*: (I) *The pure dilatations.* (II) *The collinear solutions.* (III) *The equilateral solutions.* (IV) *The isosceles solutions of* BANACHIEWITZ *for $\alpha = 3$, and* (V) *the scalene solutions given in this note, also for $\alpha = 3$, the first three kinds being the only planar solutions for any value of α.*

1. Nos proponemos demostrar en esta nota que las únicas soluciones homográficas del problema de los tres cuerpos de la mecánica celeste, con ley de atracción inversamente proporcional a cualquier potencia r^α de la distancia r son: I, las dilataciones puras; II, las soluciones colineales; III, las soluciones equiláteras; IV, las soluciones isósceles de BANACHIEWITZ, para $\alpha = 3$ y V, las soluciones escalenas consideradas a continuación, también para $\alpha = 3$.

En virtud de un teorema reciente de KURTH [2], cada solución homográfica del problema de los tres cuerpos, con la ley de atracción mencionada, es plana para todo $\alpha \neq 3$. También puede demostrarse fácilmente que para cualquier valor de α las únicas soluciones homográficas planas son las de los tipos I, II y III. Sólo ofrece alguna dificultad la determinación de las condiciones de existencia de soluciones homográficas —desde luego ni planas ni con $\alpha \neq 3$— de los tipos IV y V.

2. El sistema de ecuaciones diferenciales de movimiento al cual deben satisfacer las soluciones homográficas puede escribirse para $\alpha = 3$ en la forma

$$(1)\qquad \begin{aligned} \rho^4 \ddot{r}_1 + a_{11} r_1 + a_{12} r_2 &= 0 \\ \rho^4 \ddot{r}_2 + a_{21} r_1 + a_{22} r_2 &= 0 \end{aligned}$$

donde r_1 y r_2 son los vectores de posición de los puntos-masa m_1 y m_2 respecto de un sistema "heliocéntrico" con origen en el punto-masa $m_0 = 1 - m_1 - m_2$ y donde los coeficientes $a_{\mu\nu}$ están dados por:

$$(2)\qquad \begin{aligned} a_{11} &= (1 - m_2) a_1^{-4} + m_2 a^{-4}; \quad a_{12} = m_2 (a_2^{-4} - a^{-4}) \\ a_{22} &= (1 - m_1) a_2^{-4} + m_1 a^{-4}; \quad a_{21} = m_1 (a_1^{-4} - a^{-4}) \end{aligned}$$

[1] Presentado a la IIa. Reunión de la Asociación Astronómica Argentina de septiembre 1959.

[2] KURTH, R. On LAGRANGE's triangular solution of the problem of three bodies, Arch. Math., VIII (1957) 381-392.

siendo

$$a_1 = |r_1{}^0| \qquad a_2 = |r_2{}^0| \; ; \qquad a = |r_1{}^0 - r_2{}^0|$$

y

$$\rho = \rho(t) > 0 \text{ con } \rho^0 = \rho(0) = 1, \text{ la dilatación.}$$

Pongamos en dicho sistema (1)

$$r_1 = \rho P \qquad\qquad r_2 = \rho Q$$

siendo $P = P(t)$ y $Q = Q(t)$ vectores de módulos constantes:

$$|P| = \frac{1}{\rho}|r_1| = a_1 \; ; \quad |Q| = \frac{1}{\rho}|r_2| = a_2$$

y

$$|P - Q| = \frac{1}{\rho}|r_1 - r_2| = a$$

de donde

$$P \cdot Q = a_1 a_2 \cos\omega = \text{const.} \; ;$$

y cambiemos la variable independiente t por otra τ definida por la expresión

$$d\tau = \frac{dt}{\rho^2} \text{ con } \tau = 0 \text{ para } t = 0$$

El sistema (1) se transforma entonces en el siguiente:

$$(3) \qquad \begin{aligned} P'' + (\rho^3\ddot{\rho} + a_{11})\,P + a_{12}\,Q &= 0 \\ Q'' + a_{21}\,P + (\rho^3\ddot{\rho} + a_{22})\,Q &= 0 \end{aligned}$$

donde los acentos indican derivación respecto de τ y los puntos derivación respecto de t. Por ser

$$P^2 = a_1{}^2 \; ; \quad Q^2 = a_2{}^2 \; ; \quad |P - Q|^2 = a^2$$

se obtiene, derivando

$$(4) \qquad \begin{aligned} &P \cdot P' = 0, \quad P'^2 + P \cdot P'' = 0 \; ; \\ &Q \cdot Q' = 0, \quad Q'^2 + Q \cdot Q'' = 0 \; ; \\ &P' \cdot Q + P \cdot Q' = 0, \quad P'' \cdot Q + P \cdot Q'' + 2\,P' \cdot Q' = 0 \; . \end{aligned}$$

3. Para no considerar sino soluciones homográficas de los tipos IV y V supondremos:

1° $P' \not\equiv 0$ ó bien $Q' \not\equiv 0$, con el fin de excluir las dilataciones puras.

2° $P \times Q \not\equiv 0$ para excluir las soluciones colineales.

3° Que el triángulo de lados a, a_1, a_2 no sea equilátero.

Del sistema (3) resulta, multiplicando escalarmente la primera ecuación por P y la segunda por Q y teniendo en cuenta las (4)

$$
(5) \qquad \begin{aligned} P'^2 &= (\rho^3\ddot{\rho} + a_{11})a_1^2 + a_{12}a_1a_2 \cos \omega \\ Q'^2 &= (\rho^3\ddot{\rho} + a_{22})a_2^2 + a_{21}a_1a_2 \cos \omega \end{aligned}
$$

y multiplicando la primera de las (3) por P' y la segunda por Q':

$$
(6) \qquad \begin{aligned} P' \cdot P'' + a_{12}\, P' \cdot Q &= 0 \\ Q' \cdot Q'' + a_{21}\, P \cdot Q' &= 0 \end{aligned}
$$

Consideremos primero el caso escaleno V o el isósceles IV con $a_1 = a_2$. Se tendrá entonces $a_{12} \neq 0$ y $a_{21} \neq 0$. Por ser $P' \not\equiv 0$ (o bien $Q' \not\equiv 0$) existe cierto intervalo (τ_0, τ_1) en el cual debe tenerse $P' \neq 0$ y $Q' \neq 0$ ya que de lo contrario sería en algún intervalo, $Q' \equiv 0$ ó $P' \equiv 0$ y en virtud de (3) $P \times Q = 0$ contra la segunda hipótesis. Supongamos que en dicho intervalo (τ_0, τ_1) sea $P' \cdot Q = 0$ en cuyo caso es también por (4) $P \cdot Q' = 0$. De (6) sigue

$$
P' \cdot P'' = 0, \qquad Q' \cdot Q'' = 0
$$

de donde

$$
P'^2 = \text{const.} \qquad Q'^2 = \text{const.}
$$

y por (5)

$$
(7) \qquad \boxed{\rho^3\ddot{\rho} = C = \text{const.}}
$$

ecuación diferencial que permitirá, conocido C hallar con $\rho(0) = 1$ y $\dot{\rho}(0)$ arbitrario, $\rho = \rho(t)$ y por tanto $\tau = \tau(t)$.

Si en cambio fuese $P' \cdot Q \neq 0$, en cuyo caso sería también $P \cdot Q' \neq 0$, sigue de (6), en virtud de (4):

$$
a_{21}P' \cdot P'' + a_{12}Q' \cdot Q'' = 0
$$

e integrando

$$
a_{21}P'^2 + a_{12}Q'^2 = \gamma = \text{const.}
$$

Pero de las (5) y de esta última se obtiene

$$
(a_{21}a_1^2 + a_{12}a_2^2)\rho^3\ddot{\rho} + K = \gamma
$$

donde

$$
K = a_{11}a_{21}a_1^2 + a_{22}a_{12}a_2^2 + 2a_{12}a_{21}a_1a_2 \cos \omega
$$

Luego si

$$
\delta = a_{21}a_1^2 + a_{12}a_2^2 \neq 0
$$

valdría la (7), como en el caso anterior, con $C = (\gamma - K)/\delta$, y sería $P' \cdot Q = 0$ contra la hipótesis.

4. Si por el contrario es $\delta = 0$, lo cual implica $a_1 \neq a_2$, se obtiene de las (5) y de $\delta = 0$:

$$a_2^2 P'^2 + a_1^2 Q'^2 = (2\rho^2 \ddot{\rho} + a_{11} + a_{22}) a_1^2 a_2^2$$

de donde

$$\rho^3 \ddot{\rho} = \mu - \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22})$$

siendo

$$\mu = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{P'}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{Q'}{a_2}\right)^2\right] \tag{8}$$

y reemplazando en (3):

$$\begin{gathered} P'' + \left(\mu + \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22})\right) P + a_{12} Q = 0 \\ Q'' + a_{21} P + \left(\mu - \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22})\right) Q = 0 \end{gathered} \tag{9}$$

De aquí resulta, en virtud de las (4) y $\delta = 0$

$$P' \cdot Q' = \mu \, P \cdot Q \tag{10}$$

Se tiene $P \cdot Q \neq 0$. En efecto, si $P \cdot Q = 0$ resulta $P' \cdot Q' = 0$ y por tanto $P'' \cdot Q' + P' \cdot Q'' = 0$. Pero por (9) es

$$P'' \cdot Q' + P' \cdot Q'' = -\left(\mu + \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22})\right) P \cdot Q' - \left(\mu - \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22})\right) P' \cdot Q = -(a_{11} - a_{22}) \, P \cdot Q'$$

y ya que la condición $\delta = 0$ implica $\operatorname{sgn} a_{12} \neq \operatorname{sgn} a_{21}$ y por tanto $a_{11} - a_{22} \neq 0$, resulta $P \cdot Q' = 0$ de donde $P' \cdot Q = 0$ lo cual por (4) es incompatible con $P' \cdot Q' = 0$.

Derivando (10)

$$\mu' \, P \cdot Q = -(a_{11} - a_{22}) \, P \cdot Q'$$

Pero de (8), (9) y $\delta = 0$ sigue

$$\mu' = a_1^{-2} \, P' \cdot P'' + a_2^{-2} \, Q' \cdot Q'' = 2 a_{12} a_1^{-2} \, P \cdot Q'$$

luego

$$2 a_{12} a_1^{-2} (P \cdot Q)(P \cdot Q') = -(a_{11} - a_{22}) \, P \cdot Q'$$

y de aquí, si fuese $P \cdot Q' \neq 0$ resultaría

$$\cos \omega = -\frac{1}{2} (a_{11} - a_{22})\, a_1 a_{12}^{-1} a_2^{-1}$$

de donde, reemplazando los $a_{\mu v}$ por sus valores (2) y a^{-4} por su valor obtenido de la expresión

$$\delta = m_1 a_1^2 (a_1^{-4} - a^{-4}) + m_2 a_2^2 (a_2^{-4} - a^{-4}) = 0$$

esto es:

$$a^{-4} = (m_1 a_2^2 + m_2 a_1^2)\,(m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2)^{-1} a_1^{-2} a_2^{-2}$$

encontraríamos tras breve cálculo

$$\cos \omega = \frac{1 - m_1}{2\, m_2} \frac{a_1}{a_2} + \frac{1 - m_2}{2\, m_1} \frac{a_2}{a_1}$$

y puesto que $1 - m_1 > m_2$, $1 - m_2 > m_1$ y

$$\frac{1}{2}\, a_1 / a_2 + \frac{1}{2}\, a_2 / a_1 = \frac{1}{2}\, (a_1^2 + a_2^2) / a_1 a_2 \geqq 1$$

sería $\cos \omega > 1$.

Debe ser pues $P' \cdot Q = 0$, luego también $P \cdot Q' = 0$ y en virtud de (6): $P' \cdot P'' = 0$, $Q' \cdot Q'' = 0$ es decir, como antes: $P'^2 =$ const., $Q'^2 =$ const. y $\rho^3 \ddot{\rho} =$ const.

5. En resumen es pues en cualquiera de los dos casos $\delta \gtreqless 0$.

(a) $$\rho^3 \ddot{\rho} = C\text{(3)}$$

(b) $$P'^2 = \text{const.}, \qquad Q'^2 = \text{const.}$$

(c) $$P \cdot Q' = P' \cdot Q = 0, \qquad P' \cdot P'' = Q' \cdot Q'' = 0$$

Multiplicando ahora vectorialmente las (3) por P y Q respectivamente queda:

$$P \times P'' + a_{12}\, P \times Q = 0, \qquad Q \times Q'' - a_{21}\, P \times Q = 0$$

luego los vectores P, Q, P'' y Q'' son, para cada τ, paralelos a un mismo plano π; y puesto que por (c) y las (4) son P' y Q' perpendiculares a dicho plano podemos escribir $P' = \lambda Q'$, con λ constante en virtud de (b), e integrando

(11) $$\boxed{P = \lambda Q + R}$$

donde el vector constante R queda determinado, conocido λ, por las condiciones iniciales.

---

(3) Obsérvese que con $\rho^3 \ddot{\rho} = C$ las (3) constituyen un sistema lineal fácil de resolver y discutir. Lo mismo ocurre con el sistema correspondiente al (1) para α arbitrario, cuando $\rho =$ const. —soluciones de equilibrio relativo de LEVI-CIVITA y WHITTAKER—; y para $\alpha = -1$.

6. Si reemplazamos ahora en (4) P por su valor (11) y $\rho^3\ddot{\rho}$ por C nos queda:

$$
(12)\qquad \begin{aligned} &\lambda Q'' + (C + a_{11})(\lambda Q + R) + a_{12}Q = 0 \\ &Q'' + a_{21}(\lambda Q + R) + (C + a_{22})Q = 0 \end{aligned}
$$

de donde, eliminando Q'':

$$
(13)\qquad T(\lambda)Q = (C + a_{11} - \lambda a_{21})R
$$

siendo

$$
T(\lambda) = a_{21}\lambda^2 + (a_{22} - a_{11})\lambda - a_{12}
$$

En virtud de la hipótesis $P \times Q \neq 0$ debe ser $R \neq 0$ y $Q \times R \neq 0$. La (13) exige por tanto que sea

$$
(14)\qquad \begin{aligned} &T(\lambda) = 0 \\ &C + a_{11} - \lambda a_{21} = 0 \end{aligned}
$$

en cuyo caso, como se ve sin dificultad, es C raíz de la ecuación de segundo grado

$$
(15)\qquad \begin{vmatrix} C + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & C + a_{22} \end{vmatrix} = 0
$$

El discriminante de esta ecuación es positivo y puesto que

$$
a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0
$$

ambas raíces son negativas.

Pero la segunda de las ecuaciones (12):

$$
(16)\qquad Q'' + (a_{21}\lambda + C + a_{22})Q = -a_{21}R
$$

nos indica que por ser $|Q| = \text{const.}$, es preciso que sea

$$
a_{21}\lambda + C + a_{22} > 0
$$

o, por (14)

$$
C + \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) > 0
$$

y para esto, que C sea la raíz que corresponde a la determinación positiva del radical. Con dicho valor de C, con el de λ obtenido de (14) y con $R = P^0 - \lambda Q^0$ se halla Q integrando la (16) y P mediante la (11).

Ahora bien, reemplazando en las (5) $\rho^3\ddot{\rho}$ por el valor hallado de C se obtiene

$$
P'^2 = (C + a_{11})a_1^2 + a_{12}a_1a_2 \cos\omega; \quad Q'^2 = (C + a_{22})a_2^2 + a_{21}a_1a_2 \cos\omega
$$

y puesto que $P'^2 = \lambda^2 Q'^2$ y que, en virtud de (14) y (15) es

$$\lambda = \frac{C + a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{C + a_{22}}$$

resulta

(17) $$\boxed{(a_{11} - a_{22})\, a_1 a_2 \cos\omega = a_{21} a_1^2 - a_{12} a_2^2}$$

En particular, si $a_1 = a_2$ esta condición exige que sea $a_{12} = a_{21}$ y por tanto $m_1 = m_2$.

