TRIGONOMETRIA

N° 162

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

PUBLICACIONES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS

DIRECTOR : INGENIERO RODOLFO MARTÍNEZ DE VEDIA

SERIE TERCERA

30

TEXTOS

TRIGONOMETRIA

POR

NUMA TAPIA

Ingeniero Mecánico y Electricista. Agrimensor Nacional
Profesor de Trigonometría y Algebra en la Facultad de Ciencias Fisicomatemáticas
de la Universidad Nacional de La Plata
Jefe de Departamento y Profesor de Astrofísica en el Observatorio Astronómico
de la Universidad Nacional de La Plata
Miembro de la Comisión para la Medición de un Arco de Meridiano

LA PLATA (REP. ARGENTINA)

FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS

JULIO DE 1945

A mi santa Madre, que siempre me alentó en el deseo de mejorarme, y a mis estimados alumnos, que con su dedicación al trabajo me estimularon en el estudio.

El presente libro tiene por objeto solucionar, en parte, las necesidades de los alumnos del curso que dicto en la Facultad de Ciencias Físicomatemáticas de la Universidad de La Plata.

He tratado de hacer un curso práctico, y por ello pongo en el texto una serie de problemas y ejercicios para que los alumnos se interesen en el vasto e interesante campo de analizar y discutir los problemas.

Me han prestado su valiosa cooperación, el ingeniero Héctor Pallaro en la tarea de revisar el manuscrito, y el señor Carlos Lainz en la confección de los dibujos, a quienes quedo reconocido.

Debo agradecer, también, al ingeniero Rodolfo Martínez de Vedia sus gestiones para la aparición de esta obra y a la Imprenta Coni, que tan buena disposición ha tenido en todo momento para su mejor presentación.

NUMA TAPIA.

La Plata, mayo de 1945.

PRIMERA PARTE

TEORÍA DE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS

CAPÍTULO I

MEDIDA DE SEGMENTOS, ÁNGULOS Y ARCOS

1. Un segmento de recta AB, puede considerarse como engendrado por el movimiento de un punto que recorre la recta sostén del segmento, partiendo del extremo A hasta llegar al otro extremo B o también como generado por un móvil que partiendo del punto B y recorriendo la recta a la que pertenece el segmento, llega al punto A. Si consideramos que en el primer caso el móvil genera un segmento positivo, en el segundo el segmento debe considerarse como negativo.

2. Un ángulo puede considerarse engendrado por la rotación de una semi-recta alrededor de uno de sus extremos, que partiendo de la posición del primer lado, llega al segundo girando en un cierto sentido, o también girando en sentido contrario y partiendo de la posición del segundo lado del ángulo llega al primero.

3. Un arco de círculo puede también suponerse generado por el movimiento de un móvil sobre la circunferencia a la que pertenece el arco, moviéndose en dos sentidos, de un extremo al otro o de éste al primero.

Es evidente que los *segmentos de recta,* los *ángulos* y los *arcos* pueden considerarse como magnitudes de dos sentidos, que si consideramos a un sentido como positivo, el sentido contrario debe ser considerado como negativo y que por lo tanto deben ser medidos por números de sentido contrario. Desde luego que la adopción del sentido positivo es arbitraria, pero adoptada ésta, debe considerarse el dè sentido contrario como negativo.

Las consideraciones sobre medidas de segmentos de recta, ángulos y arcos corresponden a la Geometría.

Asimismo recordaremos aquí algunas cosas fundamentales.

4. Se llama *longitud de un segmento de recta, el número aritmético* que expresa la relación de ese segmento, al segmento tomado por unidad. Así en la figura 1, si u representa la unidad, el metro por ejemplo y el segmento u cabe cinco veces en el segmento AB, diremos que AB tiene 5 metros.

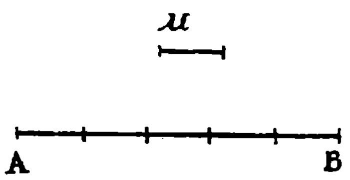


Figura 1

Y debemos tener en cuenta, que si fijamos como sentido positivo, el sentido A hacia B, o si el sentido en que el móvil que engendra el segmento AB lo consideramos como positivo cuando el móvil se mueve de izquierda a derecha, el sentido contrario será negativo, es decir, cuando el móvil se mueve de derecha a izquierda. El punto desde el cual contamos el segmento, o el punto de donde arranca el móvil que lo engendra se llama el *origen* del segmento.

5. La *medida de un ángulo,* podemos considerarla como la relación de ese ángulo a otro tomado como unidad, que por ejemplo puede ser el ángulo recto.

a) Es sabido por la geometría elemental que en la práctica se divide el ángulo recto en 90 partes iguales y cada una de ellas se llama un *grado sexagesimal.* Que cada grado se divide a su vez en 60 partes iguales y a cada parte se le llama un *minuto sexagesimal.* Que cada minuto se divide en 60 partes y cada parte es un *segundo sexagesimal* y que cada segundo se divide siguiendo la división decimal. Así expresamos un ángulo por ejemplo:

$$\alpha = 36°27'43''84.$$

Cuando se expresa así un ángulo, por un número considerado complejo aritmético, se dice que se sigue la *división sexagesimal.*

b) Se puede también seguir *la división centesimal* dividiendo el cuadrante en cien grados, cada división es un *grado centesimal;* luego se divide cada grado centesimal en cien partes y cada parte es un *minuto centesimal,* luego cada parte en cien partes iguales y cada una es un *segundo centesimal* y de ahí en adelante se sigue la división decimal para las fracciones de segundo. Un ángulo se expresaría así:

$$\alpha = 85°47'39''52$$

o también:

$$\alpha = 85°47\ 39\ 52.$$

Conociendo el ángulo expresado en una cualquiera de estas dos unidades, es fácil obtener la expresión en la otra unidad, ya que se trata de un simple problema de proporciones de la aritmética.

Por otra parte, no usaremos la división centesimal en el presente libro.

Con respecto al signo, en general consideramos como sentido positivo cuando la rotación de la semi-recta se efectúa en el sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj y negativo el sentido del movimiento de esas agujas del reloj.

6. *Medir un arco de círculo* es compararlo con otro arco del mismo círculo que se toma como unidad. El número que mide un arco depende, pues, de la unidad de arco elegida.

7. *Sistema.* Se emplean en trigonometría tres unidades de arco diferentes, lo que da lugar a tres sistemas de medidas.

I. *Sistema sexagesimal.* — En primer lugar, se toma como unidad el grado sexagesimal, es decir, que se toma la circunferencia a la que pertenece el arco y se divide en 360 partes iguales. Cada parte es un grado. Y en la misma forma que se hace para los ángulos, cada grado se divide en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos, continuándose luego en fracciones decimales de segundo. Se puede expresar así un arco:

$$\alpha = 36°27'43''84.$$

Es el método de medida que más emplearemos en este texto.

II. *Sistema centesimal.* — Se puede también usar la división centesimal, para lo cual dividimos la circunferencia en 400 partes iguales y cada parte es un grado centesimal, cada grado se divide en cien partes y se tiene un minuto centesimal, y cada minuto se divide en cien partes y cada parte es un segundo centesimal, continuándose luego en fracciones decimales de segundo, como se hizo con los ángulos. Un arco expresado en grados centesimales sería:

$$\alpha = 85°47\ 39\ 52.$$

Este método, que es empleado muchas veces, será muy poco usado en este volumen.

III. — En el tercer sistema, la unidad adoptada es el *radián, siendo un radián el arco cuya longitud es igual al radio del círculo.*

Se usa también esta unidad para medir ángulos, llamándose radián el ángulo que en una circunferencia de radio cualquiera, cuyo centro está en el vértice del ángulo, abarca entre sus lados un arco de un radián o un arco de longitud igual al radio de la circunferencia.

Correspondencia entre los diferentes sistemas. — Se nos presenta entonces el siguiente problema; conociendo la medida de un arco de círculo en un sistema de medidas, calcular su medida en otro sistema.

Consideremos un arco, cuya medida en grados sexagesimales llamaremos α, su medida en grados centesimales α_1 y su medida en radianes α_2.

Tengamos en cuenta, también, que la circunferencia entera tiene 360 grados sexagesimales y 2π radianes ($\pi = 3.14159...$).

Podemos escribir:

$$\frac{\alpha}{360} = \frac{\alpha_1}{400} = \frac{\alpha_2}{2\pi}. \tag{1}$$

Esta importante igualdad resuelve el problema planteado y así se tiene:

$$\alpha = 0,9\alpha_1, \qquad \alpha = 180\frac{\alpha_2}{\pi} \tag{2}$$

$$\alpha_1 = \frac{10\alpha}{9}, \qquad \alpha_1 = 200\frac{\alpha_2}{\pi} \tag{3}$$

$$\alpha_2 = \frac{\pi\alpha}{180}, \qquad \alpha_2 = \frac{\pi\alpha_1}{200}. \tag{4}$$

Aun a riesgo de ser cansador con estas cosas elementales y conocidas por quienes se inician en el estudio de Trigonometría, no está demás insistir un poco sobre ellas.

Las fórmulas que anteceden suponen que α está medido en grados sexagesimales y fracciones decimales de grado. Cuando se ha calculado α, por la fórmula (1), se ha obtenido su valor en fracciones decimales de grado sexagesimal y para tener a α expresado en grados, minutos y segundos, hay que multiplicar las fracciones decimales de grado por 60 y se obtienen minutos y fracciones decimales de minuto, luego las fracciones decimales de minuto por 60 y se obtienen segundos y fracciones decimales de segundos sexagesimales.

Cuando se quiere calcular α_2 por la fórmula (4), el arco α debe estar expresado en grados sexagesimales y fracciones de grado sexagesimal. Si el arco α está expresado en grados, minutos y segundos sexagesimales y sea

$$D^\circ M' S''$$

siendo D el número de grados sexagesimales, M el número de minutos y S el número de segundos, se tiene evidentemente α expresado en grados y fracciones decimales de grado sexagesimal por la fórmula:

$$\alpha = \mathrm{D} + \frac{\mathrm{M}}{60} + \frac{\mathrm{S}}{3600}.$$

Y en ese caso de fórmulas (4) nos da:

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{180}\left[\mathrm{D} + \frac{\mathrm{M}}{60} + \frac{\mathrm{S}}{3600}\right].$$

Para la aplicación de las fórmulas 2, 3 y 4 es necesario conocer los valores de π y $\frac{1}{\pi}$, que son:

$$\pi = 3.14159265358979$$

$$\frac{1}{\pi} = 0.31830988618379.$$

Que en los cálculos prácticos basta con tomar cuatro decimales:

$$\pi = 3.1416$$

$$\frac{1}{\pi} = 0.3183.$$

Observación. — Todo esto que hemos expresado para los arcos se aplica también para los ángulos.

Hay que observar que tanto los arcos como los ángulos pueden adquirir valores mayores que una circunferencia o que cuatro rectos, es decir, que el número que mide un ángulo o un arco puede variar de $-\infty$ a $+\infty$.

8. *Círculo orientado. Arcos dirigidos.* — Se dice que un círculo es orientado, cuando se ha determinado sobre él, el sentido positivo para medir los arcos. Tomaremos en general como sentido positivo el sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj. Se toma sobre él un punto a partir del cual se miden los arcos; es el origen de los arcos.

9. *Círculo trigonométrico o goniométrico* es un círculo orientado de radio igual a 1.

10. Dos arcos o dos ángulos se llaman ***suplementarios*** cuando su suma algebraica vale 180° o π; y ***complementarios*** cuando su suma vale 90° o $\frac{\pi}{2}$.

11. Se dice que un arco o un ángulo pertenecen al primer, segundo, tercer o cuarto cuadrante cuando su valor algebraico está comprendido entre 0° y 90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$, entre 90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ y 180° (π) entre 180° (π) y 270° $\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, entre 270° $\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ y 360° (2π) respectivamente.

CAPÍTULO II

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

12. Supongamos un círculo orientado de radio ρ (fig. 2) y sea OA el origen de los ángulos, y consideremos un ángulo MOA. La distancia ρ de M al vértice O del ángulo la llamaremos *radio vector* del punto M; *ordenada* MP del punto M, la distancia del punto M al otro lado OA del ángulo; y *abscisa* OP del punto M a la distancia centro del círculo al pie P de la ordenada MP. Supongamos siempre el radio vector ρ, medido por un número positivo. La ordenada MP la consideramos positiva si el punto M está arriba del diámetro que pasa por A y negativa en caso contrario. La abscisa OP la consideramos positiva si el pie P de la ordenada cae a la derecha del centro O, negativa si cae a la izquierda.

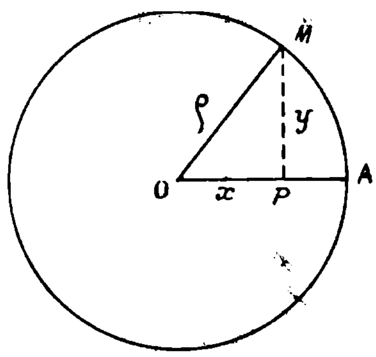


Figura 2

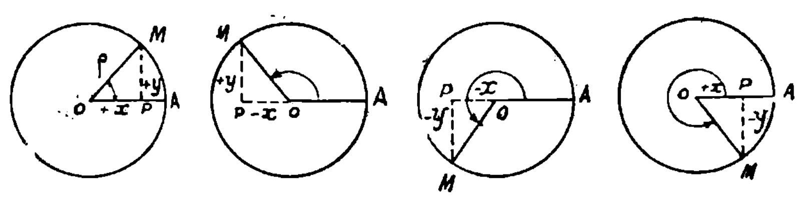


Figura 3

Llamaremos ρ al radio vector, x a la abscisa e y a la ordenada.

De acuerdo a la convención, si el ángulo es menor que un recto $\left(90° \text{ ó } \frac{\pi}{2}\right)$ la abscisa x y la ordenada y son positivas (fig. 3-I). Si el ángulo pertenece al segundo cuadrante (comprendido entre 90 y 180°) la abscisa x es negativa y la ordenada y positiva (fig. 3-II). Si el ángulo pertenece al tercer cuadrante (comprendido entre 180 y 270°) tanto la abscisa x como la ordenada y son negativas (fig. 3-III) y si el ángulo pertenece al cuarto cuadrante (comprendido entre 270° y 360°) la abscisa x es positiva y la ordenada y negativa (fig. 3-IV).

El caso en que el ángulo valga 90° es un caso particular y la abscisa vale cero y la ordenada vale ρ. Si el ángulo vale 270°, la abscisa vale cero y la ordenada $-\rho$.

Resulta así que el *eje de las abscisas* es la recta que contiene al diámetro que pasa por el origen de los ángulos y de los arcos y *eje de las ordenadas*, la recta que contiene al diámetro perpendicular al eje de las abscisas.

13. TEOREMA: *La relación de los tres segmentos: radio vector, abscisa y ordenada, tomados dos á dos y correspondientes a un ángulo α, que suponemos variable, es una función de α.* — En primer lugar es evidente que si el ángulo es constante, esas relaciones también son constantes y de un valor determinado e independiente del radio vector ρ. En efecto, para α constante y dos valores de ρ y ρ' se tienen dos puntos M y M′ de abscisas x y x' y ordenadas y e y' (fig. 4). Y es evidente, por la semejanza de los triángulos MOP y M′OP′ que esas relaciones son constantes.

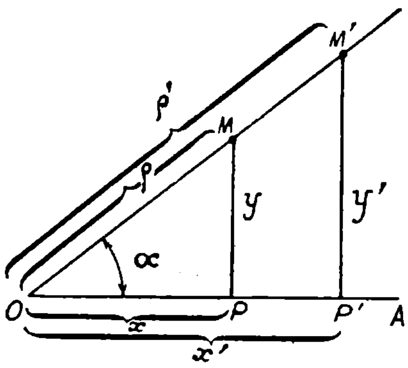


Figura 4

Supongamos (fig. 5) dos ángulos desiguales α y α' dados por AOB y AOB′. Tomemos dos radios vectores OM y OM′ y tracemos sus abscisas x y x' y sus respectivas ordenadas y e y'.

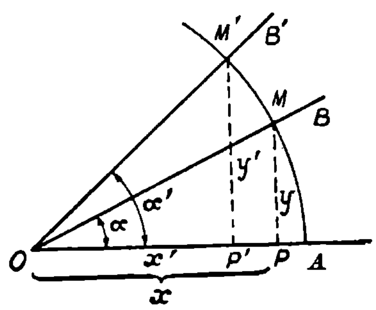


Figura 5

Los triángulos MOP y MOP′ no son semejantes y por lo tanto sus lados no son proporcionales y entonces las relaciones entre ρ, x e y no han permanecido constantes, antes al contrario han variado, como se quería demostrar.

14. Si consideramos un ángulo variable α (fig. 6), medido por el ángulo MOA o por el arco AM y sea ρ el radio vector de M, x su abscisa e y su ordenada, las relaciones:

1° ordenada y al radio vector ρ. . . $\dfrac{y}{\rho}$

2° abscisa x al radio vector ρ. . $\frac{x}{\rho}$

3° ordenada y a la abscisa x. . . . . $\frac{y}{x}$

4° abscisa x a la ordenada y. . $\frac{x}{y}$

5° radio vector x a la abscisa ρ. $\frac{\rho}{x}$

6° radio vector ρ a la ordenada y. $\frac{\rho}{y}$

son las seis *funciones trigonométricas* o las seis *funciones goniométricas* del ángulo α y se llaman respectivamente ***seno, coseno, tangente, cotangente, secante*** y ***cosecante***, que se indican en forma abreviada. sen, cos, tg, ctg, sec y cosec.

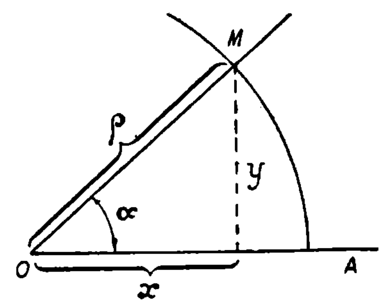


Figura 6

Tenemos así

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{\rho}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{\rho}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}, \quad \sec\alpha = \frac{\rho}{x}, \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{\rho}{y}.$$

Hemos dado así una definición de las funciones trigonométricas. Se acostumbra a llamar al

	sen, tg y sec.	las líneas
y al		
	cos, ctg y cosec .	las colíneas.

Nosotros llamaremos a todas *las líneas trigonométricas.*

15. Es claro que pueden darse otras definiciones de estas mismas funciones.

Daremos otra, solamente a los efectos de aclarar conceptos.

Tomemos el círculo orientado de centro O y radio $\rho = 1$, es decir el círculo trigonométrico de centro O y sea A el origen de los arcos. Sea M el móvil que origina los arcos que suponemos se mueve en el sentido positivo (fig. 7). El arco AM mide el ángulo α, puesto que

$$\text{arco} = \text{radio} \times \text{ángulo} \quad \text{y} \quad \rho = 1,$$

resulta que el arco es igual al ángulo medido en radianes. Diremos indistintamente el arco AM o el ángulo AM o el ángulo α.

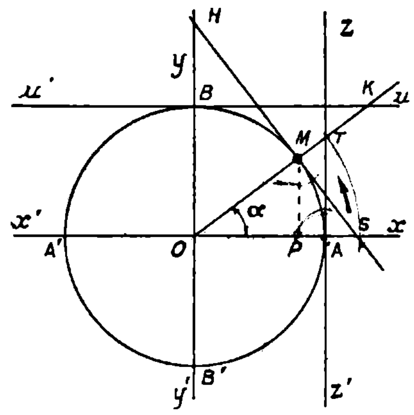


Figura 7

Sea $x'x$ la recta que pasa por el origen de los arcos.

Suponemos que los segmentos medidos sobre la semi-recta ox sean positivos. Los medidos sobre la semi-recta ox' serán negativos. Las ordenadas de los puntos arriba del eje xx' las consideramos positivas, las medidas debajo del mismo eje las consideramos negativas. Tracemos la tangente geométrica zz' en el origen de los arcos al círculo trigonométrico. Las magnitudes medidas sobre la semi-recta Az las consideramos positivas y las medidas sobre la semi-recta Az' como negativas.

Consideremos ahora el arco AB igual a $\frac{\pi}{2}$ y en el punto B tracemos la tangente $u'u$ al círculo trigonométrico. Las magnitudes medidas sobre la semi-recta Bu las consideramos positivas, las medidas sobre la semi-recta Bu' como negativas. Trazando la normal yy' al eje $x'x$ que pasa por B, las magnitudes medidas sobre la semi-recta Oy son positivas y las medidas sobre Oy' negativas.

Tracemos la tangente al círculo en el punto M que corta a xx' en S y a yy' en H.

Llevemos el radio OM y prolonguemos. Corta en T a $z'z$ y en K a $u'u$ y bajemos de M la normal MP al eje $x'x$.

Definimos ahora las líneas diciendo que en el *círculo trigonométrico* (9)

$$\text{sen}\ \alpha = \text{MP}, \quad \cos\alpha = \text{OP}, \quad \text{tg}\ \alpha = \text{AT},$$

$$\text{ctg}\ \alpha = \text{BK}, \quad \sec\alpha = \text{OS}, \quad \text{cosec}\ \alpha = \text{OH}$$

es decir que:

Seno de un arco es la perpendicular bajada desde el extremo libre del arco al radio que pasa por el origen de los arcos en el círculo trigonométrico. Es positivo en el 1° y 2° cuadrante. Negativo en el 3° y 4°.

Coseno de un arco es la distancia desde el centro del círculo trigonométrico al pie de la perpendicular bajada desde el extremo libre del arco al radio que pasa por el origen. Es positivo en el 1° y 4° cuadrante y negativo en el 2° y 3°.

Tangente de un arco es la parte de tangente geométrica en el origen de los arcos, comprendida entre ese origen y la intersección con la prolongación del radio que pasa por el extremo libre del arco. Positiva en el 1^er^ y 3^er^ cuadrante, negativa en el 2° y 4°.

Cotangente de un arco es la parte de tangente geométrica en el punto a un cuadrante del origen comprendida entre este punto y la prolongación del radio que pasa por el extremo libre del arco. Es positiva en el 1^er^ y 3^er^ cuadrante y negativa en el 2° y 4°.

Secante de un arco es el segmento de la recta que une el centro del círculo trigonométrico con el origen de los arcos, comprendido entre el centro del círculo y la intersección con la tangente al círculo en el extremo libre del arco. Es positiva en el 1° y 4° cuadrante, negativa en el 2° y 3°.

Cosecante de un arco es la parte de la recta que une el centro del círculo trigonométrico con el punto situado a un cuadrante del origen, comprendida entre el centro del círculo y su intersección con la tangente geométrica en el extremo libre del arco.

Es fácil ver que esta definición, está en correspondencia con la anterior. En efecto, según la definición anterior, teniendo en cuenta que el radio vector del punto M vale 1 (fig. 7), se tiene:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{MP}{1} = MP, \qquad \cos \alpha = \frac{OP}{1} = OP, \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{MP}{OP} = \frac{AT}{OA} = AT,$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{OP}{MP} = \frac{BK}{OB} = BK, \qquad \sec \alpha = \frac{OM}{OP} = \frac{OS}{OM} = OS,$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{OM}{MP} = \frac{OH}{OM} = OH.$$

Todas estas relaciones se obtienen fácilmente comparando los triángulos semejantes OMP, OTA, OSM, OKB y OHM.

CAPÍTULO III

VARIACIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

16. VARIACIÓN DEL SENO α.—Veremos en qué forma varían las funciones trigonométricas de un ángulo α, con el variar del argumento α. Para ello daremos valores a la variable α y veremos los que toma *sen* α, calculando sen α para algunos valores particulares de α.

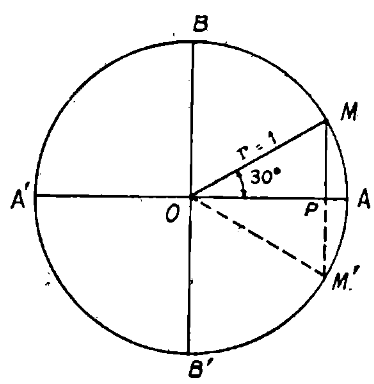


Figura 8

Sea (fig. 8) un círculo trigonométrico, vale decir orientado y de radio uno. Sea A el origen de los arcos.

Un ángulo cualquiera α está medido por el arco AM. Cuando el arco vale cero, la ordenada y del punto M también vale cero. Luego el seno de 0° vale cero. Cuando el punto M recorre el arco AB en el primer cuadrante, el arco crece desde 0° a 90° ó $\frac{\pi}{2}$ y el seno también crece. Podemos calcular algunos valores de sen α. Por ejemplo, si el ángulo vale 30°, el seno vale MP. Prolongando MP hasta M′ el triángulo OMM′ es un triángulo equilátero, cada uno de cuyos lados vale 1. Luego MP vale $\frac{1}{2}$ y el seno de 30° $\left(ó\ \frac{\pi}{6}\right)$ vale $\frac{1}{2}$

$$\text{sen } 30° = \text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}500.$$

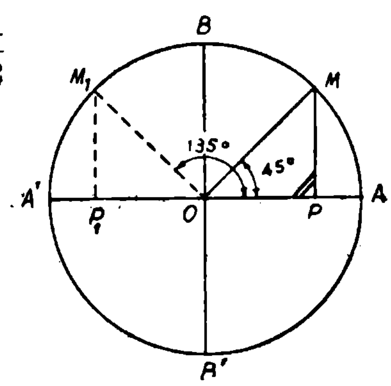


Figura 9

Para calcular el seno de 45° $\left(ó\ \frac{\pi}{4}\right)$, tenemos la figura 9. Si el ángulo MOP vale 45°, siendo el ángulo OPM de 90°, para que la suma de los ángulos interiores del triángulo MOP valga 180°, es necesario que también el ángulo OMP valga 45°. Resulta así que el triángulo OPM es isósceles y OP = MP.

Aplicando ahora a ese triángulo rectángulo el teorema de Pitágoras, se tiene:

$$\overline{OP}^2 + \overline{MP}^2 = \overline{OM}^2.$$

Pero OM vale 1 y OP = MP, luego

$$2\,\overline{MP}^2 = 1.$$

De donde resulta

$$\operatorname{sen} 45° = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = MP = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707.$$

Podemos también calcular el seno de 60° $\left(ó\ \frac{\pi}{3}\right)$, para lo cual tenemos la figura 10. Uniendo M con A el triángulo MOA es por lo menos isósceles, pues tiene el lado OM igual a OA como radios de un mismo círculo. El ángulo OMA es igual a OAM y tenemos

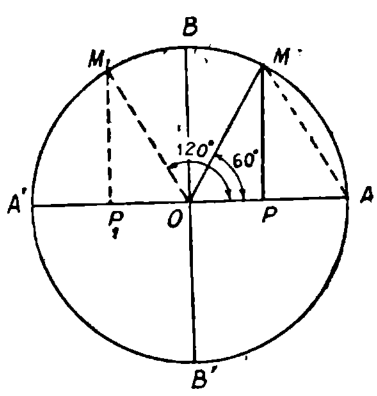


Figura 10

$$2\,\widehat{OAM} + 60° = 180°.$$

Luego los ángulos OAM y OMA valen también 60° y el triángulo OAM es un triángulo equilátero. La perpendicular MP divide al lado OA en dos partes iguales, es decir, que tenemos

$$OP = PA = \frac{1}{2}.$$

Y aplicando ahora al triángulo rectángulo OPM el teorema de Pitágoras, tenemos

$$\overline{OM}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{OP}^2.$$

Pero

$$OM = 1 \quad y \quad OP = \frac{1}{2}$$

luego

$$\overline{MP}^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Y obtenemos

$$\operatorname{sen} 60° = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = MP = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866.$$

Cuando el ángulo vale $90^\circ \left(\text{ó } \frac{\pi}{2}\right)$ la perpendicular MP se confunde con el radio BO y vale 1.

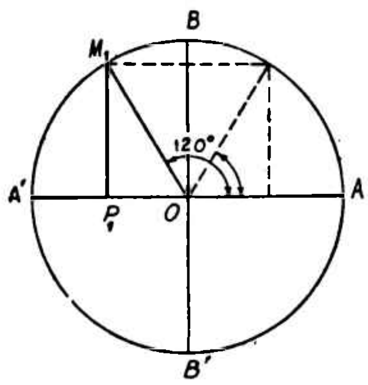


Figura 11

Se ve que si el ángulo crece en el primer cuadrante desde 0 a 90°, el seno crece desde 0 a + 1.

Si seguimos incrementando el ángulo α en el segundo cuadrante (fig. 11) con el crecer del ángulo en el segundo cuadrante, el valor del seno decrece. Es fácil ver por la figura 11, que se puede obtener cómodamente algunos valores del seno para valores particulares del ángulo α. Por ejemplo para $\alpha = 120^\circ \left(\text{ó } \frac{2\pi}{3}\right)$ el valor del seno es M_1P_1 (figs. 10 y 11) y es igual que para 60°, luego

$$\text{sen } 120^\circ = \text{sen } \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866.$$

Igualmente es cómodo comprobar que el seno de $135^\circ \left(\text{ó } \frac{3\pi}{4}\right)$ vale igual que el seno de 45°, luego tenemos

$$\text{sen } 135^\circ = \text{sen } \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707.$$

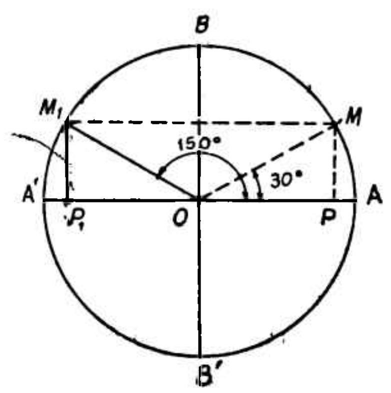


Figura 12

Si queremos el seno de 150°, se ve por la figura 12, trazando por M_1 la paralela M_1M y llevando MP, que el seno de $150^\circ \left(\text{ó } \frac{5\pi}{6}\right)$ vale lo mismo que el seno de 30°, luego

$$\text{sen } 150^\circ = \frac{5\pi}{6} = \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} \; \frac{1}{2} = \cancel{0{,}866} \; 0.500.$$

Y si el ángulo vale 180° (ó π) el punto M se confunde con A′, su ordenada vale cero,

$$\text{sen } 180^\circ = \text{sen } \pi = 0.000.$$

Se observa que si el ángulo crece en el segundo cuadrante, desde 90 a 180°, el seno decrece desde + 1 hasta cero.

Incrementemos el ángulo de modo de tomar todos los valores del tercer cuadrante. A medida que el ángulo crece, el punto M se mueve desde A′ hasta B′, la ordenada MP crece en valor absoluto, pero como es negativa, por estar debajo del eje $x'x$, el seno decrece. Y es cómodo, por simples consideraciones geométricas, análogas a las que hemos hecho para el primer cuadrante y que no vale la pena repetir, obtener los siguientes resultados:

$$\operatorname{sen} 210° = \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2} = -0{,}500$$

$$\operatorname{sen} 225° = \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}707$$

$$\operatorname{sen} 240° = \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -0{,}866$$

$$\operatorname{sen} 270° = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = \quad 1 = -1.000.$$

Mientras el ángulo crece en el tercer cuadrante desde 180° hasta 270°, el valor del seno decrece desde 0 hasta -1.

Dando ahora al argumento todos los valores del cuarto cuadrante desde 270° $\left(ó\ \frac{3\pi}{2}\right)$ hasta 360° (ó 2π), el seno, como puede verse en la figura 12, varía desde -1 hasta 0 y también se puede obtener fácilmente

$$\operatorname{sen} 300° = \operatorname{sen}\frac{10\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -0{,}866$$

$$\operatorname{sen} 315° = \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}707$$

$$\operatorname{sen} 330° = \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2} = -0{,}500$$

$$\operatorname{sen} 360° = \operatorname{sen} 2\pi = \ldots = 0{,}000.$$

Si seguimos aumentando el ángulo, de modo de tomar valores mayores que 360° ó 2π, los valores de seno repiten. Así, por ejemplo, si tomamos el ángulo de 390°, tenemos

$$\operatorname{sen} 390° = \operatorname{sen}(360 + 30°) = \operatorname{sen} 30°$$

y así sucesivamente. La función seno resulta, así, una función periódica de período igual a 360° ó 2π.

Hemos obtenido en resumen:

α	sen α	α	sen α
0°	0,000	crece	decrece
crece	crece	$210° \left(ó\ \frac{7\pi}{6}\right)$	$-\frac{1}{2} = -\ 0{,}500$
$30° \left(ó\ \frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2} = 0{,}500$	$225° \left(ó\ \frac{5\pi}{4}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} = -\ 0{,}707$
$45° \left(ó\ \frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$	$240° \left(ó\ \frac{4\pi}{3}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} = -\ 0{,}866$
$60° \left(ó\ \frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$	$270° \left(ó\ \frac{3\pi}{2}\right)$	$-\ 1.000$
$90° \left(ó\ \frac{\pi}{2}\right)$	1.000	$300° \left(ó\ \frac{10\pi}{6}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} = -\ 0{,}866$
crece	decrece		
$120° \left(ó\ \frac{2\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$	$315° \left(ó\ \frac{7\pi}{4}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} = -\ 0{,}707$
$135° \left(ó\ \frac{3\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$	$330° \left(ó\ \frac{11\pi}{6}\right)$	$-\frac{1}{2} = -\ 0{,}500$
$150° \left(ó\ \frac{5\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2} = 0{,}500$		
180° (ó π)	0,000	360° (ó 2π)	0,000

Representación gráfica. — Con estos valores construímos la curva que representa gráficamente a la función *sen* α. Llevamos sobre las abscisas o eje de la variable independiente, los valores de α y sobre

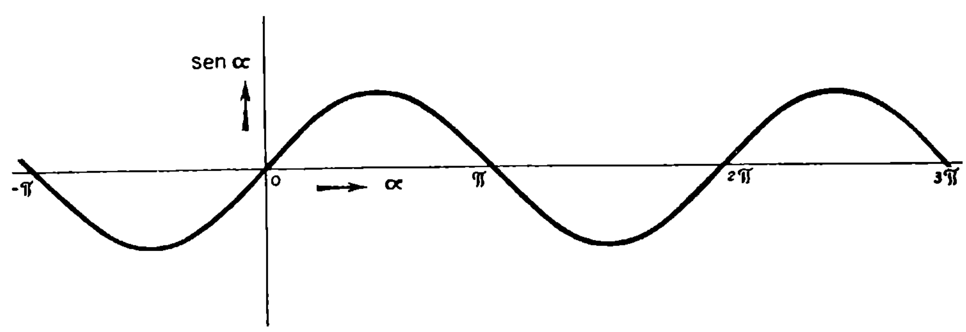


Figura 13

las ordenadas los valores de sen α y obtenemos la curva de la figura 13.

Podemos obtener gráficamente la curva que representa al seno α en función de α. Para ello (fig. 14) tomamos un círculo trigonométrico que dividimos en un número cualquiera de partes iguales, por ejemplo 16, que designaremos de 1 a 16.

Prolonguemos el diámetro A'A que pasa por el origen de los arcos y sobre esa prolongación Ax tomemos un origen O_1. Medimos sobre el eje Ox los ángulos y sobre el normal los valores del seno.

Tomamos en una escala los valores 1, 2, 3... sobre O_1x. Para encontrar el punto de la curva que corresponde al ángulo 2, por ejemplo, dado en la figura 14 por MP, proyectamos paralelamente a O_1x el punto M hasta encontrar en M_2 a la ordenada llevada por el punto 2. El punto M_2 representa a la curva.

Procediendo en la misma forma con respecto a los demás puntos se obtiene la curva de la figura 14.

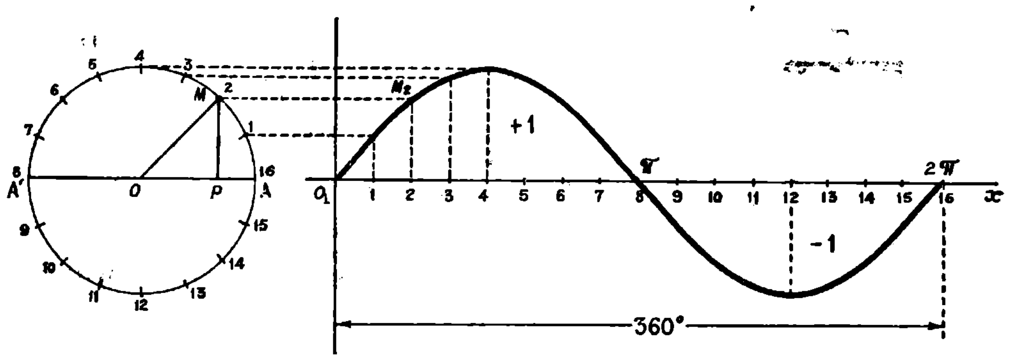


Figura 14

Se ve que la curva hace ver que la función es periódica. La curva que la representa se llama *sinusoide*.

Se ve que el valor máximo del seno es +1 y el valor mínimo − 1, es decir, que siempre se verifica para cualquier valor de α que

$$-1 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq +1$$

y no se concibe un valor del sen α mayor que + 1 o menor que − 1. Se ve también que el seno se anula para todo valor de α que sea múltiplo de π.

Además hemos visto que la función seno es una función periódica de período igual a 2π, vale decir, que aumentando el arco en un número cualquiera de circunferencias, o disminuyéndolo, el valor del sen α queda el mismo, lo que se puede expresar en la siguiente forma

$$\operatorname{sen}(2k\pi + \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$$

donde k designa un número entero cualquiera positivo o negativo. o nulo.

17. Variación del coseno. — Veamos ahora en qué forma varía $\cos \alpha$ con el variar de α. Consideremos un círculo trigonométrico y un ángulo α. Por definición $\cos \alpha = OP$. Cuando el ángulo vale 0°, el punto M coincide con A y el pie P de la perpendicular bajada desde M también coincide con A. El cos 0° es igual a OA = 1.

Cuando el ángulo crece en el primer cuadrante, o cuando el punto M se mueve desde A hasta B, el punto P se mueve desde A hasta O, el coseno decrece entonces desde +1 hasta 0. Por consideraciones elementales de geometría se podrían encontrar algunos valores para el cos α. Así, por ejemplo, se encontraría fácilmente:

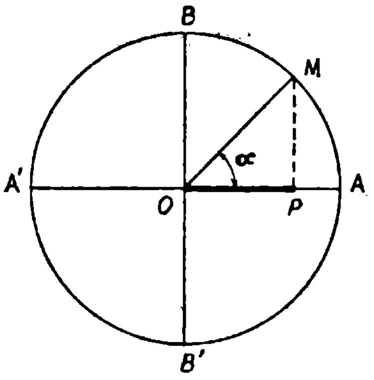


Figura 15

$$\cos 30° = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$$

$$\cos 45° = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$$

$$\cos 60° = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = 0{,}500$$

$$\cos 90° = \cos \frac{\pi}{2} = \ldots = 0{,}000.$$

Si el ángulo crece en el segundo cuadrante, aumentando de 90° hasta 180° o desde $\frac{\pi}{2}$ a π, el punto M se mueve desde B hasta A′ y el pie de la perpendicular se mueve desde O hasta A′, el coseno decrece entonces de 0 a −1, ya que en el segundo cuadrante es negativo, por caer el punto P a la izquierda de O. Se obtendría también, con consideraciones elementales, que:

$$\cos 120° = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} = -0{,}500$$

$$\cos 135° = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}707$$

$$\cos 150° = \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -0{,}866$$

$$\cos 180° = \cos \pi = \ldots = -1{,}000.$$

Mientras el ángulo crece en el tercer cuadrante desde 180° hasta 270°, el coseno crece desde −1 a 0 y se podría tener fácilmente:

$$\cos 210° = \cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -0{,}866$$

$$\cos 225^\circ = \cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}707$$

$$\cos 240^\circ = \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} = -0{,}500$$

$$\cos 270^\circ = \cos \frac{3\pi}{2} = \ldots = 0{,}000.$$

Y cuando el ángulo crece en el cuarto cuadrante desde 270° a 360°, el coseno crece desde cero hasta $+1$. Y podría obtenerse:

$$\cos 300^\circ = \cos \frac{10\pi}{6} = +\frac{1}{2} = +0{,}500$$

$$\cos 315^\circ = \cos \frac{7\pi}{4} = +\frac{\sqrt{2}}{2} = +0{,}707$$

$$\cos 330^\circ = \cos \frac{11\pi}{6} = +\frac{\sqrt{3}}{2} = +0{,}866$$

$$\cos 360^\circ = \cos 2\pi = +\ldots = +1.000.$$

Si se sigue aumentando el valor del ángulo, el coseno vuelve a retomar los mismos valores que al empezar. Resulta así el coseno una función periódica de período 360° ó 2π y podemos escribir

$$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha,$$

donde k es un número entero cualquiera, positivo o negativo.

Podemos resumir los resultados que hemos obtenido en el cuadro siguiente:

α	cos α	α	cos α
0°	1.000	180° (ó π)	-1.000
crece	decrece	crece	crece
30° $\left(ó\ \frac{\pi}{6}\right)$	0,866	210° $\left(ó\ \frac{7\pi}{6}\right)$	$-0,866$
45° $\left(ó\ \frac{\pi}{4}\right)$	0,707	225° $\left(ó\ \frac{5\pi}{4}\right)$	$-0,707$
60° $\left(ó\ \frac{\pi}{3}\right)$	0,500	240° $\left(ó\ \frac{4\pi}{3}\right)$	$-0,500$
90° $\left(ó\ \frac{\pi}{2}\right)$	0,000	270° $\left(ó\ \frac{3\pi}{2}\right)$	0,000
crece	decrece	crece	crece
120° $\left(ó\ \frac{2\pi}{3}\right)$	$-0,500$	300° $\left(ó\ \frac{10\pi}{6}\right)$	$+0,500$
135° $\left(ó\ \frac{3\pi}{4}\right)$	$-0,707$	315° $\left(ó\ \frac{7\pi}{4}\right)$	$+0,707$
150° $\left(ó\ \frac{5\pi}{6}\right)$	$-0,866$	330° $\left(ó\ \frac{11\pi}{6}\right)$	$+0,866$
180° (ó π)	-1.000	360° (ó 2π)	$+1.000$

Representación gráfica. — Y con estos valores, representamos ahora la curva que representa la función *cos* α. Tomamos sobre el eje de las abscisas, en una escala arbitraria, los valores de α y en el eje de las ordenadas, también en una escala arbitraria, los valores del coseno.

Tendremos así la figura 16.

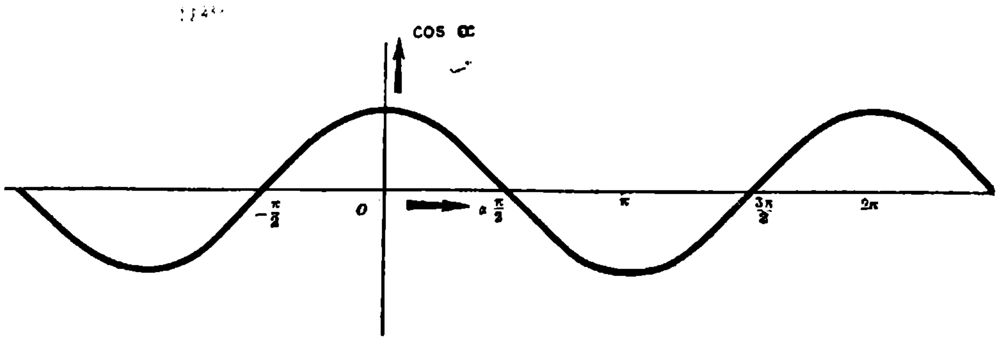


Figura 16

En forma análoga a la que aplicamos para el seno, podemos obtener gráficamente la representación de cos α en función de α.

Para ello, dividimos la circunferencia, en un número cualquiera de partes, que es más cómodo sean iguales, por ejemplo 16, como se indica en la figura 17, que llamamos 1, 2, 3, ...

Sobre el diámetro A'A prolongado tomamos un eje donde representamos los ángulos 1, 2, 3, ... en una escala cualquiera y luego por cada extremo del arco, por ejemplo 2, bajamos la normal MP sobre el diámetro A'A. El cos 2 es OP, valor que llevamos a nuestro sistema sobre la normal 2 al eje O_1x, obteniendo así un punto de la curva. Repitiendo

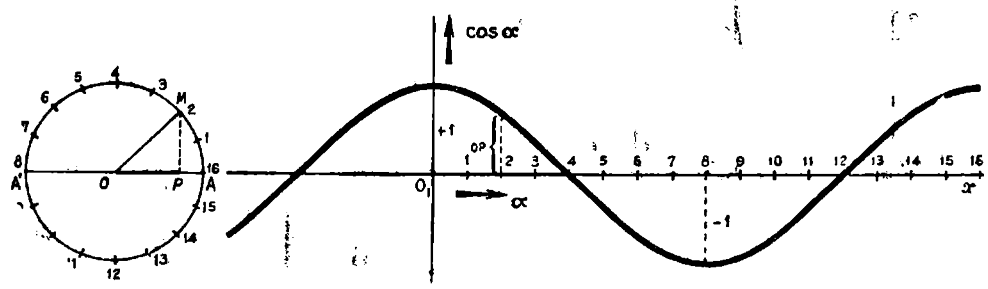


Figura 17

lo mismo para los demás ángulos 1, 3, 4, ..., etc., se obtiene la curva de la figura 17. La curva muestra también que la función es periódica y de período igual a una circunferencia.

Se ve que el valor máximo del coseno es $+1$ y el valor mínimo -1, es decir, que podemos poner para cualquier valor del ángulo

$$-1 \leq \cos \alpha \leq +1,$$

y no tiene sentido dar al coseno un valor mayor que $+1$ ni menor que -1.

Es de notar también que el coseno se anula para valores del arco que sean un múltiplo impar positivo o negativo de $\frac{\pi}{2}$.

18. Variación de la tangente. — Tracemos el círculo trigonométrico y sea A el origen de los arcos. Hemos definido como

$$\operatorname{tg} \alpha = AT.$$

Estudiáremos cómo varía AT con el variar de α. Cuando α vale cero, el punto T coincide con A y la tangente de 0°, vale cero. Cuando α crece en el primer cuadrante, la tangente AT crece y es positiva.

Podemos calcular algunos valores de la tangente para algunos valores de α. Por ejemplo, si α vale $30°$ $\left(ó \frac{\pi}{6}\right)$, tendremos (fig. 18) que tomando el punto T′ simétrico de T con respecto a OA, el triángulo TOT′ resulta equilátero. Es entonces $OT = 2\,AT$ y el triángulo rectángulo OAT nos da:

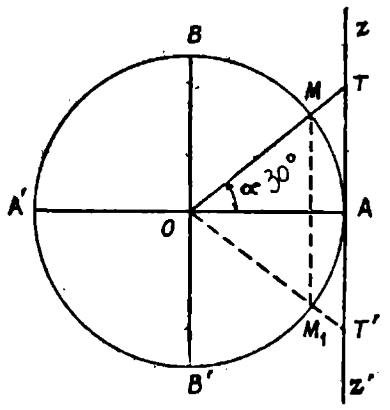


Figura 18

$$\overline{OT}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AT}^2$$

o bien, puesto que $OT = 2\,AT$ y $OA = 1$ tenemos:

$$4\,\overline{AT}^2 - \overline{AT}^2 = 1$$

de donde

$$\operatorname{tg} 30° = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577.$$

Si suponemos α igual a $45°$ $\left(ó \frac{\pi}{4}\right)$, el triángulo OAT es isósceles y:

$$AT = OA = 1,$$

y se obtiene

$$\operatorname{tg} 45° = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

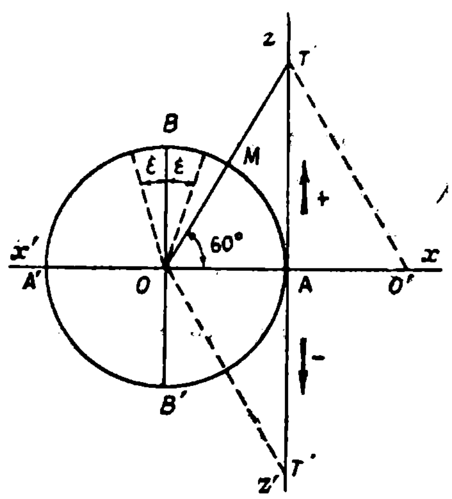


Figura 19

Haciendo $\alpha = 60°$ $\left(ó \frac{\pi}{3}\right)$, se tiene en la figura 19, que si tomamos el simétrico O′ de O con respecto a AT, el triángulo OTO′ resulta equilátero y el lado

$$OT = OO' = 2\,OA = 2,$$

el triángulo rectángulo OTA nos da

$$\overline{OT}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AT}^2$$

y reemplazando $OT = 2$ y $OA = 1$, se tiene:

$$4 = 1 + \overline{AT}^2$$

de donde sacamos:

$$\operatorname{tg} 60° = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} = 1.732.$$

Si seguimos incrementando el ángulo, siempre en el primer cuadrante, cuanto más se acerque el punto M al punto B, tanto más se alejará hacia arriba el punto T.

Consideremos el ángulo $(90^\circ - \varepsilon)$ ó $\left[\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right]$, cuanto más pequeño sea ε (ε positivo), tanto mayor será la tangente AT y podemos poner

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\rightarrow} + \infty.$$

La tangente crece en el primer cuadrante con el crecer de α.

Tomando ahora el ángulo $90^\circ + \varepsilon$, la tangente es negativa. El punto T está debajo del eje $x'x$ y cuanto más pequeño sea ε (ε positivo) tanto más lejos estará el punto T y siempre hacia abajo.

Podemos poner :

$$\operatorname{tg}(90^\circ + \varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\rightarrow} - \infty.$$

Y en el límite, cuando ε vale cero, tendremos

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \pm \infty.$$

En el punto en que α vale 90°, la tangente es una función discontinua y aunque nuestra variable α varíe en forma continua, la tangente salta bruscamente de más infinito a menos infinito.

Si se hace crecer el ángulo en el segundo cuadrante, cuando el punto M se mueve desde B hasta A′, la tangente disminuye en el valor absoluto, pero, como es negativa, la tangente crece.

Se podría obtener, por simples consideraciones geométricas análogas a las que hicimos para el primer cuadrante, algunos valores de la tangente, por ejemplo :

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} 120^\circ &= -\sqrt{3} = -1.732 \\
\operatorname{tg} 135^\circ &= \quad\;\; = -1{,}000 \\
\operatorname{tg} 150^\circ &= -\frac{\sqrt{3}}{3} = -0{,}577 \\
\operatorname{tg} 180^\circ &= \quad\;\; = \;\; 0{,}000.
\end{aligned}$$

Si se incrementa el ángulo en el tercer y cuarto cuadrante, es fácil notar que se reproducen los valores del primer y segundo cuadrante respectivamente. La tg es una función periódica de período igual a 180° o a π.

Y, en efecto, si calculásemos por elementales consideraciones geométricas, tendríamos:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg} 210^\circ &= \operatorname{tg} \frac{7\pi}{6} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577 \\
\operatorname{tg} 225^\circ &= \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} = \operatorname{tg} 45^\circ = \quad = 1.000. \\
\operatorname{tg} 240^\circ &= \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} = 1.732 \\
\operatorname{tg} 270^\circ &= \operatorname{tg} \frac{3\pi}{2} = \operatorname{tg} 90^\circ = \pm \infty \text{ (discontinua)} \\
\operatorname{tg} 300^\circ &= \operatorname{tg} \frac{10\pi}{6} = \operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3} = -1.732 \\
\operatorname{tg} 315^\circ &= \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} = \operatorname{tg} 135^\circ = \quad = -1.000 \\
\operatorname{tg} 330^\circ &= \operatorname{tg} \frac{11\pi}{6} = \operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -0{,}577 \\
\operatorname{tg} 360^\circ &= \operatorname{tg} 2\pi = \operatorname{tg} 0^\circ = \quad = 0{,}000.
\end{aligned}
$$

Representación gráfica. — Con estos valores representamos gráficamente a la función tangente. Sobre el eje de las abscisas llevamos

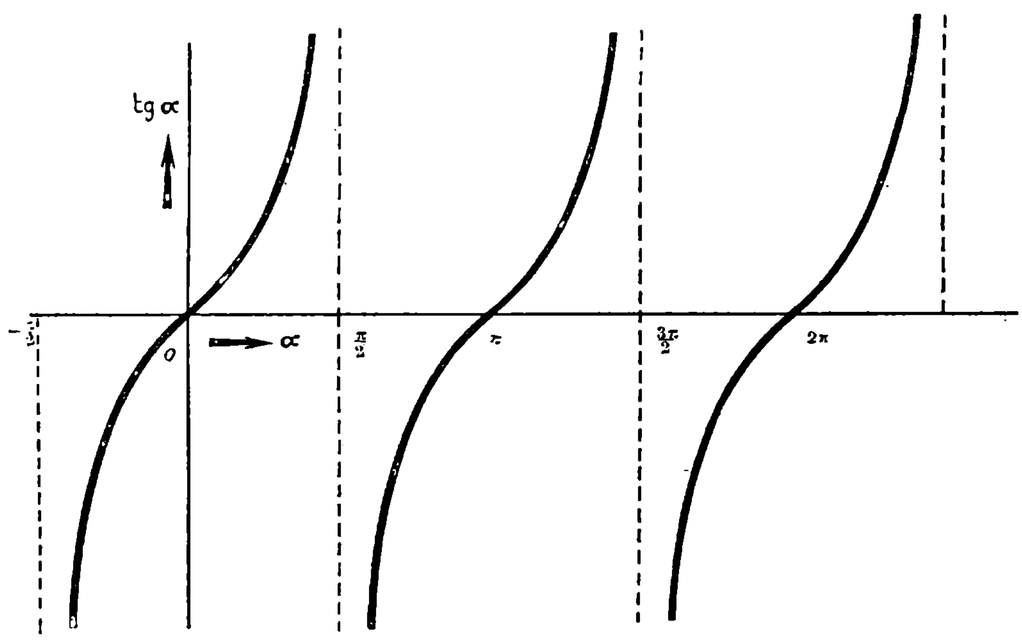


Figura 20

en una escala cualquiera los valores de α y sobre las ordenadas los valores de $\operatorname{tg} \alpha$.

Obtenemos la curva que muestra la figura 20.

La tangente es entonces una función periódica de período igual a π y podemos escribir:

$$\operatorname{tg}(k\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha.$$

donde k es un número entero, positivo, negativo o nulo.

Es una función continua, excepto para los valores de $\alpha = 90°$ ó $\frac{\pi}{2}$ y todos los valores

$$k\pi + \frac{\pi}{2} \qquad (k = \text{número entero}).$$

La curva toca a las rectas llevadas normalmente al eje de las α, por los puntos $\alpha = 90°, 270, ...,$ etc., en el infinito. Estas rectas son *asimp-*

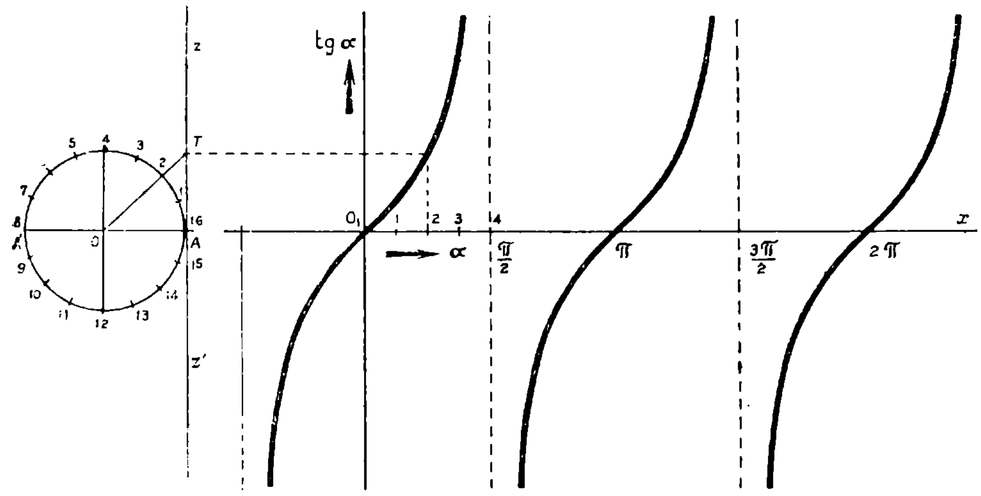


Figura 21

totas de la curva y ésta se llama *asimptótica*. Por representar a la tangente se la suele llamar *tangentoide*.

Se puede también obtener la curva que representa gráficamente a la tg α en función de α en la forma siguiente: Se toma el círculo trigonométrico de centro O y se divide en un número cualquiera de partes que conviene sean iguales, por ejemplo 16, que numeramos de 1 a 16 (fig. 21) y se traza la tangente geométrica zz' en el origen A de los arcos.

Sobre el eje $x'x$ se toma un origen O_1, y sobre él se lleva la normal que será el eje donde tomaremos los valores de la función.

Sobre O_1x representamos los valores de α en una escala cualquiera. Si se quiere obtener la representación de un punto cualquiera, por ejemplo para el ángulo 2, uniendo en el círculo O con el punto 2 y prolongando hasta T, se tiene por definición que AT es la tg. Luego en el punto 2 de O_1x que representa el ángulo 2, se traza la normal a O_1x y por el punto T la paralela al eje O_1x, el punto de encuentro nos da el punto buscado. Procediendo en la misma forma para los demás puntos, se obtiene la curva que muestra la figura 21.

19. Variación de la cotangente. — Consideremos el círculo trigonométrico (fig. 22). Hemos definido como cotangente el valor BK (15).

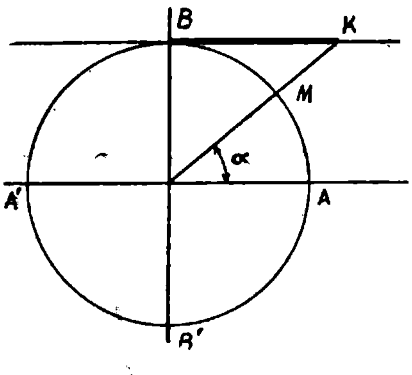


Figura 22

Cuando α vale cero, el punto M coincide con A, el punto K se ha alejado hasta el infinito y podemos decir que ctg 0° vale $\pm\infty$.

Cuando el ángulo crece en el primer cuadrante, el punto M se mueve desde A hasta B y el punto K se acerca desde el infinito hacia el punto B, es decir, que la ctg decrece. Cuando el ángulo vale 90° $\left(\text{ó } \frac{\pi}{2}\right)$ el punto K coincide con B y la magnitud BK vale cero, es decir, ctg 90° vale 0. Si el ángulo crece en el segundo cuadrante, con el moverse del punto M desde B hacia A', el punto K se aleja hacia la izquierda y cuanto más se aproxima el punto M hacia A' tanto más se aleja el punto K hacia la izquierda. La ctg decrece y tiende a valer $-\infty$.

Cuando el ángulo vale 180°, la ctg es discontinua en ese punto, saltando bruscamente de $-\infty$ a $+\infty$. Cuando el ángulo crece en el tercer cuadrante, los valores que adquiere la ctg son los mismos que en el primer cuadrante, es decir, la ctg decrece y cuando el ángulo vale 270°, la ctg vale 0.

Si el ángulo crece en el cuarto cuadrante, la ctg adquiere los mismos valores que en el segundo cuadrante, es decir, la ctg decrece y cuanto más se aproxima el ángulo a valer 360°, tanto más se aproxima la ctg a valer $-\infty$. En el punto 360°, lo mismo que en el punto 0°, la ctg es discontinua y pasa bruscamente de $-\infty$ a $+\infty$.

Podemos resumir estos resultados en la forma que sigue:

α	ctg α	α	ctg α
0	$\pm\infty$	crece	decrece
crece	decrece	270°	0,000
90°	0,000	crece	decrece
crece	decrece	360°	$\pm\infty$
180°	$\pm\infty$		

Se podrían fácilmente calcular algunos valores, en la misma forma que se hizo para la tg.

Representando luego gráficamente a la función, para lo que tomamos sobre el eje de las abscisas los valores de α y sobre las ordenadas los valores de ctg, se obtiene una curva como la de la figura 23.

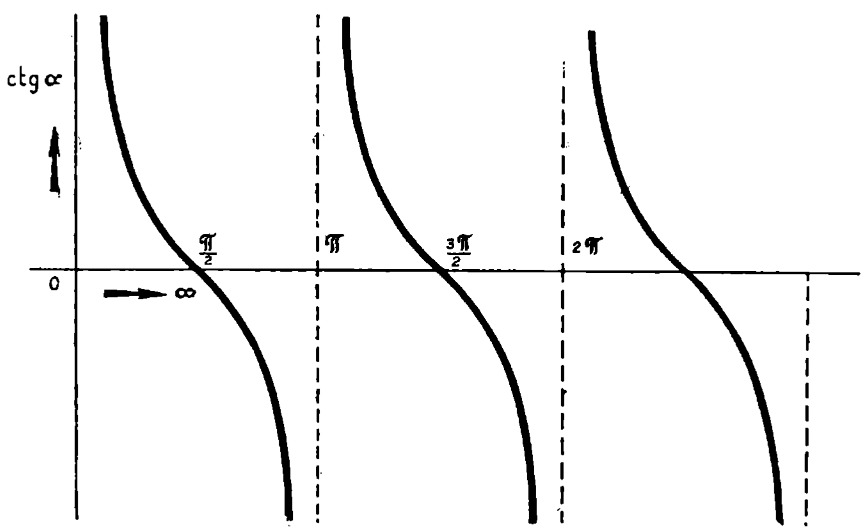


Figura 23

La ctg es una función periódica de período igual a 180° (ó a π). Luego se puede escribir

$$\operatorname{ctg}(k\pi + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$$

donde k es un número entero, positivo, negativo o nulo.

Se puede observar también que la ctg y la tg tienen siempre el mismo signo.

Que la cotangente es discontinua en los puntos O, π, 2π, etc., es decir, en todos los puntos dados por

$$\alpha = k\pi \quad (k\text{, entero, positivo, negativo o nulo}).$$

20. Variaciones de la secante. — Consideremos el círculo trigonométrico (fig. 24) y un ángulo α dado por el arco AM. Por definición sec α es OS. Cuando α vale cero, el punto M se confunde con A y lo mismo le ocurre al punto S. Luego la sec de cero, vale 1.

Con el crecer del ángulo α en el primer cuadrante, es decir, a me-

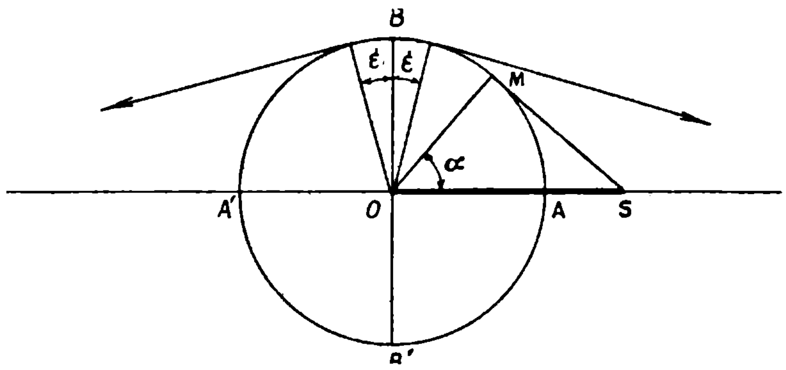


Figura 24

dida que el punto M se mueve desde A hacia B, el punto S se aleja hacia la derecha, la secante crece y cuanto más se acerque el punto M a B tanto más grande se hace la secante.

Podemos poner, siendo ε un ángulo positivo

$$\underset{\varepsilon \to 0}{\sec\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)} \to +\infty.$$

Cuando el punto M pasa del otro lado del punto B, el punto S está a la izquierda de A', la secante es negativa y si ε es un ángulo positivo, podemos poner

$$\underset{\varepsilon \to 0}{\sec\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)} \to -\infty.$$

Es decir, que cuando el ángulo pasa por el valor $\frac{\pi}{2}$, la secante es discontinua y pasa bruscamente de $+\infty$ a $-\infty$

$$\sec\frac{\pi}{2} = \pm\infty.$$

A medida que el ángulo crece en el segundo cuadrante, es decir, a medida que el punto M recorre el arco BA', el punto S se acerca de izquierda a derecha hacia el punto A'. La secante disminuye en valor absoluto, pero como es negativa, en realidad crece y cuando el ángulo vale π, el punto M se confunde con A' y la secante vale -1.

Si hacemos crecer ahora al ángulo en el tercer cuadrante, vale decir, si el punto M recorre el arco A'B' el punto S vuelve a alejarse del punto A' hacia la izquierda, vale decir, que la secante decrece, por ser sus valores negativos y tanto más se acerque el punto M a B' tanto más lejos estará de A' hacia la izquierda del punto S.

Si ε es positivo podemos poner:

$$\sec\left(\frac{3\pi}{2} - \varepsilon\right) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} -\infty.$$

Y también

$$\sec\left(\frac{3\pi}{2} + \varepsilon\right) \underset{\to 0}{\longrightarrow} +\infty.$$

En el punto $\frac{3\pi}{2}$, la secante es discontinua y su valor pasa de un salto desde $-\infty$ a $+\infty$, con el crecer en forma continua del arco o del ángulo.

Si el punto M se mueve en el cuarto cuadrante recorriendo el arco B'A, el punto S se acerca desde $+\infty$ hacia A. La secante decrece y llega a tener el valor $+1$ cuando el arco o el ángulo vale 2π.

Si se sigue incrementando el ángulo o el arco, los valores de la secante se vuelven a reproducir y resulta que la secante es una función periódica de período 2π, es decir, que podemos escribir:

$$\sec(2k\pi + \alpha) = \sec\alpha$$

donde k es un número entero, positivo o negativo.

También vemos que la secante es discontinua para los puntos B y B', es decir, para los arcos dados por:

$$\frac{\pi}{2} + k\pi \qquad (k, \text{entero}).$$

Resumiendo los resultados anteriores, se tiene:

α	$\sec\alpha$	α	$\sec\alpha$
$0°$	1.000	crece	decrece
crece	crece	$\frac{3\pi}{2}$	$\pm\infty$
$\frac{\pi}{2}$	$\pm\infty$	crece	decrece
crece	crece	2π	$+1.000$
π	-1.000		

Pueden calcularse valores numéricos de la secante para algunos ángulos en particular. Sería muy fácil obtener, por ejemplo:

$$\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \sec 45^\circ = \frac{2}{\sqrt{2}} \qquad \sec 60^\circ = 2, \text{ etc.}$$

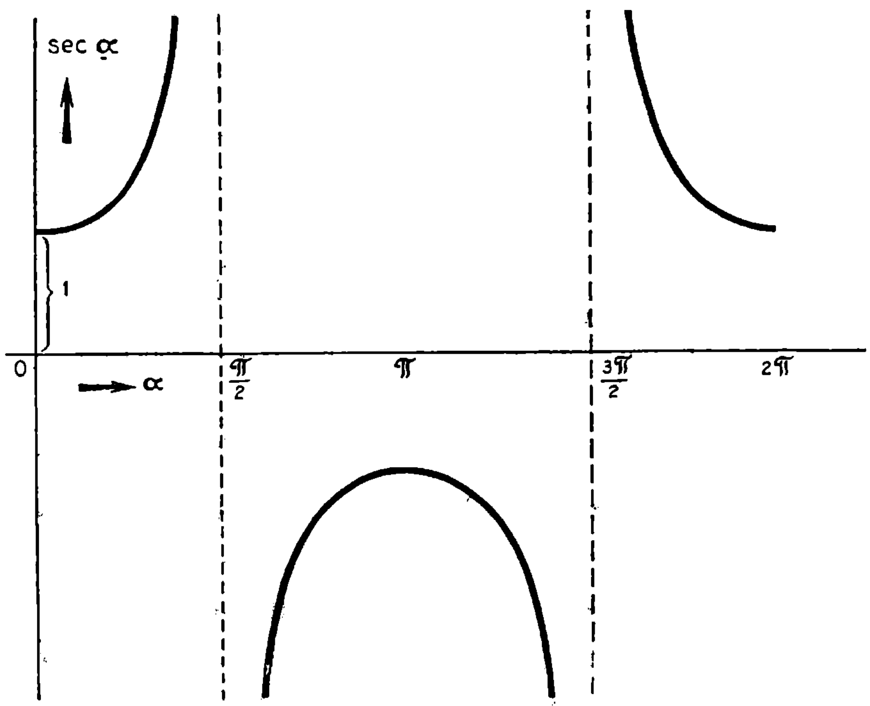


Figura 25

Y construir así la curva que representa gráficamente a la función sec α con el variar de α. Se obtiene una curva de la forma de la figura 25.

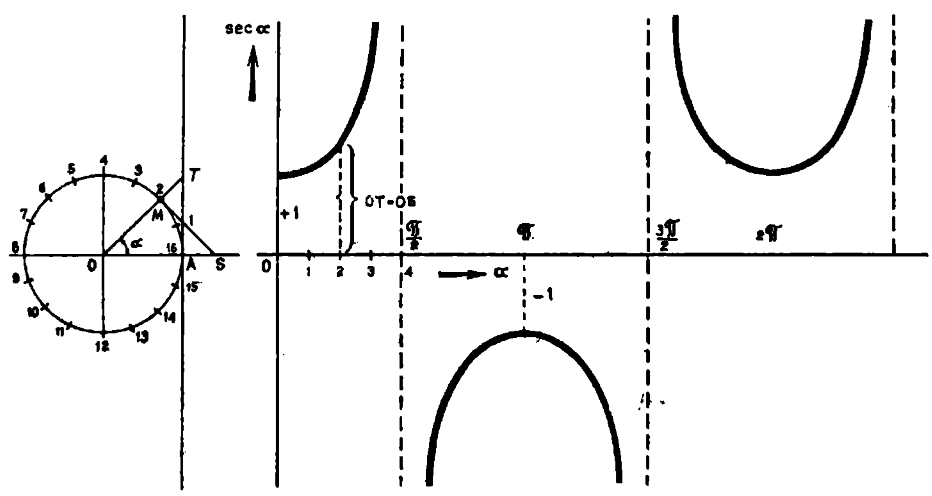


Figura 26

Es claro que también podría hacerse con procedimientos gráficos, como muestra la figura 26.

Se procede en forma análoga que para sen, cos, etc., y se llevan como ordenadas las magnitudes tales como OS. Pero, prolongando OM hasta el punto T es fácil ver, comparando los triángulos OMS y OAT. que OS es igual a OT; luego es más cómodo tomar como ordenadas los respectivos valores de OT. Una simple observación de la figura hace ver cómo se procede, por lo que omitimos más explicaciones.

Se puede ver que la secante conserva los mismos signos que el coseno. Veremos más adelante que la secante es la inversa del coseno.

21. Variaciones de la cosecante. — Un razonamiento análogo, nos llevaría a obtener para la función cosecante que

α	cosec α	α	cosec α
0°	$\pm\infty$	crece	crece
crece	decrece	$\frac{3\pi}{2}$	-1.000
$\frac{\pi}{2}$	$+1.000$	crece	decrece
crece	crece	2π	$\pm\infty$
π	$\pm\infty$		

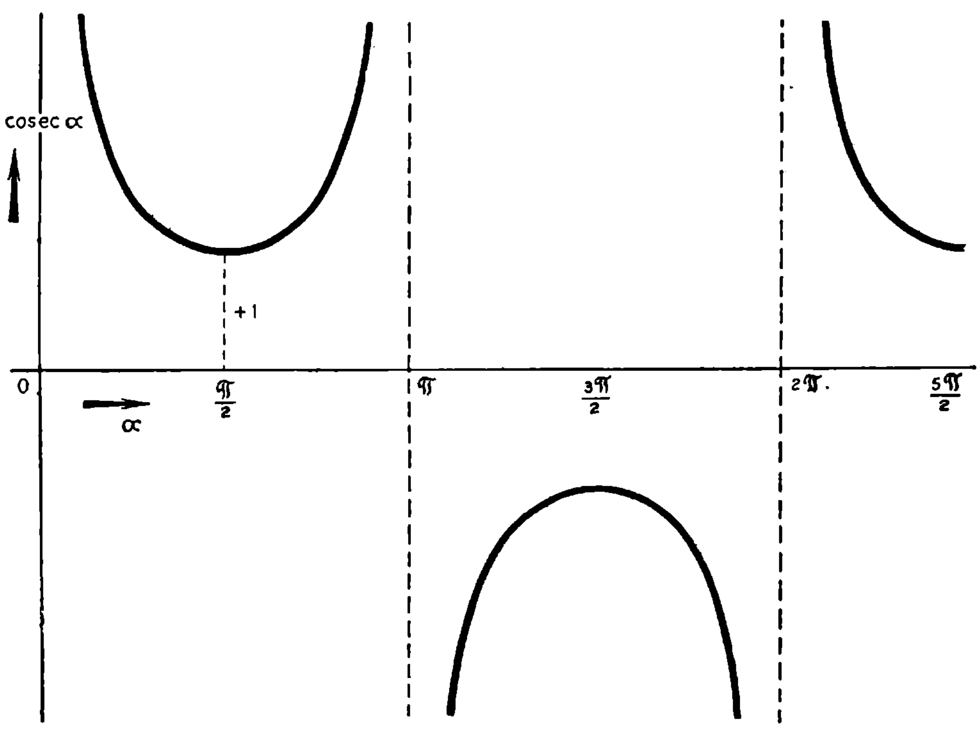


Figura 27

Es una función periódica de período 2π, es decir, que se puede poner:

$$\text{cosec}\,(2k\pi + x) = \text{cosec}\,x,$$

k entero positivo o negativo.

La cosecante es discontinua para los puntos A y A′, es decir, para los ángulos dados por $k\pi$, donde k es un número entero.

Los signos de la cosecante son los mismos que los del seno, y luego mostraremos que la cosecante es la inversa del seno.

La curva que representa a la función cosecante tiene la forma de la figura 27.

22. Cuadro de los signos de las líneas trigonométricas. — Hemos podido ver que todas y cada una de las líneas toman en cada cuadrante todos los valores absolutos que pueden tomar. Es necesario tener muy presente el signo del valor que adquiere cada línea, cuando el argumento toma valores en los distintos cuadrantes. Para ello podemos resumir los resultados que hemos obtenido en el cuadro siguiente:

Cuadrante	sen	cos	tg	ctg	sec	cosec
Primer....	+	+	+	+	+	+
Segundo...	+	−	−	−	−	+
Tercer ..	−	−	+	+	−	−
Cuarto. .	−	+	−	−	+	−

Se ve que las funciones seno y cosecante, coseno y secante, tangente y cotangente, toman los mismos signos. Veremos más adelante que son funciones inversas entre sí.

CAPÍTULO IV

RELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS IGUALES, PERO DE SIGNO CONTRARIO, QUE DIFIEREN 180°, SUPLEMENTARIOS, COMPLEMENTARIOS, ETC.

23. TEOREMA *Las funciones trigonométricas homónimas de dos arcos iguales y de signo contrario son iguales en valor absoluto, teniendo el mismo signo el coseno y la secante y signo contrario las restantes.* — En efecto (fig. 28), dos arcos iguales y de signo contrario $+\alpha$ y $-\alpha$, tienen el mismo origen A, pero sus extremos M y M_1, son simétricos con respecto al eje $x'x$, están a igual distancia en valor y signo del eje yy'.

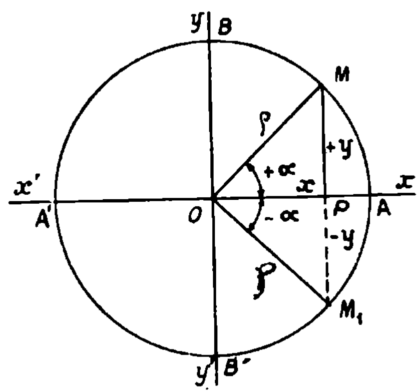


Figura 28

La abscisa x de los dos puntos M y M_1 tienen el mismo valor y signo, mientras que la ordenada $-y$ del punto M_1 es igual y de signo contrario a la ordenada y del punto M. Se tiene por definición (fig. 28)

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{\rho}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{\rho}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}, \quad \sec\alpha = \frac{\rho}{x}, \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{\rho}{y}$$

y también

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = \frac{-y}{\rho}, \quad \cos(-\alpha) = \frac{x}{\rho}, \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{-y}{x},$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{x}{-y}, \quad \sec(-\alpha) = \frac{\rho}{x}, \quad \operatorname{cosec}(-\alpha) = \frac{\rho}{-y}.$$

Luego:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(-\alpha) &= -\operatorname{sen}\alpha & \operatorname{ctg}(-\alpha) &= -\operatorname{ctg}\alpha \\ \cos(-\alpha) &= +\cos\alpha & \sec(-\alpha) &= \sec\alpha \\ \operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg}\alpha & \operatorname{cosec}(-\alpha) &= -\operatorname{cosec}\alpha. \end{aligned}$$

Con lo que se demuestra el teorema.

24. Teorema : *Dos arcos suplementarios tienen el mismo seno y cosecante. Las líneas trigonométricas restantes son iguales en valor absoluto pero de signo contrario.* — Si llamamos α a uno de los arcos o ángulos, el suplementario vale $\pi - \alpha$ (10). Si consideramos el círculo de la figura 29, tomando A como origen de los arcos, si

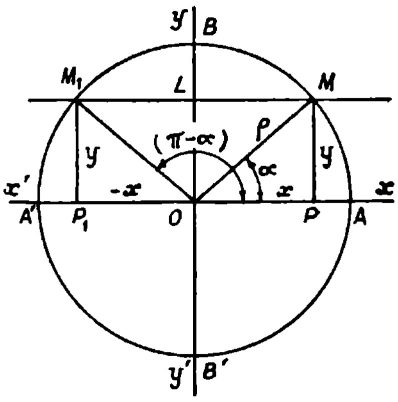


Figura 29

$$AM = \alpha \quad \text{y} \quad AM_1 = \pi - \alpha,$$

los puntos M y M_1 están sobre una paralela M_1M al eje $x'x$. Los dos puntos M y M_1 tienen la misma ordenada $y = OL$.

En cambio, comparando los triángulos rectángulos OMP y OM_1P_1 se ve que las abscisas de los puntos M y M_1 son iguales y de signo contrario.

Si es ρ el radio del círculo, considerado siempre como positivo, tenemos por definición (14):

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{y}{\rho}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{\rho}, \quad \text{tg}\,\alpha = \frac{y}{x}, \quad \text{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y}, \quad \sec\alpha = \frac{\rho}{x}, \quad \text{cosec}\,\alpha = \frac{\rho}{y},$$

y también

$$\text{sen}\,(\pi - \alpha) = \frac{y}{\rho}, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\frac{x}{\rho}, \quad \text{tg}\,(\pi - \alpha) = \frac{y}{-x},$$

$$\text{ctg}\,(\pi - \alpha) = \frac{-x}{y}, \quad \sec(\pi - \alpha) = \frac{\rho}{-x}, \quad \text{cosec}\,(\pi - \alpha) = \frac{\rho}{y}.$$

Luego:

$$\begin{aligned} \text{sen}\,(\pi - \alpha) &= \text{sen}\,\alpha & \qquad \text{ctg}\,(\pi - \alpha) &= -\,\text{ctg}\,\alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos\alpha & \sec(\pi - \alpha) &= -\sec\alpha \\ \text{tg}\,(\pi - \alpha) &= -\,\text{tg}\,\alpha & \text{cosec}\,(\pi - \alpha) &= \text{cosec}\,\alpha. \end{aligned}$$

Con lo que queda demostrado el teorema.

25. *Dos arcos cuya diferencia es π (ó 180°) tienen la misma tangente y cotangente. Las líneas restantes son iguales y de signo contrario.* — En efecto, considerando (fig. 30) un círculo de radio ρ y A como origen de los arcos. El arco α tendrá por extremo libre el punto M y el arco $\pi + \alpha$, tendrá como extremo libre el punto M_1, simétrico de M con respecto al punto O. Bajando del punto M y del punto M_1 las normales al eje $x'x$, es fácil ver que si x e y son la abscisa y la ordenada del punto M, $(-x)$ y $(-y)$ son las del punto M_1 y con sólo aplicar la definición de las líneas del nº 14, tendremos en seguida que:

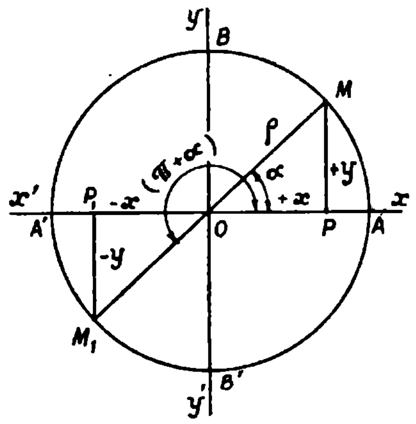


Figura 30

$$\operatorname{sen}(\pi+\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha, \quad \operatorname{ctg}(\pi+\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$$

$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha, \quad \sec(\pi+\alpha) = -\sec\alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi+\alpha) = \operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{cosec}(\pi+\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha.$$

También podríamos haber escrito, combinando sucesivamente los teoremas nºˢ 23 y 24:

$$\operatorname{sen}(\pi+\alpha) = \operatorname{sen}[\pi-(-\alpha)] = -\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos(\pi+\alpha) = \cos[\pi-(-\alpha)] = -\cos(-\alpha) = -\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi+\alpha) = \operatorname{tg}[\pi-(-\alpha)] = +\operatorname{tg}(-\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\pi+\alpha) = \operatorname{ctg}[\pi-(-\alpha)] = +\operatorname{ctg}(-\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$$

$$\sec(\pi+\alpha) = \sec[\pi-(-\alpha)] = -\sec(-\alpha) = -\sec\alpha$$

$$\operatorname{cosec}(\pi+\alpha) = \operatorname{cosec}[\pi-(-\alpha)] = -\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha.$$

26. TEOREMA: *Cuando dos arcos son complementarios, el sen, cos, tg, ctg, sec y cosec de uno son respectivamente iguales al coseno, seno, cotangente, tg, cosec, sec del otro.* — Sabemos que dos arcos o dos ángulos son *complementarios* cuando su suma algebraica vale 90° o $\frac{\pi}{2}$ (nº 10). Luego si α y β son dos ángulos complementarios, deberá tenerse

$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad \text{o bien} \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Vale decir que se tiene:

$$\alpha = 90^\circ - \beta, \quad \text{o} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta,$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha, \quad \text{o} \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Es decir, que si β es el complemento de α, a su vez α es el complemento de β, y para obtener el complemento de un ángulo en la unidad sexagesimal por ejemplo, basta restarlo de 90°. Así, por ejemplo, el complemento de $\alpha = 37°20'15'',12$ se obtiene:

$$\begin{array}{rl} 90° & = 89°59'60''00 \\ \alpha & = 37°20'15''12 \\ \hline \beta & = 52°39'44''88 \end{array}$$

Y el complemento de un ángulo $\alpha = 154°32'43''27$ será:

$$\begin{array}{rl} 90° & = \ 90°00'00''00 \\ \alpha & = 154°32'43''27 \\ \hline \beta & = -64°32'43''27. \end{array}$$

Consideremos ahora un círculo orientado de radio igual a la unidad (fig. 31), y un arco o un ángulo $\alpha = AM$, tomado en el sentido positivo dado por la flecha f. Sea B la extremidad del arco $AB = +\frac{\pi}{2}$, medido en el sentido de f. Consideremos sobre el mismo círculo un nuevo origen B para medir ángulos o arcos en sentido de la flecha f', considerado como positivo.

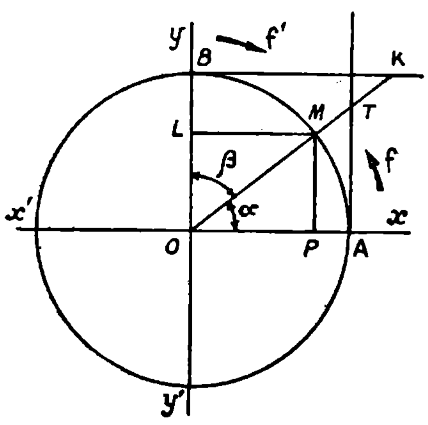


Figura 31

Se tiene por definición de arcos complementarios:

$$\widehat{AM} + \widehat{MB} = \frac{\pi}{2} \quad \text{(medidos en el sentido } f\text{).}$$

De donde

$$MB = \frac{\pi}{2} - AM.$$

Pero $\widehat{MB}$ medido en el sentido de f es igual a $\widehat{BM}$ medido en el sentido de f', luego

$$\widehat{BM} = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad \text{(medido en sentido } f' \text{ como positivo),}$$

o también

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

β es el arco complementario de α medido a partir de B y en el sentido contrario al que se mide α. Por ello al punto B se le llama también el *origen de los arcos complementarios de los arcos de origen A.*

Hechas estas consideraciones, consideremos un arco positivo α, por definición se tiene:

$$\operatorname{sen} \alpha = MP \quad \text{y} \quad \cos \alpha = OP.$$

Y tomando como origen el punto B, y como positivo el sentido de la flecha f', se tiene:

$$\operatorname{sen} \beta = ML, \qquad \cos \beta = OL.$$

Y comparando los triángulos OMP y MOL que son iguales, se tiene

$$LO = MP \quad \text{y} \quad LM = OP.$$

Luego

$$\operatorname{sen} \beta = \cos \alpha,$$
$$\cos \beta = \operatorname{sen} \alpha,$$

o bien

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen} \alpha.$$

En forma análoga, se tiene:

$\operatorname{tg} \beta = BK$, $\operatorname{ctg} \beta = AT$; $\operatorname{tg} \alpha = AT$, $\operatorname{ctg} \alpha = BK$ (f, sentido positivo).

Luego:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha$$

vale decir

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha,$$
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Y procediendo en la misma forma, obtendríamos

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cosec} \alpha,$$
$$\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sec \alpha$$

con lo que queda demostrado el teorema.

Es claro que el teorema vale para cualquier valor de α.

27. Teorema: *Si dos arcos o dos ángulos difieren de un cuadrante, el sen, el cos, la tg, la ctg, la sec y la cosec de uno son iguales en valor absoluto respectivamente al cos, sen, ctg, tg, cosec y sec del otro, y son de signo contrario, excepción hecha del seno y cosecante.* — En efecto, dos arcos o dos ángulos, cuya diferencia es $\frac{\pi}{2}$, serán:

$$\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) \quad \text{y} \quad x.$$

Cualquiera sea el valor de α. Ahora podemos escribir combinando los teoremas n^os^ 26 y 23:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}-(-\alpha)\right] = \cos(-x) = +\cos x \\
\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= \cos\left[\frac{\pi}{2}-(-x)\right] = \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} x \\
\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}-(-x)\right] = \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} x \\
\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= \operatorname{ctg}\left[\frac{\pi}{2}-(-\alpha)\right] = \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} \alpha \\
\sec\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= \sec\left[\frac{\pi}{2}-(-x)\right] = \operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec} x \\
\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= \operatorname{cosec}\left[\frac{\pi}{2}-(-x)\right] = \sec(-\alpha) = +\sec x.
\end{aligned}$$

Con lo que queda demostrado el teorema.

28. Reducir un ángulo o un arco al primer cuadrante. — Las tablas de las líneas trigonométricas, ya sea que den el logaritmo de los valores de las líneas o los valores mismos, nos dan los valores de las líneas de arcos comprendidos en el primer cuadrante; es decir, dan esos valores para ángulos de 0 a 90° o de 0 a $\frac{\pi}{2}$, y cuando se busca el valor de una línea cuyo argumento no esté entre 0 y 90°, ya sea mayor o menor, es necesario hallar el ángulo o arco del primer cuadrante que nos dé el valor absoluto de la línea que se busca, valor que por otra parte es siempre posible encontrar y se comprende que así sea, porque en el primer cuadrante, las líneas trigonométricas reciben todos los valores absolutos que pueden tener (22). Esto es lo que se entiende por *reducir un ángulo al primer cuadrante*, vale decir, establecido previamente el signo de la línea que se busca, lo que es fácil según el cuadrante en que caiga el argumento, buscar un argumento en el primer cuadrante en que tenga la línea que se busca el mismo valor absoluto. *Reducir un arco al primer cuadrante es buscar otro arco positivo y menor que $\frac{\pi}{2}$, que admita, sin tener en cuenta el signo, las mismas líneas trigonométricas.*

Si a es un arco, medido en radianes, por ejemplo, se puede en primer lugar, restarle cuantas circunferencias se puede al arco a y ello no altera ni en valor ni signo el valor de las líneas. Nos quedará después de restarle todas las circunferencias posibles, el arco α, menor que una circunferencia, cuyas líneas son iguales a las del arco a.

Ahora :

1° Si α es menor que $\frac{\pi}{2}$, el problema está resuelto.

2° Si α está comprendido entre $\frac{\pi}{2}$ y π, es decir, si α está en el segundo cuadrante, el arco suplementario $\pi - \alpha$, estará comprendido entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, y teniendo en cuenta las fórmulas del n° 24 se tiene resuelto el problema.

3° Si α está comprendido entre π y $\frac{3\pi}{2}$, el arco $\alpha - \pi$ es menor que $\frac{\pi}{2}$ y por lo tanto, teniendo en cuenta las fórmulas del n° 25, se tiene resuelto el problema.

4° Si α está comprendido entre $\frac{3\pi}{2}$ y 2π, el arco $2\pi - \alpha$, es menor que $\frac{\pi}{2}$ y teniendo en cuenta que las funciones del arco $2\pi - \alpha$, son iguales en valor y signo a las de $-\alpha$ y recordando las fórmulas del n° 23, se tiene resuelto el problema.

Ejemplo I. — Hallar las líneas del arco $\frac{13\pi}{5}$.

Se tiene en primer lugar:

$$\frac{13\pi}{5} = 2\pi + \frac{3\pi}{5}.$$

Las líneas de $\frac{13\pi}{5}$ son igual en valor y signo que las del arco $\frac{3\pi}{5}$.

El arco $\frac{3\pi}{5}$ está comprendido entre $\frac{\pi}{2}$ y π; luego calcularemos en primer lugar $\pi - \frac{3\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}$ que es menor que $\frac{\pi}{2}$ y tenemos, según las fórmulas del nº 24:

$$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{5} = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) = \operatorname{sen}\frac{2\pi}{5};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{5} = -\operatorname{ctg}\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{5}$$

$$\cos\frac{3\pi}{5} = -\cos\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) = -\cos\frac{2\pi}{5};$$

$$\sec\frac{3\pi}{5} = -\sec\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) = -\sec\frac{2\pi}{5}$$

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5} = -\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) = -\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5};$$

$$\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{5} = \operatorname{cosec}\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) = \operatorname{cosec}\frac{2\pi}{5}.$$

Ejemplo II. — Hallar las líneas del ángulo 919°26′15″2.

Tenemos en primer término:

$$919°26'15''2 = 2 \times 360° + 199°26'15''2.$$

Luego nuestro problema se reduce a buscar las líneas del ángulo de 199°26′15″2 que son las mismas que las del ángulo de 919°26′15″2 por diferir éstos en un número entero de circunferencias.

El ángulo 199°26′15″2 está comprendido entre 180 y 270°.

Podemos poner

$$199°26'15''2 = 180° + 19°26'15''2$$

y según las fórmulas del nº 25, se tiene

$$\operatorname{sen} 199°26'15''2 = \operatorname{sen}(180° + 19°26'15''2) = -\operatorname{sen} 19°26'15''2$$

$$\cos 199°26'15''2 = \cos(180° + 19°26'15''2) = -\cos 19°26'15''2$$

$$\operatorname{tg} 199°26'15''2 = \operatorname{tg}(180° + 19°26'15''2) = +\operatorname{tg} 19°26'15''2, \text{ etc.}$$

CAPÍTULO V

INVERSIÓN DE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS

29. Si se conoce el valor de una línea trigonométrica y se quiere encontrar el arco o los arcos cuya línea trigonométrica tiene un valor conocido, se tiene planteado el problema que se llama *inversión de la línea trigonométrica*. En resumen: dado el valor del sen $\alpha = m$, se dice seno inverso de m, es el valor de α que satisface la relación anterior.

En realidad hay varios valores de α que satisfacen esa relación, como veremos en seguida. El problema puede dividirse en dos partes:

1ª Encontrar un valor de α.

2ª Hallado un valor de α, buscar todos los demás valores que satisfacen esa relación.

30. *Inversión del seno.* — Consideremos un círculo trigonométrico. Sea A el origen de los arcos. Supongamos un valor m del sen α dado en la figura 32 por OL

$$\text{sen}\ \alpha = m = \text{OL}.$$

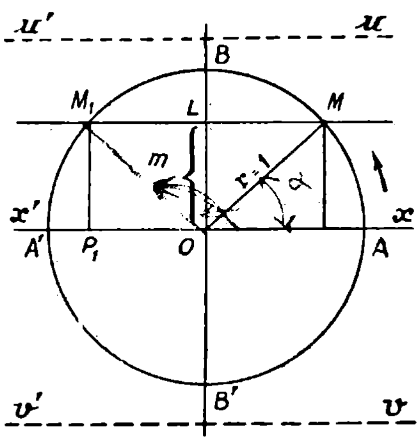


Figura 32

Por el punto L llevamos una paralela del eje xx', ésta corta en general al círculo trigonométrico en dos puntos M y M_1 y es fácil ver en la figura que todos los arcos cuyo origen sea el punto A y su extremo libre el punto M, tienen el mismo seno MP igual a $\text{OL} = m$.

Llamando α al arco AM, todos estos arcos están comprendidos en la fórmula:

$$2k\pi + \alpha \tag{1}$$

donde k es un número entero, positivo, negativo o nulo.

Pero, la paralela llevada por L al eje $x'x$ corta también el círculo en el punto M_1 y todos los arcos que tienen por origen el punto A y por extremo libre a M_1 tienen el mismo seno M_1P_1:

$$\text{M}_1\text{P}_1 = \text{OL} = m.$$

Y se ve por la figura, siendo siempre el arco $\alpha = AM$, que estos arcos están dados por la fórmula

$$2k\pi + \pi - \alpha \qquad (2)$$

donde k es un número entero, positivo, negativo o nulo.

Podemos encerrar las fórmulas (1) y (2) en una sola

$$k\pi + (-1)^k \alpha.$$

Y es fácil ver que para valores pares de k, se obtienen todos los valores dados por (1) y para valores impares los dados por la (2).

Es cómodo mostrar que la fórmula vale también para valores negativos de α.

Luego, dado el valor del sen $\alpha = m$, se encuentran infinitos valores del arco que tienen a m como valor del seno.

Se ve por la construcción que hemos hecho en la figura 32, que si m es mayor que $+1$, la paralela uu' no corta el círculo trigonométrico ya que es exterior al círculo, y lo mismo ocurre si el valor de m es menor que -1, porque entonces tomaría la posición de la recta vv', por ejemplo, y no cortaría al círculo. El valor del seno, entonces, para que se pueda encontrar valores para el arco debe ser mayor o igual que -1 y menor o igual que $+1$; es decir, que siempre debe ser

$$-1 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq +1.$$

En los casos límites en que sen α es igual a $+1$ ó a -1, las paralelas, tales como uu' ó vv' paralelas al eje $x'x$ son tangentes al círculo y los puntos M y M_1 se confunden respectivamente con B ó B'.

Se ve que siempre que el valor absoluto del seno sea menor que 1, la recta corta al círculo en dos puntos, luego dado el valor del seno comprendido entre $+1$ y -1, hay *dos arcos* menores que una circunferencia que tienen por seno el valor dado.

Representación gráfica. — Podemos ahora representar gráficamente a la función

$$\alpha = \text{arc. sen } (m)$$

que es una forma abreviada de escribir:

α es el arco cuyo seno es m.

Los valores de m pueden variar entre -1 y $+1$, para que el arco exista.

Tomamos sobre el eje de las abscisas los valores de m y como ordenadas los de la función

$$\text{arc. sen}\,.\,m$$

y tenemos una curva como la que muestra la figura 33.

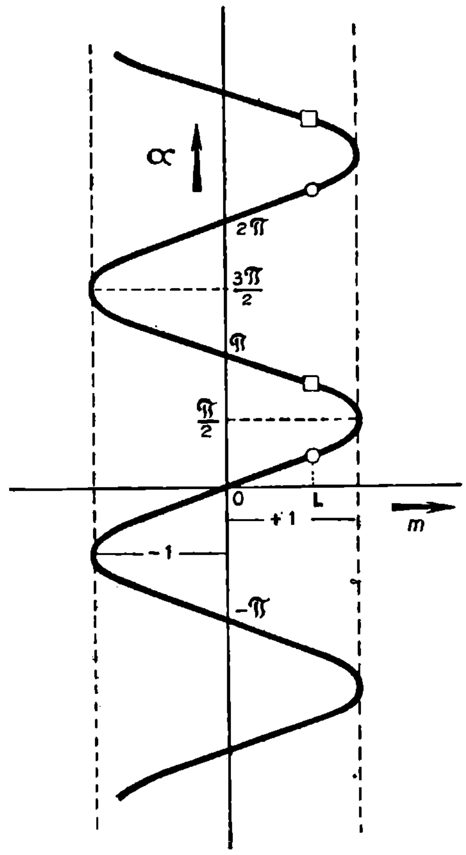


Figura 33

Hemos encontrado, y el gráfico lo ratifica, que dado el valor de sen $\alpha = m$, se encuentran dos series de valores de progresión aritmética igual a 2π, que son:

$$\alpha, \quad 2\pi + \alpha, \quad 4\pi + \alpha,$$

y

$$\pi - \alpha, \quad 3\pi - \alpha, \quad 5\pi - \alpha,$$

Para el valor de $m = \mathrm{OL}$, los valores de α de la primera serie están marcados con ⊙ y los valores de α para la segunda serie con □.

Se desprende, de todo lo antedicho, que la condición necesaria y suficiente para que dos arcos tengan el mismo seno es que su diferencia sea un múltiplo par de π o que su suma sea un múltiplo impar de π.

31. Inversión del coseno. — Consideremos el círculo trigonométrico (fig. 34) y supongamos un valor de cos α igual a m.

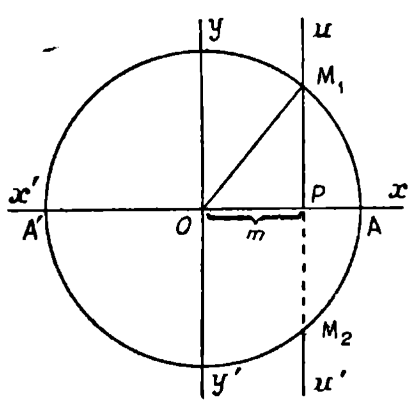


Figura 34

Llevemos, a partir de O, sobre el eje xx' el valor de m positivo a la derecha de O y negativo a la izquierda.

Sea

$$\mathrm{OP} = m.$$

Por el punto P llevemos la paralela uu' al eje yy', la que corta en general al círculo en dos puntos M_1 y M_2.

Todos los arcos que tengan por origen el punto A y por extremo libre el punto M_1, tienen por coseno el valor OP, es decir m. Ahora bien, todos esos arcos, llamando α al arco AM_1, están dados por las series

$$\begin{cases} \alpha, \quad 2\pi + \alpha, \quad 4\pi + \alpha, \quad 6\pi + \alpha, \\ -2\pi + \alpha, \quad -4\pi + \alpha, \quad -6\pi + \alpha, \end{cases}$$

las que puedo encerrar todas en la expresión:

$$2k\pi + \alpha \tag{1}$$

donde k es un número entero, positivo, negativo o nulo.

Pero también, todos los arcos que tienen por origen A y por extremo libre el punto M_2, tienen por coseno a OP, es decir a m. Y todos estos arcos están dados por las series

$$\begin{cases} 2\pi - \alpha, \quad 4\pi - \alpha, \quad 6\pi - \alpha, \\ -\alpha, \quad -2\pi - \alpha, \quad -4\pi - \alpha, \end{cases}$$

las que puedo encerrar en la expresión

$$2k\pi - \alpha. \tag{2}$$

Y ahora se pueden juntar las fórmulas (1) y (2) en una sola expresión general

$$2k\pi \pm \alpha$$

donde hay que dar a k cualquier valor entero, positivo, negativo o nulo.

Se ve por la figura 34 que para la paralela uu' llevada por P al eje de las y corte al círculo trigonométrico, es necesario que el punto P esté comprendido entre los puntos A'A, es decir que debe tenerse para que exista el valor de α que

$$-1 \leq \cos \alpha \leq +1.$$

En los casos límites en que $\cos \alpha$ sea igual a $+1$ ó -1 la paralela uu' es tangente al círculo en los puntos A y A' respectivamente.

Si se tiene

$$-1 \leq \cos \alpha \leq +1$$

entonces la paralela corta siempre el círculo en dos puntos; quiere decir, que siempre hay dos valores del arco, menores que una circunferencia que tiene por coseno el valor dado.

Representación gráfica. — Si representamos gráficamente a la función

$$\alpha = \text{arc. cos}\ (m)$$

tomando sobre el eje de las abscisas los valores de m, tales que

$$-1 \leq m \leq +1$$

y llevando como ordenadas los valores de α, se tiene una curva como la que muestra la figura 35.

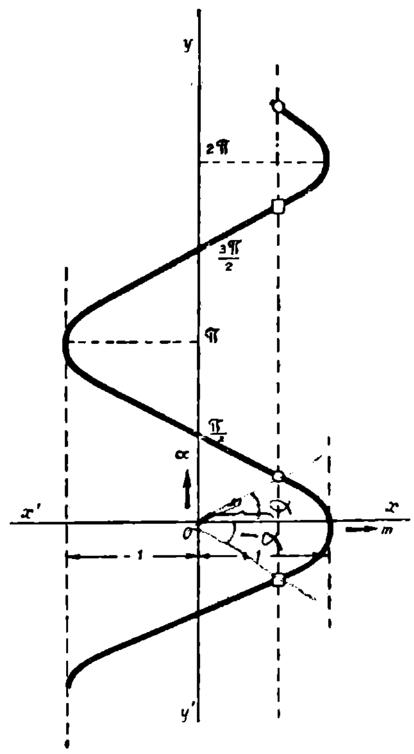


Figura 35

Se ve por la figura, que se obtienen para cada valor de m dos series de valores para α, la primera dada

$$\alpha, \quad 2\pi + \alpha, \quad 4\pi + \alpha,$$

dado por los puntos ⨀ y la otra

$$-\alpha, \quad 2\pi - \alpha, \quad 4\pi - \alpha, \quad 6\pi - \alpha$$

dado por los puntos □.

Y se desprende también que la condición necesaria y suficiente para que dos arcos tengan el mismo coseno es que su suma o su diferencia sea un múltiplo de 2α.

32. Inversión de la tangente. — Tomemos el círculo trigonométrico y en el origen A de los arcos llevemos la tangente $z'z$ al círculo (fig. 36).

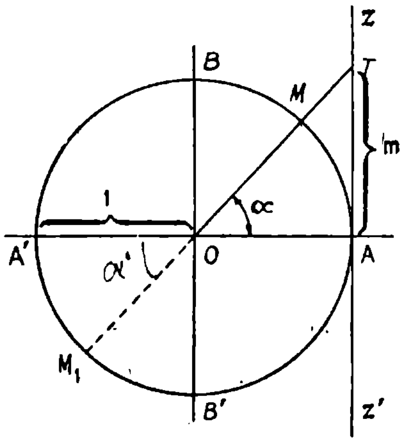


Figura 36

Supongamos un valor cualquiera de $\text{tg}\,\alpha = m$. Llevemos el valor de $m = \text{AT}$ sobre $z'z$ a partir de A. Sobre la semirecta Az si m es positivo y sobre la semirecta Az' si m es negativo.

Unamos el punto T con el centro del círculo O y prolonguemos.

La recta OT corta el círculo, siempre en dos puntos M y M_1 y tendremos que todos los arcos de origen A y extremo libre en M, tienen por tg el valor AT. Ahora bien, todos estos arcos, llamando α al arco AM, están dados por las series :

$$\begin{cases} \alpha, \quad 2\pi + \alpha, \quad 4\pi + \alpha, \quad 6\pi + \alpha, \\ -2\pi + \alpha, \quad -4\pi + \alpha, \quad -6\pi + \alpha, \end{cases}$$

valores que podemos encerrar en la fórmula

$$2k\pi + \alpha \tag{1}$$

donde k es un número entero, positivo, negativo o nulo.

Pero también los arcos con origen en el punto A y extremo libre en M_1, tienen por tg a AT. Todos estos arcos están dados por las series:

$$\begin{cases} \pi + \alpha, \quad 3\pi + \alpha, \quad 5\pi + \alpha, \\ -\pi + \alpha, \quad -3\pi + \alpha, \quad -5\pi + \alpha, \end{cases}$$

valores dados que podemos expresar con la fórmula:

$$(2k + 1)\pi + \alpha \tag{2}$$

donde k es un número entero, positivo, negativo o nulo.

Podemos todavía dar una expresión general que contenga las fórmulas (1) y (2) y es:

$$k\pi + \alpha.$$

Deducimos que la condición necesaria y suficiente para que dos arcos tengan la misma tangente es que su diferencia sea un múltiplo de π.

33. Inversión de la cotangente. — Tomemos el círculo trigonométrico y sea A el origen de los arcos (fig. 37). En el punto B tracemos la tangente geométrica $u'u$. Consideremos ahora un cierto valor de la ctg $\alpha = m$.

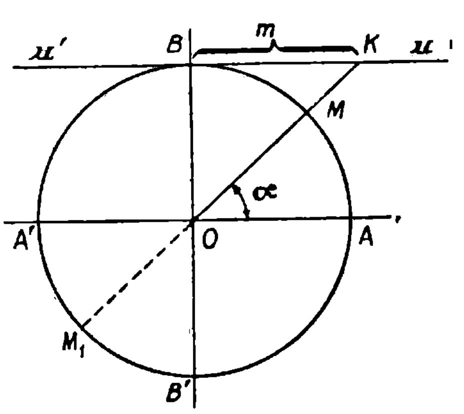


Figura 37

Queremos ver cuáles valores de α tienen por cotangente el valor m. Tomemos sobre uu', a partir de B un valor BK $= m$, sobre la semi-recta Bu, si m es positivo y sobre la semi-recta Bu' si m es negativo. Uniendo K con el centro O y prolongando, la recta KO corta al círculo siempre en dos puntos M y M_1 y todos los arcos que tengan origen en el punto A y su extremo libre en M y en M_1, tienen la misma ctg. Un razonamiento análogo al que hemos hecho para la tangente, nos daría que todos esos arcos pueden darse por la fórmula general

$$k\pi + \alpha.$$

Y sacamos que la condición necesaria y suficiente para que dos arcos tengan la misma cotangente es que su diferencia sea un múltiplo de π.

34. Inversión de la secante. — Tomemos el círculo trigonométrico y supongamos un valor de la sec $\alpha = m$. Tomemos sobre la recta $x'x$ los valores de la sec $\alpha = m$ (fig. 38), a partir del punto O, hacia la derecha si m es positivo y hacia la izquierda si m es negativo.

Tendremos así, por ejemplo :

$$OS = m.$$

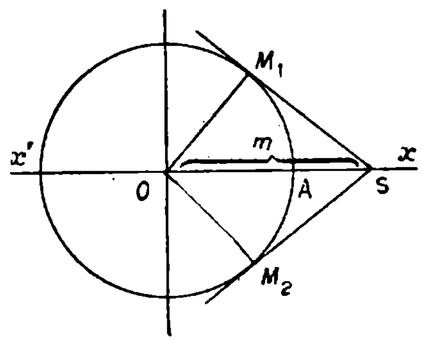


Figura 38

Desde el punto S, tracemos las tangentes SM_1 y SM_2 al círculo, siendo M_1 y M_2 los puntos de tangencia. Todos los arcos con origen en el punto A y extremo libre en M_1, tienen por sec el valor m; y llamando α al arco AM_1, ellos están dados por las series:

$$\left\{\begin{array}{llll} \alpha, & 2\pi + \alpha, & 4\pi + \alpha, & 6\pi + \alpha, \\ & -2\pi + \alpha, & -4\pi + \alpha, & -6\pi + \alpha, \end{array}\right. \qquad (1)$$

Y todos los arcos con origen en el punto A y extremo libre en M_2 tienen por sec el valor m y puesto que el arco AM_2 es igual y de signo contrario al arco AM_1 como es muy fácil ver, estarán dados por las series

$$\left\{\begin{array}{lll} 2\pi - \alpha, & 4\pi - \alpha, & 6\pi - \alpha, \\ -\alpha, & -2\pi - \alpha, & -4\pi - \alpha, \end{array}\right. \qquad (2)$$

Las series (1) y (2) por un razonamiento igual al que hicimos para el coseno, pueden encerrarse en la fórmula general

$$2k\pi \pm \alpha.$$

Se ve que para que se puedan trazar las tangentes desde el punto S, éste debe estar afuera del círculo y como caso límite sobre él. El valor de m debe ser entonces mayor o igual que $+1$ y menor o igual que -1. Todo valor x dado por

$$-1 \leq x \leq +1$$

no puede ser tomado como valor de la secante.

35. Inversión de la cosecante. — Sea A el origen de los arcos en el círculo trigonométrico del centro O (fig. 39) y tomenos sobre el eje yy', a partir de O, el valor OH $= m$ de la cosecante de un cierto ángulo α.

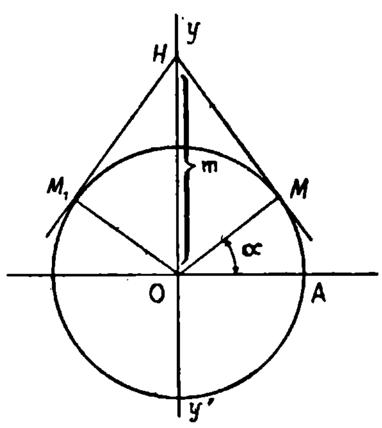


Figura 39

Si m es positivo lo tomamos sobre la semi-recta Oy, si es negativo sobre Oy'.

Desde el punto H tracemos las tangentes al círculo y sean M y M_1 los puntos de tangencia. Todos los arcos de origen A y extremo libre en M, como así, también, todos los arcos de origen A y extremo libre en M_1 tienen la misma cosecante m.

Con un razonamiento análogo al que hicimos para el seno, encontraríamos que todos esos arcos están dados por

$$k\pi + (-1)^k\alpha.$$

Se ve por la figura que el punto H debe estar fuera del círculo y como un caso límite sobre el círculo mismo. Para que exista el ángulo α, es necesario que el valor de m sea mayor o igual que $+1$ y menor o igual que -1.

36. *Resumen.* — Todos estos resultados los podemos resumir en el cuadro siguiente:

seno y cosecante.	$k\pi + (-1)^k\alpha$
tangente y cotangente	$k\pi + \alpha$
coseno y secante .	$2k\pi \pm \alpha$

CAPÍTULO VI

RELACIONES ALGEBRAICAS ENTRE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS DE UN MISMO ARCO (FÓRMULAS FUNDAMENTALES)

37. TEOREMA: *La suma de los cuadrados del seno y coseno de un mismo arco, es igual a la unidad.* — Consideremos un círculo trigonométrico y sea A el origen de los arcos (fig. 40). Tomemos un arco AM $= \alpha$. Bajemos desde M la perpendicular MP sobre el eje $x'x$.

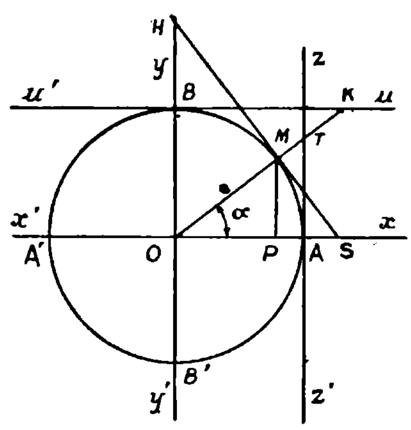


Figura 40

Por definición, tenemos

$$\mathrm{MP} = \operatorname{sen} \alpha \qquad (1)$$

$$\mathrm{OP} = \cos \alpha. \qquad (2)$$

El triángulo OPM, por ser rectángulo en P nos da

$$\overline{\mathrm{MP}}^2 + \overline{\mathrm{OP}}^2 = \overline{\mathrm{OM}}^2.$$

Pero $\overline{\mathrm{OM}} = 1$, por ser el círculo de radio 1 y teniendo en cuenta las igualdades (1) y (2) sacamos la fórmula fundamental

$$\operatorname{sen} \alpha^2 + \cos^2 \alpha = 1 \qquad (a)$$

que demuestra el teorema.

38. TEOREMA: *La tangente de un arco es igual al cociente del seno dividido por el coseno del mismo arco.* — En la figura 40 tracemos la tangente geométrica zz' y prolonguemos OM hasta encontrarla en T, por definición, se tiene

$$\operatorname{tg} \alpha = \mathrm{AT}.$$

Comparando ahora los triángulos semejantes OTA y OMP, se tiene

$$\frac{AT}{OA} = \frac{MP}{OP}.$$

Pero $OA = 1$ y según (1) y (2) $MP = \text{sen}\,\alpha$, $OP = \cos\alpha$; luego se tiene

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \qquad (b)$$

lo que demuestra el teorema y vale, desde luego, para cualquier valor de α.

39. TEOREMA: *La cotangente de un arco es igual al cociente del coseno dividido por el seno del mismo arco.* — Tracemos en la figura 40 la tangente geométrica $u'u$ al círculo en el punto B y prolonguemos OM hasta encontrarlo en K.

Por definición, tenemos

$$\text{cotg}\,\alpha = BK.$$

Comparando ahora los triángulos rectángulos semejantes KOB y OMP, tenemos

$$\frac{BK}{OB} = \frac{OP}{MP}$$

y observando que $OB = 1$, $OP = \cos\alpha$ y $MP = \text{sen}\,\alpha$, se tiene

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} \qquad (c)$$

que era lo que deseábamos mostrar.

40. TEOREMA: *La secante de un arco es igual a la unidad dividida por el coseno del mismo arco.* — Trazando en el punto M la tangente geométrica al círculo (fig. 40), se tiene por definición que

$$\sec\alpha = OS.$$

Y comparando ahora los triángulos rectángulos semejantes OSM y OMP, se tiene

$$\frac{OS}{OM} = \frac{OM}{OP}.$$

De donde, puesto que OM = 1 y OP = cos α

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}. \qquad (d)$$

41. TEOREMA: *La cosecante de un arco es igual a la unidad dividida por el seno del mismo arco.* — En efecto, en la figura 40, se tienen por definición

$$OH = \operatorname{cosec} \alpha.$$

Y comparando los triángulos rectángulos semejantes OHM y MOP se tiene:

$$\frac{OH}{OM} = \frac{OM}{OP}$$

y teniendo en cuenta los valores de OM y MP se tiene:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}. \qquad (e)$$

42. Los cinco últimos teoremas que hemos dado, nos dan cinco relaciones fundamentales entre las líneas de un mismo arco y son las siguientes:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \qquad (a)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \qquad (b)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \qquad (c)$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \qquad (d)$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}. \qquad (e)$$

Estas cinco relaciones fundamentales son independientes entre ellas, ya que en cada una aparece una línea que no figura en las otras y esas son *todas* las relaciones independientes que pueden encontrarse o, en otros términos, cualquier otra relación que se encuentre será una consecuencia de ese grupo. En efecto, supongamos que existe otra relación independiente de las cinco anteriores. Llegaríamos a obtener un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas y se concluirá que todas las líneas tienen valores fijos, justamente las soluciones de un sistema de ecuaciones, lo que es imposible. Hemos visto que las líneas son funciones del arco.

Se puede afirmar que cualquier otra relación que se encuentre es una consecuencia de las anteriores.

43. *Otras relaciones.* — De la relación (*b*) sacamos, por ejemplo :

1º $$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

y teniendo en cuenta la (*a*) resulta

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}. = \sec^2 \alpha$$

2º Multiplicando la (*b*) en la (*c*) se tiene

$$\operatorname{tg} \alpha \,.\, \operatorname{cotg} .\, \alpha = 1.$$

3º Teniendo en cuenta la (*c*) y la (*a*) se tiene

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}. = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

44. Expresión de todas las líneas trigonométricas en función del seno. — Suponemos conocido el valor del *seno*, que ya hemos visto (nº 16), que debe ser tal que

$$-1 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq +1. \qquad (1)$$

Para expresar el cos α en función del sen α, tenemos (*a*)

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

de donde

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}. \qquad (2)$$

Para que pueda calcular el radical, es necesario que la cantidad sub-radical sea

$$1 - \operatorname{sen}^2 \alpha \geq 0$$

lo que equivale a decir lo mismo que la (1).

Se ve que para cada valor del sen α, se tienen dos valores iguales y de signo contrario para el cos α.

Es fácil ver, en la figura 41, que tomando una longitud OL igual al valor del sen α, y trazando por L la paralela al eje $x'x$, la que corta el círculo en M y M_1; los arcos con origen en A y extremo libre en M o M_1 tienen el mismo seno, pero los cosenos OP y OP_1 son iguales en valor absoluto, por serlo los triángulos OLM y OLM_1, pero son de signo contrario. Se explica así el porqué del doble signo de la fórmula (2).

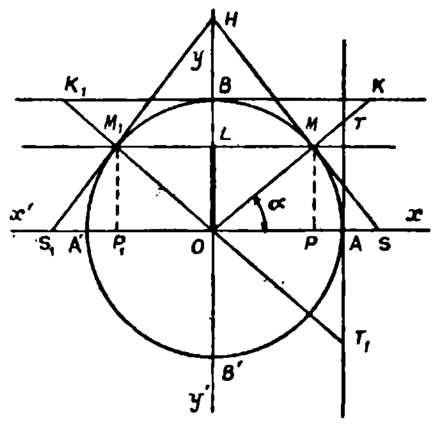


Figura 41

Para calcular el valor de la tg α en función de sen α tenemos, según la (*b*)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}.$$

Y reemplazando el valor del cos α dado por la (2), se tiene

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}}.$$

Se ve que se tienen dos valores iguales y de signo contrario para la tg α. Y en efecto, observando la figura 41 se tiene que la tangente del arco AM es AT, mientras que la tangente del arco AM_1 es AT_1. Es fácil ver que AT y AT_1 son iguales en valor absoluto y de signo contrario.

Para calcular el valor de la ctg en función de sen α, tenemos según la (*c*)

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Y poniendo el valor del cos dado por (2), tenemos

$$\operatorname{ctg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Para cada valor del sen α se tienen dos valores iguales y de signo contrario para la ctg α que corresponden, en la figura 41, a los valores BK y BK_1.

Para expresar la secante de α en función de sen α, tenemos, combinando la (*d*) con la (2)

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}.$$

Los dos valores iguales y de signo contrario, corresponden en la figura 41 a las magnitudes OS y OS_1.

Finalmente, el valor de la cosec α en función de sen α es dado directamente por la relación fundamental (*e*)

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Y se tiene un solo valor para la cosec α. En efecto, puede verse en la figura 41 que las tangentes geométricas en los puntos M y M_1 encuentran al eje yy' en el mismo punto H, es decir que los arcos AM y AM_1 tienen la misma cosecante OH.

45. Expresión de todas las líneas trigonométricas en función del coseno. — También sabemos (nº 17) que el valor de cos α está comprendido entre -1 y $+1$, es decir que debe tenerse

$$-1 \leq \cos\alpha \leq +1. \qquad (1)$$

Para expresar el sen α en función de cos α, sacamos de la expresión (*a*)

$$\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}. \qquad (2)$$

Para cada valor de cos α se tienen dos valores iguales y de signo contrario para el sen α. Y en efecto (fig. 42), llevemos OP igual a cos α y por el punto P tracemos la paralela al eje yy' que corta en general al círculo en dos puntos, M y M_1. Todos los arcos que tengan por origen el punto A y por extremo libre al punto M o a M_1, tienen el mismo cos α=OP. Pero los arcos con extremo libre en M, tienen por seno el valor MP, mientras que los arcos de extremo libre en M_1 tienen por seno el valor M_1P. Y es fácil ver que M_1P y MP son iguales y de signo contrario.

Para expresar la tg α en función de cos α, se tiene combinando la (*b*) con la (2)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}.$$

Se ve en la figura 42 que los dos valores iguales y de signo contrario corresponden a las magnitudes AT y AT_1.

Igualmente combinando la (*c*) con la (2), se tiene

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \pm \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}.$$

Y los dos valores iguales y de signo contrario corresponden en la figura a las magnitudes BK y BK_1.

En cuanto al valor de la secante α en función del cos α, es dado directamente por la relación fundamental (*d*). Se tiene un solo valor para la sec α. Y, en efecto, las tangentes al círculo en los puntos M y M_1 cortan al eje $x'x$ en el mismo punto S, y la secante de todos los arcos con origen en A y extremo libre en M o en M_1 es OS.

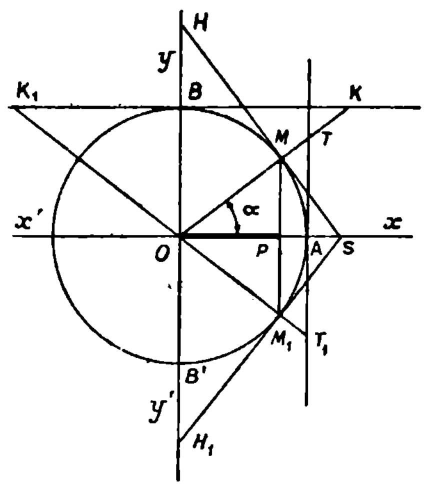


Figura 42

Para expresar la cosec α en función de cos α, combinamos las relaciones (*e*) con (2) y tenemos

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}.$$

Los dos valores iguales y de signo contrario están dados en la figura 42 por las magnitudes OH y OH_1.

46. Expresión de todas las líneas trigonométricas en función de la tangente α. — Para expresar el sen α en función de tg α, podemos escribir, teniendo en cuenta la relación (*a*)

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}.$$

O bien, dividiendo numerador y denominador del 2º miembro por $\cos^2 \alpha$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \dfrac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}.$$

Y teniendo en cuenta la (*b*), se obtiene:

$$\operatorname{sen}\alpha = \pm \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}. \tag{1}$$

Lo que nos dice que dado el valor de tg α, se encuentran dos valores iguales y de signo contrario para el sen α.

En efecto, consideremos (fig. 43) un círculo trigonométrico, donde A es el origen de los arcos. Tomemos sobre la tangente zz' el valor AT igual al valor de tg α. Uniendo T con O y prolongando, tenemos que todos los arcos que tienen por origen el punto A y por extremo libre el punto M o el punto M_1 tienen la misma tg AT, pero los arcos con extremo libre en M tienen por seno la longitud MP, mientras que los arcos con extremo libre en M_1 tienen por seno la longitud M_1P_1. Es fácil ver que M_1P_1 y MP son iguales y de signo contrario.

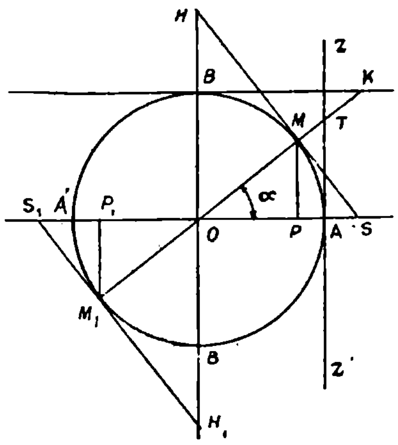


Figura 43

Para expresar el cos α en función de tg α escribimos teniendo en cuenta la relación (*a*) y dividiendo numerador y denominador por $\cos^2\alpha$

$$\cos^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

de donde

$$\cos\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}. \tag{2}$$

Se ve que se tienen dos valores iguales y de signo contrario para cos α que corresponden (en la fig. 43) a las magnitudes OP y OP_1.

La expresión ctg en función de tg la obtenemos multiplicando las relaciones fundamentales (*b*) y (*c*) lo que nos da

$$\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

de donde

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}. \tag{3}$$

Para cada valor de la tg se obtiene un solo valor para ctg y en efecto, en la figura 43 los arcos con extremo libre en M o en M_1 tienen la misma ctg que es BK.

Para expresar la sec α en función de la tg combinamos la relación fundamental (*d*) con la relación (2) y obtenemos

$$\sec\alpha = \pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}. \tag{4}$$

Es decir, que para cada valor de la tg obtenemos dos valores iguales y de signo contrario para la sec que corresponden (en la fig. 43) a las magnitudes OS y OS_1.

La expresión de cosec α en función de la tg α se obtiene combinando la expresión fundamental (*e*) con la relación (1) y obtenemos

$$\operatorname{cosec}\alpha = \pm\frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$$

y los dos valores corresponden (en la fig. 43) a las magnitudes OH y OH_1.

47. Con razonamientos en un todo análogos a los anteriores, se obtendría la expresión de las líneas trigonométricas en función de ctg α o sec α o de cosec α y se tendría así en resumen el siguiente cuadro :

	$\operatorname{sen} \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sec \alpha$	$\operatorname{cosec} \alpha$
$\operatorname{sen} \alpha =$	$\operatorname{sen} \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\pm \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}{\sec \alpha}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha}$
$\cos \alpha =$	$\pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}$	$\cos \alpha$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\sec \alpha}$	$\pm \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}}{\operatorname{cosec} \alpha}$
$\operatorname{tg} \alpha =$	$\pm \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$	$\pm \sqrt{\sec^2 \alpha - 1}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}}$
$\operatorname{ctg} \alpha =$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}}{\operatorname{sen} \alpha}$	$\pm \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \frac{1}{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}$	$\pm \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}$
$\sec \alpha =$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\cos \alpha}$	$\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$	$\pm \frac{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}{\operatorname{ctg} \alpha}$	$\sec \alpha$	$\pm \frac{\operatorname{cosec} \alpha}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}}$
$\operatorname{cosec} \alpha =$	$\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha}$	$\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$	$\pm \frac{\sec \alpha}{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}$	$\operatorname{cosec} \alpha$

Ejercicio I: Hemos encontrado (nº 16) sen $30^\circ = \frac{1}{2}$. Calcular el valor de las demás líneas.

Se tiene

$$\cos 30^\circ = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\sec 30^\circ = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Ejercicio II: Hemos hallado $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Se tiene

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = 1$$

$$\operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Ejercicio III : Habíamos encontrado tg $60^\circ = \sqrt{3}$.

Se tiene

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{1+3}} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 60^\circ = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{\sqrt{1+3}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ejercicio IV: Sabiendo que la ctg $120^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Hallar las demás líneas.

Se tiene

$$\operatorname{sen} 120^\circ = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{9}}} = +\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{1+\frac{3}{9}}} = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\sqrt{3}$$

$$\sec 120^\circ = \frac{\sqrt{1+\frac{3}{9}}}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -2$$

$$\operatorname{cosec} 120^\circ = \sqrt{1+\frac{3}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

CAPÍTULO VII

CÁLCULO DE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS DE ARCOS EXPRESADOS POR LA FORMA $\frac{p\pi}{n}$

48. Es claro que, de acuerdo a las relaciones del cuadro del nº 47, si calculamos una línea del arco $\frac{p\pi}{n}$, se pueden calcular las demás líneas.

Vamos a ver ahora que si conocemos el valor del lado del polígono regular de n lados, podemos calcular las líneas de los arcos $\frac{p\pi}{n}$, siendo p un número entero cualquiera. Para ello demostraremos el siguiente:

49. Teorema: *El seno de un arco positivo, menor que un cuadrante, es igual a la mitad de la cuerda que subtiende el arco doble, trazada en el círculo trigonométrico.*

Consideremos (fig. 44) un arco positivo AM, menor que un cuadrante. El punto M caerá entre A y B. Bajemos la perpendicular MP sobre el eje $x'x$. Por definición se tiene

$$\operatorname{sen} \widehat{AM} = MP.$$

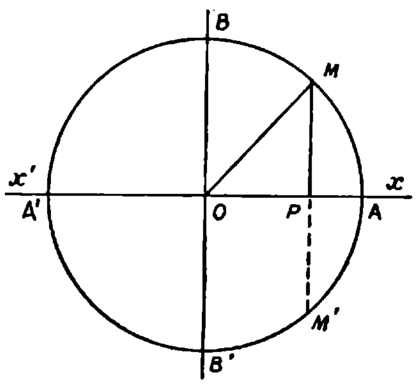


Figura 44

Prolonguemos ahora MP hasta M′. Es evidente que AM es igual a la mitad de MM′ y que el arco MAM′ es doble del arco AM.

Y de aquí se deduce que el seno del arco $\frac{\pi}{n}$ es igual a la mitad del lado del polígono regular convexo de n lados inscripto en el círculo trigonométrico, pues el doble del arco $\frac{\pi}{n}$ es $\frac{2\pi}{n}$, que es el arco que subtiende un polígono regular de n lados.

Haciendo $n = 3$, tenemos el triángulo equilátero, cuyo lado vale $\sqrt{3}$ y se tiene:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Y luego de aquí se pueden deducir las demás líneas.

Si se hace $n = 4$ se tiene el cuadrado, cuyo lado vale $\sqrt{2}$ y tendríamos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen} 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Haciendo $n = 5$ se tiene el pentágono regular, cuyo lado vale $\frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{5} = \operatorname{sen} 36^{\circ} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Para $n = 6$ se tiene el exágono regular, cuyo lado vale 1 y se obtiene

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \operatorname{sen} 30^{\circ} = \frac{1}{2}.$$

Haciendo $n = 10$ se tiene el decágono regular, cuyo lado vale $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ y se tiene

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{10} = \operatorname{sen} 18^{\circ} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

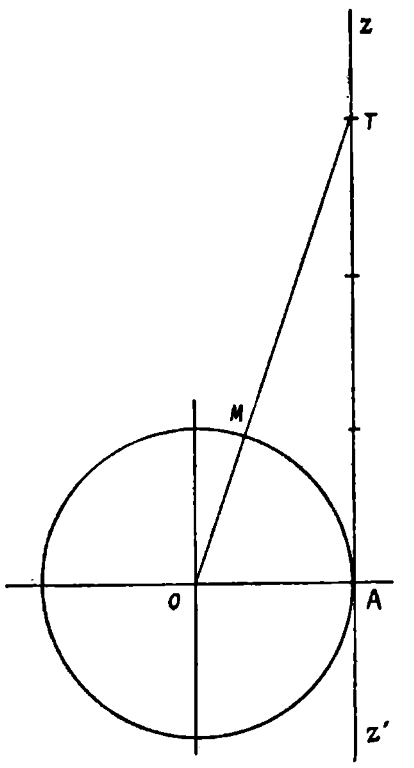


Figura 45

I. *Problema.* — *Construir en un círculo trigonométrico un arco inferior a un cuadrante, tal que la relación de la tg a la ctg sea igual a 9.*

Tenemos

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} = 9 \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{9}.$$

Por otra parte, se tiene

$$\operatorname{tg}\alpha \, . \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

luego $\operatorname{tg}\alpha \, . \frac{\operatorname{tg}\alpha}{9} = 1 \therefore \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{9} = 3$. Basta entonces tomar sobre la tangente geométrica ZZ' una longitud AT igual a tres veces el radio y unir T con O. Si M es el punto en que OT corta al círculo, se tiene que el arco buscado es AM (fig. 45).

II. *Problema.* — *Construir un arco menor que un cuadrante, en una circunferencia de radio 1, sabiendo que la cuerda que subtiende es igual a su coseno.*

Supongamos (fig. 46) el problema resuelto. Sea AM el arco, tal que la cuerda AM sea igual al cos $\widehat{AM} = OP$. Llamemos x a la cuerda AM, tenemos

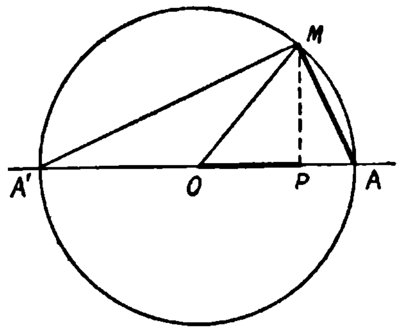


Figura 46

$$AM = OP = x.$$

Uniendo M con A' el triángulo rectángulo A'MA, puesto que MP es la perpendicular de M sobre la hipotenusa AA', siendo $AA' = 2$ y $OA = 1$, nos da:

$$x^2 = 2(1 - x) \qquad x^2 + 2x - 2 = 0$$

de donde

$$x = -1 \pm \sqrt{3}.$$

Y considerando el valor

$$x = -1 + \sqrt{3}$$

tenemos la solución. Basta tomar el lado del triángulo equilátero inscripto en el círculo, que vale $\sqrt{3}$ y restarle el radio 1 del círculo. Encontrado x es fácil obtener el arco AM, que subtiende la cuerda igual a x.

La otra solución hay que desecharla por ser x mayor en valor absoluto que el diámetro del círculo.

CAPÍTULO VIII

ADICIÓN Y SUBSTRACCIÓN DE ARCOS

Proyecciones

50. *Definiciones.* — Se da el nombre de *recta dirigida* a la recta indefinida donde se ha fijado el sentido positivo; y *segmento de recta* a la porción de recta que se supone que recorre un móvil en un sentido determinado. El punto de partida del móvil es el origen del segmento y el punto de llegada la extremidad del mismo.

Si AB es un segmento positivo, es evidente que el segmento BA será negativo.

Una serie de segmentos tales que el origen de uno sea el extremo libre del anterior, se llaman *segmentos consecutivos.*

Se llama suma de una serie de segmentos consecutivos

$$AB, BC, CD, \qquad\qquad JK, KL$$

a un segmento cuyo origen es el origen del primer segmento y cuyo extremo es el extremo del último.

51. Teorema de Charles: *La medida de la suma de varios segmentos consecutivos es la suma de las medidas de los segmentos.*

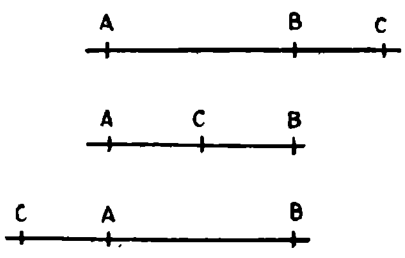


Figura 47

Consideremos primero dos segmentos AB y BC, en donde suponemos que AB sea positivo (fig. 47). El punto C puede ocupar tres posiciones:

a) a la derecha del punto B;

b) entre A y B;

c) a la izquierda del punto A.

En el primer caso, es claro que se tiene:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}.$$

En el 2° caso, se tiene:

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB},$$

y puesto que

$$\overline{CB} = -\overline{BC},$$

resulta:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}.$$

Y en el tercer caso se tiene:

$$\overline{CB} = \overline{CA} + \overline{AB}$$

y puesto que

$$\overline{CB} = -\overline{BC} \text{ y } \overline{CA} = -\overline{AC},$$

se tiene:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC},$$

con lo que queda demostrado el teorema para los tres casos.

Si AB fuese negativo, se presentan tres casos análogos que se reducen al caso anterior cambiando los signos o cambiando el sentido positivo de la recta dirigida, sostén de los segmentos.

Supongamos ahora el caso general de n segmentos consecutivos

$$AB, BC, CD, \qquad\qquad JK, KL$$

que están sobre la misma recta dirigida.

Vamos a demostrar que se tiene

$$\overline{AL} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \qquad\qquad . + \overline{JK} + \overline{KL}.$$

En efecto, entre los puntos A, B y C se puede escribir, según hemos visto

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC},$$

y haciendo lo mismo con los puntos A, C, D; A, D, E; ... etc. se tiene también

$$\overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AD},$$

$$\overline{AD} + \overline{DE} = \overline{AE},$$

$$\overline{AJ} + \overline{JK} = \overline{AK},$$

$$\overline{AK} + \overline{KL} = \overline{AL}.$$

Sumando y simplificando los términos iguales se obtiene

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \qquad\qquad + \overline{JK} + \overline{KL} = \overline{AL},$$

que demuestra el teorema.

52. Se llama *proyección de un punto* A sobre una recta $x'x$, el pie de la perpendicular bajada desde el punto a la recta.

53. Se llama *proyección de un segmento* AB sobre una recta dirigida $x'x$, el segmento A_1B_1 que une la proyección A_1 de A con la proyección B_1 de B (fig. 48).

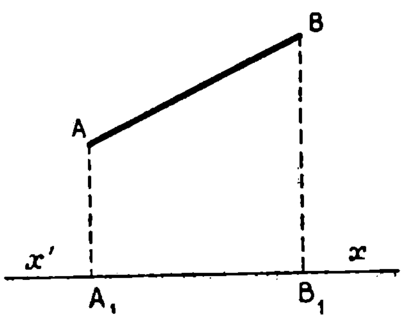


Figura 48

Si el segmento AB está en el mismo plano de la recta $x'x$, llamada *eje de proyección*, los puntos A_1 y B_1 son los pies de las rectas perpendiculares trazadas a $x'x$ desde los puntos A y B respectivamente.

Si el segmento AB no está en el mismo plano que $x'x$, se trazan por A y B los planos perpendiculares a la recta $x'x$ y los puntos A_1 y B_1 son la intersección de esos planos con el eje $x'x$.

54. *Contorno poligonal* es una serie de segmentos consecutivos que están o no sobre una misma recta o en un plano. El origen del primer segmento se llama el *origen de la poligonal* y el extremo libre del último se llama también el *extremo de la poligonal.*

El segmento que tiene por origen el origen de la poligonal y por extremo el extremo de ésta, se llama la *resultante* de la poligonal.

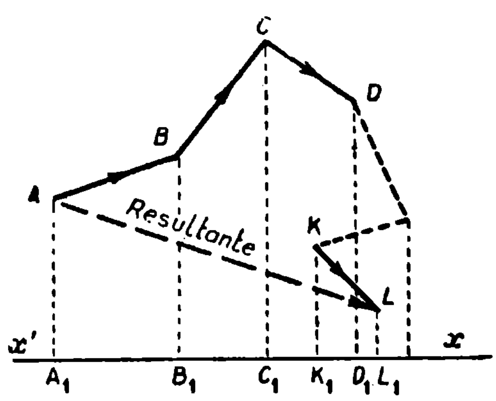


Figura 49

55. TEOREMA : *La medida de la proyección de un contorno poligonal es igual a la suma algebraica de las proyecciones de los segmentos que forman la poligonal, que son sus lados.* — Vamos a demostrar que:

$$\text{pr. AB} + \text{pr. BC} + \text{pr. CD} + . \qquad\qquad + \text{pr. KL} = \text{pr. AL}.$$

En efecto, se tiene (fig. 49)

$$\begin{aligned} \text{pr. AB} &= A_1B_1, \\ \text{pr. BC} &= B_1C_1, \\ \text{pr. CD} &= C_1D_1, \\ &\cdots \\ \text{pr. KL} &= K_1L_1, \\ \text{pr. AL} &= A_1L_1. \end{aligned}$$

Pero se sabe según el teorema de Charles (51) que:

$$A_1L_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + \qquad\qquad + K_1L_1.$$

luego:

$$\text{pr. AL} = \text{pr. AB} + \text{pr. BC} + \text{pr. CD} + \qquad\qquad + \text{pr. KL}.$$

Es decir, que la proyección de la resultante es igual a la suma de las proyecciones de los lados de la poligonal.

56. TEOREMA: *La medida de la proyección de un segmento AB sobre un eje $x'x$ es igual al producto de la longitud del segmento, por el coseno del ángulo que forma la dirección positiva del segmento con el eje de proyección.*

Sea (fig. 50) un segmento AB que forma con la dirección positiva del eje $x'x$ un ángulo α. Sea A_1B_1 el segmento proyección de AB sobre $x'x$. Queremos demostrar que:

$$\text{pr. (AB)} = A_1B_1 = \text{AB} \cos \alpha.$$

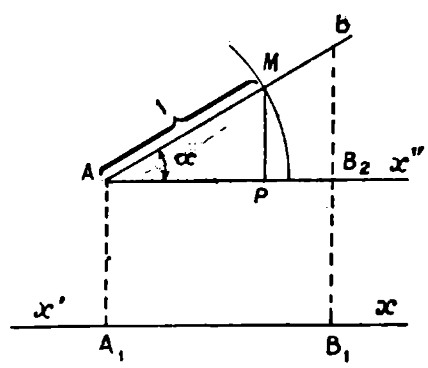


Figura 50

Tracemos por A la paralela Ax'' al eje $x'x$ y con centro en A tracemos un círculo trigonométrico que corta a AB en M. Desde M tracemos la normal MP a Ax''.

Tenemos en la figura 50:

$$A_1B_1 = AB_2 = \text{pr. (AB)}, \quad \text{y} \quad \cos \alpha = AP.$$

Y comparando los triángulos semejantes MAP y BAB_2, se tiene

$$\frac{AB_2}{AB} = \frac{AP}{AM}$$

o bien:

$$AB_2 = AB \cos \alpha.$$

Luego

$$\text{pr.}\,(AB) = AB \cos \alpha.$$

Y ahora deducimos un teorema fundamental, que aplicaremos varias veces.

57. TEOREMA: *La proyección de la resultante de un contorno poligonal es igual a la suma de las proyecciones de los lados de la poligonal,* o sea que la resultante de la poligonal por el coseno del ángulo que forma con la dirección positiva del eje de proyección es igual a la suma de las longitudes de los lados de la poligonal por los cosenos de ángulos que forma cada lado con la dirección positiva del eje de proyección.

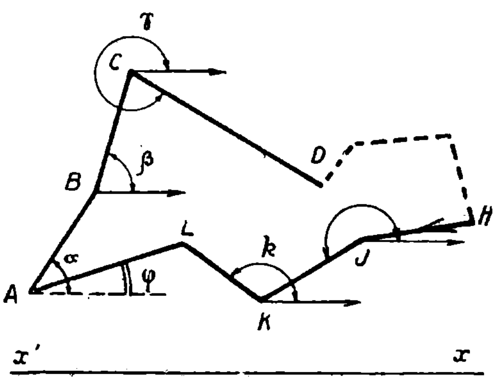


Figura 51

En efecto, sea una poligonal (fig. 51)

$$ABCD \qquad\qquad HJKL.$$

Sabemos que

$$\text{pr.}\,(AL) = \text{pr.}\,(AB) + \text{pr.}\,(BC) + \ldots + \text{pr.}\,(KL),$$

pero por el teorema anterior

$$\text{pr.}\,(AL) = AL \cos \varphi$$
$$\text{pr.}\,(AB) = AB \cos \alpha$$
$$\text{pr.}\,(BC) = BC \cos \beta$$
$$\text{pr.}\,(CD) = CD \cos \gamma$$

$$\text{pr.}\,(KL) = KL \cos k.$$

Y reemplazando se tiene:

$$AL \cos \varphi = AB \cos \alpha + BC \cos \beta + CD \cos \gamma + \ldots + KL \cos k.$$

Hay que tener cuidado al medir los ángulos de proyección, que son siempre los ángulos que forma la dirección positiva del eje de proyección con la dirección positiva del segmento.

Corolario. — Se deduce fácilmente que la suma algebraica de las proyecciones de los lados de una poligonal cerrada, sobre cualquier eje de proyección, es nula.

Adición y substracción de arcos

58. Determinaremos las líneas trigonométricas de la suma o diferencia de dos o más arcos en función de las líneas trigonométricas de los arcos mismos, y mostraremos en primer término que se verifica:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha.$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cos\alpha.$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta.$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta.$$

Tomemos el círculo trigonométrico de centro O (fig. 52) y a partir del origen A de los arcos llevemos en el sentido positivo el arco AM igual a α, a continuación llevemos el arco MN igual a β. El arco AN representa la suma $(\alpha + \beta)$ y por definición de las líneas tenemos, bajando de N la normal NL sobre OM, que:

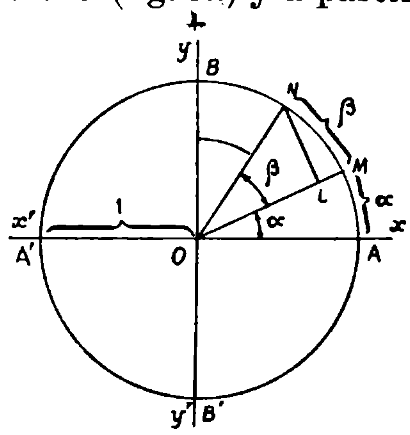


Figura 52

$$\operatorname{sen}\beta = \mathrm{LN},$$

$$\cos\beta = \mathrm{OL}.$$

Aplicando ahora el teorema de las proyecciones a la poligonal OLN, cuya resultante es ON se tiene:

$$\mathrm{pr.\,(ON)} = \mathrm{pr.\,(OL)} + \mathrm{pr.\,(LN)}. \qquad (1)$$

Y proyectando sobre el eje Ox, tenemos:

$$\mathrm{pr.\,(ON)} = \mathrm{ON}\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta)$$

$$\mathrm{pr.\,(OL)} = \mathrm{OL}\cos\alpha = \cos\alpha\cos\beta$$

$$\mathrm{pr.\,(LN)} = \mathrm{LN}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta,$$

y reemplazando en la (1) se tiene:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta. \tag{2}$$

Si proyectamos ahora la misma poligonal sobre el eje Oy tenemos:

$$\text{pr.}(\mathrm{ON}) = \mathrm{ON}\cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = \operatorname{sen}(\alpha + \beta),$$

$$\text{pr.}(\mathrm{OL}) = \mathrm{OL}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta,$$

$$\text{pr.}(\mathrm{LN}) = \mathrm{LN}\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta \cos\alpha,$$

y remplazando en (1) se tiene:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha. \tag{3}$$

Si en esta relación cambiamos β por $(-\beta)$ tenemos:

$$\operatorname{sen}[\alpha + (-\beta)] = \operatorname{sen}\alpha \cos(-\beta) + \operatorname{sen}(-\beta)\cos\alpha.$$

Pero $\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen}\beta$ y $\cos(-\beta) = \cos\beta$, luego se tiene:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cos\alpha \tag{4}$$

y haciendo lo mismo en la relación (2) tenemos:

$$\cos[\alpha + (-\beta)] = \cos\alpha \cos(-\beta) - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(-\beta)$$

de donde:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta. \tag{5}$$

59. CÁLCULO DE $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$. — Podemos escribir:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$

y expresando ahora el seno y coseno de la suma de arcos en función del seno y coseno de los arcos mismos tenemos:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha}{\cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta},$$

dividiendo numerador y denominador por $\cos\alpha \cos\beta$ y recordando que

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha\,; \qquad \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \operatorname{tg}\beta,$$

se tiene:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \tag{6}$$

fórmula que nos da la tangente de la suma de dos arcos en función de las tangentes de los arcos mismos.

Si en la relación (6) cambiamos el signo de β tenemos

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(-\beta)}$$

y recordando que

$$\operatorname{tg}(-\beta) = -\operatorname{tg}\beta,$$

tenemos:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}. \tag{7}$$

Las relaciones (5) y (6) las podemos reunir en la siguiente

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

En forma análoga se procede para hallar la cotangente de la suma o diferencia de dos arcos.

60. Cotangente de $(\alpha \pm \beta)$. — Podemos escribir:

$$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\cos(\alpha\pm\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)}$$

y desarrollando $\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)$ y $\cos(\alpha\pm\beta)$ tenemos:

$$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta\cos\alpha},$$

dividiendo numerador y denominador por $\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$ y recordando que

$$\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha \quad \text{y} \quad \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta} = \operatorname{ctg}\beta,$$

se tiene:

$$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}.$$

61. Otra demostración del teorema. — Sean dos arcos α y β y el círculo trigonométrico de centro O (fig. 53). Supongamos que el arco AM sea igual a α, a continuación y en el sentido positivo llevemos $MN = \beta$, tomando como origen al punto M, y llevemos en el sentido negativo el arco $MN_1 = -\beta$.

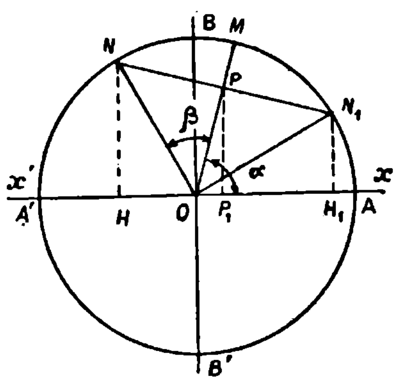


Figura 53

El diámetro que pasa por el punto M es normal en el punto medio P a la cuerda NN_1. Se tiene

$$\cos\beta = OP.$$

Tracemos desde N, N_1 y P las normales NH, N_1H_1 y PP_1 sobre el eje $x'x$ y resulta, teniendo en cuenta los signos:

$$\cos(\alpha+\beta) = OH,$$

$$\cos(\alpha-\beta) = OH_1.$$

Y también

$$OP_1 = \frac{OH + OH_1}{2}.$$

Y siendo OP_1 la proyección de OP sobre $x'x$, resulta:

$$OP_1 = OP\cos\alpha = \cos\alpha\cos\beta.$$

Luego obtenemos

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}. \qquad (1)$$

Esta fórmula vale para cualquier valor de α y de β. Hagamos ahora otro valor de α que sea $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, y otro valor de β que sea $\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$ y tenemos

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \frac{\cos[\pi-(\alpha+\beta)] + \cos(\beta-\alpha)}{2},$$

o bien, puesto que $\cos(\beta-\alpha) = \cos(\alpha-\beta)$, tenemos:

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{-\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}. \qquad (2)$$

Y sumando y restando la (1) con la (2) tenemos:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta.$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta.$$

62. OTRA DEMOSTRACIÓN. — Consideremos el círculo trigonométrico y sea AM el arco α y AN el arco β. Unimos M con N y trazamos las normales MP y NQ al eje $x'x$, llevemos también NK paralela a $x'x$.

Se tiene en la figura 54:

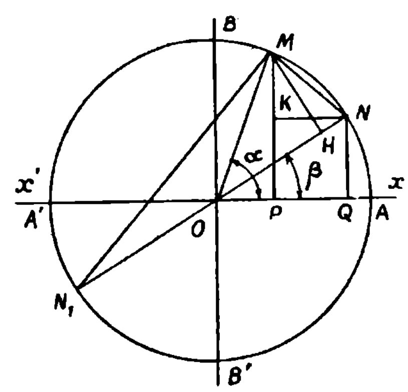


Figura 54

$$MP = \operatorname{sen}\alpha, \qquad OP = \cos\alpha,$$
$$NQ = \operatorname{sen}\beta, \qquad OQ = \cos\beta.$$

Y el triángulo rectángulo MKN nos da:

$$\overline{MN}^2 = \overline{KN}^2 + \overline{MK}^2. \tag{1}$$

Pero se tiene

$$KN = OQ - OP, \quad \text{y} \quad MK = MP - NQ,$$

es decir

$$KN = \cos\beta - \cos\alpha \quad \text{y} \quad MK = \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta,$$

luego la (1) nos da:

$$\overline{MN}^2 = (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2.$$

Y desarrollando los cuadrados se tiene:

$$\overline{MN}^2 = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta. \tag{2}$$

Si prolongamos NO hasta N_1 y unimos N_1 con M, el triángulo N_1MN es rectángulo en M y bajando la normal MH sobre ON, se divide a la hipotenusa N_1N en dos segmentos NH y N_1H. Se sabe que:

$$\overline{MN}^2 = N_1N \, . \, HN.$$

Pero $N_1N = 2$, $OH = \cos(\alpha - \beta)$, es decir que $HN = 1 - \cos(\alpha - \beta)$. Luego

$$\overline{MN}^2 = 2[1 - \cos(\alpha - \beta)] = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$

Igualando con la (2) se tiene:

$$2 - 2(\cos \alpha - \beta) = 2 - 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta.$$

De donde

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta.$$

Cambiando el signo de β, se tiene

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta.$$

Cambiando en esta última β por $\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$ se tiene, simplificado:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha.$$

Y cambiando ahora β por $-\beta$, se tiene:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha.$$

63. Supongamos que tanto α como β sean menores que un cuadrante, se tendrá $\alpha + \beta < 180°$.

Consideremos el círculo trigonométrico de centro O (fig. 55) y sea A el origen de los arcos. Tomemos AM $= \alpha$ y a continuación MN $= \beta$, se tendrá AN $= \alpha + \beta$.

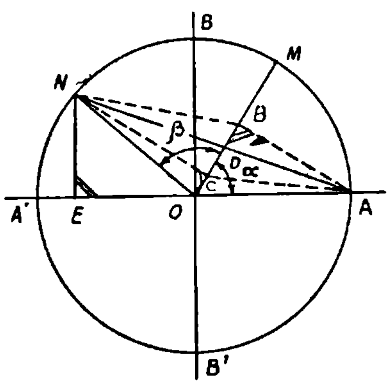


Figura 55

Bajemos las perpendiculares AB, NC y NE y por definición tenemos:

$$\operatorname{sen} \alpha = AB, \qquad \operatorname{sen} \beta = NC,$$
$$\cos \alpha = OB, \qquad \cos \beta = OC$$
$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = NE.$$

Uniendo A con C y con N y llamando D a la intersección de AN con OM, puesto que el triángulo NCA tiene la misma superficie que NCB ya que los dos tienen la misma base NC y la misma altura que es la distancia entre las paralelas NC y AB, se tiene:

$$\text{Sup. OAN} = \text{Sup. OAC} + \text{Sup. OCN} + \text{Sup. ACN},$$

o bien

$$\text{Sup. OAN} = \text{Sup. OAC} + \text{Sup. OCN} + \text{Sup. CNB},$$

o también

$$\text{Sup. OAN} = \text{Sup. OAC} + \text{Sup. OBN}. \qquad (1)$$

Pero

$$\text{Sup. OAN} = \frac{\text{OA} \times \text{NE}}{2} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{2},$$

$$\text{Sup. OAC} = \frac{1}{2}\text{OC} \times \text{AB} = \frac{\operatorname{sen}\alpha \cos\beta}{2},$$

$$\text{Sup. OBN} = \frac{1}{2}\text{OB} \times \text{NC} = \frac{\operatorname{sen}\beta \cos\alpha}{2}.$$

Y reemplazando en (1) se tiene:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha.$$

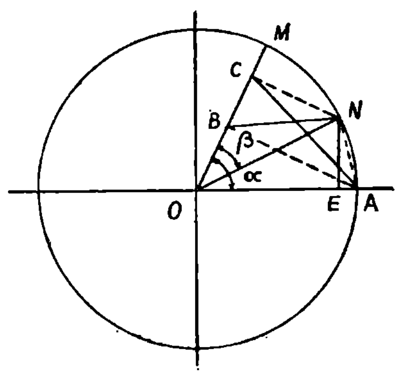


Figura 56

Consideremos ahora el caso en que β sea negativo, siempre podemos suponer que β es menor que α en valor absoluto, porque si no lo fuese, calculamos el sen $(\beta - \alpha)$ y luego cambiamos los signos de α y β.

Tendremos en ese caso (fig. 56) y siguiendo un camino análogo.

$$\operatorname{sen}\alpha = \text{AB}, \qquad \operatorname{sen}\beta = \text{NC},$$

$$\cos\alpha = \text{OB}, \qquad \cos\beta = \text{OC},$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \text{NE}.$$

Y de los triángulos sacamos:

$$\text{Sup. OAN} = \text{Sup. OANB} - \text{Sup. OBN},$$

o bien:

$$\text{Sup. OAN} = \text{Sup. OAB} + \text{Sup. ABN} - \text{Sup. OBN}$$

y también, puesto que

$$\text{Sup. ABN} = \text{Sup. ABC},$$

por tener la misma base AB y la misma altura, que es la distancia entre las paralelas AB y CN.

$$\text{Sup. OAN} = \text{Sup. OAB} + \text{Sup. ABC} - \text{Sup. OBN}.$$

Luego

$$\text{Sup. OAN} = \text{Sup. OAC} - \text{Sup. OBN}.$$

Pero es

$$\text{Sup. OAN} = \frac{\text{OA} \times \text{NE}}{2} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{2},$$

$$\text{Sup. OAC} = \frac{\text{OC} \times \text{AB}}{2} = \frac{\operatorname{sen}\alpha \cos\beta}{2},$$

$$\text{Sup. OBN} = \frac{\text{OB} \times \text{NC}}{2} = \frac{\cos\alpha \operatorname{sen}\beta}{2}.$$

Es decir que se tiene:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cos\alpha. \qquad (2)$$

Hemos encontrado las fórmulas que dan sen $(\alpha + \beta)$ y sen $(\alpha - \beta)$ en el supuesto caso que α y β sean menores que un cuadrante.

Es fácil ver que bajo las mismas condiciones para α y β se tiene:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta.$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta.$$

En efecto, en la fórmula (2) pongamos en lugar de α el valor $90° - \alpha$ y tendremos:

$$\operatorname{sen}[(90° - \alpha) - \beta] = \operatorname{sen}(90° - \alpha)\cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cos(90° - \alpha)$$

o bien

$$\cos(-\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta.$$

Pero

$$\cos(-\alpha - \beta) = \cos(\alpha + \beta),$$

luego

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta. \qquad (3)$$

Y cambiando aquí β por $-\beta$, se tiene

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta. \qquad (4)$$

Siempre, hasta ahora, con la condición de ser α y β menores que un cuadrante.

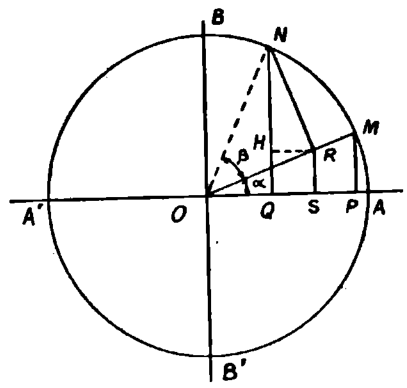


Figura 57

64. Otra demostración de las fórmulas:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha.$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta.$$

Supongamos dos arcos positivos α y β y cuya suma sea inferior a $\frac{\pi}{2}$. Siendo A el origen de los arcos, tomemos $AM = \alpha$ y a continuación $MN = \beta$, se tiene (fig. 57):

$$AN = \alpha + \beta.$$

Tracemos MP y NQ perpendiculares a OA y NR perpendicular a OM, RS perpendicular a OA y RH perpendicular a NQ, se tiene:

$$\operatorname{sen}\alpha = MP, \qquad \cos\alpha = OP,$$
$$\operatorname{sen}\beta = NR, \qquad \cos\beta = OR,$$
$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = NQ = RS + NH, \qquad \cos(\alpha + \beta) = OQ = OS - RH.$$

Por otra parte, siendo semejantes los triángulos MOP y ROS, se saca:

$$\frac{RS}{MP} = \frac{OS}{OP} = \frac{OR}{OM}$$

de donde:

$$RS = \frac{MP \times OR}{OM} = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta$$

y también:

$$OS = \frac{OP \times OR}{OM} = \cos\alpha \cos\beta.$$

Y comparando los triángulos semejantes MOP y RNH se tiene:

$$\frac{NH}{OP} = \frac{RH}{MP} = \frac{NR}{OM}$$

de donde:

$$NH = \frac{NR \times OP}{OM} = \operatorname{sen}\beta \cos\alpha$$

y

$$RH = \frac{MP \times NR}{OM} = \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta.$$

Luego se tiene:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = RS + NH = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha. \qquad (1)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = OS - RH = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta. \qquad (2)$$

Hemos obtenido estas fórmulas en el supuesto de ser $\alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Mostraremos ahora que las fórmulas (1) y (2), subsisten para cualquier valor de α o de β comprendido entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, es decir, cuando la suma $\alpha + \beta \leq \pi$.

En efecto, si $\alpha + \beta$ está comprendido entre $\frac{\pi}{2}$ y π, siendo α' y β' los complementos de α y β respectivamente, se tiene:

$$\alpha' + \beta' < \frac{\pi}{2}.$$

Y podemos escribir, de acuerdo con las fórmulas (1) y (2)

$$\operatorname{sen}(\alpha' + \beta') = \operatorname{sen}\alpha' \cos\beta' + \operatorname{sen}\beta' \cos\alpha',$$

$$\cos(\alpha' + \beta') = \cos\alpha' \cos\beta' - \operatorname{sen}\alpha' \operatorname{sen}\beta'.$$

Y puesto que es:

$$\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha, \qquad \beta' = \frac{\pi}{2} - \beta,$$

resulta:

$$\alpha' + \beta' = \pi - (\alpha + \beta).$$

Luego, reemplazando valores, se tiene:

$$\operatorname{sen}(\alpha' + \beta') = \operatorname{sen}[\pi - (\alpha + \beta)] = \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha$$

y

$$\cos(\alpha'+\beta')=\cos[\pi-(\alpha+\beta)]=-\cos(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta-\cos\alpha\cos\beta,$$

o bien:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

Es decir, que las fórmulas (1) y (2) valen también cuando α y β están cada uno comprendidos entre 0 y $\frac{\pi}{2}$.

65. Mostraremos ahora que *las fórmulas* (1) *y* (2) *subsisten cuando se agrega* $\frac{\pi}{2}$ *a uno de los arcos* α *o* β.

Supongamos que las fórmulas (1) y (2) valen para dos ángulos α y β y consideremos ahora un ángulo $\alpha'=\alpha+\frac{\pi}{2}$.

Despejando el valor de α se tiene

$$\alpha=\alpha'-\frac{\pi}{2}.$$

Y aplicando este valor de α, en las fórmulas (1) y (2) se tiene:

$$\operatorname{sen}\left(\alpha'-\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\operatorname{sen}\left(\alpha'-\frac{\pi}{2}\right)\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\left(\alpha'-\frac{\pi}{2}\right)$$

y

$$\cos\left(\alpha'-\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\cos\left(\alpha'-\frac{\pi}{2}\right)\cos\beta-\operatorname{sen}\left(\alpha'-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\beta,$$

y recordando que:

$$\operatorname{sen}\left(\alpha'-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha',$$

y

$$\cos\left(\alpha'-\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}\alpha',$$

se tiene:

$$\cos(\alpha'+\beta)=\cos\alpha'\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha'\operatorname{sen}\beta$$

y

$$\operatorname{sen}(\alpha'+\beta)=\operatorname{sen}\alpha'\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha'$$

es decir, que las fórmulas subsisten cuando incrementamos uno de los ángulos en $\frac{\pi}{2}$.

66. Mostramos ahora que las fórmulas subsisten para todo valor positivo de α y β.

Supongamos que el ángulo α tenga un número m de veces $\frac{\pi}{2}$ y el ángulo β un número n de veces, podemos poner :

$$\alpha = m\frac{\pi}{2} + \alpha'$$

$$\beta = n\frac{\pi}{2} + \beta'.$$

Donde α' y β' son menores que un cuadrante; podremos poner :

$$\text{sen}(\alpha' + \beta') = \text{sen}\,\alpha' \cos\beta' + \text{sen}\,\beta' \cos\alpha'$$
$$\cos(\alpha' + \beta') = \cos\alpha' \cos\beta' - \text{sen}\,\alpha' \,\text{sen}\,\beta'.$$

Y si ahora agregamos al ángulo α', sucesivamente m veces $\frac{\pi}{2}$ y luego al ángulo β', sucesivamente n veces el ángulo $\frac{\pi}{2}$, la fórmula siempre sigue valiendo y vale entonces para los ángulos α y β.

67. *Las fórmulas* (1) *y* (2) *valen para cualquier valor de α y β.* — Hemos mostrado que las fórmulas (1) y (2) valen para cualquier valor positivo de α y β; mostraremos que valen para cualquier valor de α y β, positivo o negativo.

Supongamos que uno de ellos α o los dos sean negativos. Siempre se les podrá agregar un número entero de circunferencias, hasta obtener valores positivos, es decir que podemos hacer (36) :

$$\alpha' = 2k\pi + \alpha$$
$$\beta' = 2k\pi + \beta.$$

Y podemos poner :

$$\text{sen}(\alpha' + \beta') = \text{sen}\,\alpha' \cos\beta' + \text{sen}\,\beta' \cos\alpha'$$
$$\cos(\alpha' + \beta') = \cos\alpha' \cos\beta' - \text{sen}\,\alpha' \,\text{sen}\,\beta'.$$

Y reemplazando los valores de α' y β' y recordando que

$$\operatorname{sen}(2k\pi + x) = \operatorname{sen} x$$
$$\cos(2k\pi + x) = \cos x.$$

Se encuentran las fórmulas (1) y (2).

Por otro lado, si en las fórmulas que dan

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \quad \text{y} \quad \cos(\alpha + \beta),$$

reemplazamos β por $-\beta$ se obtiene otra vez como hemos visto ya

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cos\alpha$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta.$$

Suma de varios arcos

68. *Observación.* — De las fórmulas que nos dan la suma de dos arcos, es facil obtener las que nos dan la suma de tres o más arcos, en función de las líneas de los arcos mismos.

Supongamos por ejemplo, que deseamos el seno, coseno y la tangente de la suma de tres arcos α, β y γ.

Podemos considerar a la suma de tres arcos $\alpha + \beta + \gamma$, como la suma de $(\alpha + \beta)$ y de γ y aplicar las fórmulas que hemos obtenido, como si se tratase de la suma de dos arcos y tendríamos :

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma) = \operatorname{sen}[(\alpha+\beta) + \gamma] = \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cos\gamma + \operatorname{sen}\gamma\cos(\alpha+\beta),$$
$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos[(\alpha+\beta) + \gamma] = \cos(\alpha+\beta)\cos\gamma - \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\gamma,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \operatorname{tg}[(\alpha+\beta) + \gamma] = \frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\gamma}.$$

Y si ahora se desarrolla $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$ y $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, de acuerdo a las fórmulas (2), (3) del nº 58 y (6) del nº 59 y tenemos

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma) = (\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha)\cos\gamma + \operatorname{sen}\gamma(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta),$$
$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = (\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)\cos\gamma - (\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha)\operatorname{sen}\gamma,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \dfrac{\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\operatorname{tg}\gamma}.$$

Y simplificando y ordenando se obtiene:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta\cos\gamma + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha\cos\gamma + \\
&\quad + \operatorname{sen}\gamma\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma \\
\cos(\alpha+\beta+\gamma) &= \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\gamma - \\
&\quad - \operatorname{sen}\cancel{\alpha}\cos\beta\operatorname{sen}\gamma - \operatorname{sen}\gamma\overset{\cos}{\cancel{\operatorname{sen}}}\alpha\operatorname{sen}\beta \\
\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Es claro que sería cómodo obtener ctg, sec, cosec de la suma de tres arcos, procediendo en la misma forma.

Si se quisiera obtener el seno, coseno y tangente de la suma de cuatro arcos $\alpha + \beta + \gamma + \delta$, procedemos en forma análoga. Consideramos a la suma de los cuatro arcos como la suma de dos $(\alpha+\beta+\gamma)$ y δ y obtenemos expresadas las líneas de la suma de los cuatro arcos en función de las líneas de la suma de los tres arcos $(\alpha + \beta + \gamma)$ y del arco δ. Reemplazando luego las líneas de la suma de tres arcos por los valores encontrados en función de los arcos mismos, se tiene resuelto el problema.

Y naturalmente se puede seguir el mismo camino para obtener las líneas de la suma de un número cualquiera de arcos.

CAPÍTULO IX

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE ARCOS

Se trata de resolver el siguiente problema: Conocidos los valores de las líneas trigonométricas de un arco, calcular los valores de las líneas del arco doble, triple, ..., $n\alpha$ del arco α, donde n es un número entero o también las líneas trigonométricas del arco $\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{3}, \ldots, \frac{\alpha}{n}\cdot$ Al primer problema se le llama impropiamente de *multiplicación de arcos* y al segundo de *división de arcos*.

Es claro que el primer problema se resuelve fácilmente considerando las líneas de 2, 3, 4, ..., n arcos diferentes y calculando la línea de la suma, de acuerdo con las fórmulas dadas en el nº 68 y siguientes y luego igualando los arcos entre sí. Es en el fondo como vamos a proceder.

69. MULTIPLICACIÓN. — Si en las fórmulas que nos dan sen, cos, y tg de $(\alpha + \beta)$ en función de las líneas mismas (nos 58 y 59) hacemos $\alpha = \beta$, tenemos:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha, \tag{1}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}\cdot \tag{3}$$

Y recordando que

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad (\text{nº } 37)$$

las dos primeras nos dan:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \pm 2 \operatorname{sen}\alpha\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha} = \pm 2\cos\alpha\sqrt{1 - \cos^2\alpha},$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha.$$

Si en las fórmulas (1) del nº 68 que nos dan las líneas de la suma de tres arcos α, β y γ en función de las líneas de los arcos mismos hacemos $\alpha = \beta = \gamma$, tenemos:

$$\operatorname{sen} 3\alpha = 3 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha,$$

$$\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha,$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}. \tag{4}$$

Y teniendo en cuenta nuevamente la relación del nº 37 (a) se tiene también:

$$\operatorname{sen} 3\alpha = 3 \operatorname{sen} \alpha - 4 \operatorname{sen}^3 \alpha \tag{5}$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha, \tag{6}$$

y así sucesivamente. Podríamos obtener fácilmente, prosiguiendo en la misma forma:

$$\operatorname{sen} 4\alpha = 4 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha (1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha)$$

$$\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$$

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha - 4 \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 6 \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha}$$

$$\operatorname{sen} 5\alpha = 5 \operatorname{sen} \alpha - 20 \operatorname{sen}^3 \alpha + 16 \operatorname{sen}^5 \alpha$$

$$\cos 5\alpha = 16 \cos^5 \alpha - 20 \cos^3 \alpha + 5 \cos \alpha.$$

Y en general, si en las fórmulas que dan las líneas de $\alpha + \beta$ hacemos $\beta = (n - 1)\alpha$, se tiene:

$$\operatorname{sen} n\alpha = \operatorname{sen}(n-1)\alpha \cos \alpha + \cos(n-1)\alpha \operatorname{sen} \alpha$$
$$= 2 \operatorname{sen}(n-1)\alpha \cos \alpha - [\operatorname{sen}(n-1)\alpha \cos \alpha - \cos(n-1)\alpha \operatorname{sen} \alpha],$$

$\operatorname{sen}((n-1)\alpha - \alpha)$
$\operatorname{sen}((n\alpha - \alpha - \alpha)$

o bien

$$\operatorname{sen} n\alpha = 2 \operatorname{sen}(n-1)\alpha \cos \alpha - \operatorname{sen}(n-2)\alpha.$$

Y también:

$$\cos n\alpha = \cos(n-1)\alpha \cos \alpha - \operatorname{sen}(n-1)\alpha \operatorname{sen} \alpha$$
$$= 2 \cos(n-1)\alpha \cos \alpha - [\cos(n-1)\alpha \cos \alpha + \operatorname{sen}(n-1)\alpha \operatorname{sen} \alpha]$$

o bien:

$$\cos n\alpha = 2 \cos(n-1)\alpha \cos \alpha - \cos(n-2)\alpha.$$

Y para la tg tendríamos igualmente

$$\operatorname{tg} n\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(n-1)\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(n-1)\alpha}.$$

70. Geométricamente. — Mostrar que se tiene:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha.$$

Tomemos un círculo trigonométrico de centro O y sea A el origen de los arcos. Tomemos un arco AM igual a 2α y desde M bajemos la perpendicular MP sobre el diámetro AA′. Uniendo M con A, A′ y O se tiene, por definición:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \mathrm{MP},$$

$$\cos 2\alpha = \mathrm{OP}.$$

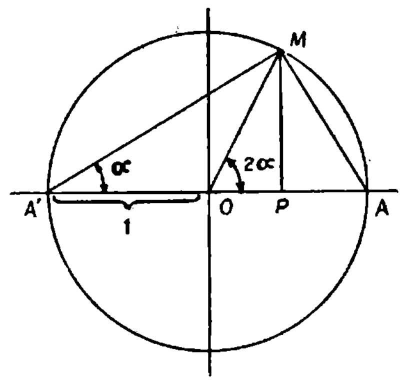


Figura 58

El ángulo MA′A vale α. Y se tiene en la figura 58:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AA'}} = \frac{\mathrm{AM}}{2},$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{A'M}}{\mathrm{AA'}} = \frac{\mathrm{A'M}}{2}.$$

El ángulo A′MA es recto y el área del triángulo A′MA vale:

$$\frac{\mathrm{AA'} \times \mathrm{MP}}{2} = \frac{\mathrm{A'M} \times \mathrm{MA}}{2},$$

de donde

$$\mathrm{MP} = \frac{\mathrm{A'M} \times \mathrm{MA}}{2} = \frac{2\operatorname{sen}\alpha \, . \, 2\cos\alpha}{2},$$

o bien

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha.$$

Para expresar el cos 2α, podemos escribir:

$$\cos 2\alpha = \mathrm{OP} = \frac{2\mathrm{AA'} \times \mathrm{OP}}{4} = \frac{\overline{\mathrm{A'M}}^2 - \overline{\mathrm{AM}}^2}{4} = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha,$$

pues, *en todo triángulo, la diferencia de los cuadrados de dos lados es igual al doble producto del tercero por la proyección sobre este lado de la mediana que le corresponde.*

71. DIVISIÓN DE ARCOS. — El problema de la división de arcos consiste en lo siguiente: Conociendo las líneas del arco α, calcular las líneas del arco $\frac{a}{n}$, donde n toma los valores enteros 2, 3, 4, ...

El problema es simple para n igual a una potencia entera de 2; pero, para otros valores de n, conduce en general a ecuaciones del grado superior al 2°.

Resolveremos en primer lugar los casos más simples.

1° *Conociendo el valor de* sen α, *calcular el valor de*

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2},\quad \cos\frac{\alpha}{2}\quad \text{y}\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Tenemos, de acuerdo con la fórmula 1 (n° 69)

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x.$$

Y haciendo $2x = \alpha$, se tiene $x = \frac{\alpha}{2}$ y resulta

$$\operatorname{sen}\alpha = 2 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}. \tag{1}$$

Y también se tiene:

$$\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1. \tag{2}$$

Tenemos así con (1) y (2) un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, las que por suma y resta nos dan:

$$\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 1 + \operatorname{sen}\alpha,$$

$$\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 1 - \operatorname{sen}\alpha,$$

o lo que es lo mismo:

$$\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 + \operatorname{sen}\alpha$$

$$\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 - \operatorname{sen}\alpha$$

de donde:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{1 + \operatorname{sen}\alpha},$$

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}\alpha}.$$

Y sumando y restando se tiene:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{1 + \operatorname{sen}\alpha} \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}\alpha}\right), \tag{3}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{1 + \operatorname{sen}\alpha} \mp \sqrt{1 - \operatorname{sen}\alpha}\right). \tag{4}$$

Se obtienen así cuatro valores para $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$ y cuatro valores para $\cos\frac{\alpha}{2}$.

Es fácil encontrar en el círculo trigonométrico, la explicación de estos cuatro valores para $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$ y $\cos\frac{\alpha}{2}$. En efecto, supongamos (fig. 59) que OL represente el valor $\operatorname{sen}\alpha$. Los arcos cuyo seno es OL, están dados por las series:

$$\alpha,\quad 2\pi + \alpha,\quad 4\pi + \alpha,\quad ,\ M$$

$$\pi - \alpha,\quad 3\pi - \alpha,\quad 5\pi - \alpha, \ldots M'$$

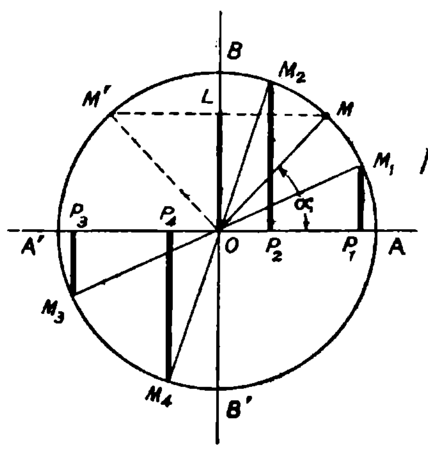
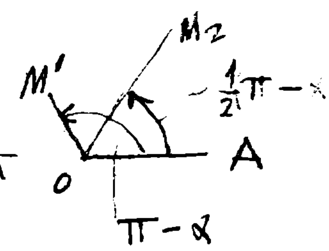


Figura 59



Y los *arcos mitad* correspondientes son:

$$1^{a})\qquad \overset{M_1}{\frac{\alpha}{2}},\quad \overset{M_3}{\pi + \frac{\alpha}{2}},\quad \overset{M_1}{2\pi + \frac{\alpha}{2}},\quad ,$$

$$2^{a})\qquad \frac{\pi}{2} - \overset{M_2}{\frac{\alpha}{2}},\quad \frac{3\pi}{2} - \overset{M_4}{\frac{\alpha}{2}},\quad \frac{5\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}, \ M_2$$

La primera serie corresponde a los arcos con origen en el punto A y extremo libre en los puntos M_1 o M_3; y la segunda corresponde a los arcos cuyo origen es el punto A y su extremo libre en M_2 o en M_4. Se ve que se tienen cuatro valores distintos para el $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$ y que son dos a dos iguales pero de signo contrario. Así en la figura se tiene:

$$M_1P_1 = -M_3P_3.$$

$$M_2P_2 = -M_4P_4.$$

Se ve también que se obtienen cuatro valores distintos para $\cos\frac{\alpha}{2}$ y que son dos a dos iguales pero de signo contrario.

$$\begin{aligned} OP_1 &= -OP_3 \\ OP_2 &= -OP_4 \end{aligned}$$

Observando la figura o por las fórmulas, se ve que los cuatro valores que se tiene para el $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$ son iguales a los cuatro valores que se obtienen para el $\cos\frac{\alpha}{2}$ aunque no se corresponden entre sí. Si tiene así:

$$\begin{aligned} M_1P_1 &= OP_2 \\ M_2P_2 &= OP_1 \\ M_3P_3 &= OP_4 \\ M_4P_4 &= OP_3 \end{aligned}$$

lo que por otra parte también indican las fórmulas (3) y (4).

Para calcular $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, tenemos:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pm\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha} \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}}{\pm\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha} \mp\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}}.$$

Como hemos obtenido cuatro valores para el $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$ y cuatro valores correspondientes para $\cos\frac{\alpha}{2}$, parecería que obtenemos también cuatro valores distintos para $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Sin embargo, y observando la figura se ve que se tienen sólo dos valores diferentes para $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; en efecto, la tg de los arcos con extremo libre en M_1 y en M_3 es igual, y lo mismo ocurre con los arcos con extremo libre en M_2 y M_4.

Por otra parte, se deduce lo mismo de las series de ángulos $\frac{\alpha}{2}$, que hemos dado:

$$\frac{\alpha}{2},\quad \pi+\frac{\alpha}{2},\quad 2\pi+\frac{\alpha}{2},\ldots,$$

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2},\quad \frac{3\pi}{2}-\frac{\alpha}{2},\quad \frac{5\pi}{2}-\frac{\alpha}{2},\ldots.$$

Todos los de la primera serie tienen la misma tg., y todos los de la 2ª también *otra* misma tg.

Y finalmente, eso puede obtenerse de las fórmulas que dan la $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

En efecto, tomemos nuevamente:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\pm\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha} \pm \sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}}{\pm\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha} \mp \sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}}$$

que debemos desdoblar en la siguiente forma:

$$\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg} = \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha} + \sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}}{\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha} - \sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha} - \sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}}{\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha} + \sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{-\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha} + \sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}}{-\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha} - \sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{-\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha} - \sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}}{-\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha} + \sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}}.$$

Multiplicando numerador y denominador de la última por -1, obtenemos la 1ª y multiplicando numerador y denominador de la 3ª por -1 obtenemos la 2ª.

Cuando se da solamente el valor del sen α, se encuentran las soluciones que anteceden. Es claro que si se da el arco, la solución es única.

Ejemplo I. — Supongamos $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Calcular $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ y $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Tendremos:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\pm\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\right]$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\mp\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\mp\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\right]$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}\mp\sqrt{2-\sqrt{2}}}.$$

Y tenemos cuatro valores para sen $\frac{\alpha}{2}$, cuatro para cos $\frac{\alpha}{2}$ y dos para tg $\frac{\alpha}{2}$.

Pero si ponemos en cambio:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

y queremos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{8},\quad \cos\frac{\pi}{8}\quad \text{y}\quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{8},$$

es claro que encontramos un solo valor para cada uno, que son precisamente:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\right]$$

$$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\right]$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}}.$$

72. *Calcular las líneas trigonométricas del arco* $\frac{\alpha}{2}$ *conociendo* cos α.— Tenemos según la relación:

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2},$$

y también sabemos

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Y se obtiene:

$$1 - \cos\alpha = 2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2},$$ restando

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$ suma de

De donde:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad (1)$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad (2)$$

y dividiendo entre sí:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}. \qquad (3)$$

Y es claro que ahora sería fácil obtener cosec $\frac{\alpha}{2}$, sec $\frac{\alpha}{2}$ y ctg $\frac{\alpha}{2}$ que son respectivamente las inversas de los valores de sen $\frac{\alpha}{2}$, cos $\frac{\alpha}{2}$ y tg $\frac{\alpha}{2}$.

Se ve por las fórmulas (1), (2) y (3) que dado el valor de cos α, se obtienen dos valores iguales y de signo contrario para sen $\frac{\alpha}{2}$, cos $\frac{\alpha}{2}$ y tg $\frac{\alpha}{2}$.

Es cómodo ver en el círculo trigonométrico, cómo aparecen esos valores.

Dado el valor de cos α = OP (fig. 60), existen dos series de arcos que tienen por cos el valor OP, aquellos que tienen origen en A y extremo libre en M, dados por la serie

$$\alpha,\ 2\pi + \alpha,\ 4\pi + \alpha,\ 6\pi + \alpha, \ldots$$

Y aquellos con el mismo origen A y extremo libre en M′ dados por

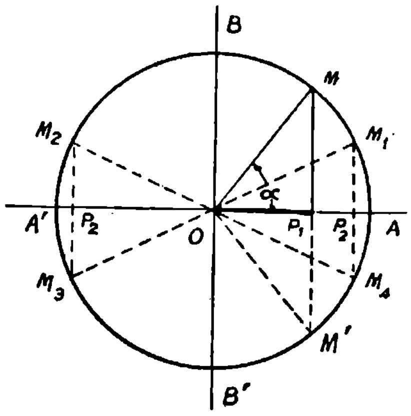


Figura 60

$$2\pi - \alpha,\ 4\pi - \alpha,\ 6\pi - \alpha,\ 8\pi - \alpha, \ldots$$

Y los *arcos mitad* correspondientes son respectivamente

$$1^{a})\quad \frac{\alpha}{2},\ \pi + \frac{\alpha}{2},\ 2\pi + \frac{\alpha}{2},\ 3\pi + \frac{\alpha}{2}, \ldots$$

$$2^{a})\quad \pi - \frac{\alpha}{2},\ 2\pi - \frac{\alpha}{2},\ 3\pi - \frac{\alpha}{2},\ 4\pi - \frac{\alpha}{2}, \ldots$$

La primera corresponde a los arcos con extremo libre en M_1 y en M_3, y la segunda a arcos con extremo libre M_2 y M_4.

Pero es fácil ver que los arcos :

$$\frac{\alpha}{2},\ \pi - \frac{\alpha}{2},\ 2\pi + \frac{\alpha}{2},\ 3\pi - \frac{\alpha}{2}, \ldots,$$

tienen el mismo seno y también

$$\pi + \frac{\alpha}{2},\ 2\pi - \frac{\alpha}{2},\ 3\pi + \frac{\alpha}{2},\ 4\pi\quad \frac{\alpha}{2}, \ldots,$$

tienen el mismo seno y que los arcos

$$\frac{\alpha}{2},\ 2\pi - \frac{\alpha}{2},\ 2\pi + \frac{\alpha}{2},\ 4\pi - \frac{\alpha}{2},$$

tienen el mismo coseno y también

$$\pi - \frac{\alpha}{2},\ \pi + \frac{\alpha}{2},\ 3\pi - \frac{\alpha}{2},\ 3\pi + \frac{\alpha}{2},$$

tienen el mismo coseno, y finalmente que los arcos, que tienen extremo libre en M_1 y M_3 dados por

$$\frac{\alpha}{2},\ \pi + \frac{\alpha}{2},\ 2\pi + \frac{\alpha}{2},\ 3\pi + \frac{\alpha}{2}, \ldots,$$

tienen la misma tg lo mismo que los arcos con extremo en M_2 y M_4 que son dados por :

$$\pi - \frac{\alpha}{2},\ 2\pi - \frac{\alpha}{2},\ 3\pi - \frac{\alpha}{2},\ 4\pi - \frac{\alpha}{2}, \ldots,$$

tienen la misma tangente.

Ejercicio. — Conociendo el $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, calcular sen, cos y tg de $\frac{\pi}{6}$.

Tenemos :

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = +\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = +\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

73. División de la tg. — *Conociendo el valor de* $\operatorname{tg}\alpha$, *calcular el de* $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

La relación (3) (nº 69) nos da :

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

Y haciendo $2x = \alpha \therefore x = \frac{\alpha}{2}$, se obtiene :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

ecuación de 2º grado en $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, que nos da :

$$\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\alpha = 0.$$

De donde se obtiene :

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Es decir, que para cada valor de tg α, se obtienen dos valores distintos para tg $\frac{\alpha}{2}$. Es fácil explicar la existencia de estos dos valores.

Si consideramos el círculo trigonométrico y sobre la tangente geométrica zz' tomamos el valor de tg α, igual a AT, por ejemplo. Todos los ángulos con origen en A y extremo libre en M o en M′ tienen por tg el valor AT (fig. 61). Y todos estos arcos están dados por:

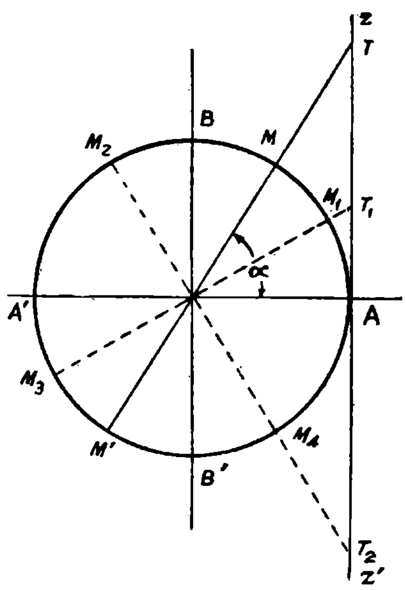


Figura 61

$$k\pi + \alpha.$$

Y la *mitad* de estos arcos por la expresión

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}.$$

Siendo k un valor par, tenemos la serie:

$$\frac{\alpha}{2},\ \pi + \frac{\alpha}{2},\ 2\pi + \frac{\alpha}{2},\ 4\pi + \frac{\alpha}{2},$$

Y todos estos arcos tienen por extremo libre los puntos M_1 o M_3, es decir, todos tienen la misma tg AT_1.

Si en cambio, k es un número impar, obtenemos la serie:

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2},\ \frac{3\pi}{2} + \frac{\alpha}{2},\ \frac{5\pi}{2} + \frac{\alpha}{2},\ldots,$$

y todos estos arcos tienen por extremo libre los puntos M_2 o M_4, y tienen la misma tg que es AT_2.

Se puede observar que siendo k un número par, podemos poner $k = 2k'$ y tenemos:

$$\operatorname{tg}\left[\frac{2\,k'\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right] = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Y siendo k impar, podemos poner $k = 2k' + 1$, y tenemos:

$$\operatorname{tg}\left[\frac{(2k' + 1)}{2}\pi + \frac{\alpha}{2}\right] = \operatorname{tg}\left[k'\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right] = -\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Es decir, que los dos valores que se obtienen para la tangente son recíprocos y de signo contrario, lo que pudimos prever fijándonos en la ecuación de 2° grado, donde el producto de las raíces debe ser igual a -1.

Ejercicio. — Calcular $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$, conociendo $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

Tenemos:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{-1+\sqrt{1+3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Y es claro que ahora tomamos solamente el signo $+$ para el radical, porque la $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$ está en el primer cuadrante y debe ser positiva.

Si nuestro problema fuese: Conociendo $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$, calcular $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, tendríamos las dos soluciones:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{-1+\sqrt{1+3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

y

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{-1-\sqrt{1+3}}{\sqrt{3}}=\frac{-3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}.$$

Y el producto de las dos vale -1.

74. *Expresar* sen $\frac{\alpha}{2}$ *y* cos $\frac{\alpha}{2}$ *en función de* tg α.

Tenemos:

$$\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\cos\alpha\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\right)$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\cos\alpha\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\right).$$

Luego

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1\mp\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\right)}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\right)}.$$

Y dividiendo una por la otra, obtenemos nuevamente

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Y es fácil explicar los cuatro valores para $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$ y $\cos\frac{\alpha}{2}$ que se obtienen.

75. Teorema : *Las líneas trigonométricas de un arco pueden expresarse racionalmente en función de la* tg *del arco mitad.* — Este teorema es de importancia y lo utilizaremos muchas veces, especialmente en la resolución de ecuaciones trigonométricas.

Para el sen α podemos escribir sucesivamente : divido x $\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$$\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{1}$$

$\cos^2\frac{\alpha}{2}$

Y para obtener el $\cos\alpha$, podemos también poner :

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{2}$$

Donde hemos reemplazado la unidad por $\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}$ y luego dividido numerador y denominador por $\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

Es claro que la expresión de $\operatorname{tg}\alpha$ en función de $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, es dada por una expresión racional, directamente por la fórmula que hemos encontrado (nº 73)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{3}$$

Las fórmulas (1), (2) y (3) dan la expresión $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ en función de $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ en forma racional.

Como la $\mathrm{ctg}\,\alpha$, $\sec\alpha$ y $\mathrm{cosec}\,\alpha$ son respectivamente las inversas de $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\cos\alpha$ y $\mathrm{sen}\,\alpha$, tendremos que también ellas quedan expresadas en forma racional en función de la $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

76. Divisiones por 4, 8, 16, 32, ... — Hemos visto que conociendo el valor de la línea de un arco α, se puede encontrar la del arco $\frac{\alpha}{2}$ y es claro que esto nos da la pauta para calcular la línea del arco $\frac{\alpha}{4}$ y luego la del $\frac{\alpha}{8}$ y así sucesivamente ..., se puede llegar al arco

$$\frac{\alpha}{2^n}$$

donde n es un número entero.

Tomando nuevamente las expresiones:

$$\mathrm{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

Si queremos las líneas del arco $\frac{\alpha}{4}$, tendríamos:

$$\mathrm{sen}\frac{\alpha}{4} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{4} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\alpha}{2}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}{2}}$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{4} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos\frac{\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{1+\cos\frac{\alpha}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}{1 \pm \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}}.$$

Y así sucesivamente para $\frac{\alpha}{8}$, $\frac{\alpha}{16}$, ..., etc.

Hemos obtenido cuatro valores diferentes para sen $\frac{\alpha}{4}$ y se puede dar una explicación del porqué de la existencia de ellos.

En efecto, nos hemos dado el valor del cos α y sabemos que los valores de α que tienen ese coseno, están dados por las series:

$$\alpha, \quad 2\pi + \alpha, \quad 4\pi + \alpha, \quad 6\pi + \alpha, \quad 8\pi + \alpha, \quad 10\pi + \alpha,$$

y

$$2\pi - \alpha, \quad 4\pi - \alpha, \quad 6\pi - \alpha, \quad 8\pi - \alpha, \quad 10\pi - \alpha, \quad 12\pi - \alpha,$$

y los valores de $\frac{\alpha}{4}$ serán respectivamente:

$$1^{a}) \quad \frac{\alpha}{4}, \quad \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4}, \quad \pi + \frac{\alpha}{4}, \quad \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4}, \quad 2\pi + \frac{\alpha}{4}, \quad 2\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4},$$

$$2^{a}) \quad \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}, \quad \pi - \frac{\alpha}{4}, \quad \pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}, \quad 2\pi - \frac{\alpha}{4}, \quad 2\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}, \quad 3\pi - \frac{\alpha}{4}, \ldots$$

La primera serie corresponde en la figura 62 a los arcos con extremos libres en M_1, M_3, M_5, M_7 y la segunda a los arcos con extremos libres en M_2, M_4, M_6, M_8.

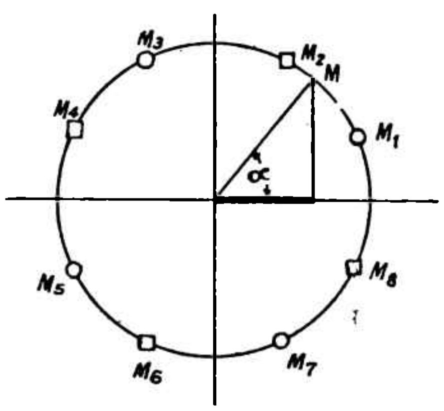


Figura 62

Es fácil ver que los arcos con extremos libres en M_1 y M_4, M_2 y M_3, M_5 y M_8, M_6 y M_7 tienen respectivamente el mismo *seno* en valor y signo. Es decir, que tenemos cuatro valores para sen $\frac{\alpha}{2}$, como dan las fórmulas.

También los arcos con extremos en M_1 y M_8, M_2 y M_7, M_3 y M_6, M_4 y M_5, tienen dos a dos el mismo *coseno* en valor y signo; es decir, que hay cuatro valores para el coseno.

Y finalmente, los arcos con extremos libres en M_1 y M_5, M_2 y M_6, M_3 y M_7, M_4 y M_8 tienen respectivamente la misma *tangente*.

I. *Problema:* cos $\frac{\alpha}{3}$ *en función de* cos α. — Hemos encontrado la fórmula (6) (nº 69)

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a, \qquad (1)$$

y haciendo

$$3a = \alpha, \qquad \text{se tiene} \qquad a = \frac{\alpha}{3},$$

y la ecuación (1) nos da:

$$\cos \alpha = 4 \cos^3 \frac{\alpha}{3} - 3 \cos \frac{\alpha}{3},$$

es decir que se tiene:

$$\cos^3 \frac{\alpha}{3} - \frac{3}{4} \cos \frac{\alpha}{3} - \frac{\cos \alpha}{4} = 0.$$

Que es una ecuación de tercer grado y cuya solución nos da las tres raíces de la ecuación.

Se puede mostrar que tiene tres raíces reales siempre que $\cos \alpha \leq 1$. En efecto, si conocemos el valor de $\cos \alpha$, los valores de α están dados por

$$2k\pi \pm \alpha.$$

Y los valores de la *tercera parte* de estos arcos están dados por

$$\cos \frac{\alpha}{3} = \cos \left(\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right).$$

donde hay que dar a k todos los valores enteros, positivos, negativos y aun el valor 0.

Podemos escribir

$$k = 3m + \lambda$$

siendo m el mayor número de veces que está el número 3 en k, y λ un número que puede tomar los valores 0, 1, 2.

Se tiene entonces:

$$\cos \frac{\alpha}{3} = \cos \left(2m\pi + \frac{2\lambda\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right) = \cos \left(\frac{2\lambda\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right).$$

Y ahora, dando a λ todos los valores posibles 0, 1, 2, se tienen seis arcos:

$$\pm \frac{\alpha}{3}, \qquad \frac{2\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}, \qquad \frac{4\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}.$$

Pero los tres arcos:

$$-\frac{\alpha}{3}, \quad \frac{4\pi}{3}-\frac{\alpha}{3} \quad \text{y} \quad \frac{2\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}$$

tienen los mismos cosenos respectivamente que

$$\frac{\alpha}{3}, \quad \frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3} \quad \text{y} \quad \frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}$$

luego se tienen para $\cos\frac{\alpha}{3}$ solamente los tres valores diferentes

$$\cos\frac{\alpha}{3}, \quad \cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right) \quad \text{y} \quad \cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right).$$

Y si M_1, M_2 y M_3 representan los extremos libres de esos arcos en el círculo trigonométrico, ellos forman los vértices de un triángulo equilátero.

II. *Problema: Dado* $\operatorname{sen}\alpha$, *calcular* $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3}$. — Si en la fórmula (5) (nº 69)

$$\operatorname{sen} 3a = 3 \operatorname{sen} a - 4 \operatorname{sen}^3 a, \tag{1}$$

hacemos $3a=\alpha$ se tiene $a=\frac{\alpha}{3}$,
y la ecuación (1) nos da:

$$\operatorname{sen}\alpha = 3 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{3} - 4 \operatorname{sen}^3\frac{\alpha}{3},$$

es decir, que se tiene:

$$\operatorname{sen}^3\frac{\alpha}{3} - \frac{3}{4}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\alpha = 0$$

que es una ecuación de tercer grado. Se puede mostrar que tiene tres raíces para valores compatibles de $\operatorname{sen}\alpha$. En efecto, si se conoce el valor de $\operatorname{sen}\alpha$, y si α es uno de los arcos que tiene por seno a $\operatorname{sen}\alpha$, los valores de α están dados por

$$2k\pi+\alpha \qquad \text{y} \qquad (2k+1)\pi-\alpha,$$

y los diferentes valores de $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3}$:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3} = \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\frac{\alpha}{3} = \operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{3}\pi-\frac{\alpha}{3}\right).$$

Y si m es el mayor número de veces que cabe el número 3 en k, podemos poner:

$$k = 3\,m + \lambda$$

donde λ puede tomar los valores 0, 1 y 2 y entonces:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3} = \operatorname{sen}\left(2m\pi + \frac{2\lambda\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\lambda\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right),$$

y

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3} = \operatorname{sen}\left(2m\pi + \frac{2\lambda + 1}{3}\pi - \frac{\alpha}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\lambda + 1}{3}\pi - \frac{\alpha}{3}\right),$$

y dando a λ los valores 0, 1, 2 obtenemos los seis arcos

$$\frac{\alpha}{3}, \quad \frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}, \quad \frac{4\pi}{3} + \frac{\alpha}{3},$$

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}, \quad \pi - \frac{\alpha}{3}, \quad \frac{5\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}.$$

Pero los arcos

$$\pi - \frac{\alpha}{3}, \quad \frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}, \quad \frac{5\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}$$

tienen respectivamente los mismos senos que los arcos

$$\frac{\alpha}{3}, \quad \frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}, \quad \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

luego los únicos valores distintos para sen $\frac{\alpha}{3}$ son

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3}, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right).$$

III. *Problema: Conociendo* $\operatorname{tg}\alpha$, *calcular* $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}$. — Si en la fórmula (4) (nº 69)

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{3 \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 a}, \tag{1}$$

hacemos $3a = \alpha$, resulta $\frac{\alpha}{3} = a$ y reemplazando en (1) se tiene:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{3} - \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{3}}{1 - 3 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3}}.$$

lo que nos da

$$\operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{3} - 3 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{3} - 3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} + \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

La solución del problema depende de una ecuación de tercer grado. Podemos ver lo que significan sus tres raíces. Si se conoce tg α, el valor de α estará dado por:

$$\alpha = k\pi + \alpha$$

y entonces

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} = \operatorname{tg} \left(\frac{k\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right).$$

Hagamos nuevamente $k = 3m + \lambda$, donde λ puede tomar los valores 0, 1 y 2, y se tiene:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} = \operatorname{tg} \left(m\pi + \frac{\lambda\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\lambda\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right)$$

y dando a λ los valores 0, 1 y 2 se tienen los tres valores de las raíces

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{3}, \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right).$$

CAPÍTULO X

EXPRESIONES LOGARÍTMICAS

77. Una expresión se dice *logarítmica,* cuando se puede calcular directamente en forma que su logaritmo puede obtenerse como la suma algebraica de otros logaritmos de números conocidos, multiplicados o divididos en ciertos casos por números enteros simples que son los exponentes o los índices de las raíces.

Así, por ejemplo, la expresión:

$$x = \frac{2ab\sqrt{c}\operatorname{tg}\alpha}{3\sqrt[3]{d}\operatorname{sen}\beta},$$

es logarítmica, porque se tiene:

$$\log x = \log 2 + \log a + \log b + \frac{1}{2}\log c +$$

$$+ \log \operatorname{tg}\alpha - \log 3 - \frac{1}{3}\log d - \log \operatorname{sen}\beta$$

mientras que la expresión:

$$y = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos c},$$

no es una expresión logarítmica.

Vamos a ver algunas expresiones que permiten transformar sumas en productos, o expresiones binomias o polinomias en expresiones monomias.

Veremos al mismo tiempo algunas transformaciones útiles en la resolución de muchos problemas, por ejemplo, transformar una suma o diferencia en un producto.

78. *Transformación de un producto de senos o cosenos en una suma o diferencia.* — Partiendo de las expresiones:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha,$$
$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\beta\cos\alpha,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

Sumando y restando las dos primeras, se obtiene:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+(\operatorname{sen}\alpha-\beta)=2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta, \qquad (1)$$
$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-(\operatorname{sen}\alpha-\beta)=2\operatorname{sen}\beta\cos\alpha. \qquad (2)$$

Y sumando y restando la 3ª y 4ª se obtiene

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta, \qquad (3)$$
$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta. \qquad (4)$$

De donde sacamos cuatro fórmulas que nos serán útiles:

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)],$$
$$\operatorname{sen}\beta\cos\alpha=\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)],$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$
$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

79. *Transformación de una suma o diferencia de senos o cosenos en producto.* — Las fórmulas (1), (2), (3) y (4) del número anterior, resuelven ya el problema. Ellas transforman en producto la suma o diferencia de dos cosenos. Para hacerlas más cómodas, hagamos:

$$\alpha+\beta=p \qquad \alpha-\beta=q$$

de donde se saca:

$$\alpha=\frac{p+q}{2}, \qquad \beta=\frac{p-q}{2}.$$

Y llevando estos valores en las igualdades (1), (2), (3) y (4) se tiene:

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, \tag{5}$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}, \tag{6}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, \tag{7}$$

$$\cos p - \cos q = -\, 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} =$$

$$= 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{q-p}{2}. \tag{8}$$

Estas cuatro fórmulas fundamentales son de gran importancia y tendremos oportunidad de utilizarlas muchas veces.

Ellas dicen que: (5) la suma de los senos de dos arcos es igual al doble producto del seno de la semi-suma por el coseno de la semi-diferencia de esos arcos.

(6) La diferencia de los senos de dos arcos es igual al doble producto del seno de la semi-diferencia de esos arcos por el coseno de la semi-suma de los mismos.

(7) La suma de los cosenos de dos arcos es igual al doble producto del coseno de la semi-suma por el coseno de la semi-diferencia de esos arcos.

(8) La diferencia de los cosenos de dos arcos es igual a menos el doble producto del seno de la semi-suma de los arcos por el seno de la semi-diferencia de los mismos, o también igual al doble producto del seno de la semi-suma por el seno de la semi-diferencia entre el arco del sustraendo y el arco del minuendo.