Reemplazando en la (17) $a_1 a_2 \cos\omega$ por su valor $\frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 - a^2)$ se llega en seguida a la ecuación de tercer grado en $z = a^2$:

$$\left((1 - m_1)\, a_2^{-4} - (1 - m_2)\, a_1^{-4}\right) z^3 - \left((1 - m_1)\, a_1^2 a_2^{-4} + (1 - m_1 - 2m_2)\, a_2^{-2}\right.$$

$$\left. - (1 - 2m_1 - m_2)\, a_1^{-2} - (1 - m_2)\, a_1^{-4} a_2^2\right) z^2 + (m_1 - m_2)\, z$$

$$+ (m_1 + m_2)(a_1^2 - a_2^2) = 0.$$

Ej. 1°: Sea $m_0 = 0 \cdot 7$; $m_1 = 0 \cdot 1$; $m_2 = 0 \cdot 2$; $a_1 = 2$; $a_2 = 1$

La ecuación de tercer grado en $z = a^2$ es ahora:

$$0 \cdot 85\, z^3 - 3 \cdot 90\, z^2 - 0 \cdot 10\, z + 0 \cdot 90 = 0$$

de donde

$$z = 4 \cdot 563167 \quad \text{luego} \quad a = 2 \cdot 136157$$

Es pues

$$a_{11} = 0 \cdot 059605 \qquad a_{12} = 0 \cdot 190395 \qquad a_{21} = 0 \cdot 0014475$$

$$a_{22} = 0 \cdot 904803 \qquad \lambda = 0 \cdot 225180 \qquad C = -0 \cdot 059279$$

Tomando respecto de una terna fundamental de vectores unitarios $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$

$$P^0 = 1 \cdot 987283\, \boldsymbol{i} + 0 \cdot 225179\, \boldsymbol{j}$$

$$Q^0 = -0 \cdot 003402\, \boldsymbol{i} + 0 \cdot 999996\, \boldsymbol{j}$$

resulta

$$R = P^0 - \lambda Q^0 = 1 \cdot 988049\, \boldsymbol{i}$$

y por tanto

$$P = 1 \cdot 987283\, \boldsymbol{i} + 0 \cdot 225179\, (\boldsymbol{j} \cos\Omega\tau + \boldsymbol{k} \operatorname{sen}\Omega\tau)$$

$$Q = -0 \cdot 003402\, \boldsymbol{i} + 0 \cdot 999996\, (\boldsymbol{j} \cos\Omega\tau + \boldsymbol{k} \operatorname{sen}\Omega\tau)$$

con $\Omega = 0 \cdot 919701$; y tomando $\dot\rho(0) = \sqrt{|C|}$ se tiene $\rho = \sqrt{2\sqrt{|C|}\, t + 1}$ de donde

$$\tau = \frac{1}{2\sqrt{|C|}} \log (2\sqrt{|C|}\, t + 1)$$

Ej. 2°: Con $m_1 = 0 \cdot 1$; $m_2 = 0 \cdot 791559$; $a_1 = 1$; $a_2 = 2$
resulta $a = 1 \cdot 819693$; $\delta = 0$; $a_{11} = 0 \cdot 280633$; $a_{22} = 0 \cdot 065370$; $a_{12} = -0 \cdot 022720$; $a_{21} = 0 \cdot 090880$ y el cálculo se prosigue como en el ejemplo anterior.

Ej. 3°: Con $m_0 = \frac{1}{2}$; $m_1 = m_2 = \frac{1}{4}$ $a_1 = a_2 = \sqrt{2}$

resulta

$$a = 2; \quad a_{11} = a_{22} = 13/64; \quad a_{12} = a_{21} = 3/64; \quad \lambda = 1; \quad C = -5/32$$

Es pues

$$P = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} \cos \Omega\tau + \boldsymbol{k} \operatorname{sen} \Omega\tau$$

$$Q = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} \cos \Omega\tau + \boldsymbol{k} \operatorname{sen} \Omega\tau$$

con $\Omega = \sqrt{3/32}$.

7. Consideremos finalmente las restantes soluciones homográficas isósceles de BANACHIEWITZ, o sea los casos en que $a_2 = a$ y por tanto $a_{12} = 0$ ó bien $a_1 = a$ de donde $a_{21} = 0$.

Si $a_{12} = 0$ sigue de (6): $P' \cdot P'' = 0$ de donde $P'^2 = $ const. Es pues

$$\rho^3 \ddot{\rho} = \text{const.}, \quad Q'^2 = \text{const.}, \quad Q' \cdot Q'' = 0 \text{ de donde } P \cdot Q' = 0$$

luego $P' \cdot Q = 0$ y el razonamiento sigue como antes.

Es ahora $\delta \neq 0$;

$$T(\lambda) = \lambda(a_{21}\lambda + a_{22} - a_{11}) = 0$$

$$C + a_{11} - \lambda a_{21} = 0$$

Supongamos primero

$$\lambda = 0 \quad \text{de} \quad \text{donde} \quad C = -a_{11}$$

La (11) da

$$P = R = \text{const.}$$

y la (16):

$$Q'' + (a_{22} - a_{11})\, Q = -a_{21}P$$

con $a_{22} - a_{11} > 0$ por ser $|Q| = $ const.

Si tomamos pues

$$P = a_1\, \boldsymbol{i}$$

resulta

$$Q = -\frac{a_{21}a_1}{a_{22} - a_{11}}\, \boldsymbol{i} + \alpha(\boldsymbol{j} \cos \Omega\tau + \boldsymbol{k} \operatorname{sen} \Omega\tau)$$

donde

$$\Omega^2 = a_{22} - a_{11};\ a_{11} - a_{22} = 2a_{21} \text{ y por tanto } m_0 = m_1 \text{ y } \alpha^2 = a^2 - a_1^2/4 > 0$$

Mientras que si consideramos la otra raíz

$$\lambda = (a_{11} - a_{22})/a_{21} \text{ de donde } C = -a_{22}$$

la (16) adopta la forma

$$Q'' + (a_{11} - a_{22})\, Q = -a_{21}R$$

on $a_{11} - a_{22} > 0$.

Si tomamos pues $R = P^0 - \lambda Q^0 = \varkappa \boldsymbol{i}$, nos queda integrando dicha ecuación diferencial:

$$Q = -\frac{a_{21}\,\varkappa}{a_{11} - a_{22}}\,\boldsymbol{i} + \alpha\,(\boldsymbol{j}\cos\Omega\tau + \boldsymbol{k}\,\mathrm{sen}\,\Omega\tau)$$

de donde

$$P = a_1\,(\boldsymbol{j}\cos\Omega\tau + \boldsymbol{k}\,\mathrm{sen}\,\Omega\tau)$$

siendo

$\Omega^2 = a_{11} - a_{22};\ \alpha = a_1/\lambda = a_1/2$ de donde $m_0 = m_1$ como en el caso anterior, y $\varkappa^2 = 4\,a^2 - a_1^2$.

Ej. 4°: Sea

$$m_0 = m_1 = 1/4;\quad m_2 = 1/2;\quad a_1 = 1;\quad a_2 = a = 2$$

Es pues

$$a_{11} = 17/32;\quad a_{22} = 1/16;\quad a_{21} = 15/64;\quad \lambda = 2;\quad C = -1/16$$

Tomando

$$P^0 = \boldsymbol{j} \qquad Q^0 = -\frac{1}{2}\sqrt{15}\,\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{j}$$

resulta

$$R = P^0 - \lambda Q^0 = \sqrt{15}\,\boldsymbol{i}$$

Es pues

$$P = \boldsymbol{j}\cos\Omega\tau + \boldsymbol{k}\,\mathrm{sen}\,\Omega\tau$$

$$Q = -\frac{1}{2}\sqrt{15}\,\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{j}\cos\Omega\tau + \boldsymbol{k}\,\mathrm{sen}\,\Omega\tau)$$

donde $\Omega = \sqrt{15/32}$; y tomando $\dot{\rho}(0) = 1/4$ resulta

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{2}\,t + 1} \text{ de donde } \tau = 2\log\left(\frac{1}{2}\,t + 1\right)$$

OBSERVATORIO ASTRONOMICO

La Plata, octubre 18 de 1959.

OBSERVATORIO ASTRONOMICO DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
SERIE ASTRONOMICA - Tomo XXV N° 3

Modificaciones del método de Wilkens para la determinación de orbitas de cometas con hipótesis parabólica

Por

C. A. ALTAVISTA

LA PLATA
1960

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

1960

Presidente

Dr. DANILO C. VUCETICH

Vicepresidente

Dr. CONSTANTINO BRANDARIZ

Guardasellos

Dr. JOSE MENDEZ

Consejo Superior

Decanos: Ing. Agr. Edgardo N. Camugli; Ing. Alberto R. Gray; Dr. Enrique M. Barba; Dr. Amílcar A. Mercader; Dr. Constantino C. Brandariz; Dr. Humberto Giovambattista; Cont. Cayetano Licciardo y Dr. Sebastián Guarrera. *Director del Observatorio Astronómico*: Dr. Reynaldo P. Cesco. *Delegados de los profesores*: Ing. Agr. Italo N. Costantino; Ing. Juan Sábato; Prof. José M. Lunazzi; Dr. Raúl Dumm; Dr. Edilberto Fernández Ithurrat; Dr. José D. Méndez; Dr. Lirio Marino y Dr. Angel L. Cabrera. *Delegados de los Graduados*: Ing. Agr. Luis G. Cornejo; Agr. Octavio de la Colina; Prof. Juan M. Sadi; Dr. César Ves Losada; Dr. Vicente A. Antonini; Dr. Néstor O. Ladd; Contador Angel R. Mugetti y Dr. Constante P. Moneda. *Delegados de los alumnos*: Ludovico Naumann; Sr. Eduardo Medrano; Sr. Jorge Alfredo Crespi; Sr. Miguel Angel Marafuschi; Sr. Enzo Roccia; Sr. Mario Pedro Irogoyen; Sr. Hugo A. Crego; Sr. Heriberto Zardini y Sr. Roberto Carpinetti.

Prosecretario General

Sr. César A. Dumm

Director de Administración

Dr. Humberto Prados

Modificación del método de Wilkens para la determinación de órbitas de cometas, con hipótesis parabólica

Por C. A. ALTAVISTA

R E S U M É

On se propose d'indiquer quelques modifications de caractère pratique de la méthode de WILKENS *pour la détermination des orbites des comètes dans l'hypothèse parabolique, tendant à faciliter les applications. Avec cette présentation la méthode apparait très simplifié. On détermine la distance géocentrique* ρ_0 *pour l'instant* t_0 *appliquant au système des équations fondamentales, la méthode de la variation de la distance.*

1. En su trabajo "Determinación de órbitas de planetas y cometas", publicaciones del Observatorio Astronómico de La Plata, Serie Astronómica, Nº XV, A. WILKENS desarrolla un método muy significativo para el cálculo de una órbita de un cometa en la hipótesis de excentricidad unitaria.

Nos proponemos aquí indicar algunas modificaciones que estimamos convenientes para simplificar el proceso calculístico y asimismo hacer una observación sobre la forma en que su autor encara el planteo para la solución del sistema de ecuaciones fundamentales.

En la publicación de referencia WILKENS utiliza como ecuaciones de partida las siguientes:

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 z_1 - X_1 \\ y_1 &= S_1 z_1 - Y_1 \\ y_2 - x_2 \operatorname{tg} \lambda_2 &= X_2 \operatorname{tg}. \lambda_2 - Y_2 \qquad (1) \\ x_3 &= C_3 z_3 - X_3 \\ y_3 &= S_3 z_3 - Y_3 \end{aligned}$$

El plano fundamental de referencia es la Eclíptica; x_i, y_i, z_i son las coordenadas heliocéntricas del astro para los instantes t_i; las primeras dos coordenadas pueden tomar los subíndices 1, 2, 3; la última 1 y 3 solamente.

C_i, S_i dependen de las coordenadas esféricas del cometa con $(i = 1,3)$; X_i, Y_i $(i = 1, 2, 3)$ son coordenadas solares.

Para obtener el sistema de ecuaciones fundamentales, se desarrollan las coordenadas correspondientes a los instantes t_2 y t_3 en series de potencias del tiempo, tomando como origen el instante correspondiente a la primera observación, y teniendo en cuenta luego las dos primeras ecuaciones del sistema (1). Los desarrollos en serie mencionados pueden ponerse en la forma:

$u_i = f_i u_1 + g_i \dot{u}_1$ $(i = 2,3)$ donde f y g son series que dependen de r, $\dot{r}$, $\ddot{r}$ y $1/r$.

Así resultan ecuaciones en que las componentes de la velocidad quedan expresadas como funciones lineales de la distancia z_1 al plano de la eclíptica.

Al despejar los términos que contienen dichas incógnitas, WILKENS tiene en cuenta solamente, en los primeros miembros, a aquellos términos de las series g con potencias lineales de τ; e incluye erróneamente, a nuestro juicio, los de mayor grado, en los términos independientes, para efectuar las aproximaciones siguientes.

La exposición del método que haremos a continuación salvará esta omisión.

2. La determinación de una órbita en el caso de hipótesis parabólica es más simple que en el caso general.

En efecto, si adoptamos tal supuesto, la teoría conduce a una ecuación algebraica de sexto grado en la incógnita elegida, mientras que suponiendo una excentricidad arbitraria (menor que la unidad) se llega a una ecuación algebraica de octavo grado.

Recordemos que, por las propiedades de las ecuaciones del movimiento referidas al baricentro del sistema en el problema de los dos cuerpos, se obtiene la fórmula que expresa la constancia de la suma de las energías potencial y cinética:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - k^2 M\, 2/r = -k^2 M\, 1/a$$

El signo de a define el carácter de la órbita que describe el cuerpo secundario alrededor del astro central. Si $\alpha < O$, la órbita es una hipérbola; si $\alpha > O$, es una elipse.

La condición por la parábola es $a = \infty$, de tal manera que en cada instante las dos energías son iguales:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = k^2 M\, 2/r \tag{1}$$

Por otra parte podemos escribir, considerando el triángulo formado por el cometa con el Sol y la Tierra:

$$r^2 = \rho^2 + R^2 - 2\,\rho\, R \cos\psi = f_0 \tag{2}$$

Las fórmulas (1) y (2) muestran cómo debe encararse el problema.

Se ve, en efecto, que obtendremos la solución analítica si hallamos expresiones de las velocidades en las cuales éstas sean funciones lineales, por ejemplo, de la distancia geocéntrica del cometa.

Pongamos:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha + \alpha'\rho \\ \dot{y} &= \beta + \beta'\rho \\ \dot{z} &= \gamma + \gamma'\rho \end{aligned} \tag{3}$$

donde α, α', β, β' γ, γ' son expresiones a determinar.

Si introducimos el sistema de ecuaciones (3) en la (1), obtenemos:

$$a^2\rho^2 - 2\, b\rho + c^2 = 2/r = g_0 \tag{4}$$

Podemos identificar el sistema fundamental (2), (4), con el que corresponde al método de Leuschner, si bien en ambos casos, los coeficientes tienen significados muy distintos. (*Crawford*, "Determination of orbits of comets and asteroids"). Mc Graw-Hill, New York.

Busquemos, pues, las expresiones analíticas correspondientes al sistema (3).