Observación. — Cuando se quiere transformar en producto la suma o la diferencia entre un seno y un coseno, se lleva el problema a los casos precedentes recordando que el coseno de un arco es el seno del complemento. Luego:

$$\operatorname{sen} p + \cos q = \operatorname{sen} p + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - q\right) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p+q}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} p - \cos q = \operatorname{sen} p - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - q\right) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{p-q}{2}\right).$$

80. Las fórmulas fundamentales de (5) a (8), pueden obtenerse toda vía en otra forma por un procedimiento geométrico.

Sea (fig. 63)

$$AOx = p \qquad \text{y} \qquad BOx = q$$

y tomemos OA = OB. Uniendo A con B tracemos la perpendicular OP a AB. Resulta P el punto medio de AB. Se tiene:

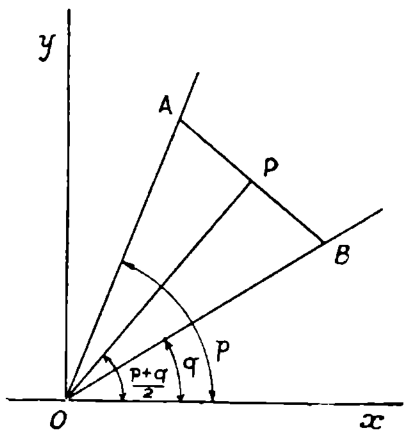


Figura 63

$$POx = \frac{1}{2}(p + q),$$

$$POA = POB = \frac{1}{2}(p - q).$$

Tenemos que:

$$\text{pr.}\,(OA) + \text{pr.}\,(AP) = \text{pr.}\,OP$$

$$\text{pr.}\,(OB) + \text{pr.}\,(BP) = \text{pr.}OP.$$

Y siendo AP y BP dos segmentos iguales y de sentido contrario, tenemos, sumando :

$$\text{pr.}\,(OA) + \text{pr.}\,(OB) = 2\,\text{pr.}\,(OP),$$

o bien, proyectando sobre Ox :

$$OA \cos p + OB \cos q = 2 \,.\, OP \,.\, \cos \frac{p+q}{2}.$$

Pero

$$OP = OA \cos AOP = OA \cos \frac{p-q}{2}.$$

Luego

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}.$$

Si proyectamos sobre Oy, tenemos:

$$\text{pr.}\,(OA) = OA \,\text{sen}\, p,$$

$$\text{pr.}\,(OB) = OB \,\text{sen}\, q,$$

$$\text{pr.}\,(OP) = OP \,\text{sen} \frac{p+q}{2} = OA \,\text{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}.$$

Y reemplazando en (I) y suprimiendo el factor común OA = OB, se tiene:

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}.$$

Tomando ahora la poligonal OBA, se tiene

$$\text{pr.}\,(\mathrm{OA}) = pr\,(\mathrm{OB}) + pr\,(\mathrm{BA}) \tag{1}$$

y reemplazando valores, se tiene, proyectando sobre el eje Oy:

$$\text{pr.}\,(\mathrm{OA}) = \mathrm{OA} \operatorname{sen} p,$$
$$\text{pr.}\,(\mathrm{OB}) = \mathrm{OB} \operatorname{sen} q = \mathrm{OA} \operatorname{sen} q,$$
$$\text{pr.}\,(\mathrm{BA}) = \mathrm{BA} \cos \frac{p+q}{2} = 2\mathrm{AP} \cos \frac{p+q}{2} =$$
$$= 2\mathrm{OA} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}.$$

Y reemplazando en (1) se tiene:

$$\operatorname{sen} p = \operatorname{sen} q + 2 \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2};$$

o bien

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}.$$

Y proyectando la (1) sobre el eje Ox, se tiene:

$$\text{pr.}\,(\mathrm{OA}) = \mathrm{OA} \cos p,$$
$$\text{pr.}\,(\mathrm{OB}) = \mathrm{OB} \cos q,$$
$$\text{pr.}\,(\mathrm{BA}) = -\,\mathrm{BA} \operatorname{sen} \frac{p+q}{2},$$

y como

$$\mathrm{BA} = 2\mathrm{AP} = 2\mathrm{OA} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2},$$

tenemos:

$$\mathrm{OA} \cos p = \mathrm{OB} \cos q - 2\mathrm{AB} \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2},$$

o bien, puesto que OA = OB;

$$\cos p - \cos q = -\,2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}.$$

Hemos obtenido las fórmulas (5), (6), (7) y (8) del nº 79.

81. Esas mismas fórmulas nos permiten deducir otras que serán útiles en las aplicaciones. Y así obtenemos, por ejemplo:

$$\frac{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q}{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{p-q}{2}}{\operatorname{tg} \frac{p+q}{2}},$$

$\operatorname{tg} \frac{p-q}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{p+q}{2}$

$\operatorname{ctg} = \frac{1}{\operatorname{tg}}$

$$\frac{\cos p - \cos q}{\cos p + \cos q} = \frac{-2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}}{2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}} = -\operatorname{tg} \frac{p+q}{2} \operatorname{tg} \frac{p-q}{2} =$$

$$= \operatorname{tg} \frac{p+q}{2} \operatorname{tg} \frac{q-p}{2},$$

$$\frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\cos p + \cos q} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}}{2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}} = \operatorname{tg} \frac{p+q}{2},$$

$$\frac{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q}{\cos p + \cos q} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}}{2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}} = \operatorname{tg} \frac{p-q}{2},$$

$$\frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\cos p - \cos q} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}}{-2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}} = -\operatorname{ctg} \frac{p-q}{2} = \operatorname{ctg} \frac{q-p}{2},$$

$$\frac{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q}{\cos p - \cos q} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}}{-2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}} = -\operatorname{ctg} \frac{p+q}{2}.$$

82. Fórmulas análogas obtendremos para transformar en producto la suma o la diferencia de dos tangentes o de dos cotangentes.

Para ello tenemos:

$$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen} p}{\cos p} + \frac{\operatorname{sen} q}{\cos q} = \frac{\operatorname{sen} p \cos q + \operatorname{sen} q \cos p}{\cos p \cos q} = \frac{\operatorname{sen}(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen} p}{\cos p} - \frac{\operatorname{sen} q}{\cos q} = \frac{\operatorname{sen} p \cos q - \operatorname{sen} q \cos p}{\cos p \cos q} = \frac{\operatorname{sen}(p-q)}{\cos p \cos q}$$

$$\text{ctg}\, p + \text{ctg}\, q = \frac{\cos p}{\text{sen}\, p} + \frac{\cos q}{\text{sen}\, q} = \frac{\text{sen}\, q \cos p + \text{sen}\, p \cos q}{\text{sen}\, p\, \text{sen}\, q} = \frac{\text{sen}\,(p+q)}{\text{sen}\, p\, \text{sen}\, q}$$

$$\text{ctg}\, p - \text{ctg}\, q = \frac{\cos p}{\text{sen}\, p} - \frac{\cos q}{\text{sen}\, q} = \frac{\text{sen}\, q \cos p - \text{sen}\, p \cos q}{\text{sen}\, p\, \text{sen}\, q} =$$

$$\frac{\text{sen}\,(q-p)}{\text{sen}\, p\, \text{sen}\, q} = -\frac{\text{sen}\,(p-q)}{\text{sen}\, p\, \text{sen}\, q}$$

$$\text{tg}\, p + \text{ctg}\, q = \frac{\text{sen}\, p}{\cos p} + \frac{\cos q}{\text{sen}\, q} = \frac{\text{sen}\, p\, \text{sen}\, q + \cos p \cos q}{\cos p\, \text{sen}\, q} = \frac{\cos\,(p-q)}{\cos p\, \text{sen}\, q}$$

$$\text{tg}\, p - \text{ctg}\, q = \frac{\text{sen}\, p}{\cos p} - \frac{\cos q}{\text{sen}\, q} = \frac{\text{sen}\, p\, \text{sen}\, q - \cos p \cos q}{\text{sen}\, q \cos p} =$$

$$= -\frac{\cos\,(p+q)}{\text{sen}\, q \cos p}.$$

Y de éstas, podemos deducir fácilmente las siguientes:

$$\frac{\text{tg}\, p + \text{tg}\, q}{\text{tg}\, p - \text{tg}\, q} = \frac{\text{sen}\,(p+q)}{\text{sen}\,(p-q)} \quad \text{y} \quad \frac{\text{ctg}\, p + \text{ctg}\, q}{\text{ctg}\, p - \text{ctg}\, q} = -\frac{\text{sen}\,(p+q)}{\text{sen}\,(p-q)}.$$

83. Como una aplicación, transformaremos dos expresiones que nos serán muy útiles más adelante.

1° Transformar en monomio la expresión:

$$1 \pm \text{tg}\, \alpha.$$

Recordando que

$$\text{tg}\, \frac{\pi}{4} = \text{tg}\, 45° = 1$$

se tiene:

$$1 \pm \text{tg}\, \alpha = \text{tg}\, \frac{\pi}{4} \pm \text{tg}\, \alpha = \text{tg}\, 45° \pm \text{tg}\, \alpha.$$

Luego tenemos:

$$1 \pm \text{tg}\, \alpha = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha\right)}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha} = \frac{\sqrt{2}\, \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha\right)}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{2}\, \text{sen}\,(45° \pm \alpha)}{\cos \alpha}.$$

2° Transformar en monomio la expresión:

$$\frac{1 - \text{tg}\, \alpha}{1 + \text{tg}\, \alpha}.$$

Tendremos análogamente:

$$\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}.$$

Y siendo los ángulos $\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ y $\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, complementarios:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right),$$

y por lo tanto:

$$\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right),$$

o bien:

$$\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)=\operatorname{ctg}(45^\circ+\alpha).$$

FÓRMULAS QUE VINCULAN LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS DE TRES ÁNGULOS α, β Y γ CUYA SUMA ES IGUAL A 180° (CASO DE LOS TRES ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO PLANO).

84. Mostraremos que siendo $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, se tiene:

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

En efecto, es

sen α = 2 sen $\frac{\alpha}{2}$

$$\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)\;\therefore\;\operatorname{sen}\gamma=\operatorname{sen}(\alpha+\beta).$$

en función arco

Luego:

sen α + sen β   sen γ = sen (α + β) = ; en

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\gamma=2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

o bien

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\gamma=2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

y transformando en producto la suma de cosenos y teniendo en cuenta que:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} \qquad \operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2},$$

se obtiene

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}. \tag{1}$$

85. Mostraremos que siendo $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$,

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\gamma = 4\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Siguiendo el mismo camino, se tiene:

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\gamma = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}(\alpha+\beta) =$$

$$= 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

o bien

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta \quad \operatorname{sen}\gamma = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$$

y también:

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\gamma = 4\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}. \tag{2}$$

86. Siendo $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, se tiene:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}.$$

En efecto

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta) = -\left[\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$$

$$= -\left[\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 1 + \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} = 1 - 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right].$$

Y sumando:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

y transformando en producto de diferencia de cosenos:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}\,\text{sen}\,\frac{\beta}{2}\,\text{sen}\,\frac{\gamma}{2}. \tag{3}$$

87. Siendo $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, se tiene:

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\,\text{sen}\,\frac{\gamma}{2} - 1.$$

En efecto:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$-\cos\gamma = 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 1.$$

Sumando:

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - 1,$$

o bien

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\,\text{sen}\,\frac{\gamma}{2} - 1. \tag{4}$$

88. Se obtiene así, siguiendo caminos análogos, y siempre que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

$$\text{sen}\,2\alpha + \text{sen}\,2\beta + \text{sen}\,2\gamma = 4\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,\gamma \tag{5}$$

$$\text{sen}\,2\alpha + \text{sen}\,2\beta - \text{sen}\,2\gamma = 4\cos\alpha\cos\beta\,\text{sen}\,\gamma \tag{6}$$

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \tag{7}$$

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2\gamma = 1 - 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \tag{8}$$

$$\frac{\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta - \text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta + \text{sen}\,\gamma} = \text{ctg}\,\frac{\alpha}{2}\,\text{ctg}\,\frac{\beta}{2}. \tag{9}$$

89. Siendo $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, se tiene:

$$\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta + \text{tg}\,\gamma = \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta\,\text{tg}\,\gamma.$$

En efecto:

$$\text{tg}\,(\alpha + \beta) = \text{tg}\,(180° - \gamma) = -\,\text{tg}\,\gamma.$$

Pero es $\quad tg\,\alpha + tg\,\beta = -tg\,\gamma\,(1 - tg\,\alpha\,tg\,\beta$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}, = -tg\,\gamma$$

luego

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma. \tag{10}$$

Y obtenemos también:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}. \tag{11}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 1. \tag{12}$$

Hacer una fórmula calculable por logaritmos

90. *Transformación de una suma.* — Sean A y B dos expresiones monomias, cuyos logaritmos se pueden obtener; se trata de calcular el log (A + B) sin calcular A ni B.

Podemos escribir:

$$S = A + B = A\left(1 + \frac{B}{A}\right),$$

e introduciendo un ángulo auxiliar φ tal que

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{B}{A},$$

se puede calcular φ, puesto que:

$$\log \operatorname{tg} \varphi = \frac{\log B - \log A}{2},$$

y conocido φ se tiene:

$$S = A\,(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = \frac{A}{\cos^2 \varphi},$$

y entonces:

$$\log S = \log (A + B) = \log A - 2 \log \cos \varphi.$$

91. *Transformar* A — B. — Si A y B son dos monomios en las mismas condiciones del caso anterior y si suponemos $A > B$ se tiene

$$A - B = A\left(1 - \frac{B}{A}\right),$$

y poniendo ahora con un ángulo auxiliar φ tal que:

$$\operatorname{sen}^2 \varphi = \frac{B}{A},$$

resulta

$$A - B = A\,(1 - \operatorname{sen}^2 \varphi) = A \cos^2 \varphi.$$

Para calcular el ángulo auxiliar φ se tiene:

$$\log \operatorname{sen} \varphi = \frac{\log B - \log A}{2},$$

y luego

$$\log\,(A - B) = \log A + 2 \log \cos \varphi.$$

Y siendo $A > B$, como hemos supuesto, la relación $\frac{B}{A}$ es menor que 1 y siempre se puede hacer igual a un *seno*.

Para el caso en que $B > A$, pondríamos

$$A - B = -\,(B - A),$$

y estamos en el caso anterior.

Se puede tener un método de transformación que sirve para cualquier valor de A y B y permite calcular

$$A + B \qquad \text{o} \qquad A - B.$$

En efecto, pongamos

$$A \pm B = A\left(1 \pm \frac{B}{A}\right).$$

Introduciendo ahora un ángulo auxiliar de cálculo φ dado por

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A},$$

se puede calcular φ, pues se tiene:

$$\log \operatorname{tg} \varphi = \log B - \log A,$$

y entonces se tiene

$$A \pm B = A\,(1 \pm \operatorname{tg} \varphi) = A\,(\operatorname{tg} 45^\circ \pm \operatorname{tg} \varphi) = A\left(\frac{\operatorname{sen} 45^\circ}{\cos 45^\circ} \pm \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi}\right),$$

o bien

$$A \pm B = A\,\frac{\operatorname{sen}\,(45^\circ \pm \varphi)}{\cos 45^\circ \cos \varphi} = A\,\frac{\sqrt{2}\,\operatorname{sen}\,(45^\circ \pm \varphi)}{\cos \varphi}.$$

92. *Transformar la suma* $S = A \pm B \pm C \pm \ldots$ donde se conocen los logaritmos de A, de B, de C, ...

Para ello se procede por partes. Primero se transforma $A \pm B$ introduciendo un ángulo auxiliar φ y calculamos como hemos visto el $\log\,(A \pm B)$.

Luego calculamos

$$(A \pm B) \pm C.$$

Introduciendo un ángulo auxiliar de cálculo φ_1, y así sucesivamente.

93. *Expresiones racionales.* — Sea por ejemplo, transformar en una expresión calculable por logaritmos, la expresión:

$$\frac{M}{N} = \frac{A \pm B \pm C \pm D \pm \ldots}{A_1 \pm B_1 \pm C_1 \pm D_1 \pm \ldots}.$$

En este caso se transforma separadamente el numerador M como hemos visto en el caso anterior y luego el denominador N en la misma forma. El logaritmo buscado es:

$$\log M - \log N.$$

Sea por ejemplo, calcular

$$\frac{a - b}{a + b},$$

conociendo $\log a$ y $\log b$.

Podemos poner:

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{a\left(1 - \frac{b}{a}\right)}{a\left(1 + \frac{b}{a}\right)},$$

y poniendo

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a},$$

se calcula φ por:

$$\log \operatorname{tg} \varphi = \log b - \log a,$$

y se obtiene:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{sen}(45^\circ - \varphi)}{\operatorname{sen}(45^\circ + \varphi)},$$

y observando que

$$\operatorname{sen}(45^\circ + \varphi) = \cos(45^\circ - \varphi)$$

resulta:

$$\frac{a-b}{a+b} = \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi).$$

Este último valor lo podíamos haber obtenido directamente escribiendo:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{1 - \dfrac{b}{a}}{1 + \dfrac{b}{a}}$$

y poniendo

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \quad \text{y} \quad 1 = \operatorname{tg} 45^\circ$$

se tiene

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi).$$

94. *Transformar* $\sqrt{A + B}$, *donde se conoce* log A *y* log B. — Se puede poner:

$$\sqrt{A + B} = \sqrt{A\left(1 + \frac{B}{A}\right)}$$

y haciendo

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{B}{A},$$

se tiene

$$\sqrt{A + B} = \sqrt{A(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)} = \frac{\sqrt{A}}{\cos \varphi}.$$

95. *Transformar* $\sqrt{A - B}$. — Si B es mayor que A, el sub-radical es negativo y la cantidad es imaginaria. Luego suponemos $A > B$ y en tal caso, podemos poner:

$$\sqrt{A - B} = \sqrt{A\left(1 - \frac{B}{A}\right)},$$

e introduciendo un ángulo auxiliar φ dado por

$$\cos^2 \varphi = \frac{B}{A},$$

se tiene:

$$\sqrt{A - B} = \sqrt{A} \operatorname{sen} \varphi.$$

El ángulo auxiliar de cálculo φ se obtiene por:

$$\log \cos \varphi = \frac{\log B - \log A}{2}.$$

96. *Transformar en calculable por logaritmos la expresión*

$$y = A \operatorname{sen} \alpha \pm B \cos \alpha.$$

Podemos poner:

$$y = A\left(\operatorname{sen} \alpha \pm \frac{B}{A} \cos \alpha\right).$$

Introduciendo ahora un ángulo auxiliar de cálculo φ dado por

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A},$$

siempre existirá el valor φ y se calcula por

$$\log \operatorname{tg} \varphi = \log B - \log A,$$

y se tiene:

$$y = A (\operatorname{sen} \alpha \pm \operatorname{tg} \varphi \cos \alpha) = \frac{A \operatorname{sen} (\alpha \pm \varphi)}{\cos \varphi}.$$

97. *Transformar la expresión*

$$y = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}.$$

Veremos más adelante que y viene a ser el lado de un triángulo cuyo ángulo opuesto es A siendo b y c, los otros dos lados del triángulo.

Podemos poner:

$$\cos A = \cos^2\frac{A}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{A}{2},$$

y también

$$1 = \cos^2\frac{A}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{A}{2},$$

resulta entonces: $y = \sqrt{b^2\cos^2\frac{A}{2} + b^2\operatorname{sen}^2\frac{A}{2} + c^2\cos^2\frac{A}{2} + c^2\operatorname{sen}^2\frac{A}{2} - 2bc\cos^2\frac{A}{2} + 2bc\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}}$

$$y = \sqrt{(b^2 + c^2)\underbrace{\left(\cos^2\frac{A}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{A}{2}\right)}_{=1} - 2bc\underbrace{\left(\cos^2\frac{A}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{A}{2}\right)}_{\cos A}}$$

y simplificando se obtiene: $y = \sqrt{(b^2+c^2-2bc)\cos^2\frac{A}{2} + (b^2+c^2+2bc)\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}}$

$$y = \sqrt{(b - c)^2\cos^2\frac{A}{2} + (b + c)^2\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}},$$

o bien divido por $(b+c)^2\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}$ y saco factor común

$$y = (b + c)\operatorname{sen}\frac{A}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{b - c}{b + c}\right)^2\operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}}. \quad \leftarrow = \frac{\cos^2\frac{A}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}}$$

Introduciendo un ángulo auxiliar φ, dado por

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b - c}{b + c}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}. \qquad y = (b+c)\operatorname{sen}\frac{A}{2}\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}$$

Resulta: $1 + \operatorname{tg}^2\varphi = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi}$

$$y = \frac{(b + c)\operatorname{sen}\frac{A}{2}}{\cos\varphi}.$$

Es claro que esto supone conocer los valores mismos de b y c. Si en cambio se conocen sus logaritmos, se puede transformar $\frac{b - c}{b + c}$, como hemos visto en el nº 86, introduciendo antes un otro ángulo auxiliar de cálculo φ_0 dado por:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{b}{a},$$

y resulta

$$\frac{b - c}{b + e} = \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi_0),$$

y por lo tanto

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi_0)\operatorname{ctg}\frac{A}{2},$$

y en tal caso

$$y = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A} = \frac{\sqrt{2}b\,\mathrm{sen}\,(45^\circ + \varphi_0)\,\mathrm{sen}\,\frac{A}{2}}{\cos\varphi_0\cos\varphi}.$$

Muchas veces para transformar una expresión en otra calculable por logaritmos, se puede hacer un artificio que sólo enseña la práctica y la sagacidad del calculista.

98. Consideremos una serie n de arcos en progresión aritmética

$$\alpha, \quad \alpha + r, \quad \alpha + 2r, \qquad \alpha + (n-1)\,r.$$

Queremos calcular la suma de sus senos y la suma de sus cosenos. Tengamos en primer término:

$$S = \cos\alpha + \cos(\alpha + r) + \cos(\alpha + 2r) + \ldots + \cos[\alpha + (n-1)\,r].$$

Multiplicando cada término por $2\,\mathrm{sen}\,\frac{r}{2}$, podemos escribir:

$$2\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\frac{r}{2} = \mathrm{sen}\left(\alpha + \frac{r}{2}\right) - \mathrm{sen}\left(\alpha - \frac{r}{2}\right)$$

$$2\cos(\alpha + r)\,\mathrm{sen}\,\frac{r}{2} = \mathrm{sen}\left(\alpha + \frac{3r}{2}\right) - \mathrm{sen}\left(\alpha + \frac{r}{2}\right)$$

$$2\cos(\alpha + 2r)\,\mathrm{sen}\,\frac{r}{2} = \mathrm{sen}\left(\alpha + \frac{5r}{2}\right) - \mathrm{sen}\left(\alpha + \frac{3r}{2}\right)$$

$$2\cos[\alpha + (n-1)\,r]\,\mathrm{sen}\,\frac{r}{2} = \mathrm{sen}\left[\alpha + (2n-1)\,\frac{r}{2}\right] - \mathrm{sen}\left[\alpha + (2n-3)\frac{r}{2}\right].$$

Sumando miembro a miembro todas estas igualdades, en los sumandos de los primeros miembros podemos sacar factor común a $2\,\mathrm{sen}\,\frac{r}{2}$ que queda multiplicando a la suma de los cosenos de los arcos en progresión aritmética que hemos llamado S. En la suma de los segundos miembros, se ve que se anulan todos los términos excepto el segundo término del segundo miembro de la primera igualdad y el primer término del segundo miembro de la última; es decir, que nos queda:

$$2\,S \operatorname{sen}\frac{r}{2} = \operatorname{sen}\left[\alpha + (2\,n - 1)\frac{r}{2}\right] - \operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{r}{2}\right).$$

Y transformando en producto la diferencia de senos del segundo miembro, obtenemos:

$$S = \frac{\operatorname{sen}\frac{nr}{2}\cos\left[\alpha + \frac{(n-1)\,r}{2}\right]}{\operatorname{sen}\frac{r}{2}}. \qquad (1)$$

99. Para calcular la suma de senos de n arcos en progresión aritmética, pongamos:

$$S_1 = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}(\alpha + r) + \operatorname{sen}(\alpha + 2r) + \dots + \operatorname{sen}[\alpha + (n-1)\,r].$$

Se puede proceder en una forma análoga que para la suma de cosenos, pero resulta ahora más simple en la fórmula (1) reemplazar α por $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$... Es claro entonces, que cada sumando de S, digamos un término cualquiera que era $\cos x$, se transforma en $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{sen} x$.

Luego al reemplazar α por $\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ hemos cambiado de signo a todos los sumandos y al mismo tiempo se ha cambiado de línea, luego podemos poner:

$$-S_1 = \frac{\operatorname{sen}\frac{nr}{2}\cos\left[\frac{\pi}{2} + \alpha + \frac{n-1}{2}r\right]}{\operatorname{sen}\frac{r}{2}}$$

pero

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} + \alpha + \frac{n-1}{2}r\right] = -\operatorname{sen}\left[\alpha + \frac{n-1}{2}r\right]$$

luego

$$S_1 = \frac{\operatorname{sen}\frac{nr}{2}\operatorname{sen}\left[\alpha + \frac{n-1}{2}r\right]}{\operatorname{sen}\frac{r}{2}}.$$

Podíamos haber procedido también en la siguiente forma:

$$S_1 = \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} (\alpha + r) + \operatorname{sen} (\alpha + 2r) + \quad + \operatorname{sen} [\alpha + (n - 1) r].$$

Se tiene

$$2S_1 \operatorname{sen} \frac{r}{2} = 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \frac{r}{2} + 2 \operatorname{sen} (\alpha + r) \operatorname{sen} \frac{r}{2} + $$
$$+ 2 \operatorname{sen} \left[\alpha + (n - 1) r\right] \operatorname{sen} \frac{r}{2}.$$

Pero es

$$2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \frac{r}{2} = \cos\left(\alpha - \frac{r}{2}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{r}{2}\right),$$

$$2 \operatorname{sen} (\alpha + r) \operatorname{sen} \frac{r}{2} = \cos\left(\alpha + \frac{r}{2}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{3r}{2}\right),$$

$$2 \operatorname{sen} (\alpha + 2r) \operatorname{sen} \frac{r}{2} = \cos\left(\alpha + \frac{3r}{2}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{5r}{2}\right)$$

$$2 \operatorname{sen} [\alpha + (n - 1) r] \operatorname{sen} \frac{r}{2} = \cos\left(\alpha + \frac{2n - 3}{2} r\right) - \cos\left(\alpha + \frac{2n - 1}{2} r\right).$$

Sumando y simplificando

$$2S \operatorname{sen} \frac{r}{2} = \cos\left(\alpha - \frac{r}{2}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{2n - 1}{2} r\right)$$
$$= 2 \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{n - 1}{2} r\right) \operatorname{sen} \frac{nr}{2}$$

de donde

$$S_1 = \frac{\operatorname{sen} \frac{nr}{2} \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{n - 1}{2} r\right)}{\operatorname{sen} \frac{r}{2}}.$$

100. *Problema.* — Hacer calculable por logaritmos las raíces de una ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Se sabe que las raíces están expresadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Suponiendo a positivo, distinguiremos dos casos:

Primer caso: $\frac{c}{a} < 0$, vale decir, c negativo. Puede escribirse

$$\pm \sqrt{b^2 - 4ac} = \pm b \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}}.$$

Y podemos poner:

$$tg^2\varphi = -\frac{4ac}{b^2},$$

donde φ es un ángulo auxiliar de cálculo y se tiene:

$$\pm \sqrt{b^2 - 4ac} = \pm b \sqrt{1 + tg^2\varphi} = \pm \frac{b}{\cos\varphi}$$

Luego

$$x = -\frac{b}{2a}\left(1 \mp \frac{1}{\cos\varphi}\right) = \frac{-b(\cos\varphi \mp 1)}{2a\cos\varphi}.$$

Y separando las raíces:

$$x' = \frac{-b(\cos\varphi - 1)}{2a\cos\varphi} = \frac{b \operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}}{a\cos\varphi},$$

ver pag 93 -

$$x'' = -\frac{b(\cos\varphi + 1)}{2a\cos\varphi} = -\frac{b\cos^2\frac{\varphi}{2}}{a\cos\varphi}.$$

Segundo caso: $\frac{c}{a} > 0$, vale decir, c positivo.

Cuando $b^2 - 4ac > 0$, se tiene:

$$\pm \sqrt{b^2 - 4ac} = \pm b \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}}.$$

y se puede poner:

$$\operatorname{sen}^2\varphi = \frac{4ac}{b^2},$$

y entonces

$$\pm\sqrt{b^2 - 4ac} = \pm\, b\cos\varphi.$$

Y las raíces resultan

$$x' = \frac{-b + b\cos\varphi}{2a} = -\frac{b}{a}\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2},$$

$$x'' = \frac{-b - b\cos\varphi}{2a} = -\frac{b}{a}\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

CAPÍTULO XI

VALORES DE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS

Veremos más adelante que se construyen tablas que dan los valores de los logaritmos de las funciones trigonométricas y también tablas de valores naturales de las líneas. Son valores que se dan para el primer cuadrante y determinados a intervalos que dependen del número de cifras decimales, y tales que entre uno y otro pueda considerarse, en general, una interpolación lineal.

Ahora veremos cómo es posible calcular, con operaciones de números racionales y sólo la extracción de la raíz cuadrada, los *senos* y *cosenos* de cierta categoría de ángulos, cuyos argumentos varían en progresión geométrica. Para lo cual veremos algunos problemas.

101. *Problema : Calcular los* senos *y* cosenos *de los arcos de la forma* $\frac{k \times 180^\circ}{2^n}$, *siendo k y n números enteros y positivos.* — Hagamos primero $k = 1$ y $n = 2$. Se tiene, según hemos visto (16 y 17) :

$$\operatorname{sen} \frac{180^\circ}{2^2} = \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad \cos \frac{180^\circ}{2^2} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Y puesto que (72)

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \qquad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

se tienen sucesivamente :

$$\operatorname{sen} 22^\circ 30' = \operatorname{sen} \frac{180^\circ}{2^3} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\cos 22^\circ 30' = \cos \frac{180^\circ}{2^3} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$\operatorname{sen} 11^\circ 15' = \operatorname{sen} \frac{180^\circ}{2^4} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$\cos 11^\circ 15' \quad = \cos \frac{180^\circ}{2^4} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$\operatorname{sen} \ 5^\circ 37' 30'' = \operatorname{sen} \frac{180^\circ}{2^5} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

$$\cos \ 5^\circ 37' 30'' = \cos \frac{180^\circ}{2^5} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}.$$

Es fácil ver la ley de formación de los segundos miembros, y se pueden obtener cómodamente las fórmulas sucesivas para obtener seno y coseno de $\frac{180^\circ}{2^n}$. Con las fórmulas de multiplicación, se puede ahora obtener el seno y coseno de los arcos dados por $\frac{k 180}{2^n}$.

Es claro que se obtendrían fácilmente los dados por los arcos, cuya expresión sea $90^\circ - \frac{k \,.\, 180}{2^n}$.

102. *Problema : Calcular los* senos *y* cosenos *de los arcos de la forma* $\frac{k}{3} \cdot \frac{180^\circ}{2^n}$.

Para $k = 1$ y $n = 0$, se tiene, según hemos visto en:

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Recordando ahora (72) que

$$\operatorname{sen} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}, \qquad \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}},$$

se tiene :

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \operatorname{sen} \frac{180^\circ}{3 \times 2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}} = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30^\circ = \cos \frac{180^\circ}{3 \times 2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{sen } 15^\circ = \text{sen}\,\frac{180^\circ}{3\,.\,2^2} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\cos 15^\circ = \cos\frac{180^\circ}{3\,.\,2^2} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$\text{sen } 7^\circ 30' = \text{sen}\,\frac{180^\circ}{3\times 2^3} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$$

$$\cos 7^\circ 30' = \cos\frac{180^\circ}{3\times 2^3} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$$

$$\text{sen } 3^\circ 45' = \text{sen}\,\frac{180^\circ}{3\times 2^4} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2}$$

$$\cos 3^\circ 45' = \cos\frac{180^\circ}{3\times 2^4} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2}.$$

Y resulta fácil ver la ley de formación de los términos sucesivos y también cuando se dan valores sucesivos a k.

103. *Problema: Calcular los* senos *y* cosenos *de los arcos dados por la forma general* $\frac{k\,.\,180^\circ}{5\,.\,2^n}$. — Para $k = 1$ y $n = 1$, se tiene:

$$\text{sen}\,\frac{180^\circ}{5\times 2} = \text{sen } 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \qquad \cos\frac{180^\circ}{5\times 2} = \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

Y obtenido el valor del coseno se puede aplicar la fórmula de división. En general, si hacemos $\cos \alpha = x$, se tiene:

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - 2x}, \qquad \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2x}.$$

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + 2x}}, \qquad \cos \frac{\alpha}{2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2x}}$$

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2^3} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2x}}}, \qquad \cos \frac{\alpha}{2^3} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2x}}}.$$

Con lo que es fácil obtener

$$\operatorname{sen} \frac{180°}{5 \times 2^2} = \operatorname{sen} 9° \qquad \cos \frac{180°}{5 \times 2^2} = \cos 9°$$

$$\operatorname{sen} \frac{180°}{5 \times 2^3} = \operatorname{sen} 4°30' \qquad \cos \frac{180°}{5 \times 2^3} = \cos 4°30'$$

$$\operatorname{sen} \frac{180°}{5 \times 2^4} = \operatorname{sen} 2°15' \qquad \cos \frac{180°}{5 \times 2^4} = \cos 2°15'$$

Y ahora es fácil obtener las expresiones dando sucesivos valores a k.

104. *Problema: Determinar los senos y cosenos de arcos de la forma* $\frac{k \,.\, 180°}{3 \times 5 \times 2^n}$, *donde k y n son números enteros y positivos.*

Haciendo $k = 1$ y $n = 0$, se tiene el ángulo de 12° y podemos poner

$$\frac{180°}{3 \times 5} = 12° = \frac{180°}{6} - \frac{180°}{10}.$$

Y según el teorema de la substracción de ángulos

$$\operatorname{sen} 12° = \operatorname{sen}\left(\frac{180°}{6} - \frac{180°}{10}\right) = \operatorname{sen} \frac{180°}{6} \cos \frac{180°}{10} - \operatorname{sen} \frac{180°}{10} \cos \frac{180°}{6}$$

$$\cos 12° = \cos\left(\frac{180°}{6} - \frac{180°}{10}\right) = \cos \frac{180°}{6} \cos \frac{180°}{10} + \operatorname{sen} \frac{180°}{6} \operatorname{sen} \frac{180°}{10},$$

Pero según n^os^ (16) y (17)

$$\text{sen}\,\frac{180^\circ}{6} = \text{sen}\,30^\circ = \frac{1}{2}, \qquad \cos\frac{180^\circ}{6} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

Y según n° (49)

$$\text{sen}\,\frac{180^\circ}{10} = \text{sen}\,18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

resulta

$$\cos\frac{180^\circ}{10} = \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Luego

$$\text{sen}\,12^\circ = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} - \frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{3}}{8}(\sqrt{5}-1)$$

$$\cos 12^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \frac{1}{8}(\sqrt{5}-1).$$

Y es claro que ahora se puede calcular

$$\text{sen}\,\frac{180^\circ}{3\times5\times2}, \qquad \text{sen}\,\frac{180^\circ}{3\times5\times2^2}, \qquad \text{sen}\,\frac{180^\circ}{3\times5\times2^3}, \ldots$$

$$\cos\frac{180^\circ}{3\times5\times2}, \qquad \cos\frac{180^\circ}{3\times5\times2^2}, \qquad \cos\frac{180^\circ}{3\times5\times2^3}, \ldots$$

CAPÍTULO XII

TABLAS TRIGONOMÉTRICAS

105. Teorema: *Siendo x la medida de un arco positivo, menor que un cuadrante y medido tomando el radio como unidad, se verifica la doble desigualdad:*

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x.$$

Consideremos un círculo trigonométrico (fig. 64) y un arco AM $= x$, positivo y menor que $\frac{\pi}{2}\cdot$ Se tendrá que los valores de sen x y tg x, que son positivos, están dados por

$$\operatorname{sen} x = \mathrm{MP}, \qquad \operatorname{tg} x = \mathrm{AT}.$$

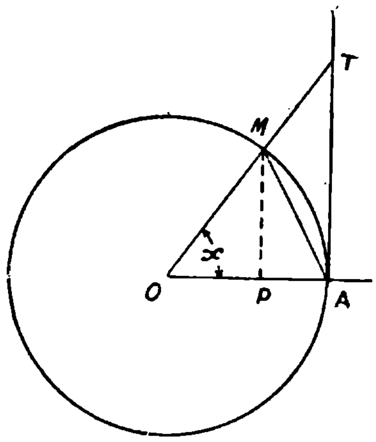


Figura 64

Donde MP y AT están medidos tomando el radio como unidad de medida o donde suponemos el radio $= 1$. Uniendo M con A, podemos comparar las superficies de los triángulos OAM, OAT y la del sector circular OAM y tenemos:

$$\text{Area triang. OAM} < \text{área sector OAM} < \text{área triang. OAT}.$$

Y expresando ahora el área de los triángulos OAM y OAT en función de la base OA y sus respectivas alturas, y el área del sector circular en función del radio y del ángulo, se tiene:

$$\frac{1}{2}\mathrm{OA}\,.\,\mathrm{MP} < \frac{1}{2}\mathrm{OA}\,.\,\text{arc. AM} < \frac{1}{2}\mathrm{OA}\,.\,\mathrm{AT}.$$

o bien, suprimiendo el factor común $\frac{1}{2}$OA y teniendo en cuenta que el arco AM es x, se tiene

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x \tag{1}$$

que es la doble desigualdad que queríamos demostrar y que como veremos es de gran importancia.

106. TEOREMA: *La relación de un arco, medido en radianes, a su seno, tiende hacia la unidad, cuando el arco tiende a cero.* — El arco puede tender a cero siendo positivo o negativo. Consideremos primero el arco positivo. Desde que vamos a hacerlo tender a cero, es decir a que adquiera valores tan pequeños como se quiera, podemos de hecho suponer que ese arco x sea menor que $\frac{\pi}{2}$ y por lo tanto podemos establecer la doble desigualdad del teorema anterior, donde reemplazamos el valor de tg x por su igual $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y tendremos:

$$\operatorname{sen} x < x < \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Y siendo x positivo, también lo es sen x. Luego podemos dividir la doble desigualdad por sen x, sin que el sentido de la desigualdad cambie, y tendremos

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Hemos visto al estudiar las variaciones del cos x, que cuando el arco x tiende hacia cero, el cos x tiende hacia 1. La relación $\frac{x}{\operatorname{sen} x}$, estará así comprendida entre 1 y una cantidad $1 + \varepsilon$ que tiende hacia 1 con el tender de x a cero. Luego podemos poner:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right) = 1.$$

Supongamos ahora que el valor de x tienda hacia cero siendo negativo. Supongamos

$$x = -x'$$

donde x' es positivo. Podremos poner:

$$\frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{-x'}{\operatorname{sen}(-x')} = \frac{-x'}{-\operatorname{sen} x'} = \frac{x'}{\operatorname{sen} x'}.$$

Cuando x tiende hacia cero con valores negativos, x' tiende también hacia cero con valores positivos. El límite de la relación $\frac{x'}{\operatorname{sen} x'}$ tiende entonces hacia 1 y como $\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$ es igual a $\dfrac{x'}{\operatorname{sen} x'}$, resulta que también el límite de $\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$ es 1 cuando x tiende hacia cero.

Corolario : La relación de un arco medido en radianes a su tangente, tiende hacia 1, cuando el arco tiende hacia cero. — En efecto, podemos escribir

$$\frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1 + \varepsilon$$

donde ε tiende hacia cero con el tender de x a cero. De ahí deducimos

$$\frac{x \cos x}{\operatorname{sen} x} = (1 + \varepsilon) \cos x$$

o bien

$$\frac{x}{\operatorname{tg} x} = \cos x + \varepsilon \cos x$$

pasando al límite tenemos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1.$$

Se obtendría más cómodamente el mismo resultado poniendo:

$$\frac{x}{\operatorname{tg} x} = \frac{x}{\operatorname{sen} x} \times \cos x$$

y aplicando el teorema sobre producto de los límites.

107. TEOREMA : *Para un arco positivo, menor que un cuadrante y medido en radianes, la diferencia entre el arco y el seno es menor que la cuarta parte del cubo del arco.* — Mostraremos que para un arco que reúne las condiciones antedichas, se verifica:

$$x - \operatorname{sen} x < \frac{x^3}{4}.$$

En efecto, podemos poner el sen x en función del arco mitad y tendremos:

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cos^2 \frac{x}{2}.$$

O también escribir

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}\left(1 - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}\right). \qquad (1)$$

Y puesto que x es positivo y menor que un cuadrante también lo será $\frac{x}{2}$ y podemos escribir, de acuerdo con la desigualdad (1) nº 105,

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{x}{2} \qquad (2)$$

y

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} < \frac{x}{2}. \qquad (3)$$

De esta última se deduce:

$$1 - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} > 1 - \frac{x^2}{4}. \qquad (4)$$

Y multiplicando entre sí (2) y (4) se tiene, teniendo en cuenta la (1)

$$\operatorname{sen} x > 2 \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \qquad (5)$$

o bien

$$\operatorname{sen} x > x - \frac{x^3}{4} \qquad (6)$$

de donde se obtiene

$$x - \operatorname{sen} x < \frac{x^3}{4}$$

lo que demuestra el teorema.

Y de aquí sacamos esta consecuencia, que nos va a ser útil en seguida: El error que se comete cuando se toma como valor aproximado del seno de un arco positivo y menor que $\frac{\pi}{2}$, el valor del arco mismo medido éste en radianes, es menor que la cuarta parte del cubo del arco. En efecto, teniendo en cuenta la desigualdad (1) del nº 105 y la (6) tenemos:

$$x > \operatorname{sen} x > x - \frac{x^3}{4}$$

de donde se saca

$$0 < x - \operatorname{sen} x < \frac{x^3}{4}$$

y resulta que el valor de x tomado así para el seno es aproximado por exceso y el error menor que $\frac{x^3}{4}$.

108. Se puede todavía estrechar más el error y mostrar que ese error es menor que la sexta parte del cubo del arco, es decir, que podemos mostrar que:

$$x - \operatorname{sen} x < \frac{x^3}{6}.$$

En efecto, tengamos en cuenta la igualdad (5) del nº 69

$$\operatorname{sen} 3x = 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x.$$

no

Y reemplacemos a x, sucesivamente, por los valores

$$\frac{x}{3}, \quad \frac{x}{3^2}, \quad \frac{x}{3^3}, \ldots \frac{x}{3^n}$$

y tendremos:

(1ª) $$\operatorname{sen} x = 3 \operatorname{sen} \frac{x}{3} - 4 \operatorname{sen}^3 \frac{x}{3}$$

(2ª) $$\operatorname{sen} \frac{x}{3} = 3 \operatorname{sen} \frac{x}{3^2} - 4 \operatorname{sen}^3 \frac{x}{3^2}$$

(3ª) $$\operatorname{sen} \frac{x}{3^2} = 3 \operatorname{sen} \frac{x}{3^3} - 4 \operatorname{sen}^3 \frac{x}{3^3}$$

$$\operatorname{sen} \frac{x}{3^{n-1}} = 3 \operatorname{sen} \frac{x}{3^n} - 4 \operatorname{sen}^3 \frac{x}{3^n}.$$

Multiplicando ahora la 2ª por 3, la 3ª por 3^2, etc. y la última por 3^{n-1} y sumemos, simplificando los términos comunes a los dos miembros de la igualdad y obtenemos:

$$\operatorname{sen} x = 3^n \operatorname{sen} \frac{x}{3^n} - 4 \left[\operatorname{sen}^3 \frac{x}{3} + 3 \operatorname{sen}^3 \frac{x}{3^2} + 3^2 \operatorname{sen}^3 \frac{x}{3^3} + \ldots 3^{n-1} \operatorname{sen}^3 \frac{x}{3^n}\right].$$

Reemplazando ahora dentro del corchete los valores del seno por los valores del arco correspondiente, que son mayores, tenemos:

$$\operatorname{sen} x > 3^n \operatorname{sen} \frac{x}{3^n} - 4 \left[\frac{x^3}{3^3} + \frac{x^3}{3^5} + \frac{x^3}{3^7} + \ldots + \frac{x^3}{3^{2n+1}}\right]$$

lo que puede escribirse también en la siguiente forma:

$$\operatorname{sen} x > \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{3^n}}{\frac{x}{3^n}} x - 4\frac{x^3}{3^3}\left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2n-2}}\right]. \quad (1)$$

Desigualdad que se verifica para todo valor entero de n y que se verificará cuando n crece tendiendo hacia un valor tan grande como se quiera. Pero, cuando n tiende hacia infinito, $\frac{x}{3^n}$ tiende hacia cero, y por lo tanto

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{x}{3^n}}{\frac{x}{3^n}}$$

tiende hacia 1.

La cantidad dentro del corchete es la suma de los términos de una progresión geométrica cuyo primer término vale 1, la razón $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ y el último término tiende hacia cero.

La suma de sus términos vale:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{9}{8}$$

Y la desigualdad (1) se transforma en:

$$\operatorname{sen} x > x - \frac{4x^3}{3^3} \frac{9}{8}$$

o bien

$$\operatorname{sen} x > x - \frac{x^3}{6}$$

lo que implica

$$x - \operatorname{sen} x < \frac{x^3}{6}.$$

Se puede obtener este mismo resultado en una forma mucho más directa. Desarrollando en serie la función sen x, se tiene:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

De donde:

$$x - \operatorname{sen} x = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \dots$$

que se puede escribir:

$$x - \operatorname{sen} x = \frac{x^3}{3!} - \left[\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right].$$

La serie dentro del corchete es una serie convergente donde prevalece el signo del primer término y llamando ε el valor del corchete, tendremos

$$x - \operatorname{sen} x = \frac{x^3}{3!} - \varepsilon$$

de donde se saca

$$x - \operatorname{sen} x < \frac{x^3}{6}.$$

cuaderno

109. Teorema: *Para un arco x positivo, menor que un cuadrante y medido, tomando el radio como unidad, se verifica la doble desigualdad.* Cuando uno valor a $\cos x$, el error que se menor que

en radianes

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}. \qquad (1)$$

En efecto, hemos visto en el nº 72 que

$$\cos x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}. \qquad (2)$$

no

Y reemplazando $\operatorname{sen} \frac{x}{2}$ por un valor mayor $\frac{x}{2}$, se tiene

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$$

y queda demostrada la primera parte del teorema.

Si en cambio, en lugar de $\operatorname{sen} \frac{x}{2}$ en la (2), ponemos un valor menor, que se obtiene de (5) (nº 107) donde hay que hacer el arco igual a $\frac{x}{2}$:

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} > 2 \cdot \frac{x}{4}\left(1 - \frac{x^2}{2^4}\right) \qquad \operatorname{sen} \frac{x}{2} > \frac{x}{2} - \frac{x^3}{32}$$

se tiene

$$\cos x < 1 - 2\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{32}\right)^2$$

de donde

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{512}.$$

Y con mayor razón:

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}$$

con lo que se completa la demostración del teorema.

Observación. — Se pueden restringir más los términos de la desigualdad.

En efecto, tomando la expresión nº 108 y aplicándola para un arco $\frac{x}{2}$ resulta

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} > \frac{x}{2} - \frac{x^3}{48}$$

se obtiene

$$\cos x < 1 - 2\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48}\right)^2$$

de donde se saca

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{2x^6}{48^2}.$$

Y con mayor razón:

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

110. Se puede todavía dar otra demostración del teorema.

Tomando siempre un arco positivo y menor que un cuadrante, el coseno está dado por la serie:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}\cdots$$

que podemos escribir

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \left[\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}\cdots\right].$$

La serie encerrada en el corchete es una serie convergente de signos alternados donde predomina el signo del primer término. Llamando ε a su valor, se tiene

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \varepsilon.$$

Y por lo tanto

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$$

con lo que se demuestra la primera parte del teorema.

Si tomamos nuevamente la serie que expresa el valor del $\cos x$, podemos escribir:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \left[\frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + \dots\right].$$

La serie dentro del corchete es una serie convergente y su valor positivo podemos llamar ε' y tendremos

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \varepsilon'.$$

Luego

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \qquad (1)$$

con lo que se completa la demostración.

Corolario. — Siendo x un arco positivo, menor que un cuadrante y medido tomando el radio como unidad, cuando se toma como valor aproximado del $\cos x$, el valor $1 - \frac{x^2}{2}$, el error que se comete es menor que $\frac{x^4}{16}$.

En efecto, volviendo a la doble desigualdad

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}$$

sacamos

$$0 < \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) < \frac{x^4}{16}$$

lo que prueba el enunciado.

Si se quieren estrechar más los límites, se puede tomar la desigualdad (1) y se tiene:

$$0 < \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) < \frac{x^4}{24}.$$

111. *Cálculo aproximado de sen 10″ y cos 10″.* — Vamos a aplicar las conclusiones que hemos obtenido, para calcular aproximadamente el valor del sen 10″ y cos 10″ y ver un límite superior del error que se comete al tomar tales valores aproximados.

El arco de 10″ expresado en radianes tiene por expresión (nº 7 III)

$$(\text{arc. } 10'')_{rad.} = \frac{\pi}{180 \times 60 \times 6} = 0{,}0000484813681. \quad (1)$$

13 cifras

$\frac{1}{4}$

Lo que nos permite escribir

$$\text{arc. } 10'' < \frac{1}{2 \times 10^4} = 0.000.05$$

3

Luego tomando como valor sen 10″, el valor (1) del arc. 10″, el error que se comete, según nº 107 es menor que la cuarta parte del cubo del arco, es decir, que el error es menor con mayor razón que:

$$\frac{(\text{arc. } 10'')^3}{4} < \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8 \times 10^{12}} \quad = (2 \times 10^4)^3$$

y con mayor razón

$$\frac{(\text{arc. } 10'')^3}{4} < \frac{1}{10^{13}}.$$

Se puede decir entonces que tomando como valor del sen 10″ el valor del arc. 10″ expresado en radianes, vale decir que tomando

$$\text{sen } 10'' = 0.0000484813681$$

se comete un error por exceso menor que una cifra de orden trece decimal y tomando

$$\text{sen } 10'' = 0.0000484813680$$

se toma un valor por defecto.

Análogamente, si tomamos como valor de cos 10″, la cantidad

$$1 - \frac{1}{2}(\text{arc. } 10'')^2 < \cos x$$

donde el arc. 10″ se expresa en radianes, este valor resulta aproximado ***por defecto*** para el cos 10″ y el error que se comete es menor que (nº 109)

$$\frac{1}{16}(\text{arc. } 10'')^4$$

y éste a su vez, menor que

$$\frac{1}{16} \times \frac{1}{16 \times 10^{16}} < \frac{1}{10^{18}}.$$

Luego se puede tomar como valor del cos 10″, hasta la cifra de orden 18 decimal, el valor $1 - \frac{1}{2}(\text{arc. } 10'')^2$, es decir que se tendría :

$$\cos 10'' = 0{,}999\,999\,998\,824\,778\,473.$$

estudiar

Construcción de una tabla

112. *Fórmulas de Thomas Simpson.* — Conociendo el sen 10″ y cos 10″, vamos a obtener fórmulas que permiten calcular el seno y coseno de 20″, 30″, ... de arcos que varían de 10″ en 10″.

Tomemos para ello, las relaciones del nº 78.

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos\alpha \cos\beta$$

y en estas relaciones, hagamos

$$\alpha = m\,10'' \quad \text{y} \quad \beta = 10''$$

donde m es un número entero y positivo. Tendremos

$$\operatorname{sen}(m+1)\,.\,10'' + \operatorname{sen}(m-1)\,.\,10'' = 2 \operatorname{sen} m\,.\,10'' \cos 10'' \qquad (1)$$
$$\cos(m+1)\,.\,10'' + \cos(m-1)\,.\,10'' = 2 \cos m\,.\,10'' \cos 10''. \qquad (2)$$

Observando el valor de cos 10″ que hemos obtenido, puede verse que el valor 2 cos 10″ se aproxima bastante al valor 2, por lo que puede escribirse

$$2 \cos 10'' = 2 - k \qquad (3$$

donde k es una cantidad muy pequeña.

Y tomando como valor aproximado del cos 10″ la cantidad

$$\cos 10'' = 1 - \frac{1}{2}(\text{arc. } 10'')^2$$

como hemos visto, tendremos, según (3)

$$2 - k = 2 - (\text{arc. } 10'')^2.$$

De donde

$$k = (\text{arc. } 10'')^2 = 0.000\,000\,002\,350\,443\,053. \qquad (4)$$

Y reemplazando el valor de 2 cos 10″ por su igual 2 — k, las fórmulas (1) y (2) nos dan:

$= 2 \,\text{sen}\, m\, 10'' \cos 10'' = \text{sen}\, m\, 10'' (2 - k) =$

$$\text{sen}\,(m + 1)\,10'' + \text{sen}\,(m - 1)\,10'' = 2\,\text{sen}\, m\,.\,10'' - k\,\text{sen}\, m\,.\,10''$$

$$\cos\,(m + 1)\,10'' + \cos\,(m - 1)\,10'' = 2\cos m\,.\,10'' - k\cos m\,.\,10''.$$

Las que pueden escribirse en la forma siguiente:

$$\text{sen}\,(m + 1)\,10'' - \text{sen}\, m\,.\,10'' = \text{sen}\, m\,.\,10'' - \text{sen}\,(m - 1)\,10'' - k\,\text{sen}\, m\,.\,10'' \qquad (5)$$

$$\cos\,(m + 1)\,10'' - \cos m\,.\,10'' = \cos m\,.\,10'' - \cos\,(m - 1)\,10'' - k\cos m\,.\,10. \qquad (6)$$

Que son las fórmulas conocidas con el nombre de *fórmulas de Simpson*.

Puede verse que las fórmulas van calculando los valores de trecho en trecho. Dan así las diferencias de

$$\text{sen}\,(m + 1)\,.\,10'' - \text{sen}\, m\,.\,10'' \quad \text{y} \quad \cos\,(m + 1)\,10'' - \cos m\,.\,10''$$

de los senos y cosenos de dos arcos consecutivos, variando éstos de 10″ en 10″, conociendo las diferencias precedentes.

Conocemos ya, sen 10″ y cos 10″. Si queremos sen 20″ y cos 20″, en las fórmulas de Simpson hacemos $m = 1$ y tenemos:

$$\text{sen}\, 20'' - \text{sen}\, 10'' = \text{sen}\, 10'' - k\,\text{sen}\, 10''$$

$$\cos 20'' - \cos 10'' = \cos 10'' - 1 - k\cos 10'',$$

lo que nos permite calcular sen 20″ y cos 20″.

Si queremos ahora, sen 30″ y cos 30″, las fórmulas (5) y (6) nos dan, haciendo $m = 2$:

$$\text{sen } 30'' - \text{sen } 20'' = (\text{sen } 20'' - \text{sen } 10'') - k \text{ sen } 20''$$

$$\cos 30'' - \cos 20'' = (\cos 20'' - \cos 10'') - k \cos 20''$$

lo que nos permite calcular sen 30″ y cos 30″. Y así se puede continuar para 40″, 50″, etc.

Observación. — Es fácil darse cuenta que es suficiente calcular los valores de las funciones trigonométricas hasta 45°. En efecto, si llamamos α a un ángulo comprendido entre 45° y 90° su complemento $(90° - \alpha)$, será menor que 45° y se tiene:

$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \cos (90° - \alpha) \\ \cos \alpha &= \text{sen } (90° - \alpha) \\ \text{tg } \alpha &= \text{ctg } (90° - \alpha) \\ \text{ctg } \alpha &= \text{tg } (90° - \alpha). \end{aligned}$$

Disposición y uso de las tablas

113. Existen dos clases de tablas para conocer los valores de las líneas trigonométricas en función de los ángulos, o para conocer los ángulos conociendo los valores de las líneas. 1° Las tablas que dan los valores de las líneas, comúnmente llamadas tablas de *valores naturales* de las líneas, y es claro que basta con que den esos valores para el primer cuadrante, pues hemos visto que en el primer cuadrante todas las líneas toman todos los valores absolutos que pueden tener.

El manejo de estas tablas es muy simple.

2° Tablas de logaritmos, que dan los logaritmos de las líneas trigonométricas en función de los ángulos, generalmente expresados en la división sexagesimal. También aquí es suficiente que las tablas den los valores entre 0° y 90°.

Son las tablas más usadas y son de manejo muy simple. Existen en el comercio varias de ellas.

Casi siempre cada tabla tiene al comienzo una explicación de su disposición y uso.

Daremos una reseña general. Por otra parte, la disposición de las tablas es semejante, y aprendiendo el manejo de una, es fácil comprender en seguida el manejo de otras.

En general las tablas dan los logaritmos del sen, cos, tg y ctg, y no los de sec y cosec.

Ello se debe a que estas líneas son de poco uso y por otra parte sus valores son los inversos respectivamente del cos y del sen.

Y todavía, como hemos visto, basta calcular el valor en las tablas hasta 45°, porque si se quiere el valor de una línea para un ángulo comprendido entre 45° y 90°, basta calcular el valor de la co-línea. Así:

$$\text{sen}\, 72^\circ = \cos 18^\circ$$
$$\cos 72^\circ = \text{sen}\, 18^\circ$$
$$\text{tg}\, 72^\circ = \text{ctg}\, 18^\circ.$$

Existen tablas que dan los valores de los logaritmos de las líneas trigonométricas con más o menos número de decimales. Así los hay con 4 decimales, 5, 6, 7, 8, etc., decimales. Y naturalmente la explicación que se dé para una de ellas, sirve en general para las demás.

Daremos la explicación de las tablas de Hoüel, que son las que más usan mis alumnos en el curso.

Como las tablas tienen al comienzo una explicación bastante clara y detallada para comprender su manejo, daremos aquí una explicación muy breve.

Una tabla de logaritmos es una tabla a simple entrada y contiene los valores de las líneas, como decíamos entre 0° y 90°. Pero es suficiente conocer los valores hasta 45°, lo que hace disminuir a la mitad el tamaño de la tabla.

Se sabe que los ángulos complementarios, uno tiene respectivamente por sen, cos, tg, ctg, sec, y cosec, el cos, sen, ctg, tg, cosec, y sec del otro. Por ello las tablas tienen en la columna de arriba hacia abajo el valor de los logaritmos de las líneas de 0° a 45° y correspondiéndose de abajo hacia arriba el valor de los logaritmos de las co-líneas.

Si por ejemplo, se quiere el log sen 34°21′, que la tabla de Hoüel los da de 1′ en 1′, leyendo de abajo hacia arriba, el mismo valor corresponde al log cos 55°39′ y si se quiere el logaritmo del *sen* de un ángulo comprendido entre 34°21′ y 34°22′ habrá que interpolar entre éstos, y para el cos habrá que interpolar entre los logaritmos de los cos, ángulos para 55°39′ y 55°38′.

114. *Tablas de Hoüel.* — Las tablas de Hoüel son de cinco decimales y contienen los logaritmos de los senos, cosecantes, tangentes, cotangentes, secantes y cosenos de minuto en minuto desde 0° a 90°.

El seno y coseno para todos sus valores y la tangente para ángulos menores que 45°, son cantidades cuyo valor es menor que *uno*; luego la característica de su logaritmo es negativa, pero en la tabla se le aumenta en 10 unidades.

Es claro que hay que tener en cuenta que un logaritmo con característica 6, 7, 8, 9 corresponde en realidad a un logaritmo con característica $\bar{4}$, $\bar{3}$, $\bar{2}$, $\bar{1}$.

En la práctica es más seguro y más cómodo trabajar con estas características positivas que con negativas.

Se plantean dos problemas, en general, al usar la tabla:

1° Dado un ángulo, encontrar los logaritmos de sus líneas trigonométricas.

2° Conociendo el logaritmo del valor de una línea trigonométrica de un cierto ángulo, encontrar el ángulo.

115. Hablaremos en primer lugar del primer problema.

Si el ángulo que se da no está comprendido en el primer cuadrante, ya hemos visto cómo se reduce al primer cuadrante (n° 28).

De modo que podemos suponer que el ángulo dado está comprendido entre 0° y 90°.

Si el ángulo dado se compone solamente de grados y minutos, su logaritmo se encontrará en la tabla. Si es menor que 45° en las tablas de arriba hacia abajo con la graduación a la izquierda de la página; y si mayor de 45°, en las tablas de abajo hacia arriba con la graduación a la derecha.

Si el ángulo contiene también segundos y fracciones decimales de segundo, se hará una interpolación simple, para lo cual la tabla presta su ayuda con las pequeñas tablas de *partes proporcionales* que figuran en las páginas.

Hay que tener en cuenta que el coseno, la cotangente y la cosecante van disminuyendo con el crecer del ángulo, por lo que las partes proporcionales son substractivas; es decir, que hay que restarlas.

No es necesario entrar en mayores detalles. La tabla misma tiene, como decimos, una explicación muy clara, acompañada de ejemplos para su manejo.

Conviene, sin embargo, insistir un poco en la explicación, cuando el ángulo es muy pequeño, porque en ese caso el seno y tangente tienen variaciones fuertes y también cuando el ángulo se aproxima a 90° porque en ese caso el coseno y la cotangente tienen también variaciones grandes.

Y para el caso de ángulos menores que 3° o mayores que 87°, la misma tabla aconseja dos procedimientos a seguir.

Primer método. — Basándose en que para ángulos muy pequeños, la variación de los logaritmos de seno y tangente está lejos de ser lineal, es decir, no varían proporcionalmente al arco, pero sí puede aceptarse que varían linealmente los valores naturales de las líneas, y justamente esta variación, según hemos visto, es tanto más proporcional cuanto más pequeño sea el ángulo. Se encontrarán entonces por interpolación simple estos valores y de ahí se pasa a encontrar sus logaritmos en la tabla I.

Así, la tabla II da para los 3 primeros grados, los senos naturales y las tangentes naturales con seis decimales. Y como la tangente y el seno, para esos ángulos, tienen valores aproximadamente iguales, en la columna que corresponde a los valores de la tangente se ponen solamente las dos o tres últimas cifras, según el caso, y las que anteceden son las correspondientes para el seno.

Así por ejemplo, da la tabla para:

$$\text{sen } 2°30' = 0.043619$$

y para la tg sólo escribe: 661, porque debe tomarse

$$\text{tg } 2°30' = 0.043661.$$

En el caso en que pase al orden siguiente de la 3ª cifra decimal, está indicado con un asterisco. Por ejemplo, da para sen 2°45′ = 0.047978 y para la tg da * 033; debe entenderse tg 2°45′ = 0.048033.

Ejemplo. — Hallar log sen 1°25′40″4.

La tabla da para 1°25′	sen. nat.	=	0.024723
Dif. tab. = 291	para 40″	=	194
»	» 0,4	=	2
	sen nat. 1°25′40″4	=	0.024919
	log sen 1°25′40″4	=	log 0.024919.

Y buscando ahora el log. de 0.024919 :

$$\begin{array}{lll} \text{Dif. tab.} = 18 & \text{para } 0.02491 = & 8.39637 \\ \quad » & \text{para} \qquad 9 = & \quad 16 \\ \multicolumn{3}{l}{\log \text{ sen } 1^{\circ}25'40''.4 = \log 0.024919 = 8.39653.} \end{array}$$

Se puede así obtener el logaritmo de un arco comprendido entre 87° y 90° del cos, ctg y sec.

Segundo método. — Más cómodo y hasta más exacto y basado en la misma propiedad de que el seno y la tangente para arcos pequeños varían con aproximación proporcionalmente a los arcos, consiste en reducir el arco, primero a segundos, tomar el logaritmo del número de segundos del arco y *agregarle* el logaritmo de la relación del seno (o de la tangente) al arco, para lo cual se tienen en el encabezamiento de las tablas I la corrección a aplicar.

En el encabezamiento de cada columna (tabla I) se indica el número de grados y minutos y en cada página a la izquierda se da el número de segundos de 5 en 5 y desde 0″ a 60″. Esto facilita enormemente la transformación del arco en segundos.

Por ejemplo, teníamos el arco de 1°25′40″4.

Podríamos calcular :

$$\begin{array}{rcr} 1^{\circ} & = 60 \times 60 = & 3600'' \\ 25' & = 25 \times 60 = & 1500'' \\ 40''4 & = & 40''4 \\ \hline 1^{\circ}25'40''4 & = & 5140''4 \end{array}$$

Con la tabla tenemos directamente (pág. 19) *

$$1^{\circ}25'40''4 = 5140.4.$$

Y en la parte de arriba de la misma columna encontramos el número 4.68553, que es lo que hay que sumarle al log de 5140,4 para obtener el

$$\log \text{ sen } 1^{\circ}25'40''.4$$

* *Tables de Logarithmes*, por J. Hoüel, 1924.

y tenemos:

$$\log 5140{,}4 = 3.71100$$

$$\log \frac{\text{sen}}{\text{arc}} \ldots\ldots = \underline{4.68553}$$

$$\log \text{sen } 1^\circ 25' 40'' 4 = 8.39653.$$

El segundo problema que se nos presentaba era:

116. *Conociendo el logaritmo de una línea trigonométrica de un cierto ángulo, encontrar el ángulo.* — Si el logaritmo dado figura en la tabla, es claro que se tiene directamente el ángulo.

Si el logaritmo no figura en la tabla, se hará una interpolación simple y lineal, para lo cual la misma tabla presta su ayuda con las diferencias tabulares que da y las pequeñas tablas para las partes proporcionales.

Pero cuando se trata de logaritmos del sen o tg de ángulos pequeños, entonces la variación está lejos de ser lineal, y si se hace una interpolación de este tipo, se cometen errores fuertes.

En este caso, también pueden seguirse dos métodos, como en el problema anterior.

Primer método. — Se pasa del logaritmo al número y se determina el ángulo por medio de su seno natural o de su tangente natural, según el caso.

Ejemplo. — Se tiene log sen $x = 8.39653$.

Con la tabla I encontramos, buscando sen nat.

$$\text{sen nat. } x = 0.024919.$$

Y ahora en la tabla de senos naturales se tiene:

para	0.024723	=	1°25′
Dif. tab. 291 para	194	=	40″
»	2	=	0″4
	x	=	1°25′40″4.

Segundo método. — Se resta del logaritmo dado, el valor correspondiente del $\log \frac{\text{sen}}{\text{arc}}$ $\left(\text{o } \log \frac{\text{tg}}{\text{arc}}\right)$ y la resta obtenida será el logaritmo del arco expresado en segundos; luego se obtiene el arco expresado en segundos y la misma tabla sirve para obtener el número de grados y minutos. Para encontrar el log a restar, cada página de la tabla I tiene en el encabezamiento, después de las letras S.T., dos números, por ejemplo

$$S.T. = 8{,}39 - 8{,}41.$$

El logaritmo que se nos da está comprendido entre estos dos, luego tenemos así la página en cuyo encabezamiento está el logaritmo a restar, que en este caso es 4.68553, luego

$$\begin{array}{r} 8.39653 \\ 4.68553 \\ \hline 3.71100 \end{array}$$

Y directamente la misma página nos da el número de segundos 5140,4 ya reducidos a 1°25′40″4.

Las tablas de Hoüel se dividen en:

Tabla I. — Tabla de logaritmos de los números enteros de 1 a 10800.
Tabla II. — Tablas de logaritmos de senos, tangentes y secantes de minuto en minuto para todo el primer cuadrante.
Tabla III. — Tablas de logaritmos de Adición y Substracción.
Tabla IV. — Tablas de logaritmos a 8 decimales.

Observación. — No estará de más recordar que las medidas tomadas con los instrumentos no están exentas de errores, antes al contrario, siempre están afectadas de errores y es claro que depende de la exactitud o aproximación de las medidas, la tabla con la que es necesario trabajar.

En general y salvo el caso de medidas de gran exactitud como son por ejemplo los trabajos de triangulación, o muchos de los trabajos que se hacen en determinaciones de longitud, es un error de concepto trabajar con una tabla de 7 decimales, error común en nuestros agrimensores, al calcular mensuras corrientes.

117. *Tablas de adición y substracción.* — Estas tablas contienen los logaritmos de Gauss, mediante los cuales, conociendo el logaritmo de dos números, se puede con una sola lectura de la tabla encontrar el logaritmo de la suma o la diferencia entre esos números.

La tabla se divide en dos partes, una es la de *Adición* y la otra de *Substracción.*

118. *Tablas de adición.* — Esta tabla da para cada número de la columna R, considerado como el logaritmo de un número x mayor que la unidad, el valor correspondiente del logaritmo del número $1 + \frac{1}{x}$. A este logaritmo se le llama el logaritmo aditivo correspondiente al número x.

Tengamos dos números a y b, en donde suponemos a el mayor de los dos y conociendo log a y log b queremos calcular $\log (a + b)$.

Pongamos:

$$a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right) = a\left[1 + \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)}\right]$$

se tiene:

$$\log (a + b) = \log a + \log \left[1 + \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)}\right].$$

Y haciendo:

$$x = \frac{a}{b}$$

resulta

$$\log (a + b) = \log a + \log \left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Y se tiene:

$$\log x = \log a - \log b.$$

La tabla nos da, entrando con $\log x = \log a - \log b$, el $\log \left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

Se busca entonces en la columna R el valor x y al lado está $\log \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ que es lo que hay que sumar al $\log a$ para obtener el $\log (a + b)$. Es claro que si el valor de R no está en la tabla, habrá que hacer una interpolación, para lo cual la tabla da las diferencias tabulares y unas pequeñas tablas para la interpolación.

Ejemplo. — Tenemos :

$$\log a = 3.56003$$

$$\log b = 3.18327.$$

Calcular log $(a + b)$. — Se tiene :

$$\log x = 0.37676$$

Para 0.376.	0.15251 $\Delta = 30$
p. p. para 7	$-$ 31
p. p. » 06.	$-$ 2
Para 0.37676..	= 0.15228
log a	= 3.56003
log $(a + b)$.	= 3.71231.

119. *Tablas de substracción.* — Suponiendo que se conocen los logaritmos de dos números *log* a y *log* b y se quiere calcular *log* $(a - b)$.

Se puede escribir :

$$\frac{b}{a} + \frac{a-b}{a} = 1.$$

Hacemos

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{x} \therefore x = \frac{a}{b} \therefore \log x = \log a - \log b$$

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{x'}, \therefore x' = \frac{a}{a-b} \therefore \log x' = \log a - \log (a - b).$$

Luego

$$\log (a - b) = \log a - \log x'.$$

Siendo $a > b$, se obtiene log x y con este valor obtenemos

$$\log x' = \log \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \right)$$

El procedimiento es entonces el siguiente : 1° se calcula

$$\log x = \log a - \log b.$$

Con este valor se entra en la tabla de substracción entrando en la columna de R, y se busca el *logaritmo* substractivo en la columna de L_s. Se resta este logaritmo substractivo del log a y se tiene log $(a - b)$. En la columna R la tabla trae los valores de log x superiores a 0.3000.

Para valores inferiores a 0.3000 sus primeras cifras se encuentran en la columna indicada con R en la parte inferior de la página y la búsqueda se hace como si log x fuese un logaritmo cuyo número correspondiente se busca.

Ejemplo. — Conocemos

$$\log a = 2.80209$$
$$\log b = 2.37181.$$

Calcular log $(a - b)$.

Se tiene $\log x = \log a - \log b$		$= 0.43028$
para 4302.............	L_s	$= 0.20160$
p. p. para 08		$= \quad 5$
para $\log x = 0.43028$.......	L_s	$= 0.20155$
log a.......		$= 2.80209$
log $(a - b)$..		$= 2.60054.$

Nota. — Estos logaritmos de adición y substracción son de gran utilidad práctica y cabe observar que en general tanto los técnicos nuestros como los profesores se muestran en general reacios a su uso, sin duda debido a que no han tenido oportunidad de ensayar sus ventajas.

Disposición y uso de las tablas de J. Dupuis

120. Las tablas contienen los logaritmos con 7 decimales, de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes de arcos de 10″ en 10″, comprendidos entre 0° y 90°. Para los primeros 45°, los grados están anotados en la parte superior y para ángulos comprendidos entre 45° y 90° en la parte inferior. Es claro que los valores de las líneas de 45° a 90° son los mismos que los de las co-líneas del complemento, que estará comprendido entre 0° y 45°. Las columnas tituladas sen, tg, ctg y cos, en la parte superior, corresponden respectivamente a cos, ctg, tg y sen en la parte inferior.

La tabla da las características negativas en números negativos, signo que va sobre la característica. Creemos que ello no es ventajoso y nos parece más práctico y más seguro trabajar con características positivas, para lo que se le suma 10, como ocurre en las tablas de Hoüel.

A la derecha de las columnas que dan los logaritmos de senos y cosenos, en las columnas encabezadas con D, se dan las *diferencias tabulares,* es decir, la diferencia entre dos logaritmos consecutivos, vale decir las diferencias entre los logaritmos para un incremento de 10″ en el ángulo.

En el centro figura la columna encabezada por D. c., que da la diferencia tabular para tang y cotg, es decir, la diferencia entre dos logaritmos consecutivos, diferencia que está dada sin tener en cuenta el signo, lo que por otra parte no es necesario, porque con sólo ver la columna que interesa en cada caso, uno se da cuenta si el logaritmo va aumentando o disminuyendo.

Estas diferencias son comunes para la tang y cotg y es fácil ver por qué.

Consideremos dos arcos α y $\alpha + \Delta\alpha$ (en este caso $\Delta\alpha = 10''$).

Llamemos Δ a la diferencia entre los logaritmos de las tangentes de esos arcos y Δ' la diferencia entre los logaritmos de sus cotangentes.

Tendremos:

$$\Delta = \log\ \text{tg}\ (\alpha + \Delta\alpha) - \log\ \text{tg}\ \alpha$$

$$\Delta' = \log\ \text{ctg}\ (\alpha + \Delta\alpha) - \log\ \text{ctg}\ \alpha.$$

Puesto que la ctg de un arco es la inversa de la tg, se tiene:

$$\log\ \text{ctg}\ (\alpha + \Delta\alpha) = -\log\ \text{tg}\ (\alpha + \Delta\alpha)$$

$$\log\ \text{ctg}\ \alpha = -\log\ \text{tg}\ \alpha.$$

Luego

$$\Delta' = -\left[\log\ \text{tg}\ (\alpha + \Delta\alpha) - \log\ \text{tg}\ \alpha\right] = -\Delta.$$

Por otra parte, en el primer cuadrante la tg crece de 0 a $+\infty$ y la ctg decrece de $+\infty$ a 0.

Al costado derecho de cada página, excepción hecha de los ángulos comprendidos entre 0° y 5° o lo que es lo mismo entre 85° y 90°, están unas pequeñas tablas, cuyo encabezamiento es la diferencia tabular y que dan las partes proporcionales para 1″, 2″, 3″ hasta 9″.

Llamando nuevamente Δ a la variación del logaritmo cuando el arco varía 10″, Δ es la diferencia tabular y si $\Delta\alpha$ es el incremento del arco, sobre el inferior que esté en la tabla y llamando Δl al incremento correspondiente del log se tiene

$$\frac{\Delta l}{\Delta\alpha} = \frac{\Delta}{10''}.$$

Las pequeñas tablas dan los valores de Δl para $\Delta\alpha = 1'', 2'', 3'' \ldots 9''$.

Para pequeños arcos, comprendidos entre 0° y 5°, como ya no puede considerarse lineal la variación de los logaritmos de sen y tg, se han construído tablas de segundo en segundo, las que son también, desde luego, para cos y ctg de arcos comprendidos entre 85° y 90°.

121. *Uso de la tabla.* — Se nos presentan dos problemas generales:

I. Dado un arco, hallar el log de una cualquiera de sus funciones trigonométricas, y

II. Dado el valor de la función hallar el arco que le corresponde.

Los explicaremos separadamente.

I. *Dado un arco, hallar la línea correspondiente.*

a) Si el arco está en la tabla, obtenemos en seguida su log y luego con la tabla de los números, buscando el anti-logaritmo, obtenemos el valor de la línea. Esto ocurrirá cuando el arco esté dado por un número de segundos que termina en 0, pues la tabla da los log de 10″ en 10″, salvo el caso que el ángulo esté comprendido entre 0 y 5° y se busca al sen o tg, o esté comprendido entre 85° y 90° y se busca el cos o ctg.

La tabla no da valores para sec ni cosec, pero ya hemos dicho cómo se procede si se buscan esas líneas.

b) Si el arco no está en la tabla, entonces buscamos el arco inmediatamente inferior que esté en la tabla y a ese logaritmo le sumamos, si se trata de sen o tg, o le restamos si se trata de cos o ctg, la parte que le corresponde por la diferencia entre el arco considerado y el arco inmediatamente inferior que está en la tabla y esa cantidad, que hemos llamado Δl está dada por

$$\Delta l = \frac{\Delta}{10''} \cdot \Delta\alpha.$$

El valor de Δl lo calculamos fácilmente con las tablas de partes proporcionales. Cuando el valor de Δ no figura en la tabla, siempre aparece uno cercano por defecto y otro cercano por exceso, y se puede hacer cómodamente una interpolación mentalmente.

Una vez encontrado el log, se busca en la tabla de los números el anti-logaritmo y se tiene el valor natural de la línea, caso este último que se presenta poco en la práctica, porque lo que se necesita generalmente son los logaritmos de las líneas.

Primer ejemplo : Hallar el log sen 35°20′13″4. — Se tiene

log sen	$35°20'10'' =$	$\bar{1}.7622072$	$D = 297$
p. p. para	$3'' =$	89.1	
» »	$0''4 =$	11.9	
log	$35°20'13''4 =$	$\bar{1}.7622173.$	

Segundo ejemplo : Hallar log tg 54°20′37″6. — Se tiene

log tg	$54°20'30'' =$	0.1441958	$D = 445$
p. p. para	$7'' =$	311.5	
» »	$0''6 =$	26.7	
log tg	$54°20'37''6 =$	$0.1442296.$	

Tercer ejemplo : Hallar log cos 54°20′37″6. — Se tiene

log cos	$54°20'30'' =$	$\bar{1}.7656317$	$D = - 294$
p. p. para	$7'' =$	$- 205.8$	
» »	$0''6 =$	$- 17.6$	
log cos	$54°20'37''6 =$	$\bar{1}.7656094.$	

Cuarto ejemplo : Hallar log ctg 54°20′37″6. — Se tiene

$$
\begin{array}{llcll}
\log \operatorname{ctg} & 54°20'30'' & = & \bar{1}.8558042 & D = -\ 445 \\
\text{p. p. para} & 7'' & = & -\ 311.5 & \\
\text{»} \quad \text{»} & 0''6 & = & -\ 26.7 & \\
\hline
\log \operatorname{ctg} & 54°20'37''6 & = & \bar{1}.8557704. &
\end{array}
$$

Quinto ejemplo : Hallar log sen 1°25′40″4. — Se tiene

$$
\begin{array}{llcll}
\log \operatorname{sen} & 1°25'40'' & = & \bar{2}.3964930 & \text{Dif. } 1'' = 845 \\
\text{p. p. para} & 0''4 = 845 \times 0.4 & = & 338 & \\
\hline
\log \operatorname{sen} & 1°25'40''4 & = & \bar{2}.3965268. &
\end{array}
$$

Cuando se trata de arcos pequeños, puede todavía seguirse otro procedimiento, cuando el logaritmo no está directamente en la tabla.

Se puede escribir:

$$\operatorname{sen} \alpha = \alpha \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \qquad \operatorname{tg} \alpha = \alpha \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha}$$

y tomando logaritmos se tiene:

$$\log \operatorname{sen} \alpha = \log \alpha + (\log \operatorname{sen} \alpha - \log \alpha)$$

$$\log \operatorname{tg} \alpha = \log \alpha + (\log \operatorname{tg} \alpha - \log \alpha).$$

Cuando el arco α es pequeño, se sabe que se tiene

$$\underset{\alpha \to 0}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}} \to 1 \quad \text{y} \quad \underset{\alpha \to 0}{\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha}} \to 1$$

luego las diferencias ($\log \operatorname{sen} \alpha - \log \alpha$) y ($\log \operatorname{tg} \alpha - \log \alpha$) son muy pequeñas y varían poco para arcos vecinos. Sumando esas diferencias a $\log \alpha$, donde α se expresa por el número de segundos de arco, se tiene respectivamente el $\log \operatorname{sen} \alpha$ y $\log \operatorname{tg} \alpha$.

Esas diferencias están dadas al pie de las tablas de los números, después de las letras *s* para el seno y T para tg.

Además la tabla da la reducción de arcos expresados en segundos a grados, minutos y segundos de 10″ en 10″.

Se puede observar que esa diferencia varía muy poco para arcos sucesivos y es claro que en todo caso puede hacerse una simple interpolación que se hace mentalmente.

Es claro que el procedimiento se puede aplicar a cos y ctg de arcos que se aproximan a 90°.

Ejemplo : Hallar log sen 1°25'40"4. — Se tiene en la tabla que ese ángulo expresado en segundos de arco es 5140"4.

Y la tabla da :

log 5140.	$= 3.7109631$	Dif. tab. $= 845$
p. p. para 0"4	$= \quad 338$	
log 5140.4	$= 3.7109969$	
Hay que sumarle.....	$= \bar{6}.6855299$	
log sen 1°25'40"4...	$= \bar{2}.3965268.$	

Hallar log tg 1°25'40"4. — La tabla da para ese arco 5140"4. Luego tenemos

tg 5140"4..	$= 3.7109969$
Hay que sumarle (T)....	$= \bar{6}.6856648$
log tg 1°25'40"4.	$= \bar{2}.3966617$

Buscando este mismo logaritmo de tg 1°25'40"4 en la parte de la tabla que da logaritmos de 1" en 1", se tiene

log tg 1°25'40"	$= \bar{2}.3966279$	$\Delta = 845$
p. p. para 0"4	$= \quad 338$	
log tg 1°25'40"4	$= \bar{2}.3966617.$	

II. *Dado el logaritmo de una línea trigonométrica, hallar el arco que le corresponde*

Conociendo el problema anterior, es fácil comprender éste, ya que es el inverso. Y es claro que las tablas nos darán siempre arcos en el primer cuadrante y en cada caso habrá que buscar, de acuerdo al problema que se resuelve, el cuadrante y por lo tanto el o los ángulos correspondientes.

La explicación que se ha dado para el problema anterior, hace ver cómo se resuelve éste, por lo que sólo resolveremos algunos ejemplos.

Si se da el *valor natural* de la línea, la tabla de los números da el logaritmo, caso que pocas veces se presenta en la práctica.

Problema. — Hallar el arco α cuyo log sen es $\bar{1}.7622173$.

Hallaremos en la tabla:

$$\begin{array}{lrlrl}
 & \bar{1}.7622173 & & & \\
 & \underline{\bar{1}.7622072} & \text{corresponde} & 35^\circ 20' 10'' & D = 297 \\
 & 101 & & & \\
 & \underline{89.} & & 3'' & \\
 & 12 & & & \\
\text{para} . & 12\ldots\ldots & & \underline{0''4} & \\
 & \alpha & = & 35^\circ 20' 13''4. &
\end{array}$$

Problema: Hallar el arco α cuya tangente vale 0.186164. — Tenemos, en primer lugar en la tabla de los números

$$\begin{array}{llrl}
\log 0.18616 & = & \bar{1}.2698864 & D = 233 \\
\text{p. p. para} \quad 4. & = & \underline{93} & \\
\log \operatorname{tg} \alpha & = & \bar{1}.2698957 &
\end{array}$$

Es decir, que debemos buscar el arco α cuyo log tg $= \bar{1}.2698957$.

Para ello tenemos en la tabla:

$$\begin{array}{lrlrl}
 & \bar{1}.2698957 & & & \\
 & \underline{\bar{1}.2698432} & \text{corresponde a} & 10^\circ 32' 40'' & D = 1170 \\
 & 525 & & & \\
\text{para} & \underline{468} & \text{corresponde a} & 4'' & \\
» & 57 & \text{corresponde a} & \underline{0''5} & \\
 & & \alpha. \quad = & 10^\circ 32' 44''5. &
\end{array}$$

Para ángulos menores que 5°, para sen y tg conviene usar la parte de la tabla en que da los logaritmos de 1″ en 1″.

CAPÍTULO XIII

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

122. Se llama ecuación trigonométrica una igualdad que tiene líneas trigonométricas de ciertos arcos o ángulos y que sólo se verifican cuando se da a estos arcos o ángulos determinados valores llamados *soluciones* de la ecuación.

En general, una ecuación trigonométrica con una incógnita admite *infinidad* de soluciones, pero éstas se componen de un número limitado de grupos de soluciones, todas ellas congruentes entre sí.

Una ecuación trigonométrica se considera resuelta cuando se han encontrado las soluciones incongruentes entre sí y en número finito, tales que las otras soluciones sean congruentes con ellas.

Para resolver una ecuación trigonométrica con una incógnita, se puede emplear el método siguiente.

123. *Método general.* — Se expresan todas las líneas trigonométricas en función de una sola, obteniéndose así una ecuación ordinaria con una incógnita, que es la línea trigonométrica elegida y esta ecuación se resuelve por los métodos ordinarios del Algebra.

Conociendo el valor o los valores de esta línea trigonométrica, las tablas permiten calcular los ángulos correspondientes.

Dada la ecuación trigonométrica de incógnita x, se expresan todas las líneas en función de una sola.

Por ejemplo, en función de sen x, que tomamos como incógnita.

En general, en esta forma se introducen radicales, los que será necesario hacer desaparecer. En la discusión de las soluciones, la incógnita sen x sólo podrá tomar valores tales que $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq +1$.

Se puede tomar como incógnita a $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, lo que tiene la ventaja de no introducir radicales, ya que todas las líneas trigonométricas se pueden expresar racionalmente en función de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Todavía, sin perjuicio de estos métodos que son generales y que pueden conducir a cálculos largos, hay métodos especiales que dependen de la ecuación misma y que no pueden encuadrarse en una regla general.

Su aplicación depende en gran parte de la práctica del calculista.

Pero, volviendo al primer caso, cuando se quieren expresar todas las líneas en función de una sola, podrían presentarse dudas sobre cuál línea se elige como incógnita.

Ch. Brioche ha dado la regla para saber en función de cuál línea se ponen todas las que aparecen en la ecuación.

Si se toma a tg x como incógnita, puesto que esta función de x no cambia, se reemplaza x por $\pi + x$, la ecuación propuesta debe reproducirse, luego cuando al reemplazar x por $\pi + x$, la ecuación no se transforma en sí misma, no deben expresarse las líneas en función de tg x e inversamente si la ecuación se transforma en sí misma, conviene expresar todas las líneas en función de tg x, y si tg α es una de las soluciones de la ecuación, $x = \alpha + k\pi$ son las soluciones.

Análogamente, sen x no cambia cuando se reemplaza x por $\pi - x$, luego si al reemplazar x por $(\pi - x)$, la ecuación no se transforma en sí misma, no conviene expresar las líneas en función de sen x, pero si la ecuación se transforma en sí misma, entonces conviene expresar todas las líneas en función de sen x. Y de la propiedad del cos x, que no cambia cuando se cambia x en $-x$, se saca que no conviene expresar todas las líneas en función del cos x si la ecuación no se transforma en sí misma al cambiar x en $-x$, pero sí conviene cuando la ecuación se transforma en sí misma. De ahí la *regla de M. Brioche.*

1° Si la ecuación no cambia cuando se reemplaza x sea por $\pi + x$, sea por $\pi - x$ o sea por $-x$, se tomará respectivamente como incógnita sea tg x, o a sen x, o a cos x.

2° Si la ecuación cambia cuando se reemplaza x por $\pi + x$, por $\pi - x$ y por $-x$, se toma a tg $\frac{x}{2}$ como incógnita.

124. *Resolver la ecuación*

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = c. \tag{1}$$

Primer método. — Para expresar todo en función de sen x, ponemos

$$\cos x = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$$

y tendremos

$$a \operatorname{sen} x \pm b\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = c$$

o bien, aislando primero el término con el radical

$$b^2(1 - \operatorname{sen}^2 x) = c^2 - 2ac \operatorname{sen} x + a^2 \operatorname{sen}^2 x$$

$(c - a \operatorname{sen} x)^2$

lo que nos da

$$(a^2 + b^2) \operatorname{sen}^2 x - 2ac \operatorname{sen} x + c^2 - b^2 = 0$$

y se obtiene

$$\operatorname{sen} x = \frac{ac \pm \sqrt{a^2c^2 + (a^2 + b^2)(b^2 - c^2)}}{(a^2 + b^2)}.$$

Pero

$$a^2c^2 + (a^2 + b^2)(b^2 - c^2) =$$
$$= a^2c^2 + a^2b^2 - a^2c^2 + b^4 - b^2c^2 = b^2(a^2 + b^2 - c^2),$$

luego

$$\operatorname{sen} x = \frac{ac \pm b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}.$$

Para que las raíces existan es necesario que:

$$a^2 + b^2 - c^2 \geq 0 \qquad \text{o bien} \qquad a^2 + b^2 \geq c^2.$$

Cumplida esta condición, es fácil verificar que el valor de sen x está comprendido entre -1 y $+1$. En efecto, la ecuación (1) puede escribirse:

$$b^2(1 - \operatorname{sen}^2 x) = (c - a \operatorname{sen} x)^2$$

lo que dice que para toda raíz sen x de esta ecuación $(1 - \operatorname{sen}^2 x)$ es positivo y por lo tanto $\operatorname{sen}^2 x$ es menor que 1.

Cumplida la condición $a^2 + b^2 \geq c^2$, se tienen dos ángulos α y β que son soluciones de la ecuación y son dados por

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{ac + b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{ac - b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}.$$

Los ángulos α y β se calculan con las tablas.

En efecto, si el valor de sen α es positivo, la tabla dará un valor de α comprendido entre 0° y 90°. Si sen α es negativo, se calcula por las tablas un valor α' comprendido entre 0° y 90° que tenga para el seno el valor absoluto de $\operatorname{sen}\alpha$ y tendremos $\alpha = 180° + \alpha'$.

Análogamente se encontrará el ángulo β y tendremos

$$\mathrm{I}\left\{\begin{array}{l} x = 2k\pi + \alpha \\ x = (2k + 1)\pi - \alpha \\ x = 2k\pi + \beta \\ x = (2k + 1)\pi - \beta \end{array}\right.$$

k entero, positivo, negativo o nulo.

No hay que creer que todas éstas son soluciones de la ecuación (1). Sería así, si no fuese que hemos introducido soluciones extrañas para $\operatorname{sen} x$ al hacer desaparecer el radical.

En efecto, si consideramos la ecuación

$$a \operatorname{sen} x - b \cos x = c \tag{2}$$

y la tratamos por el mismo camino que la (1) llegamos a la misma ecuación en $\operatorname{sen} x$. Las dos ecuaciones 1 y 2 tienen el mismo $\operatorname{sen} x$, pero no son las mismas ecuaciones.

Las soluciones del grupo I, son las soluciones de las dos ecuaciones 1 y 2. Habrá que elegir las que corresponden a la ecuación (1) y ello es muy sencillo. En efecto, los ángulos α y $(\pi - \alpha)$ tienen el mismo seno, pero sus cos son de signo contrario. Uno de ellos, verificará la ecuación 1 y el otro la ecuación 2. Sea α_1 el valor que satisface a la ecuación (1). Un razonamiento análogo haríamos con β y $(\pi - \beta)$. Sea β_1 el valor de uno de estos dos que satisfaga a la ecuación (1).

Los dos valores α_1 y β_1 nos dan finalmente los grupos de solución

$$x = 2k\pi + \alpha_1$$
$$x = 2k\pi + \beta_1.$$

Segundo método. — Pongamos $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ en función de $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, recordando que

preferentemente

$$\operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Y reemplazando estos valores en la ecuación (1) tendremos

$$2a \operatorname{tg}\frac{x}{2} + b\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) = c\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)$$

o bien

$$(b + c)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 2a \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c - b = 0.$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Lo que nos da:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 + 4(b + c)(b - c)}}{2(b + c)} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c}.$$

Llegamos a la misma conclusión, de que para que las raíces existan, es necesario que se tenga

$$a^2 + b^2 \geq c^2.$$

Se tienen así los valores α y β que satisfacen a

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c}.$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c}.$$

Será fácil calcular así los ángulos α y β.

Y tendremos para α, si $\operatorname{tg}\alpha$ es positivo, un valor comprendido entre 0 y 90°, que satisface a la ecuación. Si $\operatorname{tg}\alpha$ es negativo, la tabla dará el ángulo α' comprendido entre 0° y 90° tal que

$$\operatorname{tg}\alpha' = -\operatorname{tg}\alpha$$

y tendremos

$$\alpha = \pi - \alpha'.$$

Un razonamiento análogo haríamos para β y tendríamos

$$\frac{x}{2} = k\pi + \alpha$$

$$\frac{x}{2} = k\pi + \beta.$$

Y por lo tanto

$$x = 2k\pi + 2\alpha$$

$$x = 2k\pi + 2\beta.$$

Se llega así a los mismos resultados del primer método. Es de hacer notar que por este camino hemos tenido una discusión más corta y que no hemos introducido ninguna solución extraña.

N *Tercer método.* — Sea nuevamente la misma ecuación

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$$

que podemos escribir

$$\operatorname{sen} x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}.$$

Y poniendo ahora

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}, \tag{3}$$

donde φ es un ángulo auxiliar de cálculo, tendremos

$$\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} . \cos x = \frac{c}{a}$$

de donde

$$\operatorname{sen} x \cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi \cos x = \frac{c}{a} \cos \varphi$$

o bien

$$\operatorname{sen} (x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos \varphi. \tag{4}$$

Primeramente hay que calcular el ángulo auxiliar φ dado por la (1) 3 y luego $x + \varphi$ y por lo tanto x.

Discusión. — Es necesario que el valor de sen $(x + \varphi)$ dado por la (4) esté comprendido entre -1 y $+1$, para lo cual es suficiente que se tenga

$$\frac{c^2}{a^2} \cos^2 \varphi \leq 1.$$

$\cos \varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$

Y como es $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$, se tiene $\cos^2 \varphi = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$

es decir

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \dfrac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2}{a^2 + b^2}.$$

Y la condición se transforma en

$$\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{a^2}{a^2+b^2}\leq 1 \text{ o bien } \frac{c^2}{a^2+b^2}\leq 1$$

o finalmente

$$c^2 \leq a^2 + b^2$$

que es la misma que encontramos en los métodos anteriores.

En el cálculo, tomamos para φ un valor que satisface a la ecuación (3) y las tablas nos dan un valor α que satisface a la relación

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{a}\cos\varphi$$

y se tiene

$$x + \varphi = 2k\pi + \alpha$$

y también

$$x + \varphi = (2k + 1)\pi - \alpha.$$

Y por lo tanto

$$x = 2k\pi + \alpha - \varphi$$
$$x = 2k\pi + \pi - \alpha - \varphi.$$

Veamos qué aconsejarían las reglas de M. Brioche.

Tomemos nuevamente la ecuación

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = c.$$

Si cambiamos x en $\pi - x$, la ecuación se transforma en

$$a \operatorname{sen} x - b \cos x = c$$

vale decir, la ecuación cambia y no es conveniente poner todo en función de sen x.

Si cambiamos x en $\pi + x$, la ecuacion se transforma en

$$-a \operatorname{sen} x - b \cos x = c$$

y por lo tanto no es conveniente poner todo en función de tg x.

Si cambiamos x en $-x$, la ecuación queda reducida a

$$-a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$$

y no resulta conveniente poner todas las líneas en función de cos x.

La regla de Brioche aconsejaría, entonces, poner todo en función de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, que es como ha resultado más cómodo, salvo el último método que nos dió también soluciones cómodas.

Determinación gráfica. — Tomando la relación:

$$\operatorname{sen}(x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos \varphi,$$

y expresando $\cos \varphi$ en función de $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$, se tiene, teniendo en cuenta sólo el signo positivo:

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

y resulta:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

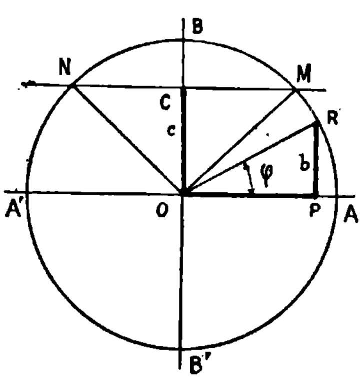


Figura 65

que permite obtener fácilmente los valores de x.

Construimos un triángulo rectángulo, tomando (fig. 65) $OP = a$, $PR = b$ y con centro en O y radio $OR = \sqrt{a^2 + b^2}$, describimos una circunferencia. Se tiene que el ángulo ROP es igual a φ. Tomando sobre el eje OB una magnitud $OC = c$ y llevando por C la paralela a AA′, ésta corta al círculo en M y N. Los ángulos MOA y NOA nos dan las soluciones de $x + \varphi$ y entonces;

$$x_1 = \text{MOA} - \text{ROA} = \text{ROM},$$
$$x_2 = \text{NOA} - \text{ROA} = \text{RON}.$$

Para que el problema tenga solución, es decir, para que la paralela MN corte a la circunferencia, debe tenerse:

$$c \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

o

$$c^2 \leq a^2 + b^2.$$

125. *Solución gráfica.* — Podemos todavía intentar una solución gráfica para esta ecuación

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = c.$$

Tracemos con centro en O un círculo de radio c y llevemos $OA = b$. En A tracemos la normal a OA y sobre ella tomemos $AB = a$. Desde

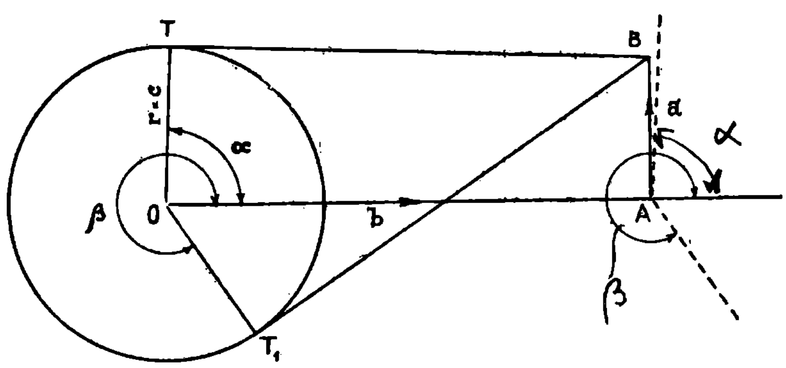


Figura 66

el punto B tracemos las tangentes BT y BT_1 al círculo trazado. Digo que los ángulos formados por OA con OT y OT_1 son las soluciones del problema.

Llamémolas α y β. En efecto, considerando la poligonal OABT y su resultante OT, tenemos que

$$\text{pr.}\,(OA) + \text{pr.}\,(AB) + \text{pr.}\,(BT) = \text{pr.}\,(OT).$$

Proyectando sobre OT y recordando que BT y OT son normales, se tiene

$$\text{pr.}\,(OA) = b \cos \alpha$$

$$\text{pr.}\,(AB) = a \operatorname{sen} \alpha$$

$$\text{pr.}\,(BT) = 0$$

$$\text{pr.}\,(OT) = c.$$

Luego

$$a \operatorname{sen} \alpha + b \cos \alpha = c.$$

Análogamente, considerando la poligonal $OABT_1$ y su resultante OT_1 tendremos

$$\text{pr.}\,(OA) + \text{pr.}\,(AB) + \text{pr.}\,(BT_1) = \text{pr.}\,(OT_1)$$

y proyectando sobre OT_1, tenemos

$$\text{pr. }(OA) = b \cos \beta$$

$$\text{pr. }(AB) = AB \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = a \operatorname{sen} \beta,$$

$$\text{pr. }(BT_1) = 0,$$

$$\text{pr. }(OT_1) = c.$$

Es decir

$$a \operatorname{sen} \beta + b \cos \beta = c.$$

Luego las soluciones del problema son

$$x = 2k\pi + \alpha$$
$$x = 2k\pi + \beta.$$

126. Podemos resolver todavía la ecuación en otra forma gráfica.

Sea la ecuación

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = c \tag{1}$$

pongamos

$$X = \operatorname{sen} x \tag{2}$$

$$Y = \cos x. \tag{3}$$

La ecuación (1) se transforma en la siguiente:

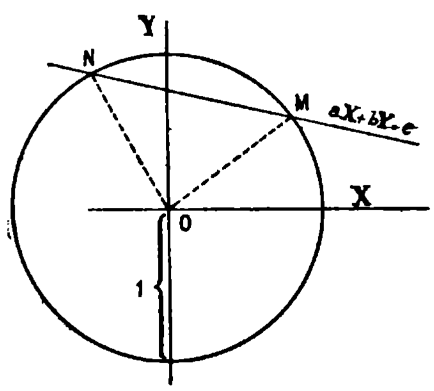


Figura 67

$$aX + bY = c$$

que representa una recta.

Por otra parte, las (2) y (3) nos dan

$$X^2 + Y^2 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

que representa un círculo de radio 1 y centro en el origen de coordenadas.

La recta y el círculo se cortan en dos puntos M y N. Uniendo M y N con O es fácil ver que los ángulos MOX y NOX son las soluciones del problema, soluciones a las que se les puede sumar o restar un número entero de circunferencias.

127. *Problema.* — Resolver la ecuación

$$a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} x = c. \tag{1}$$

Primer método. — Si escribimos la ecuación, expresando $\operatorname{tg} x$ y $\operatorname{ctg} x$ en función de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, se tiene

$$a \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + b \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = c$$

lo que nos da:

$$a \operatorname{sen}^2 x + b \cos^2 x = c \operatorname{sen} x \cos x$$

$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$

o bien

$$a \frac{1 - \cos 2x}{2} + b \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} c \operatorname{sen} 2x$$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

y también

$$c \operatorname{sen} 2x + (a - b) \cos 2x = a + b$$

que es una ecuación del tipo de la ecuación (1) (nº 124) y que se resuelve como aquélla.

Segundo método. — Tomemos nuevamente la ecuación

$$a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} x = c$$

y expresemos las líneas en función de $\operatorname{tg} x$, tendremos

$$a \operatorname{tg} x + \frac{b}{\operatorname{tg} x} = c$$

o

$$a \operatorname{tg}^2 x - c \operatorname{tg} x + b = 0$$

que es una ecuación completa de 2º grado y que nos da

$$\operatorname{tg} x = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}.$$

Para que la ecuación (1) tenga soluciones es necesario que

$$c^2 - 4ab \geq 0.$$

Cumplida esta condición, tendremos dos ángulos α y β que resuelven la cuestión

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}$$

y por lo tanto encontramos para x las soluciones

$$x = k\pi + \alpha$$

$$x = k\pi + \beta.$$

128. *Problema.* — Resolver la ecuación

$$a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x \cos x + c \cos^2 x = d.$$

Primer método. — Podemos poner la ecuación bajo la forma

$$a \frac{1 - \cos 2x}{2} + b \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + c \frac{1 + \cos 2x}{2} = d.$$

lo que nos da $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

$$a - a \cos 2x + b \operatorname{sen} 2x + c + c \cos 2x = 2d$$

o bien

$$b \operatorname{sen} 2x + (c - a) \cos 2x = 2d - a - c$$

ecuación del tipo (1) (nº 124) y que se resuelve como aquélla.

Segundo método. — Pongamos la ecuación bajo la forma

$$a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x \cos x + c \cos^2 x = d \underbrace{(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}_{= 1}$$

y dividiendo todo por $\cos^2 x$, tenemos

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = d \operatorname{tg}^2 x + d$$

o bien

$$(a - d) \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x - (d - c) = 0$$

ecuación de segundo grado fácil de resolver.

129. *Problema.* — Resolver la ecuación

$$a(\operatorname{sen} x + \cos x) + b \operatorname{sen} x \cos x = c.$$

La ecuación se transforma sucesivamente en

suma de senos

$$a\left[\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] + \frac{1}{2} b \operatorname{sen} 2x = c$$

$2 \operatorname{sen} x \cos x = (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 - 1$

$$2a \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \frac{1}{2} b \operatorname{sen} 2x = c$$

$\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x = \left(2 \operatorname{sen} \frac{x+x}{2} \cos \frac{x-x}{2}\right)^2 - 1$

$= (2 \operatorname{sen} x)^2 - 1 = \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)^2 - 1$

$$2a\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + b\left[2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 1\right] = 2c$$

$$2b \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + 2a\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - b - 2c = 0.$$

Se llega así a una ecuación de segundo grado cuya incógnita es $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

si *Segundo método.* — Consideremos nuevamente la ecuación:

$$a(\operatorname{sen} x + \cos x) + b \operatorname{sen} x \cos x = c$$

y agreguemos ahora la ecuación

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Tendremos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas sen x y cos x y podemos escribir

$$a(\operatorname{sen} x + \cos x) + b \operatorname{sen} x \cos x = c$$
$$(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 - 2 \operatorname{sen} x \cos x = 1.$$

De aquí sacamos

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 - 1}{2} = \frac{c - a(\operatorname{sen} x + \cos x)}{b} \qquad (1)$$

que reemplazando en la anterior nos da

$$a(\operatorname{sen} x + \cos x) + b\,\frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 - 1}{2} = c$$

o bien

$$b(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 + 2a(\operatorname{sen} x + \cos x) - 2c - b = 0. \qquad (1')$$

Pongamos

$$\text{sen}\, x + \cos x = s.$$

De la (1) tendremos la ecuación de 2° grado

$$bs^2 + 2as - b - 2c = o$$

que nos dará en general dos valores para s.

Calculado s se tiene la suma $\text{sen}\, x + \cos x = s$ y de (1) el producto

$$\text{sen}\, x \cos x = \frac{c - as}{a}$$

podemos entonces formar la ecuación de 2° grado de la cual conocemos la suma y el producto de las raíces. Para cada valor s se tiene una ecuación de 2° grado.

$$X^2 - sX + \frac{c - as}{b} = 0.$$

Esta ecuación tiene dos raíces X_1 y X_2 que son $\text{sen}\, x$ y $\cos x$ y lo mismo para el otro valor de s.

Tercer método. — Pongamos la ecuación bajo la forma

$$a\,(\text{sen}\, x + \cos x) = c - \frac{1}{2}\, b\, \text{sen}\, 2x.$$

Elevando al cuadrado, se tiene

$$a^2\,\underbrace{(1 + 2\,\text{sen}\, x \cos x)}_{}$$

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x + 2\,\text{sen}\, x \cos x$

$$a^2\,(1 + 2\,\text{sen}\, x \cos x) = \left(c - \frac{1}{2}\, b\, \text{sen}\, 2x\right)^2 = \frac{b^2}{4}\,\text{sen}^2\, 2x + c^2 - bc\, \text{sen}\, 2x$$

o bien

$$b^2\, \text{sen}^2\, 2x - 4\,(bc + a^2)\,\text{sen}\, 2x + 4\,(c^2 - a^2) = 0.$$

Se llega así a una ecuación de 2° grado en $\text{sen}\, 2x$.

Ejemplo. — Sea la ecuación

$$10\,(\text{sen}\, x + \cos x) - 20\, \text{sen}\, x \cos x = 5.$$

Por el primer método tendremos la ecuación

$$40 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 20\sqrt{2}\, \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + 20 - 10 = 0$$

o bien

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \frac{1}{4} = 0.$$

La que nos da dos valores para $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ que son

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{1.414214 + 2.449490}{4} = 0.965926$$

y

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{1.414214 - 2.449460}{4} = -\ 0.258819.$$

De la primera sacamos

$$x = 30^\circ \quad \text{y} \quad x = 60^\circ.$$

De la segunda

$$x = 300^\circ \quad \text{y} \quad x = 150^\circ.$$

Resolviendo por el segundo método, tenemos

$$20s^2 - 20s - 10 = 0$$

o bien

$$s^2 - s - 0{,}5 = 0$$

la que nos da

$$s_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.36603 \quad \text{y} \quad s_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\ 0.36603.$$

Luego tenemos las dos ecuaciones

$$X^2 - 1.36603\,X + 0.43301 = 0$$
$$X_1^2 + 0.36603\,X_1 - 0.43301 = 0.$$

La primera tiene dos raíces

$$X' = 0.866$$
$$X'' = 0.500$$

que nos da

$$\operatorname{sen} x = 0.500$$
$$\cos x = 0.866$$

que corresponde a $x = 30°$, y también

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= 0.866 \\ \cos x &= 0.500 \end{aligned}$$

que corresponde a $x = 60°$.

La segunda nos da

$$\begin{aligned} X_1' &= 0.500 \\ X_1'' &= -0.866 \end{aligned}$$

que nos dice

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= 0.500 \\ \cos x &= -0.866 \end{aligned}$$

que corresponde a $x = 150°$, y también

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= -0.866 \\ \cos x &= 0.500 \end{aligned}$$

que corresponde á $x = 300°$.

Resolviendo por el tercer método, aparecen soluciones extrañas por haber elevado al cuadrado.

En nuestro caso la ecuación de segundo grado sería

$$400 \operatorname{sen}^2 2x - 4(-100 + 100) + 4(-75) = 0$$

o bien

$$\operatorname{sen}^2 2x = 0.75 \therefore \operatorname{sen} 2x = \pm 0.8660.$$

Considerando primero

$$\operatorname{sen} 2x = + 0.866$$

se obtiene

$$2x = k \times 360° + 60° \qquad x = k \times 180° + 30°$$

o bien

$$2x = (2k + 1) \times 180° - 60° \qquad x = (2k + 1)\, 90° - 30°.$$

Y dando a k los valores 0, 1, 2,... etc. se tiene

$$x = 30°, \quad x = 210°, \quad x = 60°, \ldots$$

Considerando ahora

$$\operatorname{sen} 2x = -\ 0.8660$$

se obtiene

$$2x = k \times 360^\circ + 300^\circ \qquad x = k \times 180^\circ + 300^\circ$$

o bien

$$2x = (2k + 1) \times 180^\circ - 300^\circ \qquad x = (2k + 1) \times 90^\circ - 300^\circ.$$

Y dando a k los valores 0, 1, 2 ..., etc., se tiene

$$x = 300^\circ, \quad x = 120^\circ, \quad x = 100^\circ, \quad x = 330^\circ.$$

Hemos encontrado así las soluciones

$$x = 30^\circ, \quad x = 60^\circ, \quad x = 150^\circ \quad \text{y} \quad x = 300^\circ$$

que habíamos encontrado por los otros métodos, pero también hallamos las soluciones

$$x = 210^\circ, \quad x = 120^\circ, \quad x = 330^\circ, \ldots$$

que son soluciones extrañas y que provienen de la elevación al cuadrado.

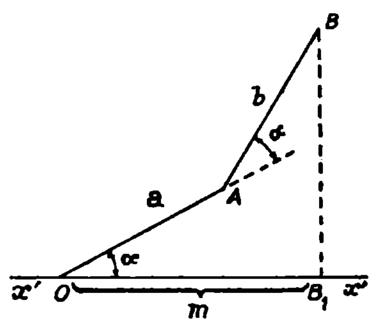


Figura 68

130. *Problema.* — Se da un eje orientado $x'Ox$, siendo Ox la dirección positiva. Se lleva el vector $OA = a$ que forma con Ox el ángulo α. A continuación se traza el vector $AB = b$, que forma con OA el ángulo α, medido en la misma forma que el anterior.

Determinar α de manera que la proyección de OB sobre Ox sea igual a m. Se tiene (fig. 68):

$$\text{pr.}\,\overline{OB} = \text{pr.}\,\overline{OA} + \text{pr.}\,\overline{AB}$$

y reemplazando valores

$$m = a \cos \alpha + b \cos 2\alpha$$

lo que nos da

$$m = a \cos \alpha + b\,(2 \cos^2 \alpha - 1)$$

de donde se obtiene la ecuación

$$2b\cos^2\alpha + a\cos\alpha - b - m = 0$$

cuyas raíces son:

$$\cos\alpha = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 8b^2 + 8bm}}{4b}$$

es necesario que se verifique

$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1.$$

131. *Problema.* — Resolver la ecuación

ver igual que: 128

$$2\operatorname{sen}^2 x + 4\operatorname{sen} x\cos x - 4\cos^2 x = 1.$$

Tenemos, poniendo primero

$1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$ y dividiendo por $\cos^2 x$, que se tiene

$$\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x - 5 = 0.$$

Lo que nos da

$$\operatorname{tg} x = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{16}{4} + 5} = -2 \pm 3$$

de donde se deducen las dos soluciones para $\operatorname{tg} x$:

$$\operatorname{tg} x = 1 \qquad \text{lo que da} \quad x = 45^\circ + k\pi$$

$$\operatorname{tg} x = -5 \qquad \text{»} \quad x = \operatorname{arc.tg}(-5) + k\pi$$

$$= 101^\circ 18' 36'' + k\pi.$$

132. *Resolver la ecuación*

$$\operatorname{sen} 5x = \operatorname{sen} 7x.$$

Se debe tener

$$7x = 5x + 2k\pi \qquad x = k\pi,$$

o bien

$$\pi - 7x = 5x + 2k\pi \qquad x = \frac{\pi(1 - 2k)}{12},$$

donde hay que dar a k valores enteros, positivos o negativos.

Y calculando valores de x menores que una circunferencia, la primera nos da, asignando valores sucesivos a k.

$$\text{Para } k = 0 \qquad x = 0$$
$$\text{»} \quad k = 1 \qquad x = \pi.$$

La segunda nos da:

Para	$k = 0$	$x' = \frac{\pi}{12}$	$k = -6$	$x'_6 = \frac{13\pi}{12}$
	$k = -1$	$x'_1 = \frac{\pi}{4}$	$k = -7$	$x'_7 = \frac{5\pi}{4}$
	$k = -2$	$x'_2 = \frac{5\pi}{12}$	$k = -8$	$x'_8 = \frac{17\pi}{12}$
	$k = -3$	$x'_3 = \frac{7\pi}{12}$	$k = -9$	$x'_9 = \frac{19\pi}{12}$
	$k = -4$	$x'_4 = \frac{3\pi}{4}$	$k = -10$	$x'_{10} = \frac{21\pi}{12}$
	$k = -5$	$x'_5 = \frac{11\pi}{12}$	$k = -11$	$x'_{11} = \frac{23\pi}{12}.$

La primera nos da dos soluciones y la segunda nos da doce soluciones, todas menores que una circunferencia. En total catorce soluciones distintas.

Tengamos nuevamente la ecuación y escribamos:

$$\text{sen } 7x - \text{sen } 5x = 0.$$

Y transformando en producto y simplificando, se tiene $2 \text{ sen } \frac{7x - 5x}{2} \cos \frac{5x + 7x}{2}$

$$\text{sen } x \cos 6x = 0.$$

Lo que nos da

$$\text{sen } x = 0$$

o bien

$$\cos 6x = 0.$$

La primera tiene por soluciones menores que una circunferencia:

$$x = 0$$
$$x_1 = \pi.$$

La segunda nos da

$$a) \quad 6x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad x = \frac{\pi}{12}(1 + 4k)$$

$$b) \quad 6x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \qquad x = \frac{\pi}{12}(3 + 4k).$$

Y dando valores sucesivos a k, se tiene en los dos casos:

a		b	
$k = 0$	$x' = \frac{\pi}{12}$	$k = 0$	$x_1' = \frac{\pi}{4}$
$k = +1$	$x_2' = \frac{5\pi}{12}$	$k = +1$	$x_3' = \frac{7\pi}{12}$
$k = +2$	$x_4' = \frac{3\pi}{4}$	$k = +2$	$x_5' = \frac{11\pi}{12}$
$k = +3$	$x_6' = \frac{13\pi}{12}$	$k = +3$	$x_7' = \frac{5\pi}{4}$
$k = +4$	$x_8' = \frac{17\pi}{12}$	$k = +4$	$x_9' = \frac{19\pi}{12}$
$k = +5$	$x_{10}' = \frac{21\pi}{12}$	$k = +5$	$x_{11}' = \frac{23\pi}{12}$.

Y encontramos las mismas soluciones que anteriormente.

133. *Resolver la ecuación:*

$$A \operatorname{sen}(\alpha + x) = B \operatorname{sen}(\beta + x).$$

Primer método. — Desarrollando sen $(\alpha + x)$ y sen $(\beta + x)$ se tiene:

$$A(\operatorname{sen}\alpha \cos x + \operatorname{sen} x \cos\alpha) = B(\operatorname{sen}\beta \cos x + \operatorname{sen} x \cos\beta)$$

y dividiendo por cos x, se tiene

$$A(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha \operatorname{tg} x) = B(\operatorname{sen}\beta + \cos\beta \operatorname{tg} x)$$

$$\operatorname{tg} x\,(A\cos\alpha - B\cos\beta) = B\operatorname{sen}\beta - A\operatorname{sen}\alpha,$$

y se tiene:

$$\operatorname{tg} x = \frac{B\operatorname{sen}\beta - A\operatorname{sen}\alpha}{A\cos\alpha - B\cos\beta},$$

lo que nos permite calcular tg x y por lo tanto x.

Para hacerla calculable por logaritmos, ponemos

$$\operatorname{tg} x = \frac{1 - \dfrac{A \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{B \operatorname{sen} \beta \cos \alpha}}{\dfrac{A \cos \alpha}{B \operatorname{sen} \beta} - \operatorname{ctg} \beta} = \frac{1 - \dfrac{A \cos \alpha}{B \operatorname{sen} \beta} \operatorname{tg} \alpha}{\dfrac{A \cos \alpha}{B \operatorname{sen} \beta} - \operatorname{ctg} \beta}.$$

Pongamos

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A \cos \alpha}{B \operatorname{sen} \beta}$$

y tendremos

$$\operatorname{tg} x = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{ctg} \beta} = - \frac{\operatorname{sen} \beta \cos (\alpha + \varphi)}{\cos \alpha \cos (\beta + \varphi)}.$$

Segundo método. — Pongamos la ecuación en esta forma:

$$\frac{\operatorname{sen} (\alpha + x)}{B} = \frac{\operatorname{sen} (\beta + x)}{A},$$

lo que puede escribirse

$$\frac{\operatorname{sen} (\alpha + x) + \operatorname{sen} (\beta + x)}{A + B} = \frac{\operatorname{sen} (\alpha + x) - \operatorname{sen} (\beta + x)}{B - A}$$

o bien

$$\frac{\operatorname{sen} \left(x + \dfrac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos \dfrac{(\alpha - \beta)}{2}}{\operatorname{sen} \dfrac{\alpha - \beta}{2} \cos \left(x + \dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)} = \frac{A + B}{B - A}$$

o también

$$\operatorname{tg} \left(x + \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{A + B}{B - A} \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Ecuación que permite calcular el ángulo

$$x + \frac{\alpha - \beta}{2},$$

y por consiguiente x.

Ejemplo numérico. — Sea la ecuación

$$12 \operatorname{sen} (35°43'10'' + x) = 18 \operatorname{sen} (40°10'40'' + x).$$

Por el segundo método tendríamos:

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{A + B}{B - A} \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\alpha = 35^\circ 43' 10''$$

$$\beta = 40^\circ 10' 40''$$

$$\alpha + \beta = 75^\circ 53' 50'' \qquad \alpha - \beta = -4^\circ 27' 30'' \qquad A + B = 12 + 18 = 30$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 37^\circ 56' 55'' \qquad \frac{\alpha - \beta}{2} = -2^\circ 13' 45'' \qquad B - A = 18 - 12 = 6.$$

Y calculando

$$\log (A + B) = \log 30 \qquad = 1.47712$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \log \operatorname{tg} - 2^\circ 13' 45'' \qquad = 8.59023 \; n$$

$$0.06735 \; n$$

$$\log B - A = \log 6 \qquad = 0.77815$$

$$\log \operatorname{tg}\left[x + \frac{\alpha + \beta}{2}\right] = \log \operatorname{tg}[x + 37^\circ 56' 55''] \qquad = 9.28920 \; n$$

$$x + 37^\circ 56' 55'' \qquad = -11^\circ\, 0' 49''$$

$$-37^\circ 56' 55''$$

$$x = -48^\circ 57' 44''$$

o bien

$$x + 37^\circ 56' 55'' \qquad = 168^\circ 59' 11''$$

$$37^\circ 56' 55''$$

$$x = 131^\circ 02' 16''.$$

134. *Resolver la ecuación:*

$$A \operatorname{tg}(\alpha + x) = B \operatorname{tg}(\beta + x).$$

Hagamos

$$k = \frac{B}{A}$$

y tendremos

$$\operatorname{tg}(\alpha + x) = k \operatorname{tg}(\beta + x)$$

y desarrollando la tg de la suma de dos arcos se tiene:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} x} = k \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \beta}$$

y encontramos la ecuación de 2° grado:

$$(k \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \operatorname{tg}^2 x + (1 - k)(1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta) \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \alpha - k \operatorname{tg} \beta = 0.$$

Podemos resolverla en una forma más simple escribiendo:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha + x)}{\cos(\alpha + x)} = k\frac{\operatorname{sen}(\beta + x)}{\cos(\beta + x)}.$$

o bien

$$\operatorname{sen}(\alpha + x)\cos(\beta + x) = k\operatorname{sen}(\beta + x)\cos(\alpha + x).$$

Multiplicando por 2 y recordando que

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$$

tendremos

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta + 2x) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = k[\operatorname{sen}(\alpha + \beta + 2x) + \operatorname{sen}(\beta - \alpha)]$$

o bien

$$(k - 1)\operatorname{sen}(\alpha + \beta + 2x) = (k + 1)\operatorname{sen}(\alpha - \beta).$$

Y finalmente

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta + 2x) = \frac{k + 1}{k - 1}\operatorname{sen}(\alpha - \beta).$$

Se encontrará un ángulo φ menor que una circunferencia tal que sea

$$\varphi = \operatorname{arc\,sen}\left[\frac{k + 1}{k - 1}\operatorname{sen}(\alpha - \beta)\right],$$

y podemos poner:

$$2x + \alpha + \beta = 2k\pi + \varphi \quad \text{y} \quad 2x + \alpha + \beta = (2k + 1)\pi - \varphi.$$

Tendremos

$$x = k\pi + \frac{\varphi - \alpha - \beta}{2} \quad \text{y} \quad x = k\pi + \frac{\pi - \varphi - \alpha - \beta}{2}.$$

Lo que nos da cuatro soluciones

Para $k = 0$ $\quad x = \dfrac{\varphi - \alpha - \beta}{2}, \qquad x = \dfrac{\pi - \varphi - \alpha - \beta}{2}$

» $k = 1$ $\quad x = \pi + \dfrac{\varphi - \alpha - \beta}{2}, \qquad x = \dfrac{3\pi - \varphi - \alpha - \beta}{2}.$

Para que el problema sea posible es necesario que se tenga

$$|\operatorname{sen}(2x + \alpha + \beta)| \leq 1$$

lo que equivale a

$$(k-1)^2 \geq (k+1)^2 \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta).$$

135. *Problema.* — Se tiene un sector circular de radio R y ángulo $\alpha < \pi$. Calcular la superficie engendrada por el sector cuando gira alrededor de uno de sus radios OA. Calcular α de manera que esta superficie sea igual a πR^2 (fig. 69).

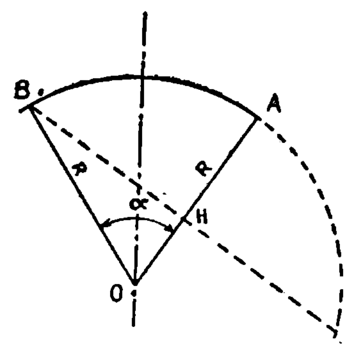


Figura 69

El área engendrada es igual al área lateral del cono, más el área de la zona esférica. El área lateral del cono tiene por valor

$$S_1 = \pi . BH \times R = \pi R^2 \operatorname{sen} \alpha.$$

El área de la zona esférica tiene por valor

$$S_2 = 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha).$$

La superficie buscada tiene por expresión

$$S = \pi R^2 \operatorname{sen} \alpha + 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha)$$

$$S = \pi R^2 [\operatorname{sen} \alpha - 2 \cos \alpha + 2].$$

Expresando ahora $\operatorname{sen} \alpha$ y $\cos \alpha$ en función de $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, tendremos

$$S = \pi R^2 \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Si queremos que ella sea igual a πR^2, tendremos

$$3 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - 1 = 0.$$

Lo que nos da:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{-1 \pm 2}{3}$$

que tiene las soluciones

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -1.$$

Puesto que hemos supuesto a $\alpha < \pi$, la segunda solución no hay que considerarla y queda entonces

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}.$$

Sistemas de ecuaciones

136. No podemos indicar una regla precisa para resolver un sistema de ecuaciones. En general, podríamos decir que el camino más cómodo en cada caso se obtiene con la práctica. Daremos algunos ejemplos y la forma de encararlos. Con esos ejemplos se resuelven sistemas análogos y ellos darán una idea general de cómo se puede enfocar la resolución en cada caso.

137. *Problema.* — Resolver los ocho sistemas siguientes

$$1\begin{cases} x + y = \alpha \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = a \end{cases} \qquad 2\begin{cases} x - y = \alpha \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = a \end{cases} \qquad 3\begin{cases} x + y = \alpha \\ \cos x + \cos y = a \end{cases}$$

$$4\begin{cases} x - y = \alpha \\ \cos x + \cos y = a \end{cases} \qquad 5\begin{cases} x + y = \alpha \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = a \end{cases} \qquad 6\begin{cases} x - y = \alpha \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = b \end{cases}$$

$$7\begin{cases} x + y = \alpha \\ \cos x - \cos y = a \end{cases} \qquad 8\begin{cases} x - y = \alpha \\ \cos x - \cos y = a. \end{cases}$$

Todos estos sistemas se resuelven en forma análoga.

Tomaremos por ejemplo el primer sistema.

$$x + y = \alpha \qquad (1)$$

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = a. \qquad (2)$$

Transformando en producto la (2) se tiene

$$2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = a$$

y teniendo en cuenta la (1) se tiene

$$\cos \frac{x-y}{2} = \frac{a}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \qquad (3)$$

lo que nos permite calcular los valores de $\frac{x-y}{2}$.

Sabemos que si calculamos uno de ellos, por ejemplo φ, tenemos que todos los valores de $\frac{x-y}{2}$ calculados por la (3) están dados por

$$\frac{x-y}{2} = 2k\pi \pm \varphi.$$

Y por la (1)

$$\frac{x+y}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Luego es

$$x = \frac{\alpha}{2} \pm \varphi + 2k\pi$$

$$y = \frac{\alpha}{2} \mp \varphi - 2k\pi$$

donde k puede tomar cualquier valor entero, positivo, negativo o nulo.

Para que exista un valor para φ es necesario que

$$-1 \leq \frac{a}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \leq +1$$

o bien

$$\frac{a^2}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}} \leq 1$$

o también

$$a^2 - 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \leq 0$$

o bien

$$-2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \leq a \leq 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \quad \text{si} \quad \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} > 0$$

$$-2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \geq a \geq 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \quad \text{si} \quad \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} < 0.$$

138. *Problema.* — Resolver los cuatro sistemas de ecuaciones siguientes :

$$1\begin{cases} x + y = \alpha \\ \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = a \end{cases} \qquad 2\begin{cases} x - y = \alpha \\ \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = a \end{cases}$$

$$3\begin{cases} x + y = \alpha \\ \cos x \cos y = a \end{cases} \qquad 4\begin{cases} x - y = \alpha \\ \cos x \cos y = a. \end{cases}$$

Los cuatro sistemas se resuelven en forma análoga, de modo que resolveremos el primero, y siguiendo un camino análogo, será fácil resolver los restantes.

Podemos escribir

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2} = a$$

y teniendo en cuenta que $x + y = \alpha$, se tiene

$$\cos(x - y) = 2a + \cos \alpha. \qquad (1)$$

Lo que nos permite calcular el ángulo $(x - y)$ cuyos valores están dados por

$$x - y = 2k\pi \pm \varphi$$

y es también

$$x + y = \alpha$$

luego

$$x = \frac{\alpha \pm \varphi}{2} + k\pi$$

$$y = \frac{\alpha \mp \varphi}{2} - k\pi.$$

Para calcular φ, convendrá hacer la fórmula (1) calculable por logaritmos. φ es un arco cuyo coseno vale $(2a + \cos\alpha)$ y k un número entero, positivo o negativo. Debe tenerse (nº 72)

$$-1 \leq 2a + \cos\alpha \leq 1$$

o bien

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2} \leq a \leq \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$$

para que se pueda obtener solución.

139. *Problema.* — Resolver los cuatro sistemas siguientes:

$$1 \left\{ \begin{array}{l} x + y = \alpha \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = a \end{array} \right. \quad 2 \left\{ \begin{array}{l} x - y = \alpha \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = a \end{array} \right. \quad 3 \left\{ \begin{array}{l} x + y = \alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = a \end{array} \right. \quad 4 \left\{ \begin{array}{l} x - y = \alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = a. \end{array} \right.$$

Los cuatro se resuelven en forma análoga, por lo que resolveremos el primero

$$x + y = \alpha,$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = a.$$

Esta última nos da:

$$\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y} = \frac{a - 1}{a + 1},$$

o bien

$$\frac{2 \operatorname{sen} \dfrac{x - y}{2} \cos \dfrac{x + y}{2}}{2 \operatorname{sen} \dfrac{x + y}{2} \cos \dfrac{x - y}{2}} = \frac{a - 1}{a + 1},$$

de donde

$$\operatorname{tg} \frac{x - y}{2} = \frac{a - 1}{a + 1} \operatorname{tg} \frac{x + y}{2},$$

y puesto que $x + y = \alpha$,

$$\operatorname{tg} \frac{x - y}{2} = \frac{a - 1}{a + 1} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2};$$

lo que nos permite calcular $\frac{x - y}{2}$ y obtendremos :

$$\frac{x - y}{2} = k\pi + \varphi,$$

y se tenía

$$\frac{x + y}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

vale decir que

$$x = \frac{\alpha}{2} + \varphi + k\pi$$

$$y = \frac{\alpha}{2} - \varphi - k\pi.$$

Los valores de $\frac{x - y}{2}$ que se dan por la tg existen siempre ; es decir, la ecuación se puede resolver para cualquier valor real de a y α.

140. *Problema.* — Resolver el sistema

$$x + y = \alpha \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a.$$

Primer método. — Podemos poner

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = \frac{\operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x}{\cos x \cos y} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} (x + y)}{\cos x \cos y} = a$$

de donde

$$\cos x \cos y = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\cos (x + y) + \cos (x - y)}{2}$$

y se deduce

$$\cos (x - y) = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha - a \cos \alpha}{a}$$

conociendo $x + y$ dado por (1) y $x - y$ ahora calculado, se obtiene fácilmente x e y.

Para que el sistema admita soluciones, es necesario que se verifique

$$-1 \leq \frac{2 \operatorname{sen} \alpha - a \cos \alpha}{a} \leq 1$$

o bien

$$\frac{(2 \operatorname{sen} \alpha - a \cos \alpha)^2}{a^2} \leq 1.$$

En forma análoga se resuelve el sistema

$$x - y = \alpha$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = a.$$

Segundo método. — Podemos ensayar otra forma de solucionar este sistema de ecuaciones. Consideremos nuevamente

$$x + y = \alpha \tag{2}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a. \tag{3}$$

La primera nos da

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \operatorname{tg} \alpha$$

y teniendo en cuenta la 2ª se deduce

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{tg} \alpha - a}{\operatorname{tg} \alpha}. \tag{4}$$

Conociendo ahora la suma $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$ dada por (3) y el producto dado por (4), se puede considerar a $\operatorname{tg} x$ y a $\operatorname{tg} y$ como las raíces de una ecuación de 2° grado que sería justamente

$$X^2 - aX + \frac{\operatorname{tg} \alpha - a}{\operatorname{tg} \alpha} = 0$$

cuyas raíces son

$$X = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}}$$

estos dos valores son los de $\operatorname{tg} x$ y $\operatorname{tg} y$, lo que nos permite calcular x e y.

141. *Problema.* — Resolver el sistema

$$x + y = \alpha \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = a.$$

Podemos obtener

$$\frac{\operatorname{sen}(x - y)}{\cos x \cos y} = a$$

y también lo transformamos en el sistema

$$x + y = \alpha$$

$$\frac{2 \operatorname{sen}(x - y)}{\cos(x + y) + \cos(x - y)} = a$$

de donde

$$2 \operatorname{sen}(x - y) - a \cos(x - y) = a \cos \alpha$$

ecuación del tipo clásico $a \operatorname{sen} x + b \cos y = c$ (nº 124) y que resolviéndola nos da:

$$x - y$$

y luego se pueden calcular, teniendo en cuenta la (1) los valores de x y de y.

142. *Problema.* — Resolver el sistema

$$x + y = \alpha$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = a.$$

Primer método. — Podemos escribir la 2ª en la siguiente forma

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{\cos(x - y) + \cos(x + y)} = a$$

que nos da

$$\cos(x - y) = \frac{1 + a}{1 - a} \cos \alpha.$$

Lo que nos permite encontrar $(x - y)$ y tendremos

$$x - y = 2k\pi \pm \varphi$$
$$x + y = \alpha,$$

luego

$$x = \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\varphi}{2} + k\pi$$

$$y = \frac{\alpha}{2} \mp \frac{\varphi}{2} - k\pi.$$

Es necesario que

$$-1 \leq \frac{1 + a}{1 - a} \cos\alpha \leq +1$$

o bien

$$\left(\frac{1 + a}{1 - a}\right)^2 \cos^2\alpha \leq 1.$$

En forma análoga se resuelve

$$x - y = \alpha$$
$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = a.$$

Segundo método. — Tomemos nuevamente el sistema

$$x + y = \alpha$$
$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = a.$$

La primera nos da

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \operatorname{tg}\alpha$$

de donde obtenemos

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \operatorname{tg}\alpha - a \operatorname{tg}\alpha = (1 - a) \operatorname{tg}\alpha.$$

Conocemos así la suma y el producto de $\operatorname{tg} x$ y $\operatorname{tg} y$. Podemos considerar a $\operatorname{tg} x$ y $\operatorname{tg} y$ como raíces de la ecuación de 2° grado

$$X^2 + (a - 1) X \cdot \operatorname{tg}\alpha + a = 0$$

cuyas raíces son

$$X = \frac{1-a}{2}\operatorname{tg}\alpha \pm \sqrt{\frac{(a-1)^2}{4}\operatorname{tg}^2\alpha - a}$$

las raíces X_1 y X_2 son los valores de $\operatorname{tg} x$ y $\operatorname{tg} y$, lo que nos permitirá calcular x e y.

143. *Problema.* — Resolver el sistema

$$x + y = \alpha$$

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = a.$$

La 2^a nos da:

$$\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} = \frac{a-1}{a+1}$$

y de aquí:

$$\frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\operatorname{sen}(x+y)} = \frac{a-1}{a+1}$$

la que nos da

$$\operatorname{sen}(x-y) = \frac{a-1}{a+1}\operatorname{sen}\alpha,$$

y conociendo $x - y$ dado por ésta y $x + y = \alpha$ dado en el sistema se puede calcular fácilmente x e y.

144. *Problema.* — Resolver el sistema

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = a$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2} = b.$$

Expresando $\operatorname{tg} x$ y $\operatorname{tg} y$ en función de $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ y $\operatorname{tg}\frac{y}{2}$ respectivamente, tenemos

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\;\frac{2\operatorname{tg}\frac{y}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}} = \frac{4b}{\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}\right)} = a$$

o bien

$$\frac{4b}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - \operatorname{tg}^2\frac{y}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}} = \frac{4b}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - \operatorname{tg}^2\frac{y}{2} + b^2} = a$$

de donde

$$4b = a - a\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - a\operatorname{tg}^2\frac{y}{2} + ab^2$$

$$4b = a - a\left[\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{y}{2}\right] + ab^2$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{y}{2} = \frac{a + ab^2 - 4b}{a} = 1 + b^2 - \frac{4b}{a}$$

y por otra parte

$$2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2} = 2b$$

lo que nos da:

$$\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{y}{2}\right)^2 = (1 + b)^2 - \frac{4b}{a}$$

y

$$\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{y}{2}\right)^2 = (1 - b)^2 - \frac{4b}{a}.$$

Y de aquí sacamos

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(1 + b^2) - \frac{4b}{a}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1 - b^2) - \frac{4b}{a}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(1 + b^2) - \frac{4b}{a}} \mp \frac{1}{2}\sqrt{(1 - b^2) - \frac{4b}{a}}.$$

145. *Problema.* — Resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} x + y &= \alpha \\ \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y &= b \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Expresando $\cos(x+y)$ y $\cos(x-y)$ en función de $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} y$, $\cos x$ y $\cos y$ y simplificando se tiene

$$\cos(x+y)\cos(x-y) = 1 - b, \tag{2}$$

luego

$$\cos(x-y) = \frac{1-b}{\cos\alpha}. \tag{3}$$

Conociendo $x + y = \alpha$ y $(x - y)$ calculado por (3), es fácil obtener x e y.

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y = b \end{cases}$$

ver (72)

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 2y}{2} = b$$

$$-\cos 2x - \cos 2y = 2b - 2$$

$$\cos 2x + \cos 2y = 2 - 2b$$

$$2 \operatorname{sen} \frac{2x+2y}{2} \operatorname{sen} \frac{2x-2y}{2} = 2 - 2b$$

$$\operatorname{sen}(x+y) \operatorname{sen}(x-y) = 1 - b$$

$$\operatorname{sen}(x-y) = \frac{1-b}{\operatorname{sen}\alpha}$$

CAPÍTULO XIV

REPRESENTACIÓN TRIGONOMÉTRICA DE LAS IMAGINARIAS

146. Consideremos un complejo:

$$a + i b$$

y tracemos un sistema de ejes ortogonales, $x'x$ e $y'y$ (fig. 70). Tomemos como abscisa el valor a y como ordenada b, obtenemos un punto M que representa el complejo $a + ib$. Tendremos en la figura 70:

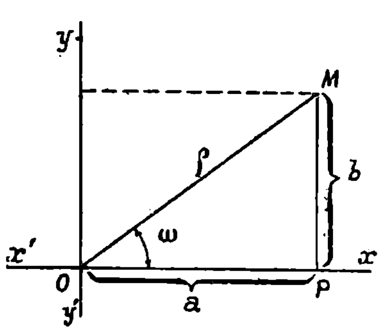


Figura 70

$$a = \mathrm{OP}$$
$$b = \mathrm{MP}.$$

Se dice que el punto M representa el complejo $a + ib$ y recíprocamente el complejo $a + ib$ es el afijo del punto M.

Resulta que el eje $x'x$ representa los números reales y el eje $y'y$ los números imaginarios puros. Al eje $x'x$ se le llama eje de los números reales y al eje $y'y$ eje de los imaginarios.

Se puede ver también que dos cantidades de signo contrario están representadas por dos puntos M y M', simétricos con respecto al origen O, y que dos complejos conjugados están representados por dos puntos simétricos con respecto al eje $x'x$.

Se llama *módulo* del complejo $a + ib$, la cantidad

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

que viene a ser la distancia del origen O al punto M.

Se acostumbra escribir

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = |a + ib|.$$

El ángulo que forma la dirección OM, con la dirección Ox, medido a partir de Ox en el sentido positivo se llama *argumento* del complejo

$a + ib$. Se tiene que el argumento es definido a menos de un número entero de circunferencias. Si llamamos ω al menor ángulo positivo entre Ox y OM, todos los ángulos congruentes con ω están dados por

$$2k\pi + \omega$$

donde k es un número entero, positivo o negativo.

147. TEOREMA *Toda cantidad compleja, puede ponerse bajo la forma :*

$$\rho(\cos\omega + i\operatorname{sen}\omega)$$

donde ρ es el módulo y ω el argumento.

Sea $a + ib$ una cantidad compleja que representamos por el punto M (fig. 70). Uniendo O con M se tiene, siendo ρ el módulo y ω el argumento

$$\rho = \mathrm{OM}, \qquad \omega = \text{ang MOX}.$$

Proyectando OM sobre los ejes, se tiene

$$a = \rho\cos\omega \qquad b = \rho\operatorname{sen}\omega$$

y luego

$$a + ib = \rho(\cos\omega + i\operatorname{sen}\omega).$$

Recíprocamente, todo complejo de la forma $\rho(\cos\omega + i\operatorname{sen}\omega)$ puede ponerse bajo la forma $a + ib$. Haciendo

$$\left.\begin{aligned}\rho\cos\omega &= a\\ \rho\operatorname{sen}\omega &= b\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

se tiene que el complejo adquiere la forma

$$\rho(\cos\omega + i\operatorname{sen}\omega) = a + ib.$$

Para calcular ρ, tenemos

$$\rho^2\cos^2\omega = a^2$$
$$\rho^2\operatorname{sen}^2\omega = b^2.$$

De donde

$$\rho^2 = a^2 + b^2 \qquad \rho = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

En cuanto al argumento se calcula por

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{b}{a}$$

y no hay ambigüedad para conocer el cuadrante porque se sabe el signo de sen ω y cos ω dados por (1).

Cuando una cantidad compleja se ha puesto bajo la forma

$$\rho\,(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)$$

se dice que se le ha dado forma trigonométrica.

148. Suma: *La suma de dos complejos es otro, cuyo módulo es la diagonal del paralelogramo construído sobre los módulos de los complejos sumandos y cuyo argumento es el ángulo que forma esta diagonal con el eje* Ox *. — Consideremos los complejos

$$z_1 = \rho_1\,(\cos\omega_1 + i \operatorname{sen}\omega_1)$$
$$z_2 = \rho_2\,(\cos\omega_2 + i \operatorname{sen}\omega_2).$$

Supongamos $\omega_2 > \omega_1$, sumemos y se tiene

$$z_1 + z_2 = \rho_1 \cos\omega_1 + \rho_2 \cos\omega_2 + i\,(\rho_1 \operatorname{sen}\omega_1 + \rho_2 \operatorname{sen}\omega_2).$$

Llamando ρ al módulo de la suma y ω al argumento, se tiene:

$$\rho = \sqrt{(\rho_1 \cos\omega_1 + \rho_2 \cos\omega_2)^2 + (\rho_1 \operatorname{sen}\omega_1 + \rho_2 \operatorname{sen}\omega_2)^2}$$

lo que nos da, desarrollando las potencias y simplificando

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\omega_2 - \omega_1)}$$

y además el argumento es tal que

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\rho_1 \operatorname{sen}\omega_1 + \rho_2 \operatorname{sen}\omega_2}{\rho_1 \cos\omega_1 + \rho_2 \cos\omega_2} = \frac{\operatorname{sen}\omega}{\cos\omega}$$

de esta última se obtiene, despejando ρ_1 y ρ_2

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\operatorname{sen}(\omega_2 - \omega)}{\operatorname{sen}(\omega - \omega_1)}.$$

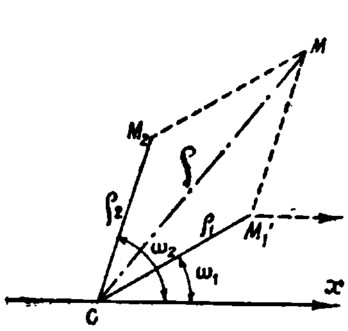


Figura 71

Y ahora si representamos a los dos complejos por los puntos M_1 y M_2 y trazamos la diagonal del paralelogramo OM_2MM_1 construído sobre OM_1 y OM_2 se tiene (fig. 71) que:

$$\overline{OM}^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos \widehat{M_2OM_1}.$$

* Se supone que el lector conoce los teoremas fundamentales del triángulo, que están en los nos 193 y 195.

Siendo el sentido positivo el dado por la flecha es fácil ver que se verifica

$$\overline{OM}^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\omega_2 - \omega_1)$$

es decir

$$OM = \rho.$$

Y según el teorema del seno en el triángulo OM_2M

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\operatorname{sen}(\omega_2 - \omega)}{\operatorname{sen}(\omega - \omega_1)}$$

luego ω es el ángulo que forma la diagonal OM con Ox.

Esto indica el camino a seguir cuando se quiere la suma de varios complejos

$$\rho_1 (\cos \omega_1 + i \operatorname{sen} \omega_1)$$
$$\rho_2 (\cos \omega_2 + i \operatorname{sen} \omega_2)$$
$$\rho_3 (\cos \omega_3 + i \operatorname{sen} \omega_3)$$

representados por los puntos M_1, M_2, M_3, Se traza primero la diagonal del paralelogramo construído sobre dos de ellos por ejemplo, los dos primeros y se tiene así un complejo

$$\rho' (\cos \omega' + i \operatorname{sen} \omega')$$

después la de éste con otro de los sumandos, por ejemplo el tercero y así sucesivamente.

La construcción geométrica se simplifica trazando a continuación del primer módulo OM_1, un segmento M_1M_2' igual, paralelo y en el mismo sentido que OM_2', a continuación del punto M_2' un segmento OM_3', igual, paralelo y del mismo sentido que OM_3, y así sucesivamente. La recta que cierra la poligonal o sea la resultante, es la suma de los complejos.

El procedimiento indicado permite ver cómo se descompone un complejo según dos direcciones dadas.

149. Diferencia. — Para obtener la diferencia entre dos complejos

$$z_1 = \rho_1 (\cos \omega_1 + i \operatorname{sen} \omega_1)$$
$$z_2 = \rho_2 (\cos \omega_2 + i \operatorname{sen} \omega_2)$$

basta sumarle al primer complejo el segundo, en el cual el argumento se ha aumentado en π o en $(2k + 1)\pi$.

En efecto, se tiene

$$\cos \omega_2 = -\cos(\omega_2 + \pi)$$
$$\operatorname{sen} \omega_2 = -\operatorname{sen}(\omega_2 + \pi)$$

luego

$$z_1 - z_2 = \rho_1(\cos \omega_1 + i \operatorname{sen} \omega_1) - \rho_2(\cos \omega_2 + i \operatorname{sen} \omega_2) =$$
$$= \rho_1(\cos \omega_1 + i \operatorname{sen} \omega_1) + \rho_2[\cos(\omega_2 + \pi) + i \operatorname{sen}(\omega_2 + \pi)].$$

Se deduce fácilmente que el módulo de la suma de dos complejos es menor que la suma de los módulos de los sumandos o a lo más igual a ella y que el módulo de la diferencia de dos complejos es mayor que la diferencia de los módulos ó cuanto más igual a ella.

150. TEOREMA : *El producto de dos complejos es otro complejo, cuyo módulo es el producto de los módulos de los factores y cuyo argumento es la suma de los argumentos de los mismos.* — Sean dos complejos

$$z_1 = \rho_1(\cos \omega_1 + i \operatorname{sen} \omega_1)$$
$$z_2 = \rho_2(\cos \omega_2 + i \operatorname{sen} \omega_2).$$

El producto será, haciendo las operaciones

$$z = z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[\cos \omega_1 \cos \omega_2 - \operatorname{sen} \omega_1 \operatorname{sen} \omega_2] + i[\cos \omega_1 \operatorname{sen} \omega_2 + \\ + \cos \omega_2 \operatorname{sen} \omega_1]$$

o bien

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\omega_1 + \omega_2) + i \operatorname{sen}(\omega_1 + \omega_2)]$$

y llamando al producto

$$\rho(\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)$$

se tiene

$$\rho = \rho_1\rho_2$$
$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

lo que demuestra el teorema.

Se puede representar gráficamente este producto, para lo cual, sean M_1 y M_2 los puntos que representan respectivamente (fig. 72) a los complejos

$$\rho_1 (\cos \omega_1 + i \operatorname{sen} \omega_1)$$

y

$$\rho_2 (\cos \omega_2 + i \operatorname{sen} \omega_2).$$

Tracemos la recta Om que forma con Ox un ángulo

$$\omega_1 + \omega_2.$$

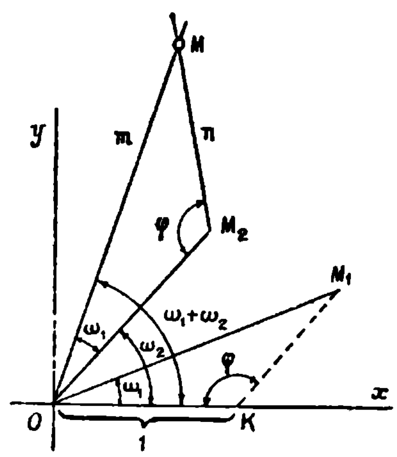


Figura 72

Tomamos sobre Ox el segmento $OK = 1$ y unimos K con M_1, llamando φ al ángulo OKM_1. Sobre OM_2, en OM_2, formamos con la recta M_2n un ángulo igual a φ. Digo que el punto M de cruce de Om con M_2n, es el punto que representa el complejo producto.

En efecto, comparando los triángulos semejantes OKM_1, y OM_2M, se tiene:

$$\frac{OM}{OM_2} = \frac{OM_1}{OK} \qquad \frac{OM}{\rho_2} \qquad \frac{\rho_1}{1} \qquad M = \rho_1 . \rho_2$$

y reemplazando valores

$$OM = \rho_1 \rho_2$$

y además el ángulo MOx es por construcción

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

y el punto M representa entonces el complejo producto.

Es claro que si se trata ahora de un producto de varios factores, se hallaría primero el producto de los dos primeros, y se tiene un complejo, después el producto de éste con el tercero y así sucesivamente.

Luego se tiene:

$$z_1 = \rho_1 (\cos \omega_1 + i \operatorname{sen} \omega_1)$$
$$z_2 = \rho_2 (\cos \omega_2 + i \operatorname{sen} \omega_2)$$
$$z_3 = \rho_3 (\cos \omega_3 + i \operatorname{sen} \omega_3)$$

$$zn = \rho n (\cos \omega n + i \operatorname{sen} \omega n)$$

se tendría que el producto es un complejo de la forma:

$$\rho_1 \rho_2 \rho_3 \dots \rho_n \left[\cos (\omega_1 + i\, \omega_2 + \omega_3 + \dots \omega_n) + i \operatorname{sen} (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \dots \omega_n)\right].$$

151. TEOREMA: *El cociente de dos complejos es otro complejo cuyo módulo es el cociente de los módulos y cuyo argumento es la diferencia de los argumentos.*

Consideremos el cociente:

$$\frac{\rho_1(\cos\omega_1 + i \operatorname{sen}\omega_1)}{\rho_2(\cos\omega_2 + i \operatorname{sen}\omega_2)}$$

y sea el complejo cociente

$$r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$$

debe tenerse

$$\rho_1(\cos\omega_1 + i \operatorname{sen}\omega_1) = \rho_2(\cos\omega_2 + i \operatorname{sen}\omega_2)\,.\,r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) =$$
$$= \rho_2 r[\cos(\omega_2 + \alpha) + i \operatorname{sen}(\omega_2 + \alpha)]$$

es decir, que debe ser:

$$\rho_1 = \rho_2 r, \qquad \text{de donde} \quad r = \frac{\rho_1}{\rho_2},$$
$$\omega_1 = \omega_2 + \alpha \qquad \text{»} \quad \text{»} \quad \alpha = \omega_1 - \omega_2.$$

Y por lo tanto el complejo cociente es

$$r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\omega_2 - \omega_1) + i \operatorname{sen}(\omega_2 - \omega_1)]$$

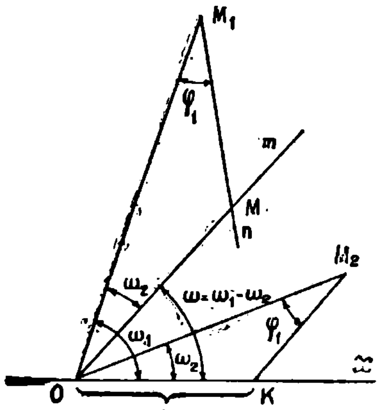


Figura 73

con lo queda demostrado el teorema.

Es fácil deducir del teorema la construcción gráfica. Si M_1 y M_2 representan los complejos dividendo y divisor respectivamente, se traza por O la recta Om que forma con Ox un ángulo igual a $\omega_1 - \omega_2$ (fig. 73). Se toma OK = 1 y se une K con M_2, formándose luego en M_1 un ángulo igual a φ_1 con la recta M_1n. El cruce M de las rectas Om con M_1n, da el cociente.

En efecto, los triángulos OKM_2 y OMM_1 son semejantes, luego

$$\frac{OM}{OM_1} = \frac{OK}{OM_2}$$

de donde

$$OM = \frac{OM_1 \times OK}{OM_2}$$

y reemplazando valores

$$OM = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

y por otra parte el ángulo MOX = ω es por construcción

$$\omega = \omega_1 - \omega_2.$$

152. TEOREMA: *La potencia de orden m de un complejo es otro complejo cuyo módulo es la potencia de orden m del módulo de aquél y cuyo argumento es el argumento del mismo multiplicado por m.*

Tengamos

$$[\rho (\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)]^m.$$

Podemos poner

$$[\rho (\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)]^m = [\rho (\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)] [\rho (\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)] [\ldots]$$

m veces como factor. Pero de acuerdo con las reglas para obtener el producto, tenemos

$$[\rho (\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)]^m = \rho\rho\rho \ldots \rho [\cos (\omega + \omega + \omega + \ldots \omega) + \\ + i \operatorname{sen} (\omega + \omega + \omega + \ldots \omega)]$$

tendríamos que el módulo ρ tomado m veces como factor y el argumento es ω tomado m veces como sumando, luego

$$[\rho (\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)]^m = \rho^m (\cos m\omega + i \operatorname{sen} m\omega)$$

lo que demuestra el teorema.

153. Y si en la última igualdad hacemos $\rho = 1$ tenemos la *fórmula de Moivre.*

$$(\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)^m = \cos m\omega + i \operatorname{sen} m\omega.$$

Es fácil ver que esta fórmula vale también para valores negativos de m. En efecto, pongamos que se tiene un exponente negativo.

$$(\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)^{-m} = \frac{1}{(\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)^m} = \frac{1}{\cos m\omega + i \operatorname{sen} m\omega}$$

Y multiplicando numerador y denominador por

$$\cos m\omega - i \operatorname{sen} m\omega,$$

se tiene

$$(\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)^{-m} = \cos m\omega - i \operatorname{sen} m\omega.$$

Pero se sabe que se tiene también

$$\cos m\omega = \cos(-m\omega)$$

$$\operatorname{sen} m\omega = -\operatorname{sen}(-m\omega)$$

luego

$$(\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)^{-m} = \cos(-m\omega) + i \operatorname{sen}(-m\omega)$$

es decir, la fórmula de Moivre vale para exponentes negativos.

Si el exponente fuese fraccionario tal como $\frac{1}{m}$, se tendría que mostrar que

$$(\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)^{\frac{1}{m}} = \cos \frac{\omega}{m} + i \operatorname{sen} \frac{\omega}{m}.$$

Para ello consideremos el complejo:

$$\cos \frac{\omega}{m} + i \operatorname{sen} \frac{\omega}{m}$$

y elevemos a la potencia m y tendremos

$$\left(\cos \frac{\omega}{m} + i \operatorname{sen} \frac{\omega}{m}\right)^m = \cos \omega + i \operatorname{sen} \omega.$$

Y elevando a la potencia $\frac{1}{m}$ los dos miembros se tiene, invirtiendo los términos de la igualdad

$$(\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)^{\frac{1}{m}} = \cos \frac{\omega}{m} + i \operatorname{sen} \frac{\omega}{m}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Y ahora mostraremos que la fórmula vale para un exponente fraccionario de la forma $\frac{m}{n}$.

En efecto,

$$(\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\,\omega)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\,\omega)^m} = \sqrt[n]{\cos m\,\omega + i\,\mathrm{sen}\,m\omega}$$

$$= (\cos m\omega + i\,\mathrm{sen}\,m\omega)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{m}{n}\,\omega + i\,\mathrm{sen}\,\frac{m}{n}\,\omega.$$

Observación. En realidad, cuando hemos considerado el caso de un exponente de la forma $\frac{1}{m}$, hemos tratado de la raíz m del complejo.

Puesto que

$$\cos\omega = \cos(2k\pi + \omega)$$
$$\mathrm{sen}\,\omega = \mathrm{sen}\,(2k\pi + \omega),$$

luego

$$(\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\,\omega)^{\frac{1}{m}} = \cos\frac{2k\pi + \omega}{m} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi + \omega}{m}.$$

Y dando a k, m valores enteros sucesivos se tienen las m raíces del complejo. Se puede dar, por ejemplo, los valores $0, 1, 2, \ldots (m-1)$.

Y en efecto, mostraremos el siguiente teorema:

154. Teorema : *Todo complejo tiene m raíces de orden m.*

Consideremos el complejo:

$$\rho\,(\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\,\omega),$$

extrayendo su raíz m, tenemos

$$\sqrt[m]{\rho\,(\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\,\omega)} = r\,(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$$

donde hemos llamado

$$r\,(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$$

al complejo raíz.

Elevando a la potencia m, tenemos

$$\rho\,(\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\,\omega) = [r\,(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)]^m = r^m\,(\cos m\alpha + i\,\mathrm{sen}\,m\alpha).$$

Luego debe tenerse

$$\rho\cos\omega = r^m\cos m\alpha$$
$$\rho\,\mathrm{sen}\,\omega = r^m\,\mathrm{sen}\,m\alpha.$$

Y elevando al cuadrado y sumando, se tiene

$$\rho^2 (\cos^2 \omega + \operatorname{sen}^2 \omega) = r^{2m} (\cos^2 m\alpha + \operatorname{sen}^2 m\alpha)$$

o bien

$$\rho^2 = r^{2m} \qquad\qquad r = \sqrt[m]{\rho}.$$

Y también

$$\cos \omega = \cos m\alpha$$
$$\operatorname{sen} \omega = \operatorname{sen} m\alpha.$$

Y estas últimas dan

$$m\alpha = \omega + 2k\pi$$

de donde

$$\alpha = \frac{\omega + 2k\pi}{m}$$

donde k es un número entero cualquiera.

Entonces se tiene:

$$\sqrt[m]{\rho (\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)} = \sqrt[m]{\rho} \left[\cos \frac{2k\pi + \omega}{m} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi + \omega}{m}\right]$$

y dando ahora a k, m valores enteros consecutivos cualquiera, se obtienen m raíces distintas para el complejo.

Dando, por ejemplo a k, los valores consecutivos

$$0, 1, 2, \qquad (m - 1)$$

se obtienen los m argumentos distintos

$$\frac{\omega}{m}, \frac{\omega + 2\pi}{m}, \frac{\omega + 4\pi}{m}, \qquad \frac{\omega + 2(m - 1)\pi}{m}.$$

Si diéramos ahora a k el valor m, obtendríamos el primer argumento aumentado en una circunferencia.

Haciendo $\omega = 0$, se tiene

$$\sqrt[m]{(\rho)} = \sqrt[m]{\rho} \left(\cos \frac{2k\pi}{m} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{m}\right)$$

donde dando a k, m valores enteros consecutivos cualquiera, se obtienen las m raíces de un número real.

Haciendo $\rho = 1$, se tiene

$$(\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)^{\frac{1}{m}} = \cos \frac{\omega + 2k\pi}{m} + i \operatorname{sen} \frac{\omega + 2k\pi}{m}.$$

Y si ahora hacemos $\omega = 0$ se tiene:

$$\sqrt[m]{((1))} = \cos \frac{2k\pi}{m} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{m}$$

donde dando a k, m valores consecutivos cualquiera, se obtienen las m raíces de la unidad.

Ejemplo. — Extraer las raíces cúbicas de la unidad.

Tendremos, haciendo $m = 3$, que

$$\sqrt[3]{((1))} = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{3}.$$

Para $k = 0$, se obtiene una raíz $\alpha_1 = 1$

» $k = 1$, » » otra » $\alpha_2 = \cos 120° + i \operatorname{sen} 120° =$

$$= \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

» $k = 2$, » » » » $\alpha_3 = \cos 240° + i \operatorname{sen} 240° =$

$$= \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

El sen y cos del múltiplo de un arco, en función del sen y cos del arco

155. Tomemos la fórmula de Moivre

$$(\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)^m = \cos m\omega + i \operatorname{sen} m\omega$$

y desarrollemos el primer miembro, teniendo en cuenta las potencias sucesivas de i:

$$i^2 = -1$$
$$i^3 = -i$$
$$i^4 = +1$$
$$i^5 = i$$

y tenemos:

$$(\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\,\omega)^m = \cos^m\omega + im\cos^{m-1}\omega\,\mathrm{sen}\,\omega +$$

$$+ i^2\frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}\omega\,\mathrm{sen}^2\omega + i^3\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}\omega\,\mathrm{sen}^3\omega +$$

$$+ i^4\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4}\mathrm{sen}^4\omega + \qquad =$$

$$= \cos m\omega + i\,\mathrm{sen}\,m\omega.$$

Igualando las partes reales y los coeficientes de las cantidades imaginarias, se tiene:

$$\cos m\omega = \cos^m\omega - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}\omega\,\mathrm{sen}^2\omega +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4}\omega\,\mathrm{sen}^4\omega$$

$$\mathrm{sen}\,m\omega = m\cos^{m-1}\omega\,\mathrm{sen}\,\omega - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}\omega\,\mathrm{sen}^3\omega +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}\cos^{m-5}\omega\,\mathrm{sen}^5\omega.$$

Aplicación. — Haciendo sucesivamente $m = 2, 3, 4,$ etc., se tiene:

$$\cos 2\omega = \cos^2\omega - \mathrm{sen}^2\omega$$

$$\cos 3\omega = \cos^3\omega - 3\cos\omega\,\mathrm{sen}^2\omega$$

$$\cos 4\omega = \cos^4\omega - 6\cos^2\omega\,\mathrm{sen}^2\omega + \mathrm{sen}^4\omega$$

$$\mathrm{sen}\,2\omega = 2\,\mathrm{sen}\,\omega\cos\omega$$

$$\mathrm{sen}\,3\omega = 3\,\mathrm{sen}\,\omega\cos^2\omega - \mathrm{sen}^3\omega$$

$$\mathrm{sen}\,4\omega = 4\,\mathrm{sen}\,\omega\cos^3\omega - 4\,\mathrm{sen}^3\omega\cos\omega$$

Y de aquí podemos obtener la fórmula que da la tg del múltiplo de un arco en función de la tg del arco simple. Tendríamos:

$$\operatorname{tg} m\omega = \frac{\operatorname{sen} m\omega}{\cos m\omega} = \frac{m \cos^{m-1}\omega \operatorname{sen}\omega - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}\omega \operatorname{sen}^3\omega + \frac{m(m-1)\ldots(m-4)}{1.2.\ldots5}\cos^{m-5}\omega \operatorname{sen}^5\omega - }{\cos^m\omega - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}\omega \operatorname{sen}^2\omega + \frac{m(m-1)\ldots(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4}\omega \operatorname{sen}^4\omega - }$$

Div. de por $\cos^m \omega$

o bien

$$\operatorname{tg} m\omega = \frac{m\operatorname{tg}\omega - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\operatorname{tg}^3\omega + \frac{m(m-1)\ldots(m-4)\operatorname{tg}^5\omega}{1.2\ldots5}\ldots}{1 - \frac{m(m-1)}{1.2}\operatorname{tg}^2\omega + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\operatorname{tg}^4\omega - \ldots}$$

Y si damos ahora a m los valores sucesivos 2, 3, 4, ... se tiene:

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2\operatorname{tg}\omega}{1 - \operatorname{tg}^2\omega}$$

$$\operatorname{tg} 3\omega = \frac{3\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}^3\omega}{1 - 3\operatorname{tg}^2\omega}$$

$$\operatorname{tg} 4\omega = \frac{4\operatorname{tg}\omega - 4\operatorname{tg}^3\omega}{1 - 6\operatorname{tg}^2\omega + \operatorname{tg}^4\omega}$$

156. ECUACIONES BINOMIAS. — *Raíces emésimas de la unidad.* — Poniendo

$$z = \rho(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)$$

y se tenga

$$z^m = 1$$

por ser

$$1 = \cos 2k\pi + i \operatorname{sen} 2k\pi$$

se tiene

$$\rho^m(\cos m\omega + i \operatorname{sen} m\omega) = \cos 2k\pi + i \operatorname{sen} 2k\pi$$

y debe ser entonces:

$$\rho^m = 1, \qquad m\omega = 2k\pi,$$

o bien

$$\rho = 1, \qquad \omega = \frac{2k\pi}{m}.$$

Puesto que dos valores de ω que difieran en 2π dan el mismo valor para z, se puede hacer

$$k = 0, \quad k = 1, \quad k = 2, \quad \ldots, \quad k = m - 1$$

porque si se hace también $k = m$, resulta

$$\omega = \frac{2m\pi}{m} = 2\pi$$

que da para z el mismo valor que haciendo $k = 0$.

Existen entonces m raíces diferentes de la unidad y sólo m.

Y esas m raíces están dadas por:

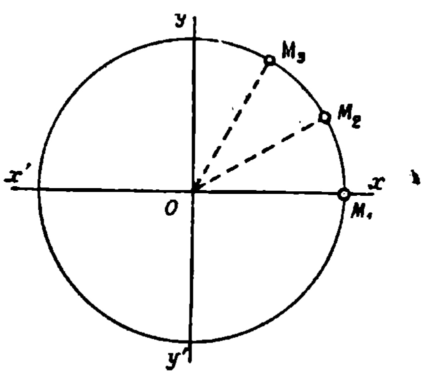


Figura 74

$$z_1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0$$

$$z_2 = \cos\frac{2\pi}{m} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{m}$$

$$z_3 = \cos\frac{4\pi}{m} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{m}$$

$$\cdots$$

$$z_m = \cos\frac{2(m-1)\pi}{m} + i \operatorname{sen}\frac{2(m-1)\pi}{m}.$$

El módulo de todas estas raíces es 1, luego los puntos que representan las raíces están sobre un círculo de radio 1 y centro en el origen. Los argumentos son:

$$0, \quad \frac{2\pi}{m}, \quad \frac{4\pi}{m}, \quad \ldots, \quad \frac{2(m-1)\pi}{m}.$$

Y si M_1, M_2, M_3, ..., M_{m-1} representan las m raíces (fig. 74), los m ángulos

$$M_2OM_1, \quad M_3OM_2, \quad M_4OM_3,$$

son iguales entre sí y cada uno vale la circunferencia dividida en m partes iguales. Los puntos M_1, M_2, M_3, ..., son los vértices de un polígono regular de m lados inscripto en la circunferencia. Y el valor del lado de ese polígono de m lados es:

$$l = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{m}.$$

CAPÍTULO XV

DERIVADAS. VARIACIONES DE FUNCIONES. VALORES LÍMITES DE ALGUNAS FUNCIONES

157. Se llama *derivada* de una función el límite de la relación del incremento de esta función al correspondiente incremento de la variable independiente, cuando éste tiende a cero.

Y es sabido que si se quiere encontrar la derivada de una función

$$y = f(x)$$

se da un incremento Δx a la variable independiente x, la función y toma entonces un incremento Δy y se tiene:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

Luego el incremento Δy de la función es dado por

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Y la relación del incremento de la función al incremento de la variable independiente es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Y ahora se busca el límite de esta relación, cuando Δx tiende hacia cero.

Buscaremos ese límite para las funciones

$$y = \operatorname{sen} x, \qquad y = \cos x \quad \text{e} \quad y = \operatorname{tg} x.$$

158. *Derivada de la función $y = sen\ x$.* — Sea la función

$$y = \operatorname{sen} x. \tag{1}$$

Dando a la variable independiente x un incremento Δx, la función y toma un incremento Δy y se tiene

$$y + \Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x). \qquad (2)$$

Luego, restando la (1) de la (2) se tiene:

$$\Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x.$$

Y transformando en producto la diferencia de senos

$$\Delta y = 2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} . \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Y dividiendo ambos miembros por Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Cuando Δx tiende a cero, el límite de la relación

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

es la unidad (nº 92) y $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ vale $\cos x$.

Y si Δx tiende a cero, Δy tiende a cero y el límite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es la derivada de la función con respecto a la variable x que escribimos $\frac{dy}{dx}$ o $f'(x)$.

Tenemos entonces

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \cos x.$$

159. *Derivada de la función* $y = \cos x$. — Consideremos ahora la función

$$y = \cos x.$$

Dando a la variable x un incremento Δx, la función y toma un incremento Δy y se tiene

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x.$$

Y transformando en producto la diferencia de cosenos resulta

$$\Delta y = -2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Y dividiendo por Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -\frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Pasando al límite

$$\frac{dy}{dx} = f_x' = -\operatorname{sen} x.$$

160. *Derivada de la función* tg x. — Consideremos la función

$$y = \operatorname{tg} x$$

que es también

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Y aplicando las reglas de la derivada de un cociente:

$$\frac{dy}{dx} = f_x'(y) = \frac{\cos x \frac{d \operatorname{sen} x}{dx} - \operatorname{sen} x \frac{d \cos x}{dx}}{\cos^2 x}.$$

Y según los dos teoremas anteriores

$$\frac{dy}{dx} = f_x'(y) = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

161. *Caso general en que se da $y = sen\ u$, $y = cos\ u$ o $y = tg\ u$ donde u es una cierta función de x.* — Si y es función de u y u es función de x, resulta y una función de función, y en ese caso, se sabe que si

$$y = f(u)$$

y también

$$u = \varphi(x)$$

se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{o} \quad y'_x = y'^u \,.\, u'_x$$

luego tendremos si

$$y = \operatorname{sen} u \qquad \text{siendo} \qquad u = \varphi(x).$$

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{d \operatorname{sen} u}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \,.\, u'_x.$$

Si

$$y = \cos u \qquad \text{siendo} \qquad u = \varphi(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{d \cos u}{du} \cdot \frac{du}{dx} = - \operatorname{sen} u \frac{du}{dx} = - \operatorname{sen} u \,.\, u'_x.$$

Si $y = \operatorname{tg} u$ siendo $u = \varphi(x)$

$$\frac{dy}{dx} = y'x = d\frac{\operatorname{tg} x}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'_x.$$

Ejemplo I. — Calcular la derivada de

$$y = 3 \operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x.$$

Se tiene

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cos x - \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Ejemplo II. — Calcular la derivada de

$$y = 2 \operatorname{sen}^2 x - 2\sqrt{3} \cos x + 1.$$

Se tiene

$$\frac{dy}{dx} = 4 \operatorname{sen} x \cos x + 2\sqrt{3} \operatorname{sen} x.$$

Ejemplo III. — Calcular la derivada de

$$y = 5\sqrt{\operatorname{tg} 3x}.$$

Se tiene

$$\frac{dy}{dx} = 5 \frac{\frac{d \operatorname{tg} 3x}{dx}}{2\sqrt{\operatorname{tg} 3x}} = 5 \frac{3 \cdot \frac{1}{\cos^2 3x}}{2\sqrt{\operatorname{tg} 3x}} = \frac{15}{2\sqrt{\operatorname{tg} 3x} \cos^2 3x}.$$

Ejemplo IV. — Calcular la derivada de

$$y = \operatorname{tg}\frac{1}{x^2}.$$

Se tiene

$$u = \frac{1}{x^2} \text{ y entonces } y = \operatorname{tg} u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot\frac{du}{dx} = -\frac{2}{x^3\cos^2\frac{1}{x^2}}.$$

Variaciones de las funciones trigonométricas

Hemos estudiado las variaciones de sen x, cos x, tg x, con el variar de x. Es interesante y muchas veces de importancia el estudio de la variación de una función y, que sea función de expresiones trigonométricas, donde la variable x sea un ángulo y arco. Resulta de interés señalar los valores particulares que puede tomar y, por ejemplo los puntos de máximo y mínimo, los puntos de inflexión... En general el trazado gráfico de la función rinde buenos resultados. Estudiaremos a título de ejemplo, algunos casos sencillos.

162. Estudiar y representar las variaciones de la función

$$y = \operatorname{sen} x + \cos x.$$

Se puede poner

$$y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

y la función y en la suma de las dos sinusoidales

$$y_1 = \operatorname{sen} x$$

$$y_2 = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right),$$

y resulta la suma otra sinusoidal.

En la figura 75 se tienen las tres sinusoidales.

y_1 por la curva OAπB2π...

y_2 » C, $\frac{\pi}{2}$, D, $\frac{3\pi}{2}$, E...

y » CFAGDHBIE...

El máximo de la curva tiene lugar en F para $x = \frac{\pi}{4}$ y el mínimo en H para $x = \frac{5\pi}{4}\cdot$ En estos puntos la ordenada vale respectivamente:

$$2\left(+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm\sqrt{2}\cdot$$

La derivada de la relación (1) es

$$y' = \cos x - \operatorname{sen} x,$$

que indica el máximo para $x = \frac{\pi}{4}$ y el mínimo para $x = \frac{5\pi}{4}\cdot$

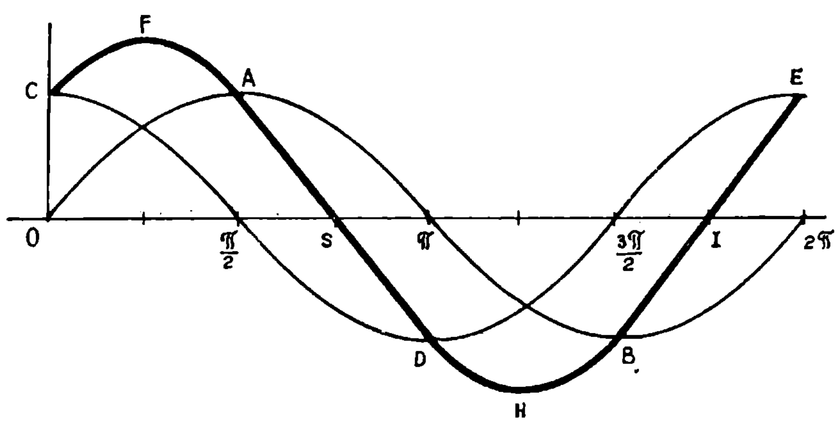


Figura 75

163. *Variaciones de la función :*

$$y = a \operatorname{sen} x + b \cos x.$$

Poniendo $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$, se tiene

$$y = \frac{a}{\cos \varphi}(\operatorname{sen} x + \varphi)$$

y puesto que es

$$\cos \varphi = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

se tiene

$$y = \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{sen}(x + \varphi)$$

El estudio de las variaciones de y se reduce al estudio de las variaciones de sen $(x + \varphi)$. Si se hace variar x de 0 a 2π, el ángulo $(x + \varphi)$ crece desde φ hasta $2\pi + \varphi$.

La función y pasa por un máximo cuando $x = \frac{\pi}{2} - \varphi$ y por un mínimo para $x = \frac{3\pi}{2} - \varphi$.

164. *Variación de la función:*

$$y = \cos 2x - 2 \cos x.$$

Siendo $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$, se tiene

$$y = 2 \cos^2 x - 1 - 2 \cos x$$

o también

$$y = 2 (\cos^2 x - \cos x) - 1.$$

La derivada es igual

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x (1 - 2 \cos x)$$

que se anula; bien sea para $\operatorname{sen} x = 0$ ó $x = k\pi$ bien para $1 - 2 \cos x = 0$ o sea $\cos x = \frac{1}{2}$ y $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

En el intervalo de 0° a 360°, la derivada se anula para $x = 60°$, $x = 180°$ y $x = 300°$.

Podemos todavía calcular valores de la función y, y se tiene el siguiente cuadro:

x	$\cos x$	$\cos^2 x$	$2 (\cos^2 x - \cos x) - 1$
0°	1.0000	1.0000	−1.000
30°	0.8660	0.7500	−1.232
60°	0.5000	0.2500	−1.500
90°	0.0000	0.0000	−1.000
120°	−0.5000	0.2500	+0.500
150°	−0.8660	0.7500	+2.232
165°	−0.9659	0.9330	+2.798
180°	−1.0000	1.0000	+3.000
195°	−0.9659	0.9330	+2.798
210°	−0.8660	0.7500	+2.232
240°	−0.5000	0.2500	−0.500
270°	0.0000	0.0000	−1.000
300°	+0.5000	0.2500	−1.500
330°	+0.8660	0.7500	−1.232
360°	+1.0000	1.0000	−1.000

Con esto se traza la curva de la figura 76.

La curva corta el eje de las x en los puntos correspondientes a

$$\cos 2x - 2\cos x = 0.$$

y bien

$$2\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$$

lo que da

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

y teniendo en cuenta el signo menos

$$\cos x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} = 0{,}3660$$

lo que corresponde a

$$x = 111°28'09'' \text{ y } x = 248°31'51''.$$

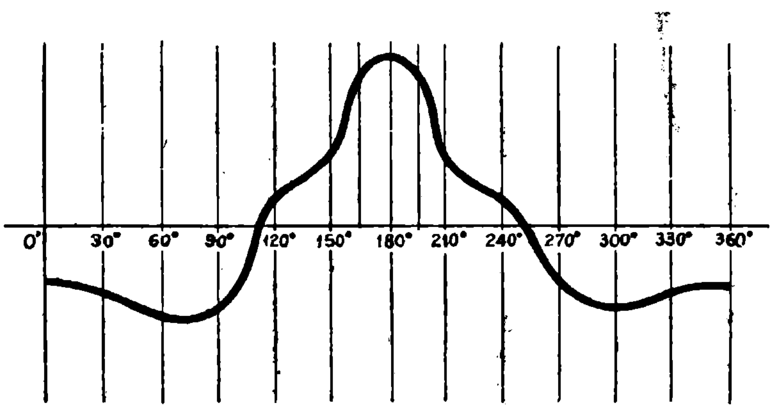


Figura 76

165. *Variaciones de la función :*

$$y = a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} x$$

siendo a y b dos números positivos conocidos y x un arco variable entre 0° y 90°.

La función y es la suma de dos cantidades variables cuyo producto es constante. Se tiene su mínimo cuando

$$a \operatorname{tg} x = \frac{b}{\operatorname{tg} x} \qquad \operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Cuando el arco crece de 0 a 90°, la función y primero decrece de $+\infty$ a $2\sqrt{ab}$ y luego crece nuevamente hacia $+\infty$.

Cuando x crece de 90° a 180° la función tiene los valores anteriores pero con signo cambiado.

166. *Ejemplo* (fig. 77):

$$\operatorname{sen} y = 2 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} y.$$

El mínimo de y cuando

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{1.5000} = 1.2247 \qquad x = 50°46'07''.$$

Y el mínimo de y es

$$y = 2\sqrt{2 \times 3} = 4.8990.$$

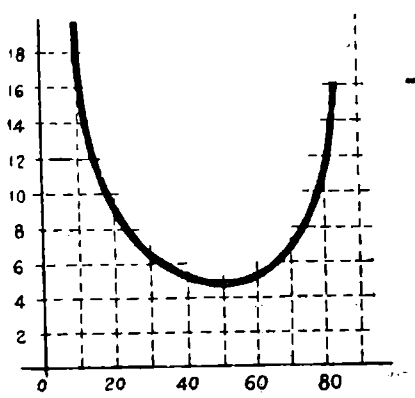


Figura 77

x	tg x	ctg x	2 tg x + 3 ctg x
0°	0	∞	∞
10°	0.1763	5.6713	17.3665
20°	0.3640	2.7475	8.9705
30°	0.5773	1.7320	6.3506
40°	0.8391	1.1918	5.2536
50°	1.1918	0.8391	4.9009
60°	1.7320	0.5773	5.1959
70°	2.7475	0.3640	6.5870
80°	5.6713	0.1763	11.8715
90°	∞	0	∞

Valores límites de algunas funciones

Estudiaremos ahora algunos valores límites de algunas funciones para determinados valores de la variable independiente.

167. *Valor de la expresión :*

$$y = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg} x}, \qquad \text{para} \qquad x = 0.$$

Haciendo $x = 0$, la expresión anterior toma la forma $y = \frac{0}{0}$, pero es fácil hacer desaparecer la indeterminación.

En efecto, se tiene:

$$1 - \cos x = 2\,\mathrm{sen}^2 \frac{x}{2},$$

y

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos x},$$

luego

$$y = \frac{2\,\mathrm{sen}^2\frac{x}{2}\cos x}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\cos x.$$

Y para $x = 0$,

$$\lim_{x=0} y = 0 \times 1 = 0.$$

168. *Valor de la expresión:*

$$y = \frac{\mathrm{sen}^2 x - \mathrm{sen}^2 \alpha}{\mathrm{sen}\,(x - \alpha)}, \qquad \text{para} \qquad x = \alpha.$$

Poniendo

$$\mathrm{sen}^2 x - \mathrm{sen}^2 \alpha = (\mathrm{sen}\, x + \mathrm{sen}\, \alpha)\,(\mathrm{sen}\, x - \mathrm{sen}\, \alpha) =$$
$$= \mathrm{sen}\,(x + \alpha)\,\mathrm{sen}\,(x - \alpha).$$

Luego

$$y = \frac{\mathrm{sen}\,(x + \alpha)\,\mathrm{sen}\,(x - \alpha)}{\mathrm{sen}\,(x - \alpha)} = \mathrm{sen}\,(x + \alpha).$$

En el límite

$$\lim_{x=\alpha} y = \mathrm{sen}\, 2\alpha.$$

169. *Valor de la expresión:*

$$y = \frac{\mathrm{sen}\, 2x - \mathrm{sen}\, 2\alpha}{\cos\alpha - \cos x}, \qquad \text{para} \qquad x = \alpha.$$

Se tiene:

$$\mathrm{sen}\, 2x - \mathrm{sen}\, 2\alpha = 2\,\mathrm{sen}\,(x - \alpha)\cdot\cos\,(x + \alpha) =$$
$$= 4\,\mathrm{sen}\,\frac{x - \alpha}{2}\cos\frac{x + \alpha}{2}\cos\,(x + \alpha),$$

y también

$$\cos\alpha - \cos x = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{x + \alpha}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{x - \alpha}{2},$$

luego

$$y = \frac{2 \cos \frac{x - \alpha}{2} \cos (x + \alpha)}{\operatorname{sen} \frac{x + \alpha}{2}}$$

y para $x = \alpha$

$$\lim_{x=\alpha} y = \frac{2 \cos 2\alpha}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

170. *Valor de la expresión:*

$$y = \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}, \qquad \text{para } x = 90^\circ.$$

Se puede poner

$$y = \frac{\pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}}{1 - \operatorname{sen} x} = \pm\sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}},$$

y en el límite, para $x = 90^\circ$

$$\lim_{x=90^\circ} y = \pm\sqrt{\frac{2}{6}} = \pm\infty.$$

171. *Valor de la expresión:*

$$y = \sec x - \operatorname{tg} x, \qquad \text{para } x = 90^\circ.$$

Pongamos

$$y = \frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \pm\sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x}}$$

y para $x = 90^\circ$:

$$\lim_{x=90^\circ} y = \pm\sqrt{\frac{0}{2}} = 0.$$

172. *Valor de la expresión:*

$$y = \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 2x}, \qquad \text{para } x = 0.$$

Se tiene:

$$y = \frac{\cos 0^\circ - \cos 4x}{\cos 0^\circ - \cos 2x} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 2x}{2 \operatorname{sen}^2 x} = \frac{4 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = 4 \cos^2 x.$$

Para $x = 0$

$$\lim_{x=0} y = 4.$$

173. *Valor de la expresión:*

$$y = \frac{\operatorname{sen} mx}{nx}, \qquad \text{para } x = 0.$$

Se tiene

$$y = \frac{m}{n} \times \frac{\operatorname{sen} mx}{mx}.$$

Pero para $x = 0$,

$$\lim \frac{\operatorname{sen} mx}{mx} = 1$$

luego

$$\lim_{x=0} y = \frac{m}{n}.$$

174. *Valor de la expresión:*

$$y = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \alpha}{x - \alpha}, \qquad \text{para } x = \alpha.$$

Se tiene

$$y = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x-\alpha}{2} \cos \frac{x+\alpha}{2}}{2 \frac{x-\alpha}{2}} = \cos \frac{x+\alpha}{2} \frac{\operatorname{sen} \frac{x-\alpha}{2}}{\frac{x-\alpha}{2}}$$

luego para $x = \alpha$.

$$\lim_{x=\alpha} . y = \cos \alpha.$$

175. *Valor de la expresión:*

$$y = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1}, \qquad \text{para} \quad x = 90^\circ.$$

Se puede poner

$$y = \frac{1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x}}{1 - \frac{1}{\operatorname{tg} x}}$$

y en el límite

$$\lim y = 1.$$

O bien poner

$$y = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 45^\circ}{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 45 - 1} = -\operatorname{tg}(x + 45^\circ)$$

y en el límite

$$\lim_{x=90^\circ} y = -\operatorname{tg} 135^\circ = +1.$$

176. *Valor de la expresión :*

$$y = \frac{x^2}{1 - \cos mx}; \qquad \text{para } x = 0.$$

Se tiene

$$y = \frac{x^2}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{mx}{2}} = \frac{2}{m^2} \cdot \frac{\left(\frac{mx}{2}\right)^2}{\operatorname{sen}^2 \frac{mx}{2}}$$

y para $x = 0$,

$$\lim_{x=0} y = \frac{2}{m^2}.$$

SEGUNDA PARTE

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS PLANOS
TEOREMAS RESPECTIVOS. APLICACIONES

CAPÍTULO I

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

177. *Notación.* — Designaremos en general, un triángulo con las letras A, B, C, colocadas en sus vértices. Los tres ángulos medidos en grados sexagesimales se designarán por A, B, C, y la longitud de sus lados opuestos respectivamente por a, b, c. El área la designaremos en general por S.

El radio del círculo inscripto por r y el del circunscripto por R. Los radios de los círculos ex-inscriptos opuestos a los vértices A, B y C los designaremos respectivamente por r_a, r_b, r_c.

Las alturas correspondientes a los lados a, b y c las llamaremos respectivamente por h_a, h_b y h_c y análogamente las medianas por m_a, m_b y m_c. Las bisectrices interiores por b_a, b_b y b_c y las bisectrices exteriores por b'_a, b'_b y b'_c.

Resolución de triángulos planos

178. Cuando el triángulo es rectángulo, llamaremos A al ángulo recto y a la hipotenusa. Es claro que podríamos considerar a estos triángulos como un caso particular de la resolución de triángulos planos en general.

Bastaría en las fórmulas que resuelven el triángulo en general, hacer $A = 90°$ y simplificar las fórmulas. Aún a riesgo de repetir en el fondo las mismas cosas y a los efectos de ser más claro para los lectores principiantes, expondremos a continuación la resolución de estos triángulos, dando algunos ejemplos prácticos y algunos problemitas vinculados a esta resolución.

En un triángulo rectángulo tenemos cinco elementos fundamentales variables, considerando como elementos fundamentales los lados y los ángulos; éstos son a, b, c, B y C.

Vamos a deducir relaciones entre estos cinco elementos tomados de tres en tres.

179. TEOREMA: *En un triángulo rectángulo, un cateto es igual al producto de la hipotenusa por el coseno del ángulo adyacente o por el seno del ángulo opuesto.* — Sea el triángulo rectángulo ABC (fig. 78), rectángulo en A. Tendremos:

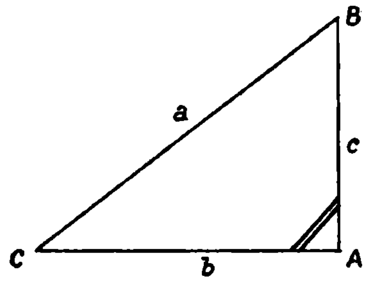


Figura 78

$$\overline{CA} = b, \quad \overline{CB} = a.$$

Resulta que CA es la proyección de CB sobre CA y tendremos por el teorema de las proyecciones, considerando la poligonal CBA con resultante CA y proyectando sobre CA

$$\overline{CA} = \overline{CB} \cos (\widehat{CA, CB}),$$

y por consiguiente

$$b = a \cos C. \tag{1}$$

Análogamente se probaría que es:

$$c = a \cos B. \tag{2}$$

Siendo los ángulos B y C complementarios, tenemos que

$$\cos B = \operatorname{sen} C,$$

y

$$\cos C = \operatorname{sen} B,$$

y reemplazando en las fórmulas (1) y (2) se tiene análogamente:

$$b = a \operatorname{sen} B. \tag{3}$$

$$c = a \operatorname{sen} C. \tag{4}$$

Las fórmulas (1) (2) (3) y (4) demuestran el teorema.

Observación I. — Las dos fórmulas: $b = a \operatorname{sen} B$ y $c = a \operatorname{sen} C$, evidentemente son independientes entre sí; ya que en cada una de ellas aparecen elementos que no figuran en la otra.

Esas dos fórmulas, junto con la condición de que $A + B + C = 180°$, condición que por ser $A = 90°$ se reduce a $B + C = 90°$, constituyen el conjunto de tres fórmulas independientes que resuelven el triángulo.

Son tres relaciones independientes entre los cinco elementos B, C, a, b y c. No podría encontrarse otra fórmula independiente de ellas, porque si existiese, se podría resolver un triángulo rectángulo, conociendo además del ángulo recto, un solo elemento fundamental y ello es imposible. Cuando sólo se conocen elementos fundamentales, hay que conocer dos de ellos y no más de dos, además del ángulo recto A.

Luego las fórmulas $b = a \cos C$ y $c = a \cos B$ son una consecuencia de $b = a \operatorname{sen} B$ y $c = a \operatorname{sen} C$, lo que resulta evidente recordando que $B + C = 90°$.

Observación II. — Las relaciones que nos da este teorema pueden servir para deducir el teorema de Pitágoras.

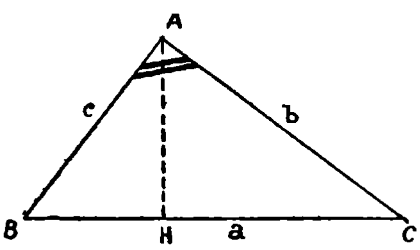


Figura 79

En efecto, tomando las fórmulas (3) y (2) nos dan, cuadrando y sumando:

$$b^2 + c^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 B + a^2 \cos^2 B = a^2.$$

Podría todavía obtenerse lo mismo por otro camino.

En efecto, sea el triángulo ABC (fig. 79), rectángulo en A y tracemos la altura AH sobre la hipotenusa, se tiene:

$$a = BH + HC.$$

Y siendo los triángulos AHB y AHC rectángulos, se tiene por este teorema:

$$BH = c \cos B, \quad HC = b \cos C.$$

Luego

$$a = c \cos B + b \cos C,$$

y multiplicando por a se tiene:

$$a^2 = b \,.\, a \cos C + c \,.\, a \cos B,$$

y teniendo en cuenta las fórmulas (1) y (2) se tiene,

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

180. Teorema: *En todo triángulo rectángulo, un cateto es igual al producto del otro cateto por la tangente del ángulo opuesto al lado considerado, o por el producto de la cotangente del ángulo agudo adyacente.*

En efecto, según el teorema que antecede, se tiene:

$$b = a \operatorname{sen} B$$
$$c = a \cos B,$$

de donde:

$$\frac{b}{c} = \operatorname{tg} B = \frac{1}{\operatorname{ctg} B},$$

y se deduce

$$b = c \operatorname{tg} B, \qquad (1)$$
$$c = b \operatorname{ctg} B. \qquad (2)$$

Considerando ahora las fórmulas

$$c = a \operatorname{sen} C,$$
$$b = a \cos C,$$

dividiendo se tiene:

$$\frac{c}{b} = \operatorname{tg} C = \frac{1}{\operatorname{ctg} C},$$

y se obtiene:

$$c = b \operatorname{tg} C, \qquad (3)$$
$$b = c \operatorname{ctg} C. \qquad (4)$$

Superficie. — El área S del triángulo está dada por:

$$S = \frac{1}{2} bc,$$

lo que nos da también,

$$S = \frac{1}{2} a^2 \cos B \cos C = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C.$$

181. *Resumen.* — De los teoremas precedentes, sacamos entre los cinco elementos fundamentales a, b, c, B y C las siguientes relaciones:

$$B + C = 90°$$
$$\begin{cases} b = a \cos C, \\ c = a \cos B, \end{cases}$$
$$\begin{cases} b = a \operatorname{sen} B, \\ c = a \operatorname{sen} C, \end{cases}$$
$$\begin{cases} b = c \operatorname{tg} B, \\ c = b \operatorname{tg} C, \end{cases}$$

a las que puede agregarse

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Resolución de triángulos rectángulos

182. Resolver un triángulo rectángulo, significa calcular los cinco elementos fundamentales conociendo dos datos.

Los casos más simples son aquellos en los cuales se dan dos elementos fundamentales del triángulo, y para que el problema sea posible es necesario dar por lo menos uno de los lados.

Resolveremos primeramente todos los casos que se presentan cuando se dan como datos elementos fundamentales del triángulo y luego resolveremos algunos problemitas en que se dan dos elementos cualquiera y desde luego, por lo menos uno, que sea una línea.

Las fórmulas del nº (181) resuelven todos los casos posibles. Veremos que sólo en algunos casos las transformaremos con el objeto de hacer más exactos los cálculos, pero en el fondo, allí en esas fórmulas están resueltos todos los casos que se pueden presentar.

Y esos casos son cuatro diferentes, según sean los elementos conocidos. Ellos son cuando se conoce:

1° La hipotenusa y un ángulo agudo.

2° Un cateto y un ángulo agudo.

3° La hipotenusa y un cateto.

4° Los dos catetos.

183. *Primer caso. Se conocen a y* B. — Las incógnitas son b, c y C.

Se tiene en primer término:

$$C = 90° - B,$$

y por las fórmulas

$$b = a \operatorname{sen} B,$$

$$c = a \cos B,$$

se calcula b y c.

Desde luego que es necesario que a sea una cantidad positiva y que B sea un ángulo positivo y menor que 90°.

Para calcular el área S del triángulo, tenemos:

$$S = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sen} B \cos B.$$

Ejemplo : $a = 540.72$ m $B = 25°5'30''$.

Se tiene

$$C = 90° - B = 64°54'30''$$

$\log a = 2.73297$	$\log a = 2.73297$	$\log b = 2.36041$
$\log \operatorname{sen} B = 9.62744$	$\log \cos B = 9.95695$	$\log c = 2.68992$
$\log b = 2.36041$	$\log c = 2.68992$	5.05033
$b = 229.30$ m	$c = 489.69$ m	$\log 2 = 0.30103$
		$\log S = 4.74930$
		$S = 56143{,}60\,m^2$.

Conviene ordenar los cálculos en la forma que sigue, poniendo a la izquierda de la línea vertical los valores reales y a la derecha los logaritmos

$a = 540.72$ m	$b = 2.36041$
$B = 25°05'30''$	$\operatorname{sen} B = 9.62744$
	$a = 2.73297$
$C = 64°54'30''$	$\cos B = 9.95695$
	$c = 2.68992$
$b = 229.30$ m	
$c = 489.69$ m	$bc = 5.05033$
	$2 = 0.30103$
$S = 56143.60m^2$	$S = 4.74930$

184. *Segundo caso. Se conocen b y* B. — Las incógnitas son a, c, C y S. Se tiene en primer lugar :

$$C = 90° - B,$$

y los valores de a y c se calculan por las fórmulas :

$$a = \frac{b}{\operatorname{sen} B}, \qquad c = b \operatorname{ctg} B,$$

y el área S, está dada por

$$S = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} b^2 \operatorname{ctg} B.$$

Es necesario que b sea positivo y B positivo y menor que 90°.

Si los datos conocidos fueran c y C, se resolvería en una forma análoga.

Ejemplo : $b = 45.32$ m, $\quad B = 22°15'17''$.

$b = 45.32$ m	$c = 2.04435$
$B = 22°15'17''$	$\text{ctg } B = 0.38806$
$C = 67°44'43''$	$b = 1.65629$
	$\text{sen } B = 9.57832$
$c = 110.75$ m	$a = 2.07797$
$a = 119.67$ m	$b^2 = 3.31258$
$S = 2509.63$ m^2	$b^2 \text{ ctg } B = 3.70064$
	$2 = 0.30103$
	$S = 3.39961$

Donde hemos puesto a la derecha los logaritmos.

185. *Tercer caso. Se dan a y b.* — Las incógnitas son c, B y C. Se tiene:

$$\text{sen } B = \frac{b}{a},$$

lo que nos permite calcular B. Y no puede haber ambigüedad, puesto que debe ser B menor que 90°.

Por otra parte, los datos a y b deben ser positivos y $a > b$.

Conociéndose B, se tiene

$$C = 90° - B \quad \text{y} \quad c = b \text{ ctg } B.$$

Y el área S tendrá por expresión:

$$S = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} b^2 \text{ ctg } B.$$

El cálculo por las fórmulas que anteceden se aconseja cuando los datos son, en lugar de a y b, sus logaritmos, porque no exige más que el cálculo de log ctg B. Cuando, como ocurre en general, se dan los valores de a y b, es necesario buscar tres logaritmos: los de a, b y ctg B.

En este caso es conveniente usar las fórmulas siguientes, que no exigen más que dos logaritmos.

En efecto, tenemos:

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

de donde

$$c = \sqrt{(a + b)\,(a - b)}.$$

Por otra parte se tiene:

$$\cos C = \frac{b}{a}.$$

Lo que nos da (72):

$$2\cos^2\frac{C}{2} = 1 + \cos C = 1 + \frac{b}{a} = \frac{a + b}{a},$$

$$2\,\mathrm{sen}^2\,\frac{C}{2} = 1 - \cos C = 1 - \frac{b}{a} = \frac{a - b}{a},$$

de donde:

$$\mathrm{tg}^2\frac{C}{2} = \frac{a - b}{a + b},$$

y por lo tanto

$$\mathrm{tg}\,\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{a - b}{a + b}},$$

lo que nos permite calcular C y luego

$$B = 90^\circ - C.$$

Como puede verse, en esta forma sólo se buscan dos logaritmos:

$$\log(a + b) \quad \text{y} \quad \log(a - b).$$

Ejemplo : $a = 540.72$ m, $\quad b = 229.30$ m.

$a = 540.72$ m $b = 229.30$ m	$b = 2.36040$ $a = 2.73297$
$B = 25°05'30''$ $C = 64°54'30''$	$\text{sen } B = 9.62743$ $\text{ctg } B = 9.32952$
	$c = 2.68992$
$c = 489.69$ m	$bc = 5.05032$ $2 = 0.30103$
$S = 56142.3$ m^2	$S = 4.74929$

Y en otra forma :

$a = 540.72$ $b = 229.30$	$a - b = 2.49335$ $a + b = 2.88650$
$a - b = 311.42$ $a + b = 770.02$	$c^2 = 5.37985$ $c = 2.68992$
$c = 489.69$ m	$\text{tg}^2 \frac{C}{2} = 9.60685$ $\text{tg} \frac{C}{2} = 9.80342$
$\frac{C}{2} = 32°27'15''$ $C = 64°54'30''$ $B = 25°05'30''$	$b = 2.36040$ $bc = 5.05032$ $2 = 0.30103$
$S = 56142.3$ m^2	$S = 4.74929$

En el caso en que el ángulo C resulte pequeño, es decir cuando a y b difieren muy poco, es más conveniente seguir el camino siguiente. Se tiene

$$\cos C = \frac{b}{a},$$

y entonces :

$$\text{sen}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos C}{2}} = \sqrt{\frac{a - b}{2a}},$$

y también :

$$2 \text{ arc} \frac{1}{2} C = \text{arc } C.$$

$$\text{sen } C = \text{arc } C = C'' \text{ sen } 1'' \qquad C'' = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } 1''}.$$

Luego:

$$\operatorname{sen} C = 2\sqrt{\frac{a-b}{2a}} = \sqrt{\frac{2(a-b)}{a}},$$

de donde:

$$C'' = \frac{\sqrt{\frac{2(a-b)}{a}}}{\operatorname{sen} 1''}.$$

Ejemplo: $a = 1242.30$ m, $b = 1241.70$ m,
Se tiene: $a - b = 0.60$ m

$$\begin{aligned}
\log 2(a-b) = \log 1.20 &= 0.07918\\
\log a = \log 1242.30 &= 3.09423\\
&\quad \bar{4}.98495\\
\log\sqrt{\frac{2(a-b)}{a}} &= \bar{2}.49248\\
\log \operatorname{sen} 1'' &= \bar{6}.68557\\
\log C'' &= 3.80691\\
C'' &= 6411''\\
C &= 1^\circ 46' 51''.
\end{aligned}$$

186. *Cuarto caso. Se dan b y c.* — Las incógnitas son a, B y C. Se tiene:

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c},$$

y luego

$$C = 90^\circ - B,$$

$$a = \frac{b}{\operatorname{sen} B},$$

y el área S:

$$S = \frac{1}{2} bc.$$

El problema es siempre posible, pues deben ser b y c positivos y no hay ambigüedad para el cálculo de B puesto que debe ser $B < 90^\circ$.

Podría todavía calcularse a en base a los datos por la fórmula del teorema de Pitágoras.

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

fórmula que no es calculable por logaritmos. Se puede hacer calculable por logaritmos. Para ello ponemos

$$a = b\sqrt{1 + \frac{c^2}{b^2}}$$

y poniendo

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{c}{b} \tag{1}$$

tenemos

$$a = b\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{b}{\cos \varphi}.$$

Se ve que el ángulo φ calculado por la (1) no es otra cosa que el ángulo C.

Ejemplo : $b = 229.30$ m, $c = 489.69$ m.

$b = 229.30$ m $c = 489.69$	$b = 2.36040$ $c = 2.68992$
$B = 25°05'29''$ $C = 64°54'31''$	$\operatorname{tg} B = 9.67048$ $\operatorname{sen} B = 9.62743$
	$a = 2.73297$
$a = 540.72$ m	$bc = 5.05032$ $2 = 0.30103$
$S = 56142.3\,\mathrm{m}^2$	
	$S = 4.74929$

Es fácil darse cuenta de la forma de proceder para el cálculo. A la izquierda aparecen los valores y a la derecha los logaritmos. Puestos los valores de b y c, se obtienen los valores de log b y log c. Haciendo la diferencia log b — log c = log tg B, lo que nos permite hallar con la tabla el valor de B y al mismo tiempo log sen B. Obtenido B, se obtiene el complemento C.

Restando log b menos log sen B se obtiene log a y sumando log b + log c se obtiene log bc y restando a este valor el log 2, se tiene log S. Ahora, con la tabla se obtienen a y S.

CAPÍTULO II

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS. CASOS NO CLÁSICOS. APLICACIONES Y PROBLEMAS DIVERSOS

187. Hemos resuelto los cuatro casos en que los datos son elementos fundamentales del triángulo rectángulo; son los llamados *casos clásicos*. Pero un triángulo rectángulo queda determinado, cuando además del ángulo recto se conocen otros dos elementos cualquiera, con tal de que uno de éstos, por lo menos, sea lineal. Es claro que el número de problemas que se presentan es grande. Resolveremos algunos que servirán de guía o por lo menos para práctica.

188. *Problema 1.— Resolver un triángulo rectángulo conociendo la altura sobre la hipotenusa* $h_a = \mathrm{AH}$ *y la mediana que sale de* B, $m_b = \mathrm{BM}$. Se tiene (fig. 80).

$$\overline{\mathrm{BM}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AM}}^2,$$

y reemplazando valores

$$m_b^2 = c^2 + \frac{b^2}{4} = c^2\left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \mathrm{B}}{4}\right)$$

y también

$$h_a = c \operatorname{sen} \mathrm{B}.$$

Y eliminando c entre estas dos, se tiene:

$$m_b^2 = \frac{h_a^2}{\operatorname{sen}^2 \mathrm{B}}\left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \mathrm{B}}{4}\right)$$

y expresando sen B en función de tg B y simplificando se tiene

$$h_a^2 \operatorname{tg}^4 \mathrm{B} + (5h_a^2 - 4m_b^2)\operatorname{tg}^2 \mathrm{B} + 4h_a^2 = 0. \qquad (1)$$

Ecuación bicuadrada que nos permite obtener B.

$$\operatorname{tg}^2 B = \frac{4m_b^2 - 5h_a^2 \pm \sqrt{(4m_b^2 - 5h_a^2)^2 - 16h_a^4}}{2h_a^2}. \qquad (2)$$

Obtenido B se calcula c:

$$c = \frac{h_a}{\operatorname{sen} B},$$

y luego:

$$C = 90° - B, \quad b = c \operatorname{tg} B, \quad a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Los valores de B, dados por la fórmula (2) deben ser $B < 90°$. En forma que hay que tomar sólo los valores positivos de tg B sacados

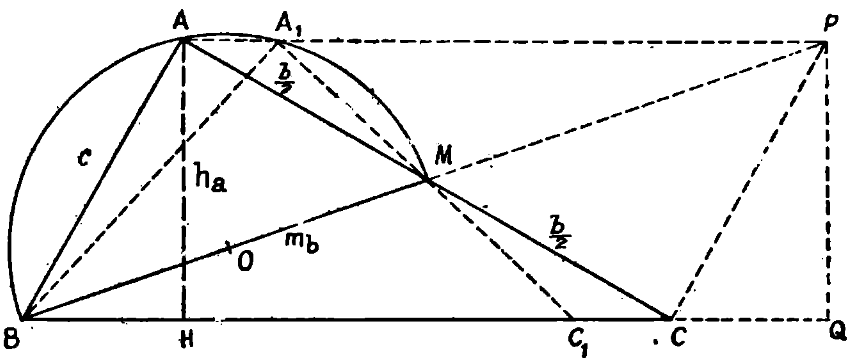


Figura 80

de $\operatorname{tg}^2 B$. El problema tendrá tantas soluciones como valores positivos para tg B nos dé la (2).

Como el producto de las raíces de la (1) es 4, se desprende que se tendrán dos soluciones o ninguna. Y deberá tenerse

$$4m_b^2 - 5h_a^2 > 0,$$

y

$$(4m_b^2 - 5h_a^2)^2 - 16h_a^4 \geq 0,$$

$\leq (4m^2 - 5h^2 + 4h^2)(4m^2 - 5h^2 - 4...)$

de donde

$$4m_b^2 - 5h_a^2 > 0,$$

$(4m^2 - h^2)(4m^2 - 9h^2) > 0$

$$(4m_b^2 - h_a^2)(4m_b^2 - 9h_a^2) \geq 0,$$

vale decir

$$m_b \geq \frac{3h}{2}$$

y en ese caso hay dos soluciones.

Segunda solución. — Se puede resolver el problema por otro camino, para lo cual tenémos

$$c^2 + \frac{b^2}{4} = m_b^2.$$

Y también tomando el área

$$b^2c^2 = a^2h_a^2.$$

Y finalmente considerando

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

Se tiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$c^2 + \frac{b^2}{4} = m_b^2,$$

$$b^2c^2 = a^2h_a^2,$$

$$b^2 + c^2 = a^2,$$

eliminando b y c se obtiene $4a^4 + (9h_a^2 - 20m_b^2)\,a^2 + 16m_b^4 = 0$.