Antes, indicaremos las modificaciones que creemos convenientes para abreviar la exposición y consiguientemente la resolución numérica del método de WILKENS.

Primeramente, de acuerdo a las normas actuales, hemos adoptado coordenadas esféricas ecuatoriales.

La variable a determinar será la distancia geocéntrica para la segunda observación; esta elección es más conveniente que, por ejemplo, la de la coordenada z, tal como lo ha hecho WILKENS. Además, salvo en un par de casos, las ecuaciones básicas generalmente presentan dos raíces reales, una de las cuales es siempre negativa, por serlo el término independiente de la ecuación que se obtiene eliminando en el sistema fundamental la distancia r. El caso de cuatro soluciones reales es excepcional.

Utilizaremos para las series de potencias del tiempo, la forma indicada por LAGRANGE que ya hemos mencionado. Son sumamente cómodas para el cálculo de los restos.

Para la solución numérica del sistema básico utilizamos el método de la variación de la distancia geocéntrica, que determina simultáneamente todas las cantidades necesarias para la obtención definitiva de las constantes orbitales. Además este método permite una verificación directa del proceso.

Finalmente diremos que la adopción de ρ como incógnita simplifica considerablemente las expresiones teóricas y el cálculo mismo, disminuyendo la posibilidad de cometer errores.

Las observaciones proveen:

$$\begin{aligned} x_i + X_i &= \rho_i \cos\alpha_i \cos\delta_i \\ y_i + Y_i &= \rho_i \operatorname{sen}\alpha_i \cos\delta_i \qquad\qquad (i = 1, 0, 3) \\ z_i + Z_i &= \rho_i \operatorname{sen}\delta_i \end{aligned}$$

Para llegar al sistema fundamental, comencemos por eliminar las distancias ρ_1 y ρ_3, y obtenemos:

$$\frac{x_j + X_j}{z_j + Z_j} = \operatorname{cotg}\delta_j \cos\alpha_j; \qquad \frac{y_j + Y_j}{z_j + Z_j} = \operatorname{cotg}\delta_j \operatorname{sen}\alpha_j \qquad (j = 1, 3)$$

En la hipótesis hecha de excentricidad unitaria, quedan cinco elementos para determinar. Como los datos de observación son seis, debemos eliminar una de las funciones de las coordenadas. Hemos elegido a tal efecto $\operatorname{cotg}\delta_1$.

En general esta condición se impone a la segunda observación. Pero el teorema referente a la convergencia de las series de potencias, que se usan como solución de las ecuaciones diferenciales del movimiento, nos permite, dado además que se trata en los casos corrientes de observaciones separadas por intervalos pequeños de tiempo, tomar otra cualquiera a tal fin.

Desarrollando ahora las coordenadas heliocéntricas del cometa para los instantes t_1 y t_3 según las series de potencias mencionadas, obtenemos:

$$\begin{aligned} f_1 y_0 + g_1 \dot{y}_0 + Y_1 &= \operatorname{tg}\alpha_1 \quad (f_1 x_0 + g_1 \dot{x}_0 + X_1) \\ f_3 x_0 + g_3 \dot{x}_0 + X_3 &= \quad C \quad (f_3 z_0 + g_3 \dot{z}_0 + Z_3) \\ f_3 y_0 + g_3 \dot{y}_0 + Y_3 &= \quad A \quad (f_3 z_0 + g_3 \dot{z}_0 + Z_3) \end{aligned}$$

el subíndice o, corresponde a la observación intermedia; y además se ha puesto:

$$A = \operatorname{cotg}\delta_3 \operatorname{sen}\alpha_3; \quad C = \operatorname{cotg}\delta_3 \cos\alpha_3$$

Pero además tenemos:

$$\begin{aligned} x_0 &= \rho_0 \lambda_0 - X_0 \\ y_0 &= \rho_0 \mu_0 - Y_0 \\ z_0 &= \rho_0 \nu_0 - Z_0 \end{aligned}$$

expresiones que reemplazamos en el sistema (5), de donde se deducen luego de simples transformaciones:

$$\dot{y}_0 - \operatorname{tg}\alpha_1 \dot{x}_0 = \frac{X_1 - f_1 X_0}{g_1} \operatorname{tg}\alpha_1 - \frac{Y_1 - f_1 Y_0}{g_1} + f_1 \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 \lambda_0 - \mu_0}{g_1} \rho_0$$

$$\dot{x}_0 - C \dot{z}_0 = \frac{Z_3 - f_3 Z_0}{g_3} C - \frac{X_3 - f_3 X_0}{g_3} + f_3 \frac{C \nu_0 - \lambda_0}{g_3} \rho_0$$

$$\dot{y}_0 - A \dot{z}_0 = \frac{Z_3 - f_3 Z_0}{g_3} A - \frac{Y_3 - f_3 Y_0}{g_3} + f_3 \frac{A \nu_0 - \mu_0}{g_3} \rho_0$$

Por simple eliminación algebraica encontramos las expresiones deseadas para el sistema (3).

Para la resolución numérica, ponemos primeramente $f_i = 1$, $g_i = \tau_i$; y calculamos dos tablas de valores de los polinomios que forman el sistema básico.

Buscamos luego el intervalo para el cual las diferencias entre f_o y $4/g_o^2$ cambian de signo lo que indica la existencia de una raíz.

Utilizamos después el método de la variación de la distancia para obtener mediante las (2), (3) y (4) un valor más exacto para ρ_o.

En las aproximaciones sucesivas introducimos los términos de segundo grado de las series f.

Corregidos los tiempos por aberración, si es necesario, se consideran los restos.

La última parte se reduce a calcular las constantes orbitales v las efemérides de verificación.

Daremos aquí, antes de finalizar esta exposición, un resumen sobre algunas consideraciones de carácter teórico.

Nuestra preocupación ha sido buscar la manera cómo las circunstancias geométricas y dinámicas se manifiestan en el problema de la multiplicidad de las soluciones. Lamentablemente las expresiones obtenidas no permiten una interpretacion inmediata.

En primera aproximación esta multiplicidad depende de las componentes de la velocidad esférica en forma muy sensible, como también de las componentes de la velocidad de la Tierra y de las coordenadas esféricas del cometa.

La fórmula que expresa tal posibilidad es de tercer grado en ρ, si bien para un cálculo preliminar se puede recurrir a una expresión de segundo grado.

Hemos reproducido, salvo ligeras modificaciones, la discusión que ha sido dada por Ch. Smiley (On the Number of Solutions in Leuschner's Direct Method of Determining Parabolic Orbits, Lick Observatory Bull., 14, 10-14, 1927).

Hemos efectuado una aplicación del método, utilizando observaciones relativas al cometa *Burnham*, obtenidas de las *"Announcement Cards"* Nº 1397 y 1401, del Harvard College Observatory.

1958 T. U.			α	δ
(I)	Febrero	22.21283	$5^h\ 52^m\ 24^s\ 235$	10° 08′ 24″ 45
(II)		25.10317	$5^h\ 54^m\ 50^s\ 505$	11° 10′ 26″ 60
(III)		28.12624	$5^h\ 57^m\ 55^s\ 905$	12° 16′ 28″ 65

Para verificación se utilizó una cuarta observación.

(IV)	Febrero	25.04653	$5^h\ 54^m\ 47^s\ 12$	11° 09′ 13″ 4

Los elementos obtenidos resultaron:

$$\left.\begin{array}{ll} q = 1.324802 & \omega = 16^\circ\ 46996 \\ i = 15^\circ 84108 & \Omega = 145^\circ\ 57332 \\ \multicolumn{2}{l}{T = \text{Abril } 16.39908 \text{ T. U. } 1958} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Eq.} \\ 1958.0\end{array}$$

Los residuos obtenidos son:

	(I)	(II)	(III)	(IV)
$\Delta\ \alpha \cos \delta$	—0°00005	—0°00004	0°00004	—0°00036
$\Delta\ \delta$	0°00000	0°00001	0°00002	0°00030

Estos resultados coinciden prácticamente con la órbita calculada por la doctora ELIZABETH ROEMER de la Flagstaff Station del U. S. Naval Observatory.

Las diferencias en los valores de los residuos, que son muy pequeñas, deben atribuirse a la propagación de errores, pues si se calculan los residuos directamente a partir de las coordenadas y componentes de la velocidad correspondientes a la fecha usada para la determinación, desaparecen las discrepancias.

La Plata, abril de 1960.

Terminóse de imprimir el
día 20 de setiembre de 1960
en los Talleres Gráficos
OLIVIERI Y DOMÍNGUEZ,
Calle 4 número 525,
de la ciudad de La Plata.

OBSERVATORIO ASTRONOMICO DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

SERIE ASTRONOMICA - Tomo XXV - N° 4

SOBRE LA SOLUCION GENERAL DEL PROBLEMA DE LOS TRES CUERPOS

POR

R. P. CESCO

LA PLATA

1963

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
1963

PRESIDENTE
Doctor JOSE PECO

VICEPRESIDENTE
Doctor CONSTANTINO BRANDARIZ

SECRETARIO GENERAL Y DEL CONSEJO SUPERIOR
Lic. CESAR AMILCAR DUM

GUARDASELLOS
Doctor JOSE DOMINGO MENDEZ

CONSEJO SUPERIOR

Consejeros: Ing. Agr. Edgardo N. Camugli, Ing. Julio J. Mulvany, Dr. Germán Fernández, Dr. Florencio Charola, Dr. Santiago C. Fassi, Dr. Bartolomé A. Fiorini, Dr. Enrique M. Barba, Ing. Luis A. Bonet, Dr. Constantino Brandariz, Dr. Edilberto Fernández Ithurrat, Dr. Raul A. Granoni, Dr. Humberto Giovambattista, Dr. José A. Catoggio, Dr. Roberto Ciafardo, Dr. Ricardo R. Rodríguez, Dr. Sebastián Guarrera, Dr. Raúl A. Ringuelet, Cont. Ricardo L. Rosso, Dr. Reynaldo P. Cesco, (*Director del Observatorio Astronómico*).

Delegados de los graduados: Ing. Agr. Julio César Ocampo, Ing. Rafael R. De Luca, Dr. Raúl M. Rimoldi, Prof. Septimio Tesone, Dr. Horacio López, Dr. Osmar Nudelman, Dr. Raúl Cafrune, Geól. Jorge Rafael, Cont. Adolfo Sturzenegger.

Delegados estudiantiles: Señores: Atahualpa Centurión D., Armando Real, Juan Angel Di Nardo, Ural A. Pérez, José F. Nondedeu, Luis María Torrengo, Angel C. Vega, Mario Alberto Hernández, Héctor R. Luna.

CONSEJO DIRECTIVO DEL OBSERVATORIO ASTRONÓMICO
Y
ESCUELA SUPERIOR DE ASTRONOMIA Y GEOFISICA

Titulares	*Suplentes*
Ing. Simón Gershánik	Ing. José Mateo
Astr. Miguel Itzigsohn	Dr. Georges Dedebant
Dr. Carlos O. R. Jaschek	Dr. Sergejs Slaucitajs
Graduados	
Dra. Adela Ringuelet de Kaswalder	Astr. Hulda Hartmann de Sidoti
Estudiantes	
Francisco D. López García	José Kostadinoff
Américo E. Korompai	Jorge H. Vigiani

SOBRE LA SOLUCION GENERAL DEL PROBLEMA DE LOS TRES CUERPOS

Por

R. P. CESCO *

SUMMARY. — On the general solution of the problem of three bodies. The differential equations of the problem of three bodies can be written, in JACOBIAN coordinates, as

$$(\dot{P})' = rQ, \quad R'' = A + r^2 S$$

where R is the vector of position of the mass-point m_1 with respect to m_0, P the vector of position of $m_2 = 1 - m_0 - m_1$ with respect to the center of mass of m_0 and m_1, $x = |X|$, A is the vector of SUNDMAN Q and S are linear combinations of P and R, with coefficients depending on the masses and the distance r_ν from m_2 to $m_{1-\nu}$ $(\nu = 0, 1)$, and dots and primes denote, respectively, differentiations with respect to t and to the regularization variable of SUNDMAN and LEVI-CIVITA $\tau = \int^t dt/r$, if m_0 and m_1 are the two bodies which can participate in a binary collision at the finite date $t = t_c$.

In a recent paper (Bull. Inst. Teor. Astr. 10, 713-731, 1958) G. A. MERMAN has shown that if the angular momentum vector C, the energy constant h, the masses and the initial values of p and $\dot{P}$ satisfy certain inequalities, the system of differential equations of motion can be written in the form

$$y_i' = P_i(y_j), \quad i = 1, 2, \ldots, 22$$

where the y_1, y_2, ... are specified functions of the coordinates and the velocities of the bodies m_1 and m_2, and $P_i(y_j)$ is a polynomial with constant coefficients in some of the variables y_j, being $|y_i| \leqq K$ for all values of t.

In virtue of another theorem of MERMAN this system has one and only one solution of the form

$$y_i(\tau) = \lim_{n\to\infty} \Pi_n^{(i)}(\tau), \quad t = \lim_{n\to\infty} \Pi_n(\tau)$$

where $\Pi_n^{(i)}$ and Π_n are also polynomials, such that

$$| y_i - \Pi_n^{(i)} | \leqq \varepsilon, \quad | t - \Pi_n | \leqq \varepsilon\tau$$

for all values of n satisfying the inequality

$$n > M\tau(e^{L\tau} - 1)/\varepsilon$$

where M and L depend on the coefficients, degrees, and number of factors of the terms of the polynomial $P_i(y_j)$, and on the numbers K and ε.

It is the object of this communication to generalize the theorem of MERMAN, which implies that $C \neq 0$, $h < 0$, $r = O(1)$ and $p^{-1} = O(1)$, and to compare by a simple numerical example the usefulness of MERMAN's method and SUNDMAN's classical series.

We have shown that the conclusions of MERMAN's theorem are still valid if the following conditions are satisfied:

For all values of t one has 1) $| \dot{P}(t) | \leqq \varkappa_1$; 2) $p/r \geqq \varkappa_2 \geqq 1$, *if* $C \neq 0$ *and* 3_1) $1/r_\nu \leqq \varkappa_3$, 3_2) $r/r_\nu \leqq \varkappa_4$ *when* $C = 0$, where the constants $\varkappa_i$ depend only on the masses and the initial conditions. We remark that if $C \neq 0$ the condition (3_1) which MERMAN shows to be consequence of (2) with $\varkappa_2 > 1$ and $p \geqq c_1$, as well as (3_2), is an immediate consequence of (2) with $\varkappa_2 \geqq 1$, if, as we suppose, $m_\nu > 0$.

* Trabajo presentado a la Va Reunión de la Asociación Astronómica Argentina realizada en San Juan en julio de 1962 y al Congreso Internacional de los Matemáticos de Estocolmo en agosto de 1962. La presentación de este resumen al Congreso ha sido posible gracias al subsidio acordado al autor por la Comisión de Investigación Científica de la Provincia de Buenos Aires.

If these conditions are satisfied, we have, after introducing some new variables, such as

$$y_1 = \frac{1}{r}\left(\frac{R'^2}{r} - 2(m_0 + m_1)\right),$$

$$y_i' = Q_i(y_i),\ i = 1, 2, \ldots, 34,\ \text{with } |y_i| \leqq K \text{ for all } t,\ (Q_i \text{ polynomials}).$$

In particular, the order of this system reduces to fifth for a special planar isosceles problem of Fransén and Mac Millan, in which $C = 0$, if the initial conditions are chosen such that $h > 0$.

A simple numerical example was calculated whith the Mercury computer of the Computing Center of the University of Buenos Aires and with an IBM 1401 computer of a private concern. The first results obtained are shown in the following table.