El problema tendrá tantas soluciones como valores positivos se encuentren para a.

Solución gráfica. — Se puede todavía resolver el problema gráficamente. Considerando en la (fig. 80) el triángulo resuelto y prolongando la mediana m_b hasta P y bajando la normal $PQ = h_a$ se ve que con los datos del problema se puede formar el triángulo PQB, donde es $PQ = h_a$ y $PB = 2m_b$.

Construído el triángulo PQB con los datos del problema, para encontrar el vértice A basta trazar una circunferencia con diámetro $BM = m_b$, siendo M el punto medio de PB. Ella encuentra a la paralela a QB trazada por P en general en dos puntos A y A_1 que serán dos soluciones del problema.

Uniendo A con B y llevando por P la paralela a AB se encuentra el punto C. Y lo mismo con respecto al punto A_1.

189. *Problema II.* — ***Resolver un triángulo rectángulo, conociendo h_a y B.*** Se tiene

$$h_a = c \operatorname{sen} B, \quad C = 90° - B,$$

$$c = a \cos B, \quad b = c \operatorname{tg} B.$$

De donde se obtienen fácilmente las fórmulas que siguen, que resuelven el problema.

$$C = 90^\circ - B, \qquad c = \frac{h_a}{\operatorname{sen} B},$$

$$b = \frac{h_a}{\cos B}, \qquad a = \frac{h_a}{\operatorname{sen} B \cos B}.$$

190. *Problema III. — Resolver un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa a y el radio r del círculo inscripto.*

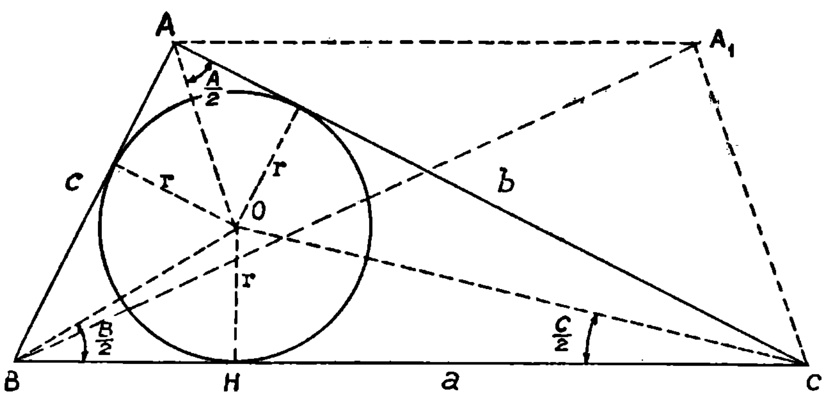


Figura 81

Se tiene (fig. 81)

$$B + C = 90^\circ,$$

$$a = r \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + r \operatorname{ctg} \frac{C}{2},$$

o bien

$$a = \frac{r \operatorname{sen} \frac{B+C}{2}}{\operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2}} = \frac{\sqrt{2}\, r}{2 \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2}}$$

y también

$$a = \frac{\sqrt{2}\, r}{\cos \frac{B-C}{2} - \cos \frac{B+C}{2}} = \frac{\sqrt{2}\, r}{\cos \frac{B-C}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

De donde

$$\cos \frac{B-C}{2} = \frac{\sqrt{2}\,(a+2r)}{2a}. \tag{1}$$

La fórmula es simétrica con respecto a B y C, por lo que podemos suponer $B > C$.

Llamando φ al menor ángulo positivo cuyo coseno está dado por la (1) tenemos:

$$\frac{B-C}{2} = \varphi, \qquad \frac{B+C}{2} = 45^\circ,$$

de donde

$$B = 45^\circ + \varphi, \qquad C = 45^\circ - \varphi.$$

Y luego se calcula b y c:

$$b = a \operatorname{sen} B, \qquad c = a \operatorname{sen} C.$$

El valor de B debe ser menor que 90°.

El valor C, debe ser positivo, lo que significa $\varphi < 45^\circ$.

Luego debe tenerse:

$$0 < \frac{B-C}{2} < \frac{B+C}{2}$$

hemos supuesto $B > C$ o bien

$$\cos 0 > \cos \frac{B-C}{2} > \cos \frac{B+C}{2}$$

de donde

$$1 > \frac{\sqrt{2}\,(a+2r)}{2a} > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La segunda parte de la desigualdad, es evidente porque a y r son positivos y siempre se cumple.

De la desigualdad

$$\frac{\sqrt{2}\,(a+2r)}{2a} < 1,$$

sacamos

$$r \leq \frac{a\,(\sqrt{2}-1)}{2}$$

que es la condición para que el problema pueda resolverse y admita una solución. En el caso límite en que $r = \dfrac{a\,(\sqrt{2}-1)}{2}$ el triángulo es isósceles. Es claro que si se tiene la solución ABC de la figura, donde $B > C$, admite luego la solución A_1BC, donde A_1 es el punto simétrico de A con respecto a la mediatriz de BC. En el triángulo A_1BC, se tiene que el ángulo al vértice C es igual al ángulo B de la 1ª solución.

Segunda solución. — Se pueden calcular directamente los valores de b y c. En efecto, de la figura 81 se obtiene fácilmente, siendo $2p$ el perímetro del triángulo buscado:

$$r = p - a,$$

o bien

$$b + c = a + 2r$$

y además

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

Se tiene así un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Se obtienen b y c, calculando las raíces de la ecuación

$$x^2 - (a + 2r)\,x + 2r\,(a + r) = 0.$$

Geométricamente puede construirse el triángulo ABC (fig. 81), trazando primero el triángulo BOC, del cual se conoce BC $= a$, la altura OH $= r$ y el ángulo

$$\mathrm{BOC} = 180° - \frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{2} = 135°.$$

Se toma BC, se traza sobre él el segmento capaz del ángulo de 135° y se lleva la paralela a BC a la distancia r. Los puntos en que encuentra al segmento capaz son los centros de la circunferencia inscripta para las dos soluciones del problema.

Se puede también proceder en la siguiente forma: Se traza el círculo ex-inscripto al ángulo A de centro O′ y se tiene en la figura 82

$$\mathrm{AB} + \mathrm{BD} + \mathrm{DC} + \mathrm{AC} = 2p.$$

Y puesto que

$$\mathrm{BD} = \mathrm{BT}_1 \quad \text{y} \quad \mathrm{DC} = \mathrm{CT}_2,$$

se tiene

$$\mathrm{AB} + \mathrm{BT}_1 + \mathrm{CT}_2 + \mathrm{AC} = 2p,$$

o bien

$$\mathrm{AT}_1 + \mathrm{AT}_2 = 2p,$$

y puesto que

$$AT_1 = AT_2,$$

se obtiene

$$AT_1 = AT_2 = p.$$

Pero

$$AF = AE = p - a = r$$

luego

$$FT_1 = ET_2 = a.$$

Y de ahí la construcción. Se toma un ángulo recto. Sobre sus lados se llevan $AF = AE = r$ y luego a continuación $FT_1 = a$ y $ET_2 = a$.

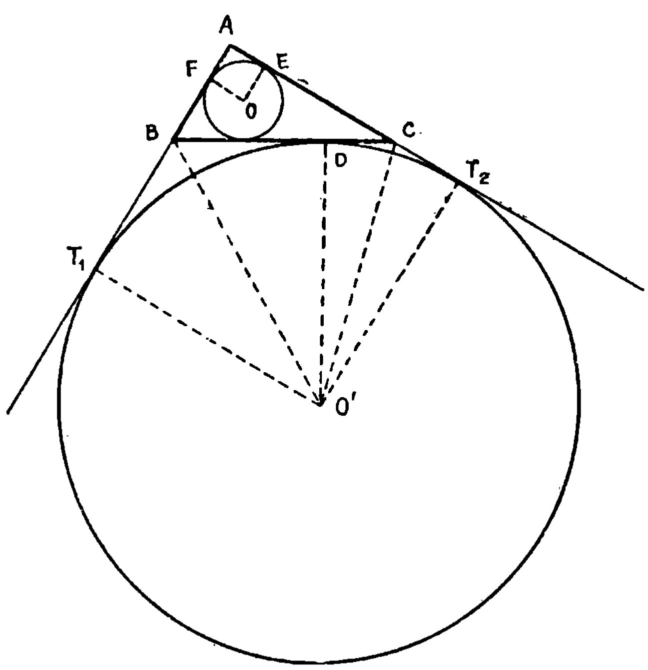


Figura 82

Se obtienen con las normales en F, E, T_1 y T_2 los centros O y O' de los círculos inscripto y ex-inscripto. Las tangentes comunes interiores nos dan las dos soluciones del problema.

191. PROBLEMA: *Resolver un triángulo rectángulo conociendo un cateto b y el ángulo φ que forma la mediana relativa a ese cateto con la hipotenusa.* — Conocemos (fig. 83), b y φ.

Llamemos x al ángulo ABD y tenemos

$$\varphi + x = B;$$

Y

$$\operatorname{tg}(\varphi + x) = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{b}{2c} \qquad 2 \operatorname{tg} x = \frac{b}{c}.$$

Luego:

$$\operatorname{tg}(\varphi + x) = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg} x} = 2 \operatorname{tg} x.$$

De donde:

$$2 \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\varphi = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8 \operatorname{tg}^2 \varphi}}{4 \operatorname{tg}\varphi}$$

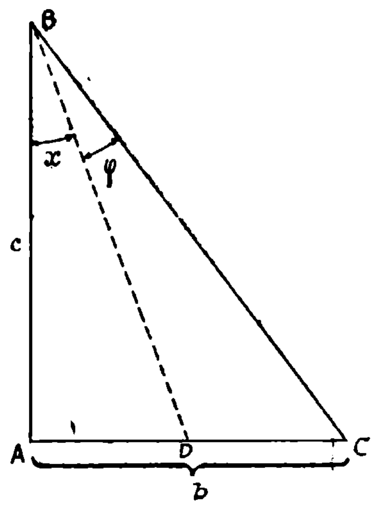


Figura 83

y se tienen en general dos soluciones.

Para que el problema sea posible, se necesita que

$$1 \geq 8 \operatorname{tg}^2 \varphi$$

o bien

$$\operatorname{tg}^2 \varphi \leq \frac{1}{8} \quad \text{o} \quad \operatorname{tg}\varphi \leq \frac{1}{\sqrt{8}}.$$

El valor máximo de φ está dado por

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

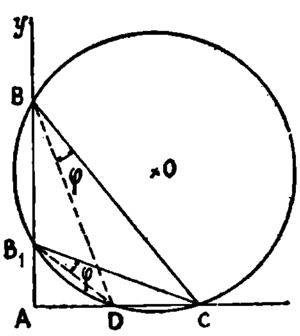


Figura 84

Corresponde a:

$$\varphi_{\text{máx}} = 19°28'16''.$$

Y el valor correspondiente de x

$$\operatorname{tg} x_1 = \frac{1}{4 \operatorname{tg}\varphi} = \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Corresponde a

$$x_1 = 35°15'52''.$$

Y resulta:

$$B_1 = \varphi_{\text{máx}} + x_1 = 54°44'08''.$$

Se puede resolver el problema geométricamente.

Para ello tomamos $AC = b$ y en A se traza la normal Ay. Se busca el medio D de AC y sobre DC se traza el segmento capaz del ángulo φ.

Los puntos B y B_1 en que la circunferencia corta a Ay, unidos con C nos dan las dos soluciones ACB y ACB_1. Si el círculo resulta tangente a Ay las dos soluciones se confunden en una sola; y si es exterior, no hay solución.

192. PROBLEMA: *En un triángulo rectángulo, la altura h_a y los lados c, b y a están en progresión geométrica de razón x. Calcular el triángulo para un valor dado de h_a.* — Tendremos entonces

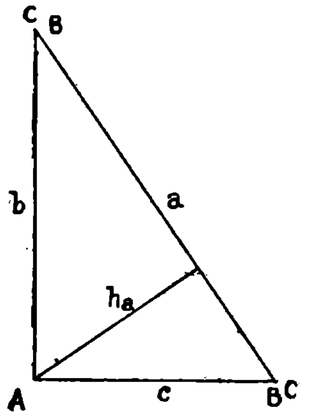


Figura 85

$$c = h_a x$$
$$b = h_a x^2$$
$$a = h_a x^3.$$

Y también

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Y reemplazando se tiene:

$$h_a^2 x^6 = h_a^2 x^4 + h_a^2 x^2$$

o bien

$$x^4 - x^2 - 1 = 0,$$

de donde

$$x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Y tomando el valor positivo, se tiene:

$$x = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

Y luego es fácil obtener c, b y a en función del valor de h_a conocido y de x calculado.

Suponiendo $h = 1$ resulta $x = 1.272$ $c = 1.272$ $b = 1.618$ $a = 2.058$ $B = 51°49'37''$ $C = 38°10'23''$.

CAPÍTULO III

RELACIONES ENTRE LOS LADOS Y LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS EN UN TRIÁNGULO CUALQUIERA.

193. TEOREMA (llamado del seno): *En un triángulo, los lados son directamente proporcionales a los senos de los ángulos opuestos y la relación de proporcionalidad es igual al diámetro del círculo circunscripto al triángulo.* — Sea un triángulo ABC (fig. 86) y tracemos el círculo circunscripto de centro O y radio R. Tracemos del centro O la perpendicular OP al lado BC. El ángulo BOP tiene por medida el arco BN, vale decir la mitad de BNC. Si el ángulo A es agudo, tiene por medida la mitad del arco BNC, es decir en este caso $\widehat{BOP} = A$.

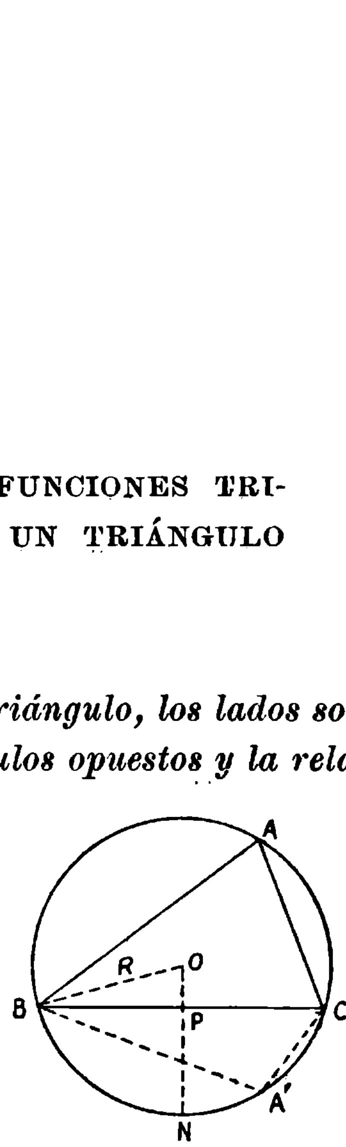


Figura 86

En caso de que el ángulo A sea obtuso, como ocurre para el triángulo BA′C de la misma figura, el ángulo A′ de ese triángulo tiene por medida la mitad del arco BAC y en ese caso se tiene

$$\widehat{BOP} = 180° - A'.$$

Para los dos casos, se verifica entonces

$$\operatorname{sen} BOP = \operatorname{sen} A.$$

En la figura, el triángulo rectángulo BOP nos da

$$BP = OB \operatorname{sen} \widehat{BOP}.$$

Donde $\quad BP = \frac{a}{2}, \quad OB = R, \quad \widehat{BOP} = A.$

Luego

$$\frac{a}{2} = R \operatorname{sen} A, \quad \text{o bien} \quad \frac{a}{\operatorname{sen} A} = 2R.$$

En forma análoga, trazando de O las perpendiculares sobre los lados b y c, obtendríamos relaciones correspondientes.

Es decir, que

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R.$$

lo que demuestra el teorema.

De ahí sacamos las dos relaciones

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \quad \text{y} \quad \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

independientes entre sí, ya que en cada una figuran elementos que no están en la otra. Esas dos relaciones, junto con la conocida

$$A + B + C = 180°$$

forman las tres relaciones independientes que vinculan a los seis elementos fundamentales del triángulo plano.

194. TEOREMA (llamado de las proyecciones): *En todo triángulo la medida de cada lado es igual a la suma de los productos de los otros dos por los cosenos de los ángulos que éstos forman con el primero.* — Es decir que debe tenerse

$$a = b \cos C + c \cos B$$
$$b = c \cos A + a \cos C$$
$$c = a \cos B + b \cos A.$$

En efecto, puesto que

$$A + B + C = 180°$$

se tiene

$$A = 180° - (B + C)$$

lo que nos da

$$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen}(B + C) = \operatorname{sen} B \cos C + \operatorname{sen} C \cos B.$$

Y multiplicando los dos miembros por 2R y teniendo en cuenta el teorema anterior, se tiene

$$a = b \cos C + c \cos B$$

y procediendo en la misma forma, obtendríamos fórmulas análogas para b y c, lo que demuestra el teorema.

Estas mismas fórmulas pueden obtenerse directamente del triángulo (fig. 87).

Sea ABC el triángulo y tracemos la altura AH, suponiendo que el triángulo no sea rectángulo ni en B ni en C.

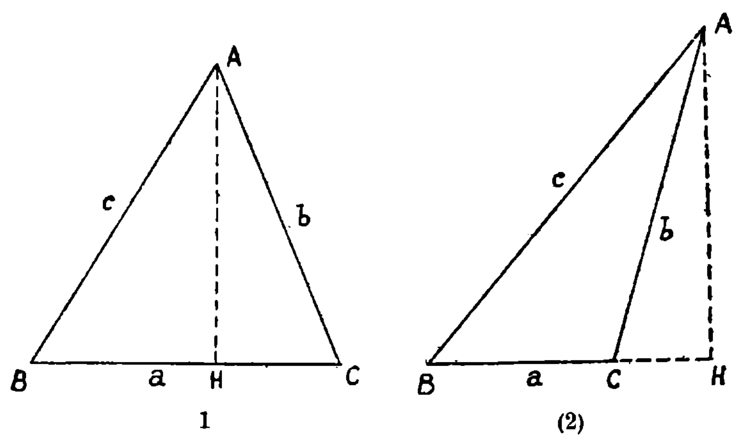


Figura 87

Pueden darse dos casos: que el pie de la perpendicular AH caiga sobre a o sobre su prolongación, como muestra la figura 87.

En el primer caso tendremos

$$BC = BH + HC$$

y en el segundo caso

$$BC = BH - CH.$$

Se tiene

$$BH = c \cos B$$

y en cuanto a HC, en el primer caso

$$HC = b \cos C$$

y en el segundo caso

$$HC = b \cos (180^\circ - C) = - b \cos C.$$

Y en los dos casos

$$a = b \cos C + c \cos B$$

y análogamente para los otros lados

$$b = a \cos C + c \cos A$$

$$c = a \cos B + b \cos A.$$

195. Teorema (llamado del coseno o de Carnot): *En todo triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de estos dos lados por el coseno del ángulo opuesto al primero.* — Sea un triángulo ABC y BH la perpendicular bajada desde el vértice B (fig. 88). Se pueden presentar

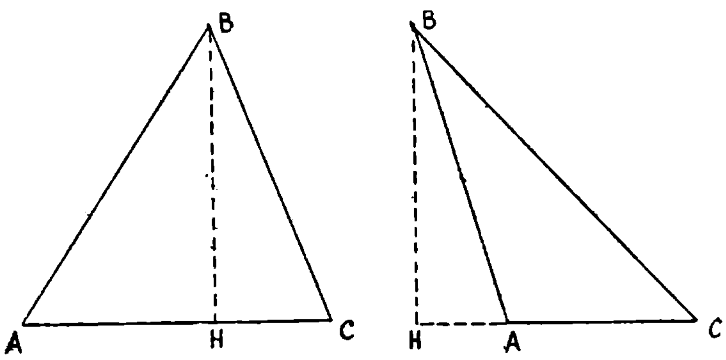


Figura 88

dos casos, según que A sea agudo u obtuso. Supongamos primero el ángulo A agudo. En este caso, por un teorema conocido de geometría, tenemos:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AC}\cdot\overline{AH}.$$

Pero es

$$\overline{BC} = a \qquad \overline{AC} = b \qquad \overline{AB} = c$$

y el triángulo rectángulo AHB nos da

$$\overline{AH} = \overline{AB}\cos A = c\cos A.$$

Y se tiene

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

En el caso en que el ángulo A sea obtuso, se tiene análogamente

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + 2\overline{AC}\cdot\overline{AH}. \qquad (1)$$

Y ahora se tiene

$$\overline{AH} = \overline{AB}\cos\widehat{BAH} = \overline{AB}\cos(180^\circ - A) = -c\cos A.$$

Y reemplazando en (1)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Se demostraría igualmente:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

con lo que queda demostrado el teorema.

196. TEOREMA (llamado de Delambre): *En todo triángulo la suma (o la diferencia) entre dos lados es al tercero, como el coseno (o el seno) de la semi-diferencia de los ángulos opuestos a los primeros es al seno (o al coseno) de la mitad del ángulo opuesto al tercer lado.* — Es decir que debe verificarse

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{C}{2}}$$

y también

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}}.$$

En efecto, del teorema del seno

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

se tiene

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}$$

y también

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}.$$

Y transformando en producto la suma o diferencia de senos y expresando sen C en función de $\frac{C}{2}$ resulta

$$\frac{a+b}{c} = \frac{2 \operatorname{sen}\dfrac{A+B}{2} \cos\dfrac{A-B}{2}}{2 \operatorname{sen}\dfrac{C}{2} \cos\dfrac{C}{2}}$$

y

$$\frac{a-b}{c} = \frac{2 \operatorname{sen}\dfrac{A-B}{2} \cos\dfrac{A+B}{2}}{2 \operatorname{sen}\dfrac{C}{2} \cos\dfrac{C}{2}}$$

y recordando que $A + B + C = 180°$, se saca $\frac{A + B}{2} = 90° - \frac{C}{2}$, es decir que

$$\operatorname{sen}\frac{A + B}{2} = \cos\frac{C}{2} \quad \text{y} \quad \cos\frac{A + B}{2} = \operatorname{sen}\frac{C}{2}$$

lo que nos da

$$\frac{a + b}{c} = \frac{\cos\frac{A - B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}} \qquad (1)$$

$$\frac{a - b}{c} = \frac{\operatorname{sen}\frac{A - B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} \qquad (2)$$

y queda demostrado el teorema.

197. TEOREMA (llamado de Neper): *En todo triángulo la diferencia de dos lados es a su suma, como la relación entre las tangentes de la semi-diferencia es a la tangente de la semi-suma entre los ángulos opuestos.*

En efecto, tomando el teorema del seno, se tiene

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$$

de donde

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A - B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A + B}{2}} \qquad (1)$$

y análogamente

$$\frac{b - c}{b + c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{B - C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B + C}{2}} \qquad (2)$$

$$\frac{c - a}{c + a} = \frac{\operatorname{tg}\frac{C - A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{C + A}{2}}. \qquad (3)$$

Podríamos haber obtenido las mismas relaciones del teorema de Delambre. En efecto, dividiendo entre sí las relaciones (2) y (1) del teorema anterior, se tiene:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}$$

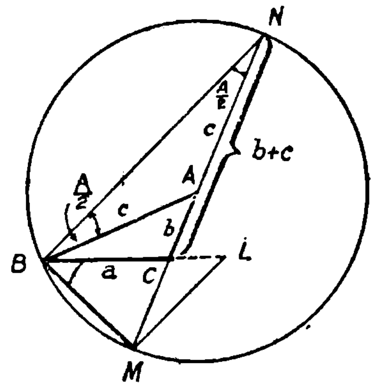


Figura 89

y recordando que $\frac{C}{2}=90^{\circ}-(A+B)$, se tiene

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}.$$

Se pueden todavía obtener las mismas fórmulas por otro camino. Sea el triángulo ABC. Con radio c y centro en A tracemos una circunferencia. Prolonguemos AC hasta M y N como indica la figura 89.

Tracemos BN y llevemos ML paralela a BN. Tendremos así:

$$NC=b+c,\quad MC=c-b,\quad \sphericalangle BNM=\frac{A}{2},$$

$$\sphericalangle LBM=\frac{1}{2}A+C-90^{\circ}=\frac{1}{2}(C-B),\quad BMC=90^{\circ}-\frac{A}{2}.$$

Y el triángulo MBC nos da

$$\frac{MC}{BC}=\frac{\operatorname{sen}\widehat{LBM}}{\operatorname{sen}\widehat{BMC}}$$

o bien

$$\frac{c-b}{a}=\frac{\operatorname{sen}\frac{C-B}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

(Teorema de Delambre)

Y también de la figura, observando que los triángulos MCL y NCB son semejantes y el ángulo NBM es recto = BML

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{CN}{CM}=\frac{NB}{ML}=\frac{BM\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{BM\operatorname{tg}\frac{C-B}{2}}$$

de donde se obtiene, recordando que $\frac{A}{2} = 90° - \frac{B+C}{2}$

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}$$

que muestra el teorema.

198. *Resumen.* — En resumen hemos encontrado los siguientes grupos de fórmulas:

$$\text{I}\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} A + B + C = 180° \\ \dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C} \end{array}\right.$$

$$\text{II}\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2\,ca\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos C \end{array}\right.$$

$$\text{III}\ldots\left\{\begin{array}{l} a = b\cos C + c\cos B \\ b = c\cos A + a\cos C \\ c = a\cos B + b\cos A \end{array}\right.$$

$$\text{IV}\ldots\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\cos\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}} & \text{o} & \dfrac{a-b}{c} = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} \\[2ex] \dfrac{b+c}{a} = \dfrac{\cos\frac{B-C}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}} & \text{o} & \dfrac{b-c}{a} = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} \\[2ex] \dfrac{c+a}{b} = \dfrac{\cos\frac{C-A}{2}}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}} & \text{o} & \dfrac{c-a}{b} = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{C-A}{2}}{\cos\frac{B}{2}} \\[2ex] A + B + C = 180° & & \end{array}\right.$$

$$
\mathrm{V}\ldots\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}} \\[4ex]
\dfrac{b-c}{b+c}=\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{2}} \\[4ex]
\dfrac{c-a}{c+a}=\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\mathrm{C}+\mathrm{A}}{2}} \\[4ex]
\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=180^\circ.
\end{array}
\right.
$$

Es fácil darse cuenta que los grupos de fórmulas II, III, IV y V pueden deducirse del grupo I. En efecto, en realidad las tres relaciones independientes entre los seis elementos de un triángulo, dados por el grupo I, son las únicas relaciones independientes que pueden encontrarse entre los seis elementos fundamentales del triángulo.

En efecto, suponiendo por un momento que existe otra relación cualquiera

$$f(a,\ b,\ c,\ \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C})=0$$

entre los elementos del triángulo, independiente de las fórmulas del grupo I, se tendría que conociendo dos elementos cualquiera del triángulo tendríamos cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas que permitirían calcular los cuatro elementos restantes y por lo tanto un triángulo quedaría determinado cuando se conocen sólo dos elementos fundamentales, lo que es imposible.

Quedamos entonces que los grupos de I a V no son independientes y pueden deducirse uno del otro.

Vamos a pasar de un grupo a otro.

199. Equivalencia de los grupos I y II — Para pasar del grupo I al grupo II basta ver la primera demostración del teorema de las proyecciones, nº 194.

Recíprocamente, tratemos de deducir del grupo II la relación

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\mathrm{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\mathrm{B}}$$

lo que se obtiene eliminando cos C de las fórmulas

$$\cos C = \frac{b - c\cos A}{a}$$

$$a = b\cos C + c\cos B$$
$$b = c\cos A + a\cos C.$$

$$a = b\left(\frac{b - c\cos A}{a}\right) + c\cos B$$

Se tiene

$$a^2 - b^2 = c\,(a\cos B - b\cos A)$$

y reemplazando c por su valor sacado de la 3ª del grupo III

$$a^2 - b^2 = (a\cos B + b\cos A)\,(a\cos B - b\cos A)$$

o bien

$$a^2 - b^2 = a^2\cos^2 B - b^2\cos^2 A$$

de donde

$$a^2(1 - \cos^2 B) = b^2(1 - \cos^2 A)$$

es decir

$$a^2 \operatorname{sen}^2 B = b^2 \operatorname{sen}^2 A.$$

Y como a, b, sen A, sen B son positivos en el triángulo, se tiene

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}.$$

Y procediendo en forma análoga se mostraría también

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

Para deducir ahora la relación

$$A + B + C = 180°$$

pongamos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = K = \text{constante}$$

lo que nos da

$$a = K \operatorname{sen} A \qquad b = K \operatorname{sen} B \qquad c = K \operatorname{sen} C.$$

Reemplacemos por estos valores en las tres igualdades del grupo II y tenemos, simplificando

$$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen}(B + C)$$
$$\operatorname{sen} B = \operatorname{sen}(C + A)$$
$$\operatorname{sen} C = \operatorname{sen}(A + B).$$

Como A, B y C son cada uno menor que 180° debe tenerse por la 1ª o

$$A = B + C$$

o bien

$$A = 180° - (B + C).$$

Y lo mismo, por la 2ª debe ser:

$$B = C + A$$

o bien

$$B = 180° - (C + A).$$

E igualmente la 3ª nos da, ya sea:

$$C = A + B$$

o bien

$$C = 180° - (A + B).$$

Si no fuese

$$A + B + C = 180°$$

será

$$A = B + C$$

$$B = C + A$$

$$C = A + B$$

lo que significaría $A = B = C = 0$, y ello es imposible.

Luego debe ser

$$A + B + C = 180°$$

lo que demuestra la cuestión.

200. Equivalencia de los grupos II y III. — Supongamos conocido el grupo II y vamos a deducir de él, el grupo III.

De las dos últimas del grupo II sacamos

$$\cos C = \frac{b - c \cos A}{a}$$

y

$$\cos B = \frac{c - b \cos A}{a}.$$

Y reemplazando estos valores en la 1ª del grupo II se tiene

$$a = b\,\frac{b - c\cos A}{a} + c\,\frac{c - b\cos A}{a}$$

de donde

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos A.$$

Y análogamente para b^2 y c^2. Del grupo II pasamos así al grupo III.

Recíprocamente, vamos a pasar del grupo III al II.

Basta para ello, sumar las dos últimas del grupo III y se tiene:

$$b^2 + c^2 = c^2 + 2\,a^2 + b^2 - 2\,ac\cos B - 2\,ab\cos C,$$

y simplificando y dividiendo por a, se tiene:

$$a = b\cos C + c\cos B,$$

y en forma análoga para los otros lados.

201. Equivalencia entre los grupos I y III. — Del grupo I vamos a deducir el grupo III.

Tomemos la relación $A + B + C = 180°$, de donde se saca

$$\text{sen}\,A = \text{sen}\,(B + C) = \text{sen}\,B\cos C + \text{sen}\,C\cos B,$$

y elevando al cuadrado

$$\text{sen}^2 A = \text{sen}^2 B\cos^2 C + \text{sen}^2 C\cos^2 B + 2\,\text{sen}\,B\,\text{sen}\,C\cos B\cos C$$

o bien:

$$\text{sen}^2 A = \text{sen}^2 B + \text{sen}^2 C + 2\,\text{sen}\,B\,\text{sen}\,C\,(\cos B\cos C - \text{sen}\,B\,\text{sen}\,C)$$

pero es:

$$\cos(B + C) = -\cos A = \cos B\cos C - \text{sen}\,B\,\text{sen}\,C$$

luego:

$$\text{sen}^2 A = \text{sen}^2 B + \text{sen}^2 C - 2\,\text{sen}\,B\,\text{sen}\,C\cos A$$

y reemplazando sen A, sen B y sen C por las cantidades proporcionales a, b y c se tiene:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos A$$

e igualmente para b y c.

Recíprocamente, del grupo III, vamos a deducir el grupo I. Tomemos las fórmulas

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2\,ca \cos B$$

y sumando tenemos

$$2\,c^2 = 2\,c\,(b \cos A + a \cos B)$$

o bien

$$c = b \cos A + a \cos B. \tag{1}$$

Y restando miembro a miembro las mismas fórmulas, tenemos

$$a^2 - b^2 = c\,(a \cos B - b \cos A).$$

Y reemplazando ahora c por su valor dado por la (1), se tiene

$$a^2 - b^2 = (a \cos B + b \cos A)\,(a \cos B - b \cos A).$$
$$= a^2 \cos^2 B - b^2 \cos^2 A = a^2\,(1 - \operatorname{sen}^2 B) - b^2\,(1 - \operatorname{sen}^2 A).$$

Y simplificando se tiene

$$a \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} A \quad \text{o bien} \quad \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

e igualmente se obtendría para el lado c.

Falta deducir ahora la relación

$$A + B + C = 180°.$$

Hemos visto que es

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = \quad K = \text{(constante)}.$$

Reemplazando en la 1ª del grupo III, los valores de a, b y c, se tendría, eliminando el factor común K^2 que

$$\operatorname{sen}^2 A = \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C - 2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos A$$

de donde

$$\cos^2 A - 2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos A + \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C - 1 = 0.$$

Ecuación de 2° grado que nos permite calcular cos A y nos da:

$$\cos A = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2 B \operatorname{sen}^2 C - \operatorname{sen}^2 B - \operatorname{sen}^2 C + 1}$$

o

$$\cos A = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \pm \sqrt{(1 - \operatorname{sen}^2 B)(1 - \operatorname{sen}^2 C)}$$

o también

$$\cos A = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \pm \cos B \cos C$$

es decir que debe ser

$$\cos A = \cos (B - C)$$

o bien

$$\cos A = - \cos (B + C).$$

Debiendo los ángulos ser menores que 180°, la 1ª igualdad nos da

$$A = B - C$$

y encontraríamos análogamente.

$$B = C - A$$

$$C = A - B$$

lo que equivale a

$$A + B + C = 0$$

es decir, que debemos desechar la solución

$$\cos A = \cos (B - C).$$

Luego debemos considerar la igualdad

$$\cos A = - \cos (B + C),$$

la que nos da

$$A - (B + C) = 180^\circ$$

o sino

$$A + (B + C) = 180^\circ$$

la 1ª es inaceptable por ser $A < 180°$, luego nos queda finalmente

$$A + B + C = 180^\circ.$$

CAPÍTULO IV

OTRAS RELACIONES ENTRE LOS ELEMENTOS FUNDAMENTALES DEL TRIÁNGULO, CALCULABLES POR LOGARITMOS

202. Las relaciones del teorema del seno son directamente calculables por logaritmos y lo mismo ocurre con las que dan los teoremas de Delambre y de Neper.

Podemos todavía deducir del teorema del seno otras fórmulas de aplicación en la resolución de triángulos. En efecto, de ese teorema deducimos:

$$\frac{a}{a+b+c}=\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} B+\operatorname{sen} C}.$$

Hagamos ahora

$$2p=a+b+c$$

y expresando sen A en función de $\frac{A}{2}$ y recordando que según (84)

$$\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} B+\operatorname{sen} C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

se tiene:

$$\frac{a}{p}=\frac{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

y en forma análoga:

$$\frac{b}{p}=\frac{\operatorname{sen}\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}},\qquad \frac{c}{p}=\frac{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}.$$

Las fórmulas que da el teorema de las proyecciones no son calculables por logaritmos. Se las puede transformar en expresiones que lo sean con la introducción de ángulos auxiliares; pero como cada una contiene cinco elementos fundamentales son de poca aplicación en la práctica.

En cambio, las fórmulas que da el teorema del coseno (de Carnot) que no son calculables por logaritmos, con simples transformaciones nos van a dar grupos de fórmulas de gran utilidad y de mucha aplicación. Tomemos la relación:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

de donde sacamos:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

pero por otra parte

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}, \qquad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

y reemplazando el valor del cos A se tiene

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc}}, \qquad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4bc}}$$

o también

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{a^2 - (b - c)^2}{4bc}}, \qquad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(b + c)^2 - a^2}{4bc}}$$

y también

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(a + b - c)\,(a - b + c)}{4bc}}, \qquad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(a + b + c)\,(b + c - a)}{4bc}}.$$

Poniendo ahora

$$2p = a + b + c$$

donde p es el semi-perímetro, se tiene:

$$\begin{aligned} a + b - c &= 2p - 2c = 2\,(p - c) \\ a + c - b &= 2p - 2b = 2\,(p - b) \\ b + c - a &= 2p - 2a = 2\,(p - a) \end{aligned}$$

y substituyendo estos valores, se obtiene

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)\,(p - c)}{bc}} \qquad (1)$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p\,(p - a)}{bc}} \qquad (2)$$

y dividiendo una por la otra:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \tag{3}$$

donde solamente hay que considerar el signo *más* para los radicales, porque el valor de A es menor que 180°, es decir $\frac{A}{2}<90°$.

Se obtendría en forma análoga:

$$\operatorname{sen}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},\quad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}},\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

y

$$\operatorname{sen}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}},\quad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}},\quad \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

203. Fórmulas que dan las funciones goniométricas de la mitad de los ángulos en función de los lados. Podemos todavía obtener el seno del ángulo mismo poniendo:

$$\operatorname{sen}A=2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}.$$

204. Del teorema del seno, deducimos también:

$$\frac{a+b+c}{c}=\frac{\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}=\frac{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}$$

y también:

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}.$$

Y en igual forma obtendríamos:

$$\frac{a+c-b}{c}=\frac{\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}+\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

?

y

$$\frac{b+c-a}{c} = \frac{\operatorname{sen}\frac{A+B}{2} - \operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}} = \frac{2\cos\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

Y teniendo en cuenta que $a + b + c = 2p$, se obtiene:

$$\frac{p}{c} = \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}$$

$$\frac{p-a}{c} = \frac{\cos\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\frac{p-b}{c} = \frac{\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\frac{p-c}{c} = \frac{\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}.$$

Área del triángulo

205. TEOREMA: *El área de un triángulo es igual al semi-producto de dos lados, por el seno del ángulo comprendido.* — Sean b y c dos lados y A el ángulo comprendido. Tomando b como base, la altura correspondiente es $BH = h_b$ y el área S tiene por expresión:

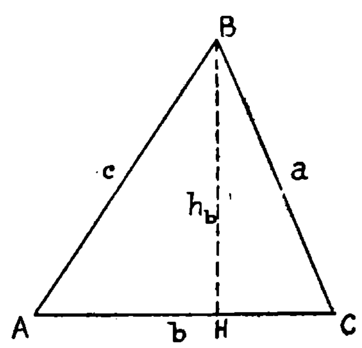


Figura 90

$$S = \frac{AC \times BH}{2} = \frac{b \times h_b}{2}$$

y es:

$$BH = c \operatorname{sen} A$$

y se obtiene:

$$S = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A$$

y del mismo modo tendríamos:

$$S = \frac{1}{2} ac \text{ sen B}$$

o

$$S = \frac{1}{2} ab \text{ sen C}.$$

206. Si queremos el área en función de los lados, podemos expresar, por ejemplo sen A en función del arco mitad y tenemos:

$$S = \frac{1}{2} bc \, 2 \text{ sen} \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$$

y reemplazando sen $\frac{A}{2}$ y cos $\frac{A}{2}$, por sus valores dados (1) y (2) nº 202 se tiene simplificando

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

fórmula conocida con el nombre de fórmula de Heron y da el área de un triángulo en función de los lados.

207. Y si se reemplaza p por $\frac{a+b+c}{2}$ se obtiene:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$

y efectuando las operaciones y simplificando se obtiene una nueva expresión de la superficie del triángulo que es incómoda por no ser calculable por logaritmos.

$$S = \sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}.$$

208. Tomando ahora los valores de tg $\frac{A}{2}$, tg $\frac{B}{2}$ y tg $\frac{C}{2}$ en función de los lados, dados por (202), se tiene fácilmente:

$$\text{tg} \frac{A}{2} \text{tg} \frac{B}{2} \text{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{p^2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

teniendo en cuenta la fórmula de Heron, se saca

$$S = p^2 \text{ tg} \frac{A}{2} \text{tg} \frac{B}{2} \text{tg} \frac{C}{2}.$$

209. Es fácil también, teniendo en cuenta las fórmulas de (202) y la fórmula de Heron, obtener:

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}=\frac{S^2}{pabc}$$

$$\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{pS}{abc}$$

y la que teníamos:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{S}{p^2}.$$

Corolario I: El área de un paralelogramo es igual al producto de dos de sus lados adyacentes por el seno del ángulo comprendido.

En efecto, basta trazar la diagonal que une los dos extremos de los lados que se consideran, para ver que queda el paralelogramo dividido en dos triángulos iguales y luego expresar el área en función de esos lados y el ángulo comprendido.

Corolario II: El área de un cuadrilátero convexo es igual al semiproducto de la medida de sus diagonales, por el seno del ángulo comprendido. — En efecto, si x y x', y e y' son los segmentos en que cada una de las diagonales d y d' quedan divididos y llamamos α al ángulo agudo que ellas forman, llamando S a la superficie del cuadrilátero, se tiene:

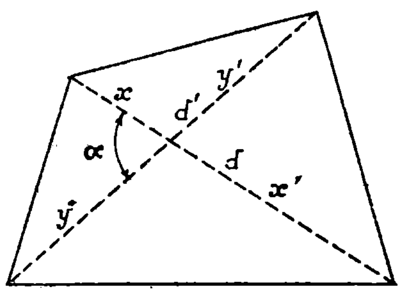


Figura 91

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}xy\operatorname{sen}\alpha+\frac{1}{2}xy'\operatorname{sen}\alpha+\frac{1}{2}x'y'\operatorname{sen}\alpha+\\&\qquad+\frac{1}{2}x'y\operatorname{sen}\alpha\\&=\frac{1}{2}(xy+xy'+x'y'+x'y)\operatorname{sen}\alpha\\&=\frac{1}{2}(x+x')(y+y')\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{2}dd'\operatorname{sen}\alpha.\end{aligned}$$

Corolario III: El área de un polígono regular de n lados inscripto en un círculo de radio R es dado por:

$$S_n=\frac{n}{2}R^2\operatorname{sen}\frac{360^\circ}{n}.$$

En efecto, el polígono regular está formado por n triángulos isósceles de lados R y ángulo comprendido $\frac{360^\circ}{n}$.

El radio R es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son la mitad del lado del polígono y el apotema del mismo. Llamando l al valor del lado y a al valor del apotema, tenemos:

$$\operatorname{sen}\frac{180^\circ}{n} = \frac{l}{2\mathrm{R}}, \qquad \cos\frac{180^\circ}{n} = \frac{a}{\mathrm{R}}$$

Y poniendo en la fórmula anterior $\operatorname{sen}\frac{360^\circ}{n}$, en función del ángulo mitad, se tiene:

$$\mathrm{S}_n = n\mathrm{R}^2 \operatorname{sen}\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n} = \frac{nl^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n} = na^2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$$

o también

$$\mathrm{S}_n = \frac{1}{2}nla.$$

CAPÍTULO V

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALQUIERA

210. *Casos clásicos.* — Un triángulo plano queda determinado cuando se conocen tres de sus elementos fundamentales y entre ellos entra por los menos una longitud.

Usaremos la notación indicada en el nº 177 y estudiaremos ahora los casos clásicos; es decir, aquellos en que los datos que se conocen son solamente lados y ángulos.

Es fácil darse cuenta que conocidos tres elementos, las fórmulas del nº 198 nos permitirán siempre encontrar los tres elementos restantes.

Estudiaremos todos los casos que puedan presentarse y para cada caso calcularemos también la superficie.

Siempre es conveniente calcular los elementos que se buscan, y desde luego siempre que se pueda, en base a los datos conocidos y no en base a elementos calculados.

Tiene ello la ventaja, en general, de evitar la propagación de errores que siempre se cometen al calcular.

Los cuatro casos clásicos que se presentan, son:

a) Dados *un lado* y *dos ángulos*. — Poco importa cuáles sean los dos ángulos, porque cuando se conocen dos ángulos, el tercero es lo que falta para que la suma de los tres valga 180°. El tercero es el suplemento de la suma de los dos ángulos dados.

b) Se dan *dos lados* y *el ángulo comprendido*.

c) Se conocen *dos lados* y *el ángulo opuesto a uno de ellos*.

d) Se dan *los tres lados*.

211. *Primer caso: Resolver un triángulo dados dos ángulos* B *y* C *y el lado a.*

Tenemos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

Luego podemos calcular A, por

$$A = 180° - (B + C).$$

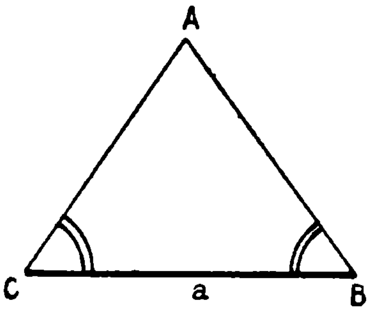


Figura 92

Y conociendo los tres ángulos, se tiene

$$b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen}(B + C)}$$

$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen}(B + C)}.$$

Y el área S, sería:

$$S = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A = \frac{1}{2} a^2 \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = \frac{1}{2} a^2 \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen}(B + C)}.$$

Para que el problema sea posible es necesario y suficiente que la suma $B + C$ sea menor que 180°.

Segunda solución : Puede también resolverse en la siguiente forma : Primero, calculamos A por $A = 180° - (B + C)$ y luego par las fórmulas de Delambre (nº 196) se tiene:

$$(b + c) = \frac{a \cos \frac{B - C}{2}}{\cos \frac{B + C}{2}} \quad \text{y} \quad (b - c) = \frac{a \operatorname{sen} \frac{B - C}{2}}{\operatorname{sen} \frac{B + C}{2}}$$

lo que nos permite calcular b y c.

Ejemplo : Sea $a = 342.72$ m, $B = 48°57'20''$ y $C = 45°17'15''$
a) Con las fórmulas

$$b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}, \quad c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}, \quad S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}.$$

$a = 342.72$ m	$\operatorname{sen} B = 9.87749$
$B = 48°57'20''$	$a = 2.53494$
$C = 45°17'15''$	$\operatorname{sen} A = 9.99881$
	$\operatorname{sen} C = 9.85165$
$A = 85°45'25''$	$b = 2.41362$
$b = 259.19$ m	$c = 2.38778$
$c = 244.22$ m	$a^2 = 5.06988$
$S = 31563.10$ m^2	$2S = 4.80021$
	$2 = 0.30103$
	$S = 4.49918$

Es fácil darse cuenta el orden que conviene seguir en los cálculos. Puestos los valores de a, B y C, se obtiene en seguida el valor de $A = 180^\circ - (B + C)$. Luego se obtienen con la tabla los valores $\log a$, log sen A, log sen B y log sen C, que se escriben a la derecha. Ahora obtenemos $\log b = \log a + \log \operatorname{sen} B - \log \operatorname{sen} A$ y $\log c = \log a + \log \operatorname{sen} C - \log \operatorname{sen} A$. Se obtiene también $\log a^2 = 2$ veces $\log a$. Luego sumando a $\log a^2$ el log sen B y el log sen C y restando el log sen A se obtiene log 2S. Restando el log 2 se obtiene log S. Y ahora obtenemos b, c y S.

Ejemplo : b) Con las fórmulas

$$b + c = \frac{a \cos \frac{B - C}{2}}{\cos \frac{B + C}{2}}, \qquad b - c = \frac{a \operatorname{sen} \frac{B - C}{2}}{\operatorname{sen} \frac{B + C}{2}}$$

$a = 342.72$	$a = 2.53494$
$B = 48^\circ 57' 20''$ $C = 45^\circ 17' 15''$	$\operatorname{sen} \frac{B - C}{2} = 8.50518$
$A = 85^\circ 45' 25''$	$\cos \frac{B - C}{2} = 9.99978$
$\frac{B + C}{2} = 47^\circ 07' 17''$	$\operatorname{sen} \frac{B + C}{2} = 9.86498$
$\frac{B - C}{2} = 1^\circ 50' 02''$	$\cos \frac{B + C}{2} = 9.83279$
$b + c = 503.42$ $b - c = 14.97$	$b + c = 2.70193$ $b - c = 1.17514$
$b = 259.19$ m $c = 244.22$ m	

Es fácil darse cuenta del orden a seguir. Puestos a, B y C se obtiene en seguida $\frac{B + C}{2}$ y $\frac{B - C}{2}$. Luego $\log a$, $\log \operatorname{sen} \frac{B - C}{2}$, $\log \cos \frac{B - C}{2}$, $\log \operatorname{sen} \frac{B + C}{2}$ y $\log \cos \frac{B + C}{2}$. Ahora obtenemos $\log (b + c) = \log a + \log \cos \frac{B - C}{2} - \log \cos \frac{B + C}{2}$ y $\log (b - c) = \log a + \log \operatorname{sen} \frac{B - C}{2} - \log \operatorname{sen} \frac{B - C}{2}$.

Obtenemos ahora los valores de $b + c$ y $b - c$ y por lo tanto b y c. El valor de A es el suplemento de B + C.

Tercera solución. — Cuando el valor que se obtiene para A resulta poco diferente de B (o de C), se obtiene mayor exactitud calculando;

$$a - b = a - \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} = a \frac{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$$

o bien

$$a - b = 2a \frac{\cos \frac{A + B}{2} \operatorname{sen} \frac{A - B}{2}}{\operatorname{sen} A}$$

y conociendo la diferencia $a - b$, se obtiene en seguida b.

212. *Segundo caso: Resolver un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido.* — Sean b y c los lados dados y A el ángulo (fig. 93).

Se tiene en primer lugar

$$B + C = 180^\circ - A$$

o bien

$$\frac{B + C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}. \qquad (1)$$

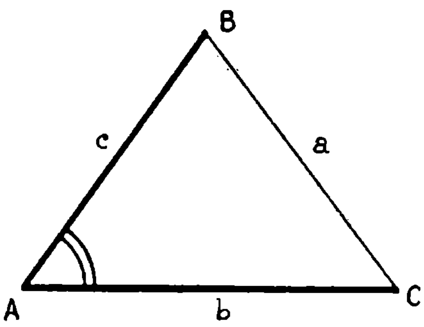


Figura 93

Por otra parte, las fórmulas de Neper (161) nos dan

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{B - C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B + C}{2}} = \frac{b - c}{b + c} \qquad \operatorname{tg} \frac{B - C}{2} = \frac{b - c}{b + c} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}. \qquad (2)$$

La que nos permite calcular el ángulo $\frac{B - C}{2}$ y combinando con la (1) se obtienen los ángulos B y C. Conocidos B y C, se calcula a por el teorema del seno

$$a = \frac{b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}. \qquad (3)$$

Se puede calcular a partiendo de las fórmulas de Delambre:

$$\frac{a}{b + c} = \frac{\operatorname{sen} \frac{A}{2}}{\cos \frac{B - C}{2}} \qquad a = \frac{(b + c) \operatorname{sen} \frac{A}{2}}{\cos \frac{B - C}{2}}.$$

La superficie S del triángulo, se calcula por la fórmula:

$$S = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A.$$

Discusión. — Como la tangente puede tomar todos los valores reales, el valor de $\operatorname{tg} \frac{B - C}{2}$ dado por la fórmula será siempre aceptable.

Admitamos que de los valores de los lados b sea mayor que c. El valor de $\operatorname{tg} \frac{B - C}{2}$ será positivo y siempre se encontrará un ángulo α en el primer cuadrante que satisfaga a la relación.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b - c}{b + c} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}.$$

Los ángulos B y C son cada uno menor que 180°, entonces $\frac{B - C}{2}$ debe estar comprendido entre $-90°$ y $+90°$. Luego no hay más que un valor para $\frac{B - C}{2}$ y es

$$\frac{B - C}{2} = \alpha.$$

Se tiene, por otro lado

$$\frac{B + C}{2} = 90° - \frac{A}{2}$$

luego:

$$B = 90° - \frac{A}{2} + \alpha ; \qquad C = 90° - \frac{A}{2} - \alpha.$$

Para que estos valores puedan aceptarse, deben estar comprendidos entre 0° y 180°. Ello ocurre para B, ya que a 90° le restamos un ángulo menor que 90° y le sumamos α, que es también menor que 90°.

El ángulo C es, desde luego, menor que 180°, ya que es menor que 90°. Es menester que sea positivo, para lo cual debe tenerse:

$$90° - \frac{A}{2} > \alpha.$$

Siendo los ángulos $90° - \frac{A}{2}$ y α, menores que 90°, sus valores están en el mismo orden que sus tangentes. La desigualdad anterior se cumplirá, si se cumple la siguiente:

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} > \operatorname{tg} \alpha$$

o también:

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} > \frac{b-c}{b+c} \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \quad \text{o bien} \quad \frac{b-c}{b+c} < 1$$

lo que es evidente.

Los valores de B y C siempre existen y son únicos.

En cuanto al valor de a dado por la (3) siempre existe y por lo tanto el problema siempre admite una solución y una sola.

Observación I. — La fórmula (2) no es calculable por logaritmos, pero es cómoda cuando se dan los valores de b y c. Pero, cuando en lugar de conocerse las medidas de b y c, se conocen sus logaritmos, como ocurre muchas veces en la práctica, entonces conviene transformar la fórmula (1) en una expresión calculable por logaritmos, utilizando ángulos auxiliares de cálculo.

Poniendo

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{c}{b}$$

se tiene

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{1 - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{tg}(45° - \varphi)$$

se tiene entonces:

$$\operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \operatorname{tg}(45° - \varphi) \operatorname{ctg} \frac{A}{2}.$$

Observación II. — El cálculo de a que nos da la fórmula (3), exige que previamente se calcule B y C. Se podría intentar calcular directamente a partiendo del teorema del coseno y se tendría:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$

y habría que hacer calculable por logaritmos a esta fórmula, lo que ya se ha hecho en el nº 97. Se tendría que calcular el ángulo auxiliar φ dado por

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$$

y resulta

$$a = \frac{(b+c)\operatorname{sen}\frac{A}{2}}{\cos\varphi}.$$

Si se compara la fórmula que da $\operatorname{tg}\varphi$ con la que da $\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}$, se ve que el ángulo φ no es otra cosa que el ángulo $\frac{B-C}{2}$ y por lo tanto hemos caído nuevamente en el cálculo de $\frac{B-C}{2}$.

Ejemplo : $A = 85°45'25''$, $b = 259.19$ m $c = 244.22$.

Fórmulas:

$$\frac{B+C}{2} = 90° - \frac{A}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$$

$$a = \frac{(b+c)\operatorname{sen}\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}.$$

Conviene disponer los cálculos en la forma que sigue, poniendo a la izquierda de la línea vertical los valores y a la derecha los logaritmos.

$A = 85°45'25''$	$b - c = 1.17522$
$b = 259.19$ m	$\operatorname{ctg}\frac{A}{2} = 0.03219$
$c = 244.22$ m	
$b + c = 503.41$	1.20741
$b - c = 14.97$	$b + c = 2.70192$
$\frac{A}{2} = 42°52'42''$	$\operatorname{tg}\frac{B - C}{2} = 8.50549$
$\frac{B + C}{2} = 47°07'18''$	$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = 9.83279$
$\frac{B - C}{2} = 1°50'03''$	$\cos\frac{B - C}{2} = 9.99978$
$B = 48°57'21''$	$a = 2.53493$
$C = 45°17'15''$	
$a = 342.72$ m	

Puestos los valores de A, b y c, se obtiene en seguida $b + c$, $b - c$, $\frac{A}{2}$ y $\frac{B + C}{2}$. Luego obtenemos con la tabla $\log(b - c)$, $\log(b + c)$, $\log\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$ y $\log\operatorname{sen}\frac{A}{2}$. Obtenemos así $\log\operatorname{tg}\frac{B - C}{2} = \log(b - c) + {}$ $+ \log\operatorname{ctg}\frac{A}{2} - \log(b - c)$, y al mismo tiempo $\log\cos\frac{B - C}{2}$, lo que nos permite calcular $\log a = \log(b + c) + \log\operatorname{sen}\frac{A}{2} - \log\cos\frac{B - C}{2}$. Ahora obtenemos el ángulo $\frac{B - C}{2}$ y el valor de a y en seguida obtenemos B y C.

Cuando un ángulo A se aproxima a 180° o sea cuando la suma $b + c$ sea poco mayor que a (fig. 94), los cálculos pueden efectuarse en otra forma para obtener mejores resultados. Se tiene

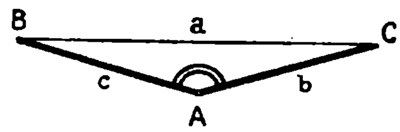


Figura 94

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Y poniendo

$$A = 180° - \varepsilon \qquad \varepsilon = 180° - A$$

donde ε es un ángulo pequeño, se tiene

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\varepsilon = b^2 + c^2 + 2bc - 2bc(1 - \cos\varepsilon)$$

o bien

$$a^2 = (b + c)^2 - 4\,bc\,\text{sen}^2\frac{\varepsilon}{2}$$

y resulta

$$a = (b + c)\sqrt{1 - \frac{4\,bc}{(b + c)^2}\,\text{sen}^2\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Siendo ε pequeño, lo es también $\text{sen}\,\frac{\varepsilon}{2}$ y se puede poner, con bastante aproximación

$$a \simeq (b + c)\left[1 - \frac{2\,bc}{(b + c)^2}\,\text{sen}^2\frac{\varepsilon}{2}\right] = \sim (b + c) - \frac{2\,bc}{b + c}\,\text{sen}^2\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ejemplo: $b = 541.72$ m $c = 320.43$ $A = 178°9'20''$ $\varepsilon = 1°50'40''$

$A = 178°09'20''$	$2 = 0.30103$
$b = 541.72$ m	$b = 2.73377$
$c = 320.43$ m	$c = 2.50573$
$\frac{\varepsilon}{2} = 0°55'20''$	$\text{sen}\,\frac{\varepsilon}{2} = 8.20669$
	$\text{sen}^2\frac{\varepsilon}{2} = 6.41338$
$b + c = 862.15$ m	
$d = .10$	$2bc\,\text{sen}^2\frac{\varepsilon}{2} = 1.95391$
$a = 862.05$ m	$(b + c) = \underline{2.93558}$
	$d = \frac{2bc}{b + c}\,\text{sen}^2\frac{\varepsilon}{2} = 9.01833.$

Para el cálculo de los ángulos se tiene:

$$\frac{\text{sen B}}{\text{sen}\,\varepsilon} = \frac{b}{b + c}$$

$$\frac{\text{sen C}}{\text{sen}\,\varepsilon} = \frac{c}{b + c}.$$

Y puesto que los ángulos B y C son pequeños, se puede poner

$$B'' = (\varepsilon)''\,\frac{b}{b + c}, \qquad \varepsilon'' = 6640'',$$

$$C'' = (\varepsilon)''\,\frac{c}{b + c}.$$

Y en nuestro caso se tiene

$$B'' \sim 6640 \frac{541.72}{541.72 + 320.43} \qquad C'' \sim 6640 \frac{320.43}{541.72 + 320.43}$$

$$B'' \sim \frac{6640}{862.15} \times 541.72 = 7.7017 \times 541.72$$
$$= 4172'' = 1°09'32''$$

$$C'' \sim \frac{6640}{862.15} \times 320.43 = 2468'' = 0°41'08''$$

$B'' = 4172''$	$6640 = 3.82217$
$C'' = 2468''$	$862.15 = 2.93558$
$B = \quad 1°09'32''$	0.88659
$C = \quad 0°41'08''$	$541.72 = 2.73377$
$A = 178°09'20''$	$320.43 = 2.50573$
$A+B+C = 180°00'00''$	$(B'')'' = 3.62036$
	$(C)'' = 3.39232.$

Y aplicando las fórmulas

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}, \qquad \text{y} \qquad a = \frac{(b+c)\operatorname{sen}\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}$$

$A = 178°09'20''$	$b - c = 2.34496$
$b = 541.72$ m	$\operatorname{ctg}\frac{A}{2} = 8.20675$
$c = 320.43$ m	0.55171
$b + c = 862.15$ m	$b + c = 2.93558$
$b - c = 221.29$ m	$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = 7.61613$
$\frac{A}{2} = 89°04'40''$	$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = 9.99994$
$\frac{B+C}{2} = 0°55'20''$	$(b+c)\operatorname{sen}\frac{A}{2} = 2.93552$
$\frac{B-C}{2} = 0°14'12''$	$\cos\frac{B-C}{2} = 0.00000$
$B = \quad 1°09'32''$	$a = 2.93552$
$C = \quad 0°41'08''$	
$A = 178°09'20''$	
$A + B + C = 180°00'00''$	
$a = 862.03$ m	

O también

$$a = \frac{b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} = \frac{c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C}$$

$$\begin{array}{rl@{\qquad}rl}
b = & 2.73377 & c = & 2.50573 \\
\operatorname{sen} A = & \underline{8.50767} & \operatorname{sen} A = & \underline{8.50767} \\
 & 1.24144 & & 1.01340 \\
\operatorname{sen} B = & \underline{8.30589} & \operatorname{sen} C = & \underline{8.07791} \\
\lg. a = & 2.93555 & \lg. a = & 2.93549 \\
a = & 862.09 & a = & 861.97
\end{array}$$

$$a = 862{,}03 \text{ m.}$$

213. *Tercer caso : Resolver un triángulo dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.* — Sean a, b y A, los elementos conocidos. Se puede calcular B de la expresión :

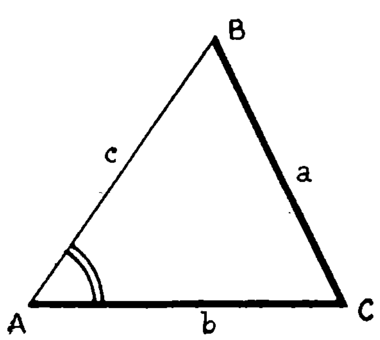


Figura 95

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

la que nos da

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a}. \tag{1}$$

Conociendo ahora B, se calcula C por

$$C = 180° - (A + B). \tag{2}$$

Y luego el valor de c se obtiene por la fórmula:

$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}. \tag{3}$$

Y finalmente la superficicie es dada por :

$$S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C.$$

Discusión. — Como el ángulo B está dado por su seno, es necesario que éste sea menor que la unidad, ya que evidentemente es positivo, porque lo son a, b y el ángulo A debe estar comprendido entre 0 y 180°. Luego debe tenerse

$$b \text{ seno } A \leq a. \tag{4}$$

Satisfecha esta condición, siempre se encontrará un ángulo β que cumpla la igualdad :

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{b \operatorname{sen} A}{a}.$$

Y el valor de B, podrá ser:

$$B = \beta \qquad \text{o bien} \qquad B_1 = 180° - \beta.$$

En correspondencia con estos valores de B encontramos para C los valores:

$$C = 180° - A - B \tag{5}$$

$$C_1 = 180° - A - (180° - \beta) = \beta - A. \tag{6}$$

Evidentemente estos dos valores de C son menores que 180°; para que sean aceptables es necesario y suficiente que sean positivos. Se nos presentan dos casos.

1° *El ángulo* A *es agudo.* — En ese caso el valor de C dado por la (5) es positivo, puesto que a 180° le restamos dos ángulos respectivamente menores que 90°.

Para que el valor de C_1 sea positivo, debe tenerse

$$\beta > A,$$

y como tanto β como A son menores que 90°, la desigualdad anterior implica también

$$\operatorname{sen} \beta > \operatorname{sen} A$$

o bien

$$\frac{b \operatorname{sen} A}{a} > \operatorname{sen} A$$

y siendo sen A positivo, $b > a$.

Luego, cuando A es agudo, si se tiene $b > a$, hay dos soluciones del problema, desde luego admitido que se cumple la condición (4) y si

$$b \leq a$$

hay una sola solución.

2° *El ángulo* A *es obtuso.* — El valor de C_1 es negativo y hay que desecharlo.

El problema admitirá una sola solución, siempre que el valor de C pueda aceptarse. Para que sea positivo debe tenerse

$$180^\circ - A > \beta.$$

Y siendo ahora los ángulos $(180^\circ - A)$ y β, los dos agudos, la desigualdad anterior implica

$$\operatorname{sen}(180^\circ - A) > \operatorname{sen} \beta$$

de donde

$$\operatorname{sen} A > \frac{b \operatorname{sen} A}{a}$$

y por lo tanto $a > b$.

Luego, en este caso, para que el problema admita una solución debe tenerse $a > b$ y si $a \leq b$ no hay solución del problema.

Resumen. — Podemos entonces resumir los resultados de nuestro teoremita en la forma siguiente:

$$\begin{array}{llll}
b \operatorname{sen} A > a & & & \text{no hay solución} \\
b \operatorname{sen} A \leq a & \left\{ \begin{array}{l} A < 90^\circ \left\{ \begin{array}{l} a \geq b \\ a < b \ldots \end{array} \right. \\ A \geq 90^\circ \left\{ \begin{array}{l} a > b \ldots \\ a \leq b \ldots \end{array} \right. \end{array} \right. & & \begin{array}{l} \text{una solución} \\ \text{dos soluciones} \\ \text{una solución} \\ \text{no hay solución.} \end{array}
\end{array}$$

Podríamos dar a este cuadro otra disposición teniendo en cuenta que la condición de ser $a \geq b$ implica de hecho la condición

$$a \geq b \operatorname{sen} A.$$

Por otra parte, siempre que $a > b$ no hay más que una solución.

Se puede poner entonces:

$$\begin{array}{lll}
a > b & & \text{una solución} \\
a = b & \left\{ \begin{array}{l} A < 90^\circ \\ A \geq 90^\circ \end{array} \right. & \begin{array}{l} \text{una solución} \\ \text{no hay solución} \end{array} \\
a < b & \left\{ \begin{array}{l} b \operatorname{sen} A > a \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b \operatorname{sen} A \leq a \left\{ \begin{array}{l} A < 90^\circ \\ A \geq 90^\circ \ldots\ldots \end{array} \right. \end{array} \right. & \begin{array}{l} \text{no hay solución} \\ \text{dos soluciones} \\ \text{no hay solución} \end{array}
\end{array}$$

Observación I. — Es muy cómodo encontrar los resultados anteriores por un razonamiento geométrico.

Para construir un triángulo dados a, b y A, trazamos el ángulo A (fig. 96) y llevamos sobre uno de los lados de A, una magnitud

$$AC = b.$$

Con centro en C y radio igual a a, se describe un círculo, que corta en general al otro lado del ángulo A en dos puntos B_1 y B_2. Uniendo

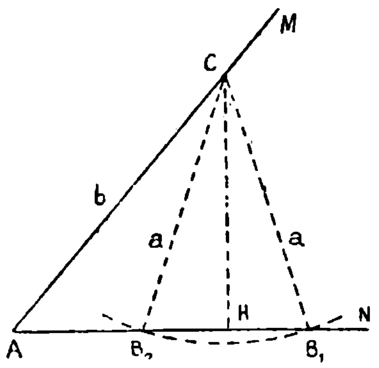


Figura 96

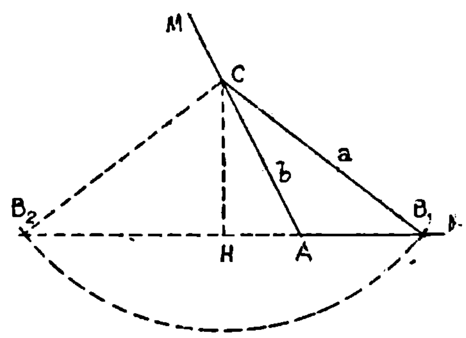


Figura 97

C con estos puntos se tienen las soluciones buscadas. Sea CH la altura bajada desde C sobre el otro lado de A. Se ve en las figuras 96 y 97 que

$$CH = b \text{ sen } CAH.$$

Pero, observando la figura, puede verse que si el ángulo A es agudo, se tiene $\widehat{CAH} = A$ y si el ángulo A es obtuso $CAH = 180° - A$.

En los dos casos se tiene:

$$\text{sen } CAH = \text{sen } A.$$

Para que el círculo de radio a corte al otro lado del triángulo debe tenerse

$$a \geq CH$$

y si $a < CH$ no hay solución del problema, lo que equivale a decir que si

$$a < b \text{ sen } A$$

no hay solución.

Si $a \geq CH$ o si $a \geq b$ sen A, la circunferencia corta a la recta AN en dos puntos B_1 y B_2. Falta ver si estos puntos están sobre el lado del ángulo A o sobre su prolongación.

Distinguiremos dos casos:

I) *El ángulo* A *es agudo* (fig. 96). — En tal caso, el punto H está sobre AN y el punto B_1 es siempre aceptable.

Para que pueda aceptarse el punto B_2, es necesario que $a < b$.

Luego, siendo A agudo, si $a < b$ hay dos soluciones del problema y si $a \geq b$, una sola, siempre sobre la base de que se cumple

$$a \geq b \text{ sen A}.$$

II) *El ángulo* A *es obtuso* (fig. 97). — El punto H está sobre la prolongación de AN. La solución B_2 no es aceptable.

Para que se pueda aceptar la solución B_1, o para que B_1 caiga sobre AN es necesario que $a > b$.

Luego, siendo A obtuso, si $a > b$, hay una solución del problema y si $a \leq b$, no hay ninguna.

Observación II. — Hemos calculado el lado c, en base al cálculo previo de C. Podemos calcular c en base a los datos del problema.

En efecto, partiendo de la igualdad

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

tenemos la ecuación de 2° grado en c.

$$c^2 - 2bc \cos A + b^2 - a^2 = 0 \qquad (7)$$

que nos da

$$c = b \cos A \pm \sqrt{b^2 \cos^2 A + a^2 - b^2}. \qquad (8)$$

Para que exista c es necesario que se tenga

$$b^2 \cos^2 A + a^2 - b^2 \geq 0$$

$a^2 - b^2(1 - \cos^2 A)$

o bien

$$a^2 \geq b^2 \text{ sen}^2 A$$

de donde

$$a \geq b \text{ sen A}$$

que es la condición (4).

Para que los valores de c dados por la (8) sean aceptables, es menester que sean positivos. Como el producto de las raíces es $b^2 - a^2$, si $b < a$, el producto de las raíces es negativo y no hay más que una solución.

Si $b > a$, el producto de las raíces es positivo; las dos raíces son del mismo signo. Como la suma de las raíces vale $2b \cos A$, si A es agudo, $\cos A$ es positivo y las dos raíces son positivas, luego hay dos soluciones del problema. Si A es obtuso, $\cos A$ es negativo y las dos raíces son negativas. No hay ninguna solución.

Si suponemos $a = b$, una de las raíces es cero y por lo tanto inaceptable. La otra raíz vale $2b \cos A$ y sólo es admisible si A es agudo.

Hemos encontrado así los mismos resultados que en la discusión anterior.

Como este caso, en la resolución de triángulos planos es el más interesante, ensayaremos todavía otra discusión más.

Pongamos nuevamente

$$c = b \cos A \pm \sqrt{b^2 \cos^2 A + a^2 - b^2} = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 A}$$

que podemos escribir

$$c = b\left[\cos A \pm \operatorname{sen} A \sqrt{\frac{a^2}{b^2 \operatorname{sen}^2 A} - 1}\right].$$

Introduciendo ahora un ángulo auxiliar φ dado por

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{b \operatorname{sen} A}{a}$$

tendremos

$$c = b \frac{\operatorname{sen}(\varphi \pm A)}{\operatorname{sen} \varphi}.$$

Es fácil ver que el valor φ que hemos calculado, no es otra cosa que B.

$$\operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} B$$

y estando φ comprendido entre 0 y 90°, se tiene que φ es el valor β que habíamos encontrado

$$\varphi = \beta.$$

Y tenemos para c

$$c = b \frac{\operatorname{sen}(\beta + A)}{\operatorname{sen} \beta} \qquad \text{y} \qquad c = b \frac{\operatorname{sen}(\beta - A)}{\operatorname{sen} \beta}$$

que son exactamente los valores de c que obteníamos para cada uno de los valores C y C_1.

Hemos caído pues al aplicar la fórmula (7) en los mismos cálculos que en la resolución primera.

Ejemplo 1 :

$$A = 32°19'40'', \quad a = 341.34 \text{ m}, \quad b = 482.70 \text{ m}.$$

Conviene disponer los cálculos en la forma que sigue, poniendo a la izquierda los valores y a la derecha los logaritmos.

<table>
<tr><td colspan="2">$A = 32°19'40''$

$a = 341.34$ m.
$b = 482.70$ m.</td><td>$b = 2.68368$
sen $A = 9.72816$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>2.41184
$a = 2.53319$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$B = 49°07'56''$</td><td>sen $B = 9.87865$</td></tr>
<tr><td>$B_1 = 49°07'57''$
$C_1 = 98°32'23''$</td><td>$B_2 = 130°52'04''$
$C_2 = 16°48'17''$</td><td>$\dfrac{a}{\text{sen } A} = 2.80503$</td></tr>
<tr><td>$c_1 = 631.23$ m.</td><td>$c_2 = 184.54$ m.</td><td>sen $C_1 = 9.99516$
sen $C_2 = 9.46106$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$c_1 = 2.80019$
$c_2 = 2.26609$</td></tr>
</table>

Es fácil darse cuenta de la distribución de los cálculos. Se obtienen dos soluciones. Una, el triángulo de ángulos

$$A = 32°19'40'', \; B_1 = 49°07'56'' \text{ y } C_1 = 98°32'23''$$

y lados

$$a = 341.34 \text{ m}, \quad b = 482.70 \text{ m} \quad \text{y} \quad c_1 = 631.23 \text{ m}$$

y la otra, el triángulo de ángulos

$$A = 32°19'40'', \quad B_2 = 130°52'04'' \quad \text{y} \quad C_2 = 16°48'17''$$

y de lados

$$a = 341.34\, m, \quad b = 482.70\, m \quad \text{y} \quad c_2 = 184.54 \text{ m}.$$

Ejemplo 2 :

$$A = 32°19'40'', \; a = 341.34 \text{ m}, \; b = 302.70.$$

Se tiene

$A = 32^\circ 19' 40''$		$b = 2.48101$
$a = 341.34$ m.		$\text{sen } A = 9.72816$
$b = 302.70$ m.		2.20917
$B = 28^\circ 18' 31''$		$a = 2.53319$
$B_1 = 28^\circ 18' 31''$	$B_2 = 151^\circ 41' 29''$	$\text{sen } B = 9.67598$
$C_1 = 119^\circ 21' 49''$	$C_2 = -4^\circ 01' 09''$	$\dfrac{a}{\text{sen } A} = 2.80503$
$c_1 = 556.30$ m		$\text{sen } C_1 = 9.94028$
		$c_1 = 2.74531$

El problema admite una sola solución.

214. *Cuarto caso: Resolver un triángulo dados los tres lados.* — Las fórmulas dadas en nº 202 nos permiten calcular los tres ángulos en función de los lados. Es conveniente usar las fórmulas de la tangente, porque ello exige menos trabajo.

En efecto, calculando por las fórmulas de las tangentes, se necesita buscar solamente cuatro logaritmos, los de p, $p-a$, $p-b$ y $p-c$; mientras que usando las fórmulas del seno, es necesario buscar seis logaritmos, los de $p-a$, $p-b$, $p-c$, a, b y c; y si se quiere calcular por las fórmulas del coseno, hay que buscar siete logaritmos, los seis anteriores y el logaritmo de p.

Por otra parte, se obtiene más exactitud, utilizando las fórmulas de la tangente.

Tendríamos así, para calcular los tres ángulos:

$$\text{I} \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \\ \operatorname{tg} \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}. \end{aligned} \right.$$

Y en cuanto al área S, se calcularía por la fórmula de Heron (nº 206)

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Discusión. — Para que se puedan calcular los ángulos por la tangente, es necesario que el producto:

$$p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c).$$

sea positivo, es decir que el producto

$$(b+c-a)\,(a+c-b)\,(a+b-c) > 0. \qquad (1)$$

Sea a el mayor de los lados del triángulo, o por lo menos a el lado que no sea inferior a cada uno de los otros dos, tendremos que:

$$c+a-b \quad \text{y} \quad a+b-c$$

son factores positivos, puesto que es

$$a \geq b \quad \text{y} \quad a \geq c.$$

Para que el producto (1) sea positivo, se necesita que

$$b+c-a > 0$$

lo que equivale a

$$b+c > a.$$

Para que el problema sea posible y admita una sola solución, se necesita que el mayor de los lados, sea menor que la suma de los otros dos.

No hay ambigüedad para los ángulos A, B y C ya que $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$ y $\frac{C}{2}$ son menores que 90°.

Como una comprobación debe tenerse, a menos de los pequeños errores de cálculo

$$A + B + C = 180°.$$

Observación. — En la práctica, podemos escribir las mismas fórmulas I, en la forma siguiente:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{1}{p-b}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{p-c}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Y como veremos más adelante, el radical expresa el valor del radio r del círculo inscripto en el triángulo y tendríamos:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}; \qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}; \qquad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}.$$

Y también es fácil ver que el área S es

$$S = pr.$$

Estas fórmulas facilitan las operaciones.

Se tienen además varias pruebas de los cálculos, pues debe tenerse

1. $(p-a) + (p-b) + (p-c) = p$
2. $p \operatorname{tg}\frac{A}{2} \operatorname{tg}\frac{B}{2} \operatorname{tg}\frac{C}{2} = r$
3. $A + B + C = 180°$

Ejemplo :

$a = 250.10$ m.	$p - a = 2.43361$
$b = 360.70$ m.	$p - b = 2.20629$
$c = 432.20$ m.	$p - c = 1.95085$
$2p = 1043.00$	6.59075
$p = 521.50$	$p = 2.71725$
$p - a = 271.40$	$r^2 = 3.87350$
$p - b = 160.80$	$r = 1.93675$
$p - c = 89.30$	
Prueba 1. $p = 521.50$	$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 9.50314$
$\frac{A}{2} = 17°40'04''$	$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = 9.73046$
$\frac{B}{2} = 28°15'45''$	$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = 9.98590$
$\frac{C}{2} = 44\ 04\ 12$	$p = 2.71725$
$A = 35°20'08''$	Prueba 2. $r = 1.93675$
$B = 56°31'30''$	
$C = 88°08'24''$	
$A + B + C = 180°00'02''$	

Es fácil darse cuenta del orden a seguir. Puestos a la izquierda los valores a, b y c, se obtiene $2p$ y por lo tanto p. Luego $p-a$, $p-b$ y $p-c$. Se buscan luego los $\log(p-a)$, $\log(p-b)$, $\log(p-c)$ y $\log p$, que se escriben a la derecha. Se suma $\log(p-a)+\log(p-b)+\log(p-c)$ y se le resta $\log p$., lo que nos da $\log r^2$ y dividiendo por 2, se tiene $\log r$.

Restando a $\log r$, sucesivamente $\log(p-a)$, $\log(p-b)$ y $\log(p-c)$ se obtiene respectivamente $\log \operatorname{tg} \frac{A}{2}$, $\log \operatorname{tg} \frac{B}{2}$ y $\log \operatorname{tg} \frac{C}{2}$ sumados éstos con $\log p$, debe tenerse $\log. r$ (prueba 2). Obtenidos $\log \operatorname{tg} \frac{A}{2}$, $\log \operatorname{tg} \frac{B}{2}$ y $\log \operatorname{tg} \frac{C}{2}$ se obtiene $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$ y $\frac{C}{2}$ y por lo tanto A, B y C cuya suma debe dar 180°, a menos de los errores de cálculo.

CAPÍTULO VI

CÁLCULO DE ELEMENTOS SECUNDARIOS EN EL TRIÁNGULO.

215. Cálculo del radio R del círculo circunscripto.
Habíamos encontrado por el teorema del seno (nº 193)

$$\frac{a}{\text{sen A}} = 2\text{ R}$$

lo que nos permite calcular R.

$$\text{R} = \frac{a}{2 \text{ sen A}}. = \frac{a}{4 \text{ sen} \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{a}{4 \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}}$$

Multiplicando ahora numerador y denominador por bc, se tiene

$$\text{R} = \frac{abc}{2bc \text{ sen A}}.$$

Y teniendo en cuenta la expresión de la superficie S del triángulo, obtenemos

$$\text{R} = \frac{abc}{4\text{S}} =$$

o también según la fórmula de Heron (nº 206)

$$\text{R} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}. = \frac{p}{2S}$$

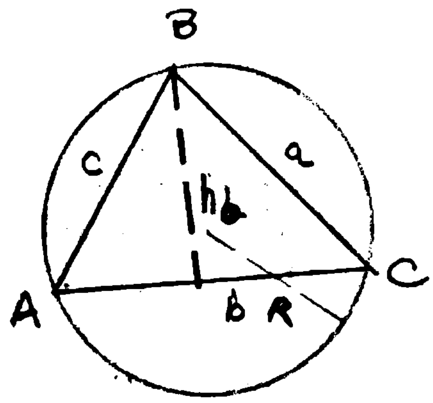
El radio del círculo circunscripto es igual al producto de los tres lados del triángulo dividido por el cuádruple del área del mismo.

Es fácil obtener también

$$\text{R} = \frac{p}{4 \cos \frac{\text{A}}{2} \cos \frac{\text{B}}{2} \cos \frac{\text{C}}{2}}$$

$$\text{R} = \frac{a}{4 \text{ sen} \frac{\text{A}}{2} \cos \frac{\text{A}}{2}} = \frac{b}{4 \text{ sen} \frac{\text{B}}{2} \cos \frac{\text{B}}{2}} = \frac{c}{4 \text{ sen} \frac{\text{C}}{2} \cos \frac{\text{C}}{2}}.$$

$$R = \frac{b}{2 \text{ sen B}} = \frac{b}{4 \text{ sen} \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}} =$$



216. Se obtiene fácilmente

$2R = \frac{a}{\text{sen} A} = \frac{a\cancel{b}c}{\underbrace{\cancel{b}c\ \text{sen} A}_{h_a}} = \frac{a\cancel{b}c}{\cancel{b}h_b}$

$$2\,\mathrm{R}\,h_a = bc$$
$$2\,\mathrm{R}\,h_b = ac$$
$$2\,\mathrm{R}\,h_c = ab$$

y también

$2R = \frac{ac}{h_b}$

$$p - a = 4\,\mathrm{R} \cos\frac{\mathrm{A}}{2} \operatorname{sen}\frac{\mathrm{B}}{2} \operatorname{sen}\frac{\mathrm{C}}{2}$$

$$p - b = 4\,\mathrm{R} \cos\frac{\mathrm{B}}{2} \operatorname{sen}\frac{\mathrm{A}}{2} \operatorname{sen}\frac{\mathrm{C}}{2}$$

$$p - c = 4\,\mathrm{R} \cos\frac{\mathrm{C}}{2} \operatorname{sen}\frac{\mathrm{A}}{2} \operatorname{sen}\frac{\mathrm{B}}{2}$$

y

$$h_a = 2\,\mathrm{R} \operatorname{sen} \mathrm{B} \operatorname{sen} \mathrm{C} = \frac{h_a}{\frac{c}{\text{sen} C}\ \text{sen} A\ \text{sen} C}$$
$$h_b = 2\,\mathrm{R} \operatorname{sen} \mathrm{A} \operatorname{sen} \mathrm{C}$$
$$h_c = 2\,\mathrm{R} \operatorname{sen} \mathrm{A} \operatorname{sen} \mathrm{B}.$$

Radio r del círculo inscripto

217. Para calcular el radio r del círculo incripto en el triángulo, cuyo centro se obtiene, como se sabe, trazando las bisectrices de los ángulos interiores, unamos el centro con los tres vértices del triángulo (fig. 98). Dividimos así el triángulo en tres triángulos que tienen por base los lados y por altura el radio r.

Tendremos que el área S, tiene por expresión:

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = pr$$

de donde

$$r = \frac{\mathrm{S}}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} \tag{1}$$

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

o también, multiplicando o dividiendo el sub-radical por $(p-a)$ o $(p-b)$ o $(p-c)$ se tiene

$$r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{\mathrm{A}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p-a}\cdot\frac{r}{p-b}\cdot\frac{r}{p-c} = \frac{r\cdot\left(\frac{\cancel{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}}}{p}\right)^2}{\cancel{(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{r}{p}$$

$$r = (p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}$$

$$r = (p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

como habíamos visto en el nº 214.

Es fácil obtener también

$$r = p\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = 4R\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}.$$

La fórmula (1) dice que el radio del círculo inscripto es igual a la superficie dividida por el semi-perímetro y también es fácil de obtener

$$r = \frac{a\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{b\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{c\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

y poniendo

$$k = \operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}$$

se tiene

$$a = \frac{r\operatorname{sen}A}{2k};\quad b = \frac{r\operatorname{sen}B}{2k};\quad c = \frac{r\operatorname{sen}C}{2k}.$$

Radio de los círculos ex-inscriptos

218. Para calcular los radios de los círculos ex-inscriptos (fig. 98) consideraremos el radio r_a ex-inscripto en el ángulo A. Su centro O_1 se obtiene trazando la bisectriz del ángulo A y las bisectrices exteriores en los vértices B y C. Uniendo ahora el centro O_1 con los tres vértices del triángulo, tenemos que el área S del triángulo es igual al área AO_1C más el área AO_1B menos el área BO_1C, es decir que se tiene :

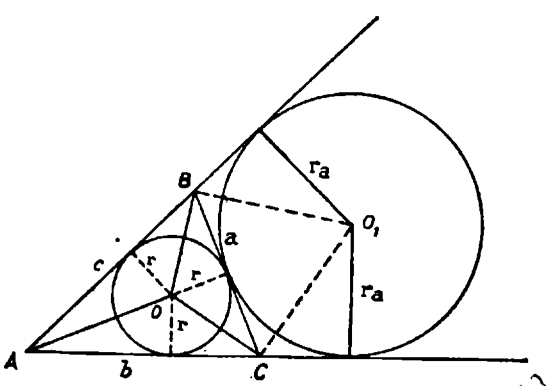


Figura 98

$\widehat{ABC} = \widehat{AO_1C} + \widehat{AO_1B} - \widehat{BO_1C}$

$$S = \frac{br_a}{2} + \frac{cr_a}{2} - \frac{ar_a}{2} = r_a(p-a) = \frac{r_a(b+c-a)}{2} = r_a(p-$$

de donde

$$r_a = \frac{S}{p-a}$$

y análogamente encontraríamos

$$r_b = \frac{S}{p-b}, \qquad r_c = \frac{S}{p-c}.$$

Y expresando S en función de los lados y simplificando:

$$r_a = \sqrt{\frac{p\,(p-b)\,(p-c)}{p-a}} = \sqrt{\frac{\cancel{p}(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)}}$$

$$r_b = \sqrt{\frac{p\,(p-a)\,(p-c)}{p-b}}$$

$$r_c = \sqrt{\frac{p\,(p-a)\,(p-b)}{p-c}}.$$

219. Se puede ahora establecer fácilmente que

$$r_a : r_b : r_c = \frac{1}{p-a} : \frac{1}{p-b} : \frac{1}{p-c},$$

y también

$$r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{(p-a)}} \cdot \frac{p}{p} = p\sqrt{\frac{\cancel{p}(p-\ldots}{p^2}}$$

$$r_b = p \operatorname{tg} \frac{B}{2}$$

$$r_c = p \operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

o bien

$$r_a = \frac{a \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{a\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}}{\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}} = p \ldots$$

$$r_b = \frac{b \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{B}{2}}$$

$$r_c = \frac{c \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}.$$

Y poniendo

$$k' = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

se obtiene

$$r_a = \frac{ak'}{\cos^2\frac{A}{2}},\quad r_b = \frac{bk'}{\cos^2\frac{B}{2}},\quad r_c = \frac{rk'}{\cos^2\frac{C}{2}}.$$

220. Y fácilmente también

$$r\,r_a\,r_b\,r_c = \frac{S}{p}\cdot\frac{S}{(p-a)}\cdot\frac{S}{(p-b)}\cdot\frac{S}{(p-c)} = S^2 = \frac{S^4}{S^2}$$

$$S = \frac{r_a\,r_b\,r_c}{\sqrt{r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c}}.$$

$$r_a + r_b + r_c - r = 4\,R = \frac{S}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

$$abc = \frac{S}{p^2}(r_a + r_b)(r_a + r_c)(r_b + r_c).$$

$$\frac{r}{R} = 4\,\text{sen}\frac{A}{2}\,\text{sen}\frac{B}{2}\,\text{sen}\frac{C}{2} = \cos A + \cos B + \cos C - 1$$

$$\frac{r_a}{R} = 4\,\text{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = -\cos A + \cos B + \cos C + 1$$

$$\frac{r_b}{R} = 4\cos\frac{A}{2}\,\text{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \cos A - \cos B + \cos C + 1$$

$$\frac{r_c}{R} = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\,\text{sen}\frac{C}{2} = \cos A + \cos B - \cos C + 1$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

$$\frac{1}{r_a} = -\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

$$\frac{1}{r_b} = \frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

$$\frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}$$

$$r_a - r = 4\mathrm{R}\,\mathrm{sen}^2\frac{\mathrm{A}}{2}$$

$$r_b - r = 4\mathrm{R}\,\mathrm{sen}^2\frac{\mathrm{B}}{2}$$

$$r_c - r = 4\mathrm{R}\,\mathrm{sen}^2\frac{\mathrm{C}}{2}.$$

221. *Distancia entre el centro de la circunferencia inscripta y circunscripta en un triángulo plano.* — Sea R el radio de la circunferencia circunscripta de centro O′ y r el radio de la circunferencia inscripta de centro O. La bisectriz de A pasa por O y por E, medio del arco BC (fig. 99).

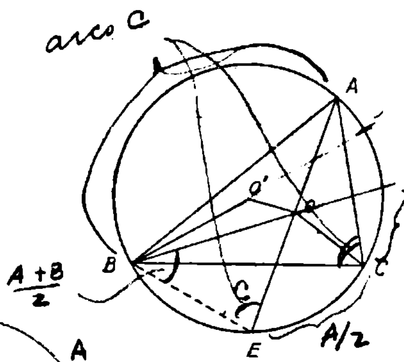
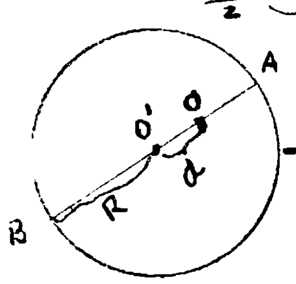


Figura 99



La potencia del punto O con respecto al círculo de centro O′, siendo d = OO′, es

—Potencia = OA . OB = (R − d)(R + d) = $d^2 - \mathrm{R}^2$ = OA . OE.
negativa

En el triángulo OAB tenemos

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{sen}\frac{\mathrm{B}}{2}} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{sen}\frac{\mathrm{A}}{2}} = \frac{c}{\mathrm{sen}\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}} = \frac{c}{\cos\frac{\mathrm{C}}{2}}$$

de donde

(215/ver)

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{sen}\frac{\mathrm{B}}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\mathrm{C}}{2}} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{sen}\frac{\mathrm{A}}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\mathrm{C}}{2}} = \frac{\cancel{2}c}{\cancel{2}\,\mathrm{sen}\frac{\mathrm{C}}{2}\cos\frac{\mathrm{C}}{2}} = \frac{2c}{\mathrm{sen}\,\mathrm{C}} = 4\mathrm{R}$$

$= \frac{c}{\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\mathrm{C}}$

$$\mathrm{OA} = 4\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\frac{\mathrm{B}}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\mathrm{C}}{2}.$$

Análogamente del triángulo OBE

$$\frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{sen}\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{sen}\,\mathrm{C}} \quad \text{o bien} \quad \frac{\mathrm{OE}}{\cancel{\cos\frac{\mathrm{C}}{2}}} = \frac{\mathrm{OB}\,\cos\frac{\mathrm{C}}{2}}{2\,\mathrm{sen}\frac{\mathrm{C}}{2}\cancel{\cos\frac{\mathrm{C}}{2}}} = 2\mathrm{R}$$

de donde

$$\mathrm{OE} = \frac{\mathrm{OB}}{2\,\mathrm{sen}\frac{\mathrm{C}}{2}} = 2\,\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\frac{\mathrm{A}}{2}.$$

$$\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{sen}\frac{\mathrm{A}}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\mathrm{C}}{2}} = 4\mathrm{R}$$

$$\frac{\mathrm{OB}}{2\,\mathrm{sen}\frac{\mathrm{C}}{2}} = 2\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\frac{\mathrm{A}}{2}$$

Luego, teniendo en cuenta el signo

$$OA \,.\, OE = -\,8R^2 \operatorname{sen}\frac{A}{2} \operatorname{sen}\frac{B}{2} \operatorname{sen}\frac{C}{2}.$$

Pero

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \qquad \operatorname{sen}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},$$

$$\operatorname{sen}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}.$$

Es decir que

$$OA \,.\, OE = -\,8R^2 \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}. = -8R^2 \cdot \frac{abc}{4pr} \cdot \frac{(p-a)(}{c}$$

Y teniendo en cuenta que $= -2R$:

$R = \frac{abc}{4pr}$ $\quad R = \frac{abc}{4S}, \quad S = pr \quad$ y $\quad r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}.$

Resulta

$$OA\,OE = d^2 - R^2 = -\,2Rr$$

o bien

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

222. Puede todavía darse otra demostración. Tomemos en figura 99. Se tiene

$$O'BO = O'BC - OBC = 90^\circ - A - \frac{B}{2} = \frac{C-A}{2}$$

y $\qquad \frac{A+C}{2} - A$

$$\overline{OO'}^2 = \overline{O'B}^2 + OB^2 - 2O'B \,.\, OB \cos\frac{C-A}{2}$$

o bien

$$d^2 = R^2 + \frac{r^2}{\operatorname{sen}^2\frac{B}{2}} - \frac{2Rr}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}} \cos\frac{C-A}{2}.$$

Pero es (217)

$$r = 4R \operatorname{sen}\frac{A}{2} \operatorname{sen}\frac{B}{2} \operatorname{sen}\frac{C}{2}$$

luego

$$d^2 = R^2 + \frac{4Rr}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}} \operatorname{sen}\frac{A}{2} \operatorname{sen}\frac{C}{2} - \frac{2Rr}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}} \cos\frac{C-A}{2}$$

y también

$$d^2 = R^2 - \frac{2Rr}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}}\left(\cos\frac{C-A}{2} - 2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}\right)$$

y resulta

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Podemos dar una demostración más elemental.

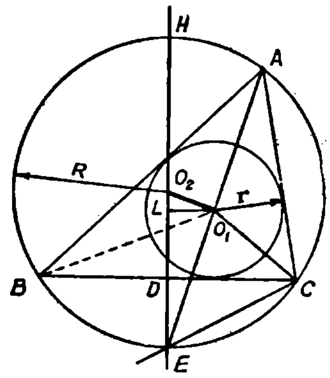


Figura 100

La bisectriz del ángulo A (fig. 100), pasa por O_1 y por E, medio del arco BC y O_2E pasa por el punto medio D de BC. Proyectando O_1 sobre O_2E en L, se tiene

$$\overline{O_1O_2}^2 = \overline{O_2E}^2 + \overline{O_1E}^2 - 2\overline{O_2E}\,.\,\overline{EL}.$$

Pero el ángulo O_1CE vale $\left(\frac{A}{2} + \frac{E}{2}\right)$ y el ángulo EO_1C también, luego es $O_1E = EC$ y se tiene además

$$\overline{EC}^2 = ED\,.\,EH = 2ED\,.\,O_2E = \overline{O_1E}^2.$$

Luego

$$\overline{O_1O_2}^2 = \overline{O_2E}^2 + 2ED\,.\,O_2E - 2O_2E\,.\,EL$$

o

$$\overline{O_1O_2}^2 = \overline{O_2E}^2 - 2O_2E\,(EL - ED)$$

o bien

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

(Relación de Euler).

223. Si llamamos O_b al centro del círculo ex-inscripto al ángulo B y r_b a su radio, se tiene, haciendo $O'O_b = d_b$

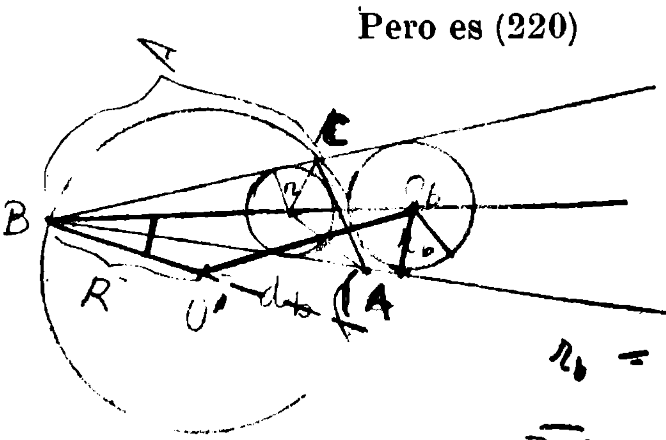
$$\overline{O'O_b}^2 = d_b{}^2 = R^2 + \overline{BO_b}^2 - 2R\,\overline{BO_b}\cos\frac{C-A}{2}$$

o bien

$$d_b{}^2 = R^2 + \frac{r_b{}^2}{\operatorname{sen}^2\frac{B}{2}} - \frac{2Rr_b}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}}\cos\frac{C-A}{2}.$$

Pero es (220)

$$r_b = 4R\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}$$



$r_b = \overline{BO_b}\ \operatorname{sen}\frac{B}{2}$

$\overline{BO_b} = \frac{r_b}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}}$

luego

$$d_b^2 = R^2 + \frac{r_b}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}} 4R \cos\frac{A}{2} \cos\frac{C}{2} - \frac{2Rr_b}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}} \cos\frac{C-A}{2}$$

es decir

$$d_b^2 = R^2 + \frac{2Rr_b}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}} \left(2 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{C}{2} - \cos\frac{C-A}{2}\right)$$

$$d_b^2 = R^2 + 2Rr_b.$$

Y tendríamos entonces

$$d^2 = R^2 - 2rR$$

Ojo

$$d_a^2 = R^2 + 2r_aR$$

$$d_b^2 = R^2 + 2r_bR$$

$$d_c^2 = R^2 + 2r_cR$$

lo que nos da

$$d^2 + d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 = 4R^2 + 2R(r_a + r_b + r_c - r)$$

o bien

$$d^2 + d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 = 12R^2.$$

224. Medianas. — Consideremos un triángulo ABC y tratemos de calcular la mediana m_a. Sea M el punto medio del lado a. La recta AM es la mediana m_a, que forma con a, como indica la figura 101, los ángulos suplementarios φ y $\pi - \varphi$.

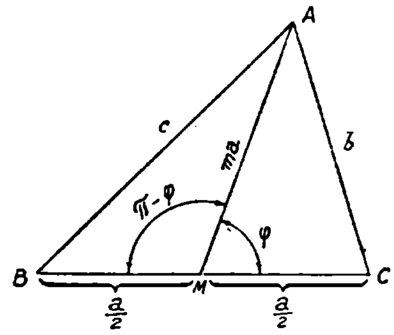


Figura 101

Aplicando el teorema del coseno al triángulo AMC, se tiene:

$$b^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 - 2\frac{a}{2} m_a \cos\varphi.$$

Y aplicando el mismo teorema al triángulo AMB:

$$c^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 - \frac{2a}{2} m_a \cos(\pi - \varphi)$$

o bien:

$$c^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 + am_a \cos\varphi.$$

Y sumando

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2\,m_a^2,$$

de donde se saca:

$$m_a^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

y en forma análoga obtendríamos:

$$m_b^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$$

$$m_c^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Para calcular el ángulo φ, tenemos

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} C). \quad 1$$

El punto de encuentro de las tres medianas se llama el *centroide* del triángulo y divide, como se sabe de la geometría elemental, a cada mediana en la relación 2 : 1.

225. Bisectrices. — Hallaremos ahora las expresiones de las *bisectrices interiores* b_a, b_b y b_c y de las *bisectrices exteriores* b_a', b_b' y b_c'. Consideremos el triángulo ABC (fig. 102). El área S del triángulo

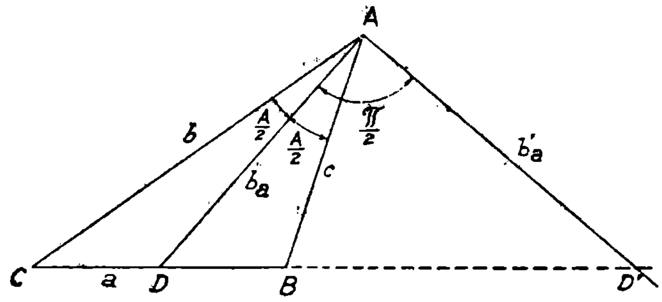


Figura 102

ABC es igual al área ADC, más el área ADB y expresando esas áreas en función de los lados y el ángulo comprendido, se tiene:

$$\frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A = \frac{1}{2} bb_a \operatorname{sen} \frac{A}{2} + \frac{1}{2} cb_a \operatorname{sen} \frac{A}{2}$$

y expresando sen A en función del arco mitad,

$$\cancel{\frac{1}{2}} bc \cancel{2 \operatorname{sen} \frac{A}{2}} \cos \frac{A}{2} = \cancel{\frac{1}{2}} bb_a \cancel{\operatorname{sen} \frac{A}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} cb_a \cancel{\operatorname{sen} \frac{A}{2}}$$

$\frac{1}{2}$ b b + b b_a = 2bc cos A

y simplificando y despejando b_a, se tiene

$$b_a = \frac{2\,bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$

Reemplazando $\cos\frac{A}{2}$ por su valor en función de los lados:

$$b_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{p\,(p-a)\,bc}$$

y en forma análoga

$$b_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{p\,(p-b)\,ac}$$

$$b_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{p\,(p-c)\,ab}.$$

226. Para calcular las bisectrices exteriores, podemos ver por la figura 102 que

$$\text{área } \widehat{ABC} = \text{área } \widehat{ACD'} - \text{área } \widehat{ABD'}$$

y expresando esas superficies en función de los lados y el ángulo comprendido y observando que el ángulo CAD' vale $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}\right)$ y el ángulo BAD' vale $\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)$, tenemos

$$\frac{1}{2}bc\operatorname{sen}A = \frac{1}{2}bb_a'\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}\right) - \frac{1}{2}cb_a'\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)$$

y puesto que

$$\operatorname{sen}A = 2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2},\quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$$

y

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$$

se tiene:

$$\frac{1}{2}bc\,.\,2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{1}{2}bb_a'\cos\frac{A}{2} - \frac{1}{2}cb_a'\cos\frac{A}{2}$$

de donde

$$b'_a = \frac{2bc\operatorname{sen}\frac{A}{2}}{b-c} = \frac{2}{b-c}\sqrt{(p-b)(p-c)\,bc}$$

y en forma análoga:

$$b_b' = \frac{2}{c-a}\sqrt{(p-a)(p-c)ac}$$

y

$$b_c' = \frac{2}{a-b}\sqrt{(p-a)(p-b)ac.}$$

227. ALTURAS. — Sean h_a, h_b y h_c las tres alturas de un triángulo. Se tiene, en primer lugar, expresando el área en función de la base y la altura y también en función de dos lados y el ángulo comprendido que (fig. 103):

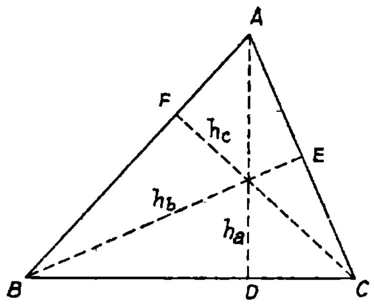


Figura 103

$$S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A. \qquad (1)$$

Y reemplazando b y c por sus valores sacados del teorema del seno:

$$b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}, \quad c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$

se tiene:

$$a h_a = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} \cdot \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \operatorname{sen} A$$

de donde

$$h_a = \frac{a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$

y análogamente

$$h_b = \frac{b \operatorname{sen} C \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$$

y

$$h_c = \frac{c \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}.$$

También podemos poner, sacando de la (1)

$$\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S} \quad \text{y análogamente} \quad \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S} \quad \text{y} \quad \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S}$$

y sumando se tiene:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{p}{S}$$

y resulta entonces que:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}.$$

228. *Variaciones de los lados y los ángulos en el triángulo.* — Para determinar un triángulo, se miden tres elementos, entre los cuales entra por lo menos un lado y luego se calculan los demás.