τ	t	ξ			y		
	II	I	II	III	I	II	III
0	0	0	0	0	2	2	2
0.2	0.389956	0.5385	0.5385	0.5307	1.8550	1.8550	1.8613
0.4	0.730649	0.9597	0.9597	0.9538	1.5395	1.5396	1.5459
0.6	1.005243	1.2565	1.2565	1.2540	1.2108	1.2113	1.2000

Columns I contain the relative coordinates of the hyperbolic two-body problem: $m_1 = 10^{-6}$ and $m_2 = 1 - 2.10^{-6}$ ($m_0 = m_1$ in the three-body problem) $\xi = a\sqrt{e^2 - 1}\ \sinh u$; $y = 2\eta = 2a(e - \cosh u)$; $nt = e \sinh u - u$ where

$$n^2a^3 = 0.999999, \quad a(e^2 - 1) = 1 \quad \text{and } na^2\sqrt{e^2 - 1} = 1.4143.$$

Columns II contain the values obtained by means of SUNDMAN's series, directly or by applying BOREL's integral method of summability of divergent series, taking into account no more than 50 terms.

Columns III contain the results obtained with MERMAN's polynomials, taking $n = 50$.

As it is well known, putting for a series Σu_n

$$\sigma(a) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n I_n(a)$$

where

$$I_n(a) = \frac{1}{n!}\int_0^a e^{-t}t^n dt = I_{n-1}(a) + \frac{a}{n}\left(I_{n-1}(a) - I_n(a)\right)$$

one has a regular transformation, i.e, $\lim_{a\to\infty} \sigma(a) = s$ whenever the series $\Sigma u_n = s$ converges, because

$$\lim_{a\to\infty} I_n(a) = 1; \quad \sum_{n=0}^{\infty} |I_n(a) - I_{n+1}(a)| < 1, \quad a \geqq 0.$$

If the series Σu_n diverges, but one has

$$\sigma(a) \to s \quad \text{as } a \to \infty \quad (s \text{ a finite number})$$

we can take s as the sum of Σu_n, and the values of $\sigma(a)$ for some increasing values of a as approximate values of its sum, i.e.,

$$\sigma(a_\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n I_n(a_\nu) \cong \Sigma u_n, \quad 0 < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$$

where the functions $I_n(a)$ have been previously tabulated for some values of a, say for $a = 10, 15, 20, \ldots$

(This summary has been presented to the International Congress of Mathematicians, Stockholm, August 15-22, 1962).

1. — Las ecuaciones diferenciales del problema de los tres cuerpos en coordenadas de JACOBI pueden escribirse en la forma

$$\ddot{P} = Q; \qquad \ddot{R} + \frac{m_0 + m_1}{r^3} R = S$$

donde R es el vector de posición del punto-masa m_1 referido a una terna ortogonal x, y, z de origen en el punto-masa m_0; P es el vector de posición del punto-masa $m_2 = 1 - m_0 - m_1$ referido a otra terna ξ, η, ζ de ejes paralelos a los anteriores e igual orientación, de origen en el baricentro de m_0 y m_1;

$$|P| = p = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \qquad |R| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$Q = -\left(\frac{a_0}{r_0^3} + \frac{a_1}{r_1^3}\right) P + a_0 a_1 \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) R$$

$$S = m_2 \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) P - m_2 \left(\frac{a_1}{r_0^3} + \frac{a_0}{r_1^3}\right) R$$

$$a_0 = \frac{m_1}{m_0 + m_1}, \quad a_1 = \frac{m_0}{m_0 + m_1}, \quad r_0 = |P - a_1 R|, \quad r_1 = |P + a_0 R|$$

Las integrales conocidas son

$$\frac{1}{2}(\mu \dot{R}^2 + \nu \dot{P}^2) = \frac{m_0 m_1}{r} + \frac{m_1 m_2}{r_0} + \frac{m_0 m_2}{r_1} + h$$

$$\mu R \times \dot{R} + \nu P \times \dot{P} = C$$

donde $\mu = a_0 a_1 (m_0 + m_1)$, $\nu = m_2(m_0 + m_1)$, h es la constante de la energía y C es el vector momento angular.

Si $C \neq 0$ y $r \equiv r_2 = \min(r_0, r_1, r_2)$ la variable independiente τ —pseudo-tiempo— definida por la ecuación $dt = r d\tau$ regulariza las ecuaciones diferenciales del movimiento en el caso de colisiones binarias entre m_0 y m_1. La integral

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dt}{r} = \tau$$

converge y las ecuaciones diferenciales (1) y sus integrales (2) toman la forma

$$(\dot{P})' = rQ; \quad R'' = \frac{r'}{r} R' - \frac{m_0 + m_1}{r} R + r^2 S \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}(\mu R'^2 + \nu r^2 \dot{P}^2) = r^2 \left(\frac{m_0 m_1}{r} + \frac{m_1 m_2}{r_0} + \frac{m_0 m_2}{r_1} + h\right) \tag{4}$$

$$\mu R \times R' + \nu r P \times \dot{P} = rC$$

donde el punto sigue indicando derivación respecto de t y los acentos significan derivaciones respecto de τ.

2. — En un trabajo reciente de mecánica celeste el matemático y astrónomo ruso Merman [1] ha demostrado el siguiente teorema:

Si en el problema de los tres cuerpos las condiciones iniciales verifican la desigualdad

$$-h\,C^2 \geq c_1 k^2 \tag{i}$$

o las desigualdades

$$-h\,C^2 > c_2 k^2, \qquad p(0) > -\frac{c_3 k}{h} \tag{ii}$$

donde $k > 1$ *y* c_1, c_2 *y* c_3 *son constantes que dependen solamente de las masas y de las condiciones iniciales, las coordenadas de los tres cuerpos y el tiempo pueden expresarse como sucesiones de polinomios de* τ *convergentes para todo valor real del pseudotiempo.*

Cabe señalar que si se verifica la desigualdad (i) o las (ii) se tiene también, en virtud de otro teorema de Merman [2],

$$p \geq c_4, \quad \frac{p}{r} \geq k > 1, \quad |\dot{P}| \leqq c_5$$

para todo valor real de t, *donde las constantes* c_4 *y* c_5 *sólo dependen, como las* c_i *anteriores, de las masas y de las condiciones iniciales.*

3. — En esta nota nos proponemos, en primer lugar, generalizar el teorema de Merman sin exigir que las masas y las condiciones iniciales verifiquen las condiciones (i) o (ii), las cuales implican por una parte que sean $h < 0$, $k > 1$ y $C \neq 0$, y por otra que esté acotada superiormente la distancia r de m_1 a m_0 e inferiormente con cota positiva la distancia p de m_2 al baricentro de m_0 y m_1; y en segundo lugar, aplicar a un sencillo ejemplo esta interesante teoría.

Vale, pues, más simple y generalmente, el siguiente

TEOREMA. *Si en el problema de los tres cuerpos se tiene para todo valor real de* t: $|\dot{P}| \leqq \varkappa_1$ *y se verifica la desigualdad*

$$\frac{p}{r} \geq \varkappa_2 \geq 1, \quad si\ C \neq 0, \tag{I}$$

o las desigualdades

$$\frac{1}{r_\nu} \leqq \varkappa_3 \quad y \quad \frac{r}{r_\nu} \leqq \varkappa_4 \quad (\nu = 0,1),\ cuando\ C = 0,\ (\varkappa_\nu\ const.) \tag{II}$$

las coordenadas de los tres cuerpos y el tiempo pueden desarrollarse en series de polinomios convergentes para todo valor real de la variable independiente τ

Ante todo observemos que si $C \neq 0$ la primera de las condiciones (II), cuya verificación es para Merman consecuencia de la (I) con $\varkappa_2 \equiv k > 1$ y de $p \geq c_4$, es, como la segunda de las (II), simple consecuencia

[1] Bull. Inst. Astr. Teor. de Leningrado, *10*, 713-731, (1958).

[2] Ibíd., *10*, 687-712, (1958).

de la (I), con $\varkappa_2 \geq 1$, si, como suponemos, todas las masas son distintas de cero. En efecto, el perímetro del triángulo determinado por los tres puntos-masa satisface, si $C \neq 0$, la desigualdad

$$r + r_0 + r_1 > \varkappa_5 > 0$$

para todo valor de t, donde la constante $\varkappa_5$ sólo depende de las masas y de las condiciones iniciales, en virtud de uno de los teoremas de SUNDMAN. (Cf. por ejemplo, SIEGEL [3], pág. 50).

Es pues

$$\frac{\varkappa_5}{r_0} < 1 + \frac{r}{r_0} + \frac{r_1}{r_0}, \quad \frac{\varkappa_5}{r_1} < 1 + \frac{r}{r_1} + \frac{r_0}{r_1} \tag{5}$$

Pero de las desigualdades (del triángulo) $r_0 + a_1 r \geq p$ y $r_1 + a_0 r \geq p$ sigue, por ser

$$a_0 < 1, \; a_1 < 1, \; \frac{p}{r} \geq \varkappa_2 \geq 1$$

$$\frac{r_0}{r} \geq \varkappa_2 - a_1 \geq \varkappa_6^{-1} > 0, \; \frac{r_1}{r} \geq \varkappa_2 - a_0 \geq \varkappa_6^{-1} \text{ si } \varkappa_6^{-1} = \min_{\nu = 0,1} (\varkappa_2 - a_\nu) \tag{6}$$

Pero también podemos escribir $r_1 \leqq r_0 + r$ y $r_0 \leqq r_1 + r$ y por tanto, teniendo en cuenta las (6),

$$\frac{r_1}{r_0} \leqq 1 + \varkappa_6 \;, \; \frac{r_0}{r_1} \leqq 1 + \varkappa_6$$

Y finalmente, substituyendo en (5) se obtiene

$$\frac{1}{r_0} < \frac{2}{\varkappa_5}(1 + \varkappa_6) = \varkappa_3 \;, \; \frac{1}{r_1} < \frac{2}{\varkappa_5}(1 + \varkappa_6) = \varkappa_3$$

4. — Como aplicación de nuestro teorema consideraremos a continuación el siguiente caso isósceles plano de FRANSÉN-MAC MILLAN [4], en el cual es siempre $C = 0$.

Sean (ξ_i, η_i) las coordenadas baricéntricas de los puntos-masa $m_0 = m_1 = \mu$, $m_2 = 1 - 2\mu$ y sean para $t = 0$:

$$\xi_0 = \xi_1 = 0; \; \eta_0 = -\eta_1 = 1 \; ; \; \xi_2 = 0 \;\; \eta_2 = 0$$
$$\dot{\xi}_0 = \dot{\xi}_1 = v > 0; \; \dot{\eta}_0 = -\dot{\eta}_1 = 0 \; ; \; \dot{\xi}_2 = w < 0 \;\; \dot{\eta}_2 = 0$$

las coordenadas y las componentes de las velocidades.

Las ecuaciones diferenciales de movimiento se reducen ahora a las siguientes

$$\ddot{\xi}_0 = -\frac{\xi_0}{\rho^3} \; ; \; \ddot{\eta}_0 = -(1 - 2\mu)\frac{\eta_0}{\xi^3} - \frac{\mu}{4\eta_0^2} \; , \; \rho^2 = (\xi_0 - \xi_2)^2 + \eta_0^2 \tag{7}$$

ya que $\xi_0 \equiv \xi_1$, $\eta_0 \equiv -\eta_1$, $\eta_2 \equiv 0$ y $\xi_2 = -\dfrac{2\mu}{1 - 2\mu}\xi_0$, en virtud de las integrales del baricentro.

[3] SIEGEL, CARL L., Vorlesungen ueber Himmelsmechanik, Springer, 1956.

[4] FRANSÉN, A. E., Ofversigt af Kongl. Vetenshaps-Akademiens Forhanlingar, *52*, p. 783, 1895. Cf.: Wilczynski, E. J. Annali di Matematica XXI, p. 1, 1913.

La integral de la energía toma la forma

$$\frac{1}{1-2\mu}\,\dot{\xi}_0^2 + \dot{\eta}_0^2 = \frac{2(1-2\mu)}{\rho} + \frac{\mu}{2\eta_0} + \frac{h}{\mu} \tag{8}$$

donde supondremos

$$\frac{h}{\mu} = \frac{v^2}{1-2\mu} - \frac{\mu}{2} - 2(1-2\mu) > 0$$

El momento de inercia del sistema en un instante t está dado por

$$I = 2\mu(\xi_0^2 + \eta_0^2) + \frac{4\mu^2}{1-2\mu}\,\xi_0^2 = 2\mu\left(\frac{\xi_0^2}{1-2\mu} + \eta_0^2\right) \tag{9}$$

de donde

$$\dot{I} = 4\mu\left(\frac{\xi_0\,\dot{\xi}_0}{1-2\mu} + \eta_0\,\dot{\eta}_0\right)$$

$$\ddot{I} = 4\mu\left(\frac{\dot{\xi}_0^2}{1-2\mu} + \dot{\eta}_0^2 + \frac{1}{1-2\mu}\,\xi_0\,\ddot{\xi}_0 + \eta_0\,\ddot{\eta}_0\right)$$

y en virtud de (7) y (8)

$$\ddot{I} = 2\mu\left(\frac{\dot{\xi}_0^2}{1-2\mu} + \dot{\eta}_1^2\right) + 2h > 0 \quad \text{para todo } t.$$

Es pues I función convexa para todo t y por ser $\dot{I}(0) = 0$, tiene I para $t = 0$ el mínimo absoluto $I(0) = 2\mu$ siendo

$$I(t) > 2\mu \ \text{ e } \ \dot{I}(t) \gtrless 0 \quad \text{para todo } t \gtrless 0 \tag{10}$$

Pero de (9) sigue, por ser $1 - 2\mu < 1$

$$I \leqq 2\mu\left(\frac{\xi_0^2}{(1-2\mu)^2} + \eta_0^2\right) = 2\mu\rho^2$$

o sea

$$\rho^2 > \frac{I(t)}{2\mu} \geq \frac{I(0)}{2\mu} = 1$$

y por tanto

$$\frac{1}{\rho} \leqq 1$$

La función $\dot{\xi}_0(t)$ es positiva: creciente para $t < 0$ ya que $\ddot{\xi}_0 > 0$ para $t < 0$ y decreciente para $t > 0$. Si fuese $\dot{\xi}_0(t_1) = 0$ para cierto $t_1 > 0$ se tendría

$$\rho(t_1)\dot{\rho}(t_1) = \eta_0(t_1)\dot{\eta}_0(t_1) \leqq 0$$

puesto que en $(0, t_1)$ es $\eta_0 \geq 0$ y $\dot{\eta}_0(t) < 0$ ya que por (7) es $\ddot{\eta}_0(t) < 0$ y $\dot{\eta}_0^{(0)} = 0$. Pero de (10) sigue que la derivada de la función

$$\rho^2 = \frac{1}{(1 - 2\mu)^2}\, \xi_0^2 + \eta_0^2 = \frac{2\mu}{(1 - 2\mu)^2}\, \xi_0^2 + \frac{I}{2\mu}$$

es decir

$$2\rho\dot{\rho} = \frac{\dot{I}}{2\mu} + \frac{4\mu}{(1 - 2\mu)^2}\, \xi_0\, \dot{\xi}_0$$

es mayor que cero para $t = t_1 > 0$ contra la hipótesis y análogamente para un $t_2 < 0$. Es pues $0 < \dot{\xi}_0(t) \leqq \dot{\xi}_0(0)$ y por tanto $|\dot{\xi}_0| \leqq v$ para todo t.