Es claro que al medir siempre se cometen errores. Queremos investigar la influencia que tienen los errores que se cometen al medir, sobre los elementos que se calculan; es decir, las relaciones que vinculan a los lados y los ángulos de un triángulo con los pequeños incrementos que pueden tomarse en la valuación de lados y ángulos.

Este interesante problema e indispensable en la práctica profesional es estudiado con todo cuidado en los cursos de Análisis. No estará demás, sin embargo, que lo tratemos aquí en forma sucinta y en forma absolutamente elemental.

Supondremos que los incrementos que puedan tomar los lados y los ángulos sean pequeños, en forma que pueden despreciarse sus cuadrados así como sus productos y supondremos también *que expresamos los ángulos en radianes.*

Llamemos, como hemos hecho hasta ahora, a, b, c a los lados y A, B, C a los ángulos, y a los incrementos respectivos los designaremos Δ_a, Δ_b, Δ_c, Δ_A, Δ_B, Δ_C.

Sin perjuicio de tratar elementalmente cada caso por separado, podemos ya establecer algunas relaciones entre los lados, los ángulos y los incrementos de lados y ángulos.

Tenemos, en primer término, que debe verificarse:

$$A+B+C=\pi$$

y también

$$A+\Delta_A+B+\Delta_B+C+\Delta_C=\pi$$

luego

$$\Delta_A+\Delta_B+\Delta_C=0. \tag{1}$$

Del teorema del seno, sacamos

$$c \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} C \tag{2}$$

y también debe tenerse:

$$(c+\Delta_c)\operatorname{sen}(A+\Delta_A)=(a+\Delta_a)\operatorname{sen}(C+\Delta_C).$$

Y efectuando operaciones y desarrollando el seno de la suma de arcos, se tiene:

$$c \operatorname{sen} A \cos \Delta_A + c \operatorname{sen} \Delta_A \cos A + \Delta_C \operatorname{sen} A \cos \Delta_A + \Delta_C \operatorname{sen} \Delta_A \cos A =$$
$$= a \operatorname{sen} C \cos \Delta_C + a \operatorname{sen} \Delta_C \cos C + \Delta_a \operatorname{sen} C \cos \Delta_C + \Delta_a \operatorname{sen} \Delta_C \cos C.$$

Ahora, teniendo en cuenta que se puede poner, por sen Δ_A y Δ_C pequeños

$$\operatorname{sen} \Delta_A = \Delta_A$$
$$\operatorname{sen} \Delta_C = \Delta_C$$

y que

$$\cos \Delta_A = 1 \qquad \cos \Delta_C = 1$$

simplificando y teniendo en cuenta la (2), se tiene:

$$\operatorname{sen} A \,.\, \Delta_c - \operatorname{sen} C \,.\, \Delta_a = a \cos C \,.\, \Delta_C - c \cos A \,.\, \Delta_A$$

y en forma análoga tendríamos:

$$\operatorname{sen} B \,.\, \Delta_a - \operatorname{sen} A \,.\, \Delta_b = b \cos A \,.\, \Delta_A - a \cos B \,.\, \Delta_B.$$
$$\operatorname{sen} C \,.\, \Delta_b - \operatorname{sen} B \,.\, \Delta_c = c \cos B \,.\, \Delta_B - b \cos C \,.\, \Delta_C.$$

Entre este sistema y la relación (1) podríamos eliminar Δ_B y Δ_C y obtendríamos una relación que vincula a los lados a, b, c y sus incrementos Δ_a, Δ_b y Δ_c con los ángulos A, B C y el incremento Δ_A.

Se llega a lo mismo, tomando el teorema del coseno

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

y considerando los incrementos Δ_a, Δ_b, Δ_c y Δ_A, se tiene

$$(a + \Delta_a)^2 = (b + \Delta_b)^2 + (c + \Delta_c)^2 - 2(b + \Delta_b)(c + \Delta_c) \cos (A + \Delta_A)$$

y desarrollando los cuadrados y el coseno de la suma de los arcos, despreciando las potencias y los productos de los incrementos y teniendo en cuenta que se puede poner para incrementos pequeños

$$\operatorname{sen} \Delta_A = \Delta_A \qquad \text{y} \qquad \cos \Delta_A = 1$$

se obtiene

$$a \, \Delta_a = (b - c \cos A) \,.\, \Delta_b + (c - b \cos A) \,.\, \Delta_c + bc \operatorname{sen} A \,.\, \Delta_A.$$

Y teniendo en cuenta el teorema de las proyecciones que da

$$b = a \cos C + c \cos A \qquad \text{y} \qquad c = a \cos B + b \cos A$$

se tiene

$$a\Delta_a = (a \cos C) \,.\, \Delta_b + (a \cos B) \,.\, \Delta_c + (bc \operatorname{sen} A) \, \Delta_A$$

y análogamente

$$b\Delta_b = b\cos A \,.\, \Delta_c + b\cos C \,.\, \Delta_a + ac \operatorname{sen} B \,.\, \Delta_B$$
$$c\Delta_c = c\cos B \,.\, \Delta_a + c\cos A \,.\, \Delta_b + ab \operatorname{sen} C \,.\, \Delta_C.$$

Las relaciones que hemos dado aquí en forma elemental, permiten ya darse una idea de cómo puede obtenerse la influencia de los errores que se cometen al medir algunos elementos del triángulo sobre los elementos que se calculan.

Y siempre en la inteligencia de dar una idea de este problema fundamental en la práctica profesional, daremos algunos casos simples.

229. *Caso I: Supongamos que quedan constantes* A *y* c *y queremos ver qué influencia tiene sobre* a, b *y* B *un error* Δ_C. — Tenemos en primer lugar, puesto que suponemos $\Delta_A = 0$, que debe tenerse, de acuerdo con la relación (1)

$$\Delta_B + \Delta_C = 0$$

de donde

$$\Delta_B = -\Delta_C.$$

Para calcular Δa, podemos poner:

$$a = \frac{c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C}$$

y

$$a + \Delta_a = \frac{c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen}(C + \Delta_C)}$$

o

$$\Delta_a = \frac{c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen}(C + \Delta_C)} - \frac{c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} = \frac{c \,.\, \operatorname{sen} A\,[\operatorname{sen} C - \operatorname{sen}(C + \Delta_C)]}{\operatorname{sen} C \operatorname{sen}(C + \Delta_C)}.$$

Y desarrollando la diferencia de senos, se tiene

$$\Delta_a = -\frac{2c \operatorname{sen} A \cos\left(C + \frac{1}{2}\Delta_C\right) \operatorname{sen}\frac{\Delta_C}{2}}{\operatorname{sen} C \operatorname{sen}(C + \Delta_C)}$$

o también:

$$\frac{\Delta_a}{2} = -\frac{c \operatorname{sen} A \cos\left(C + \frac{1}{2}\Delta_C\right) \operatorname{sen}\frac{\Delta_C}{2}}{\operatorname{sen} C \operatorname{sen}(C + \Delta_C)}.$$

Para calcular Δ_b, podemos poner, de acuerdo con el teorema de las proyecciones:

$$b = a \cos C + c \cos A$$

de donde

$$b - c \cos A = a \cos C$$

y de ésta

$$\cos C = \frac{b - c \cos A}{a}.$$

Y se tiene

$$\operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{sen} C}{\cos C} = \frac{\operatorname{sen} C}{\dfrac{b - c \cos A}{a}} = \frac{a \operatorname{sen} C}{b - c \cos A}$$

de donde se obtiene:

$$b - c \cos A = a \operatorname{sen} C \operatorname{ctg} C$$

y según el teorema del seno:

$$a \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} A$$

$$b - c \cos A = c \operatorname{sen} A \operatorname{ctg} C$$

y tomando ahora los valores incrementados:

$$b + \Delta_b - c \cos A = c \operatorname{sen} A \operatorname{ctg} (C + \Delta_C)$$

luego por diferencia

$$\Delta_b = c \operatorname{sen} A \left[\frac{\cos (C + \Delta_C)}{\operatorname{sen} (C + \Delta_C)} - \frac{\cos C}{\operatorname{sen} C}\right]$$

y finalmente

$$\Delta_b = - \frac{c \operatorname{sen} A \operatorname{sen} \Delta_C}{\operatorname{sen} C \operatorname{sen} (C + \Delta_C)}.$$

Y tomando como primera aproximación:

$$\operatorname{sen} (C + \Delta_C) = \operatorname{sen} C, \quad \cos (C + \Delta_C) = \cos C;$$

$$\operatorname{sen} \frac{\Delta_C}{2} = \frac{\Delta_C}{2}$$

las fórmulas anteriores nos dan:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta_B = -\Delta_C\\
&\frac{\Delta_a}{\Delta_C} = -\frac{\Delta_a}{\Delta_B} = -\frac{c \operatorname{sen} A}{\cos C} = -a \operatorname{ctg} C\\
&\frac{\Delta_b}{\Delta_C} = -\frac{\Delta_b}{\Delta_B} = -\frac{c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen}^2 C} = -\frac{a}{\operatorname{sen} C}\\
&\frac{\Delta_a}{\Delta_b} = \cos C.
\end{aligned}\right\}$$

230. *Caso II: Supongamos constantes a b y c, y queremos ver cómo están vinculados entre sí los incrementos* Δ_A, Δ_B, Δ_C, Δ_α *con los elementos A, B, C y a, b, c.* — Tenemos:

$$c \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} C$$

y considerando los incrementos

$$c \operatorname{sen}(B + \Delta_B) = b \operatorname{sen}(C + \Delta_C)$$

y sumando y restando se tiene:

$$c\,[\operatorname{sen}(B + \Delta_B) + \operatorname{sen} B] = b\,[\operatorname{sen}(C + \Delta_C) + \operatorname{sen} C]$$

$$c\,[\operatorname{sen}(B + \Delta_B) - \operatorname{sen} B] = b\,[\operatorname{sen}(C + \Delta_C) - \operatorname{sen} C].$$

Y desarrollando la suma y diferencia de senos, se tiene:

$$c \operatorname{sen}\left(B + \frac{\Delta_B}{2}\right) \cos\frac{\Delta_B}{2} = b \operatorname{sen}\left(C + \frac{\Delta_C}{2}\right) \cos\frac{\Delta_C}{2} \qquad (1)$$

$$c \operatorname{sen}\frac{\Delta_B}{2} \cos\left(B + \frac{\Delta_B}{2}\right) = b \operatorname{sen}\frac{\Delta_C}{2} \cos\left(C + \frac{\Delta_C}{2}\right). \qquad (2)$$

Y dividiendo entre sí, se saca:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\Delta_B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\Delta_C}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\left(B + \frac{\Delta_B}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(C + \frac{\Delta_C}{2}\right)}.$$

Y en primera aproximación, se puede poner:

$$\frac{\Delta_B}{\Delta_C} = \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C}.$$

Tomando ahora según el teorema de las proyecciones

$$a = b \cos C + c \cos B$$

e incrementando

$$a + \Delta_a = b \cos (C + \Delta_C) + c \cos (B + \Delta_B)$$

de donde

$$\Delta_a = -\ 2b \operatorname{sen}\left(C + \frac{\Delta_C}{2}\right) \operatorname{sen}\frac{\Delta_C}{2} - 2c \operatorname{sen}\left(B + \frac{\Delta_B}{2}\right) \operatorname{sen}\frac{\Delta_B}{2}.$$

Y también teniendo en cuenta las relaciones (1) y (2)

$$\Delta_a = -\ 2c \operatorname{sen}\left(B + \frac{\Delta_B}{2}\right) \cos\frac{\Delta_B}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\Delta_B}{2} + \operatorname{tg}\frac{\Delta_C}{2}\right) \qquad (3)$$

y también:

$$\frac{\frac{1}{2}\Delta_a}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Delta_C} = \frac{-\ a + \frac{\Delta_a}{2}}{\operatorname{ctg}\left(B + \frac{\Delta_B}{2}\right)}$$

y en primera aproximación

$$\frac{\Delta_a}{\Delta_C} = -\ a \operatorname{tg} B$$

y análogamente

$$\frac{\frac{1}{2}\Delta_a}{\operatorname{tg}\frac{\Delta_B}{2}} = -\frac{a + \frac{\Delta_a}{2}}{\operatorname{ctg}\left(C + \frac{\Delta_C}{2}\right)}$$

y en primera aproximación:

$$\frac{\Delta_a}{\Delta_B} = -\ a \operatorname{tg} C.$$

Pongamos ahora:

$$\operatorname{tg}\frac{\Delta_B}{2} + \operatorname{tg}\frac{\Delta_C}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\Delta_B}{\cos\frac{1}{2}\Delta_B} + \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\Delta_C}{\cos\frac{1}{2}\Delta_C} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\Delta_B\cos\frac{1}{2}\Delta_C + \operatorname{sen}\frac{1}{2}\Delta_C\cos\frac{1}{2}\Delta_B}{\cos\frac{1}{2}\Delta_B\cos\frac{1}{2}\Delta_C}$$

es decir

$$\operatorname{tg}\frac{\Delta_B}{2} + \operatorname{tg}\frac{\Delta_C}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\Delta_B + \Delta_C)}{\cos\frac{\Delta_B}{2}\cos\frac{\Delta_C}{2}}.$$

Y puesto que

$$\Delta_A + \Delta_B + \Delta_C = 0$$

se puede poner

$$\operatorname{tg}\frac{\Delta_B}{2} + \operatorname{tg}\frac{\Delta_C}{2} = -\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta_A}{2}}{\cos\frac{\Delta_B}{2}\cos\frac{\Delta_C}{2}}$$

y reemplazando en la (3) se obtiene

$$\frac{\frac{1}{2}\Delta_a}{\operatorname{sen}\frac{\Delta_A}{2}} = \frac{b\operatorname{sen}\left(C + \frac{1}{2}\Delta_C\right)}{\cos\frac{\Delta_B}{2}}.$$

Y aproximadamente

$$\frac{\Delta_a}{\Delta_A} = b\operatorname{sen} C = c\operatorname{sen} B.$$

CAPÍTULO VII

APLICACIONES. CUADRILÁTERO CONVEXO. PROBLEMAS DIVERSOS

231. Sea ABCD un cuadrilátero convexo cualquiera. Llamaremos A, B, C y D a sus ángulos y a, b, c, d sus lados, como indica la figura. Llamaremos $x = AC$ e $y = BD$ a sus diagonales (fig. 104). Los ángulos deben satisfacer la condición de

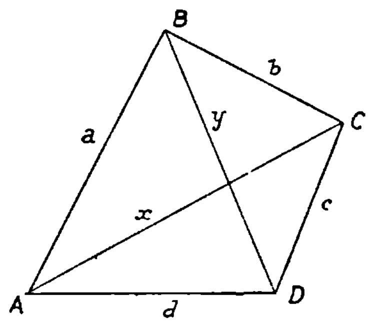


Figura 104

$$A + B + C + D = 360°.$$

De una manera general, podemos decir que un cuadrilátero convexo queda perfectamente determinado cuando se conocen cinco de los ocho elementos fundamentales. Trazando las diagonales, se descompone el cuadrilátero en triángulos y el estudio del cuadrilátero, se lleva así a la resolución de triángulos.

Supongamos que se conocen los cuatro lados a, b, c y d y el ángulo A. Resolviendo el triángulo ABD, del que se conocen dos lados y el ángulo comprendido, se calcula la diagonal y, y los ángulos ABD y ADB. Conociéndose ahora y, en el triángulo BCD, se conocen los tres lados y podemos calcular los tres ángulos BCD, BDC y DBC y luego se tendría

$$B = ABD + DBC$$

$$D = ADB + BDC.$$

Y tendríamos así conocidos los tres elementos incógnitos B, C y D.

En lugar de darse cinco elementos fundamentales, se podrían dar ciertas cantidades o elementos vinculados a la figura. Por ejemplo, los lados a, d, los ángulos A y B y la diagonal x.

Y en lugar de darnos cinco elementos, pueden fijarse ciertas condiciones restrictivas que nos darán igualdades particulares que nos servirán para resolver el cuadrilátero.

Por ejemplo, puede fijarse la condición de que las diagonales se corten bajo un ángulo determinado, un ángulo recto en particular.

O puede fijarse la condición de que la suma de los lados opuestos sea igual

$$a + c = b + d$$

lo que equivale a decir que el cuadrilátero es circunscriptible a una circunferencia.

O podría establecerse que la suma de los ángulos opuestos es igual a 180°.

$$A + C = B + D = 180°$$

lo que equivale a decir que el cuadrilátero es inscriptible en una circunferencia.

En estos casos, en general, cada una de estas condiciones reemplaza a un elemento y se puede así, cuando se fija una condición, resolver un cuadrilátero cuando se dan cuatro elementos, con tal de que éstos sean *independientes.*

Por ejemplo, el cuadrilátero inscriptible queda perfectamente determinado cuando se conocen los cuatro lados. Y como una aplicación de los conocimientos de trigonometría vamos a resolverlo.

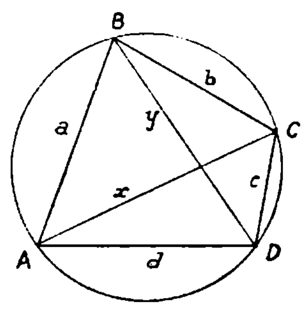


Figura 105

232. *Problema: Resolver un cuadrilátero inscriptible, conociendo sus cuatro lados* (fig. 105).— Si es inscriptible, se ve por la figura que

$$A + C = 180°, \quad B + D = 180°.$$

Considerando los triángulos ABD y BCD, tenemos:

$$y^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A \tag{1}$$

$$y^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C. \tag{2}$$

Y puesto que

$$\cos C = - \cos A$$

se tiene

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 + 2bc \cos A.$$

Y despejando

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}.$$

Ya esta fórmula nos permite calcular A en base a los datos del problema. Tiene el inconveniente de no ser calculable por logaritmos. Vamos a transformarla, de modo de poder calcular A usando logaritmos.

Tenemos para ello:

$$2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A = 1 + \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} =$$

$$= \frac{2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)},$$

$$2\operatorname{sen}^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A = 1 - \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} =$$

$$= \frac{2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2}{2(ad + bc)}.$$

Llamando $2p$ al perímetro del cuadrilátero, tenemos:

$$\begin{aligned} 2p &= a + b + c + d \\ 2(p-a) &= b + c + d - a \\ 2(p-b) &= a + c + d - b \\ 2(p-c) &= a + b + d - c \\ 2(p-d) &= a + b + c - d. \end{aligned}$$

Y reemplazando se tiene:

$$2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{(a + b + d - c)(a + d + c - b)}{2(ad + bc)} = \frac{2(p-b)(p-c)}{ad + bc},$$

$$2\operatorname{sen}^2\frac{A}{2} = \frac{(a + b + c - d)(b + c + d - a)}{2(ad + bc)} = \frac{2(p-a)(p-d)}{ad + bc},$$

lo que nos da

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{ad + bc}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{ad + bc}}.$$

Y de éstas se deduce

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}},$$

y en seguida obtendríamos

$$C = 180^\circ - A.$$

Para encontrar B tendríamos, procediendo en forma análoga que con A y considerando la diagonal x, que

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}},$$

y luego

$$D = 180^\circ - B.$$

Para calcular el área S del cuadrilátero, tendríamos:

$$S = \frac{1}{2}ad \operatorname{sen} A + \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} C = \frac{ad+bc}{2} \operatorname{sen} A.$$

y puesto que

$$\operatorname{sen} A = 2 \operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

se tiene:

$$S = \frac{ad+bc}{2} \cdot 2 \operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Discusión. — Para que los valores de $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ y $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ existan, es necesario que la cantidad sub-radical sea mayor que cero, o lo que es lo mismo, que el producto $(p-a)$ $(p-b)$ $(p-c)$ $(p-d)$ sea positivo, o bien que se tenga

$$(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d) > 0.$$

Si suponemos que a sea el mayor de los lados del cuadrilátero, es evidente que los factores

$$(a+c+d-b), \quad (a+b+d-c) \quad \text{y} \quad (a+b+c-d)$$

serán positivos, luego se necesita que sea

$$b + c + d - a > 0$$

o

$$a < b + c + d.$$

Para que el problema sea posible es necesario y suficiente que el mayor de los lados sea menor que la suma de los otros tres.

233. *Cálculo de las diagonales.* — Habíamos hallado

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}.$$

Y por lo tanto se tiene:

$$y^2 = a^2 + d^2 - ad\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc} = \frac{(a^2 + d^2)\,bc + (b^2 + c^2)\,ad}{ad + bc}$$

de donde se obtiene fácilmente

$$y = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}}.$$

Y en forma análoga obtendríamos

$$x = \sqrt{\frac{(bc + ad)(ac + bd)}{ab + cd}}.$$

Multiplicando las dos últimas igualdades, se tiene

$$xy = ac + bd.$$

Que dice que el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos, en el cuadrilátero inscriptible (Teorema de Ptolomeo).

Dividiendo las mismas igualdades, se obtiene

$$\frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$$

que dice que en un cuadrilátero inscriptible, la relación de las diagonales es igual a la relación de la suma de los productos de los lados que llegan a las extremidades de esas diagonales.

234. *Radio del círculo circunscripto.* — Llamando R al radio del círculo circunscripto, se tiene (nº 193):

$$R = \frac{y}{2 \operatorname{sen} A} = \frac{y}{4 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}$$

y reemplazando en función de los lados se tiene

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S}.$$

235. *Problema: Resolver un cuadrilátero convexo, conociendo tres lados y los dos ángulos que ellos forman.* — Sea el cuadrilátero ABCD (fig. 106), donde conocemos a, b, c y los ángulos B y C. Debemos calcular el lado d y los ángulos A y D.

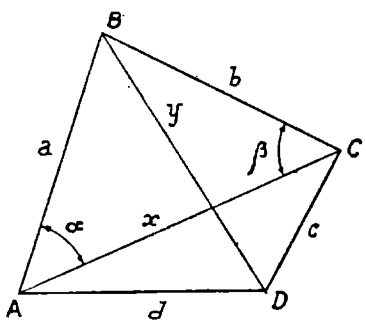


Figura 106

Consideremos la diagonal AC $= x$ y llamemos α y β a los ángulos que ella forma con los lados a y b, tendremos

$$\alpha = \widehat{BAC} \qquad \beta = \widehat{BCA}.$$

Podemos en primer término resolver el triángulo ABC del que se conocen dos lados a y b y el ángulo comprendido B, y así calcular x, α y β. Luego, en el triángulo ACD, conocemos el lado c por ser dato del problema, el lado AC$=x$ recién calculado y el ángulo ACD$=$C$-\beta$. Conocemos entonces también dos lados y el ángulo comprendido.

Resolviendo el triángulo ACD, calculamos el lado $d =$ AD, el ángulo D y el ángulo CAD que sumado con α nos da el ángulo A. El problema admite una sola solución.

Si se conociesen los tres lados a, b, c y los ángulos B y D, se resuelve primero el triángulo ABC, del que se conocen los lados a y b y el ángulo comprendido B. Se tiene así una sola solución para el triángulo ABC, que nos permite calcular la diagonal AC $= x$ y los ángulos BAC $= \alpha$ y BCA $= \beta$.

Calculada la diagonal AC, en el triángulo ACD, conocemos dos lados x y c y el ángulo D opuesto al lado x, estamos en el caso del nº 213. El problema puede no tener solución, o tener una o dos, como se estudió en el nº 213. Es claro que resuelto el triángulo ACD, y calculado el lado AD $= d$ y los ángulos ACD y CAD, se obtienen los ángulos A y C del cuadrilátero.

Cuadrilátero circunscripto. — Llamando a, b, c y d a los lados y α, β, γ, δ a los ángulos, se tiene:

$$a + c = b + d.$$

236. *Dados tres lados a, b y c y un ángulo α, determinar el otro lado, los ángulos, el área S y el radio del círculo inscripto r.* — Se tiene

$$d = a + c - b$$

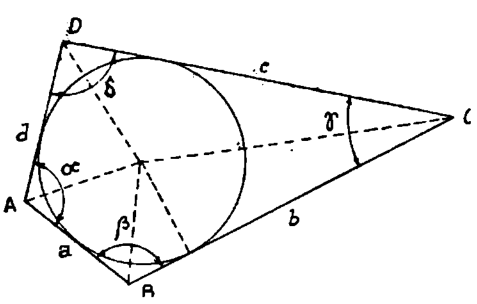


Figura 107

y también

$$a = r\,\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}$$

$$c = r\,\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}}$$

de donde

$$\frac{a}{c} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}$$

y análogamente

$$\frac{b}{d} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}}$$

de donde

$$ad\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = bc\operatorname{sen}^2\frac{\gamma}{2}$$

$$cd\operatorname{sen}^2\frac{\delta}{2} = ab\operatorname{sen}^2\frac{\beta}{2}.$$

La primera permite calcular γ y la segunda nos da

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}} \quad \text{y puesto que es} \quad \frac{}{2} + \frac{\delta}{2} = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)$$

se puede calcular β y δ.

Para calcular la superficie S, se tiene

$$S = \frac{1}{2}\, ad \operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{2}\, bc \operatorname{sen}\gamma = ad \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + bc \operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

o bien

$$S = \sqrt{abcd}\operatorname{sen}\frac{\alpha+\gamma}{2} = \sqrt{abcd}\operatorname{sen}\frac{\beta+\delta}{2}.$$

Para calcular el radio r, se tiene

$$r = \frac{a \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)} = \frac{c \operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}}{\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}\right)}$$

o también se tiene fácilmente

$$r = \frac{S}{a+c} = \frac{S}{b+d}.$$

237. *Problema: Resolver un triángulo dados dos ángulos* A *y* B *y el perímetro* $2p$. — Se tiene en primer término

$$C = 180^\circ - (A + B)$$

y de las fórmulas del nº 202 sacamos:

$$a = \frac{p \operatorname{sen}\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}, \quad b = \frac{p \operatorname{sen}\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}, \quad c = \frac{p \operatorname{sen}\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}},$$

y para calcular la superficie tenemos (nº 208)

$$S = p^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

El problema, suponiendo desde luego que $2p$, A y B sean positivos y que $A + B < 180°$, es siempre posible y admite una sola solución.

238. *Problema : Resolver un triángulo dados dos ángulos* A *y* B *y el radio del círculo circunscripto.* — Se tiene:

$$C = 180° - (A + B)$$

y por el teorema del seno

$$a = 2R \operatorname{sen} A, \qquad b = 2R \operatorname{sen} B, \qquad c = 2R \operatorname{sen} C,$$

y el área S sería

$$S = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A = 2R^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C.$$

239. *Problema Resolver un triángulo, dados dos ángulos* A *y* B *y el radio del círculo inscripto* r. — Por las fórmulas del nº 217 se tiene:

$$p - a = r \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$$

$$p - b = r \operatorname{ctg} \frac{B}{2}$$

$$p - c = r \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$$

y siendo

$$a = 2p - b - c = (p-b) + (p-c)$$

se tiene

$$a = r\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right) = \frac{r \operatorname{sen} \frac{B+C}{2}}{\operatorname{sen}\frac{B}{2} \operatorname{sen}\frac{C}{2}} = \frac{r \cos \frac{A}{2}}{\operatorname{sen}\frac{B}{2} \operatorname{sen}\frac{C}{2}}$$

y en forma análoga

$$b = \frac{r \cos \frac{B}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2}}$$

$$c = \frac{r \cos \frac{C}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2}}$$

y resulta el área S:

$$S = \frac{1}{2}\, bc \operatorname{sen} A = bc \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = r^2 \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

240. *Problema: Resolver un triángulo conociendo un lado a, un ángulo adyacente* B *y la suma de los otros dos lados* $(b + c) = m$. — Se tiene

$$a \cos \frac{B-C}{2} = (b + c) \operatorname{sen} \frac{A}{2} = m \cos \frac{B+C}{2}$$

de donde

$$\frac{m}{a} = \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{B+C}{2}} = \frac{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2}}$$

y resulta

$$\frac{m+a}{m-a} = \frac{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2}} \qquad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{m-a}{m+a} \operatorname{ctg} \frac{B}{2}.$$

Conocido C se calcula $A = 180° - (B + C)$ y también

$$b - c = a \frac{\operatorname{sen} \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

y teniendo $b + c = m$ se obtiene b y c.

Se puede resolver el problema también en la siguiente forma:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},\qquad \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Luego

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{p-a}{p}.$$

Pero

$$p=\frac{a+m}{2}\quad \text{y}\quad p-a=\frac{m-a}{2}$$

vale decir

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{m-a}{m+a}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$$

como en la solución que antecede.

241. *Problema: Resolver un triángulo conociendo un lado a, el ángulo opuesto A y la suma $m=(b+c)$ de los otros dos lados.* — Según el nº 196 de Delambre, se tiene:

$$a=\frac{(b+c)\operatorname{sen}\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}$$

que nos da

$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{b+c}{a}\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\frac{m}{a}\operatorname{sen}\frac{A}{2}$$

lo que nos permite calcular el ángulo $(B-C)$, y puesto que B y C deben ser cada uno menor que 180°, encontramos para $\frac{B-C}{2}$ un sólo valor menor que 90°. Por otra parte

$$\frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}$$

y podemos calcular B y C.

Tenemos también, por nº 196

$$b-c=\frac{a\operatorname{sen}\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

que nos permite calcular $(b - c)$ y como se conoce $(b + c) = m$, fácilmente se obtiene b y c.

Para que se pueda obtener un valor para $\frac{B-C}{2}$, es necesario y suficiente que

$$\frac{m \operatorname{sen} \frac{A}{2}}{a} \leq 1.$$

242. *Problema: Resolver un triángulo conociendo un lado a, la altura correspondiente a ese lado h_a y la suma $(b + c) = m$ de los otros dos lados.* — En primer lugar, obtenemos el perímetro

$$2p = a + b + c = a + m \qquad 2(p-a) = m - a.$$

Luego el radio del círculo inscripto r

$$rp = \frac{ah_a}{2} \qquad r = \frac{ah_a}{a+m}$$

y según nº 217

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a} = \frac{2ah_a}{(m+a)(m-a)}.$$

Conociendo $\frac{A}{2}$ caemos en el problema anterior y tendremos

$$\frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$$

$$\cos \frac{B-C}{2} = \frac{m \operatorname{sen} \frac{A}{2}}{a}$$

$$b + c = m$$

$$b - c = \frac{a \operatorname{sen} \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{2ah_am}{(m+a)(m-a)} \operatorname{tg} \frac{B-C}{2}.$$

243. *Problema: Resolver un triángulo, dado un lado a, el ángulo opuesto A y la altura correspondiente a ese lado h_a.* — Sea H el pie de h_a, y se tiene:

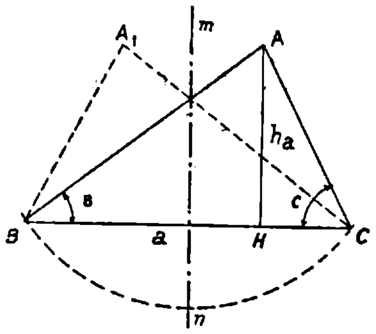


Figura 108

$$\operatorname{tg} B = \frac{h_a}{BH}, \qquad \operatorname{tg} C = \frac{h_a}{CH}$$

de donde

$$a = BH + CH = h_a\left(\frac{1}{\operatorname{tg} B} + \frac{1}{\operatorname{tg} C}\right) = h_a\,(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C)$$

o bien

$$a = h_a\left(\frac{\cos B}{\operatorname{sen} B} + \frac{\cos C}{\operatorname{sen} C}\right) = \frac{h_a \operatorname{sen}(B+C)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}.$$

Y también, puesto que,

$$B + C = 180° - A, \tag{1}$$

$$a = \frac{2h_a \operatorname{sen} A}{\cos(B-C) + \cos A},$$

de donde

$$\cos(B-C) = \frac{2h_a \operatorname{sen} A}{a} - \cos A. \tag{2}$$

Esta fórmula nos permite calcular (B − C) y junto con la (1) nos dan B y C.

Se puede dar a (2) una forma calculable por logaritmos, introduciendo un ángulo auxiliar φ de cálculo. Si hacemos

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{2h_a} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi}$$

se tiene:

$$\cos(B-C) = \frac{\cos \varphi \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} \varphi} - \cos A = \frac{\operatorname{sen}(A-\varphi)}{\operatorname{sen} \varphi}.$$

Calculados los ángulos, se obtienen los lados por el teorema del seno, o por las relaciones:

$$b = \frac{h_a}{\operatorname{sen} C}, \qquad c = \frac{h_a}{\operatorname{sen} B}$$

La fórmula (2) nos da en general dos valores para $(B-C)$. Si uno es ψ el otro $-\psi$. Y en correspondencia con esos dos valores de $(B-C)$ se tiene:

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{\psi}{2} & \dfrac{B-C}{2}=-\dfrac{\psi}{2} \\[2ex]
\dfrac{B+C}{2}=90^\circ-\dfrac{A}{2} & \dfrac{B+C}{2}=90^\circ-\dfrac{A}{2} \\[1ex]
\hline
B=90^\circ+\dfrac{\psi}{2}-\dfrac{A}{2} & B=90^\circ-\dfrac{\psi}{2}-\dfrac{A}{2} \\[2ex]
C=90^\circ-\dfrac{\psi}{2}-\dfrac{A}{2} & C=90^\circ+\dfrac{\psi}{2}-\dfrac{A}{2}.
\end{array}
$$

Y las dos soluciones corresponden a los triángulos ABC y A_1BC, simétrico con respecto a la mediatriz de BC.

Para que el problema sea posible, es necesario que el valor de $\cos(B-C)$ dado por la relación (2) esté comprendido entre -1 y $+1$, es decir que debe ser :

$$-1 \leq \frac{2h_a}{a}\operatorname{sen} A-\cos A \leq +1$$

o bien

$$\frac{h_a \operatorname{sen} A}{a} \geq \frac{\cos A-1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{h_a \operatorname{sen} A}{a} \leq \frac{1+\cos A}{2}.$$

Y puesto que

$$\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2} \quad \text{y} \quad \cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}$$

se tiene:

$$\frac{h_a \operatorname{sen} A}{a} \geq -\operatorname{sen}^2\frac{A}{2} \quad \text{y también} \quad \frac{h_a \operatorname{sen} A}{a} \leq \cos^2 A.$$

Y desarrollando sen A en función de $\dfrac{A}{2}$

$$\frac{2h_a}{a}\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} \geq -\operatorname{sen}^2\frac{A}{2} \quad \text{y} \quad \frac{2h_a}{a}\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} \leq \cos^2\frac{A}{2}.$$

Y dividiendo por $\cos^2\dfrac{A}{2}$ se tiene:

$$h_a \leq \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$$

que es la condición de posibilidad del problema, por ser h_a positivo.

244. Geométricamente se resolvería el problema en la siguiente forma: Se toma BC $= a$ y sobre él se traza el segmento capaz del ángulo A. Se traza una paralela q a la distancia h_a de BC y los puntos A y A_1 en que esa paralela corta al círculo nos dan, unidos respectivamente con B y C, las dos soluciones del problema.

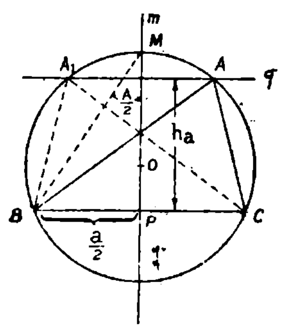


Figura 109

Trazando la mediatriz de BC que corta al segmento capaz en M, para que la paralela q corte al arco es necesario que h_a sea menor o igual que MP. Pero del triángulo BMP sacamos:

$$MP = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$$

luego para que el problema tenga solución, es necesario que

$$h_a \leq \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$$

que es lo mismo que habíamos encontrado.

Se puede todavía dar otra solución del problema.

Tenemos

$$2S = bc \operatorname{sen} A = ah_a,$$

de donde

$$bc = \frac{ah_a}{\operatorname{sen} A} = \frac{ah_a}{2 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}, \tag{1}$$

y también

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = (b + c)^2 - 2bc(1 + \cos A)$$

de donde

$$(b + c)^2 = a^2 + 4bc \cos^2 \frac{A}{2}$$

y análogamente

$$(b - c)^2 = a^2 - 4bc \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2}$$

lo que nos da, según (1)

$$b + c = \sqrt{a^2 + 4bc \cos^2 \frac{A}{2}} = a\sqrt{1 + \frac{2h_a}{a} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}},$$

$$b - c = \sqrt{a^2 - 4bc \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2}} = a\sqrt{1 - \frac{2h_a}{a} \operatorname{tg} \frac{A}{2}}.$$

Introduciendo ángulos auxiliares de cálculo, tales que:

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{2h_a}{a} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}}, \qquad \operatorname{sen} \psi = \sqrt{\frac{2h_a}{a} \operatorname{tg} \frac{A}{2}} \tag{2}$$

obtenemos

$$b + c = \frac{a}{\cos \varphi}, \qquad b - c = a \cos \psi.$$

Lo que nos da *b y c.*

La fórmula (2) exige

$$a \geq 2h_a \operatorname{tg} \frac{A}{2} \quad \text{o} \quad h_a \leq \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}.$$

245. *Problema: Resolver un triángulo conociendo un ángulo* A, *la altura h_a y la mediana m_a correspondientes a ese lado.* — Sea el triángulo ABC y AD la mediana m_a, AH la altura h_a (fig. 110).

Llamemos $d =$ HD.

Tenemos:

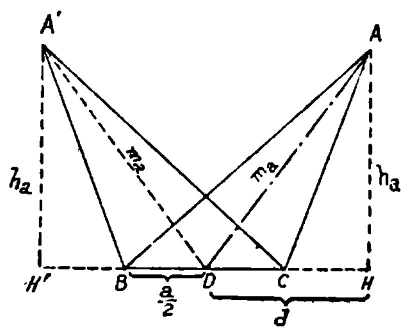


Figura 110

$$\operatorname{tg} B = \frac{h_a}{\frac{a}{2} + d} = \frac{2h_a}{a + 2d},$$

$$\operatorname{tg} (\pi - C) = \frac{h_a}{d - \frac{a}{2}} = \frac{2h_a}{2d - a},$$

o bien

$$\operatorname{tg} C = -\frac{2h_a}{2d - a},$$

$$\operatorname{tg} (B + C) = \frac{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{1 - \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C} = \frac{\frac{2h_a}{2d + a} - \frac{2h_a}{2d - a}}{1 + \frac{4h_a^2}{(2d - a)(2d + a)}},$$

o también

$$\operatorname{tg}(B + C) = \frac{2h_a (2d - a) - 2h_a (2d + a)}{4d^2 - a^2 + 4h_a^2} =$$

$$= -\frac{2h_a \cdot 2a}{4d^2 - a^2 + 4h_a^2} = -\frac{4h_a a}{4d^2 - a^2 + 4h_a^2}.$$

Pero se tiene también

$$m_a^2 = d^2 + h_a^2.$$

Luego

$$\operatorname{tg}(\mathrm{B} + \mathrm{C}) = -\frac{4\,a\,h_a}{4m_a^2 - a^2} = -\operatorname{tg}\mathrm{A}.$$

Es decir que se tiene:

$$a^2 \operatorname{tg}\mathrm{A} + 4\,a\,h_a - 4\,m_a^2 \operatorname{tg}\mathrm{A} = 0.$$

Resolviendo la ecuación de 2° grado, se tiene

$$a = \frac{-2\,h_a \pm 2\sqrt{h_a^2 + m_a^2 \operatorname{tg}^2\mathrm{A}}}{\operatorname{tg}\mathrm{A}}. \qquad (1)$$

Y es claro que calculado a y d por la relación

$$d = \pm\sqrt{m_a^2 - h_a^2}$$

se puede calcular B y C.

El problema admite dos soluciones, siempre que el valor obtenido para a por la relación (1) sea positivo. Son los triángulos BAC y BA'C.

246. *Problema: Resolver un triángulo, dados dos lados b y c y la bisectriz b_a del ángulo comprendido.* — La bisectriz interior b_a, tiene por expresión (n° 225)

$$b_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\mathrm{A}}{2}$$

de donde

$$\cos\frac{\mathrm{A}}{2} = \frac{b_a(b+c)}{2bc}. \qquad (1)$$

El problema será siempre posible si

$$\frac{b_a(b+c)}{2bc} \leq 1 \qquad \text{o bien si} \qquad b_a \leq \frac{2bc}{b+c}.$$

Cumplida esa condición, encontramos un solo valor aceptable para $\frac{\mathrm{A}}{2}$, menor que 90° dado por la (1) y por lo tanto un solo valor para A.

Conocido A, el problema se reduce a resolver un triángulo dados dos lados b y c y el ángulo comprendido A, problema ya conocido.

Se puede resolver geométricamente el problema en la siguiente forma:

Se toma un segmento AD igual a b_a. En el punto A llevemos una perpendicular AN a AD y trazamos una recta DN, cualquiera sea el punto N.

Sobre ella determinamos los puntos B_1 y C_1 de modo que NDB_1C_1 formen un conjunto harmónico, cuya relación sea $\frac{b}{c}$. Tendremos $\frac{DC_1}{DB_1} = \frac{b}{c}$. Tomemos sobre AB_1 el segmento $AB = c$ y sobre AC_1 el segmento $AC = b$.

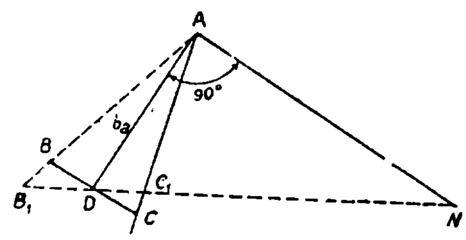


Figura 111

247. *Problema: Resolver un triángulo dado un lado a, el ángulo opuesto A y la suma de los cuadrados de los otros lados* $b^2 + c^2 = m^2$. Tenemos

$$(b + c)^2 = m^2 + 2bc,$$
$$(b - c)^2 = m^2 - 2bc.$$

Pero de

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = m^2 - 2bc \cos A,$$

sacamos

$$2bc = \frac{m^2 - a^2}{\cos A},$$

luego

$$(b + c)^2 = m^2 + \frac{m^2 - a^2}{\cos A},$$
$$(b - c)^2 = m^2 - \frac{m^2 - a^2}{\cos A}.$$

Lo que nos permite calcular $(b + c)$ y $(b - c)$ y por lo tanto b y c, y luego por el teorema del seno se calcula B y C.

Para hacer calculable por logaritmos á $(b + c)$ y $(b - c)$, podemos poner:

$$x^2 = \frac{m^2 - a^2}{\cos A} = \frac{(m + a)(m - a)}{\cos A}.$$

Y haciendo ahora

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{m} \quad \text{resulta} \quad b + c = \frac{m}{\cos \varphi}$$

y

$$\operatorname{sen}\varphi_1 = \frac{x}{m} \quad \text{resulta} \quad b - c = m\cos\varphi_1$$

con lo que $(b + c)$ y $(b - c)$ son calculables por logaritmos.

Tengamos por ejemplo : $a = 5$ m, $A = 60°$, $m^2 = b^2 + c^2 = 45$ m^2 $\sqrt{45}$ m^2 = 6.7082 m, $m = \sqrt{45}$ m = 6.7082 m.

$A = 60°$	$m + a = 1.068490$
$m = 6.7082$ m	$m - a = 0.232539$
$a = 5$m	
	1.301029
$m + a = 11.7082$	$\cos A = 9.698970$
$m - a = 1.7082$	
	$x^2 = 1.602059$
$\varphi = 43°18'50''$	$x = 0.801029$
$\varphi_1 = 70°31'43''$	$m = 0.826606$
$b + c = 9.2195$	$\operatorname{tg}\varphi = 9.974423$
$b - c = 2.2361$	$\operatorname{sen}\varphi_1 = 9.974423$
$b = 5.7278$ m	$\cos\varphi = 9.861897$
$c = 3.4917$ m	$\cos\varphi_1 = 9.522882$
	$b + c = 0.964709$
	$b - c = 0.349488$

Donde se han colocado a la izquierda los valores y a la derecha los logaritmos.

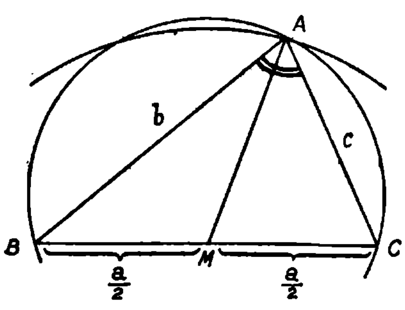


Figura 112

Se puede dar otra solución del problema. En efecto, tomando la figura 112 se tiene:

$$B + C = 180° - A.$$

Y partiendo del teorema del seno

$$\operatorname{sen}^2 B = \frac{b^2 \operatorname{sen}^2 A}{a^2}, \qquad \operatorname{sen}^2 C = \frac{c^2 \operatorname{sen}^2 A}{a^2}.$$

Luego

$$\operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C = \frac{m^2}{a^2} \operatorname{sen}^2 A.$$

Y puesto que

$$\operatorname{sen}^2 B = \frac{1 - \cos 2B}{2}, \qquad \operatorname{sen}^2 C = \frac{1 - \cos 2C}{2}.$$

resulta

$$1 - \frac{1}{2}(\cos 2B + \cos 2C) = \frac{m^2}{a^2} \operatorname{sen}^2 A$$

de donde

$$\cos A \cos (B - C) = \frac{m^2}{a^2} \operatorname{sen}^2 A - 1$$

o bien

$$\cos (B - C) = \frac{m^2 \operatorname{sen}^2 A - a^2}{a^2 \cos A}.$$

Calculados (B + C) y (B − C), se obtienen B y C.

Observando la figura, se ve fácilmente que el vértice A está sobre el segmento capaz del ángulo A trazado sobre a y además como el lugar geométrico de los puntos cuya suma de cuadrados de distancias a dos puntos fijos B y C es un círculo de centro en el punto M medio de BC y de radio MA tal que

$$\overline{MA}^2 = \frac{m^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

y de ahí la resolución geométrica. En nuestro ejemplo tenemos

$$B + C = 180° - 60° = 120°$$

$$\cos (B - C) = \frac{45 \times \frac{3}{4} - 25}{25 \times \frac{1}{2}} = \frac{8.75}{12.50} = 0.7000$$

$$B + C = 120° \qquad \frac{B + C}{2} = 60°00'00''$$

$$B - C = 45°34'23'' \qquad \frac{B - C}{2} = 22°47'11''$$

$$B = 82°47'11''$$

$$C = 37°12'49''$$

Calculando ahora b y c, por el teorema del seno, se encuentra

$$b = 5.728 \text{ m} \qquad c = 3.492 \text{ m}.$$

248. *Problema: Resolver un triángulo dado un ángulo* A, *el lado opuesto* a *y la diferencia de los cuadrados de los otros dos lados* $b^2 - c^2 = n^2$. — Tomando las relaciones

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}},$$

$$\frac{b-c}{a} = \frac{\operatorname{sen}\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}},$$

multiplicándolas y recordando que $\operatorname{sen} A = 2 \operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$, se tiene

$$\frac{\operatorname{sen}(B-C)}{\operatorname{sen} A} = \frac{b^2-c^2}{a^2} = \frac{n^2}{a^2}$$

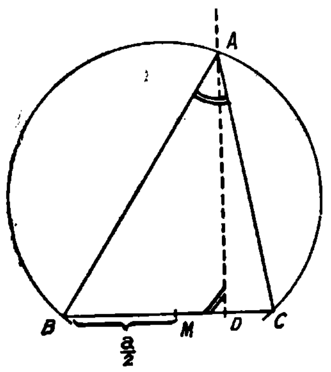


Figura 113

lo que nos permite calcular (B — C) y como por otra parte (B + C) = 180° — A, se obtiene B y C. Ahora resulta fácil calcular b y c, por el teorema del seno.

Se puede resolver el problema geométricamente. En efecto (fig. 113) el vértice A está sobre el segmento capaz del ángulo A trazado sobre a y como el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de cuadrados de distancias a dos puntos fijos B y C es constante, es una recta normal a BC y pasa por un punto D, situado a una distancia MD del punto M medio de BC, tal que

$$2BC \,.\, MD = n^2,$$

o

$$MD = \frac{n^2}{2BC}.$$

La intersección de esta recta con el segmento capaz, nos da el vértice A del triángulo.

249. *Problema : Resolver un triángulo, conociendo el ángulo* A *y las bisectrices interior y exterior del ángulo* A, *que designamos con b_a y b'_a.* — Las expresiones de las bisectrices son n^{os} 225 y 226

$$b_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2},$$

$$b'_a = \frac{2bc}{b-c} \operatorname{sen} \frac{A}{2}.$$

Se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas b y c y es claro que se pueden así calcular b y c.

Podemos, sin embargo, seguir otro camino. Dividiendo esas expresiones entre sí, se tiene

$$\frac{b_a}{b'_a} = \frac{b-c}{b+c} \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \qquad \frac{b_a}{b'_a} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{sen} B - \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C}$$

o bien

$$\frac{b_a}{b'_a} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{B-C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B+C}{2}},$$

y puesto que

$$\frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2},$$

resulta

$$\operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{b_a}{b'_a}. \qquad (1)$$

Calculado $\frac{B-C}{2}$, desde que se conoce $\frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$, se obtiene B y C y luego, para calcular los lados, se tiene en la figura 114, que en el triángulo ADC se conoce el lado AD $= b_a$, el ángulo CAD $= \frac{A}{2}$, y el ángulo C; luego se puede calcular b y en forma análoga c, tomando el triángulo ADB.

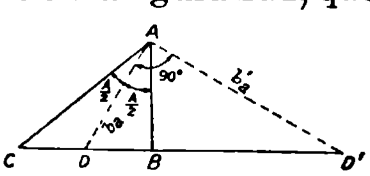


Figura 114

Se puede resolver el problema geométricamente en la siguiente forma (fig. 114) :

Se traza el ángulo A, la bisectriz AD y la normal a ésta AD'. Sobre AD y AD' se llevan respectivamente las longitudes AD $= b_a$ y AD' $= b_a'$. La recta DD' determina sobre los lados del ángulo A los vértices B y C del triángulo.

Y la figura nos da ahora

$$\mathrm{tg}\, D' = \frac{b_a}{b'_a}.$$

Pero

$$D' = \frac{B+C}{2} - C = \frac{B-C}{2},$$

luego

$$\mathrm{tg}\, \frac{B-C}{2} = \frac{b_a}{b'_a},$$

que es la relación (1).

250. *Problema : Resolver un triángulo conociendo el lado* a, *la suma* $b + c = l$ *y el radio* r_a *del círculo ex-inscripto en el ángulo* A. — Se tiene, siendo $2p$ el perímetro (nº 219)

$$\mathrm{tg}\, \frac{A}{2} = \frac{r_a}{p} = \frac{2r_a}{a+l}. \tag{1}$$

Y también, nº 196

$$\cos \frac{B-C}{2} = \frac{b+c}{a} \,\mathrm{sen}\, \frac{A}{2} = \frac{l}{a} \,\mathrm{sen}\, \frac{A}{2}. \tag{2}$$

La primera nos permite calcular $\frac{B+C}{2} = 90° - \frac{A}{2}$ y la segunda $\frac{B-C}{2}$, luego se obtiene B y C, y por el teorema del seno se calcula b y c.

Suponiendo $B > C$ y llamando φ al menor ángulo que satisface la relación (2), se tiene :

$$B = 90° - \frac{A}{2} + \varphi, \qquad C = 90° - \frac{A}{2} - \varphi.$$

Para que el ángulo φ exista, debe tenerse

$$\frac{l}{a} \,\mathrm{sen}\, \frac{A}{2} \leq 1$$

y C es positivo, si

$$90° - \frac{A}{2} > \varphi$$

o bien si

$$\cos\varphi > \operatorname{sen}\frac{A}{2}.$$

Se puede resolver geométricamente el triángulo, para lo cual basta observar la figura 115. Se tiene

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r_a}{AP} \qquad AP = \frac{r_a}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}$$

luego, según (1)

$$AP = p = \frac{a+l}{2},$$

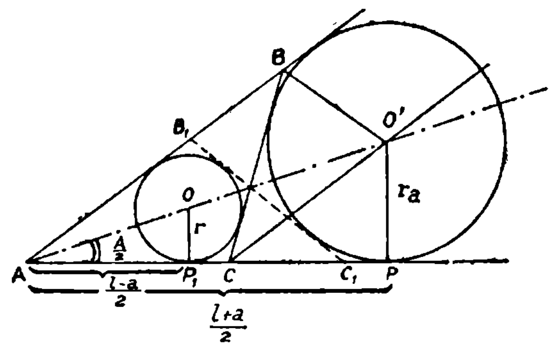


Figura 115

es decir que tomando $AP = \frac{a+l}{2}$, se puede trazar el círculo ex-inscripto al ángulo A. Se toma

$$AP_1 = \frac{l-a}{2}, \quad \text{puesto que (217)} \quad \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{2r}{l-a}$$

y llevando la normal en P_1 hasta encontrar a AO′, se tiene el centro O del círculo inscripto de radio $r = P_1O$. Luego se puede trazar la tangente común interior a los círculos O y O_1. Puesto que el ángulo A es el doble de O_1AP se tiene así el triángulo ABC buscado, o también AB_1C_1.

251. *Problema: Resolver un triángulo conociendo la superficie* S, *el ángulo* A *y la suma* $b + c - a = l$. — Se tiene, según n^os^ (193) y (205)

$$S = 2R^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C = 16\,R^2 \operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2},$$

y según nº 216:

$$\frac{l}{2} = \frac{b+c-a}{2} = p - a = 4R\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}.$$

Luego

$$\frac{l^2}{S} = \frac{64\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}{16\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\operatorname{sen}\frac{A}{2}}$$

de donde

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{l^2}{4S}\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

y por otra parte

$$\frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}.$$

Se tiene así el problema de calcular dos ángulos $\frac{B}{2}$ y $\frac{C}{2}$ cuya suma se conoce y cuyo producto de tangentes también se conoce (nº 142) y conocidos B y C ya es fácil resolver el triángulo.

252. *Problema : Resolver un triángulo conociendo un lado a, la bisectriz del ángulo opuesto b_a y el ángulo α que esa bisectriz forma con el lado dado.* — Se saca de la figura

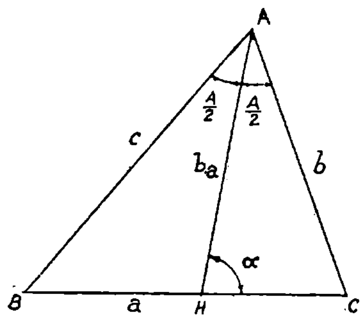


Figura 116

$$B = \alpha - \frac{A}{2} \quad \text{y} \quad C = 180^\circ - \alpha - \frac{A}{2}.$$

Y por lo tanto, de la misma figura

$$\frac{BH}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}} = \frac{b_a}{\operatorname{sen} B}, \qquad \frac{HC}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}} = \frac{b_a}{\operatorname{sen} C}.$$

Y como

$$a = BH + HC$$

tenemos :

$$b_a \operatorname{sen}\frac{A}{2}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{A}{2}\right)} + \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{A}{2}\right)}\right] = a$$

de donde

$$b_a \operatorname{sen}\frac{A}{2}\left[\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{A}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{A}{2}\right)\right] = a \operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{A}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{A}{2}\right)$$

o bien

$$2b_a \operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\frac{A}{2} = a \operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{A}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{A}{2}\right)$$

o también

$$2b_a \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \frac{A}{2} = a \left(\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}\right)$$

con lo que tenemos la ecuación de 2° grado.

$$a \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + 2b_a \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \frac{A}{2} - a \operatorname{sen}^2 \alpha = 0$$

y finalmente

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{-b_a \operatorname{sen} \alpha \pm \sqrt{b_a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha}}{a \cos^2 \alpha}$$

Hay que desechar la solución negativa, porque el valor de $\frac{A}{2}$ debe ser menor que $90°$ y por lo tanto su tg es positiva.

Encontrado A, es fácil obtener los demás elementos del triángulo.

Ni

253. *Problema: Resolver un triángulo dadas las tres alturas h_a, h_b y h_c.* — Siendo S el área del triángulo, se tiene

$$2S = ah_a = bh_b = ch_c. \tag{1}$$

Recordando que $S = pr$ (n° 217), siendo r el radio del círculo inscripto, se tiene n° 227:

Hallar la superficie primero

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

a S no lo conozco y a p tampoco

que permite calcular

$$\frac{1}{r} \text{ y } p = \frac{S}{r}$$

$$a = \frac{2S}{h_a}$$

y también

$$p - a = \frac{S}{r} - \frac{2S}{h_a} = S\left(\frac{1}{r} - \frac{2}{h_a}\right)$$

$$= S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{2}{h_a}\right) = S\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)$$

y análogamente

$$p - b = S\left(\frac{1}{r} - \frac{2}{h_b}\right)$$

$$p - c = S\left(\frac{1}{r} - \frac{2}{h_c}\right)$$

reemplazando estos valores en la fórmula de Heron se tiene:

$$S = S^2 \sqrt{\frac{1}{r}\left(\frac{1}{h_a} - \frac{2}{h_a}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{2}{h_b}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{2}{h_c}\right)}$$

lo que nos permite calcular S

$$S = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r} - \frac{2}{h_a}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{2}{h_b}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{2}{h_c}\right)}}$$

y luego la (1) permité obtener a, b y c. Para obtener los ángulos se tiene

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{r} - \frac{2}{h_b}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{2}{h_c}\right)}{\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r} - \frac{2}{h_a}\right)}}$$

y análogamente para $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ y $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

Para que el problema pueda resolverse, debe tenerse:

$$a < b + c, \quad b < a + c \quad y \quad c < a + b$$

lo que equivale a decir

$$\frac{1}{h_a} > \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \quad \frac{1}{h_b} > \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} \quad y \quad \frac{1}{h_c} > \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b}.$$

El problema puede resolverse geométricamente en la siguiente forma:

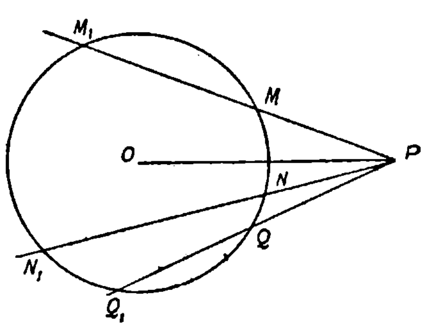


Figura 117

Se toma una circunferencia cualquiera de centro O y radio R y desde un punto P, con radios h_a, h_b y h_c se corta a la circunferencia en los puntos M, N y Q. Se prolongan PM, PN y PQ hasta encontrar a la circunferencia en los puntos M_1, N_1 y Q_1.

Digo que los segmentos PM_1, PN_1 y PQ_1 son proporcionales a los lados del triángulo. En efecto, la potencia k^2 del punto P con respecto a la circunferencia es:

$$PM \cdot PM_1 = PN \cdot PN_1 = PQ \cdot PQ_1 = k^2$$

que podemos escribir:

$$h_a \mathrm{PM}_1 = h_b \mathrm{PN}_1 = h_c \mathrm{PQ}_1 = k^2 \qquad (1)$$

Por otra parte, se tiene:

$$a h_a = b h_b = c h_c = 2\mathrm{S}$$

y dividiendo miembro a miembro

$$\frac{a}{\mathrm{PM}_1} = \frac{b}{\mathrm{PN}_1} = \frac{c}{\mathrm{PQ}_1} = \frac{2\,\mathrm{S}}{k^2}.$$

Siendo los segmentos PM_1, PN_1 y PQ_1 proporcionales a los lados del triángulo, si construímos un triángulo (fig. 118) cuyos lados sean PM_1, PN_1 y PQ_1 éste será semejante al triángulo buscado.

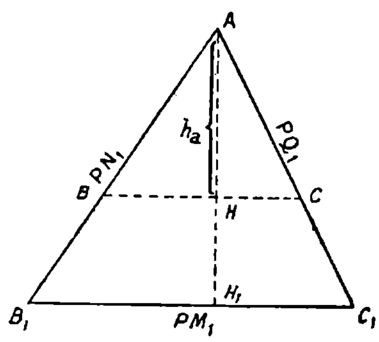


Figura 118

Sea $\mathrm{AB_1C_1}$ el triángulo que así se obtiene. Trazando su altura $\mathrm{AH_1}$ y llevando sobre ella el segmento AH igual a h_a, y trazando por H la paralela BC a $\mathrm{B_1C_1}$, el triángulo ABC que así se obtiene es el pedido.

Se puede proceder también en la siguiente forma: Se construye un triángulo cuyos lados sean las alturas h_a, h_b y h_c. Luego se trazan las alturas de este triángulo, que llamaremos h'_a, h'_b y h'_c.

Construyendo el triángulo de lados h'_a, h'_b y h'_c, este triángulo es semejante al triángulo buscado.

Puede darse todavía otra solución. Se tiene:

$$a h_a = b h_b = c h_c = 2\mathrm{S},$$

que se puede escribir

$$\frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}}.$$

Luego el triángulo que tiene por lados las inversas de las alturas es semejante al triángulo buscado y por lo tanto sus ángulos serán iguales. El problema queda reducido a resolver un triángulo del que se conocen sus tres lados.

$$\frac{1}{h_a}, \quad \frac{1}{h_b}, \quad \frac{1}{h_c}.$$

Y se tendría así:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)}}.$$

Y en forma análoga para $\frac{B}{2}$ y $\frac{C}{2}$, lo que nos da A, B y C.

Encontrados los ángulos es fácil calcular los lados, puesto que:

$$a=\frac{h_b}{\operatorname{sen} C}=\frac{h_c}{\operatorname{sen} B}$$

$$b=\frac{h_a}{\operatorname{sen} C}=\frac{h_c}{\operatorname{sen} A}, \qquad c=\frac{h_a}{\operatorname{sen} B}=\frac{h_b}{\operatorname{sen} A}.$$

254. *Problema: Resolver un triángulo, dadas las tres medianas m_a, m_b y m_c.* — Hemos encontrado (nº 224) las expresiones de las medianas:

$$m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4},$$

$$m_b^2=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4},$$

$$m_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}.$$

Haciendo

$$a^2=x \qquad a=\sqrt{x},$$

$$b^2=y \qquad b=\sqrt{y},$$

$$c^2=z \qquad c=\sqrt{z}.$$

Se tiene

$$-\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=m_a^2,$$

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{4}+\frac{z}{2}=m_b^2,$$

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}-\frac{z}{4}=m_c^2.$$

Luego es

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m_a^2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ m_b^2 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ m_c^2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix}} = -\frac{4}{9} m_a^2 + \frac{8}{9} m_b^2 + \frac{8}{9} m_c^2.$$

Y análogamente

$$y = \frac{8}{9} m_a^2 - \frac{4}{9} m_b^2 + \frac{8}{9} m_c^2,$$

$$z = \frac{8}{9} m_a^2 + \frac{8}{9} m_b^2 - \frac{4}{9} m_c^2.$$

Solución geométrica. — Supongamos el problema resuelto y sea ABC el triángulo cuyas tres medianas sean m_a, m_b y m_c, que se cortan en un punto G, cuya distancia a cada lado es igual a un tercio de la mediana (fig. 119).

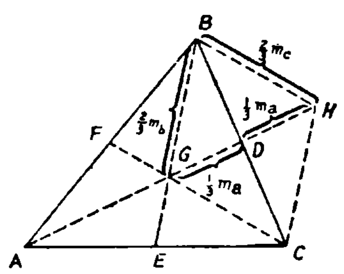


Figura 119

Prolonguemos AD en una distancia DH $= \frac{1}{3}$ m_a. La figura BHCG es un paralelogramo por cortarse las diagonales en partes iguales. Luego el triángulo GBH es un triángulo cuyos tres lados son iguales respectivamente a los dos tercios de cada mediana. De ahí la construcción. Primero se construye el triángulo GBH con lados

$$\text{GH} = \frac{2}{3} m_a, \quad \text{BG} = \frac{2}{3} m_b \ \text{ y } \ \text{BH} = \frac{2}{3} m_c.$$

Se prolonga HG en segmento igual GA $=$ GH $= \frac{2}{3} m_a$, y se tiene el vértice A del triángulo. Se une al punto D medio de GH con B y se prolonga DC = BD y se tiene el vértice C del triángulo. Uniendo A con C se tiene el triángulo ABC que resuelve el problema.

Ejercicio : Sea $m_a = 5$ m, $m_b = 6$ m, $m_c = 7$ m.
Calculando resulta :

$$x = 64{,}444, \quad y = 49{,}778 \text{ y } z = 32{,}444.$$

Luego

$$a = \sqrt{x} = \sqrt{64.444} = 8.03 \text{ m}$$
$$b = \sqrt{y} = \sqrt{49.778} = 7.06 \text{ m}$$
$$c = \sqrt{z} = \sqrt{32.444} = 5.70 \text{ m}.$$

255. *Problema : Dada una recta* AB *y un punto* P *sobre ella, situado a las distancias a y b de* A *y* B, *determinar la curva que describe el punto* P *cuando los extremos* A *y* B *se mueven sobre dos ejes ortogonales x'x e yy' respectivamente.* — Llamando α al ángulo ABO, y si x e y son las coordenadas del punto P, se teine :

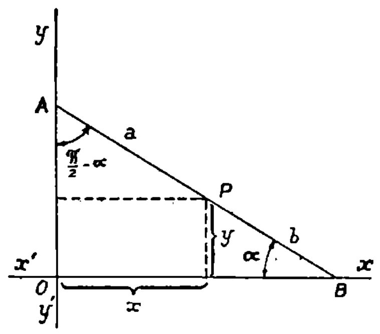


Figura 120

$$x = a \cos \alpha \qquad \frac{x}{a} = \cos \alpha,$$

$$y = b \operatorname{sen} \alpha \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{sen} \alpha.$$

Luego

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1.$$

La curva que describe el punto P es una elipse de semi-ejes a y b.

256. *Problema : Calcular el ángulo $2x$ que forman entre sí las tangentes comunes a dos circunferencias de radios* R *y r, tangentes exteriormente.* — Sean las circunferencias de centros O y O′ de radios R y r y $2x$ el ángulo de las tangentes comunes ST y ST_1 (fig. 121).

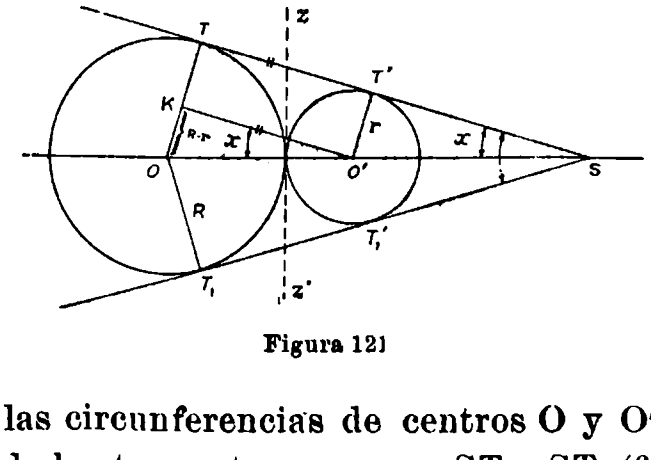


Figura 121

Tenemos, trazando por O′ la paralela a ST hasta cortar normalmente a OT en K resulta:

$$\operatorname{sen} x = \frac{R - r}{OO'} = \frac{R - r}{R + r}.$$

Y es claro que ahora resulta fácil calcular también el ángulo que forman ST con Z′Z.

Campanaus

257. *Problema: Sobre la normal al eje $x'x$ se toman dos segmentos consecutivos $AB = a$ y $BC = b$, de longitudes conocidas. Buscar la posición de un punto O desde el cual se ve el segmento b bajo un ángulo dado α. Encontrar la posición de O para que α sea máximo.* — Sea O la posición desde la cual se ve al segmento b bajo el ángulo α (fig. 122). Llamemos x a OA y φ al ángulo BOA, se tiene:

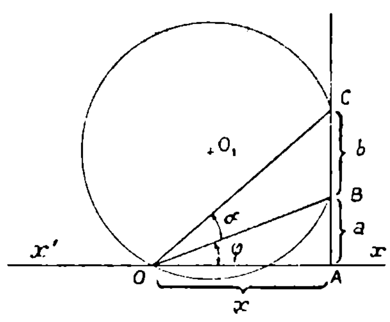


Figura 122

$$\operatorname{tg}(\varphi + \alpha) = \frac{b + a}{x} = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\alpha}$$

y también

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{x}.$$

Eliminando tg φ, se tiene:

$$x^2 \operatorname{tg}\alpha - bx + a(a + b)\operatorname{tg}\alpha = 0$$

para x maximo $\sqrt{b^2 - 4}$

o bien

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a(a + b)\operatorname{tg}^2\alpha}}{2 \operatorname{tg}\alpha}.$$

$b = 2\sqrt{a(a+b)}\, \operatorname{tg}$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{b}{2\sqrt{a(a+b)}}$

En general se tienen dos soluciones. Se puede resolver el problema geométricamente, trazando sobre BC el arco capaz del ángulo α. Los puntos en que ese arco corta a la recta $x'x$ son soluciones del problema. Si el arco es tangente a $x'x$ hay una solución y si es exterior no hay ninguna.

Por otra parte, se obtiene

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{bx}{x^2 + a(a + b)}$$

cuyo máximo corresponde a

$$x = \sqrt{a(a+b)}$$

o bien

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{2\sqrt{a(a+b)}}$$

que ocurre cuando el círculo de centro O_1 es tangente a la recta $x'x$ o sea cuando las dos soluciones para x son coincidentes, pues para ello debe ser

$$b^2 - 4a(a+b) \operatorname{tg}^2 \alpha = 0 \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{2\sqrt{a(a+b)}}.$$

258. *Problema: Llamando* D, E *y* F *a los puntos de contacto de los lados de un triángulo* ABC *con el círculo inscripto de centro* O *y radio* r, *demostrar que la relación de las áreas de los triángulos* DEF *al área del triángulo* ABC *es*

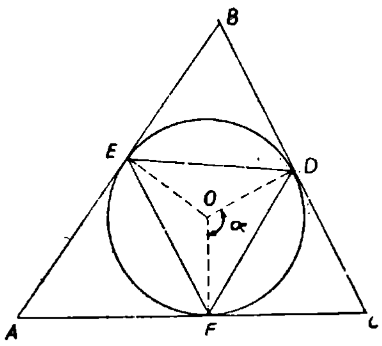


Figura 123

$$2 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2}.$$

Uniendo el centro O con los puntos de contacto D, E y F y llamando s al área DEF, descomponemos al triángulo DEF en tres, cuyas áreas son (fig. 123):

$$\text{sup. DOF} = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen} \text{DOF} = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen}(\pi - C) = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen} C$$

y análogamente

$$\text{sup. DOE} = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen} B$$

$$\text{sup. FOE} = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen} A.$$

Luego

$$s = \frac{1}{2} r^2 (\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C).$$

Y también se tiene:

$$S = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A.$$

Y sacando b y c del teorema del seno:

$$S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}.$$

Hemos visto que (nº 84)

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = 4 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}$$

y por el nº 217.

$$\frac{r}{a} = \frac{\operatorname{sen}\frac{B}{2} \operatorname{sen}\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

Y reemplazando se tiene:

$$\frac{s}{S} = \frac{r^2 \operatorname{sen} A (\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C)}{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\frac{B}{2} \operatorname{sen}^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}} \cdot \frac{2 \operatorname{sen}\frac{A}{2} \cos\frac{A}{2} \cdot 4 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}}{2 \operatorname{sen}\frac{B}{2} \cos\frac{B}{2} \cdot 2 \operatorname{sen}\frac{C}{2} \cos\frac{C}{2}}$$

o bien

$$\frac{s}{S} = 2 \operatorname{sen}\frac{A}{2} \operatorname{sen}\frac{B}{2} \operatorname{sen}\frac{C}{2}.$$

259. *Problema: Hallar en un triángulo, la distancia que hay entre el centro del círculo circunscripto y el punto de cruce de las alturas.* — Sea (fig. 124) el triángulo ABC, O el centro del círculo circunscripto y H el punto de encuentro de las alturas. Llamaremos x a la distancia OH, que es nuestra incógnita.

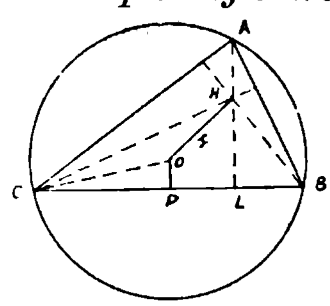


Figura 124

Suponemos conocidos los elementos del triángulo ABC.

Bajemos la normal OP sobre el lado a y tenemos

$$\widehat{COP} = A.$$

Y en la figura se tiene además $\widehat{CHL} = B$.

Luego

$$CL = CH \operatorname{sen} B = b \cos C$$

de donde

$$CH = \frac{b \cos C}{\text{sen } B}.$$

Y también

$$\widehat{HCO} = \widehat{HCL} - OCL = (90^\circ - B) - (90^\circ - A) = A - B.$$

Y aplicando el teorema del coseno

$$\overline{OH}^2 = x^2 = \overline{CO}^2 + \overline{CH}^2 - 2CO \,.\, CH \cos \widehat{HCO}.$$

o bien

$$x^2 = R^2 + \frac{b^2 \cos^2 C}{\text{sen}^2 B} - 2R \frac{b \cos C}{\text{sen } B} \cos (A - B).$$

Pero, según el teorema del seno :

$$\frac{b}{\text{sen } B} = 2R$$

luego

$$x^2 = R^2 + 4R^2 \cos^2 C - 4R^2 \cos C (\cos A - B)$$

y también

$$x^2 = R^2 - 4R^2 \cos C \left[\cos (A + B) + \cos (A - B)\right]$$

y transformando en producto la suma de cosenos :

$$x^2 = R^2 (1 - 8 \cos A \cos B \cos C).$$

Y finalmente

$$x = R\sqrt{1 - 8 \cos A \cos B \cos C}.$$

260. *Problema : Se tiene un rombo* ABCD *de ángulo en* A = 60°. *Por el vértice* A *se traza una recta m móvil alrededor de* A, *que es cortada por la prolongación de los lados del ángulo* C *en los puntos* M *y* N. *Uniendo para cada posición de la recta los puntos* M *y* N *con* D *y* B *respectivamente, los segmentos* MD *y* NB *se cortan en* S. *Buscar el lugar geométrico de los puntos* S, *con el girar de la recta m* (fig. 125). — Llamando a al lado del rombo, hagamos

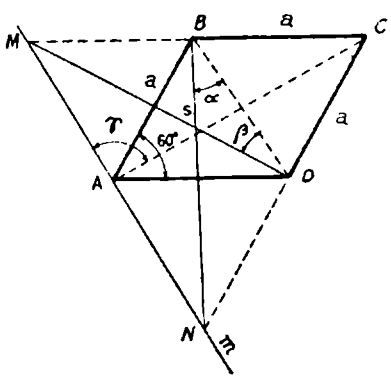


Figura 125

$$SBD = \alpha, \quad BDS = \beta, \quad MAC = \gamma.$$

Se saca del triángulo BMA

$$\frac{BM}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\gamma - 30^\circ)}{\operatorname{sen}(\gamma + 30^\circ)}.$$

Y del triángulo BDM, se saca

$$\frac{BM}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(60^\circ - \beta)}.$$

Luego se tiene

$$\frac{\operatorname{sen}(\gamma - 30^\circ)}{\operatorname{sen}(\gamma + 30^\circ)} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(60^\circ - \beta)}$$

y de ahí:

$$\frac{\operatorname{sen}(\gamma - 30^\circ) - \operatorname{sen}(\gamma + 30^\circ)}{\operatorname{sen}(\gamma - 30^\circ) + \operatorname{sen}(\gamma + 30^\circ)} = \frac{\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}(60^\circ - \beta)}{\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}(60^\circ - \beta)}$$

y transformando en producto

$$\frac{\operatorname{sen}(-30^\circ)\cos\gamma}{\operatorname{sen}\gamma\cos(-30^\circ)} = \frac{\cos 30^\circ \operatorname{sen}(\beta - 30^\circ)}{\operatorname{sen} 30^\circ \cos(\beta - 30^\circ)},$$

$$-\frac{\operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\operatorname{tg}(\beta - 30^\circ)}{\operatorname{tg} 30^\circ}$$

o bien

$$\frac{\operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\operatorname{tg}(30^\circ - \beta)}{\operatorname{tg} 30^\circ}.$$

De donde se deduce

$$\operatorname{tg}(30^\circ - \beta) = \frac{\operatorname{tg}^2 30^\circ}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{1}{3\operatorname{tg}\gamma}.$$

Procedemos en forma análoga para los triángulos DAN y BDN y se obtiene:

$$\operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) = -\frac{1}{3\operatorname{tg}\gamma}.$$

Luego

$$30^\circ - \beta = \alpha - 30^\circ$$

o bien

$$\alpha + \beta = 60^\circ.$$

El ángulo

$$BSD = 120^\circ$$

quiere decir que el punto S se mueve sobre el círculo circunscripto al triángulo BCD.

261. *Problema: Se tienen dos esferas de radios* R *y* R_1 *y de centros* O *y* O_1*, externos y cuyos centros están situados a una distancia d. Deter-*

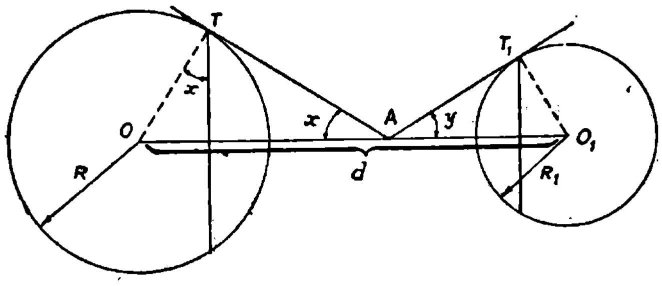


Figura 126

minar sobre la línea de los centros un punto A *tal que la suma de las zonas vistas desde él sean de área mínima.* — Pongamos (fig. 126):

$$\widehat{OAT} = x \qquad \widehat{O_1AT_1} = y$$

La suma de las superficies de las zonas tiene por expresión

$$S = 2\pi R^2(1-\text{sen } x) + 2\pi R_1^2(1-\text{sen } y) =$$
$$= 2\pi R^2 + 2\pi R_1^2 - 2\pi[R^2 \text{ sen } x + R_1^2 \text{ sen } y].$$

Y por lo tanto, el valor mínimo de S, corresponde al mínimo de $R^2 \text{ sen } x + R_1^2 \text{ sen } y$. Hagamos

$$R^2 \text{ sen } x + R_1^2 \text{ sen } y = k^2. \tag{1}$$

Se tiene además, puesto que

$$AO + AO_1 = d$$

que

$$\frac{R}{\text{sen } x} + \frac{R_1}{\text{sen } y} = d. \tag{2}$$

Y multiplicando (1) y (2) se tiene

$$R^3 + R^2R_1\frac{\text{sen } x}{\text{sen } y} + RR_1^2\frac{\text{sen } y}{\text{sen } x} + R_1^3 = dk^2$$

cuyo mínimo, corresponde al mínimo de

$$R\frac{\text{sen } x}{\text{sen } y} + R_1\frac{\text{sen } y}{\text{sen } x}$$

es decir, corresponde al mínimo de la suma de dos cantidades cuyo producto es constante e igual a RR_1. Pero se sabe que este mínimo tiene lugar cuando las dos cantidades son iguales, es decir, que debe tenerse en el mínimo

$$R\frac{\text{sen } x}{\text{sen } y} = R_1 \frac{\text{sen } y}{\text{sen } x}$$

o bien

$$\frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 y} = \frac{R_1}{R} \qquad \frac{\text{sen } x}{\text{sen } y} = \sqrt{\frac{R_1}{R}}.$$

Pero

$$\text{sen } x = \frac{R}{AO} \quad \text{y} \quad \text{sen } y = \frac{R_1}{AO_1}$$

de donde

$$AO = \frac{R}{\text{sen } x}, \qquad AO_1 = \frac{R_1}{\text{sen } y},$$

$$\frac{AO}{AO_1} = \frac{R \text{ sen } y}{R_1 \text{ sen } x} = \frac{R}{R_1}\sqrt{\frac{R}{R_1}} = \frac{\sqrt{R^3}}{\sqrt{R_1^3}},$$

$$AO = AO_1 \frac{\sqrt{R^3}}{\sqrt{R_1^3}},$$

y

$$AO_1 = d - AO = d - AO_1 \frac{\sqrt{R^3}}{\sqrt{R_1^3}}$$

y entonces

$$AO_1\left(1 + \frac{\sqrt{R^3}}{\sqrt{R_1^3}}\right) = d$$

$$AO_1 = \frac{d\sqrt{R_1^3}}{\sqrt{R^3}+\sqrt{R_1^3}} \quad \text{y} \quad AO = \frac{d\sqrt{R^3}}{\sqrt{R^3}+\sqrt{R_1^3}}$$

y entonces

$$\text{sen } x = \frac{R}{AO} = \frac{R\left(\sqrt{R^3}+\sqrt{R_1^3}\right)}{d\sqrt{R^3}}$$

$$\text{sen } y = \frac{R_1}{A_1O} = \frac{R_1\left(\sqrt{R^3} + \sqrt{R_1^3}\right)}{d\sqrt{R_1^3}}.$$

Y el área total mínima es dada por

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi R_1^2 - 2\pi\left[\frac{R^2\left(\sqrt{R^3} + \sqrt{R_1^3}\right)}{d\sqrt{R}} + \frac{R_1^2\left(\sqrt{R^3} + \sqrt{R_1^3}\right)}{d\sqrt{R_1}}\right]$$

o bien

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi R_1^2 - 2\pi \frac{R^2(\sqrt{R_1}\sqrt{R^3} + R_1^2) + R_1^2(R^2 + \sqrt{R}\sqrt{R_1^3})}{d\sqrt{R}\ \sqrt{R_1}}$$

y finalmente

$$S = 2\pi\left[R^2 + R_1^2 - \frac{(\sqrt{R^3}+\sqrt{R_1^3})^2}{d}\right].$$

262. *Problema : Se tiene un ángulo conocido* yOx (fig. 127) *que llamaremos* α. *Trazar una recta* AB *que forme con* Ox *un ángulo* β *de modo que el área* OAB *tenga un valor dado* S.— Llamemos

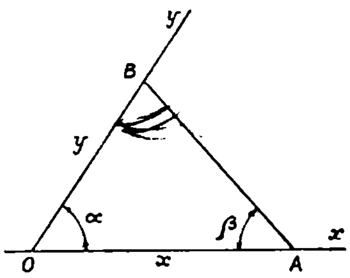


Figura 127

$$x = OA$$
$$y = OB.$$

Y tenemos

$$2S = xy \operatorname{sen}\alpha \qquad xy = \frac{2S}{\operatorname{sen}\alpha}. \qquad (1)$$

Y también

$\frac{x}{\operatorname{sen} B} = \frac{y}{\operatorname{sen}\beta}$

$B = 180° - (\alpha + \beta)$

$$\frac{x}{y} = \frac{\operatorname{sen}[180° - (\alpha+\beta)]}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}\beta}.$$

Luego es :

$$x^2 = \frac{2S\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta} \qquad x = \sqrt{\frac{2S\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}} = OA$$

$$y^2 = \frac{2S\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} \qquad y = \sqrt{\frac{2S\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}} = OB.$$

Y la longitud AB está dada por :

$$AB = \frac{x\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} = \frac{y\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \sqrt{\frac{2S\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}}.$$

263. *Problema : Se da un ángulo* $yOx = \alpha$ *y un punto* P. *Trazar por el punto* P *una recta* APB *de modo que el área del triángulo* AOB *tenga un valor* S. — Se pueden presentar dos casos :

1° Que el punto P esté en el interior del ángulo α, y 2° que esté fuera.

Consideremos el primer caso (fig. 128). Sea AB la recta y llamemos

$$x = OA$$
$$y = OB.$$

Bajemos del punto P las normales PR y PQ sobre Ox y Oy.
Pongamos

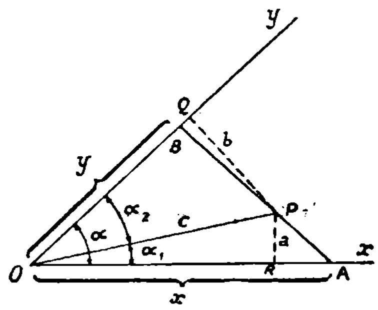


Figura 128

$$\mathrm{PR} = a, \quad \mathrm{OR} = a_1, \quad \mathrm{PQ} = b, \quad \mathrm{OQ} = b_1,$$

$$\sphericalangle \mathrm{POR} = \alpha_1, \quad \sphericalangle \mathrm{POQ} = \alpha_2, \quad \mathrm{OP} = c.$$

Tenemos

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{a}{a_1}, \quad \mathrm{OP} = c = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha_1} = \frac{a_1}{\cos \alpha_1}$$

$$\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$$

$$b = c \operatorname{sen} (\alpha - \alpha_1).$$

Y según sea como se da por determinado P, se calculan los valores que faltan hasta conocer a y b. Y podemos poner:

$$2\mathrm{S} = ax + by = xy \operatorname{sen} \alpha.$$

$y = \frac{2S}{x \operatorname{sen} \alpha}$

$a x + b\left(\frac{2S}{x \operatorname{sen} \alpha}\right) = 2S$

$a \operatorname{sen} \alpha \, x^2 + b 2S - 2S \operatorname{sen} \alpha \, x$

Tenemos así un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolviendo se obtiene:

$$x = \frac{\mathrm{S} \pm \sqrt{\mathrm{S}\left(\mathrm{S} - \dfrac{2ab}{\operatorname{sen} \alpha}\right)}}{a} \quad \text{e} \quad y = \frac{\mathrm{S} \mp \sqrt{\mathrm{S}\left(\mathrm{S} - \dfrac{2ab}{\operatorname{sen} \alpha}\right)}}{b}.$$

El problema admite dos soluciones, siempre que se tenga

$$\mathrm{S} > \frac{2ab}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

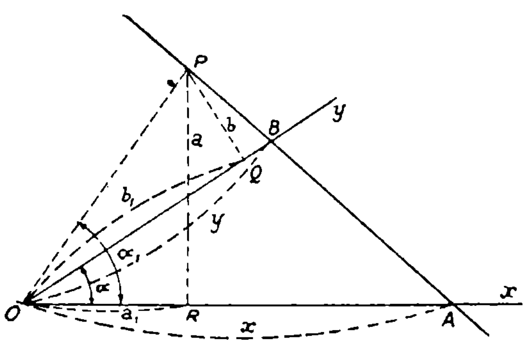


Figura 129

Y en el caso que $\mathrm{S} \operatorname{sen} \alpha = 2ab$, hay una sola solución.

Contemplemos ahora (fig. 129), el caso en que el punto P sea exterior al ángulo $y\mathrm{O}x$. Hagámos las mismas consideraciones y pongamos:

$$\mathrm{OA} = x, \quad \mathrm{OB} = y, \quad \mathrm{PR} = a, \quad \mathrm{OR} = a_1. \quad \mathrm{PQ} = b, \quad \mathrm{OQ} = b_1.$$

Podemos poner:

$$2\mathrm{S} = ax - by = xy \operatorname{sen} \alpha.$$

Y resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene:

$$x = \frac{S \pm \sqrt{S\left(S + \frac{2ab}{\operatorname{sen} \alpha}\right)}}{a} \quad \text{e} \quad y = \frac{-S \pm \sqrt{S\left(S + \frac{2ab}{\operatorname{sen} \alpha}\right)}}{b}.$$

264. *Problema: Se tiene un semi-círculo de centro* O *y radio* R (fig. 130). *Trazamos la tangente* AT *en* A *y por el punto* B *la secante* BMT, *que forma con* BA *el ángulo* α.

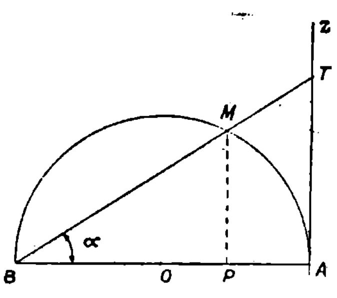


Figura 130

Determinar α *de manera que el volumen engendrado por el triángulo mixtilíneo* AMT *sea igual al volumen engendrado por el triángulo mixtilíneo* AMB, *cuando la figura da una vuelta alrededor de* AB. — Debe tenerse entonces

$$\text{vol. eng. AMB} = \text{vol. eng. AMT.}$$

o lo que es lo mismo

$$\text{vol. eng. BAT} = 2 \text{ vol. eng. AMB.} \qquad (1)$$

Expresando ahora el volumen del cono BAT y el volumen engendrado por la rotación del triángulo mixtilíneo BAM que se puede expresar como la suma del volumen del cono BMP más el volumen del segmento de esfera PMA, se tiene:

$$\text{vol. ABT} = \frac{1}{3}\pi\overline{AT}^2 . AB = \frac{8}{3}\pi R^3 \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\text{vol. PBM} = \frac{1}{3}\pi\overline{PM}^2 . BP = \frac{8}{3}\pi R^3 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^4 \alpha.$$

$$\text{vol. PMA} = \frac{1}{6}\pi\overline{PA}^3 + \frac{1}{2}\pi\overline{PM}^2 . AP = \frac{4}{3}\pi R^3 \operatorname{sen}^6 \alpha + 4\pi R^3 \operatorname{sen}^4 \alpha \cos^2 \alpha.$$

Y reemplazando valores en la (1) se tiene:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = 2 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^4 \alpha + \operatorname{sen}^6 \alpha + 3 \operatorname{sen}^4 \alpha \cos^2 \alpha.$$

Y dividiendo par $\operatorname{sen}^2\alpha$ y multiplicando por $\cos^2\alpha$ obtenemos

$$1 = 2 \cos^6 \alpha + \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^4 \alpha + 3 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^4 \alpha.$$

o también :

$$1 = \cos^2 \alpha \, [2 \cos^4 \alpha + (1 - \cos^2 \alpha)^2 + 3 (1 - \cos^2 \alpha) \cos^2 \alpha].$$

Y simplificando

$$1 = \cos^2 \alpha \, [\cos^2 \alpha + 1].$$

De donde

$$\cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha - 1 = 0.$$

Ecuación bicuadrada. Poniendo :

$$\cos^2 \alpha = u$$

se saca

$$u^2 + u - 1 = 0$$

resulta

$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

donde no hay que tomar en cuenta el signo —, porque siendo $\cos \alpha$ menor que uno en valor absoluto, lo mismo debe ocurrir para u. Luego :

$$\cos^2 \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \qquad \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

Y calculando el valor de α, se obtiene

$$\alpha = 38^\circ 10' 24''.$$

Se puede observar que u es la parte mayor del radio dividido en media y extrema razón, tomando el radio como unidad.

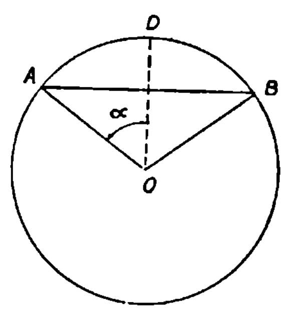


Figura 131

265. *Problema : En una esfera de radio* R *y centro* O (fig. 131), *llevar un plano secante* AB *de modo que el volumen del cono de vértice* O *y cuya base es la intersección del plano con la esfera, sea igual al volumen del segmento esférico.* — El volumen del cono tiene por expresión

$$V = \frac{1}{3} \pi R^3 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha$$

y el volumen del segmento esférico

$$V' = \frac{1}{3} \pi R^5 (1 - \cos \alpha)^2 (2 + \cos \alpha).$$

Luego debe tenerse

$$\operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha = (1 - \cos \alpha)^2 (2 + \cos \alpha)$$

o bien

$$(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) \cos \alpha = (1 - \cos \alpha)^2 (2 + \cos \alpha)$$

de donde

$$\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = 0$$

y resulta

$$\cos \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

donde hay que desechar la raíz negativa y resulta

$$\cos \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

El valor de cos α es la parte mayor del radio, dividido en media y extrema razón, tomando el radio como unidad.

266. *Problema: Se tiene un sistema de ejes ortogonales* Ox *y* Oy (fig. 132) *y una recta móvil* On *que pasa por* O. *Se toman dos puntos* A *y* B *sobre los ejes* Ox *y* Oy *respectivamente y desde ellos se bajan las normales* AA_1 *y* BB_1 *a la recta* On. *Buscar el lugar de los puntos medios* M *del segmento* A_1B_1 *con el girar de la recta* On. — Llamemos a al segmento OA y b al lado OB y sea φ el ángulo que hace On con Ox. Tomemos a continuación de OA_1 el segmento A_1C igual à OB_1. Se tiene

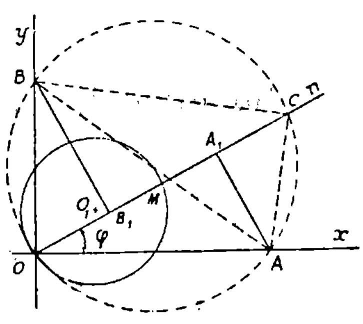


Figura 132

$$OA_1 = a \cos \varphi, \qquad OB_1 = b \operatorname{sen} \varphi$$
$$AA_1 = a \operatorname{sen} \varphi, \qquad BB_1 = b \cos p.$$

Y también

$$\operatorname{tg} ACO = \frac{AA_1}{A_1C} = \frac{AA_1}{OB_1} = \frac{a \operatorname{sen} \varphi}{b \operatorname{sen} \varphi} = \frac{a}{b}$$

y

$$\operatorname{tg} BCO = \frac{BB_1}{B_1C} = \frac{BB_1}{OA_1} = \frac{b \cos \varphi}{a \cos \varphi} = \frac{b}{a}.$$

Luego

$$\text{tg ACO} = \frac{1}{\text{tg BCO}} = \text{ctg BCO}.$$

Y los ángulos ACO y BCO son complementarios, es decir, que el ángulo ACB es recto y el punto C se mueve sobre un círculo de diámetro AB.

El punto M, medio de OC, se mueve sobre una figura que es homotética, es decir, sobre otra circunferencia y la relación de homotecia es $\frac{1}{2}$.

Podríamos obtener el mismo resultado por otro camino. Llamemos d a la distancia OM y tenemos

$$2d = OA_1 + OB_1 = a \cos \varphi + b \text{ sen } \varphi$$

o bien

$$2d^2 = ad \cos \varphi + bd \cos \varphi.$$

Llamando x e y a las coordenadas del punto M se tiene

$$d^2 = x^2 + y^2$$

$$x = d \cos \varphi \quad \text{e} \quad y = d \text{ sen } \varphi.$$

Luego

$$2(x^2 + y^2) = ax + by$$

o también

$$2(x^2 + y^2) - ax - by = 0.$$

Que representa un círculo que pasa por el punto O y calculando las coordenadas de su centro O_1 se encuentra que son $\frac{a}{4}$ y $\frac{b}{4}$, lo que está de acuerdo con la solución anterior.

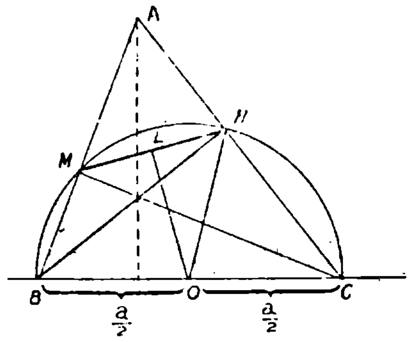


Figura 133

267. *Problema: Calcular la distancia del punto medio de un lado de un triángulo a la recta que une los pies de las alturas salidas de los extremos de ese lado* (fig. 133). — Sea el triángulo ABC. Los pies de las alturas salidas de B y C se encuentran sobre la circunferencia de diámetro BC $= a$. En la figura, se tiene

$$OL = ON \text{ sen } ONL.$$

Por ser el triángulo CON isósceles, se tiene $\mathrm{ON} = \frac{a}{2}$ y el ángulo $\widehat{\mathrm{ONC}} = \mathrm{C}$. Siendo el cuadrilátero BMNC inscriptible, se tiene

$$\mathrm{B} + \sphericalangle \mathrm{MNC} = 180°.$$

Y también

$$\sphericalangle \mathrm{B} + \sphericalangle \mathrm{MNO} + \sphericalangle \mathrm{ONC} = \mathrm{B} + \sphericalangle \mathrm{MNO} + \mathrm{C} = 180°,$$

Luego $\sphericalangle \mathrm{MNO} = \mathrm{A}$ y resulta

$$\mathrm{OL} = \frac{a}{2} \operatorname{sen} \mathrm{A}.$$

Para un valor de a, si A queda constante, ocurre lo mismo con OL y con MN.

268. *Problema: Sobre un círculo de centro* O *radio* R *se dan dos puntos* A *y* B. *Encontrar sobre el círculo un punto* M *tal que* $\mathrm{AM} + \mathrm{MB} = l$, *siendo* l *una cantidad conocida* (fig. 134). — Tracemos la bisectriz OC del ángulo AOB y sea α el ángulo AOC.

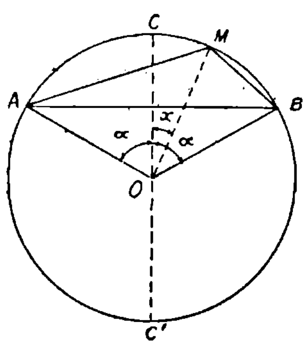


Figura 134

Llamemos x al ángulo COM. Se tiene, si $x < \alpha$

$$2\mathrm{R}\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha - x}{2} + \operatorname{sen}\frac{\alpha + x}{2}\right) = l$$

y si $x > \alpha$

$$2\mathrm{R}\left(\operatorname{sen}\frac{x - \alpha}{2} + \operatorname{sen}\frac{x + \alpha}{2}\right) = l.$$

La primera nos da

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{l}{4\mathrm{R}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}},$$

que da dos soluciones simétricas con respecto a OC, siempre que

$$2\mathrm{R}\operatorname{sen}\alpha < l < 4\mathrm{R}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

La segunda nos da

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \frac{l}{4\mathrm{R}\cos\frac{\alpha}{2}},$$

que da dos soluciones simétricas con respecto a OC′ siempre que

$$2R \operatorname{sen} \alpha < l < 4R \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}.$$

El problema tiene cuatro soluciones cuando

$$AB < l < AC + CB,$$

dos soluciones cuando

$$AC + CB < l < AC' + C'B.$$

Ejemplo :

$$R = 5 \text{ m.} \quad \alpha = 60°, \quad l = 9.30 \text{ m.}$$

Se tiene

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{9.30}{4 \times 5 \times \operatorname{sen} 30°} = 0.930 \qquad \frac{x}{2} = \pm 21°33'54''$$

$$x = \pm 43°07'48''$$

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \frac{9.30}{4 \times 5 \times \cos 30°} = 0.5370 \qquad \frac{x}{2} = 32°28'47'' \qquad x = 64°57'34''$$

$$\frac{x}{2} = 147°31'13'' \therefore x = 295°02'26''$$

(o bien $x = -64°57'34''$)

Se tienen cuatro soluciones y resulta

$$AB = 8.66 \text{ m.} \qquad AC + CO = 10.00 \text{ m.}$$

Si $R = 5$ m, $\alpha = 60°$ $AB = 8.66$ m. $l = 15$ m.