Poniendo ahora

$$y = 2\eta_0 \quad \text{y} \quad \xi = \xi_0 - \xi_2 = \frac{1}{1 - 2\mu}\, \xi_0$$

son y y ξ las coordenadas de Jacobi de m_0 respecto de m_1, y de m_2 respecto del baricentro de m_0 y m_1 respectivamente. Se tiene entonces

$$|\dot{P}| \equiv |\dot{\xi}| = \frac{1}{1 - 2\mu}\, |\dot{\xi}_0| \leqq \frac{v}{1 - 2\mu} = \varkappa_1;\; p(0) = \xi(0) = 0$$

$$\frac{1}{r_0} \equiv \frac{1}{r_1} \equiv \frac{1}{\rho} \leqq 1 = \varkappa_3;\; \frac{r}{r_0} \equiv \frac{r}{r_1} \equiv \frac{y}{\rho} = 2\,\frac{\eta_0}{\rho} \leqq 2 = \varkappa_4$$

y la integral de la energía toma la forma

$$4(1 - 2\mu)\, \dot{\xi}^2 + \dot{y}^2 = \frac{8(1 - 2\mu)}{\rho} + \frac{4\mu}{y} + \frac{4h}{\mu} \tag{8$_1$}$$

5. — De la integral (2) se obtiene

$$\frac{1}{2}\,(\mu r\dot{R}^2 + \nu r\dot{P}^2) = m_0 m_1 + r\left(\frac{m_1 m_2}{r_0} + \frac{m_0 m_2}{r_1} + h\right)$$

de donde

$$r\dot{R}^2 - 2(m_0 + m_1) = \frac{2}{\mu}\, r\left(\frac{m_1 m_2}{r_0} + \frac{m_0 m_2}{r_1} + h\right) - \frac{\nu}{\mu}\, r\dot{P}^2 \tag{8$_2$}$$

Si $C \neq 0$ o si, en caso de ser $C = 0$ se verifica la primera de las desigualdades II, es imposible una colisión simultánea de los tres cuerpos. En el caso de una colisión binaria entre m_0 y m_1, o sea si $r \to 0$ para $t \to t_c$ (finito), sigue de (8), si $\dot{P}(t) = O\,(1)$

$$\lim_{t \to t_c} r\dot{R}^2 = 2(m_0 + m_1)$$

Es fácil ver que aún en este caso en que $C = 0$ converge la integral (2_1) que define el pseudo tiempo. Sigue en efecto de (2)

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2m_0m_1}\left(\mu\dot{R}^2 + \nu\dot{P}^2 - \frac{2m_1m_2}{r_0} - \frac{2m_0m_2}{r_1} - 2h\right)$$

luego

$$\tau = \int^t \frac{1}{r}\,dt = \frac{\mu}{2m_0m_1}\int^t \dot{R}^2dt + O\,(1) \quad \text{para} \quad t \to t_c$$

Pero

$$\int^t \dot{R}^2dt = \int^t \dot{R}.dR = R.\dot{R}/^t - \int^t R.\ddot{R}\,dt$$

y puesto que en virtud de (10) se tiene

$$|\,R.\dot{R}\,|^2 \leqq |\,R\,|^2\,|\,\dot{R}\,|^2 = r^2\dot{R}^2 = O\,(1) \quad \text{para } t \to t_c$$

resulta

$$\tau = -\frac{\mu}{2m_0m_1}\int^t R\ddot{R}dt + O\,(1) \quad \text{para } t \to t_c$$

Pero en virtud de (1) se tiene

$$\int^t R\ddot{R}dt = -(m+m_1)\int^t \frac{dt}{r} + O\,(1)$$

luego sigue

$$\tau = O\,(1) \qquad \text{para } t \to t_c, \text{ c.q.d.}$$

6. — *Demostración del teorema.* Introduciendo la variable independiente τ, se tiene, en virtud de (8_2)

$$\frac{1}{r}\left(\frac{R'^2}{r} - 2(m_0 + m_1)\right) = \frac{2}{\mu}\left(\frac{m_1m_2}{r_0} + \frac{m_0m_2}{r_1} + h\right) - \frac{\nu}{\mu}\dot{P}^2 \tag{11}$$

Si se cumplen las condiciones del teorema están uniformemente acotadas para todo t las funciones escalares

$$y_0 = \frac{1}{r}\left(\frac{R'^2}{r} - 2(m_0 + m_1)\right);\ y_1 = \frac{1}{r_0};\ y_2 = \frac{1}{r_1};\ y_3 = \frac{r}{r_0} = y_1r;\ y_4 = \frac{r}{r_1} = y_2r \tag{12}$$

y las funciones vectoriales

$$Y_1 = y_1R\ ;\quad Y_2 = y_2R\ ;\quad Y_3 = y_1P\ ;\quad Y_4 = y_2P \tag{13}$$

ya que

$$|\,Y_1\,| = y_3\ ;\quad |\,Y_2\,| = y_4\ ;\quad |\,Y_3\,| = y_1p \leqq \frac{r_0 + a_1r}{r_0} = 1 + a_1y_3\ ;\ |\,Y_4\,| = y_2p \leqq \frac{r_1 + a_0r}{r_1} = 1 + a_0y_4$$

Pero de la primera de las (12) se obtiene

$$R'^2 = r^2y_0 + 2(m_0 + m_1)r \tag{12_1}$$

luego también están uniformemente acotadas para todo t las funciones escalares

$$y_5 = \frac{r'}{r_0} = y_1 r' \; ; \; y_6 = \frac{r'}{r_1} = y_2 r' \tag{14}$$

ya que aplicando la desigualdad de Schwarz resulta

$$r'^2 = \left(\frac{xx' + yy' + zz'}{r}\right)^2 \leqq (\,|\,x'\,| + |\,y'\,| + |\,z'\,|\,)^2 \leqq 3(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 3R'^2$$

y teniendo en cuenta (12_1)

$$y_5^2 + y_6^2 \leqq 3(y_1^2 + y_2^2)\, R'^2 = 3y_0(y_3^2 + y_4^2) + 6(m_0 + m_1)\,(y_1y_3 + y_2y_4)$$

Asimismo están uniformemente acotadas para todo t las funciones vectoriales

$$Y_5 = y_1 R' \quad , \quad Y_6 = y_2 R' \tag{15}$$

puesto que

$$Y_5^2 + Y_6^2 = (y_1^2 + y_2^2)\, R'^2 = y_0(y_3^2 + y_4^2) + 2(m_0 + m_1)\,(y_1y_3 + y_2y_4)$$

Si indicamos ahora con A el vector de Sundman:

$$A = \frac{r'}{r} R' - \frac{m_0 + m_1}{r} R \tag{16}$$

también están uniformemente acotadas para todo t las funciones vectoriales

$$Y_7 = y_1 A \qquad Y_8 = y_2 A \tag{16_1}$$

ya que

$$\begin{aligned} Y_7^2 + Y_8^2 &= (y_1^2 + y_2^2)\left[\frac{r'^2}{r}\left(\frac{R'^2}{r} - 2(m_0 + m_1)\right) + (m_0 + m_1)^2 \frac{R^2}{r^2}\right] \\ &= (y_1^2 + y_2^2)\,(r'^2 y_0 + (m_0 + m_1)^2) \\ &\leqq 3y_0(y_1^2 + y_2^2)\, R'^2 + (m_0 + m_1)^2 = 3y_0^2(y_3^2 + y_4^2) + 6y_0(y_1y_3 + y_2y_4) + (m_0 + m_1)^2 \end{aligned}$$

Se tiene, en virtud de las expresiones (12), (13), . . ., (16)

$$Q = -(a_0 y_1^2 Y_3 + a_1 y_2^2 Y_4) + a_0 a_1 (y_1^2 Y_1 - y_2^2 Y_2)$$
$$S = m_2(y_1^2 Y_3 - y_2^2 Y_4) - m_2(a_1 y_1^2 Y_1 + a_0 y_2^2 Y_2)$$

luego las ecuaciones diferenciales (3) del problema de los tres cuerpos toman la forma que sigue

$$\frac{d\dot{P}}{d\tau} = -(a_0 y_1 y_3 Y_3 + a_1 y_2 y_4 Y_4) + a_0 a_1 (y_1 y_3 Y_1 - y_2 y_4 Y_2) \tag{17}$$

De la 1ª de las (12) resulta

$$\begin{aligned} y_0' &= -\frac{r'}{r} y_0 + \frac{1}{r}\left(\frac{2R'R''}{r} - \frac{R'^2}{r^2} r'\right) \\ &= -\frac{r'}{r} y_0 + \frac{R'}{r^2}\left(\frac{2r'}{r} R' - \frac{2(m_0 + m_1)}{r} R + 2r^2 S - \frac{r'}{r} R'\right) = 2R'S \end{aligned}$$

y por tanto

$$\frac{dy_0}{d\tau} = 2m_2(y_1Y_3Y_5 - y_2Y_4Y_6) - 2m_2(a_1y_1Y_1Y_5 + a_0y_2Y_2Y_6) \tag{18}$$

obteniéndose además, después de sencillos cálculos

$$y_1' = -\frac{r_0r_0'}{r_0^3} = -\frac{(P - a_1R)\,(P' - a_1R')}{r_0^3} = -y_1^3(P - a_1R)\,(r\dot{P} - a_1R')$$

ya que

$$r_0^2 = (P - a_1R)^2, \qquad P' = r\dot{P}$$

y en virtud de las (13) y (12) sigue

$$\frac{dy_1}{d\tau} = -y_1(Y_3 - a_1Y_1)\,(y_3\dot{P} - a_1Y_5) \tag{19}$$

Análogamente sigue de la 3a. de las (12) teniendo en cuenta que

$$r_1^2 = (P + a_0R)^2:$$

$$\frac{dy_2}{d\tau} = -y_2(Y_4 + a_0Y_2)\,(y_4\dot{P} + a_0Y_6) \tag{20}$$

De la 4a. de las (12) se obtiene ahora, teniendo en cuenta las (19), (20) y (14)

$$\frac{dy_3}{d\tau} = y_5 - y_3(Y_3 - a_1Y_1)\,(y_3\dot{P} - a_1Y_5) \tag{21}$$

y análogamente resulta, partiendo de la 5a. de las (12)

$$\frac{dy_4}{d\tau} = y_6 - y_4(Y_4 + a_0Y_2)\,(y_4\dot{P} + a_0Y_6)$$

Por derivación de (14) y de $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ sigue

$$y_5' = y_1'r' + y_1r''$$

$$r'' = \frac{R'^2}{r} + \frac{R\,R''}{r} - \frac{r'^2}{r} = ry_0 + m_0 + m_1 + rRS$$

en virtud de (3).

Reemplazando en y_5' y teniendo en cuenta (19) se obtiene

$$\frac{dy_5}{d\tau} = (m_0 + m_1)y_1 + y_0y_3 + m_2y_3(y_1Y_1Y_3 - y_2Y_2Y_4 - a_1y_1Y_1^2 - a_0y_2Y_2^2) - y_5(Y_3 - a_1Y_1)\,(y_3\dot{P} - a_1Y_5) \tag{23}$$

y análogamente

$$\frac{dy_6}{d\tau} = (m_0 + m_1)y_2 + y_0y_4 + m_2y_4(y_1Y_1Y_3 - y_2Y_2Y_4 - a_1y_1Y_1^2 - a_0y_2Y_2^2) - y_6(Y_4 + a_0Y_2)\,(y_4\dot{P} + a_0Y_6)$$

Derivando la 1a. de las (13) resulta

$$Y_1' = y_1'R + y_1R'$$

y en virtud de (19), (13) y (15)

$$\frac{dY_1}{d\tau} = Y_5 - Y_1(Y_3 - a_1Y_1)\,(y_3\dot{P} - a_1Y_5) \tag{25}$$

y análogamente

$$\frac{dY_2}{d\tau} = Y_6 - Y_2(Y_4 + a_0Y_2)\,(y_4\dot{P} + a_0Y_6) \tag{26}$$

Derivando la 3a. de las (13) se obtiene

$$Y_3' = y_1'P + y_1r\dot{P}$$

y en virtud de (12), (19) y (13) sigue

$$\frac{dY_3}{d\tau} = y_3\dot{P} - Y_3(Y_3 - a_1Y_1)\,(y_3\dot{P} - a_1Y_5) \tag{27}$$

y análogamente

$$\frac{dY_4}{d\tau} = y_4\dot{P} - Y_4(Y_4 + a_0Y_2)\,(y_4\dot{P} + a_0Y_6) \tag{28}$$

Derivando la 1a. de las (15) y teniendo en cuenta (3) y (16) resulta

$$Y_5' = y_1'R' + y_1R'' = y_1'R' + y_1(A + r^2S)$$

de donde sigue, en virtud de (19) y (15)

$$\frac{dY_5}{d\tau} = Y_7 + m_2y_3(y_1y_3Y_3 - y_2y_4Y_4 - a_1y_1y_3Y_1 - a_0y_2y_4Y_2) - Y_5(Y_3 - a_1Y_1)\,(y_3\dot{P} - a_1Y_5) \tag{29}$$

y análogamente

$$\frac{dY_6}{d\tau} = Y_8 + m_2y_4(y_1y_3Y_3 - y_2y_4Y_4 - a_1y_1y_3Y_1 - a_0y_2y_4Y_2) - Y_6(Y_4 + a_0Y_2)\,(y_4\dot{P} + a_0Y_6) \tag{30}$$

Finalmente, derivando la 1a. de las (16_1) se obtiene

$$Y_7' = y_1'A + y_1A'$$

Pero

$$A' = \frac{r''}{r}R' + \frac{r'}{r}(A + r^2S) - \frac{r'^2}{r^2}R' - \frac{m_0 + m_1}{r}R' + \frac{m_0 + m_1}{r^2}r'R'$$

$$= (ry_0 + m_0 + m_1 + 2rRS - m_0 - m_1)\frac{R'}{r} = y_0R' + 2rr'S$$

Reemplazando ahora en Y_7' sigue, en virtud de (19)

$$\frac{dY_7}{d\tau} = y_0 Y_5 + 2m_2 y_1 (y_3 y_5 Y_3 - y_4 y_6 Y_4 - a_1 y_3 y_5 Y_1 - a_0 y_4 y_6 Y_2)$$

$$- Y_7 (Y_3 - a_1 Y_1)(y_3 \dot{P} - a_1 Y_5) \tag{31}$$

y análogamente

$$\frac{dY_8}{d\tau} = y_0 Y_6 + 2m_2 y_2 (y_3 y_5 Y_3 - y_4 y_6 Y_4 - a_1 y_3 y_5 Y_1 - a_0 y_4 y_6 Y_2)$$

$$- Y_8 (Y_4 + a_0 Y_2)(y_4 \dot{P} + a_0 Y_6) \tag{32}$$

Se obtiene así un sistema de 34 ecuaciones diferenciales de primer orden con siete funciones escalares (ecuaciones (18), (19), (20), (21), (22), (23) y (24)) y nueve funciones vectoriales (ecuaciones (17), (25), (26), (27), (28), . . . , (32)) incógnitas, cuyos segundos miembros son polinomios enteros con coeficientes constantes en algunas de dichas variables, todas las cuales están uniformemente acotadas para todo valor de t y por tanto de τ. Dicho sistema admite, en virtud del teorema 5 de Merman ([1]), loc. c. pág. 723) una solución de la forma

$$y_i(\tau) = \lim_{n \to \infty} \Pi_n^{(i)}(\tau), \qquad t = \lim_{n \to \infty} \Pi_n(\tau)$$

siendo $y_i \equiv y_i$, $(i = 0, 1, \ldots, 6)$ e $y_i = Y_{i-7}$, $(i = 7, 8, \ldots, 15)$, $Y_0 = \dot{P}$, donde $\Pi_n^{(i)}$ y Π_n son polinomios tales que

$$|y_i - \Pi_n^{(i)}| \leqq \varepsilon, \qquad |t - \Pi_n| \leqq \varepsilon\tau$$

para todo n que satisfaga la desigualdad

$$n > M\tau(e^{L\tau} - 1)/\varepsilon$$

donde M y L dependen de los coeficientes, grados y número de factores de los términos de los segundos miembros del sistema, de ε y de la cota máxima de las funciones $|y_i|$.