Se tiene:

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{15}{4 \times 5 \times \operatorname{sen} 30°} = \frac{15}{10} = 1.5$$

que hay que rechazar

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \frac{15}{4 \times 5 \times \cos 60°} = \frac{15}{17.32} = 0.8660$$

$$\frac{x}{2} = 60°00' \qquad x = 120°00'$$

$$\frac{x}{2} = 120°00' \qquad x = 240°00'$$

(o bien $x - 120°00'$)

269. *Mostrar que las alturas* AA′, BB′ *y* CC′ *en un triángulo* ABC *son las bisectrices del triángulo* A′B′C′, *cuyos vértices son los pies de esas alturas* (fig. 135). — Llamando γ al ángulo CC′B′ se tiene, en el triángulo C′AB′

$$\overline{B'C'}^2 = b^2 \cos^2 A + c^2 \cos^2 A - 2bc \cos^3 A = a^2 \cos^2 A$$

Luego

$$\frac{\cos\gamma}{c\cos A} = \frac{\text{sen } A}{a \cos A} \quad \therefore \quad \cos\gamma = \frac{c}{a}\,\text{sen } A.$$

Llamando γ' al ángulo CC′A, se tiene en el triángulo C′BA′

$$\overline{A'C'}^2 = a^2 \cos^2 B + c^2 \cos^2 A - 2ac \cos^3 B = b^2 \cos^2 B.$$

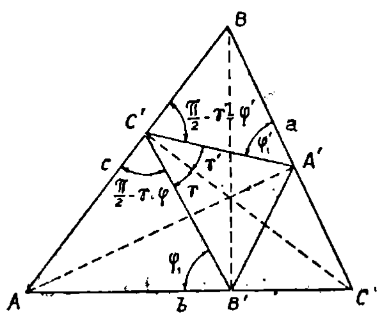


Figura 135

Y entonces

$$\frac{\cos\gamma'}{c\cos B} = \frac{\text{sen } B}{b\cos B} \qquad \cos\gamma' = \frac{c}{b'}\,\text{sen } B.$$

Y teniendo en cuenta el teorema del seno

$$\cos\gamma = \cos\gamma' \qquad \gamma = \gamma'.$$

Otra demostración. — Del triángulo AB′C′. Siendo

$$AB' = c\cos A \quad \text{y} \quad AC' = b\cos A \qquad \frac{AC'}{AB'} = \frac{b}{c},$$

se tiene, según el teorema de las tangentes, según la figura

$$\frac{AC' - AB'}{AC' + AB} = \frac{\text{tg}\,\dfrac{\varphi_1 - \varphi}{2}}{\text{ctg}\,\dfrac{A}{2}} = \frac{b-c}{b+c} = \frac{\text{tg}\,\dfrac{B-C}{2}}{\text{ctg}\,\dfrac{A}{2}}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi &= B - C \\ \varphi_1 + \varphi &= B + C = 180^\circ - A \\ \hline \varphi_1 &= B \\ \varphi &= C. \end{aligned}$$

Análogamente, de el triángulo BA′C′, donde se tiene

$$BA' = c \cos B, \quad BC' = b \cos B \qquad \frac{BC'}{BA'} = \frac{b}{c}$$

se saca

$$\frac{BC' - BA'}{BC' + BA'} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi_1' - \varphi'}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}} = \frac{b - c}{b + c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A - C}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}$$

$$\varphi_1' - \varphi' = A - C$$
$$\varphi_1' + \varphi' = A + C = 180^\circ - B$$
$$\varphi_1' = A$$
$$\varphi' = C.$$

Luego

$$\varphi = \varphi'.$$

Y por lo tanto

$$\gamma = \gamma'.$$

Se puede demostrar lo misma geométricamente. Se tiene, según la misma figura

$$\overline{AB'}^2 = c^2 - h_b{}^2 = c^2 - \frac{4S}{b^2} = \frac{b^2c^2 - 4S}{b^2}$$

$$\overline{AC'}^2 = b^2 - h_c{}^2 = b^2 - \frac{4S}{c^2} = \frac{b^2c^2 - 4S}{c^2}$$

$$\frac{AB'}{AC'} = \frac{c}{b}.$$

Los triángulos AB′C′ y ACB son semejantes por tener sus lados proporcionales y común un ángulo; luego

$$AC'B' = \varphi = C$$
$$AB'C' = \varphi_1 = B.$$

Análogamente, considerando los triángulos BA′C′ y BCA, se tiene

$$BA'C' = \varphi' = C$$

y

$$BC'A' = \varphi_1' = A.$$

luego

$$\varphi = \varphi' \qquad \gamma = \gamma'.$$

270. *Problema : Se tiene una circunferencia de centro* O *y radio* R. *En un punto* T *se lleva la tangente geométrica y sobre ella se toma un segmento* TA $= t$. *Trazar por el punto* A *una secante* ABC, *para que el triángulo* TBC *resulte de área máxima* (fig. 136). — Es evidente que ese máximo existe, pues cuando la secante ABC tiende a confundirse con la tangente AT, el área tiende a cero, y lo mismo ocurre cuando esa secante tiende a confundirse con la tangente AT'.

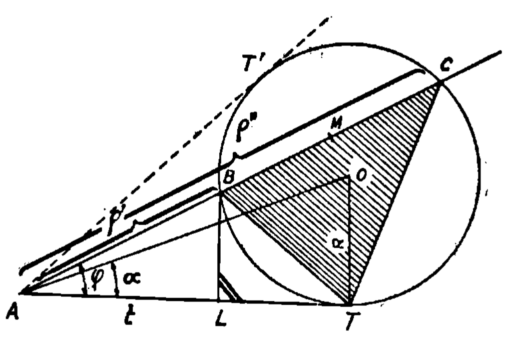


Figura 136

Llamemos φ al ángulo que hace ABC con AT y α al ángulo que forma AO con AT. Se tiene en primer término

$$AB \,.\, AC = t^2$$

y también

$$AO = \frac{R}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Y siendo M el punto medio de BC, se tiene

$$AB + AC = 2AM = 2AO \cos(\varphi - \alpha) = 2 \frac{R}{\operatorname{sen} \alpha} \cos(\varphi - \alpha).$$

Haciendo AB $= \rho'$ y AC $= \rho''$, resultan ρ' y ρ'' las raíces de la ecuación de segundo grado

$$\rho^2 - \frac{2R}{\operatorname{sen} \alpha} \cos(\varphi - \alpha) + t^2 = 0$$

y el área del triángulo BCT tiene por expresión

$$S = \frac{1}{2}(\rho'' - \rho')\, t \operatorname{sen} \varphi.$$

Y puesto que

$$\rho' + \rho'' = \frac{2R}{\operatorname{sen} \alpha} \cos(\varphi - \alpha) \qquad y \qquad \rho'\rho'' = t^2.$$

Se tiene

$$(\rho'' - \rho')^2 = (\rho'' + \rho')^2 - 4\rho'\rho'' = \frac{4R^2}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \cos^2(\varphi - \alpha) - 4t^2$$

o bien

$$(\rho'' - \rho')^2 = 4\left[\frac{R^2}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \cos^2(\varphi - \alpha) - t^2\right]$$

de donde

$$\rho'' - \rho' = \frac{2R}{\operatorname{sen} \alpha} \cdot \sqrt{\cos^2 (\varphi - \alpha) - \cos^2 \alpha}.$$

Y el área S del triángulo BCT, tiene por expresión

$$S = \frac{R}{\operatorname{sen} \alpha} \cdot t \operatorname{sen} \varphi \, . \sqrt{\cos^2 (\varphi - \alpha) - \cos^2 \alpha}.$$

Tratamos de encontrar el máximo de la función

$$\operatorname{sen} \varphi \sqrt{\cos^2 (\varphi - \alpha) - \cos^2 \alpha}$$

o lo que es lo mismo, el máximo de la función

$$y = \operatorname{sen}^2 \varphi \, [\cos^2 (\varphi - \alpha) - \cos^2 \alpha].$$

Esta función puede escribirse en la siguiente forma

$$y = \operatorname{sen}^2 \varphi \, [\cos (\varphi - \alpha) + \cos \alpha] \, [\cos (\varphi - \alpha) - \cos \alpha]$$

y transformando la suma y la diferencia de cosenos en producto, se obtiene

$$y = 4 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \operatorname{sen} \frac{2\alpha - \varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{2\alpha - \varphi}{2}$$

y el problema se reduce a estudiar el máximo de la función

$$y = \operatorname{sen}^3 \varphi \operatorname{sen} (2\alpha - \varphi)$$

cuando φ varía desde 0 a 2α.

La derivada de la función con respecto a φ igualada a cero nos da:

$$\frac{dy}{d\varphi} = 3 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \varphi \, . \operatorname{sen} (2\alpha - \varphi) - \operatorname{sen}^3 \varphi \, . \cos (2\alpha - \varphi) = 0$$

de donde

$$3 \cos \varphi \operatorname{sen} (2\alpha - \varphi) - \operatorname{sen} \varphi \cos (2\alpha - \varphi) = 0$$

o bien

$$3 \operatorname{tg} (2\alpha - \varphi) = \operatorname{tg} \varphi$$

y también

$$3 \frac{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} 2\alpha \, . \operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{tg} \varphi$$

y poniendo, tg $2\alpha = a$, se tiene la ecuación de segundo grado

$$a \operatorname{tg}^2 \varphi + 4 \operatorname{tg} \varphi - 3a = 0$$

que nos da

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 3a^2}}{a}$$

vale decir que la ecuación de segundo grado tiene dos raíces reales y de signo contrario.

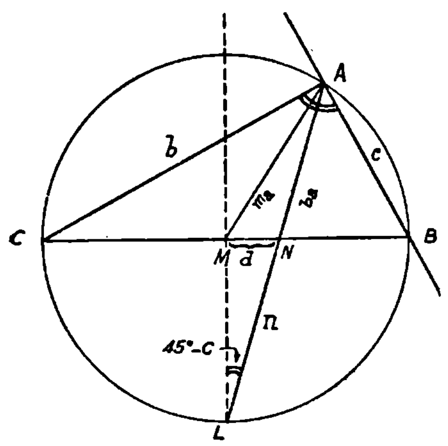


Figura 137

Resulta muy interesante la discusión de estas raíces según sea la posición del punto A sobre la tangente, o lo que es lo mismo según sea el valor del ángulo α.

En particular, si A ocupa la posición del punto L, es decir si $\alpha = 45°$ o $2\alpha = 90°$, tg φ vale $\sqrt{3}$ y el ángulo φ vale $60°$.

Resolver un triángulo rectángulo, conociendo la mediana m_a y la bisectriz b_a correspondientes al ángulo recto (fig. 137). — Se tiene, llamando S, al área del triángulo, que

$$2S = bc = \frac{\sqrt{2}}{2}\, b_a\,(b + c).$$

Y también

$$(b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = 4m_a^2 + \sqrt{2}\, b_a (b + c).$$

Y haciendo

$$x = b + c,$$

tenemos la ecuación de segundo grado

$$x^2 - \sqrt{2}\, b_a x - 4m_a^2 = 0$$

que nos permite calcular

$$x = b + c = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[b_a \pm \sqrt{b_a^2 + 8\, m_a^2}\right].$$

Pero es también

$$(b - c)^2 = b^2 + c^2 - 2bc = 4m_a^2 - \sqrt{2}\, b_a (b + c)$$

o bien

$$b - c = \sqrt{4m_a^2 - \sqrt{2}\, b_a x}.$$

Calculados $(b + c)$ y $(b - c)$, se obtienen fácilmente b y c.

Segunda solución : Hagamos

$$b + c = x$$
$$bc = y.$$

Tenemos

$$(b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = 4m_a^2 + 2y = x^2. \qquad (1)$$

Y puesto que la bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en dos segmentos CN y NB tales que:

$$bc = \mathrm{CN} \,.\, \mathrm{NB} + b_a^2 \qquad (2)$$

y en nuestro caso

$$\mathrm{CN} = m_a + \mathrm{MN} \quad \text{y} \quad \mathrm{NB} = m_a - \mathrm{MN}.$$

Y como por otra parte

$$\frac{\mathrm{CN}}{b} = \frac{\mathrm{NB}}{c} = \frac{2m_a}{b + c}$$

de donde

$$\mathrm{CN} = \frac{2m_a b}{b + c}, \quad \mathrm{NB} = \frac{2m_a c}{b + c}$$

y entonces

$$\mathrm{CN} \,.\, \mathrm{NB} = \frac{4m_a^2 bc}{(b + c)^2}$$

y reemplazando en (2), se tiene

$$bc = \frac{4m_a^2 bc}{(b + c)^2} + b_a^2$$

o bien

$$y = \frac{4m_a^2 y}{x^2} + b_a^2$$

de donde

$$y = \frac{b_a^2 x^2}{x^2 - 4m_a^2}$$

y de (1) sacamos

$$y = \frac{x^2 - 4m_a^2}{2}$$

igualando

$$\frac{2b_a^2 x^2}{x^2 - 4m_a^2} = x^2 - 4m_a^2$$

de donde

$$x^2 = 4m_a^2 + b_a^2 \pm \sqrt{(4m_a^2 + b^2)^2 - 16m_a^4}.$$

Encontrado x^2, se tiene $b + c = \sqrt{x^2}$ y también

$$y = \frac{x^2 - 4m_a^2}{2} = \frac{b_a^2 \pm \sqrt{(4m_a + b_a)^2 - 16m_a^4}}{2}.$$

Y ahora podemos considerar a b y c como las raíces de una ecuación de 2° grado de la cual conocemos la suma de las raíces $(b + c)$ y el producto bc.

Tercera solución. — Llamando d a la distancia MN y n a LN, se tiene, tomando la potencia del punto N

$$(m_a + d)(m_a - d) = b_a \times n$$

o bien

$$m_a^2 - d^2 = b_a n.$$

Pero siendo el triángulo LMN rectángulo,

$$m_a^2 + d^2 = n^2$$

de donde

$$n^2 + b_a n - 2m_a^2 = 0$$

que nos da

$$n = -\frac{b_a}{2} \pm \sqrt{\frac{b_a^2}{4} + 2m_a^2}$$

y luego

$$d = \sqrt{n^2 - m_a^2}$$

y en el triángulo AMN se conocen los tres lados y puede calcularse el ángulo AMN = 2C y por lo tanto se obtiene C.

Podría calcularse C del triángulo LMN que nos da

$$\operatorname{tg}(45^\circ - C) = \frac{d}{m_a}.$$

Construcción gráfica. — La ecuación

$$n^2 + b_a n - 2m_a^2 = 0$$

nos da el camino para la solución gráfica del problema.

En efecto, para obtener n basta tomar un círculo de diámetro b_a, llevar una tangente de magnitud $\sqrt{2}\, m_a$ (que es la diagonal del cuadrado de lado m_a). Unir el extremo de esa tangente con el centro del círculo y las raíces de la ecuación son la secante entera y su parte externa. Obtenido n, con centro en L y radio n, se obtiene el punto N y por lo tanto A.

Ejemplo numérico. — *Sea* $A = 90°$, $m_a = 50$ m ; $b_a = 44.8288$ m.
Tomando la ecuación :

$$n^2 + b_a n - 2m_a^2 = 0$$

donde es

$$n = -\frac{b_a}{2} + \sqrt{\frac{b_a^2}{4} + 2m_a^2}.$$

Se tiene

$$\frac{b_a}{2} = 22.4144 \qquad \log\left[\frac{b_a^2}{4} + 2m_a^2\right] = 3.7405526$$

$$\frac{b_a^2}{4} = 502.4053 \qquad \log\sqrt{\frac{b_a^2}{4} + 2m_a^2} = 1.8702763$$

$$2m_a^2 = \underline{5000.0000}$$

$$\frac{b_a^2}{4} + 2m_a^2 = 5502.4053 \qquad \sqrt{\frac{b_a^2}{4} + 2m_a^2} = 74.1782$$

$$m_a^2 = 2500.$$

$$n = -22.4144 + 74.1782 = 51.7638$$

$$\cos(45° - C) = \frac{50.0000}{51.7638}$$

$$\log 50.0000 = 1.6989700$$

$$\log 51.7638 = \underline{1.7140261}$$

$$\log\cos(45° - C) = 9.9849439$$

$$45° - C = 15°$$

$$C = 30°.$$

Y es claro que encontrado C se tiene en seguida :

$$b = 2m_a \cos C = 2 \times 50 \cos 30° = 86.60 \text{ m}.$$

$$c = 2m_a \operatorname{sen} C = 2 \times 50 \operatorname{sen} 30° = 50.00 \text{ m}.$$

Otra solución. — Partiendo de la ecuación:

$$\operatorname{sen} C + \cos C = \frac{2\sqrt{2}m_a}{b_a} \operatorname{sen} C \cos C$$

y haciendo

$$\frac{\sqrt{2}\, m_a}{b_a} = K$$

se obtiene

$$\operatorname{sen} C + \cos C = 2K \operatorname{sen} C \cos C.$$

Y siendo según (3) y (4) del nº 71:

$$\operatorname{sen} C = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{1 + \operatorname{sen} 2C} \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen} 2C})$$

$$\cos C = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{1 + \operatorname{sen} 2C} \mp \sqrt{1 - \operatorname{sen} 2C}),$$

se tiene

$$\pm\sqrt{1 + \operatorname{sen} 2C} = \frac{2K}{4}(1 + \operatorname{sen} 2C - 1 + \operatorname{sen} 2C) = K \operatorname{sen} 2C,$$

o bien

$$1 + \operatorname{sen} 2C = K^2 \operatorname{sen}^2 2C,$$

y también

$$K^2 \operatorname{sen}^2 2C - \operatorname{sen} 2C - 1 = 0,$$

de donde

$$\operatorname{sen} 2C = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4K^2}}{2K^2}.$$

Hay que rechazar el valor negativo, puesto que siendo $C < 90°$, debe ser positivo el sen 2C.

Ejemplo numérico. Sea A = 90°, $m_a = 50$ m *y* $b_a = 44.8288$ m. — Se tiene

$$\operatorname{sen} 2C = \frac{1 + \sqrt{1 + 4K^2}}{2K^2},$$

donde es

$$K = \frac{\sqrt{2} \times 50}{44.8283}.$$

$$\begin{aligned}
\log\sqrt{2} &= 0.1505150 \\
\log 50 &= \underline{1.6989700} \\
&\ 1.8494850 \\
\log 44.8283 &= \underline{1.6515568} \\
\log K &= 0.1979282 \\[6pt]
2\log K &= 0.3958564 \\
\log 4 &= \underline{0.6020600} \\
\log 4K^2 &= 0.9979164 \\[6pt]
2\log K &= 0.3958564 \\
\log 2 &= \underline{0.3010300} \\
\log K^2 &= 0.6968864
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4K^2 &= 9.95214 \\
1 + 4K^2 &= 10.95214 \\
\log(1 + 4K^2) &= 1.0394990 \\
\log\sqrt{1 + 4K^2} &= 0.5197495 \\
\sqrt{1 + 4K^2} &= 3.30940 \\
\operatorname{sen} 2C &= \frac{1 + 3.30940}{4.97607} \\
\log 4.30940 &= 0.6344168 \\
\log 4.97607 &= \underline{0.6968864} \\
\log \operatorname{sen} 2C &= 9.9375303 \\
2C &= 60^\circ \\
C &= 30^\circ.
\end{aligned}$$

Problema : Inscribir en un sector circular, un rectángulo que tenga dos vértices sobre el arco de círculo de manera que tenga una superficie máxima. — Sea el sector circular de centro O y radio R y de ángulo 2α y consideremos el rectángulo inscripto ABCD, de lados $AD = a$ y $AB = b$. Llamemos x al ángulo OAL, siendo OL la bisectriz del ángulo MON.

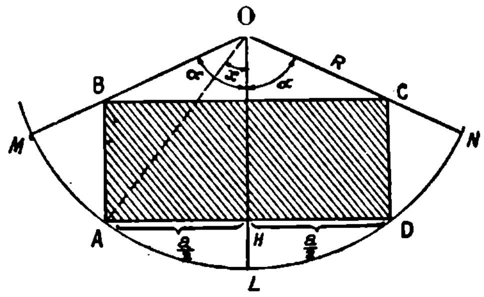


Figura 138

El área del rectángulo es

$$S = ab. \qquad (1)$$

Cuando x tiende a cero, o cuando el punto A se acerca al punto L, el área tiende a cero. Cuando x tiende a α, el punto A se acerca a M y el área tiende a cero. Luego el área tiene un valor máximo para un valor de x comprendido entre 0 y α.

Del triángulo rectángulo OHA, sacamos

$$a = 2R \operatorname{sen} x$$

Y el triángulo ABO nos da

$$b = R\frac{\operatorname{sen}(\alpha - x)}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

$\dfrac{b}{\operatorname{sen}(\alpha - x)} = \dfrac{R}{\operatorname{sen}[180^\circ - (\alpha - x + x)]}$

Y reemplazando en (1) se obtiene

$$S = \frac{2R^2}{\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\alpha - x) \qquad (2)$$

cuyo máximo corresponderá al máximo de la función

$$y = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} (\alpha - x)$$

y se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \operatorname{sen} (\alpha - x) - \operatorname{sen} x \cos (\alpha - x) = 0$$

o bien

$$\operatorname{sen} [(\alpha - x) - x] = \operatorname{sen} (\alpha - 2x) = 0$$

$$2x = \alpha \qquad x = \frac{\alpha}{2}$$

es decir que el rectángulo de área máxima se obtiene cuando OA es la bisectriz del ángulo MOL.

Puede llegarse a lo mismo, poniendo la relación (2) en la siguiente forma

$$S = \frac{R^2}{\operatorname{sen} \alpha} [\cos (\alpha - 2x) - \cos \alpha]$$

cuyo máximo corresponde al máximo de

$$\cos (\alpha - 2x)$$

o bien cuando

$$\alpha - 2x = 0 \qquad x = \frac{\alpha}{2}.$$

271. *Problema : Por los vértices* A, B, C *de un triángulo se trazan tres rectas* AB′C′, BC′A′ *y* CA′B′ *que forman con los lados* BC, CA *y* AB *respectivamente opuestos a los vértices de donde salen las rectas y en el mismo sentido, un ángulo x. Hallar los lados y la superficie del triángulo* A′B′C′ *que así se forma. Determinar el máximo y mínimo del área del triángulo* A′B′C′ (fig. 139). — Sean a', b', c', los lados del triángulo AB′C′, A′, B′ y C′ sus ángulos y S′ la superficie.

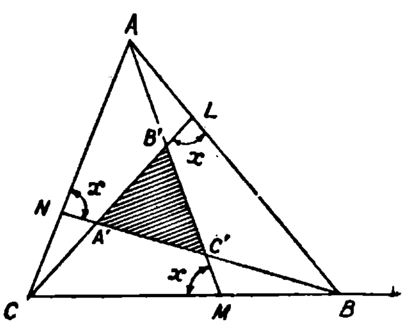


Figura 139

Los cuadriláteros

$$NA'LA, \quad LB'MB \text{ y } MC'NC$$

son inscriptibles por tener sus ángulos opuestos suplementarios.

Luego se tiene $A' = A$, $B' = B$ y $C' = C$ y los triángulos ABC y A′B′C′ son semejantes. Vamos a buscar la relación de semejanza.

Para ello tenemos

$$a' = AC' - AB'$$

y también

$$\frac{AC'}{\operatorname{sen} ABC'} = \frac{c}{\operatorname{sen} C'}$$

$$\frac{AB'}{\operatorname{sen} ACB'} = \frac{b}{\operatorname{sen} B'}.$$

Por otra parte

$$ABC' = 180° - (A + x)$$

$$ACB' = 180° - A - \widehat{CLA} = 180° - A - (180° - x) = x - A.$$

Luego

$$\operatorname{sen} ABC' = \operatorname{sen}(x + A)$$

$$\operatorname{sen} ACB' = \operatorname{sen}(x - A).$$

Se tiene, teniendo en cuenta el teorema del seno

$$\frac{AC'}{\operatorname{sen}(x + A)} = \frac{AB'}{\operatorname{sen}(x - A)} = \frac{a}{\operatorname{sen} A}$$

o también

$$\frac{AC' - AB'}{\operatorname{sen}(x + A) - \operatorname{sen}(x - A)} = \frac{a'}{2 \operatorname{sen} A \cos x} = \frac{a}{\operatorname{sen} A}$$

y resulta

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = 2 \cos x$$

y también

$$\frac{S'}{S} = 4 \cos^2 x.$$

Cuando x crece de 0° a 90°, el lado a' decrece de $2a$ a 0 y la superficie S′ de 4S a 0. Cuando x crece de 90° a 180° a' decrece de 0 a $-2a$ y S′ crece de 0 a 4S.

272. *Reducir un ángulo al centro de estación.* — Cuando no se puede instalar el instrumento en el vértice C, para medir el ángulo BCA = C, se hace estación en el punto O próximo a C y se mide el ángulo BOA = O y la distancia r = OC y el ángulo COB. Conocidos los elementos a y b del triángulo ACB, se puede calcular la corrección que hay que hacerle al ángulo O para obtener el ángulo C. Esta operación a aplicar a O es lo que se llama reducción al *centro* de estación.

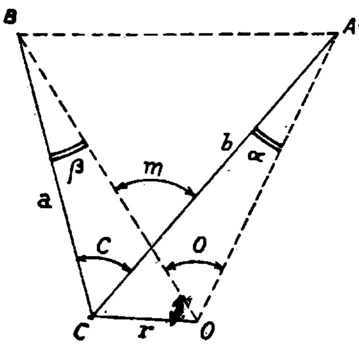


Figura 140

Se tiene en la figura 140

$$C + \beta = O + \alpha$$

de donde

$$C = O + \alpha - \beta = O + \Delta.$$

Siendo Δ el valor $\alpha - \beta$, es decir la corrección que hay que aplicarle al ángulo O para obtener C. De los triángnlos BCO y COA se saca

$$\frac{a}{r} = \frac{\text{sen COB}}{\text{sen}\,\beta}, \qquad \frac{b}{r} = \frac{\text{sen COA}}{\text{sen}\,\alpha},$$

de donde

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{r\,\text{sen COA}}{b}, \quad \text{y} \quad \text{sen}\,\beta = \frac{r\,\text{sen COB}}{a}.$$

Pero por ser los ángulos α y β pequeños, ya que la distancia r es pequeña con respecto a a y b, se tiene:

$$\text{sen}\,\alpha = \text{arc.}\,\alpha = \alpha''\,\text{sen}\,1'' \quad \text{y} \quad \text{sen}\,\beta = \text{arc.}\,\beta = \beta''\,\text{sen}\,1''.$$

$\alpha'' = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,1''}$

Luego, si expresamos a α y a β en segundos

$$\alpha'' = \frac{r\,\text{sen COA}}{b\,\text{sen}\,1''}, \qquad \beta'' = \frac{r\,\text{sen COB}}{a\,\text{sen}\,1''}.$$

Resulta:

$$\Delta'' = \alpha'' - \beta'' = \frac{r}{\text{sen}\,1''}\left(\frac{\text{sen COA}}{b} - \frac{\text{sen COB}}{a}\right).$$

Y como

$$\frac{1}{\operatorname{sen} 1''} = 206265$$

$$\Delta'' = 206265\, r \left(\frac{\operatorname{sen} \mathrm{COA}}{b} - \frac{\operatorname{sen} \mathrm{COB}}{a}\right).$$

Ejemplo :

$b = 2875.40$ m

$a = 3147.20$ m

$r = 5.80$ m

$\mathrm{COA} = 120°15'20''$

$\mathrm{COB} = 70°10'40''$

$$\frac{\operatorname{sen} \mathrm{COA}}{b} = 0.0003004$$

$$\frac{\operatorname{sen} \mathrm{COB}}{a} = 0.0002989$$

$$\frac{\operatorname{sen} \mathrm{COA}}{b} - \frac{\operatorname{sen} \mathrm{COB}}{a} = 0{,}0000015$$

$\Delta'' = 18''$

$$\begin{array}{r} 120°15'20'' \\ 70\ 10\ 40 \\ \hline \mathrm{O} = 50'04'40'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \operatorname{sen} \mathrm{COA} = 9.93641 \\ b = 3.45870 \\ \hline \bar{4}.47771 \\ \cos \mathrm{COB} = 9.97347 \\ a = 3.49792 \\ \hline \bar{4}.47555 \\ \hline 206265 = 5.3144256 \end{array}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \mathrm{COA}}{b} - \frac{\operatorname{sen} \mathrm{COB}}{a} = \frac{\bar{6}.1761913}{9.4906169}$$

$$\begin{array}{r} r = 0.76343 \\ \hline 0.2540469 \end{array}$$

$$\mathrm{C} = 50°04'40'' + 18'' = 50°04'58''.$$

273. *Problema de la carta : Conocida la posición de tres puntos* ABC *situados sobre un plano, se quiere determinar la posición de un cuarto punto* M *del plano desde el cual las distancias* AB *y* BC *se han visto bajo los ángulos* α y β. — Sea (fig. 141) AB y BC los segmentos conocidos, así como el ángulo ABC. Desde el punto M se ven los segmentos AB y BC, bajo los ángulos α y β que se conocen. Se trata de determinar los ángulos x e y y es claro que conocidos esos elementos, será fácil calcular los demás elementos desconocidos.

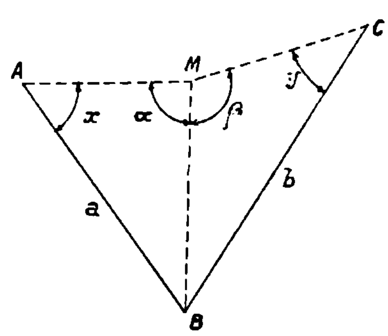


Figura 141

Hagamos entonces $\widehat{\mathrm{MAB}} = x$ y $\widehat{\mathrm{MCB}} = y$.

Tenemos en primer término que

$$x + y + B + \alpha + \beta = 360^\circ.$$

Lo que nos da

$$\frac{x+y}{2} = 180^\circ - \frac{B+\alpha+\beta}{2}.$$

Por otra parte, los triangulos MAB y MCB, nos dan, aplicando el teorema del seno:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{BM} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{AB},$$

$$\frac{\operatorname{sen} y}{BM} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{BC}.$$

De donde se saca, haciendo AB $= a$ y BC $= b$,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a \operatorname{sen} \beta}.$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que ya hemos resuelto en el nº 139.

Repitiendo la resolución tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}} = \frac{b \operatorname{sen} \alpha - a \operatorname{sen} \beta}{b \operatorname{sen} \alpha + a \operatorname{sen} \beta}$$

o bien

$$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{1 - \frac{a \operatorname{sen} \beta}{b \operatorname{sen} \alpha}}{1 + \frac{a \operatorname{sen} \beta}{b \operatorname{sen} \alpha}} \operatorname{tg} \frac{x+y}{2}$$

Haciendo

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{b \operatorname{sen} \alpha}$$

se tiene, poniendo $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$

$$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} \varphi} \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = \operatorname{tg} (45^\circ - \varphi) \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} =$$

$$= \operatorname{ctg} (45^\circ + \varphi) \operatorname{tg} \frac{x+y}{2}.$$

Lo que nos permite encontrar x e y, pues hemos calculado la semi-suma y la semi-diferencia. Encontrado x e y, se calcula

$$AM = \frac{a \operatorname{sen}(x+\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$CM = \frac{b \operatorname{sen}(y+\beta)}{\operatorname{sen}\beta}$$

$$BM = \frac{a \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen}\beta}.$$

Observación: En el caso en que

$$\alpha + \beta + B = 180^\circ$$

se obtiene

$$x + y = 180^\circ$$

de donde

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} y$$

y las fórmulas se convierten en las siguientes:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = \frac{b \operatorname{sen}\alpha}{a \operatorname{sen}\beta} = \operatorname{ctg}\varphi = 1.$$

Es decir

$$\varphi = 45^\circ.$$

Y entonces

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \operatorname{tg} 0^\circ \cdot \operatorname{tg} 90^\circ = 0 \times \infty.$$

En ese caso el problema es indeterminado.

Se puede resolver el problema en forma geométrica. Basta para ello trazar sobre AB el arco capaz del ángulo α y sobre BC el arco capaz del ángulo β (fig. 142). Los arcos así trazados tienen en general dos puntos comunes, el punto B y el punto M. Este último da la solución del problema. En el caso particular en que $\alpha + \beta + B = 180^\circ$, el cuadrilátero ABCM resulta inscriptible. En tal caso las dos circunferencias se confunden en una sola y la posición del punto M queda indeterminada.

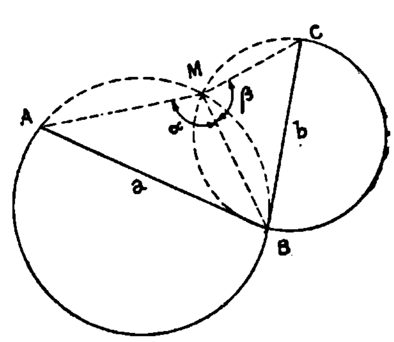


Figura 142

En los ejemplos siguientes, uno para $B < 180°$ y otro para $B > 180°$, se da una forma de ordenar los cálculos. A la derecha van los logaritmos. Se calcula primero log de a, b, sen α y sen β, lo que nos permite calcular φ y por lo tanto se tiene $\frac{x+y}{2}$ y $(45° + \varphi)$ lo que nos da log tg $\frac{x-y}{2}$, y entonces $\frac{x-y}{2}$, obteniéndose x e y. Luego se obtiene $(\alpha + x)$ y $(\beta + y)$, pudiendo hacerse la suma $\alpha + x + \beta + y + B$ que sirve para controlorear los cálculos. Luego sen $(\alpha + x)$ y sen $(\beta + y)$ lo que nos permite calcular AM, CM y BM, este último, por dos caminos que también sirvan de control.

Ejemplo I:

$$a = 280.15 \text{ m} \qquad B = 125^\circ 09' 12''$$
$$b = 380.74 \text{ m} \qquad \alpha = 88^\circ 30' 15''$$
$$\beta = 70^\circ 10' 11''$$

$$\alpha + \beta + B = 277^\circ 49' 38''$$
$$x + y = 82^\circ 10' 22''$$

$$\frac{x+y}{2} = 41^\circ 05' 11''$$
$$\frac{x-y}{2} = 8^\circ 48' 32''$$

$$x = 49^\circ 53' 43''$$
$$y = 32^\circ 16' 39''$$

$$\varphi = 34^\circ 55' 13''$$
$$45^\circ + \varphi = 79^\circ 55' 13''$$

$$\alpha + x = 132^\circ 23' 58''$$
$$\beta + y = 102^\circ 26' 50''$$

$$\alpha + \beta + B + x + y = 360^\circ 00' 00''$$
$$BM = 216.12 \text{ m}$$
$$AM = 208.67 \text{ m}$$
$$CM = 395.19 \text{ m}$$

$$a = 2.44739 \qquad b = 2.58063$$
$$\operatorname{sen} \alpha = 9.99627 \quad \operatorname{sen} \beta = 9.97345$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = 2.45112$$
$$\frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = 2.60718$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} \div \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = 9.84394$$

$$\operatorname{ctg}(45^\circ + \varphi) = 9.24985$$
$$\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = 9.94049$$

$$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = 9.19034$$

$$AM = 2.31945$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + x) = 9.86833$$
$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = 2.45112$$
$$\operatorname{sen} x = 9.88359$$

$$BM = 2.33471$$
$$BM = 2.33469$$

$$\operatorname{sen} y = 9.72756$$
$$\frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = 2.60713$$
$$\operatorname{sen}(\beta + y) = 9.98967$$

$$CM = 2.59680$$

Ejemplo II.

$$a = 250.20 \text{ m} \qquad B = 214^\circ 30' 15''$$
$$b = 188.95 \text{ m} \qquad \alpha = 47^\circ 20' 10''$$
$$\beta = 38^\circ 30' 12''$$

$\alpha + \beta + B = 300^\circ 20' 38''$	$a = 2.39829 \quad b = 2.27635$
$x + y = 59^\circ 39' 22''$	$\operatorname{sen} \alpha = 9.86649 \quad \operatorname{sen} \beta = 9.79481$
$\frac{x+y}{2} = 29^\circ 49' 41''$	$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = 2.53180$
$\frac{x-y}{2} = -1^\circ 53' 53''$	$\frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = 2.48154$
$x = 27^\circ 55' 48''$	$\operatorname{tg} \varphi = 0.05026$
$y = 31^\circ 43' 34''$	
$\varphi = 48^\circ 18' 29''$	$\operatorname{ctg}(45^\circ + \varphi) = 8.76193n$
$45^\circ + \varphi = 93^\circ 18' 29''$	$\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = 9.75842$
$\alpha + x = 75^\circ 15' 58''$	$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = 8.52035n$
$\beta + y = 70^\circ 13' 46''$	
$\alpha + \beta + B + x + y = 359^\circ 59' 59''$	$AM = 2.51728$
$BM = 159.37 \text{ m}$	$\operatorname{sen}(\alpha + x) = 9.98548$
$AM = 329.06 \text{ m}$	$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = 2.53180$
$CM = 285.20 \text{ m}$	$\operatorname{sen} x = 9.67061$
	$BM = 2.20241$
	$BM = 2.20242$
	$\operatorname{sen} y = 9.72088$
	$\frac{b}{\operatorname{sen} y} = 2.48154$
	$\operatorname{sen}(\beta + y) = 9.97361$
	$CM = 2.45515$

274. *Problema de la ubicación de un trapecio. Se da un segmento* AB $= a$ *y los ángulos* α *y* β *que forman dos direcciones* AX *y* BY *con* AB (fig. 143). *Se quiere trazar una paralela* MN *a* AB *de modo que el área del trapecio* AMNB *tenga un valor dado* S. — Se conoce entonces la base AB $= a$, los ángulos α y β y el área S. Llamemos x a la base desconocida MN e y a la altura del trapecio. Tenemos que

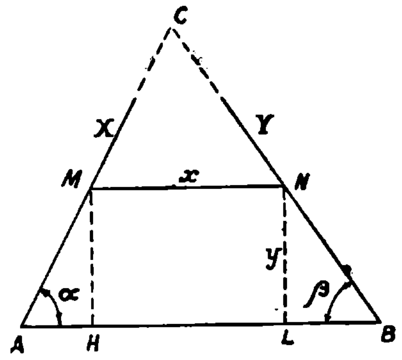


Figura 143

$$S = \frac{a + x}{2} y. \tag{1}$$

Y también, bajando desde M y N las normales sobre AB, se tiene:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{\mathrm{AH}}, \qquad \operatorname{tg} \beta = \frac{y}{\mathrm{NL}}.$$

Y entonces

$$a - x = \mathrm{AH} + \mathrm{LB} = y (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)$$

de donde

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{a - x}{y}. \tag{2}$$

Multiplicando (1) y (2) se tiene:

$$2\mathrm{S} (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) = (a + x)(a - x) = a^2 - x^2.$$

Es decir que:

$$x = \sqrt{a^2 - 2\mathrm{S} (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)}$$

o también

$$x = \sqrt{a^2 - 2\mathrm{S} \frac{\operatorname{sen} (\alpha + \beta)}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}}.$$

Luego se tiene

$$y = \frac{2\mathrm{S}}{a + x}.$$

Y ahora es fácil calcular AM y BN

$$\mathrm{AM} = \frac{y}{\operatorname{sen} \alpha}, \quad \mathrm{BN} = \frac{y}{\operatorname{sen} \beta}.$$

Se llega al mismo resultado, prolongando AX y BY hasta encontrarse en C, y llamando S' al área del triángulo ACB. Resulta entonces que el área del triángulo MCN es $(S' - S)$ y se tiene:

$$\frac{S' - S}{S'} = \frac{x^2}{a^2} \qquad x^2 = a^2 \frac{S' - S}{S'} = a^2 - a^2 \frac{S}{S'}.$$

Pero:

$$S' = \frac{1}{2} AC \, . \, a \operatorname{sen} \alpha$$

y por otro lado

$$\frac{AC}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} (\alpha + \beta)} \qquad AC = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} (\alpha + \beta)}$$

$$S' = \frac{1}{2} \frac{a^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} (\alpha + \beta)}.$$

Luego

$$x = \sqrt{a^2 - \frac{a^2 S}{S'}} = \sqrt{a^2 - \frac{2S \operatorname{sen} (\alpha + \beta)}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}}.$$

Las fórmulas precedentes valen naturalmente para cuando sean α y β agudos u obtusos, teniendo en cuenta los signos de las ctg o el signo del seno de $(\alpha + \beta)$. Cuando $(\alpha + \beta)$ es igual a 180°, AM y BN son paralelos y $x = a$ e $y = \frac{S}{a}$.

Si $\alpha + \beta \lesseqgtr 180°$, se tiene $x \lesseqgtr a$ e $y \gtreqless \frac{S}{a}$.

Ejemplo : Tengamos

$$S = 1.200 \text{ m. c.}$$
$$a = 60{,}28 \text{ m.}$$
$$\alpha = 57°11'$$
$$\beta = 75°15'$$

$\operatorname{ctg} \alpha = 0.6449$	$\operatorname{sen} \alpha = 0.9671$
$\operatorname{ctg} \beta = 0.2633$	$\operatorname{sen} \beta = 0.8404$
$\operatorname{ct} \alpha + \operatorname{ct} \beta = 0.9082$	
$a^2 = 3633.68$	$y = \frac{2400}{98.41} = 24.39 \text{ m}$
$2S (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) = 2179.68$	
$x^2 = 1454.00$	$AM = \frac{24.39}{0.9671} = 25.22 \text{ m}$
$x = 38.13 \text{ m}$	
$a = 60.28$	$BN = \frac{2439}{0.8404} = 29.03 \text{ m}$
$a + x = 98.41$	

TERCERA PARTE

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

CAPÍTULO I

FÓRMULAS FUNDAMENTALES DE LA TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

275. El objeto de la trigonometría esférica es la determinación mediante el cálculo, de la medida de los elementos de un triángulo esférico (lados y ángulos) cuando sean dados los elementos necesarios para que el triángulo quede determinado. Consideramos los triángulos esféricos convexos, es decir aquellos cuyos lados y ángulos sean menores de una semicircunferencia.

Suponemos conocidos los elementos de la geometría del espacio y las propiedades fundamentales del triángulo esférico. Así damos por sentado:

Que toda sección hecha en la esfera por un plano, es un círculo.

Dos puntos de la superficie esférica que no estén en los extremos de un diámetro determinan un círculo máximo.

Dos círculos máximos dividen a la esfera en partes iguales.

Para determinar un círculo menor se necesitan tres puntos sobre la superficie esférica.

Dos círculos máximos de la misma esfera se dividen en partes iguales.

La intersección de dos esferas es un círculo cuyo plano es normal a la línea de los centros y se encuentra sobre ésta.

Se llaman polos de un círculo trazado en la esfera, los extremos del diámetro normal al plano del círculo. Todos los puntos de una circunferencia trazada sobre una esfera se encuentran igualmente distantes de cada polo.

Los arcos de círculo máximo comprendidos entre las circunferencias máximas y los polos de éstos, son cuadrantes perpendiculares a a la circunferencia.

Todo triángulo esférico consta de tres ángulos y tres lados, donde los lados son arcos de círculo máximo. Los ángulos son los formados por esos arcos y se miden, como todo ángulo de dos curvas, por el ángulo de sus tangentes en los vértices del triángulo. El ángulo de ellas es el ángulo del diedro formado por los planos correspondientes al círculo máximo de cada uno de los lados y cuya arista es el radio de la esfera que va al vértice.

Los lados y ángulos del triángulo esférico se expresan en general en grados, minutos y segundos sexagesimales, pudiendo medirse también en grados centesimales o en radianes.

Cuando el triángulo pertenezca a una esfera de radio R, el triedro que proyecta este triángulo desde el centro de la esfera individualiza en la esfera concéntrica de radio igual a la unidad, otro triángulo esférico cuyos ángulos son iguales a los del triángulo primitivo y cuyos lados tienen la misma expresión en grados, minutos y segundos, pero cuya longitud es tal que si la del triángulo de radio uno lo designamos respectivamente por a, b y c expresados en grados sexagesimales para cada lado, las del triángulo de radio R medido en metros valen respectivamente $\frac{\pi a R}{180}$, $\frac{\pi b R}{180}$ y $\frac{\pi c R}{180}$ también expresados en metros. Estudiaremos siempre los triángulos sobre la esfera de radio igual a la unidad, y es claro que resulta fácil pasar a los correspondientes en la esfera de radio R.

Designaremos en general un triángulo esférico con las letras A, B y C. Los ángulos en los vértices por A, B y C y los lados opuestos a esos vértices respectivamente por a, b y c.

Suponemos al lector familiarizado con las propiedades fundamentales que se estudian en los elementos de geometría y así damos por conocidas las propiedades:

En todo triángulo esférico, un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos o mayor que su diferencia.

La suma de los tres lados está comprendida entre cero y 360°.

La suma de los tres ángulos está comprendida entre dos rectos y seis rectos, es decir, $180^\circ < A + B + C < 540^\circ$.

Se llama *exceso esférico*, la diferencia entre la suma de los tres ángulos de un triángulo y 180°. Lo designaremos por 2ε y deberá tenerse $2\varepsilon = A + B + C - 180^\circ$. Es decir, que el exceso esférico varía entre cero y 360°, o sea $0 < 2\varepsilon < \cancel{360^\circ}$. 180

En todo triángulo esférico, a lados iguales se oponen ángulos iguales y recíprocamente.

Un ángulo cualquiera aumentado en 180° es mayor que la suma de los otros dos, es decir, $A + 180^\circ > B + C$, etc.

En todo triángulo esférico, a mayor ángulo se opone mayor lado y recíprocamente.

Dos triángulos esféricos son iguales: *a*) Si tienen sus tres lados iguales; *b*) Si tienen dos lados iguales e igual el ángulo comprendido; *c*) Si tienen un lado igual e iguales los ángulos adyacentes a este lado; *d*) Si tienen los tres ángulos iguales.

Si se prolongan los radios que pasan por los vértices de un triángulo esférico más allá del centro, se forma del otro lado de la superficie esférica otro triángulo simétrico del primero.

276. *Triángulos esféricos polares.* — Si desde los vértices de un triángulo esférico como polos, se describen tres arcos de círculo máximo, se formará un segundo triángulo A'B'C' que se llama *polar* del primero ABC.

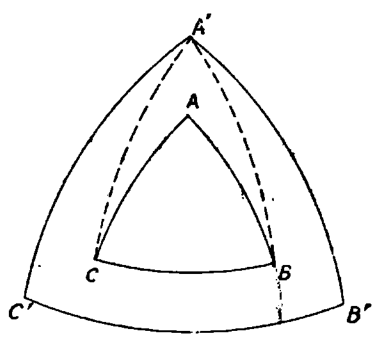


Figura 144

Si el triángulo ABC es polar de A'B'C', recíprocamente A'B'C' es polar de A'B'C'.

Siendo B el polo del arco A'C' (fig. 144), A'B es un cuadrante y siendo C el polo de A'B', A'C es un cuadrante. Luego A' dista un cuadrante de B y de C. Es decir que A' es un polo del arco BC y lo mismo se demostraría para los otros vértices, es decir, que ABC es el polar de A'B'C'.

277. *En dos triángulos esféricos polares, cada ángulo de uno de ellos tiene por medida 180° menos el lado opuesto.*

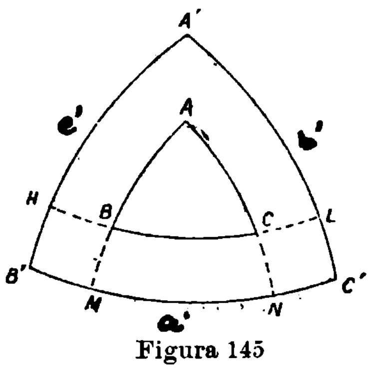


Figura 145

Sea el triángulo ABC (fig. 145), y prolonguemos sus lados hasta encontrar los del triángulo A'B'C'.

Siendo A el polo de B'C', AM y AN son cuadrantes, es decir, que el arco MN es la medida del ángulo A; luego MN = A.

Siendo B' el polo de AC, B'N es un cuadrante y lo mismo, siendo C' el polo de AB, C'M es un cuadrante; luego:

$$B'N + C'M = 180°.$$

Pero se tiene

$$A = MN = MC' - NC' = MC' - (B'C' - B'N),$$

o bien

$$A = 90° - (B'C' - 90°) = 180° - B'C'.$$

Lo mismo se demostraría para los demás ángulos, y llamando a' b' y c' los lados del triángulo $A'B'C'$ polar de ABC, se tiene

$$A = 180^\circ - a', \qquad B = 180^\circ - b', \qquad C = 180^\circ - c'$$

o

$$a' = 180^\circ - A, \qquad b' = 180^\circ - B, \qquad c' = 180^\circ - C.$$

Lo mismo se demuestra con respecto a los ángulos. Tomando la misma figura 145, se tiene que la medida del ángulo A' es HL, por ser A' un polo de BC. Y se tiene :

$$A' = HL = HC + CL = HC + BL - BC,$$

pero por ser C polo de $A'B'$, $HC = 90^\circ$, y por ser B, polo de $A'C'$, $BL = 90^\circ$, luego:

$$A' = 180^\circ - BC = 180^\circ - a,$$

y en forma análoga se tendría,

$$B' = 180^\circ - b, \qquad C' = 180^\circ - c,$$

o

$$a = 180^\circ - A', \qquad b = 180^\circ - B', \qquad c = 180^\circ - C'.$$

278. Un triángulo esférico está en general individualizado, cuando se conocen *tres* de sus seis elementos fundamentales: lados y ángulos, lo que indica que de las relaciones entre esos seis elementos, relaciones independientes entre sí, solamente pueden ser *tres* y no más de tres.

Determinaremos esas *relaciones fundamentales de la trigonometría esférica.*

279. *Teorema* (llamado teorema del coseno): *En todo triángulo esférico, el coseno de un lado es igual a la suma de los productos de los cosenos de los otros dos, con el de los senos de esos dos por el coseno del ángulo comprendido.* — Vale decir que:

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A.$$

Admitamos primero que b y c son menores que un cuadrante, es decir, $b < 90^\circ$ y $c < 90^\circ$. Sea el triángulo ABC (fig. 146) que pertenece a una esfera de centro O y radio igual a la unidad. Tracemos en A las tangentes a los lados b y c y sean ellas respectivamente AE y AF. La AE se encuentra con el radio OC prolongado, por ser dos rectas que están en un plano. Sea E el punto de encuentro. Lo mismo, la tangente al lado c se encuentra con la prolongación del radio OB, por estar las dos rectas en el plano del círculo correspondiente al lado c. Sea F el punto de encuentro. El ángulo EAF mide el ángulo A del triángulo esférico. Uniendo E con F se tiene en la figura 146:

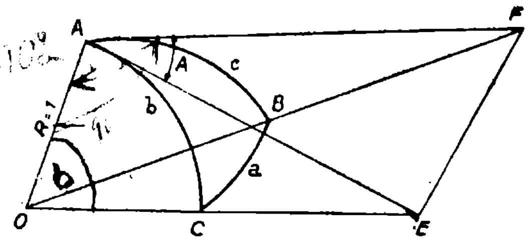


Figura 146

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AO}} = \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b}, \quad \frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{OA}} = \sec b = \frac{1}{\cos b}, \quad \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AO}} = \operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{sen} c}{\cos c},$$

$$\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OA}} = \sec c = \frac{1}{\cos c},$$

y aplicando el teorema del coseno a los triángulos planos EOF y EAF, se tiene, observando que el ángulo EOF está medido por a:

$$\overline{\mathrm{EF}}^2 = \overline{\mathrm{OE}}^2 + \overline{\mathrm{OF}}^2 - 2\mathrm{OE}\,.\,\mathrm{OF}\cos \mathrm{EOF},$$

$$\overline{\mathrm{EF}}^2 = \overline{\mathrm{AE}}^2 + \overline{\mathrm{AF}}^2 - 2\mathrm{AE}\,.\,\mathrm{AF}\cos \mathrm{EAF},$$

y teniendo en cuenta que

$$\overline{\mathrm{OE}}^2 - \overline{\mathrm{AE}}^2 = \overline{\mathrm{OA}}^2 = 1, \qquad \overline{\mathrm{OF}}^2 - \overline{\mathrm{AF}}^2 = \overline{\mathrm{OA}}^2 = 1$$

se tiene restando: y dividiendo por 2 :

$$0 = 1 + 1 - 2\mathrm{OE}\,.\,\mathrm{OF}\cos \mathrm{EOF} + 2\mathrm{AE}\,.\,\mathrm{AF}\cos \mathrm{EAF},$$

o bien:

$$0 = 1 - \frac{1}{\cos b} \cdot \frac{1}{\cos c} \cdot \cos a + \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b} \cdot \frac{\operatorname{sen} c}{\cos c} \cos \mathrm{A},$$

o también:

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos \mathrm{A}. \tag{1}$$

Pero habíamos supuesto que $b < 90^\circ$ y $c < 90^\circ$. Vamos a mostrar que la fórmula es general. En efecto, supongamos (fig. 147), que es $b > 90^\circ$ y $c < 90^\circ$ y sea el triángulo ABC. Completemos el uso correspondiente al ángulo C y tendremos el triángulo ABC′, que tiene el lado $c < 90^\circ$, el lado $a' = BC' = 180^\circ - a$, el lado $b' = AC' = 180^\circ - b$, menor que 90°, por ser $b > 90^\circ$. El ángulo, $C' = C$, y los ángulos $A' = 180^\circ - A$, $B' = 180^\circ - B$. El triángulo ABC′, tiene dos lados b' y c, menores que 90°, luego podemos aplicarle la relación (1) y se tiene:

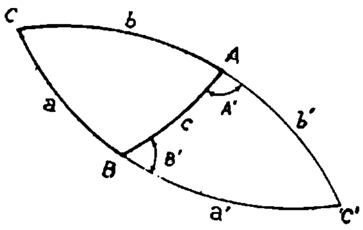


Figura 147

$$\cos a' = \cos b' \cos c + \operatorname{sen} b' \operatorname{sen} c \cos A',$$

pero es:

$$\cos a' = \cos(180^\circ - a) = -\cos a, \quad \cos A' = \cos(180^\circ - A) = -\cos A,$$
$$\cos b' = \cos(180^\circ - b) = -\cos b, \quad \operatorname{sen} b' = \operatorname{sen}(180^\circ - b) = \operatorname{sen} b,$$

y reemplazando y cambiando de signo:

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A.$$

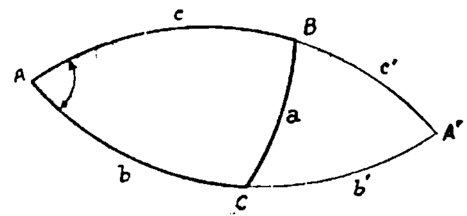


Figura 148

Supongamos ahora (fig. 148), que $b > 90^\circ$, $c > 90^\circ$. Y completemos el uso correspondiente al ángulo A, se tiene que el triángulo A′BC tiene dos lados $b' = 180^\circ - b$, y $c' = 180^\circ - c$, menores que 90°; luego podemos aplicarle la relación (1) y tenemos

$$\cos a = \cos b' \cos c' + \operatorname{sen} b' \operatorname{sen} c' \cos A'$$

pero es

$$\cos b' = -\cos b, \quad \cos c' = -\cos c, \quad \operatorname{sen} b' = \operatorname{sen} b,$$
$$\operatorname{sen} c' = \operatorname{sen} c, \quad \cos A' = \cos A$$

luego:

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$

y la fórmula es general. Se puede obtener en la misma forma para los lados b y c y se tiene así el primer grupo de fórmulas fundamentales, que demuestran el teorema.

$$
\text{I}\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}
\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A \\
\cos b = \cos a \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos B \\
\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C.
\end{array}\right.
$$

Es fácil ver que las fórmulas valen aún en el caso que uno de los lados b o c o los dos, valgan un cuadrante, puesto que son válidas para valores de b y c mayores o menores de $90°$ y tan próximas a $90°$ como se quiera.

En efecto, consideremos el triángulo de lados a $(90° \pm \sigma)$, y c, e indiquemos con A_1 el ángulo opuesto al lado a, que vale A cuando $\sigma = 0$. Se tiene:

$$\cos a = \cos(b \pm \sigma)\cos c + \operatorname{sen}(b \pm \sigma) \operatorname{sen} c \cos A_1,$$

pasando al límite, para $\sigma = 0$, se tiene la fórmula del grupo I, y lo mismo puede hacerse para el lado c.

280. *Teorema* (llamado teorema del seno): *En todo triángulo esférico, los senos de los lados son directamente proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.* — De la fórmula:

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A,$$

se saca

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c},$$

y

$$\operatorname{sen}^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}\right)^2,$$

y entonces, reemplazando $\operatorname{sen}^2 b$ y $\operatorname{sen} c^2$ respectivamente por $(1 - \cos^2 b)$ y $(1 - \cos^2 c)$, se tiene, dividiendo por $\operatorname{sen}^2 a$:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen}^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c + 2 \cos^2 b \cos^2 c}{\operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c}$$

Pero esta fórmula es simétrica con respecto a a, b y c; luego, si partiendo de la 2ª y 3ª del grupo I y por un camino igual, calculamos $\frac{\operatorname{sen}^2 B}{\operatorname{sen}^2 b}$ y $\frac{\operatorname{sen}^2 C}{\operatorname{sen}^2 c}$, obtenemos el mismo resultado, es decir que:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen}^2 a} = \frac{\operatorname{sen}^2 B}{\operatorname{sen}^2 b} = \frac{\operatorname{sen}^2 C}{\operatorname{sen}^2 c}.$$

Y como los lados y los ángulos en un triángulo esférico son menores que $180°$, el seno de cada uno de los lados y ángulos es siempre positivo, y las igualdades anteriores pueden escribirse

$$\text{II}\ldots\ldots \left\{ \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}. \right.$$

281. Tomando el polinomio:

$$P = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c,$$

agregando y restando $\cos^2 a \cos^2 b$, se tiene

$$P = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b + \cos^2 a \cos^2 b -$$
$$- (\cos^2 c + \cos^2 a \cos^2 b - 2 \cos a \cos b \cos c),$$

o bien

$$P = (1 - \cos^2 a)(1 - \cos^2 b) - (\cos c - \cos a \cos b)^2,$$

o

$$P = \operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b - (\cos c - \cos a \cos b)^2,$$

y transformando la diferencia de cuadrados en suma por diferencia:

$$P = (\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \cos c - \cos a \cos b)$$
$$(\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b - \cos c + \cos a \cos b),$$

que puede ponerse:

$$P = [\cos c - \cos (a + b)] [\cos (a - b) - \cos c],$$

y transformando en productos las diferencias de cosenos:

$$P = 4 \operatorname{sen} \frac{a + b + c}{2} \operatorname{sen} \frac{(a + b - c)}{2} \operatorname{sen} \frac{a + c - b}{2} \operatorname{sen} \frac{b + c - a}{2}.$$

Llamando $2p$ al perímetro del triángulo, se tiene

$$a + b + c = 2p,$$
$$b + c - a = 2(p - a),$$
$$a + c - b = 2(p - b),$$
$$a + b - c = 2(p - c).$$

Y la fórmula se transforma:

$$P = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c =$$
$$= 4 \operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p - a) \operatorname{sen}(p - b) \operatorname{sen}(p - c).$$

Y por lo tanto, poniendo:

$$H = \sqrt{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p - a) \operatorname{sen}(p - b) \operatorname{sen}(p - c)},$$

se obtiene:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{C}{\operatorname{sen} c} = \frac{2H}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c},$$

o también

$$\operatorname{sen} A = \frac{2H}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}, \quad \operatorname{sen} B = \frac{2H}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c}, \quad \operatorname{sen} C = \frac{2H}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}.$$

Las relaciones del grupo II, pueden escribirse todavía en la forma siguiente:

$$\text{II}' \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A \\ \operatorname{sen} b \operatorname{sen} C = \operatorname{sen} c \operatorname{sen} B \\ \operatorname{sen} c \operatorname{sen} A = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C \\ \operatorname{sen} a : \operatorname{sen} b : \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} A : \operatorname{sen} B : \operatorname{sen} C. \end{array} \right.$$

282. *Relaciones entre cinco elementos.* — Tomemos la primer relación del grupo I:

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A,$$

y reemplacemos $\cos c$ por un valor sacado de la 3ª del grupo I, se tiene

$$\cos a = \cos a \cos^2 b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos b \cos C + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$

o bien

$$\cos a (1 - \cos^2 b) = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos b \cos C + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$

poniendo en lugar de $(1 - \cos^2 b)$ su igual $\operatorname{sen}^2 b$ y dividiendo todo por $\operatorname{sen} b$, se tiene:

$$\cos a \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \cos b \cos C + \operatorname{sen} c \cos A.$$

Análoga a ésta, conteniendo tres lados y dos ángulos, obtendríamos otras cinco relaciones, con lo que formamos el siguiente grupo de fórmulas:

$$\text{III}\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} \cos a \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \cos b \cos \mathrm{C} + \operatorname{sen} c \cos \mathrm{A}, \\ \cos a \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \cos c \cos \mathrm{B} + \operatorname{sen} b \cos \mathrm{A}, \\ \cos b \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} b \cos a \cos \mathrm{C} + \operatorname{sen} c \cos \mathrm{B}, \\ \cos b \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} b \cos c \cos \mathrm{A} + \operatorname{sen} a \cos \mathrm{B}, \\ \cos c \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} c \cos a \cos \mathrm{B} + \operatorname{sen} b \cos \mathrm{C}, \\ \cos c \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} c \cos b \cos \mathrm{A} + \operatorname{sen} a \cos \mathrm{C}. \end{array}\right.$$

283. Como estas fórmulas son homogéneas respecto a los senos de los lados, se tiene, poniendo

$$\operatorname{sen} a = k \operatorname{sen} \mathrm{A}, \quad \operatorname{sen} b = k \operatorname{sen} \mathrm{B} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} c = k \operatorname{sen} \mathrm{C}$$

deducidas del grupo II, llamando k a la relación constante $\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} \mathrm{A}} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} \mathrm{B}} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} \mathrm{C}} = k$, y reemplazando en el grupo III $\operatorname{sen} a$, $\operatorname{sen} b$ y $\operatorname{sen} c$ y suprimiendo el factor común k, se tiene

$$\text{IV} \left\{\begin{array}{l} \cos a \operatorname{sen} \mathrm{B} = \cos b \operatorname{sen} \mathrm{A} \cos \mathrm{C} + \operatorname{sen} \mathrm{C} \cos \mathrm{A}, \\ \cos a \operatorname{sen} \mathrm{C} = \cos c \operatorname{sen} \mathrm{A} \cos \mathrm{B} + \operatorname{sen} \mathrm{B} \cos \mathrm{A}, \\ \cos b \operatorname{sen} \mathrm{A} = \cos a \operatorname{sen} \mathrm{B} \cos \mathrm{C} + \operatorname{sen} \mathrm{C} \cos \mathrm{B}, \\ \cos b \operatorname{sen} \mathrm{C} = \cos c \operatorname{sen} \mathrm{B} \cos \mathrm{A} + \operatorname{sen} \mathrm{A} \cos \mathrm{B}, \\ \cos c \operatorname{sen} \mathrm{A} = \cos a \operatorname{sen} \mathrm{C} \cos \mathrm{B} + \operatorname{sen} \mathrm{B} \cos \mathrm{C}, \\ \cos c \operatorname{sen} \mathrm{B} = \cos b \operatorname{sen} \mathrm{C} \cos \mathrm{A} + \operatorname{sen} \mathrm{A} \cos \mathrm{C}. \end{array}\right.$$

284. *Teorema* (llamado de la cotangente): ***En todo triángulo esférico, entre dos lados, el ángulo comprendido y el ángulo opuesto a uno de ellos, existen las relaciones siguientes:***

$$\text{V}\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} \operatorname{ctg} a \operatorname{sen} b - \operatorname{ctg} \mathrm{A} \operatorname{sen} \mathrm{C} = \cos b \cos \mathrm{C}, \\ \operatorname{ctg} a \operatorname{sen} c - \operatorname{ctg} \mathrm{A} \operatorname{sen} \mathrm{B} = \cos c \cos \mathrm{B}, \\ \operatorname{ctg} b \operatorname{sen} a - \operatorname{ctg} \mathrm{B} \operatorname{sen} \mathrm{C} = \cos a \cos \mathrm{C}, \\ \operatorname{ctg} b \operatorname{sen} c - \operatorname{ctg} \mathrm{B} \operatorname{sen} \mathrm{A} = \cos c \cos \mathrm{A}, \\ \operatorname{ctg} c \operatorname{sen} a - \operatorname{ctg} \mathrm{C} \operatorname{sen} \mathrm{B} = \cos a \cos \mathrm{B}, \\ \operatorname{ctg} c \operatorname{sen} b - \operatorname{ctg} \mathrm{C} \operatorname{sen} \mathrm{A} = \cos b \cos \mathrm{A}. \end{array}\right.$$

Tomemos la 1ª del grupo III:

$$\cos a \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \cos b \cos C + \operatorname{sen} c \cos A,$$

dividiendo por sen a, se tiene:

$$\operatorname{ctg} a \operatorname{sen} b = \cos b \cos C + \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} a} \cos A.$$

Pero $\dfrac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} a} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$, luego, pasando al primer miembro al 2º término del segundo miembro se tiene

$$\operatorname{ctg} a \operatorname{sen} b - \operatorname{ctg} A \operatorname{sen} C = \cos b \cos C,$$

y en forma análoga para las demás y obtenemos el grupo V.

285. *Relación entre los tres ángulos y un lado.* — Demostraremos que entre los tres ángulos y un lado, en un triángulo esférico, valen las relaciones siguientes:

$$\text{VI}\ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a, \\ \cos B &= -\cos A \cos C + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos b, \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c, \end{aligned} \right.$$

es decir, que en todo triángulo esférico, el coseno de un ángulo es igual a menos el producto de los cosenos de los otros dos, más el producto de los senos de sus otros dos ángulos por el coseno del lado opuesto al primer ángulo.

Consideremos un triángulo ABC, cuyos lados sean a, b y c y sus ángulos A, B y C y tomemos el triángulo polar que llamaremos A′B′C′, y sean a', b', c' sus lados y A′, B′, C′ sus ángulos. Se sabe que:

$$a' = 180^\circ - A, \quad b' = 180^\circ - B, \quad c' = 180^\circ - C.$$
$$A' = 180^\circ - a, \quad B' = 180^\circ - b, \quad C' = 180^\circ - c,$$

y apliquemos a este triángulo polar, el teorema del coseno. Se tiene:

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \operatorname{sen} b' \operatorname{sen} c' \cos A'.$$

Pero es

$$\cos a' = -\cos A, \quad \cos b' = -\cos B, \quad \cos c' = -\cos C,$$
$$\operatorname{sen} b' = \operatorname{sen} B, \quad \operatorname{sen} c' = \operatorname{sen} C, \quad \cos A' = -\cos a,$$

luego reemplazando y cambiando los signos:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a,$$

y lo mismo para las otras relaciones, partiendo del coseno de b' y c'.

286. *Ángulos auxiliares de cálculo.* — Las fórmulas que anteceden de I a VII, con excepción del grupo II, no son calculables por logaritmos. Se pueden transformar utilizando ángulos auxiliares de cálculo. Por ejemplo tomando

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A \qquad \text{I}$$

y

$$\operatorname{sen} a \cos B = \cos b \operatorname{sen} c - \operatorname{sen} b \cos c \cos A. \qquad \text{IV}$$

Si hacemos

$$\cos b = m \cos u,$$

y

$$\operatorname{sen} b \cos A = m \operatorname{sen} u.$$

$$\frac{\operatorname{sen} b \cos A}{\cos b} = \frac{m \operatorname{sen} u}{m \cos u}$$

$$\operatorname{tg} b \cos A = \operatorname{tg} u$$

Donde m y u son dos cantidades desconocidas, que se tiene que determinar, para lo cual se tiene:

$$\operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{sen} b \cos A}{\cos b} = \operatorname{tg} b \cos A,$$

y ahora

$$m = \frac{\cos b}{\cos u} = \frac{\operatorname{sen} b \cos A}{\operatorname{sen} u}.$$

$\cos(c-u)$

Y determinados u y m, se tiene

$$\cos a = m \cos u \cos c + m \operatorname{sen} u \operatorname{sen} c$$

$$\operatorname{sen} a \cos B = m \cos u \operatorname{sen} c - \cos c \, m \operatorname{sen} u$$

$\operatorname{sen}(c-u)$

$$\cos a = m \cos (c - u).$$

$$\operatorname{sen} a \cos B = m \operatorname{sen} (c - u).$$

Muchas veces resulta cómodo este artificio.

CAPÍTULO II

FÓRMULAS RELATIVAS AL TRIÁNGULO RECTÁNGULO Y AL RECTILÁTERO

287. Suponiendo que A sea el ángulo recto en un triángulo esférico rectángulo, las fórmulas de los grupos I a VI se simplifican. Obtendremos 10 fórmulas, que es el número de combinaciones de cinco elementos, tomados de tres en tres. Bastará hacer $\cos A = 0$, $\operatorname{sen} A = 1$ y se tiene

a) La primera del grupo I nos da:

1) $$\cos a = \cos b \cos c.$$

El grupo II nos da, haciendo $\operatorname{sen} A = 1$:

2) $$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B$$

3) $$\operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C.$$

La primera y segunda del grupo III, nos dan:

$$\cos a \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \cos b \cos C,$$
$$\cos a \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \cos c \cos B,$$

de donde se obtiene:

4) $$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C,$$

5) $$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B.$$

La 4ª y la 6ª del grupo V nos dan:

$$\operatorname{ctg} b \operatorname{sen} c = \operatorname{ctg} B,$$
$$\operatorname{ctg} c \operatorname{sen} b = \operatorname{ctg} C,$$

o bien

6) $$\operatorname{tg} b = \operatorname{sen} c \operatorname{tg} B,$$

7) $$\operatorname{tg} c = \operatorname{sen} b \operatorname{tg} C.$$

La primera del grupo VI nos da:

8) $$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C.$$

Y la 2ª y 3ª del mismo grupo VI nos dan:

9) $$\cos B = \cos b \operatorname{sen} C,$$

10) $$\cos C = \cos c \operatorname{sen} B.$$

Las que expresan lo siguiente, para todo triángulo esférico rectángulo:

1. En todo triángulo esférico, el coseno de la hipotenusa es igual al producto de los cosenos de los catetos.

2 y 3. El seno de cada cateto es igual al seno de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto al cateto.

4 y 5. La tangente de un cateto es igual a la tangente de la hipotenusa por el coseno del ángulo adyacente al cateto.

6 y 7. La tangente de un cateto es igual al producto del seno del otro por la tangente del ángulo opuesto al primero.

8. El coseno de la hipotenusa es igual al producto de las cotangentes de los ángulos adyacentes.

9 y 10. El coseno de un ángulo oblicuo es igual al producto del coseno del cateto opuesto por el seno del otro ángulo oblicuo.

288. Teorema: *En todo triángulo esférico rectángulo, o todos sus lados son menores que un cuadrante o uno solo.* — En efecto, tomando la igualdad

$$\cos a = \cos b \cos c$$

deben ser, o todos los factores positivos, o dos negativos. Para que ocurra lo primero deben ser a, b y c, menores que un cuadrante. Para que ocurra lo segundo, deben ser entre a, b y c, dos de ellos mayores que 90° o uno sólo menor de 90°, lo que demuestra el teorema.

289. Teorema: *En todo triángulo esférico rectángulo, los ángulos oblicuos son de la misma especie que los catetos opuestos.* — Es decir, que según que un cateto es mayor o menor que un cuadrante, el ángulo opuesto es mayor o menor que 90°.

En efecto, tomando las (6) y (7) del nº 287, puesto que el seno de un cateto es siempre positivo, pues b y c son menores que 180°, resulta que $\operatorname{tg} b$ y $\operatorname{tg} B$ tienen el mismo signo; luego si $b < 90°$, debe ser $B < 90°$ y si $b > 90°$, debe ser $B > 90°$. Y lo mismo para el cateto c y el ángulo C. Lo que muestra el teorema.

290. *Regla de Neper.* — Neper ha dado una regla práctica para obtener estas diez fórmulas. Es la llamada regla del *pentágono de Neper* y consiste (fig. 149), en poner sobre los vértices de un pentágono y siguiendo el contorno del triángulo en cualquier sentido, los elementos del triángulo, salteando el ángulo recto y teniendo cuidado de poner, en lugar de los catetos b y c, los complementos $\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$ y $\left(\frac{\pi}{2} - c\right)$, como indica la figura. Se tiene así el pentágono de Neper. Y en ese pentágono, *el coseno de un elemento es igual al producto de las cotangentes de los elementos adyacentes y también al producto de los senos de los elementos opuestos.* Así, por ejemplo, se tiene:

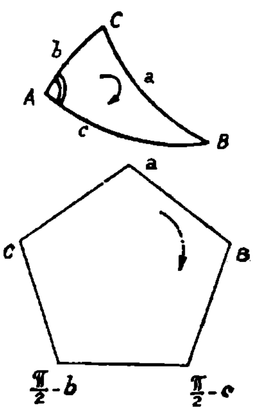


Figura 149

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C,$$

o también:

$$\cos a = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \cos b \cos c.$$

La primera nos da la fórmula (8) y la segunda nos da la (1) del nº 287.

Aplicando sucesivamente esta regla a cada uno de los vértices del pentágono, formamos el cuadro siguiente, donde se da el número de la fórmula que habíamos encontrado:

a	$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C$ $\cos a = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - c\right)$	$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C$ (8) $\cos a = \cos b \cos c$ (1)
B	$\cos B = \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - c\right)$ $\cos B = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \operatorname{sen} C$	$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B$ (5) $\cos B = \cos b \operatorname{sen} C$ (9)
$\frac{\pi}{2} - c$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C$	$\operatorname{tg} b = \operatorname{sen} c \operatorname{tg} B$ (6) $\operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C$ (3)
$\frac{\pi}{2} - b$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - c\right) \operatorname{ctg} C$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B$	$\operatorname{tg} c = \operatorname{sen} b \operatorname{tg} C$ (7) $\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B$ (2)
C	$\cos C = \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$ $\cos C = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - c\right) \operatorname{sen} B$	$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C$ (4) $\cos C = \cos c \operatorname{sen} B$ (10)

291. Las fórmulas que vinculan los elementos en el triángulo esférico rectángulo pueden transformarse en otros que muchas veces resultan convenientes para el cálculo.

Así por ejemplo, de la relación (1) del (nº 287) se saca:

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b},$$

y como por otra parte:

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos c}{1 + \cos c}}, = \frac{\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \quad \text{(pag 93)(72)}$$

resulta (81)

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a}} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{a - b}{2} \operatorname{tg}\frac{a + b}{2}},$$

y en forma análoga, podríamos haber obtenido

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{a-c}{2}\operatorname{tg}\frac{a+c}{2}},$$

donde sólo hay que tener en cuenta el signo + del radical, puesto que siendo los lados b y c, cada uno menor que 180°, $\frac{b}{2}$ y $\frac{c}{2}$ resultan menores de 90° y sus tangentes son positivas.

292. La relación (2) del (nº 287) nos da:

$$\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B},$$

y como por otra parte, se tiene:

$$\operatorname{tg}\left(45° + \frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} a}{1-\operatorname{sen} a}}, = \sqrt{\frac{1+\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}}{1-\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}}}$$

resulta, reemplazando sen a:

$$\operatorname{tg}\left(45° + \frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B - \operatorname{sen} b}} = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{B+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B-b}{2}}}.$$

Y si hubiésemos partido de la relación (3) del (nº 287) habríamos obtenido por el mismo camino:

$$\operatorname{tg}\left(45° + \frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{C+c}{2}}{\operatorname{tg}\frac{C-c}{2}}}.$$

293. La relación (4) del (nº 287) nos da:

$$\cos C = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a},$$

y como

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}},$$

resulta

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b)}};$$

y análogamente, de la (5) del (nº 287):

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(a - c)}{\operatorname{sen}(a + c)}}.$$

Partiendo de la (6) del (nº 287),

$$\operatorname{sen} c = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B},$$

y se tiene:

$$\operatorname{tg}\left(45 + \frac{c}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} c}{1 - \operatorname{sen} c}},$$

y entonces:

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{c}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} b}} = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(B + b)}{\operatorname{sen}(B - b)}};$$

y análogamente:

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{b}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen} C + c}{\operatorname{sen} C - c}}.$$

294. La fórmula (9) del (nº 287) nos da:

$$\cos b = \frac{\cos B}{\operatorname{sen} C} = \frac{\cos B}{\cos(90^\circ - C)},$$

luego:

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{B + C}{2} - 45^\circ\right)\operatorname{tg}\left(\frac{B - C}{2} + 45^\circ\right)},$$

y análogamente:

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{B + C}{2} - 45^\circ\right)\operatorname{tg}\left(\frac{C - B}{2} + 45^\circ\right)}.$$

295. *Otra forma de obtener las fórmulas para el triángulo rectángulo.* — Hemos obtenido las fórmulas fundamentales, partiendo de las fórmulas fundamentales de la trigonometría esférica. Se pueden obtener directa e independientemente de ellas.

Sea un triángulo rectángulo ABC, (fig. 150), donde A es el ángulo recto, O el centro de la esfera a la que pertenece el triángulo.

Supongamos en primer lugar que los lados sean cada uno menor que 90°. Por un punto M de la arista del triedro que proyecta al triángulo desde el centro de la esfera, trazamos la normal MP a OA y de P la perpendicular PN a OB.

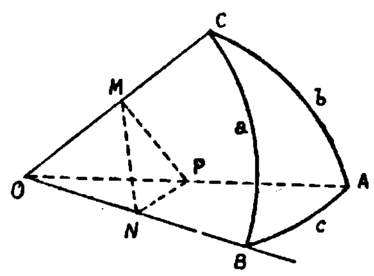


Figura 150

Por el teorema de las tres perpendiculares, resulta MN normal a OB, lo que quiere decir que el ángulo MNP mide el ángulo B del triángulo. Siendo el ángulo MPN recto en P, se puede escribir :

$$\cos a = \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OM}}, \quad \cos b = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OM}}, \quad \cos c = \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OP}};$$

de donde

$$\cos a = \frac{\mathrm{OP} \cos c}{\dfrac{\mathrm{OP}}{\cos b}} = \cos b \cos c$$

que es la (1) del (nº 287).

De los triángulos OMP, OMN y MPN, sacamos :

$$\operatorname{sen} b = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{OM}}, \quad \operatorname{sen} a = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{OM}}, \quad \operatorname{sen} \mathrm{B} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MN}}.$$

Luego

$$\operatorname{sen} b = \frac{\mathrm{MN} \operatorname{sen} \mathrm{B}}{\dfrac{\mathrm{MN}}{\operatorname{sen} a}} = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} \mathrm{B}$$

que es la fórmula (2) del (nº 287).

En una forma completamente análoga habríamos obtenido

$$\operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} \mathrm{C} \qquad \text{que es la (3) del (nº 287).}$$

Tomemos ahora

$$\cos a = \cos b \cos c$$

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} \mathrm{B}$$

y eliminando b, para lo cual se tiene :

$$\cos^2 b = \frac{\cos^2 a}{\cos^2 c}, \quad \operatorname{sen}^2 b = \operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 \mathrm{B}$$

luego es

$$\frac{\cos^2 a}{\cos^2 c} + \operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 B = 1 \therefore \frac{\cos^2 a}{\cos^2 c} + (1 - \cos^2 B) \operatorname{sen}^2 a = 1$$

o bien

$$\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a \cos^2 c - \cos^2 c = \operatorname{sen}^2 a \cos^2 c \cos^2 B,$$

y también

$$\cos^2 a - \cos^2 c\,(1 - \operatorname{sen}^2 a) = \operatorname{sen}^2 a \cos^2 c \cos^2 B$$

$$\underbrace{(1 - \cos^2 c)}_{\operatorname{sen}^2 c} \cos a = \quad \cos^2 a - \cos^2 c \cos^2 a = \operatorname{sen}^2 a \cos^2 c \cos^2 B$$

$$\longrightarrow \quad \cos^2 a \operatorname{sen}^2 c = \operatorname{sen}^2 a \cos^2 c \cos^2 B$$

de donde

$$\operatorname{tg}^2 c = \operatorname{tg}^2 a \cos^2 B$$

como a, c y B, son menores que 90°, se tiene:

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B$$

que es la (5) del (nº 287).

En forma análoga habíamos encontrado:

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C$$

que es la (4) del (nº 287).

Tomando ahora las fórmulas:

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B,$$
$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B,$$

eliminamos a, para lo cual, puesto que $\cos a = \cos b \cos c$, se tiene:

$$\operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{sen} c}{\cos c} = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \cos B = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos b \cos c} \cos B,$$

de donde:

$$\cos b = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} c} \cos B,$$

luego:

$$\operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{sen} b}{\cos c} = \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B}{\dfrac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} c} \cos B} = \operatorname{sen} c \operatorname{tg} B,$$

que es la (6) del (nº 287).

Y análogamente habríamos obtenido:

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{sen} b \operatorname{tg} C$$

que es la (7) del (nº 287).

De estas dos últimas obtenemos, multiplicando miembro a miembro, expresando la tg en función de seno y coseno y dividiendo por el producto sen b sen c:

$$\frac{\frac{\operatorname{sen} b}{\cos b} \cdot \frac{\operatorname{sen} c}{\cos c}}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} = \qquad \frac{1}{\cos b \cos c} = \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C,$$

y siendo $\cos a = \cos b \cos c$, se tiene, invirtiendo:

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C,$$

que es la (8) del (nº 287).

Tomando nuevamente:

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B$$

se tiene

$$\cos B = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a} = \frac{\operatorname{sen} c \cos a}{\operatorname{sen} a \cos c},$$

y siendo

$$\operatorname{sen} C = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} a},$$

dividiendo se tiene:

$$\frac{\cos B}{\operatorname{sen} C} = \frac{\cos a}{\cos c},$$

y puesto que $\cos a = \cos b \cos c$, resulta:

$$\cos B = \cos b \operatorname{sen} C$$

que es la (9) del (nº 287).

Y en forma análoga

$$\cos C = \cos c \operatorname{sen} B$$

que es la (10) del (nº 287).

Pero hemos demostrado hasta ahora, sobre la base de que los lados son menores que un cuadrante. Con un razonamiento análogo al seguido para las fórmulas fundamentales, se muestra que las fórmulas son generales.

296. *Fórmulas relativas al triángulo esférico rectilátero.* — Un triángulo esférico se llama *rectilátero* cuando uno de sus lados es igual a 90°. Y es evidente que el triángulo polar de un triángulo rectilátero es un triángulo rectángulo, y es claro que una manera de resolver el triángulo rectilátero es pasar al polar, resolver éste y luego volver al primero.

Pueden, sin embargo, obtenerse las fórmulas que lo resuelven directamente, para lo cual basta hacer $a = 90°$ en las fórmulas generales del triángulo esférico, lo que equivale a tomar en ellas $\cos a = 0$ y $\operatorname{sen} a = 1$, y así se obtiene:

La 1ª del grupo I nos da:

1. $$\cos A = -\operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c.$$

El grupo II, nos da:

2. $$\operatorname{sen} B = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A,$$
3. $$\operatorname{sen} C = \operatorname{sen} c \operatorname{sen} A.$$

La 3ª y 5ª del grupo III nos dan, respectivamente:

4. $$\cos b = \operatorname{sen} c \cos B,$$
5. $$\cos c = \operatorname{sen} b \cos C.$$

La 1ª y 2ª del grupo IV nos dan, respectivamente:

6. $$\operatorname{tg} B = -\cos c \operatorname{tg} A,$$
7. $$\operatorname{tg} C = -\cos b \operatorname{tg} A.$$

La 3ª y 5ª del grupo V nos dan

8. $$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} b \operatorname{sen} C,$$
9. $$\operatorname{tg} C = \operatorname{tg} c \operatorname{sen} B.$$

Y finalmente la 1ª del grupo VI nos da:

10. $$\cos A = -\cos B \cos C.$$

CAPÍTULO III

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS ESFÉRICOS RECTÁNGULOS

297. Cuando se dan solamente lados y ángulos del triángulo esférico rectángulo, se presentan *seis* casos distintos, según sean los elementos que se dan, a saber:

1° Dos catetos.
2° Un cateto y la hipotenusa.
3° Un cateto y el ángulo oblicuo adyacente.
4° Un cateto y el ángulo opuesto.
5° La hipotenusa y un ángulo oblicuo.
6° Los dos ángulos oblicuos.

Trataremos separadamente cada uno de estos casos.

298. *Primer caso: Resolver un triángulo esférico rectángulo, conociendo los dos catetos.* — *Resolución:* Sean los catetos b y c los elementos conocidos. Se desconoce la hipotenusa a y los ángulos B y C. Se tiene, según las fórmulas del n° 287.

$$\cos a = \cos b \cos c$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{sen} c}, \qquad \operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{sen} b}.$$

Se ve que el *problema es siempre posible y admite una sola solución*, pues siendo *cos b* y *cos c* cada uno menor que uno, el producto será menor que la unidad y habrá un solo valor para *cos a* y por consiguiente para a.

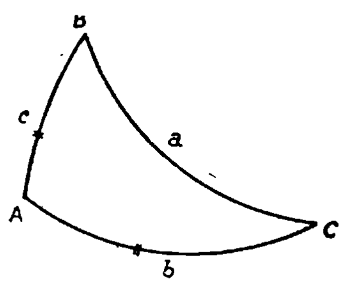


Figura 151

Estando los valores de B y C dados por sus tangentes, siempre será posible encontrar un valor, y uno sólo, para B y C y estos valores se obtienen sin ambigüedad. En cuanto al cuadrante de B y C es el mismo respectivamente que el cuadrante de b y de c.

Para verificar si se ha calculado bien, puede usarse la fórmula:

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C.$$

Observación. — Si los valores de b o c fuesen pequeños, $\cos b$ y $\cos c$ no se conocerían con bastante aproximación y $\cos a$ no quedaría bien determinado. En tal caso, puede calcularse primero el ángulo B o el ángulo C y luego calcular a por alguna de las relaciones siguientes:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} c}{\cos B}$$

o bien

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} b}{\cos C}.$$

Ejemplo: Resolver un triángulo rectángulo, conociendo:

$$b = 82^\circ 20' 18''$$
$$c = 41^\circ 14' 16''.$$

Cálculos auxiliares

log cos b

$$\begin{array}{lrl} \log\cos 82^\circ 20' & = 9.12519 & \Delta = 94 \\ 10'' = & 16 & \\ 8'' = & 13 & \\ \hline \log\cos b & = 9.12490 & \end{array}$$

log sen b

$$\begin{array}{lrl} \log \operatorname{sen} 82^\circ 20' & = 9.99610 & \Delta = 2 \\ \text{para} \quad 18'' = & 1 & \\ \hline \log \operatorname{sen} 82^\circ 20' 18'' & = 9.99611 & \end{array}$$

log tg b

$$\begin{array}{lrl} \log \operatorname{tg} 82^\circ 20' & = 0.87091 & \Delta = 96 \\ \text{para} \quad 10'' = & 16 & \\ \text{»} \quad 8'' = & 13 & \\ \hline \log \operatorname{tg} b & = 0.87120 & \end{array}$$

Cálculos definitivos

cos a

$$\begin{array}{l} \log\cos a = \log\cos b + \log\cos c \\ \hline \log\cos b = 9.12490 \\ \log\cos c = 9.87621 \\ \hline \log\cos a = 9.00111 \end{array}$$

a

$$\begin{array}{lrl} \text{para } 9.00207 & a = 84^\circ 14' & \Delta = 125 \\ \left\{ \begin{array}{l} 83 = \\ 13 = \end{array} \right. & \begin{array}{r} 40'' \\ 6'' \end{array} & \\ \hline & a = 84^\circ 14' 46'' & \end{array}$$

tg B

$$\begin{array}{l} \log \operatorname{tg} B = \log \operatorname{tg} b - \log \operatorname{sen} c \\ \hline \log \operatorname{tg} b = 0.87120 \\ \log \operatorname{sen} c = 9.81900 \\ \hline \log \operatorname{tg} B = 1.05220 \end{array}$$

log cos c

$$\begin{array}{lrl} \log\cos 41^\circ 14' & = 9.87624 & \Delta = 11 \\ \text{para} \quad 10'' = & 2 & \\ \text{»} \quad 6'' = & \underline{\quad 1} & \\ \log\cos 41^\circ 14' 16'' & = 9.87621 & \end{array}$$

log sen c

$$\begin{array}{lrl} \log\operatorname{sen} 41^\circ 14' & = 9.81897 & \Delta = 14 \\ \text{para} \quad 10'' = & 2 & \\ \text{»} \quad 6'' = & \underline{\quad 1} & \\ \log\operatorname{sen} c & = 9.81900 & \end{array}$$

log tg c

$$\begin{array}{lrl} \log \operatorname{tg} 41^\circ 14' & = 9.94273 & \Delta = 26 \\ \text{para} \quad 10'' = & 4 & \\ \text{»} \quad 6'' = & \underline{\quad 3} & \\ \log\operatorname{tg} c & = 9.94280 & \end{array}$$

B

$$\begin{array}{lrl} \text{para } 1.05083 & 84^\circ 55' & \Delta = 144 \\ \left\{\begin{array}{l} \text{para } 120 \\ \text{»} \quad 17 \end{array}\right. & \begin{array}{r} 50'' \\ \underline{7''} \end{array} & \\ \mathrm{B} = & 84^\circ 55' 57'' & \end{array}$$

tg C

$$\log\operatorname{tg} \mathrm{C} = \log\operatorname{tg} c - \log\operatorname{sen} b$$

$$\begin{array}{rl} \log\operatorname{tg} c = & 9.94280 \\ \log\operatorname{sen} b = & \underline{9.99611} \\ \log\operatorname{tg} \mathrm{C} = & 9.94669 \end{array}$$

C

$$\begin{array}{lrl} \text{para } 9.94655 & \mathrm{C} = 41^\circ 29' & \Delta = 26 \\ \left\{\begin{array}{l} \text{para } 13 \\ \text{»} \quad 1 \end{array}\right. & \begin{array}{r} 30'' \\ \underline{2''} \end{array} & \\ & \mathrm{C} = 41^\circ 29' 32'' & \end{array}$$

Comprobación

$$\cos a = \operatorname{ctg} \mathrm{B} \operatorname{ctg} \mathrm{C}$$

log ctg B

$$\begin{array}{lrl} \text{para } 84^\circ 55' & = 8.94917 & \Delta = 144 \\ \text{»} \quad 50'' = & 120 & \\ \text{»} \quad 7'' = & \underline{\quad 17} & \\ \log\operatorname{ctg} \mathrm{B} & = 8.94780 & \end{array}$$

log ctg C

$$\begin{array}{lrl} \text{para } 41^\circ 29' & = 0.05345 & \Delta = -26 \\ \text{»} \quad 30'' = & 13 & \\ \text{»} \quad 2'' = & \underline{\quad 1} & \\ \log\operatorname{ctg} \mathrm{C} & = 0.05331 & \end{array}$$

log cos a

$$\begin{array}{rl} \log\operatorname{ctg} \mathrm{B} = & 8.94780 \\ \log\operatorname{ctg} \mathrm{C} = & \underline{0.05331} \\ \log\cos a = & 9.00111 \end{array}$$

299. *Segundo caso : Resolver un triángulo esférico rectángulo conociendo la hipotenusa y un cateto.* — *Resolución :* Conocemos la hipotenusa a y el cateto b. Desconocemos el cateto c y los ángulos B y C.

Aplicando la regla de Neper, o sino directamente por las fórmulas nº 287, se tiene :

$$\cos a = \cos b \cos c \qquad \text{de donde} \qquad \cos c = \frac{\cos a}{\cos b} \tag{1}$$

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} \mathrm{B} \qquad \text{de donde} \qquad \operatorname{sen} \mathrm{B} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a} \tag{2}$$

$$\cos \mathrm{C} = \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} b \qquad \text{o bien} \qquad \cos \mathrm{C} = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}. \tag{3}$$

Discusión. — Los datos a y b deben ser, desde luego, cada uno menor que 180°. Si a y b fuesen iguales se tendría un triángulo trirrectángulo que naturalmente no ofrece ninguna dificultad.

Si a y b son suplementarios, el triángulo se reduce a un huso recto y no lo consideramos como triángulo. Vale decir, que eliminamos los casos en que a sea igual a b o suplementario con b.

Como una verificación de los cálculos puede aplicarse la fórmula

$$\cos \mathrm{C} = \cos c \operatorname{sen} \mathrm{B}.$$

Para que el problema sea posible es necesario que los segundos miembros de las relaciones (1) (2) (3) sean menores que la unidad, y puesto que a y b son positivos y menores que 180°, basta que se tenga

$$\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a} < 1$$

o bien

$$\operatorname{sen} b < \operatorname{sen} a.$$

Para que esto se verifique, debe tenerse :

$$\begin{array}{llll} \text{si} & b < 90^\circ & \text{debe tenerse} & b < a < 180^\circ - b \\ \text{»} & b > 90^\circ & \text{»} \quad \text{»} & b > a > 180^\circ - b. \end{array}$$

Y verificándose esta condición, se tiene

$$\operatorname{sen}^2 b < \operatorname{sen}^2 a \tag{4}$$

es decir

$$1 - \cos^2 b < 1 - \cos^2 a$$

o sea

$$\cos^2 b' > \cos^2 a \tag{5}$$

y el valor de $\cos c$ dado por la (1) resulta menor que la unidad.

Y dividiendo ordenadamente la (4) por la (5) se tiene con mayor razón

$$\operatorname{tg}^2 b < \operatorname{tg}^2 a$$

y también el valor de $\cos C$ resulta menor que la unidad.

Luego, la *única condición para que el problema admita una solución, y una sola, es que a esté comprendido entre b y (180° — b).*

Observación. — Cuando los valores de a y de b son poco diferentes, $\cos c$ difiere poco de 1 y queda entonces mal determinado por su coseno. En tal caso es conveniente aplicar las fórmulas:

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b)}}$$

$$\operatorname{tg}\left(45° - \frac{B}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}}.$$

Es fácil ver que discutiendo estas fórmulas, se llega al mismo resultado del anterior. En efecto, tomemos el primer valor, dado por nº 291:

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}$$

para que exista, debe tenerse $\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}$ y $\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}$ del mismo signo.

Si se tiene $a > b$, $\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}$ es positiva, luego debe serlo $\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}$, vale decir

$$\frac{a+b}{2} < 90° \qquad a + b < 180°$$

o

$$a < 180° - b$$

Si se tiene $a < b$, $\operatorname{tg}\dfrac{a-b}{2}$ es negativa, luego $\operatorname{tg}\dfrac{a+b}{2}$ debe ser negativa y por lo tanto

$$\frac{a+b}{2} > 90^\circ \qquad a+b > 180^\circ$$

o

$$a > 180^\circ - b$$

es decir, que a debe estar comprendido entre b y $(180^\circ - b)$.

Ejemplo : Resolver un triángulo rectángulo conociendo :

$$a = 40^\circ 25' 12''$$
$$b = 30^\circ 20' 15''$$

Por estar a comprendido entre

$$b = 30^\circ 20' 15''$$

y

$$180^\circ - b = 149^\circ 39' 45''$$

el problema admite una sola solución.

Cálculo de c :

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}.$$

log cos a

log cos $40^\circ 25'$		$= 9.88158$	$\Delta = -10$
para	$10''$	$= 2$	
»	$2''$.......	$=$ —	
log cos a.....		$= 9.88156$	

log cos b

log cos $30^\circ 20'$		$= 9.93606$	$\Delta = -7$
para	$15''$.......	$= 2$	
log cos b		$= 9.93604$	

log cos c

log cos a.	$= 9.88156$
log cos b.....	$= 9.93604$
log cos c....	$= 9.94552$

c

Para 9.94553		$= 28°06'$	$\Delta = 7$
para	1	$= \quad 07''$	
	c ..	$= 28°06'07''$	

Cálculo de B: $\quad \text{sen B} = \dfrac{\text{sen } b}{\text{sen } a}.$

log sen b

log sen 30°20′		$= 9.70332$	$\Delta = 21$
para	10″	$= \quad 4$	
»	5′	$= \quad 2$	
log sen b		$= 9.70338$	

log sen a

log sen 40°25′		$= 9.81180$	$\Delta = 15$
para	10″	$= \quad 3$	
»	2″	$= \quad 1$	
log sen a .		$= 9.81184$	

log sen B

log sen b.	$= 9.70338$
log sen a..	$= 9.81184$
log sen B	$= 9.89154$

B

Para 9.89152..		$= 51°10'$	$\Delta = 10$
para	2.....	$= \quad 09''$	
	B..	$= 51°10'09''$	

Y puesto que B y b deben estar en el mismo cuadrante, el valor de B es 51°10′09″.

Cálculo de C: $\cos C = \dfrac{\text{tg } b}{\text{tg } a}$.

log tg b

log tg 30°20′	= 9.76725	$\Delta = 29$
Para 10″	= 5	
» 5″	= 3	
log tg b	= 9.76733	

log tg a

log tg 40°25′	= 9.93022	$\Delta = 26$
Para 10″..........	= 4	
» 2″	= 1	
log tg a	= 9.93027	

log cos C

log tg b...........	= 9.76733
log tg a...........	= 9.93027
log cos C..........	= 9.83706

C

Para 9.83715.............	= 46°35′	$\Delta = 14$
» 9............	= 40″	
C.............	= 46°35′40″	

Comprobación

$$\cos C = \cos c \text{ sen } B$$

log cos c..........	= 9.94552
log sen B.........	= 9.89154
log cos C..........	= 9.83706

Resolveremos ahora el mismo problema, aplicando las fórmulas estudiadas y con los mismos datos:

$$a = 40^\circ 25' 12''$$
$$b = 30^\circ 20' 15''$$

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b)}}$$

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{B}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg} \frac{a+b}{2}}}$$

Cálculos auxiliares

$$a = 40^\circ 25' 12''$$
$$b = 30^\circ 20' 15''$$

$$a + b = 70^\circ 45' 27'' \qquad \frac{a+b}{2} = 35^\circ 22' 43''$$

$$a - b = 10^\circ 04' 57'' \qquad \frac{a-b}{2} = 5^\circ 02' 28''$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{a+b}{2}$$

log tg 35°22′		= 9.85113	Δ = 27
Para	40″........	= 18	
»	3″.........	= 1	
$\log \operatorname{tg} \frac{a+b}{2}$	....	= 9.85132	

$$\log \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}$$

log tg 5°02′		= 8.94485	Δ = 145
Para	20″.........	= 48	
»	8″.........	= 20	
$\log \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}$	....	= 8.94553	

$$tg\,\frac{c}{2}$$

$$2 \log \mathrm{tg}\,\frac{c}{2} = \log \mathrm{tg}\,\frac{a+b}{2} + \log \mathrm{tg}\,\frac{a-b}{2}$$

$$\begin{array}{ll}
\log \mathrm{tg}\,\frac{a+b}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots & = 9.85132 \\
\log \mathrm{tg}\,\frac{a-b}{2} & = 8.94553 \\
\hline
2 \log \mathrm{tg}\,\frac{c}{2} \ldots\ldots & = 8.79685 \\
\log \mathrm{tg}\,\frac{c}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots & = 9.39842
\end{array}$$

$$c$$

$$\begin{array}{llllll}
\text{Si } \log \mathrm{tg}\,\frac{c}{2} \ldots & = 9.39838 & \frac{c}{2} & = 14^\circ 03' & & \Delta = 54 \\
\text{Para} & = \quad 4 & & = \underline{\quad 04''} & & \\
 & & \frac{c}{2} & = 14^\circ 03' 04'' & & \\
\end{array}$$

$$c = 28^\circ 06' 08''$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{sen}\,(a-b)}{\mathrm{sen}\,(a+b)}}$$

$$\log \mathrm{sen}\,(a-b) = \log \mathrm{sen}\,10^\circ 04' 57''$$

$$\begin{array}{llll}
\log \mathrm{sen}\,10^\circ 04' & & = 9.24253 & \Delta = 71 \\
\text{para} & 50'' & = \quad 59 & \\
» & 7'' & = \quad 8 & \\
\hline
\log \mathrm{sen}\,(a-b) \ldots\ldots\ldots\ldots & & = 9.24320 &
\end{array}$$

$$\log \mathrm{sen}\,(a+b) = \log \mathrm{sen}\,70^\circ 45' 27''$$

$$\begin{array}{llll}
\log \mathrm{sen}\,70^\circ 45' & & = 9.97501 & \Delta = 5 \\
\text{para} & 27'' \ldots\ldots\ldots\ldots & = \quad 2 & \\
\hline
\log \mathrm{sen}\,(a+b) \ldots\ldots\ldots\ldots & & = 9.97503 &
\end{array}$$

$$\log\ tg\ \frac{C}{2}$$

$$2 \log \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \log \operatorname{sen}(a-b) - \log \operatorname{sen}(a+b)$$

$$\begin{array}{ll}
\log \operatorname{sen}(a-b) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = 9.24320 \\
\log \operatorname{sen}(a+b) \ldots & = \underline{9.97503} \\
2 \log \operatorname{tg} \frac{C}{2} & = 9.26817 \\
\log \operatorname{tg} \frac{C}{2} & = 9.63408
\end{array}$$

$$C$$

$$\text{Si } \log \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 9.63379 \qquad \frac{C}{2} = 23^\circ 17' \qquad \Delta = 35$$

$$\text{Para } 29 \qquad = \qquad \underline{50''}$$

$$\frac{C}{2} = 23^\circ 17' 50''$$

$$C = 46^\circ 35' 40''$$

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{B}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}}$$

$$\log \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{B}{2}\right) = \log \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}\ \operatorname{tg} - \log \frac{a+b}{2}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = 8.94553$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = \underline{9.85132}$$

$$2 \log \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{B}{2}\right) = 9.09421$$

$$\log \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{B}{2}\right) = 9.54710$$

$$45^\circ - \frac{B}{2}$$

Si $\log \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{B}{2}\right) = 9.54673$ $\left(45^\circ - \frac{B}{2}\right) = 19^\circ 24'$ $\Delta = 41$

$\begin{cases} 34 & 50'' \\ 3 & 4'' \end{cases}$ Para $37 = 54''$

$$45^\circ - \frac{B}{2} = 19^\circ 24' 54''$$

$$B$$

$$\frac{B}{2} = 45^\circ - 19^\circ 24' 54'' = 25^\circ 35' 06''$$

$$B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 51^\circ 10' 12''$$

300. *Tercer caso: Resolver un triángulo rectángulo, conociendo un cateto y el ángulo agudo adyacente.*

Resolución. — Sea b el cateto conocido y C el ángulo agudo. Desconocemos la hipotenusa a, el cateto c y el ángulo B.

Aplicando la regla del pentágono de Neper o las fórmulas dadas por nº 287 se tiene:

$\cos C = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} a$ de donde $\operatorname{tg} a = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\cos C}$

$\operatorname{sen} b = \operatorname{tg} c \operatorname{ctg} C$ de donde $\operatorname{tg} c = \operatorname{sen} b \operatorname{tg} C$

y además nº 287 fórm. (9). $\cos B = \cos b \operatorname{sen} C.$

En cuanto a los valores de a y de c, siempre existirán, y no hay ambigüedad en cuanto a su cálculo.

Se obtiene siempre un solo valor para a y c. Para el cálculo de B, siempre se obtiene para cos B un valor menor que la unidad, por ser el producto de dos cantidades menores que 1 y tampoco puede haber ambigüedad en cuanto a la determinación de B.