7. — Volvamos ahora al ejemplo del párrafo 4 tomando $\mu = 10^{-6}$. Se tiene en este caso $a_0 = a_1 = 1/2$, $r_0 = r_1 = \rho = \sqrt{\xi^2 + \frac{y^2}{4}}$; $r = y$; $R = y\bar{j}$; $P = \xi\bar{i}$ siendo $\bar{i}$ y $\bar{j}$ vectores unitarios ortogonales de igual dirección y sentido que los ejes 0ξ y $0y$. Las condiciones iniciales son

$$y(0) = 2\eta_0(0) = 2; \qquad \xi(0) = \frac{1}{1 - 2\mu}\,\xi_0(0) = 0$$

y tomando

$$\dot{\xi}(0) = \frac{1}{1 - 2\mu}\,\dot{\xi}_0(0) = 1.4143$$

sigue

$$R(0) = 2\bar{j} \qquad \dot{P}(0) = 1.4143\bar{i}$$

Es pues

$$y_0 = \frac{1}{y}\left(\frac{y'^2}{y} - 4.10^{-6}\right) \qquad Y_1 = y_1 y\bar{j} = Y_2 = y_3\bar{j}$$

$$y_1 = y_2 = \frac{1}{\rho} \qquad Y_3 = y_1 \xi \bar{j} = Y_4$$

$$y_3 = y_4 = \frac{y}{\rho} = y_1 y \qquad Y_5 = y_1 y' \bar{j} = Y_6 = y_5 \bar{j}$$

$$y_5 = y_6 = \frac{y'}{\rho} = y_1 y' \qquad Y_7 = y_1 A = y_1 \left(\frac{y'^2}{y} - 2.10^{-6} \right) \bar{j} = Y_8$$

El sistema anterior se reduce pues al siguiente

$$\frac{d\dot{P}}{d\tau} = - y_1 y_3 Y_3$$

$$\frac{dy_0}{d\tau} = - 1.999996\, y_1 Y_1 Y_5$$

$$\frac{dy_1}{d\tau} = - y_1 \left(Y_3 - \frac{1}{2} Y_1 \right) \left(y_3 \dot{P} - \frac{1}{2} Y_5 \right)$$

$$\frac{dy_3}{d\tau} = y_5 - y_3 \left(Y_3 - \frac{1}{2} Y_1 \right) \left(y_3 \dot{P} - \frac{1}{2} Y_5 \right)$$

$$\frac{dy_5}{d\tau} = 2.10^{-6} y_1 + y_0 y_3 - 0.999998 y_1 y_3 Y_1^2 - y_5 \left(Y_3 - \frac{1}{2} Y_1 \right) \left(y_3 \dot{P} - \frac{1}{2} Y_5 \right)$$

$$\frac{dY_1}{d\tau} = Y_5 - Y_1 \left(Y_3 - \frac{1}{2} Y_1 \right) \left(y_3 \dot{P} - \frac{1}{2} Y_5 \right)$$

$$\frac{dY_3}{d\tau} = y_3 \dot{P} - Y_3 \left(Y_3 - \frac{1}{2} Y_1 \right) \left(y_3 \dot{P} - \frac{1}{2} Y_5 \right)$$

$$\frac{dY_5}{d\tau} = Y_7 - 0.999998 y_1 y_3^2 Y_1 - Y_5 \left(Y_3 - \frac{1}{2} Y_1 \right) \left(y_3 \dot{P} - \frac{1}{2} Y_5 \right)$$

$$\frac{dY_7}{d\tau} = y_0 Y_5 - 1.999996 y_1 y_3 y_5 Y_1 - Y_7 \left(Y_3 - \frac{1}{2} Y_1 \right) \left(y_3 \dot{P} - \frac{1}{2} Y_5 \right)$$

o sea un sistema de 19 ecuaciones de primer orden con cuatro funciones escalares y cinco funciones vectoriales incógnitas. Pero por ser

$$Y_1 = y_3 \bar{j}\ , \quad Y_5 = y_5 \bar{j}\ , \quad Y_7 = (y_0 y_3 + 2.10^{-6} y_1) \bar{j}$$

y puesto que de (8_1) sigue

$$3.999992\, \dot{P}^2 + \frac{y'^2}{y^2} = \frac{7.999998}{\rho} + \frac{0.000004}{y} + 4.10^6 h$$

de donde

$$\frac{1}{\rho} \equiv \omega = 0.5\,\dot{P}^2 + 0.12500025\,y_0 - 0.000121995$$

o sea que si cambiamos

$$\dot{P} \text{ por } y_1 \qquad y_0 \text{ por } y_2 \qquad y_5 \text{ por } y_4 \qquad \text{e} \qquad Y_3 \text{ por } y_5 \quad .$$

el sistema mencionado recién se reduce, con este valor de ω, al sistema siguiente de sólo cinco ecuaciones de primer orden

$$\frac{dy_1}{d\tau} = -\,y_3y_5\,\omega$$

$$\frac{dy_2}{d\tau} = -\,1.999996\,y_3y_4\,\omega$$

$$\frac{dy_3}{d\tau} = y_4 - y_3^2\left(y_1y_5 + \frac{1}{4}\,y_4\right)$$

$$\frac{dy_4}{d\tau} = y_2y_3 - y_3y_4\left(y_1y_5 + \frac{1}{4}\,y_4\right) + (2.10^{-6} - 0.999998\,y_3^3)\,\omega$$

$$\frac{dy_5}{d\tau} = y_1y_3 - y_3y_5\left(y_1y_5 + \frac{1}{4}\,y_4\right)$$

donde ahora y_1 e y_5 indican los componentes de $\dot{P}$ y de Y_3 respectivamente, $y_1 = \dot{\xi}$, $y_5 = \dfrac{1}{\rho}\,\xi = \omega\xi$.

8. — Este ejemplo, con las condiciones iniciales

$$y_1(0) = 1.4143; \quad y_2(0) = -\,2.10^{-6}; \quad y_3(0) = 2; \quad y_4(0) = 0; \quad y_5(0) = 0$$

ha sido calculado por el método de Merman (tomando $n = 50$) para valores particulares de τ ($\tau = 0\ (0.2)\ 1$) por las clásicas series de Sundman y por las fórmulas del problema de los dos cuerpos (es decir, prescindiendo de las perturbaciones de una de las pequeñas masas), mediante la Computadora Mercury de la Facultad de Ciencias de Buenos Aires y de una IBM 1401 del IBM Service Bureau. Los primeros resul-, tados muestran un acuerdo bastante satisfactorio si las series de Sundman —las cuales son en este caso lentamente convergentes o aun divergentes— se suman por el siguiente método lineal (Método de la integral de Borel):

Dada la serie numérica $\sum u_n$, pongamos

$$\sigma(a) = \sum_{u=o}^{\infty} u_n I_n(a) \tag{A}$$

donde

$$I_n(a) = \frac{1}{n!}\int_o^a e^{-t}t^n dt = I_{n-1}(a) + \frac{a}{n}\,(I_{n-1}(a) - I_n(a))$$

La transformación (A) es regular, es decir $\lim\limits_{a \to \infty} \sigma(a) = s$ cada vez que la serie $\sum u_n = s$ converge, ya que como es sabido y fácil comprobar se verifican las condiciones

$$\lim_{a \to \infty} I_n(a) = 1 \;\; ; \sum_{n=o}^{\infty} | \, I_n(a) - I_{n+1}(a) \, | < 1 \; , \; a \geq 0$$

Si la serie $\sum u_n$ diverge pero $\sigma(a) \to s$ para $a \to \infty$ podemos tomar s como suma de dicha serie y los valores de $\sigma(a)$ para cierta sucesión creciente de valores de a como sus valores aproximados, es decir

$$\sigma(a_\nu) = \sum_{n=o}^{\infty} u_n I_n(a_\nu) \cong \sum u_n, \quad 0 < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$$

donde las funciones $I_n(a)$ han sido previamente tabuladas. La tabla II constituye un esquema de dicha tabulación. * He aquí dos aplicaciones:

a) Sea la serie lentamente convergente

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots \pm \frac{1}{2n+1} \mp \ldots$$

Para obtener con ésta el valor de $\frac{\pi}{4}$ con diez cifras exactas es preciso que el último término que se deje de considerar sea $< 10^{-10}$ y por tanto se deberán tomar en cuenta más de 5.10^9 términos.

Aplicando sin embargo nuestra tabla con $a = 20$ y considerando solamente 26 términos se obtiene $\frac{\pi}{4} = 0.78539\,81633$ con todas las cifras exactas.

b) En el problema particular de los tres cuerpos que nos interesa las coordenadas ξ, y están dadas por los siguientes desarrollos (SUNDMAN):

$$\xi = a_1\tau - a_3\tau^3 + a_5\tau^5 - \ldots = \sum_{\nu=o}^{\infty} (-1)^\nu a_{2\nu+1}\iota^{2\nu+1} \; , \; a_{2\nu+1} > 0$$

$$y = b_0 - b_2\tau^2 + b_4\tau^4 - \ldots = \sum_{\nu=o}^{\infty} (-1)^\nu b_{2\nu}\tau^{2\nu} \; , \; b_{2\nu} > 0$$

En la tabla I figuran los coeficientes obtenidos y en la cuarta columna los términos de la serie $\sum\limits_{\nu=o}^{\infty} (-1)^\nu a_{2\nu+1}\tau^{2\nu+1}$ para $\tau = 0.8$. En las columnas quinta y sexta hemos incluido los términos de las series transformadas mediante la tabla II con $a = 10, 11$. Las sumas de estas últimas series nos da los valores aproximados $\xi\,(0.8) = 1.4624$ y $\xi\,(0.8) = 1.4625$, siendo $1.4624\,5466$ el valor que se obtiene con las fórmulas del movimiento hiperbólico.

---

* Deseo expresar mi agradecimiento al profesor Dr. Jacobo Gordon por la programación y cálculo de esta tabla y de los coeficientes de Sundman.

TABLA I

ν	$a_{2\nu+1}$	$b_{2\nu}$	$a_{2\nu+1}\,(0.8)^{2\nu+1}$	$a_{2\nu+1}\,\tau^{2\nu+1}\cdot I_{2\nu+1}$	
				$\tau = 0.8;\ a = 10$	$\tau = 0{,}8;\ a = 11$
0	2.8286	2.	2.2628 800	2.2617 499	2.2624 265
1	3.7714 633	3.9999 929	1.9309 892	1.9110 304	1.9214 967
2	1.0561 204,1	1.0667 619,1	3.4606 953	3.2285 312	3.3308 507
3	3.8657 981,1	3.6986 048,1	8.1071 662	6.3218 008	6.9462 886
4	1.6158 651,2	1.4918 586,2	2.1687 774,1	1.1756 298,1	1.4302 856,1
5	7.3061 259,2	6.5867 055,2	6.2759 144,1	1.9030 069,1	2.6404 858,1
6	3.4793 910,3	3.0845 254,3	1.9128 154,2	2.5925 454,1	4.1834 961,1
7	1.7191 484,4	1.5052 248,4	6.0487 157,2	2.9481 684,1	5.6013 471,1
8	8.7310 152,4	7.5719 457,4	1.9660 498,3	2.8070 499,1	6.3288 170,1
9	4.5297 289,5	3.8988 333,5	6.5280 273,3	2.2550 039,1	6.0641 835,1
10	2.3903 711,6	2.0448 841,6	2.2047 282,4	1.5425 392,1	4.9648 816,1
11	1.2790 520,7	1.0886 631,7	7.5501 902,4	9.0694 511	3.5021 982,1
12	6.9235 316,7	5.8679 468,7	2.6156 363,5	4.6245 162	2.1461 377,1
13	3.7844 733,8	3.1958 779,8	9.1502 948,5	2.0620 501	1.1515 158,1
14	2.0859 954,9	1.7560 675,9	3.2279 214,6	0.8101 925	5.4494 311
15	1.1581 410,10	9.7231 692,9	1.1469 673,7	0.2824 516	2.2899 026
16	6.4707 915,10	5.4195 810,10	4.1013 514,7	0.0879 248	0.8596 924
17	3.6355 902,11	3.0385 330,11	1.4747 706,8	0.0245 801	0.2899 828
18	2.0527 814,12	1.7124 254,12	5.3293 243,8	0.0062 034	0.0883 363
19	1.1642 198,13	9.6954 597,12	1.9343 919,9	0.0014 201	0.0244 171
20	6.6291 503,13	5.5122 277,13	7.0493 191,9	0.0002 962	0.0061 506
21	3.7883 024,14	3.1456 605,14	2.5781 860,10	0.0000 565	0.0014 175
22	2.1719 663,15	1.8012 442,15	9.4602 381,10	0.0000 099	0.0003 000
23	1.2489 955,16	1.0346 122,16	3.4816 874,11	0.0000 016	0.0000 585
24	7.2020 597,16	5.9595 566,16	1.2848 907,12	0.0000 002	0.0000 106
25	4.1633 839,17	3.4417 452,17	4.7537 441,12		0.0000 018

TABLA II

n	I_n (5)	n	I_n (6)
0	0,99326 20530 00914 53290	0	0,99752 12478 23333 64158
1	0,95957 23180 05487 19742	1	0,98264 87347 63335 49104
2	0,87534 79805 16918 85871	2	0,93803 11955 83341 03942
3	0,73497 40847 02638 29420	3	0,84879 61172 23352 13619
4	0,55950 67149 34787 58856	4	0,71494 34996 83368 78135
5	0,38403 93451 66936 88292	5	0,55432 03586 35388 75554
6	0,23781 65370 27061 29488	6	0,39369 72175 87408 72972
7	0,13337 16740 70007 30343	7	0,25602 02395 46282 99331
8	0,06809 36347 21848 55877	8	0,15276 25060 15438 69100
9	0,03182 80573 06204 81174	9	0,08392 40169 94875 82280
10	0,01369 52685 98382 93822	10	0,04262 09235 82538 10187
11	0,00545 30919 13009 35935	11	0,02009 19635 39444 79955
12	0,00201 88516 27437 03482	12	0,00882 74835 17898 14839
13	0,00069 79899 79139 98692	13	0,00362 84927 38722 77093
14	0,00022 62536 76176 75553	14	0,00140 03538 33361 89488
15	0,00006 90082 41855 67840	15	0,00050 90982 71217 54446
16	0,00001 98690 43630 34180	16	0,00017 48774 35413 41305
17	0,00000 54163 38269 94868	17	0,00005 69171 40423 71961
18	0,00000 14016 97892 06170	18	0,00001 75970 42093 82180
19	0,00000 03452 13582 09145	19	0,00000 51801 68937 01196
20	0,00000 00810 92504 59888	20	0,00000 14551 06989 96901
21	0,00000 00182 06533 76732	21	0,00000 03908 03576 52817
13	0,00000 00039 14267 66924	22	0,00000 01005 39009 22612
23	0,00000 00008 07253 30009	23	0,00000 00248 17817 75602
24	0,00000 00001 59958 63985	24	0,00000 00058 87519 88850
25	0,00000 00000 30499 70780	25	0,00000 00013 44248 40029
26	0,00000 00000 05603 75933	26	0,00000 00002 95801 13378
27	0,00000 00000 00993 39850	27	0,00000 00000 62812 85233
28	0,00000 00000 00170 11978	28	0,00000 00000 12886 79202
29	0,00000 00000 00028 17518	29	0,00000 00000 02557 26231
30	0,00000 00000 00004 51774	30	0,00000 00000 00491 35636
31	0,00000 00000 00000 70203	31	0,00000 00000 00091 50360
32	0,00000 00000 00000 10582	32	0,00000 00000 00016 53121
33	0,00000 00000 00000 01549	33	0,00000 00000 00002 89986
34	0,00000 00000 00000 00220	34	0,00000 00000 00000 49433
35	0,00000 00000 00000 00030	35	0,00000 00000 00000 08195
36	0,00000 00000 00000 00004	36	0,00000 00000 00000 01322
37	0,00000 00000 00000 00001	37	0,00000 00000 00000 00208
		38	0,00000 00000 00000 00032
		39	0,00000 00000 00000 00005
		40	0,00000 00000 00000 00001

n	I_n (7)	n	I_n (8)
0	0,99908 81180 34445 48379	0	0,99966 45373 72097 48816
1	0,99270 49442 75563 87034	1	0,99698 08363 48877 39345
2	0,97036 38361 19478 22324	2	0,98624 60322 55997 01461
3	0,91823 45837 55278 38002	3	0,95761 98880 08316 00436
4	0,82700 83921 17928 65437	4	0,90036 75995 12953 98387
5	0,69929 17238 25639 03847	5	0,80876 39379 20374 75108
6	0,55028 89441 51301 15326	6	0,68662 57224 63602 44070
7	0,40128 61644 76963 26804	7	0,54703 91905 13005 51455
8	0,27090 87322 61917 61848	8	0,40745 26585 62408 58839
9	0,16950 40627 61326 55771	9	0,28337 57412 72989 09848
10	0,09852 07941 10912 81517	10	0,18411 42074 41453 50655
11	0,05334 96231 51558 61537	11	0,11192 40010 18518 53060
12	0,02699 97734 25268 66549	12	0,06379 71967 36561 87997
13	0,01281 13928 03420 23093	13	0,03418 07017 93819 32573
14	0,00571 72024 92496 01366	14	0,01725 69903 97966 43760
15	0,00240 65803 47398 04560	15	0,00823 10109 86844 89726
16	0,00095 81831 58917 68457	16	0,00371 80212 81284 12709
17	0,00036 17843 16602 24179	17	0,00159 42614 19843 76466
18	0,00012 98514 33479 56960	18	0,00065 03681 48092 49247
19	0,00004 44024 76539 63774	19	0,00025 29394 02091 95681
20	0,00001 44953 41610 66159	20	0,00009 39679 03691 74254
21	0,00000 45262 96634 33621	21	0,00003 34073 32872 61330
22	0,00000 13543 27778 23268	22	0,00001 13853 07120 20266
23	0,00000 03889 45952 46204	23	0,00000 37254 72075 88592
24	0,00000 01073 76253 27893	24	0,00000 11721 93727 78034
25	0,00000 00285 36737 50766	25	0,00000 03551 44656 38656
26	0,00000 00073 10714 03078	26	0,00000 01037 44942 11154
27	0,00000 00018 07670 90715	27	0,00000 00292 56137 88191
28	0,00000 00004 31910 12624	28	0,00000 00079 73622 38773
29	0,00000 00000 99829 93774	29	0,00000 00021 02583 63071
30	0,00000 00000 22344 56043	30	0,00000 00005 36973 29551
31	0,00000 00000 04847 86233	31	0,00000 00001 32944 82191
32	0,00000 00000 01020 45962	32	0,00000 00000 31937 70351
33	0,00000 00000 00208 58631	33	0,00000 00000 07451 12935
34	0,00000 00000 00041 43593	34	0,00000 00000 01689 58249
35	0,00000 00000 00008 00585	35	0,00000 00000 00372 65749
36	0,00000 00000 00001 50556	36	0,00000 00000 00080 00750
37	0,00000 00000 00000 27577	37	0,00000 00000 00016 73182
38	0,00000 00000 00000 04923	38	0,00000 00000 00003 41062
39	0,00000 00000 00000 00857	39	0,00000 00000 00000 67807
40	0,00000 00000 00000 00146	40	0,00000 00000 00000 13156
41	0,00000 00000 00000 00024	41	0,00000 00000 00000 02493
42	0,00000 00000 00000 00004	42	0,00000 00000 00000 00461
43	0,00000 00000 00000 00001	43	0,00000 00000 00000 00083
		44	0,00000 00000 00000 00015
		45	0,00000 00000 00000 00003

n	I_n (9)	n	I_n (10)
0	0,99987 65901 95913 32045	0	0,99995 46000 70237 51515
1	0,99876 59019 59133 20451	1	0,99950 06007 72612 66663
2	0,99376 78048 93622 68275	2	0,99723 06042 84488 42406
3	0,97877 35136 97091 11749	3	0,98966 39493 24074 28213
4	0,94503 63585 04895 09564	4	0,97074 73119 23038 92733
5	0,88430 94791 58942 25632	5	0,93291 40371 20968 21771
6	0,79321 91601 40012 99734	6	0,86985 85791 17517 03503
7	0,67610 30356 87103 95009	7	0,77977 93533 98301 05976
8	0,54434 73956 77581 27192	8	0,66718 03212 49281 09067
9	0,41259 17556 68058 59376	9	0,54207 02855 28147 79169
10	0,29401 16796 59488 18341	10	0,41696 02498 07014 49270
11	0,19699 16174 70657 84767	11	0,30322 38536 96893 31181
12	0,12422 65708 29035 09586	12	0,20844 35236 05125 66106
13	0,07385 07693 07911 65230	13	0,13553 55773 80689 00664
14	0,04146 63254 72903 72430	14	0,08345 84729 34662 82491
15	0,02203 56591 71898 96750	15	0,04874 04033 03978 70376
16	0,01110 59093 77583 79180	16	0,02704 16097 84801 12804
17	0,00531 95712 51181 63996	17	0,01427 76135 97049 61291
18	0,00242 64021 87980 56404	18	0,00718 65046 03854 32673
19	0,00105 59536 84359 00176	19	0,00345 43419 75856 80768
20	0,00043 92518 57729 29874	20	0,00158 82606 61858 04816
21	0,00017 49510 74887 99744	21	0,00069 96505 12334 82934
22	0,00006 68280 27362 01055	22	0,00029 57368 08006 09351
23	0,00002 45190 08764 88524	23	0,00012 01221 53950 12141
24	0,00000 86531 26790 96325	24	0,00004 69493 81426 79971
25	0,00000 29414 09280 35133	25	0,00001 76802 72417 47102
26	0,00000 09642 76295 90875	26	0,00000 64229 22798 49845
27	0,00000 03052 31967 76122	27	0,00000 22535 34050 73083
28	0,00000 00933 96290 85666	28	0,00000 07644 66640 81383
29	0,00000 00276 54184 23110	29	0,00000 02509 95120 15279
30	0,00000 00079 31552 24344	30	0,00000 00798 37946 59911
31	0,00000 00022 05626 82766	31	0,00000 00246 25955 13018
32	0,00000 00005 95210 30448	32	0,00000 00073 72207 79614
33	0,00000 00001 56005 79815	33	0,00000 00021 43799 51310
34	0,00000 00000 39745 78177	34	0,00000 00006 06032 37103
35	0,00000 00000 09850 34899	35	0,00000 00001 66670 33044
36	0,00000 00000 02376 49079	36	0,00000 00000 44625 31916
37	0,00000 00000 00558 52529	37	0,00000 00000 11640 18098
38	0,00000 00000 00127 95451	38	0,00000 00000 02959 88146
39	0,00000 00000 00028 59202	39	0,00000 00000 00734 16363
40	0,00000 00000 00006 23546	40	0,00000 00000 00177 73417
41	0,00000 00000 00001 32792	41	0,00000 00000 00042 01967
42	0,00000 00000 00000 27631	42	0,00000 00000 00009 70670
43	0,00000 00000 00000 05620	43	0,00000 00000 00002 19205
44	0,00000 00000 00000 01118	44	0,00000 00000 00000 48418
45	0,00000 00000 00000 00218	45	0,00000 00000 00000 10465
46	0,00000 00000 00000 00041	46	0,00000 00000 00000 02214
47	0,00000 00000 00000 00008	47	0,00000 00000 00000 00459
48	0,00000 00000 00000 00001	48	0,00000 00000 00000 00093
		49	0,00000 00000 00000 00019
		50	0,00000 00000 00000 00004
		51	0,00000 00000 00000 00001

n	I_n (11)	n	I_n (12)
0	0,99998 32982 99209 75434	0	0,99999 38557 87646 67179
1	0,99979 95795 90517 05209	1	0,99992 01252 39406 73327
2	0,99878 91266 92707 18970	2	0,99947 77419 49967 10217
3	0,99508 41327 34071 02761	3	0,99770 82087 92208 57776
4	0,98489 53993 47821 58186	4	0,99239 96093 18933 00453
5	0,96248 01858 98072 80121	5	0,97965 89705 83071 62877
6	0,92138 56279 06866 70335	6	0,95417 76931 11348 87726
7	0,85680 84653 49257 12100	7	0,91049 55031 59824 16039
8	0,76801 48668 32543 94528	8	0,84497 22182 32537 08507
9	0,65948 93575 34338 95272	9	0,75760 78383 29487 65132
10	0,54011 12973 06313 46091	10	0,65277 05824 45828 33081
11	0,42073 32370 78287 96909	11	0,53840 26669 36381 79936
12	0,31130 33485 35931 26827	12	0,42403 47514 26935 26790
13	0,21870 88274 61629 44449	13	0,31846 43678 79753 85425
14	0,14595 59894 74678 01152	14	0,22797 54676 96455 49968
15	0,09260 39082 84246 96068	15	0,15558 43475 49816 81604
16	0,05592 43524 65825 61322	16	0,10129 10074 39837 80330
17	0,03219 05222 30376 50605	17	0,06296 62967 73970 26490
18	0,01768 65148 64268 71833	18	0,03741 64896 63391 90596
19	0,00928 94579 68101 05175	19	0,02127 97693 83026 62664
20	0,00467 10766 75208 83514	20	0,01159 77372 14807 45904
21	0,00225 19245 69408 15024	21	0,00606 51474 04396 50613
22	0,00104 23485 16507 80780	22	0,00304 73711 44172 34999
23	0,00046 38556 21642 42663	23	0,00147 28791 82316 26853
24	0,00019 87130 44829 12692	24	0,00068 56332 01388 22780
25	0,00008 20503 11031 27505	25	0,00030 77551 30542 76825
26	0,00003 26930 00578 33772	26	0,00013 33498 67075 63307
27	0,00001 25844 66690 10400	27	0,00005 58364 16645 79522
28	0,00000 46846 85519 72646	28	0,00002 26163 66461 57899
29	0,00000 16882 16799 92809	29	0,00000 88701 38799 14469
30	0,00000 05895 11602 66868	30	0,00000 33716 47734 17097
31	0,00000 01996 48468 15728	31	0,00000 12431 99579 98760
32	0,00000 00656 33015 66899	32	0,00000 04450 31522 16883
33	0,00000 00209 61198 17289	33	0,00000 01547 88592 05292
34	0,00000 00065 08551 33591	34	0,00000 00523 49910 83554
35	0,00000 00019 66290 90144	35	0,00000 00172 28077 27529
36	0,00000 00005 78377 99090	36	0,00000 00055 20799 42188
37	0,00000 00001 65755 23372	37	0,00000 00017 23844 44239
38	0,00000 00000 46311 80400	38	0,00000 00005 24806 02782
39	0,00000 00000 12622 63152	39	0,00000 00001 55871 13102
40	0,00000 00000 03358 10909	40	0,00000 00000 45190 66199
41	0,00000 00000 00872 50551	41	0,00000 00000 12796 37837
42	0,00000 00000 00221 51410	42	0,00000 00000 03540 86876
43	0,00000 00000 00054 98141	43	0,00000 00000 00957 93585
44	0,00000 00000 00013 34824	44	0,00000 00000 00253 49960
45	0,00000 00000 00003 17124	45	0,00000 00000 00065 64993
46	0,00000 00000 00000 73761	46	0,00000 00000 00016 64567
47	0,00000 00000 00000 16804	47	0,00000 00000 00004 13394
48	0,00000 00000 00000 03751	48	0,00000 00000 00001 00601

(Continuación) *(Continuación)*

n	I_n (11)	n	I_n (12)
49	0,00000 00000 00000 00821	49	0,00000 00000 00000 23999
50	0,00000 00000 00000 00176	50	0,00000 00000 00000 05614
51	0,00000 00000 00000 00037	51	0,00000 00000 00000 01288
52	0,00000 00000 00000 00008	52	0,00000 00000 00000 00290
53	0,00000 00000 00000 00002	53	0,00000 00000 00000 00064
		54	0,00000 00000 00000 00014
		55	0,00000 00000 00000 00003
		56	0,00000 00000 00000 00001

n	I_n (13)	n	I_n (14)
0	0,99999 77396 70593 01895	0	0,99999 91684 71280 89643
1	0,99996 83553 88302 26524	1	0,99998 75270 69213 44648
2	0,99977 73575 53412 36615	2	0,99990 60372 54741 29683
3	0,99894 97002 68889 47009	3	0,99952 57514 53871 26513
4	0,99625 98140 94190 05790	4	0,99819 47511 50826 15412
5	0,98926 61100 39971 58620	5	0,99446 79503 02299 84334
6	0,97411 30845 89164 89752	6	0,98577 20816 55738 45152
7	0,94597 17516 09095 33283	7	0,96838 03443 62615 66788
8	0,90024 20855 16482 29021	8	0,93794 48040 99650 79650
9	0,83418 81233 82707 89531	9	0,89060 06303 57260 99659
10	0,74831 79726 08801 18194	10	0,82431 87871 17915 27670
11	0,64683 50671 48729 61160	11	0,73996 00775 40566 17867
12	0,53689 52529 00318 74373	12	0,64154 15830 33658 89763
13	0,42695 54386 51907 87585	13	0,53555 24351 03143 36420
14	0,32486 84682 78383 49854	14	0,42956 32871 72627 83077
15	0,23639 30939 54662 37154	15	0,33064 00824 37479 99957
16	0,16450 68523 16638 95585	16	0,24408 22782 94225 64727
17	0,10953 50204 75797 52033	17	0,17279 93807 64486 76891
18	0,06983 31419 24078 70578	18	0,11735 71271 30245 41907
19	0,04266 86987 04481 62214	19	0,07650 49402 41857 05603
20	0,02501 18106 11743 51778	20	0,04790 84094 19985 20190
21	0,01408 13560 78143 73888	21	0,02884 40555 38737 29915
22	0,00762 24511 26471 14227	22	0,01671 21939 77943 17922
23	0,00397 17657 19004 02244	23	0,00932 75825 93111 97578
24	0,00199 43111 23292 66587	24	0,00501 98926 18627 10711
25	0,00096 60347 33522 76045	25	0,00260 75862 32915 58065
26	0,00045 18965 38637 80774	26	0,00130 86520 25224 75872
27	0,00020 43485 18878 38606	27	0,00063 51305 84199 88808
28	0,00008 94155 09704 36886	28	0,00029 83698 63687 45276
29	0,00003 78938 15936 70597	29	0,00013 57957 22750 41502
30	0,00001 55677 48637 38539	30	0,00005 99277 90313 13075
31	0,00000 62052 04286 05740	31	0,00002 56648 53083 38946
32	0,00000 24016 70643 33041	32	0,00001 06748 18045 37765
33	0,00000 09033 08905 28644	33	0,00000 43154 09241 37263

(Continuación) *(Continuación)*

n	I_n (13)				n	I_n (14)			
34	0,00000	03304	05887	79904	34	0,00000	16968	29145	60587
35	0,00000	01176	13338	44658	35	0,00000	06493	97107	29916
36	0,00000	00407	71584	51374	36	0,00000	02420	62425	73544
37	0,00000	00137	73130	42923	37	0,00000	00879	35789	46808
38	0,00000	00045	36817	18980	38	0,00000	00311	52291	89590
39	0,00000	00014	58046	10998	39	0,00000	00107	68472	25461
40	0,00000	00004	57445	50905	40	0,00000	00036	34135	38015
41	0,00000	00001	40181	90387	41	0,00000	00011	98020	34985
42	0,00000	00000	41981	26417	42	0,00000	00003	85982	00642
43	0,00000	00000	12292	69868	43	0,00000	00001	21597	42948
44	0,00000	00000	03521	07706	44	0,00000	00000	37475	06410
45	0,00000	00000	00987	05304	45	0,00000	00000	11303	66153
46	0,00000	00000	00270	91581	46	0,00000	00000	03338	45206
47	0,00000	00000	00072	83530	47	0,00000	00000	00965	83647
48	0,00000	00000	00019	18850	48	0,00000	00000	00273	82359
49	0,00000	00000	00004	95567	49	0,00000	00000	00076	10562
50	0,00000	00000	00001	25514	50	0,00000	00000	00020	74459
51	0,00000	00000	00000	31187	51	0,00000	00000	00005	54745
52	0,00000	00000	00000	07605	52	0,00000	00000	00001	45591
53	0,00000	00000	00000	01820	53	0,00000	00000	00000	37512
54	0,00000	00000	00000	00428	54	0,00000	00000	00000	09492
55	0,00000	00000	00000	00099	55	0,00000	00000	00000	02359
56	0,00000	00000	00000	00022	56	0,00000	00000	00000	00576
57	0,00000	00000	00000	00005	57	0,00000	00000	00000	00138
58	0,00000	00000	00000	00001	58	0,00000	00000	00000	00033
					59	0,00000	00000	00000	00008
					60	0,00000	00000	00000	00002

n	I_n (15)				n	I_n (20)			
0	0,99999	96940	97679	49817	0	0,99999	99979	38846	37756
1	0,99999	51055	62871	97079	1	0,99999	99567	15773	92879
2	0,99996	06915	51815	51539	2	0,99999	95444	85049	44108
3	0,99978	86214	96533	23838	3	0,99999	67962	80219	52300
4	0,99914	33587	89224	69961	4	0,99998	30552	56069	93262
5	0,99720	75706	67299	08329	5	0,99992	80911	59471	57107
6	0,99236	81003	62485	04250	6	0,99974	48775	04143	69927
7	0,98199	78068	52169	24080	7	0,99922	14099	17492	63696
8	0,96255	35065	20327	11262	8	0,99791	27409	50864	98120
9	0,93014	63393	00590	23231	9	0,99500	45876	91692	41283
10	0,88153	55884	70984	91185	10	0,98918	82811	73347	27611
11	0,81524	82009	76068	56576	11	0,97861	31784	12719	75478
12	0,73238	89666	07423	13316	12	0,96038	80071	45007	21924
13	0,63678	21577	20524	55708	13	0,93387	23590	40834	08764
14	0,53434	62910	55990	36842	14	0,89513	57188	92015	32822

(Continuación) *(Continuación)*

n	I_n (15)	n	I_n (20)
15	0,43191 04243 91456 17976	15	0,84348 68653 60256 98231
16	0,33587 67993 93455 37789	16	0,77892 57984 45559 04994
17	0,25114 12479 24631 14095	17	0,70297 16020 75326 18832
18	0,18052 82883 67277 61016	18	0,61857 80505 52845 23096
19	0,12478 12150 32524 82270	19	0,52974 27331 60760 01269
20	0,08297 09100 31460 23210	20	0,44090 74157 68674 79442
21	0,05310 64064 59271 23882	21	0,35630 23515 85736 49130
22	0,03274 42449 32778 74340	22	0,27938 86568 73974 39756
23	0,01946 45743 72022 76812	23	0,21250 71832 11572 57692
24	0,01116 47802 71550 28358	24	0,15677 26218 26237 72638
25	0,00618 49038 11266 79285	25	0,11218 49727 17969 84595
26	0,00331 18981 61103 24051	26	0,07788 67810 96225 32254
27	0,00171 57839 11012 37809	27	0,05248 07132 28266 41632
28	0,00086 07227 05606 55894	28	0,03433 35218 94010 05473
29	0,00041 84496 68327 68697	29	0,02181 82175 25557 39156
30	0,00019 73131 49688 25098	30	0,01347 46812 79922 28278
31	0,00009 03116 08411 10454	31	0,00809 17546 69835 11583
32	0,00004 01546 35937 44214	32	0,00472 74255 38530 63648
33	0,00001 73560 12085 77742	33	0,00268 84381 86224 89142
34	0,00000 72977 95680 63121	34	0,00148 90338 61339 15904
35	0,00000 29871 31506 99713	35	0,00080 36599 61494 45482
36	0,00000 11910 21434 64959	36	0,00042 28966 83662 95247
37	0,00000 04628 68702 61681	37	0,00021 70786 95694 57283
38	0,00000 01754 39992 60386	38	0,00010 87534 38869 10985
39	0,00000 00648 90488 75273	39	0,00005 32020 25112 46218
40	0,00000 00234 34424 80856	40	0,00002 54263 18234 13834
41	0,00000 00082 67572 14606	41	0,00001 18771 92927 63890
42	0,00000 00028 50839 05231	42	0,00000 54252 28495 97251
43	0,00000 00009 61280 99635	43	0,00000 24243 14806 82534
44	0,00000 00003 17113 47727	44	0,00000 10602 63129 94027
45	0,00000 00001 02390 97091	45	0,00000 04540 17940 21357
46	0,00000 00000 32372 76231	46	0,00000 01904 33075 11501
47	0,00000 00000 10026 52553	47	0,00000 00782 69302 73264
48	0,00000 00000 03043 32653	48	0,00000 00315 34397 57332
49	0,00000 00000 00905 61255	49	0,00000 00124 58926 07972
50	0,00000 00000 00264 29836	50	0,00000 00048 28737 48228
51	0,00000 00000 00075 67654	51	0,00000 00018 36506 65975
52	0,00000 00000 00021 26640	52	0,00000 00006 85648 65109
53	0,00000 00000 00005 86730	53	0,00000 00002 51362 61009
54	0,00000 00000 00001 58978	54	0,00000 00000 90515 92823
55	0,00000 00000 00000 42318	55	0,00000 00000 32026 22574
56	0,00000 00000 00000 11070	56	0,00000 00000 11137 04628
57	0,00000 00000 00000 02846	57	0,00000 00000 03807 50962
58	0,00000 00000 00000 00720	58	0,00000 00000 01280 03319
59	0,00000 00000 00000 00179	59	0,00000 00000 00423 32847
60	0,00000 00000 00000 00044	60	0,00000 00000 00137 74356
61	0,00000 00000 00000 00011	61	0,00000 00000 00044 10917
62	0,00000 00000 00000 00002	62	0,00000 00000 00013 90452
63	0,00000 00000 00000 00001	63	0,00000 00000 00004 31575

(Continuación)

n	I_n (20)
64	0,00000 00000 00001 31925
65	0,00000 00000 00000 39726
66	0,00000 00000 00000 11786
67	0,00000 00000 00000 03446
68	0,00000 00000 00000 00993
69	0,00000 00000 00000 00282
70	0,00000 00000 00000 00079
71	0,00000 00000 00000 00022
72	0,00000 00000 00000 00006
73	0,00000 00000 00000 00002

n	I_n (25)	n	I_n (30)
0	0,99999 99999 86112 05614	0	0,99999 99999 99906 42377
1	0,99999 99996 38913 45951	1	0,99999 99999 97099 13688
2	0,99999 99952 98931 00171	2	0,99999 99999 54989 83352
3	0,99999 99591 32410 52003	3	0,99999 99995 33896 79992
4	0,99999 97330 91657 50955	4	0,99999 99963 75699 04794
5	0,99999 86028 87892 45714	5	0,99999 99774 26512 53604
6	0,99999 38937 05538 07210	6	0,99999 98826 80579 97653
7	0,99997 70751 97129 55408	7	0,99999 94766 26583 29293
8	0,99992 45173 58352 93529	8	0,99999 79539 24095 72943
9	0,99977 85233 61751 21642	9	0,99999 28782 49137 18442
10	0,99941 35383 70246 91924	10	0,99997 76512 24261 54941
11	0,99858 40270 25918 97112	11	0,99993 61229 74600 72664
12	0,99685 58783 91902 41252	12	0,99983 23023 50448 66971
13	0,99353 25156 34178 26138	13	0,99959 27162 94713 15372
14	0,98759 79392 81099 42005	14	0,99907 93176 03851 33374
15	0,97770 69786 92634 68449	15	0,99805 25202 22127 69378
16	0,96225 23527 73158 53519	16	0,99612 72751 31395 86886
17	0,93952 49617 15105 37446	17	0,99272 97837 94810 29547
18	0,90795 91408 01142 65122	18	0,98706 72982 33834 33982
19	0,86642 51659 14349 59432	19	0,97812 65315 58609 14668
20	0,81450 76973 05858 27320	20	0,96471 53815 45771 35699
21	0,75270 11870 57654 31948	21	0,94555 65958 13145 94313
22	0,68246 65163 21058 91753	22	0,91943 09789 05020 37878
23	0,60612 44829 11716 08932	23	0,88535 40872 85726 16441
24	0,52660 15314 43650 64328	24	0,84275 79727 61608 39646
25	0,44707 85799 75585 19723	25	0,79164 26353 32667 07491
26	0,37061 42035 63983 80679	26	0,73266 33998 37734 78081
27	0,29981 38550 34723 26010	27	0,66713 09159 54476 67626
28	0,23659 92581 33597 77198	28	0,59691 75403 65271 56424
29	0,18210 39159 77455 10980	29	0,52428 30138 93680 06904
30	0,13669 11308 47336 22466	30	0,45164 84874 22088 57385
31	0,10006 79170 32724 22051	31	0,38135 70101 91516 15915

(*Continuación*) (*Continuación*)

n	I_n (25)	n	I_n (30)
32	0,07145 60312 40058 59227	32	0,31545 87502 87854 52036
33	0,04978 03601 85008 87390	33	0,25555 12412 84525 75783
34	0,03384 23667 62178 19863	34	0,20269 16745 16882 73207
35	0,02245 80857 45870 57344	35	0,15738 34744 30331 56713
36	0,01455 23350 40101 38928	36	0,11962 66410 24872 26301
37	0,00921 06115 90257 34593	37	0,08901 29923 17743 09751
38	0,00569 63198 46938 89636	38	0,06484 43222 85799 01949
39	0,00344 35687 29427 06971	39	0,04625 30376 45842 03639
40	0,00203 55992 80982 17805	40	0,03230 95741 65874 29907
41	0,00117 70813 24613 34167	41	0,02210 70399 12239 36932
42	0,00066 60587 31536 65336	42	0,01481 95154 45357 27664
43	0,00036 89525 72771 13689	43	0,00973 51960 49858 14222
44	0,00020 01422 55290 72981	44	0,00626 86146 43836 00511
45	0,00010 63587 45579 39254	45	0,00395 75603 73154 58037
46	0,00005 53894 46823 23098	46	0,00245 03510 66188 43380
47	0,00002 82781 17697 61313	47	0,00148 83025 72380 25514
48	0,00001 41576 33778 02050	48	0,00088 70222 63750 14347
49	0,00000 69533 05247 61610	49	0,00051 88914 62548 03429
50	0,00000 33511 40982 41390	50	0,00029 80129 81826 76878
51	0,00000 15853 74185 74615	51	0,00016 80844 63755 43613
52	0,00000 07364 47841 19435	52	0,00009 31257 03329 66729
53	0,00000 03360 10886 21709	53	0,00005 06962 16296 21323
54	0,00000 01506 23407 06094	54	0,00002 71242 79055 40542
55	0,00000 00663 56371 08088	55	0,00001 42668 58742 23753
56	0,00000 00287 37158 58978	56	0,00000 73789 55003 04044
57	0,00000 00122 37503 98842	57	0,00000 37537 42508 72618
58	0,00000 00051 25583 90163	58	0,00000 18786 32597 87398
59	0,00000 00021 12058 44112	59	0,00000 09251 86880 49151
60	0,00000 00008 56422 83258	60	0,00000 04484 64021 80027
61	0,00000 00003 41818 07498	61	0,00000 02140 10156 87015
62	0,00000 00001 34316 15659	62	0,00000 01005 64738 35558
63	0,00000 00000 51974 12549	63	0,00000 00465 43110 49150
64	0,00000 00000 19809 26958	64	0,00000 00212 20472 43021
65	0,00000 00000 07438 17116	65	0,00000 00095 33101 01731
66	0,00000 00000 02752 14903	66	0,00000 00042 20659 46599
67	0,00000 00000 01003 63331	67	0,00000 00018 41954 29375
68	0,00000 00000 00360 79665	68	0,00000 00007 92525 54130
69	0,00000 00000 00127 88482	69	0,00000 00003 36252 17067
70	0,00000 00000 00044 70202	70	0,00000 00001 40706 44039
71	0,00000 00000 00015 41230	71	0,00000 00000 58081 48394
72	0,00000 00000 00005 24226	72	0,00000 00000 23654 41875
73	0,00000 00000 00001 75937	73	0,00000 00000 09506 30977
74	0,00000 00000 00000 58272	74	0,00000 00000 03770 58991
75	0,00000 00000 00000 19050	75	0,00000 00000 01476 30197
76	0,00000 00000 00000 06148	76	0,00000 00000 00570 66199
77	0,00000 00000 00000 01959	77	0,00000 00000 00217 81525
78	0,00000 00000 00000 00616	78	0,00000 00000 00082 10496
79	0,00000 00000 00000 00192	79	0,00000 00000 00030 56941
80	0,00000 00000 00000 00059	80	0,00000 00000 00011 24358

(*Continuación*) (*Continuación*)

n	I_n (25)	n	I_n (30)
81	0,00000 00000 00000 00018	81	0,00000 00000 00004 08586
82	0,00000 00000 00000 00005	82	0,00000 00000 00001 46719
83	0,00000 00000 00000 00002	83	0,00000 00000 00000 52068
		84	0,00000 00000 00000 18264
		85	0,00000 00000 00000 06333
		86	0,00000 00000 00000 02171
		87	0,00000 00000 00000 00736
		88	0,00000 00000 00000 00247
		89	0,00000 00000 00000 00082
		90	0,00000 00000 00000 00027
		91	0,00000 00000 00000 00009
		92	0,00000 00000 00000 00003
		93	0,00000 00000 00000 00001

OBSERVATORIO ASTRONOMICO DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

INDICE DEL TOMO XXV

Serie Astronómica

ESTE LIBRO SE TERMINÓ
DE IMPRIMIR EL DÍA 16
DE SETIEMBRE DEL AÑO
MIL NOVECIENTOS SE-
SENTA Y TRES, EN LA
IMPRENTA LÓPEZ,
PERÚ 666, BUENOS AIRES,
REPÚBLICA ARGENTINA.