Si cos B es positivo, entonces B está en el primer cuadrante, y si cos B es negativo, B está en el segundo cuadrante. Por otra parte, puesto que sen C es siempre positivo, por ser C menor que 180°, resulta que el signo de cos B es el mismo que el de $\cos b$, o bien B y b están siempre en el mismo cuadrante.

El problema es siempre posible y admite una sola solución.

Como una comprobación de los cálculos, se tiene:

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B.$$

Observación. — Si el ángulo B, estuviese mal determinado por cos B, se calcula primero el valor de tg a y luego se calcula B por la fórmula

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{ctg} C}{\cos a}$$

o también, después de calcular c se puede calcular B por

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{sen} c}.$$

Ejemplo: Resolver un triángulo rectángulo, conociendo

$$b = 51°31'55''$$
$$C = 78°37'34''.$$

log tg b

log tg 51°31′		= 0.09965	Δ = 26
para	50″	= 22	
para	5″	= 2	
log tg b		= 0.09989	

log cos C

log cos 78°37′		= 9.29529	Δ = 63
para	30″	= 32	
para	4″	= 4	
log cos C		= 9.29493	

$$tg\, a = \frac{cos\, C}{tg\, b}$$

log tg b	= 0.09989
log cos C	= 9.29493
log tg a	= 0.80496

a

Si log tg a........	$= 0.80439$	$81°05'$	$\Delta = 83$
$57 \begin{cases} 55 \\ 2 \end{cases}$		$40''$	
		$1''$	
	$a =$	$81°05'41''$	

log sen b

log sen 51°31'.............	$= 9.89364$	$\Delta = 11$
para 50''..........	$= 9$	
para 5''..........	$= 1$	
log sen b................	$= 9.89374$	

log tg C

log tg 78°37'	$= 0.69609$	$\Delta = 65$
para 30''...........	$= 33$	
para 4''...	$= 4$	
log tg C..................	$= 0.69646$	

tg c = sen b tg C

log sen b	$= 9.89374$
log tg C	$= 0.69646$
log tg c.............	$= 0.59020$

c

Si log tg c	$= 0.58995$	c	$= 75°35'$	$\Delta = 53$
$25 \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$	18		$20''$	
	7		$8''$	
		c	$= 75°35'28''$	

log cos b

log cos 51°31'.............	$= 9.79399$	$\Delta = 16$
para 50''..	$= 13$	
para 5''..........	$= 1$	
log cos b	$= 9.79385$	

log sen C

log sen 78°37′		= 9.99137	Δ = 3
para	34″..........	= 2	
log sen C		= 9.99139	

cos B = cos b sen C

log cos b	= 9.79385
log sen C	= 9.99139
log cos B	= 9.78524

B

Si log cos B	= 9.78527	B	= 52°25′	Δ = 17
	3		09″	
		B	= 52°25′09″	

Comprobación

$$\text{tg } c = \text{tg } a \cos \text{B}$$

$$\log \text{tg } a = 0.80496$$

$$\log \cos \text{B} = 9.78524$$

$$\log \text{tg } c = 0.59020.$$

301. *Cuarto caso: Resolver un triángulo rectángulo conociendo un cateto y el ángulo opuesto. — Resolución:* Sean b y B los elementos conocidos. Desconocemos a, c y C.

Aplicando la regla del pentágono de Neper o las fórmulas dadas por n° 287 se tiene:

$$\text{sen } b = \text{sen } a \text{ sen B} \quad \text{de donde: sen } a = \frac{\text{sen } b}{\text{sen B}}$$

$$\text{sen } c = \text{tg } b \text{ ctg B} \quad \text{»} \quad \text{sen } c = \frac{\text{tg } b}{\text{tg B}}$$

$$\cos \text{B} = \cos b \text{ sen C} \quad \text{»} \quad \text{sen C} = \frac{\cos \text{B}}{\cos b}.$$

Discusión. — Los valores de los elementos desconocidos, vienen dados por sus senos y entonces se obtienen para cada uno de los arcos a, c y C, dos valores positivos menores que 180°. Veremos cuándo y cuáles de esos valores se pueden aceptar.

Consideremos:

I. $B < 90°$. — Siendo $B < 90°$, consideremos distintos casos:

a) $b < B$. En ese caso

$$\operatorname{sen} b < \operatorname{sen} B$$

y se tiene entonces $\operatorname{sen} a < 1$, y se encuentran dos valores para a, uno agudo y otro obtuso. Y siendo a y c de la misma especie, pues es

$$\cos a = \cos b \cos c$$

siendo $b < 90°$, resulta $\cos b$ positivo y por lo tanto a y c de la misma especie, vale decir, para a agudo, c es también menor que 90° y si a es mayor que 90°, también c es obtuso, y por ser c y C también de la misma especie, se tiene en definitiva

$a < 90°$, c y C son también menores que 90°
$a > 90°$, c y C » mayores » 90°

es decir, que el problema tiene dos soluciones.

b) $b = B$. En ese caso se tiene

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} B$$

y resulta $\operatorname{sen} a = 1$ o bien $a = 90°$ y siendo a, c y C de la misma ~~especie se tiene $c = C = 90°$ y el triángulo resulta bi-rectángulo y~~ el problema admite una sola solución que es cabalmente un triángulo bi-rectángulo.

c) $\frac{\pi}{2} > b > B$. Se tiene, $\operatorname{sen} b > \operatorname{sen} B$ y por lo tanto resulta $\operatorname{sen} a > 1$, es decir, que el ***problema no tiene solución.***

II. $B > 90°$. — Si B es mayor que 90°, también se presentan varios casos:

1°) $\frac{\pi}{2} < b < B$, en ese caso se tiene $\operatorname{sen} b > \operatorname{sen} B$ y resulta $\operatorname{sen} a > 1$, vale decir que el problema es imposible. no

2°) $b = B$. Resulta en ese caso $\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} B$ y por lo tanto

$$\operatorname{sen} a = 1$$

y nuevamente como en el 2° caso anterior, se tiene un triángulo birectángulo. Si 1

3°) $b > B$. En ese caso resulta, siempre sobre la base de ser B obtuso,

$$\operatorname{sen} b < \operatorname{sen} B$$

y por lo tanto

$$\operatorname{sen} a < 1$$

y el problema da dos valores para a, uno menor que 90° y otro mayor.

Se tiene

$$\cos a = \cos b \cos c$$

y siendo $\cos b < 0$, resulta que a y c son de especie contraria, es decir, que se tiene, puesto que c y C son de la misma especie:

si $a < 90°$, c y C son obtusos
» $a > 90°$, c y C » agudos.

En resumen, vemos que para que el problema admita solución, debe tenerse que B debe estar comprendido entre b y 90° y verificándose esa condición, el problema admite dos soluciones.

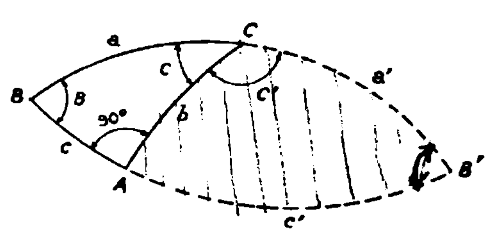


Figura 152

Es fácil ver, por otra parte, que ello es así considerando el triángulo ABC (fig. 152) rectángulo en A.

Si prolongamos los lados a y c hasta completar el huso en B', se ve fácilmente que el triángulo AB'C, también resuelve el problema por tener el ángulo en B' igual a B y el lado $AC = b$.

Se ve que tiene:

$$B'C = a' = 180° - a$$

$$AB' = c' = 180° - c$$

$$AC'B = C' = 180° - C.$$

Observación. — Estando los elementos incógnitos, calculados por sus senos, puede ocurrir que no queden bien determinados. En ese caso es preferible calcular por las fórmulas siguientes:

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{a}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\dfrac{B-b}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{B+b}{2}}}$$

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{c}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(B-b)}{\operatorname{sen}(B+b)}}$$

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{C}{2}\right) = \pm \sqrt{\operatorname{tg}\frac{B+b}{2}\operatorname{tg}\frac{B-b}{2}}.$$

Ejemplo: Resolver un triángulo rectángulo, conociendo:

$$b = 106^\circ 38' 46''$$
$$B = 105^\circ 48' 52''.$$

Se verifica que B está comprendido entre 106°38′46″ y 90°. Luego el problema tiene dos soluciones.

log sen b

$$\log \operatorname{sen} 106^\circ 38' 46'' = \log \operatorname{sen}(180^\circ - 106^\circ 38' 46'') = \log \operatorname{sen} 73^\circ 21' 14''$$

log sen 73°21′.		= 9.98140	$\Delta = 4$
para	14″	= 1	
log sen b		= 9.98141	

log sen B

$$\log \operatorname{sen} 105^\circ 48' 52 = \log \operatorname{sen}(180^\circ - 105^\circ 48' 52'') = \log \operatorname{sen} 74^\circ 11' 08''$$

log sen 74°11′		= 9.98324	$\Delta = 3$
para	08″.......	= —	
log sen B.		= 9.98324	

log sen a

log sen b..........	= 9.98141
log sen B..........	= 9.98324
log sen a..........	= 9.99817

a

Si log sen $a = 9.99817$ $\qquad a \doteq 84°45'00''$.

Luego se tiene para a:

$$a = 84°45'00''$$
$$a' = (180° - a) = 95°15'00''$$

log tg b

$$\log \operatorname{tg} 106°38'46'' = \log[-\operatorname{tg}(180° - 106°38'45'')] = \log[-\operatorname{tg} 73°21'14'']$$

log − 73°21′		= 0.52424 *n*	Δ = 46
para	10″.....	= 8	
»	4″	= 3	
log tg *b*..		= 0.52435 *n*	

log tg B

$$\operatorname{tg} 105°48'52'' = -\operatorname{tg}(180° - 105°48'52'') = -\operatorname{tg} 74°11'08''$$

log − tg 74°11′		= 0.54778 *n*	Δ = 48
para	08″	= 6	
log tg B..		= 0.54784 *n*	

log sen c = log tg b − log tg B

log tg *b*..........	= 0.52435 *n*
log tg B.	= 0.54784 *n*
log sen *c*..........	= 9.97651

c

log sen $c = 9.97649$	$c = 71°19'00''$	Δ = 4
para 2.............	= 30″	
	$c = 71°19'30''$	

o también

$$c' = 180° - c = 108°40'30''$$

log cos B

$$\cos 105°48'52'' = -\cos(180° - 105°48'52'') = -\cos 74°11'08''$$

$\log(-\cos 74°11)$	$= 9.43546\,n$		$\Delta = 44$
para	$08''$	$= -6$	
$\log \cos B$	$= 9.43540\,n$		

log cos b

$$\cos 106°38'46'' = -\cos(180° - 106°38'46'') = -\cos 73°21'14''$$

$\log(-\cos 73°21')$	$= 9.45716\,n$		$\Delta = 42$
para	$10''$		
»	$4''$	$= 10$	
$\log \cos b$	$= 9.45706\,n$		

log sen C = log cos B — log cos b

$\log \cos B$	$= 9.43540\,n$
$\log \cos b$	$= 9.45706\,n$
$\log \operatorname{sen} C$	$= 9.97834$

C

Si $\log \operatorname{sen} C = 9.97833$	$C = 72°03'$	$\Delta = 4$
para 1	$15''$	
	$C = 72°03'15''$	

o también

$$C' = 180° - C = 107°56'45''.$$

Calcularemos ahora con las fórmulas:

$$\operatorname{tg}\left(45° - \frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{B-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B+b}{2}}}, \qquad \operatorname{tg}\left(45° - \frac{c}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(B-b)}{\operatorname{sen}(B+b)}},$$

$$\operatorname{tg}\left(45° - \frac{C}{2}\right) = \pm\sqrt{\operatorname{tg}\frac{B+b}{2}\operatorname{tg}\frac{B-b}{2}}.$$

Siendo:

$$b = 106°38'46''$$
$$B = 105°48'52''$$
$$B - b = -0°49'54'' \qquad \frac{B-b}{2} = - \quad 0°24'57''$$
$$B + b = 212°27'38'' \qquad \frac{B+b}{2} = \quad 106°13'49''.$$

$$\mathit{log\ tg}\,\frac{B-b}{2}$$

tg nat $-0°24'$		$= -\ 0.006981$		$\Delta = 291$
para	$50''$	$=$	243	
»	$7''$	$=$	34	
tg nat $(-0°24'57'')$		$= -\ 0.007258$		
log tg (-0.007258)		$=$	$7.86082\,n$	

$$\log \operatorname{tg} \frac{B-b}{2} = 7.86082\,n.$$

$$\mathit{log\ tg}\,\frac{B+b}{2}$$

$$\operatorname{tg} 106°13'49'' = -\operatorname{tg}(180° - 106°13'49'') = -\operatorname{tg} 73°46'11''$$

log tg $(-73°46')$		$= 0.53587\,n$	$\Delta = 47$
para	$10''$	$= 8$	
»	$1''$	$= 1$	

$$\log \operatorname{tg} \frac{B+b}{2} = 0.53596\,n$$

$$\mathit{log\ tg}\left(45° - \frac{a}{2}\right)$$

$$2 \log \operatorname{tg}\left(45° - \frac{a}{2}\right) = \log \operatorname{tg} \frac{B-b}{2} - \log \operatorname{tg} \frac{B+b}{2}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{B-b}{2} = 7.86082\,n$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{B+b}{2} = 0.53596\,n$$

$$2 \log \operatorname{tg}\left(45° - \frac{a}{2}\right) = 7.32486$$

$$\log \operatorname{tg}\left(45° - \frac{a}{2}\right) = 8.66243$$

tg nat $\left(45° - \frac{a}{2}\right)$

$$\text{Si log tg}\left(45° - \frac{a}{2}\right) = 8.66238 \qquad \text{tg nat}\left(45° - \frac{a}{2}\right) = 0.045960$$

Si tg nat = 0.045701		$\left(45° - \frac{a}{2}\right) = 2°37'$	$\Delta = 292$
para	243	50″	
»	16	3″	

$$45° - \frac{a}{2} = 2°37'53''$$

$$a = 84°44'14''.$$

Y también

$$45° - \frac{a'}{2} = -\ 2°37'53''$$

$$\frac{a'}{2} = 47°37'53''$$

$$a' = 95°15'46''$$

log sen $(B - b)$

sen nat (— 0°49′)......		= —	0.014253	$\Delta = 291$
para	50″	=	243	
»	4″	=	19	
sen nat (— 0°49′54″).......		= —	0.014515	

log (— 0.01451)	=	8.16167 *n*	$\Delta = 30$
para 5	=	15	
log sen (B — b)	=	8.16182 *n*	

log sen $(B + b)$

sen 212°27′38″ = — sen (212°27′38″ — 180°) = — sen 32°27′38″

log (— sen 32°27′)..........		= 9.72962 *n*	$\Delta = 20$
para	30″	= 10	
»	8″	= 3	
log sen (B + b).............		= 9.72975 *n*	

$$\log tg\left(45^\circ - \frac{c}{2}\right)$$

$$2 \log tg\left(45^\circ - \frac{c}{2}\right) = \log sen\,(B - b) - \log sen\,(B + b)$$

$$\log sen\,(B - b) = 8.16182\,n$$
$$\log sen\,(B + b) = 9.72975\,n$$
$$2 \log tg\left(45^\circ - \frac{c}{2}\right) = 8.43207$$
$$\log tg\left(45^\circ - \frac{c}{2}\right) = 9.21603$$

Si $\log tg = 9.21578$ $\quad 45^\circ - \frac{c}{2} = 9^\circ 20'$ $\quad \Delta = 79$

para $\quad 25 \quad\quad 19''$

$$45^\circ - \frac{c}{2} = 9^\circ 20' 19''$$

$$\frac{c}{2} = 45^\circ - 9^\circ 20' 19'' = 35^\circ 39' 41''$$
$$c = \ldots\ldots\ldots\ldots\ 71^\circ 19' 22''$$

ó también

$$45^\circ - \frac{c'}{2} = -9^\circ 20' 19''$$

$$\frac{c'}{2} = 45^\circ + 9^\circ 20' 19'' = 54^\circ 20' 19''$$
$$c' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ 108^\circ 40' 38''.$$

$$tg\left(45^\circ - \frac{C}{2}\right) = \pm \sqrt{tg\frac{B+b}{2}\, tg\frac{B-b}{2}}$$

$$2 \log tg\left(45^\circ - \frac{C}{2}\right) = \log tg\frac{B+b}{2} + \log tg\frac{B-b}{2}$$

$$\log tg\frac{B+b}{2} = 0.53596\,n$$
$$\log tg\frac{B-b}{2} = 7.86082\,n$$
$$2 \log tg\left(45^\circ - \frac{C}{2}\right) = 8.39678$$
$$\log tg\left(45^\circ - \frac{C}{2}\right) = 9.19839.$$

$$\text{Si } \log \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{C}{2}\right) = 9.19807 \qquad 45^\circ - \frac{C}{2} = 8^\circ 58' \qquad \Delta = 82$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{para } 27 & = 20'' \\ \text{» } 5 \ldots\ldots\ldots & = 3'' \end{array}\right.$$

$$45^\circ - \frac{C}{2} = 8^\circ 58' 23''$$

$$\frac{C}{2} = 45^\circ - 8^\circ 58' 23'' = 36^\circ 01' 37''$$

$$C = \ldots\ldots \qquad 72^\circ 03' 14''$$

o también

$$45^\circ - \frac{C'}{2} = - 8^\circ 58' 23''$$

$$\frac{C'}{2} = 45^\circ + 8^\circ 58' 23'' = 53^\circ 58' 23''$$

$$C' = \qquad 107^\circ 56'' 46''.$$

302. 5° *Caso : Resolver un triángulo rectángulo, conociendo la hipotenusa y un ángulo agudo.* — *Resolución :* Sea a y B los elementos conocidos.

Debemos calcular b, c y C. Aplicando la regla del pentágono de Neper o las fórmulas nº 287, se tiene :

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B$$

$$\cos B = \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} c \qquad \text{de donde} \qquad \operatorname{tg} c = \cos B \operatorname{tg} a$$

$$\cos = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C \qquad \text{»} \qquad \operatorname{ctg} C = \cos a \operatorname{tg} B.$$

Discusión : El valor sen b, será siempre positivo y menor que 1, por ser producto de dos cantidades positivas menores que la unidad. Se encontrarán para b dos valores, uno en el primer cuadrante y otro en el segundo ; pero como b debe ser de la misma especie que B, sólo debemos aceptar un solo valor, aquel que esté en el mismo cuadrante que B.

En cuanto a los valores de c y C, siempre existirán, ya que están dados respectivamente por su tg y ctg. Y no hay ambigüedad en cuanto al cuadrante, pues si son positivas estarán en el primer cuadrante, y si son negativas en el segundo. Las mismas fórmulas que utilizamos para calcular c y C, nos muestran que tg c y ctg C tienen el mismo signo, puesto que tg a y cos a tienen el mismo signo y lo mismo cos B y tg B.

Luego el problema siempre admite una solución, y una sola.

Observación. — En caso de que el lado b, que se calcula por su ***seno,*** quede mal determinado, se puede proceder calculando primero c o C y luego, calculando b por cualquiera de las siguientes fórmulas

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{sen} c \operatorname{tg} B \quad \text{o bien} \quad \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C.$$

Se pueden verificar los cálculos por la fórmula:

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{sen} b \operatorname{tg} C.$$

Ejemplo: Resolver un triángulo esférico rectángulo conociendo:

$$a = 60°20'07'' \quad \text{y} \quad B = 72°04'20''$$

log sen a

log sen 60°20′		= 9.93898	Δ = 7
para	07″	= 1	
log sen a.		= 9.93899	

log sen B

log sen 72°04′........		= 9.97837	Δ = 4
para	20″	= 1	
log sen B....		= 9.97838	

log sen b = log sen a + log sen B

log sen a.......	= 9.93899
log sen B.........	= 9.97838
log sen b.......	= 9.91737

b

Si log sen b = 9.91729		b = 55°45′	Δ = 9
para	8	50″	
		b = 55°45′50″	

log cos B

log cos 72°04′.......		= 9.48842	Δ = 39
para	20″....	= 13	
log cos B..		= 9.48829	

log tg a

$$\begin{array}{lrl} \log \operatorname{tg} 60^\circ 20' \ldots\ldots & = 0.24442 & \Delta = 29 \\ \text{para} \quad 07'' & = \underline{\qquad 3} & \\ \log \operatorname{tg} a\,. & = 0.24445. & \end{array}$$

log tg c = log cos B + log tg a

$$\begin{array}{lr} \log \cos \mathrm{B} \ldots\ldots\ldots\ldots & = 9.48829 \\ \log \operatorname{tg} a \ldots\ldots\ldots\ldots & = \underline{0.24445} \\ \log \operatorname{tg} c & = 9.73274 \end{array}$$

c

$$\begin{array}{lrr} \text{Si } \log \operatorname{tg} c = 9.73265 & c = 28^\circ 23' & \Delta = 30 \\ \text{para} \quad 9 & \underline{\qquad 18''} & \\ & c = 28^\circ 23' 18'' & \end{array}$$

log cos a

$$\begin{array}{lrl} \log \cos 60^\circ 20' & = 9.69456 & \Delta = 22 \\ \text{para} \quad 07'' \ldots\ldots & = \underline{\qquad 3} & \\ \log \cos a \ldots\ldots\ldots & = 9.69453 & \end{array}$$

log tg B

$$\begin{array}{lrl} \log \operatorname{tg} 72^\circ 04' & = 0.48995 & \Delta = 43 \\ \text{para} \quad 20'' \ldots\ldots & = \underline{\qquad 14} & \\ \log \operatorname{tg} \mathrm{B} \ldots\ldots\ldots\ldots & = 0.49009. & \end{array}$$

log ctg C = log cos a + log tg B

$$\begin{array}{lr} \log \cos a \ldots\ldots & = 9.69453 \\ \log \operatorname{tg} \mathrm{B} & = \underline{0.49009} \\ \log \operatorname{ctg} \mathrm{C} \ldots\ldots\ldots\ldots & = 0.18462 \end{array}$$

C

$$\begin{array}{lrr} \text{Si } \log \operatorname{ctg} \mathrm{C} = 18472 & \mathrm{C} = 33^\circ 10' & \Delta = 28 \\ \text{para} \quad 10 \ldots\ldots\ldots & = \underline{\qquad 22''} & \\ & \mathrm{C} = 33^\circ 10' 22'' & \end{array}$$

Comprobación

$$tg\ c = sen\ b\ ctg\ C$$

$$\begin{array}{ll} \log \operatorname{sen} b \dots\dots & = 9.91737 \\ \log \operatorname{tg} C \dots\dots\dots\dots & = \underline{9.81538} \\ \log \operatorname{tg} c & = 9.73275. \end{array}$$

303. *Sexto caso: Resolver un triángulo esférico rectángulo, conociendo los dos ángulos oblicuos.* — Aplicando la regla del pentágono de Neper o aplicando las fórmulas dadas en nº 287, se tiene:

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C$$

$$\cos B = \cos b \operatorname{sen} C \quad \text{de donde} \quad \cos b = \frac{\cos B}{\operatorname{sen} C}$$

$$\cos C = \cos c \operatorname{sen} B \quad \text{»} \quad \cos c = \frac{\cos C}{\operatorname{sen} B}.$$

Discusión: Como cada uno de los elementos incógnitos a, b y c, está determinado por el coseno, no habrá ambigüedad para determinar a, b y c siempre que el valor del respectivo *cos* sea menor que la unidad.

Necesitamos ver, entonces, qué condiciones deben satisfacer B y C, para que los cosenos sean menores que 1.

Tomemos la relación que nos da el *cos b* que podemos escribir:

$$\cos b = \frac{\cos B}{\operatorname{sen} C} = \frac{\cos B}{\cos(90^\circ - C)} = \frac{\cos B}{\cos(C - 90^\circ)}.$$

Para que $\cos b < 1$, debe tenerse:

$$\cos B < \cos(90^\circ - C) \quad \text{y} \quad \cos B < \cos(C - 90^\circ)$$

luego si C es menor que 90°, es decir, si $(90^\circ - C)$ es positivo

$$90^\circ - C < B < 180^\circ - (90^\circ - C)$$

o bien

$$90^\circ - C < B < 90^\circ + C. \qquad (1)$$

Si en cambio C es mayor que 90°, es decir si $(C - 90°)$ es positivo, debe tenerse:

$$C - 90° < B < 180° - (C - 90°)$$

o bien

$$C - 90° < B < 270° - C. \qquad (2)$$

De la relación (1) sacamos:

$$B + C > 90° \quad y \quad B - C < 90°.$$

Y de la relación (2) obtenemos

$$C - B < 90° \quad y \quad B + C < 270°.$$

Luego podemos resumir esas condiciones en la siguiente forma:

$$90° < B + C < 270°$$
$$B - C < 90°.$$

Cumplidas esas condiciones por los ángulos B y C, se tiene que:

$$\frac{\cos B}{\operatorname{sen} C} \text{ es menor que la unidad.}$$

Ahora bien, si $\frac{\cos B}{\operatorname{sen} C} < 1$, se tiene $\frac{\cos^2 B}{\operatorname{sen}^2 C} < 1$

es decir

$$\cos^2 B < \operatorname{sen}^2 C.$$

Y también

$$1 - \operatorname{sen}^2 B < 1 - \cos^2 C$$

vale decir

$$\cos^2 C < \operatorname{sen}^2 B$$

vale decir

$$\frac{\cos^2 C}{\operatorname{sen}^2 B} < 1 \quad \text{o bien} \quad \frac{\cos C}{\operatorname{sen} B} < 1$$

y existe un valor único para $\cos c$.

Multiplicando por $\frac{\cos B}{\operatorname{sen} C} < 1$, se tiene $\frac{\operatorname{ctg} B}{\operatorname{tg} C} < 1 \qquad \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C < 1$; luego el valor de $\cos a$ es menor que 1, y por lo tanto se encontrará un valor único para a.

Luego, para que el problema tenga solución, es necesario y suficiente que la suma de los ángulos agudos (B + C) esté comprendida entre 90° y 270° y que la diferencia entre el mayor y el menor sea menor que 90°. Llenados estos dos requisitos el problema tiene una sola solución.

En general, para calcular los elementos a, b y c es preferible utilizar las fórmulas dadas en nº 294 que nos dan b y c, y en cuanto a a, puede calcularse por la siguiente fórmula:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} = \frac{1 \quad \cos a}{1 + \cos a} = \frac{1 - \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C}{1 + \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C},$$

o bien

$$\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} = \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C - \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C + \cos B \cos C} = - \frac{\cos (B + C)}{\cos (B - C)},$$

y resulta

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sqrt{- \frac{\cos (B + C)}{\cos (B - C)}}$$

y para b y c habíamos obtenido:

$$\operatorname{tg} \frac{b}{2} = \sqrt{\operatorname{tg} \left(\frac{B + C}{2} - 45°\right) \operatorname{tg} \left(\frac{B - C}{2} + 45°\right)},$$

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \sqrt{\operatorname{tg} \left(\frac{B + C}{2} - 45°\right) \operatorname{tg} \left(\frac{C - B}{2} + 45°\right)}.$$

Ejemplo : Resolver un triángulo esférico rectángulo conociendo :

$$B = 105°48'52'' \quad \text{y} \quad C = 72°03'15''$$

log ctg B

$$\operatorname{ctg} 105°48'52'' = - \operatorname{ctg} (180° - 105°48'52'') = - \operatorname{ctg} 74°11'08''$$

log ctg 74°11′	= 9.45222	Δ=48
para 08″	= 6	
log ctg 105°48′52″............	= 9.45216 n	

log ctg C

log ctg 72°03′		= 9.51048	$\Delta = 43$
para	15″,	= 10	
log ctg C......		= 9.51038	

log cos a

log ctg B......	= 9.45216 *n*	
log ctg C..........	= 9.51038	
log cos *a* .	= 8.96254	

Si log cos a = 8.96280		a'	= 84°44′	$\Delta = 137$
para	26..		= 11″	
		a'	= 84°44′11″	

$a = 180° - 84°44'11'' = 95°15'49''$

log sen B

log sen 105°48′52″ = log sen (180° − 105°48′52″) = log sen 74°11′08″

log sen 74°11′		= 9.98324	$\Delta = 3$
para	08″	= —	
log sen B		= 9.98324	

log cos B

log 105°48′52″ = − cos (180° − 105°48′52″) = − cos 74°11′08″

log cos 74°11′		= 9.43546	$\Delta = 44$
para	08″...	= 6	
log cos 105°48′52″.......		= 9.43540	

log sen C

log sen 72°03′		= 9.97833	$\Delta = 4$
para	15″	= 1	
log sen C		= 9.97834	

log cos C

log cos 72°03′		= 9.48881	$\Delta = 39$
para	15″	= 10	
log cos C		= 9.48871	

log cos b

log cos B..	$= 9.43540\,n$
log sen C...............	$= 9.97834$
log cos b ..	$= 9.45706\,n$

b

Si log cos b..	$= 9.45716$	b_1	$= 73°21'$	$\Delta = 42$
para	10		$14''$	
		b_1	$= 73°21'14''$	

$$b = 180° - 73°21'14'' = 106°38'46''$$

log cos c

log cos C........	$= 9.48871$
log sen B..........	$= 9.98324$
log cos c	$= 9.50547.$

Si log cos c	$= 9.50561$	c...	$= 71°19'$	$\Delta = 38$
para	14		$22''$	
		c.	$= 71°19'22''.$	

Y calculando por las otras fórmulas, se tiene:

B	$= 105°48'52''$		
C.........	$= 72°03'15''$		
B + C.....	$= 177°52'07''$	$\frac{B + C}{2}$....	$88°56'03''$
B − C...	$= 33°45'37''$	$\frac{B - C}{2}$.....	$16°52'48''$

$$\frac{B + C}{2} - 45° = 43°56'03'', \qquad \frac{B - C}{2} + 45° = 61°52'48'',$$

$$\frac{C - B}{2} + 45° = 28°07'12''.$$

Cálculo de a

$\log [-\cos 177°52'07'']$	$= 9.99970$
$\log \cos \quad 33°45'37''$.	$= \underline{9.91979}$
$2 \log \operatorname{tg} \frac{a}{2}$	$= 0.07991$
$\log \operatorname{tg} \frac{a}{2}$	$= 0,03995$
$\frac{a}{2}$	$= 47°37'54''$
a	$= 95°15'48''$

Cálculo de b

$\log \operatorname{tg} 43°56'03''$	$= 9.98384$
$\log \operatorname{tg} 61°52'48''$	$= \underline{0.27213}$
$2 \log \operatorname{tg} \frac{b}{2}$	$= 0.25597$
$\log \operatorname{tg} \frac{b}{2}$	$= 0.12798$
$\frac{b}{2}$	$= 53°19'20''$
b	$= 106°38'40''$

Cálculo de c

$\log \operatorname{tg} 43°56'03''$	$= 9.98384$
$\log \operatorname{tg} 28°07'12''$	$= \underline{9.72784}$
$2 \log \operatorname{tg} \frac{c}{2}$	$= 9.71168$
$\log \operatorname{tg} \frac{c}{2}$	$= 9.85584$
$\frac{c}{2}$	$= 35°39'39''$
c	$= 71°19'18''$.

CAPÍTULO IV

OTRAS FÓRMULAS DEL TRIÁNGULO ESFÉRICO EN GENERAL CALCULABLES POR LOGARITMOS

(FÓRMULAS DE DELAMBRE Y DE NEPER)

304. *Expresión de ángulos en función de lados.* — Las fórmulas del grupo I (nº 279), vinculan los tres lados de un triángulo con un ángulo. Permiten entonces calcular los ángulos de un triángulo cuando se conocen los tres lados. Pero la expresión coseno del ángulo:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c},$$

no es calculable por logaritmos. Vamos a obtener fórmulas que dan los ángulos en función de los lados, pero que se pueden calcular por logaritmos.

En efecto, recordando que:

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A,$$

¿ ?

se tiene:

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c - \cos a + \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} = \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c},$$

o bien, transformando en producto la diferencia de cosenos,

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{a + b - c}{2} \operatorname{sen} \frac{a - b + c}{2}}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}.$$

Haciendo:

$$a + b + c = 2p,$$

se tiene:

$$b + c - a = 2(p - a),$$
$$a + c - b = 2(p - b),$$
$$a + b - c = 2(p - c),$$

luego

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}}.$$

Y hay que tener en cuenta sólo el signo + del radical, pues en un triángulo $\operatorname{sen}\frac{A}{2}$ es siempre positivo.

Si hubiésemos partido de la 2ª o 3ª del grupo I por un camino análogo, habríamos obtenido fórmulas del mismo tipo para $\operatorname{sen}\frac{B}{2}$ y $\operatorname{sen}\frac{C}{2}$. Se tiene así:

$$\text{VII} \ldots \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen}\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}}, \\ \operatorname{sen}\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c}}, \\ \operatorname{sen}\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}}. \end{aligned} \right.$$

305. Procediendo en la misma forma se tiene:

$$2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A = 1 + \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} =$$
$$= \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c + \cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c},$$

$$2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}.$$

Y transformando en producto la diferencia de cosenos:

$$2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{2\operatorname{sen}\dfrac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\dfrac{b+c-a}{2}}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c},$$

de donde

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}}.$$

Donde hay que tener en cuenta sólo el signo más del radical, porque el valor del ángulo es menor que 180° y por lo tanto $\frac{A}{2}$ es menor que 90°. Procediendo en forma análoga con la 2ª y 3ª del grupo I, obtenemos fórmulas del mismo tipo para $\cos\frac{B}{2}$ y $\cos\frac{C}{2}$, y tendremos:

$$\text{VIII..}\quad\left\{\begin{aligned}\cos\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}},\\ \cos\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c}},\\ \cos\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}}.\end{aligned}\right.$$

306. Dividiendo ordenadamente las fórmulas del grupo VII por las del grupo VIII, se tiene:

$$\text{IX}\ldots\ldots\quad\left\{\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)}},\\ \operatorname{tg}\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-b)}},\\ \operatorname{tg}\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-c)}}.\end{aligned}\right.$$

Fórmulas que permiten calcular los ángulos de un triángulo cuando se conocen los tres lados.

Siempre conviene utilizar el grupo IX, pues aparte de calcularse por la *tg* en lugar de *sen* o *cos*, es fácil ver que calculando por el grupo VII, se necesitan seis logaritmos, calculando por los del grupo VIII, se necesitan siete logaritmos, mientras que calculando por el grupo IX se necesitan sólo cuatro logaritmos.

307. Si hacemos

$$H = \sqrt{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a) \operatorname{sen}(p-b) \operatorname{sen}(p-c)},$$

se tiene

$$\text{X} \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen} A &= 2 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \frac{2H}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}, \\ \operatorname{sen} B &= 2 \operatorname{sen} \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = \frac{2H}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c}, \\ \operatorname{sen} C &= 2 \operatorname{sen} \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{2H}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}. \end{aligned} \right.$$

308. Y haciendo

$$K = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a) \operatorname{sen}(p-b) \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p}} = \frac{H}{\operatorname{sen} p}.$$

Tenemos:

$$\text{XI} \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= \frac{K}{\operatorname{sen}(p-a)}, \\ \operatorname{tg} \frac{B}{2} &= \frac{K}{\operatorname{sen}(p-b)}, \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \frac{K}{\operatorname{sen}(p-c)}. \end{aligned} \right.$$

Veremos en el nº 358 el significado de K.

309. *Expresión de lados en función de ángulos.* — Tomando la 1ª del grupo VI (nº 285), se tiene:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a,$$

de donde

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C},$$

luego es

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} = 1 - \cos a = 1 - \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C - \cos A - \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C},$$

o bien

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} = \frac{-[\cos A + \cos (B + C)]}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C},$$

y transformando en producto la suma de cosenos, se tiene:

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} = - \frac{2 \cos \frac{A + B + C}{2} \cos \frac{B + C - A}{2}}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}.$$

Hemos llamado exceso esférico 2ε a

$$2\varepsilon = A + B + C - 180°,$$

de donde:

$$A + B + C = 180° + 2\varepsilon$$

$$\frac{A + B + C}{2} = 90° + \varepsilon.$$

Y también

$$\frac{B + C - A}{2} = 90° - (A - \varepsilon),$$

$$\frac{A + C - B}{2} = 90° - (B - \varepsilon),$$

$$\frac{A + B - C}{2} = 90° - (C - \varepsilon).$$

Luego

$$\operatorname{sen} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} (A - \varepsilon)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}},$$

y en forma análoga para los otros lados, obteniéndose así:

$$\text{XII} \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} (A - \varepsilon)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}}, \\ \operatorname{sen} \frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} (B - \varepsilon)}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}}, \\ \operatorname{sen} \frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} (C - \varepsilon)}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}}. \end{aligned} \right.$$

Donde hay que tomar sólo el signo más para el radical, puesto que los valores de los senos de los lados y de la mitad de los lados son positivos.

310. Análogamente tenemos:

$$2\cos^2\frac{a}{2} = 1 + \cos a = 1 + \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}$$

o bien

$$2\cos^2\frac{a}{2} = \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C + \cos A + \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C} = \frac{\cos A + \cos(B - C)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}.$$

Y transformando en producto la suma de los cosenos, se tiene:

$$\cos^2\frac{a}{2} = \frac{\cos\frac{A+B-C}{2}\cos\frac{A+C-B}{2}}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C},$$

o bien

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(B-\varepsilon)\operatorname{sen}(C-\varepsilon)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}},$$

donde hay que tener en cuenta sólo el signo más del radical, ya que el cos de la mitad de un lado es siempre positivo. En forma análoga se obtendría $\cos\frac{b}{2}$ y $\cos\frac{c}{2}$. Tenemos así

$$\text{XIII} \quad \left\{\begin{aligned} \cos\frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(B-\varepsilon)\operatorname{sen}(C-\varepsilon)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}}, \\ \cos\frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(A-\varepsilon)\operatorname{sen}(C-\varepsilon)}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}}, \\ \cos\frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(A-\varepsilon)\operatorname{sen}(B-\varepsilon)}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}}. \end{aligned}\right.$$

311. Dividiendo ordenadamente cada una del grupo XII por cada una del grupo XIII, se tiene:

$$\text{XIV} \quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\varepsilon \operatorname{sen}(A-\varepsilon)}{\operatorname{sen}(B-\varepsilon)\operatorname{sen}(C-\varepsilon)}}, \\ \operatorname{tg}\frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\varepsilon \operatorname{sen}(B-\varepsilon)}{\operatorname{sen}(A-\varepsilon)\operatorname{sen}(C-\varepsilon)}}, \\ \operatorname{tg}\frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\varepsilon \operatorname{sen}(C-\varepsilon)}{\operatorname{sen}(A-\varepsilon)\operatorname{sen}(B-\varepsilon)}}. \end{aligned}\right.$$

Donde sólo hay que tener en cuenta el signo positivo del radical.

312. Se puede dar todavía otra forma de expresar lo mismo.
Haciendo

$$2P = A + B + C = 180^\circ + 2\varepsilon.$$

Resulta $\dfrac{A+B-C}{2} = P - C$

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= P - 90^\circ & \operatorname{sen} \varepsilon &= -\cos P,\\
(A - \varepsilon) &= 90^\circ - (P - A), & \operatorname{sen}(A - \varepsilon) &= \cos(P - A),\\
(B - \varepsilon) &= 90^\circ - (P - B), & \operatorname{sen}(B - \varepsilon) &= \cos(P - B),\\
(C - \varepsilon) &= 90^\circ - (P - C), & \operatorname{sen}(C - \varepsilon) &= \cos(P - C).
\end{aligned}$$

Y los grupos anteriores se transforman en:

$$\text{XV}\quad \left\{\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos P \cos(P - A)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}},\\
\operatorname{sen}\frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos P \cos(P - B)}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}},\\
\operatorname{sen}\frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos P \cos(P - C)}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}}.
\end{aligned}\right.$$

$$\text{XVI}\quad \left\{\begin{aligned}
\cos\frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\cos(P - B)\cos(P - C)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}},\\
\cos\frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\cos(P - A)\cos(P - C)}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}},\\
\cos\frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\cos(P - A)\cos(P - B)}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}}.
\end{aligned}\right.$$

$$\text{XVII..}\quad \left\{\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos P \cos(P - A)}{\cos(P - B)\cos(P - C)}},\\
\operatorname{tg}\frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos P \cos(P - B)}{\cos(P - A)\cos(P - C)}},\\
\operatorname{tg}\frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos P \cos(P - C)}{\cos(P - A)\cos(P - B)}}.
\end{aligned}\right.$$

313. Haciendo

$$h = \sqrt{-\cos P \cos (P - A) \cos (P - B) \cos (P - C)}$$

tenemos

$$\text{XVIII}\ldots\ \begin{cases} \operatorname{sen} a = 2 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = \frac{2h}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}, \\ \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \frac{b}{2} \cos \frac{b}{2} = \frac{2h}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}, \\ \operatorname{sen} c = 2 \operatorname{sen} \frac{c}{2} \cos \frac{c}{2} = \frac{2h}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}. \end{cases}$$

314. Y haciendo

$$\operatorname{ctg} R = \sqrt{\frac{\cos (P - A) \cos (P - B) \cos (P - C)}{-\cos P}}$$

se tiene :

$$\text{XIX}\ldots\ \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{a}{2} = \cos (P - A) \operatorname{tg} R \\ \operatorname{tg} \frac{b}{2} = \cos (P - B) \operatorname{tg} R \\ \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \cos (P - C) \operatorname{tg} R. \end{cases}$$

Veremos más adelante que R es el radio esférico del círculo circunscripto en el triángulo (nº 355).

Transformaciones mediante el empleo de ángulos auxiliares de cálculo

315. *Transformación de las fórmulas que dan el coseno de un lado.*— Tomando la 1ª del grupo I (nº 279), se tiene :

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A,$$

que puede ponerse

$$\cos a = \cos b \left[\cos c + \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b} \operatorname{sen} c \cos A\right] = \cos b\,[\cos c + \operatorname{tg} b \cos A \operatorname{sen} c],$$

e introduciendo un ángulo auxilar φ tal

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} b \cos A,$$

se tiene:

$$\cos a = \cos b \frac{\cos c \cos \varphi + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\cos b}{\cos \varphi} \cos (c - \varphi), \tag{1}$$

o también

$$\cos (c - \varphi) = \frac{\cos a \cos \varphi}{\cos b}. \tag{2}$$

La (1) permite calcular a y la (2) calcular c.
Primero hay que calcular φ.

316. *Transformación de fórmulas que dan el coseno de un ángulo.* — Tomando la 1ª del grupo VI (nº 285)

$$\cos A = - \cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a,$$

puede escribirse

$$\cos A = \cos B \left(- \cos C + \frac{\operatorname{sen} B}{\cos B} \cos a \operatorname{sen} C \right) =$$
$$= \cos B (- \cos C + \operatorname{tg} B \cos a \operatorname{sen} C),$$

e introduciendo un ángulo auxiliar de cálculo φ, tal que:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} B \cos a,$$

se tiene

$$\cos A = - \frac{\cos B}{\cos \varphi} \cos (C + \varphi),$$

o bien

$$\cos (C + \varphi) = - \frac{\cos A \cos \varphi}{\cos B}.$$

según sea que se quiera calcular A o C.

317. *Transformación de las fórmulas que vinculan cuatro elementos consecutivos.* — La primera del grupo V (nº 284) podemos escribirla:

$$\operatorname{sen} b \operatorname{ctg} a = \cos b \cos C + \operatorname{sen} C \operatorname{ctg} A,$$

de donde:

$$\operatorname{sen} b \operatorname{ctg} a = \cos b\left(\cos C + \operatorname{sen} C \frac{\operatorname{ctg} A}{\cos b}\right),$$

e introduciendo un ángulo auxiliar de cálculo φ, dado por

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{ctg} A}{\cos b},$$

se tiene:

$$\operatorname{ctg} a = \frac{\operatorname{ctg} b}{\cos \varphi} \cos (C - \varphi),$$

o bien

$$\cos (C - \varphi) = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a} \cos \varphi.$$

Según se busque a o C.

Tomando la misma fórmula del grupo V, podemos escribir:

$$\operatorname{sen} C \operatorname{ctg} A = \operatorname{sen} b \operatorname{ctg} a - \cos b \cos C = \cos C\left(\operatorname{sen} b \frac{\operatorname{ctg} a}{\cos C} - \cos b\right),$$

e introduciendo un ángulo auxiliar de cálculo φ_1 dado por

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\operatorname{ctg} a}{\cos C},$$

se tiene:

$$\operatorname{ctg} A = -\frac{\operatorname{ctg} C}{\cos \varphi_1} \cos (b + \varphi_1),$$

o bien

$$\cos (b + \varphi_1) = -\frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A} \cos \varphi_1.$$

Según sea que se quiera calcular A o b.

318. Fórmulas de Delambre. — Desarrollando $\operatorname{sen} \frac{A + B}{2}$, se tiene:

$$\operatorname{sen} \frac{A + B}{2} = \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \operatorname{sen} \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2},$$

y reemplazando $\operatorname{sen} \frac{A}{2}$, $\operatorname{sen} \frac{B}{2}$, $\cos \frac{A}{2}$ y $\cos \frac{B}{2}$, por sus valores dados por las relaciones de los grupos VII y VIII (n^{os} 304 y 305) se tiene:

$$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}}\cdot\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}c}}+$$

$$+\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}c}}\cdot\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}},$$

o bien

$$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}=\frac{\operatorname{sen}(p-b)+\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}c}\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}},$$

y transformando en producto la suma de senos y teniendo en cuenta el valor del radical, según la 3ª del grupo VIII (nº 305), se tiene

$$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{2p-a-b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}c}\cos\frac{C}{2},$$

o bien

$$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}\cos\frac{C}{2},$$

y resulta

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.$$

Procediendo en orma análoga y desarrollando sen $\frac{A-B}{2}$, $\cos\frac{A+B}{2}$ y $\cos\frac{A-B}{2}$, se obtiene el siguiente grupo de fórmulas, conocidas por fórmulas o análogas de Delambre.

$$\text{XX}. \left\{ \begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}\dfrac{A+B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}} &= \frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{c}{2}}, \\ \frac{\operatorname{sen}\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}} &= \frac{\operatorname{sen}\dfrac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{c}{2}}, \\ \frac{\cos\dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{C}{2}} &= \frac{\cos\dfrac{a+b}{2}}{\cos\dfrac{c}{2}}, \\ \frac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{C}{2}} &= \frac{\operatorname{sen}\dfrac{a+b}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{c}{2}}. \end{aligned} \right.$$

Es fácil recordar este grupo de fórmulas. En efecto:

a) En los primeros miembros están los tres ángulos, y en los segundos los lados, con esta disposición:

$$\begin{matrix} A & & B \\ & C & \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} a & & b \\ & c & \end{matrix}$$

b) Las únicas líneas que figuran son *senos* y *cosenos*. En los primeros miembros las líneas del numerador y del denominador son complementarias y en los segundos miembros son iguales.

c) Considerando los numeradores, a un signo *más* de un miembro, en el otro se tiene un coseno y recíprocamente a un coseno en un miembro, en otro se tiene signo *más*. A un signo *menos* en un miembro corresponde un *seno* en el otro miembro y recíprocamente a un *seno* en un miembro, en el otro se tiene signo *menos*.

319. Fórmulas de Neper. — Dividiendo la primera fórmula de Delambre por la tercera y la segunda por la cuarta; y dividiendo luego la cuarta por la tercera e invirtiendo los términos y dividiendo finalmente la segunda por la primera e invirtiendo los términos, se tiene:

$$\text{XXI..}\quad\left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}}=\dfrac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}}, & (\alpha)\\[4ex]
\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}}{\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}}=\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{a+b}{2}}, & (\beta)\\[4ex]
\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{c}{2}}=\dfrac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{A+B}{2}}, & (\gamma)\\[4ex]
\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{a-b}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{c}{2}}=\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{A+B}{2}}. & (\delta)
\end{array}\right.$$

Conocidas como *fórmulas o analogías de Neper*. Cada una vincula a cinco elementos del triángulo.

Dividiendo la (γ) por la (δ) [o la (α) por (β) e invirtiendo] se tiene:

$$\text{XXII.....}\quad\left\{\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{a-b}{2}}=\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}}.\right.$$

Que dice que la tangente de la semisuma de dos lados es a la tangente de la semidiferencia de esos lados como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos es a la tangente de la semidiferencia de esos ángulos.

320. Fórmulas de Reidt. — De las analogías de Delambre, se pueden obtener otras fórmulas dadas por Friedrich Reidt, que suelen ser útiles para la resolución de triángulos.

Para ello usaremos la siguiente abreviación:

$$A+a=4s,\qquad B+b=4s_1,\qquad C+c=4s_2.$$
$$A-a=4d,\qquad B-b=4d_1,\qquad C-c=4d_2.$$

Y tomando la segunda fórmula de Delambre (XX, nº 318), se tiene:

$$\frac{\cos\frac{C}{2} - \operatorname{sen}\frac{c}{2}}{\cos\frac{C}{2} + \operatorname{sen}\frac{c}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2} - \operatorname{sen}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2} + \operatorname{sen}\frac{a-b}{2}},$$

reemplazando $\cos\frac{C}{2}$ por $\operatorname{sen}\left(90° - \frac{C}{2}\right)$ y transformando en producto resulta

$$\operatorname{tg}(45° - s_2)\operatorname{ctg}(45° - d_2) = \operatorname{ctg}(s - s_1)\operatorname{tg}(d - d_1). \qquad (\alpha)$$

Tomando ahora la tercer fórmula de Delambre, se tiene:

$$\operatorname{tg}(45° - s_2)\operatorname{tg}(45° - d_2) = \operatorname{tg}(s + s_1)\operatorname{tg}(d + d_1). \qquad (\beta)$$

Procediendo en la misma forma con la primera y cuarta de las fórmulas de Delambre, se tiene respectivamente:

$$\operatorname{tg} d_2 \operatorname{tg} s_2 = \operatorname{tg}(45° - s - d_1)\operatorname{tg}(45° - s_1 - d), \qquad (\gamma)$$

$$\operatorname{tg} d_2 \operatorname{ctg} s_2 = \operatorname{tg}(45° - s + d_1)\operatorname{ctg}(45° + s_1 - d). \qquad (\delta)$$

Multiplicando miembro a miembro la (α) con la (β)

$$\operatorname{tg}^2(45° - s_2) = \operatorname{tg}(s + s_1)\operatorname{ctg}(s - s_1)\operatorname{tg}(d + d_1)\operatorname{tg}(d - d_1). \qquad (1)$$

Dividiendo la (β) por la (α):

$$\operatorname{tg}^2(45° - d_2) = \operatorname{tg}(s + s_1)\operatorname{tg}(s - s_1)\operatorname{tg}(d + d_1)\operatorname{ctg}(d - d_1). \qquad (2)$$

En la misma forma, multiplicando la (γ) por la (δ):

$$\operatorname{tg}^2 d_2 = \operatorname{tg}(45° - s + d_1)\operatorname{tg}(45° - s + d_1)\operatorname{ctg}(45° - d + s_1)$$
$$\operatorname{tg}(45° - d - s_1). \qquad (3)$$

Y dividiendo la (γ) por la (δ):

$$\operatorname{tg}^2 s_2 = \operatorname{ctg}(45° - s + d_1)\operatorname{tg}(45° - s - d_1)\operatorname{tg}(45° + s_1 - d)$$
$$\operatorname{tg}(45° - s_1 - d). \qquad (4)$$

Las cuatro últimas relaciones son las llamadas fórmulas de Reidt.

CAPÍTULO V

EXCESO ESFÉRICO

321. Hemos llamado exceso esférico 2ε a lo que la suma de los ángulos del triángulo excede de 180°, es decir, a

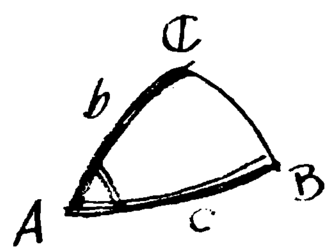
$$2\varepsilon = A + B + C - 180^\circ.$$

Vamos a deducir diferentes fórmulas que nos permiten calcular el exceso esférico.

322. *Exceso esférico en función de dos lados y el ángulo comprendido.* — Tomando las expresiones del grupo XIV (nº 311)

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\varepsilon \operatorname{sen}(B-\varepsilon)}{\operatorname{sen}(A-\varepsilon)\operatorname{sen}(C-\varepsilon)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\varepsilon \operatorname{sen}(C-\varepsilon)}{\operatorname{sen}(A-\varepsilon)\operatorname{sen}(B-\varepsilon)}},$$



sacamos

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{\operatorname{sen}(A-\varepsilon)},$$

o bien

$$\operatorname{ctg}\frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{c}{2} = \frac{\operatorname{sen}(A-\varepsilon)}{\operatorname{sen}\varepsilon} = \frac{\operatorname{sen} A\cos\varepsilon - \operatorname{sen}\varepsilon\cos A}{\operatorname{sen}\varepsilon} =$$
$$= \operatorname{sen} A \operatorname{ctg}\varepsilon - \cos A$$

de donde

$$\operatorname{ctg}\varepsilon = \frac{\operatorname{ctg}\frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{c}{2} + \cos A}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{c}{2}}{\operatorname{sen} A} + \operatorname{ctg} A$$

fórmula que da el exceso esférico en función de dos lados y el ángulo comprendido, pero que tiene el inconveniente de no ser calculable por logaritmos.

Podemos sacar otra expresión del exceso esférico en función de dos lados y el ángulo comprendido.

En efecto, multiplicando entre sí las relaciones 2ª y 3ª del grupo XII (nº 309) y teniendo en cuenta la fórmula 1ª del grupo XIII (nº 310)

$$\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\varepsilon}{\cancel{2}}}{\operatorname{sen} A}\cdot\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(B-\varepsilon)\operatorname{sen}(C-\varepsilon)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\varepsilon}{\cancel{2}}}{\operatorname{sen} A}\cos\frac{a}{2}$$

de donde

$$\operatorname{sen}\frac{\varepsilon}{\cancel{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\operatorname{sen} A. \tag{1}$$

Multiplicando ahora entre sí las relaciones 2ª y 3ª del grupo XIII (nº 310) y teniendo en cuenta la fórmula 1ª de ese mismo grupo:

$$\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} = \frac{\operatorname{sen}\left(A-\frac{\varepsilon}{\cancel{2}}\right)}{\operatorname{sen} A}\cdot\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(B-\varepsilon)\operatorname{sen}(C-\varepsilon)}{\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C}} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\left(A-\frac{\varepsilon}{\cancel{2}}\right)}{\operatorname{sen} A}\cos\frac{a}{2}$$

de donde

$$\operatorname{sen}\left(A-\frac{\varepsilon}{\cancel{2}}\right) = \frac{\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\operatorname{sen} A. \tag{2}$$

Eliminando ahora a entre las relaciones (1) y (2), se tendrá el exceso esférico en función de b, c y A.

Multiplicando la (1) por cos A y desarrollando el sen $\left(A-\frac{\varepsilon}{\cancel{2}}\right)$ en (2) se tiene:

$$\operatorname{sen}\frac{\varepsilon}{\cancel{2}}\cos A = \frac{\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\operatorname{sen} A\cos A$$

y

$$\operatorname{sen} A \cos\frac{\varepsilon}{2} - \operatorname{sen}\frac{\varepsilon}{2}\cos A = \frac{\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\operatorname{sen} A.$$

Y sumando se obtiene:

$$\cos\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} + \operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cos A}{\cos\frac{a}{2}}. \qquad (3)$$

Multiplicando la (3) por cos A y la (1) por sen A y sumando resulta:

$$\cos\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2} + \cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos A}{\cos\frac{a}{2}}. \qquad (4)$$

Y ahora dividiendo la (1) por la (2) se tiene:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}\operatorname{sen} A}{\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} - \operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cos A} = \frac{\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}\operatorname{sen} A}{1 + \operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}\cos A}$$

y dividiendo la (1) por la (4)

$$\operatorname{tg}\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2} + \cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos A} =$$

$$= \frac{\operatorname{ctg}\frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{c}{2}\operatorname{sen} A}{1 + \operatorname{ctg}\frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{c}{2}\cos A}.$$

Las dos últimas permiten calcular ε en función de b, c y A.

Exceso esférico en función de los tres lados del triángulo

323. Fórmula de Cagnoli. — Multiplicando entre sí las relaciones 1ª y 2ª del grupo XII (nº 309) se tiene:

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\varepsilon\operatorname{sen}(A-\varepsilon)}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}}\cdot\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\varepsilon\operatorname{sen}(B-\varepsilon)}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}C}}=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{\operatorname{sen}C}\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(A-\varepsilon)\operatorname{sen}(B-\varepsilon)}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}}.$$

Y observando que es (nº 3[illegible]9)

$$\cos\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(A-\varepsilon)\operatorname{sen}(B-\varepsilon)}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}}$$

y también que:

$$\operatorname{sen}C=2\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=2\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}}\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}}$$

se tiene

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}=\frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{2\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}\cdot\cos\frac{c}{2}$$

de donde

$$\operatorname{sen}\varepsilon=\frac{\operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdot\frac{2\sqrt{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}$$

o bien

$$\operatorname{sen}\varepsilon=\frac{\sqrt{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

Fórmula conocida con el nombre de fórmula de Cagnoli.

324. Fórmula de L'Huiller. — Tenemos por definición:

$$2\varepsilon = A + B + C - 180^\circ,$$

$$\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \left(\frac{C}{2} - \varepsilon\right),$$

y entonces

$$\cos\frac{A+B}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{C}{2} - \varepsilon\right),$$

$$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2} = \cos\left(\frac{C}{2} - \varepsilon\right).$$

Y la tercera fórmula de Delambre (nº 318) nos da

$$\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}},$$

o bien

$$\frac{\cos\frac{A+B}{2} - \operatorname{sen}\frac{C}{2}}{\cos\frac{A+B}{2} + \operatorname{sen}\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2} - \cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a+b}{2} + \cos\frac{c}{2}},$$

y reemplazando se tiene

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2} - \varepsilon\right) - \operatorname{sen}\frac{C}{2}}{\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2} - \varepsilon\right) + \operatorname{sen}\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2} - \cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a+b}{2} + \cos\frac{c}{2}}.$$

Y transformando en producto la suma y diferencia de senos y de cosenos, se tiene

el seno de $-\frac{\varepsilon}{2}$ es negativo, pero su cos no

$$\frac{-2\operatorname{sen}\frac{\varepsilon}{2}\cos\frac{C-\varepsilon}{2}}{2\cos\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{sen}\frac{C-\varepsilon}{2}} = \frac{-2\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{4}\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{4}}{2\cos\frac{a+b+c}{4}\cos\frac{a+b-c}{4}},$$

o bien

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{ctg}\frac{C-\varepsilon}{2} = \operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}. \qquad (1)$$

Partiendo ahora de la primer analogía de Delambre (nº 318), tenemos

$$\frac{\operatorname{sen}\dfrac{A+B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}} = \frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{c}{2}},$$

de donde

$$\frac{\operatorname{sen}\dfrac{A+B}{2} - \cos\dfrac{C}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{A+B}{2} + \cos\dfrac{C}{2}} = \frac{\cos\dfrac{a-b}{2} - \cos\dfrac{c}{2}}{\cos\dfrac{a-b}{2} + \cos\dfrac{c}{2}}$$

o bien

$$\frac{\cos\left(\dfrac{C}{2} - \varepsilon\right) - \cos\dfrac{C}{2}}{\cos\left(\dfrac{C}{2} - \varepsilon\right) + \cos\dfrac{C}{2}} = \frac{\cos\dfrac{a-b}{2} - \cos\dfrac{c}{2}}{\cos\dfrac{a-b}{2} + \cos\dfrac{c}{2}}.$$

Y transformando en producto las sumas y diferencias de cosenos, se tiene:

$$\frac{2\operatorname{sen}\dfrac{C-\varepsilon}{2}\operatorname{sen}\dfrac{\varepsilon}{2}}{2\cos\dfrac{C-\varepsilon}{2}\cos\dfrac{\varepsilon}{2}} = \frac{2\operatorname{sen}\dfrac{a+c-b}{4}\operatorname{sen}\dfrac{b+c-a}{4}}{2\cos\dfrac{a+c-b}{4}\cos\dfrac{b+c-a}{4}}$$

o bien

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tg}\frac{C-\varepsilon}{2} = \operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}. \qquad (2)$$

Y multiplicando (1) y (2) y extrayendo la raíz cuadrada

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}}.$$

Fórmula debida a Simón L'Huillier.

325. Dividendo la (2) por la (1) del número anterior se tiene

$$\operatorname{tg}^2\frac{C-\varepsilon}{2} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{p-a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{p-b}{2}}{\operatorname{tg}\underline{p}\operatorname{tg}\underline{(p-c)}}.$$

2 2

Y procediendo en forma análoga con respecto a los demás ángulos se tiene

$$\text{XXIII} \ldots \begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{A-\varepsilon}{2} = \sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{p-b}{2}\operatorname{tg}\dfrac{p-c}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{p}{2}\operatorname{tg}\dfrac{p-a}{2}}}, \\[2ex] \operatorname{tg}\dfrac{B-\varepsilon}{2} = \sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{p-a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{p-c}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{p}{2}\operatorname{tg}\dfrac{p-b}{2}}}, \\[2ex] \operatorname{tg}\dfrac{C-\varepsilon}{2} = \sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{p-a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{p-b}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{p}{2}\operatorname{tg}\dfrac{p-c}{2}}}. \end{cases}$$

Superficie del triángulo esférico

326. TEOREMA : *Las superficies de dos triángulos esféricos, trazados sobre la misma esfera o sobre esferas del mismo radio, son directamente proporcionales a sus respectivos excesos esféricos.* — Llamando S y S′ a las superficies de los dos triángulos, 2ε y $2\varepsilon'$ a sus respectivos excesos esféricos, queremos demostrar que :

$$\frac{S}{S'} = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon'}.$$

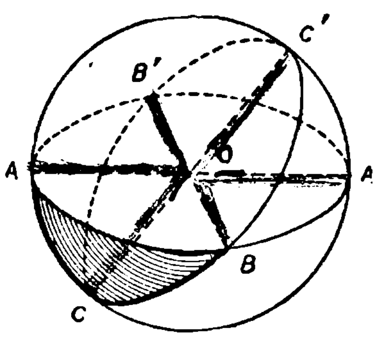


Figura 153

Consideremos el triángulo ABC, completemos los círculos máximos correspondientes a cada lado y tracemos los diámetros AA′, BB′ y CC′, siendo O el centro de la esfera (fig. 153). Los triedros OB′AC y OBA′C′ son simétricos y los triángulos ACB′ y A′C′B son equivalentes. El huso del ángulo A se compone del triángulo ABC más el triángulo BCA′, el huso del ángulo B se compone del triángulo ABC más ACB′ o lo que es equivalente, del triángulo ABC más el triángulo A′C′B y el huso del ángulo C, se compone del triángulo ABC más el ABC′.

Luego podemos escribir:

$$\begin{aligned}\text{Huso A} &= ABC + BCA', \\ \text{Huso B} &= ABC + A'C'B, \\ \text{Huso C} &= ABC + ABC'.\end{aligned}$$

Y puesto que la superficie de un huso es a la superficie de la esfera, como el ángulo del huso es a 4 rectos, podemos poner, llamando E a la superficie de la esfera

$$\frac{ABC + BCA'}{E} = \frac{A}{4R},$$

$$\frac{ABC + A'C'B}{E} = \frac{B}{4R},$$

$$\frac{ABC + ABC'}{E} = \frac{C}{4R}.$$

Sumando y observando que $ABC + BCA' + A'C'B + ABC'$ integran la mitad de la superficie de la esfera, se tiene:

$$\frac{2\,ABC + \frac{E}{2}}{E} = \frac{A + B + C}{4R}.$$

O bien, siendo S la superficie del triángulo, se tiene:

$$\frac{2S}{E} + \frac{1}{2} = \frac{A + B + C}{4R},$$

y también

$$\frac{2S}{E} = \frac{A + B + C - 2R}{4R} = \frac{2\varepsilon}{4R}. \qquad (1)$$

Y para otro triángulo de área S' y exceso esférico $2\varepsilon'$ trazado sobre la misma esfera o sobre esferas del mismo radio, se tiene:

$$\frac{2S'}{E} = \frac{2\varepsilon'}{4R}. \qquad (2)$$

Y dividiendo la (1) por la (2) se tiene:

$$\frac{S}{S'} = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon'},$$

lo que demuestra el teorema.

327. ***Fórmula de la superficie del triángulo esférico.*** — Tomando como triángulo S′ el triángulo esférico trirrectángulo, se tiene que su superficie es la octava parte de la superficie de la esfera, y siendo sus tres ángulos iguales a 90°, su exceso esférico $2\varepsilon'$ vale 90°. Es decir que:

$$S' = \frac{1}{8} 4\pi R^2 = \frac{1}{2} \pi R^2,$$

$$2\varepsilon' = 90°.$$

Luego

$$\frac{S}{\frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{(2\varepsilon)°}{90°} \qquad S = \pi R^2 \frac{(2\varepsilon)°}{180°}.$$

Y expresando el exceso esférico 2ε en segundos, se tiene:

$$S = \pi R^2 \frac{(2\varepsilon)''}{180 \times 60 \times 60}.$$

Y como $\frac{\pi}{180 \times 60 \times 60}$ es el arco de 1″ expresado en radianes, el que prácticamente es igual al *sen 1″*, obtenemos como expresión del área del triángulo esférico

$$S = R^2 (2\varepsilon)'' \operatorname{sen} 1''.$$

CAPÍTULO VI.

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS ESFÉRICOS (CASOS CLÁSICOS)

328. Seis casos clásicos se presentan en la resolución de triángulos esféricos, cuando los elementos conocidos son lados y ángulos, y son los siguientes:

1. Dados los tres lados.
2. Dados los tres ángulos.
3. Dados dos lados y el ángulo comprendido.
4. Dado un lado y los ángulos adyacentes.
5. Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
6. Dados dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos.

Estudiaremos cada uno de estos casos haciendo una discusión de los resultados.

329. *Primer caso: Dados los tres lados a, b y c.* — Es necesario que

$$0 < a + b + c < 360°$$

y que un lado cualquiera sea menor que la suma de los otros dos, es decir, que

$$a < b + c, \qquad b < a + c, \qquad c < a + b,$$

para lo cual basta que el mayor sea menor que la suma de los otros dos.

330. *Si solamente se necesita calcular un ángulo.* — En tal caso se aplica la fórmula sacada del grupo I (nº 279)

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}.$$

Esta fórmula no es calculable por logaritmos. Puede hacerse calculable, introduciendo un ángulo auxiliar de cálculo o utilizando las tablas de logaritmos de sumas y restas.

Pueden también utilizarse las fórmulas de los grupos VII, VIII, IX, X y XI de los números (304) a (308).

331. *Primera solución integral.* — Utilizando las fórmulas del grupo VII (nº 304) hasta XI (nº 308), donde es $2p = a + b + c$. Es preferible emplear las del grupo XI por ser más cómodas. Veremos que K es la tangente del radio del círculo inscripto (nº 358) y se tiene:

$$K = \operatorname{tg} r = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p}},$$

y

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{K}{\operatorname{sen}(p-a)}, \qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{K}{\operatorname{sen}(p-b)}, \qquad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{K}{\operatorname{sen}(p-c)}.$$

Como comprobación del cálculo, se debe tener:

$$(p-a) + (p-b) + (p-c) = p$$
$$\operatorname{sen} p \cdot \operatorname{tg}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{C}{2} = K.$$

Ejemplo: $a = 43°04'10''$, $b = 68°17'30''$, $c = 75°47'50''$

Se pueden disponer los cálculos en la siguiente forma:

$a = 43°04'40''$	$\operatorname{sen}(p-a) = 9.88746$
$b = 68°17'50''$	$\operatorname{sen}(p-b) = 9.63061$
$c = 75°47'50''$	$\operatorname{sen}(p-c) = 9.48503$
$2p = 187°10'20''$	9.00310
$p = 93°35'10''$	$\operatorname{sen} p = 9.99915$
$p - a = 50°30'30''$	$K^2 = 9.00395$
$p - b = 25°17'20''$	$K = 9.50197$
$p - c = 17°47'20''$	
$(p-a)+(p-b)+(p-c) = 93°35'10''$	$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 9.61451$
$\frac{A}{2} = 22°22'25''$	$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = 9.87136$
$\frac{B}{2} = 36°38'09''$	$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = 0.01694$
	$\operatorname{sen} p = 9.99915$
$\frac{C}{2} = 46°07'02''$	$K = 9.50196$
$A = 44°44'50''$	
$B = 73°16'18''$	
$C = 92°14'04''$	

332. *Segunda solución integral.* — Utilizando las fórmulas del grupo XXIII (nº 325), recordando la fórmula de L'Huiller (nº 324) y poniendo

$$m = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}}{\operatorname{tg}\frac{p}{2}}},$$

y siendo 2ε el exceso esférico, se tiene:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = m\operatorname{tg}\frac{p}{2}; \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{m}{\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{B}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{m}{\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}}; \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{m}{\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}}.$$

Y como comprobación de cálculo, se tiene:

$$(p-a)+(p-b)+(p-c) = p \tag{1}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{B}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right) = m^2 \tag{2}$$

$$\left(\frac{A}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\left(\frac{B}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\left(\frac{C}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right) = 90^\circ. \tag{3}$$

Tomemos el ejemplo anterior y podemos disponer los cálculos en la siguiente forma:

$$a = 43^\circ 04' 40''$$
$$b = 68^\circ 17' 50''$$
$$c = 75^\circ 47' 50''$$

$$2p = 187^\circ 10' 20''$$
$$p = 93^\circ 35' 10''$$

$$p - a = 50^\circ 30' 30''$$
$$p - b = 25^\circ 17' 20''$$
$$p - c = 17^\circ 47' 20''$$

$$\frac{p}{2} = 46^\circ 47' 35''$$
$$\frac{p-a}{2} = 25^\circ 15' 15''$$
$$\frac{p-b}{2} = 12^\circ 38' 40''$$
$$\frac{p-c}{2} = 8^\circ 53' 40''$$

$$\text{prueba (1)} = 46^\circ 47' 35''$$

$$\frac{\varepsilon}{2} = 7^\circ 33' 49''$$
$$\left(\frac{A}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 14^\circ 48' 36''$$
$$\left(\frac{B}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 29^\circ 04' 18''$$
$$\left(\frac{C}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 38^\circ 33' 13''$$

$$\text{prueba (3)} = 89^\circ 59' 55''$$

$$\frac{A}{2} = 22^\circ 22' 25''$$
$$\frac{B}{2} = 36^\circ 38' 07''$$
$$\frac{C}{2} = 46^\circ 07' 02''$$

$$A = 44^\circ 44' 50''$$
$$B = 73^\circ 16' 14''$$
$$C = 92^\circ 14' 04''$$

$$\operatorname{tg}\frac{p-a}{2} = 9.67368$$
$$\operatorname{tg}\frac{p-b}{2} = 9.35091$$
$$\operatorname{tg}\frac{p-c}{2} = 9.19450$$

$$8.21909$$
$$\operatorname{tg}\frac{p}{2} = 0.02720$$

$$m^2 = 8.19189$$
$$m = 9.09594$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = 9.12314$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 9.42226$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{B}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 9.74503$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{C}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 9.90144$$

$$\text{prueba (2)} = 8.19187$$

333. *Segundo caso. Dados los tres ángulos* A B *y* C. — Es necesario que

$$180^\circ < A + B + C < 540^\circ,$$

y también

$$B + C - A < 180^\circ,$$
$$A + C - B < 180^\circ,$$
$$A + B - C < 180^\circ.$$

Es claro que este caso de resolución puede reducirse al primer caso, con resolver el triángulo polar del triángulo que se busca. En efecto, de ese triángulo polar se conocen los tres lados que son los suplementos de los ángulos dados y resuelto el triángulo polar y calculados sus tres ángulos, es fácil encontrar los lados del triángulo buscado, que son los suplementos de los ángulos del polar.

Vamos a resolverlo directamente.

334. *Cuando sólo se necesita un lado.* — En tal caso, partiendo del grupo VI (nº 285), se obtiene:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C},$$

que tiene el inconveniente de no ser calculable por logaritmos. Puede transformarse, utilizando un ángulo auxiliar de cálculo o bien haciendo huso de las tablas de sumas y restas.

Como el lado está dado por el *cos*, resulta de poca precisión cuando el lado es pequeño o se aproxime a 180°.

Se puede también recurrir a las fórmulas de los grupos XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX (nos 309 a 314), con las que se obtiene en general mayor precisión.

335. *Primera solución integral.* — Utilizando las fórmulas del grupo XIX (nº 314), donde es:

$$2P = A + B + C,$$

$$\operatorname{tg} R = \sqrt{\frac{-\cos P}{\cos(P - A)\cos(P - B)\cos(P - C)}},$$

se obtiene:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \cos(P - A)\operatorname{tg} R, \qquad \operatorname{tg}\frac{b}{2} = \cos(P - B)\operatorname{tg} R,$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \cos(P - C)\operatorname{tg} R.$$

Y como control del cálculo, debe tenerse:

$$(\mathrm{P}-\mathrm{A})+(\mathrm{P}-\mathrm{B})+(\mathrm{P}-\mathrm{C})=\mathrm{P} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{-\cos \mathrm{P}} \cdot \operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\operatorname{tg}\mathrm{R}. \qquad (2)$$

Ejemplo:

$$\mathrm{A}=116^\circ 20'02'', \quad \mathrm{B}=75^\circ 00'50'', \quad \mathrm{C}=70^\circ 07'10''.$$

$\mathrm{A}=116^\circ 20'02''$ $\mathrm{B}=75^\circ 00'50''$ $\mathrm{C}=70^\circ 07'10''$	$\cos(\mathrm{P}-\mathrm{A})=9.98614$ $\cos(\mathrm{P}-\mathrm{B})=9.75069$ $\cos(\mathrm{P}-\mathrm{C})=9.69081$
$2\,\mathrm{P}=261^\circ 28'02''$ $\mathrm{P}=130^\circ 44'01''$	9.42764 $-\cos \mathrm{P}=9.81461$
$\mathrm{P}-\mathrm{A}=14^\circ 23'59''$ $\mathrm{P}-\mathrm{B}=55^\circ 43'11''$ $\mathrm{P}-\mathrm{C}=60^\circ 36'51''$	$\operatorname{tg}^2 \mathrm{R}=9.38697$ $\operatorname{tg}\mathrm{R}=9.19348$
Prueba (1) $\mathrm{P}=130^\circ 44'01''$	$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=0.17962$ $\operatorname{tg}\frac{b}{2}=9.94417$ $\operatorname{tg}\frac{c}{2}=9.88429$
$\frac{a}{2}=56^\circ 31'28''$ $\frac{b}{2}=41^\circ 19'38''$ $\frac{c}{2}=37^\circ 27'22''$	0.00808 $-\cos \mathrm{P}=9.81461$
$a=113^\circ 02'56''$ $b=82^\circ 39'16''$ $c=74^\circ 54'44''$	Prueba (2) $\operatorname{tg}\mathrm{R}=0.19347$

336. *Segunda solución integral.* — De las fórmulas de los n^{os} 324 y 325, y poniendo

$$m=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\mathrm{A}}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\mathrm{B}}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\mathrm{C}}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)},$$

se tiene:

$$\operatorname{tg}\frac{p}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{m}, \qquad \operatorname{ctg}\frac{p-a}{2} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{m},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{p-b}{2} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{B}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{m}, \qquad \operatorname{ctg}\frac{p-c}{2} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{C}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{m}.$$

Y como comprobación de los cálculos, debe tenerse:

$$\frac{\varepsilon}{2} + \left(\frac{A}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(\frac{B}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(\frac{C}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 90^\circ \tag{1}$$

$$\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{ctg}\frac{p-a}{2}\operatorname{ctg}\frac{p-b}{2}\operatorname{ctg}\frac{p-c}{2} = \frac{1}{m^2} \tag{2}$$

$$\frac{p-a}{2} + \frac{p-b}{2} + \frac{p-c}{2} = \frac{p}{2}. \tag{3}$$

Podemos calcular el ejemplo anterior con estas fórmulas, disponiendo los cálculos en la forma que se indica a continuación y donde aparecen, a la derecha los logaritmos y a la izquierda los valores.

$$A = 116°20'02''$$
$$B = 75°00'50''$$
$$C = 70°07'10''$$

$$2\varepsilon = 81°28'02''$$
$$\frac{\varepsilon}{2} = 20°22'00''$$
$$\frac{A}{2} = 58°10'01''$$
$$\frac{B}{2} = 37°30'25''$$
$$\frac{C}{2} = 35°03'35''$$

$$\left(\frac{A}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 37°48'01''$$
$$\left(\frac{B}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 17°08'25''$$
$$\left(\frac{C}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 14°41'35''$$
$$\frac{\varepsilon}{2} = 20°22'00''$$

$$\text{Prueba (1)} = 90°00'01''$$

$$\frac{p}{2} = 67°39'15''$$

$$\frac{p-a}{2} = 11°07'47''$$
$$\frac{p-b}{2} = 26°19'34''$$
$$\frac{p-c}{2} = 30°11'53''$$

$$\text{Prueba (3)} = 67°39'14''$$

$$\frac{a}{2} = 56°31'28''$$
$$\frac{b}{2} = 41°19'41''$$
$$\frac{c}{2} = 37°27'22''$$

$$a = 113°02'56''$$
$$b = 82°39'22''$$
$$c = 74°54'44''$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 9.88969$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{B}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 9.48913$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{C}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 9.41866$$
$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = 9.56965$$

$$m^2 = 8.36713$$
$$m = 9.18356$$
$$\frac{1}{m} = 0.81644$$

$$\operatorname{tg}\frac{p}{2} = 0.38609$$
$$\operatorname{ctg}\frac{p-a}{2} = 0.70613$$
$$\operatorname{ctg}\frac{p-b}{2} = 0.30557$$
$$\operatorname{ctg}\frac{p-c}{2} = 0.23510$$

$$\text{Prueba (2)} = 1.63289$$
$$m^2 = 8.36711$$

337. *Tercer caso: Dados dos lados b y c, y el ángulo comprendido* A.— 1. *Cuando sólo se necesita el tercer lado a.* — Se tiene por la primer fórmula del grupo I (nº 279):

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A,$$

la que puede hacerse calculable por logaritmos o bien calcularse utilizando las tablas de logaritmos de Gauss.

338. *Si se quiere conocer el tercer lado a y un ángulo, por ejemplo el ángulo* B. — En tal caso, tomàndo la primer fórmula del grupo I (nº 279):

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A,$$

y como se indica en el (nº 286) haciendo:

$$\cos b = m \cos u,$$
$$\operatorname{sen} b \cos A = m \operatorname{sen} u,$$

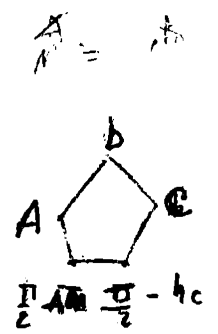
resulta:

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} b \cos A,$$
$$m = \frac{\cos b}{\cos u} = \frac{\operatorname{sen} b \cos A}{\operatorname{sen} u},$$

lo que permite calcular u y m. Luego se tiene (nº 286):

$$\cos a = m \cos (c - u), \qquad \cos B = m \frac{\operatorname{sen} (c - u)}{\operatorname{sen} a}.$$

Si se quisiera calcular a y B por la tangente, se puede poner:



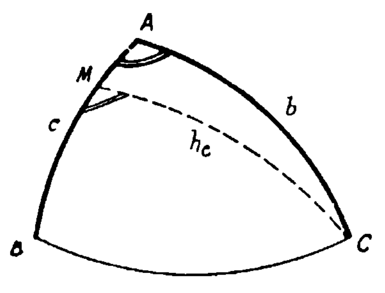


Figura 154

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{sen} u \operatorname{tg} A}{\operatorname{sen} (c - u)},$$

y conocido B, se calcula a por

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} (c - u)}{\cos B}.$$

339. Se puede ver fácilmente lo que representan en el triángulo los valores u y m. Sea (fig. 154), el triángulo ABC.

Tracemos el arco de círculo máximo que pasando por C, cae normalmente al lado c. Del triángulo rectángulo AMC se obtiene, llamando h_c al arco CM,

$$\operatorname{tg} AM = \operatorname{tg} b \cos A.$$ (ver pag 310* (4))

Luego el arco AM representa el valor de u.

El mismo triángulo nos da:

$$\cos h_c = \frac{\cos b}{\cos u},$$

quiere decir que m está representado por *cos* h_c.

En forma análoga se procedería si se quiere calcular el ángulo C.

Ejemplo : $b = 110°35'20''$, $c = 52°08'40''$, $A = 72°41'20''$.

Se pueden ordenar los cálculos en la forma siguiente:

$b = 110°35'20''$	$\operatorname{tg} b = 0.42521\, n$
$c = 52°08'40''$	$\cos A = 9.47357$
$A = 72°41'20''$	
	$\operatorname{tg} u = 9.89878\, n$
$u = 141°37'02''$	
	$\operatorname{tg} A = 0.50629$
$c - u = -\ 89°28'22''$	$\operatorname{sen} u = 9.79303$
$B = 116°39'16''$	0.29932
	$\operatorname{sen}(c - u) = 9.99998\, n$
$a = 89°15'48''$	
	$\operatorname{tg} B = 0.29934\, n$
	$\operatorname{tg}(c - u) = 2.03612\, n$
	$\cos B = 9.65187\, n$
	$\operatorname{tg} a = 2.38425$

Con esta disposición del cálculo, donde a la izquierda se dan los valores y a la derecha los logaritmos, es fácil ver cómo conviene seguir los cálculos. Colocados los valores de b, c y A, se busca *log tg b*, y *log cos* A, junto con *log tg* A. Se obtiene en seguida *log tg u*, lo que nos permite obtener u y por lo tanto $(c - u)$ y también *log sen u*. Se busca ahora log sen $(c - u)$ y log tg $(c - u)$. Se obtiene *log tg* B, lo que nos permite encontrar B y también al mismo tiempo *log cos* B. Luego se obtiene *log tg a* y por lo tanto a.

340. *Solución integral.* — Las analogías de Neper (nº 319) nos dan:

$$\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}=\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}}\operatorname{ctg}\frac{A}{2},\qquad \operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{b-c}{2}}{\operatorname{sen}\frac{b+c}{2}}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}.$$

Lo que permite calcular B y C. Luego, para calcular el tercer lado a, las analogías de Delambre (nº 318) nos dan:

$$\cos\frac{a}{2}=\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\operatorname{sen}\frac{B+C}{2}}\cos\frac{A}{2}=\frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}\operatorname{sen}\frac{A}{2},$$

y también:

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{b-c}{2}}{\operatorname{sen}\frac{B-C}{2}}\cos\frac{A}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}\operatorname{sen}\frac{A}{2},$$

las que pueden escribirse:

$$\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}=\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{b-c}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{b+c}{2}}=\frac{N}{M},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-C}{2}=\frac{\cos\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{b-c}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c}{2}}=\frac{N'}{M'},$$

y

$$\cos\frac{a}{2}=\frac{N}{\operatorname{sen}\frac{B+C}{2}}=\frac{M}{\cos\frac{B+C}{2}},$$

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2}=\frac{N'}{\operatorname{sen}\frac{B-C}{2}}=\frac{M'}{\cos\frac{B-C}{2}}.$$

Se pueden ordenar los cálculos en la forma que se indica en el ejemplo siguiente, donde hemos tomado los mismos datos del ejemplo anterior.

$b = 110°35'20''$ $c = 52°08'40''$ $A = 72°41'20''$	$\frac{B + C}{2} = 82°47'15''$ $\frac{B - C}{2} = 33°52'01''$
$b - c = 58°26'40''$ $b + c = 116°44'00''$	$B = 116°39'16''$ $C = 48°55'14''$
$\frac{A}{2} = 36°20'40''$ $\frac{b - c}{2} = 29°13'20''$ $\frac{b + c}{2} = 81°22'00''$	$\frac{a}{2} = 44°52'54''$ $\frac{a}{2} = 44°52'56''$ $a = 89°45'50''$

$\cos \frac{A}{2} = 9.90605$ $\cos \frac{b - c}{2} = 9.94088$	$\cos \frac{A}{2} = 9.90605$ $\operatorname{sen} \frac{b - c}{2} = 9.68860$
$N = 9.84693$ $\operatorname{sen} \frac{B + C}{2} = 9.99655$	$N' = 9.59465$ $\operatorname{sen} \frac{B - C}{2} = 9.74606$
$\cos \frac{a}{2} = 9.85038$	$\operatorname{sen} \frac{a}{2} = 9.84859$
$\cos \frac{b + c}{2} = 9.17641$ $\operatorname{sen} \frac{A}{2} = 9.77279$	$\operatorname{sen} \frac{b + c}{2} = 9.99505$ $\operatorname{sen} \frac{A}{2} = 9.77279$
$M = 8.94920$ $\operatorname{tg} \frac{B + C}{2} = 0.89773$ $\cos \frac{B + C}{2} = 9.09882$	$M' = 9.76784$ $\operatorname{tg} \frac{B - C}{2} = 9.82681$ $\cos \frac{B - C}{2} = 9.91925$
$\cos \frac{a}{2} = 9.85038$	$\operatorname{sen} \frac{a}{2} = 9.84859$

Es fácil ver el orden a seguir con esta disposición de los cálculos. Primero se obtiene $(b-c)$ y $(b+c)$ y luego $\frac{A}{2}$, $\frac{b-c}{2}$ y $\frac{b+c}{2}$. Luego se busca $\log\cos\frac{A}{2}$ y $\log\operatorname{sen}\frac{A}{2}$ y $\log\cos\frac{b-c}{2}$, $\log\operatorname{sen}\frac{b-c}{2}$, $\log\cos\frac{b+c}{2}$ y $\log\operatorname{sen}\frac{b+c}{2}$, lo que permite obtener, $\log N$, $\log N'$, $\log M$ y $\log M'$. Luego por diferencia se tiene $\log\operatorname{tg}\frac{B+C}{2} = \log N - \log M$ y también $\log\operatorname{tag}\frac{B-C}{2} = \log N' - \log M'$. Entonces puede obtenerse al mismo tiempo por un lado $\frac{B+C}{2}$, $\log\operatorname{sen}\frac{B+C}{2}$ y $\log\cos\frac{B+C}{2}$ y por otro $\frac{B-C}{2}$, $\log\operatorname{sen}\frac{B-C}{2}$ y $\log\cos\frac{B-C}{2}$.

Obtenidos $\frac{B+C}{2}$ y $\frac{B-C}{2}$, se obtiene B y C.

Se tiene también $\log\cos\frac{a}{2} = \log N - \log\operatorname{sen}\frac{B+C}{2}$ y también $\log\cos\frac{a}{2} = \log M - \log\cos\frac{B+C}{2}$ y por otro lado $\log\operatorname{sen}\frac{a}{2} = \log N' - \log\operatorname{sen}\frac{B-C}{2}$ y también $\log\operatorname{sen}\frac{a}{2} = \log M' - \log\cos\frac{B-C}{2}$, lo que sirve para controlar los cálculos. Con $\log\operatorname{sen}\frac{a}{2}$ y $\log\cos\frac{a}{2}$ se obtine $\frac{a}{2}$ y por lo tanto a.

341. *Cuarto caso. Dado un lado a y los ángulos adyacentes* B *y* C.—Este caso puede resolverse al anterior, pasando al triángulo polar, del cual se conocen dos lados $b' = 180° - B$, $c' = 180° - C$ y el ángulo comprendido $A' = 180° - a$. Resuelto el triángulo polar, es decir, calculado B', C' y a', se obtienen en seguida los que se buscan del triángulo, ya que se tendría $A = 180° - a'$, $b = 180° - B'$ y $c = 180° - c'$.

Vamos, sin embargo, a encauzar su solución directamente.

342. *Cuando sólo se necesite el ángulo* A. — Se tiene por las fórmulas del grupo VII (nº 285), directamente

$$\cos A = -\cos B\cos C + \operatorname{sen} B\operatorname{sen} C\cos a$$

la que puede transformarse, haciéndolo calculable por logaritmos, mediante un ángulo auxiliar de cálculo.

Se puede también calcular cos A y por lo tanto A, utilizando los logaritmos de Gauss.

343. *Si se quiere el tercer ángulo y un lado, b por ejemplo, se puede resolver en la forma siguiente.* — En la fórmula

$$\cos A = -\cos B \cos C + \text{sen } B \text{ sen } C \cos a,$$

haciendo $\cos b \text{ sen } A = \cos a \text{ sen } B \cos C + \text{sen } C \cos B$

$$\cos B = n \text{ sen } v$$

$$\text{sen } B \cos a = n \cos v$$

lo que nos da

$$\text{ctg } v = \cos a \text{ tg } B$$

$$n = \frac{\cos B}{\text{sen } v} = \frac{\text{sen } B \cos a}{\cos v}.$$

Resulta

$$\cos A = n \text{ sen } (C - v)$$

y

$$\cos b = n \frac{\cos (C - v)}{\text{sen } A}.$$

Que tienen el inconveniente que se calcula por *coseno*. Para calcular por la *tg* se tiene

$$\text{tg } A = \frac{\text{ctg } (C - v)}{\cos v}; \quad \text{tg } b = \frac{\text{tg } a \cos v}{\cos (C - v)}.$$

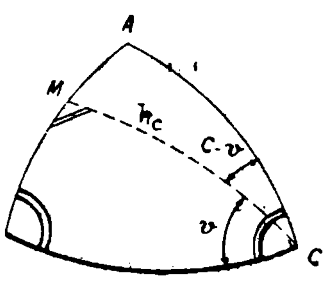


Figura 155

344. Se puede ver el significado de m y v en el triángulo. Sea (fig. 155), el triángulo ABC, o tracemos el arco de círculo máximo que pasando por C cae normalmente al lado c, sea $CM = h_c$. Del triángulo rectángulo BCM, se obtiene que la *ctg* del ángulo BCM vale cos a tg B, luego ese ángulo es v. Del mismo triángulo se saca:

$$\cos h_c = \frac{\cos B}{\text{sen } v},$$

quiere decir que n está representado por *cos* h_c.

Se pueden ordenar los cálculos, en la forma que se indica en el ejemplo siguiente, donde a la izquierda se ponen los valores naturales y a la derecha los logaritmos.

$B = 78°30'20''$	$\text{tg } B = 0.69175$
$C = 47°15'30''$	$\cos a = 9.52805$
$a = 70°17'10''$	$\text{ctg } v = 0.21980$
$v = 31°04'59''$	$\text{tg } a = 0.44572$
$C - v = 16°10'31''$	$\cos v = 9.93269$
$b = 68°06'29''$	0.37841
$A = 83°49'39''$	$\cos (C-v) = 9.98246$
	$\text{tg } b = 0.39595$
	$\text{ctg } (C-v) = 0.53751$
	$\cos b = 9.57154$
	$\text{tg } A = 0.96597$

Es fácil ver el orden a seguir en los cálculos para economía de trabajo. Puestos los valores de B, C y a, se busca log tg B y log cos a al mismo tiempo que log tg a. Se obtiene en seguida log ctg v = log tg B − log cos a, lo que nos permite obtener v y al mismo tiempo log cos v. Se obtiene fácilmente (C − v) y se busca log cos (C − v) y log ctg (C − v). Luego log tg b, que se obtiene sumando log tg a con log cos v y restándole log cos (C − v). Obtenido log tg b se obtiene b y al mismo tiempo *log cos b*. Sumando este último con log ctg (C − v) se obtiene log tg A y por lo tanto A.

345. *Solución integral.* — Con las fórmulas de ~~Delambre~~ Napier (nº 319) se tiene

$$\text{tg}\frac{b+c}{2} = \text{tg}\frac{a}{2}\,\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}} = \frac{\text{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{B+C}{2}} = \frac{N}{M}$$

$$\operatorname{tg}\frac{b-c}{2}=\operatorname{tg}\frac{a}{2}\,\frac{\operatorname{sen}\dfrac{B-C}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{B+C}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\dfrac{a}{2}\operatorname{sen}\dfrac{B-C}{2}}{\cos\dfrac{a}{2}\operatorname{sen}\dfrac{B+C}{2}}=\frac{N'}{M'}$$

y luego

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\frac{\operatorname{sen}\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{b+c}{2}}=\frac{N}{\operatorname{sen}\dfrac{b+c}{2}},$$

o bien

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\frac{\cos\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{B+C}{2}}{\cos\dfrac{b+c}{2}}=\frac{M}{\cos\dfrac{b+c}{2}}$$

o también

$$\cos\frac{A}{2}=\frac{\operatorname{sen}\dfrac{a}{2}\operatorname{sen}\dfrac{B-C}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{b-c}{2}}=\frac{N'}{\operatorname{sen}\dfrac{b-c}{2}},$$

o bien

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\frac{\cos\dfrac{a}{2}\operatorname{sen}\dfrac{B+C}{2}}{\cos\dfrac{b-c}{2}}=\frac{M'}{\cos\dfrac{b-c}{2}}.$$

Se pueden ordenar los cálculos en la forma que se indica en el ejemplo siguiente :

$B = 116°39'16''$	$\text{sen}\,\frac{a}{2} = 9.84859$	$\text{sen}\,\frac{a}{2} = 9.84859$
$C = 48°55'14''$	$\cos\frac{B-C}{2} = 9.11925$	$\text{sen}\,\frac{B-C}{2} = 9.74606$
$a = 89°45'50''$		
$B - C = 67°44'02''$	$N = 9.76784$	$N' = 9.59465$
$B + C = 165°34'30''$	$\text{sen}\,\frac{b+c}{2} = 9.99505$	$\text{sen}\,\frac{b-c}{2} = 9.68860$
$\frac{a}{2} = 44°52'55''$	$\text{sen}\,\frac{A}{2} = 9.77279$	$\cos\frac{A}{2} = 9.90605$
$\frac{B-C}{2} = 33°52'01''$	$\cos\frac{a}{2} = 9.85038$	$\cos\frac{a}{2} = 9.85038$
$\frac{B+C}{2} = 82°47'15''$	$\cos\frac{B+C}{2} = 9.09882$	$\text{sen}\,\frac{B+C}{2} = 9.99655$
$\frac{b+c}{2} = 81°22'00''$	$M = 8.94920$	$M' = 9.84693$
$\frac{b-c}{2} = 29°13'21''$	$\text{tg}\,\frac{b+c}{2} = 0.81864$	$\text{tg}\,\frac{b-c}{2} = 9.74772$
$b = 110°35'21''$	$\cos\frac{b+c}{2} = 9.17641$	$\cos\frac{b-c}{2} = 9.94088$
$c = 52°08'39''$		
$\frac{A}{2} = 36°20'40''$	$\text{sen}\,\frac{A}{2} = 9.77279$	$\cos\frac{A}{2} = 9.90605$
$A = 72°41'20''$		

Es fácil ver el orden que conviene seguir para calcular. Primero se pone B, C y a y se obtiene $\frac{a}{2}$, $\frac{B+C}{2}$ y $\frac{B-C}{2}$. Luego se busca $\log \text{sen}\,\frac{a}{2}$, $\log\cos\frac{a}{2}$, $\log \text{sen}\,\frac{B+C}{2}$, $\log\cos\frac{B+C}{2}$, $\log\text{sen}\,\frac{B-C}{2}$ y $\log\cos\frac{B-C}{2}$. Se obtienen así los valores de los log de N, N', M y M'. Luego se obtiene $\log\,\text{tg}\,\frac{b+c}{2} = \log N - \log M$ y $\log\,\text{tg}\,\frac{b-c}{2} =$

$\log N' - \log M'$. El $\log \operatorname{tg} \frac{b+c}{2}$, nos permite obtener el ángulo $\frac{b+c}{2}$ y al mismo tiempo $\log \operatorname{sen} \frac{b+c}{2}$ y $\log \cos \frac{b+c}{2}$ y el $\log \operatorname{tg} \frac{b-c}{2}$, nos permite obtener $\frac{b-c}{2}$ y también $\log \operatorname{sen} \frac{b-c}{2}$ y $\log \cos \frac{b-c}{2}$. Obtenidos $\frac{b+c}{2}$ y $\frac{b-c}{2}$, por suma y resta se obtiene b y c. La diferencia entre $\log N$ y $\log \operatorname{sen} \frac{b+c}{2}$ nos da $\log \operatorname{sen} \frac{A}{2}$, lo mismo que la diferencia entre $\log M$ y $\log \cos \frac{b+c}{2}$. La diferencia entre $\log N'$ y $\log \operatorname{sen} \frac{b-c}{2}$ nos da $\log \cos \frac{A}{2}$, lo mismo que la diferencia entre $\log M'$ y $\log \cos \frac{b-c}{2}$. Y ello permite obtener $\frac{A}{2}$ y por lo tanto A.

346. *Quinto caso. Dado dos lados a y b y el ángulo opuesto a uno de ellos* A. — 1. *Solución descomponiendo el triángulo en dos triángulos rectángulos* trazando el círculo máximo que pasa por C y cae normal al lado c (fig. 156). El lado c queda dividido en dos partes que llamaremos u y v, según la figura. El ángulo C queda dividido en dos ángulos φ_1 y φ_2.

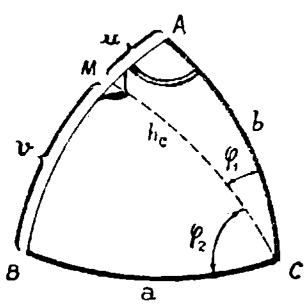
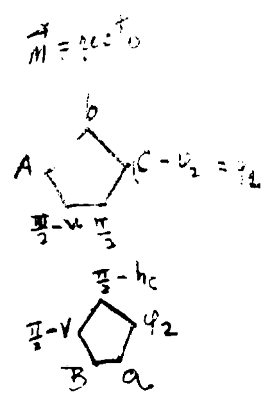


Figura 156



Se tiene, según el teorema del seno, que

$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A}$$

y siendo β el menor ángulo que satisface a su relación, se tiene:

$$B_1 = \beta \qquad \text{y} \qquad B_2 = 180° - \beta,$$

es decir, que en general se tienen dos valores para B.

Por otra parte, de los triángulos rectángulos AMC y BMC se obtiene

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} b \cos A, \quad \cos v = \frac{\cos a}{\cos h_c}, \quad \operatorname{sen} h_c = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\operatorname{ctg} A}{\cos b}, \qquad \cos \varphi_2 = \operatorname{tg} h_c \operatorname{ctg} A.$$

Los valores de u y de φ_1, quedan perfectamente determinados. En cambio los valores de v y φ_2, dadas por sus cosenos, pueden ser $\pm v$ y $\pm \varphi_2$ y se tendría entonces

$$c_1 = u + v; \qquad c_2 = u - v; \qquad C_1 = \varphi_1 + \varphi_2 \quad \text{y} \quad C_2 = \varphi_1 - \varphi_2.$$

347. ***Solución integral y discusión.***
El ángulo B puede calcularse, partiendo del teorema del seno:

$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}. \tag{1}$$

Calculado B, con las fórmulas de Neper, tenemos:

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{A+B}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{A-B}{2}\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}},$$

lo que permite calcular C y c.

Discusión. — Para que el problema sea posible se necesita, como condición previa, que $\frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} \leq 1$, y cumplida esta condición, siempre habrá dos valores suplementarios para B que satisfacen a la relación (1). Si β es el menor ángulo que cumple la relación (1), se tendrá entonces

$$B_1 = \beta \quad \text{y} \quad B_2 = \pi - \beta.$$

Por otra parte, puesto que en todo triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo y recíprocamente, y también para que $\frac{C}{2}$ y $\frac{c}{2}$ estén en el primer cuadrante, deben ser $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ y $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$ positivas, es decir que tienen que ser $(A - B)$ y $(a - b)$ del mismo signo. El problema puede tener, o dos soluciones, o una, o ninguna, es decir, que siendo $\frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} \leq 1$, el problema admite dos soluciones, o una, o ninguna, según que dos, o uno, o ningúno de los valores de B, hagan que las diferencias $(a - b)$ y $(A - B)$ sean del mismo signo.

En efecto, si B es un valor de β que satisface a esta condición y C_1, c_1, los valores correspondientes de C y c, existe un triángulo cuyos lados son a, b, c_1 y sus ángulos AB_1C_1, puesto que esos valores satisfacen a las fórmulas que son necesarias y suficientes para la existencia del triángulo.

Examinaremos todos los casos que se pueden presentar, dando a los datos a, b y A del problema, todos los valores posibles.

Supongamos en primer término que se satisface la condición

$$\frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} \leq 1$$

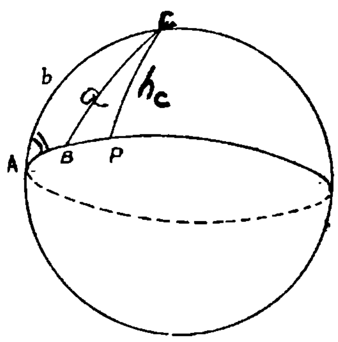
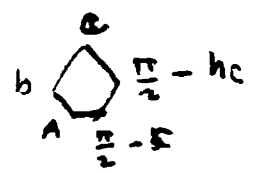


Figura 157



porque si esa condición no se cumple, no hay triángulo.

Es fácil ver el significado geométrico de esta condición. Si desde el vértice C del triángulo, supuesto el problema resuelto, bajamos el arco de círculo máximo CP, normal al lado opuesto c, altura que llamamos h_c, es evidente que (fig. 157):

$$\operatorname{sen} h_c = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A.$$

Para que el triángulo exista, debe tenerse entonces

$$\operatorname{sen} a \geq \operatorname{sen} h_c$$

vale decir, para que exista el triángulo, debe tenerse:

$$h_c \leq a \leq \pi - h_c.$$

Se observa que cualquiera sea el valor de b, resulta h_c siempre menor que el menor de los arcos b o $(\pi - b)$, salvo el caso en que $b = \frac{\pi}{2}$ y $A = \frac{\pi}{2}$. En tal caso $h_c = 90°$.

Eliminemos el caso en que $A = \frac{\pi}{2}$ o $a = \frac{\pi}{2}$, porque en ese caso el triángulo es rectángulo o rectilátero, y ya lo hemos estudiado y excluímos el caso en que sea $b = \frac{\pi}{2}$ y $A = \frac{\pi}{2}$, porque en ese caso $a = \frac{\pi}{2}$ y el triángulo es birrectángulo.

Supongamos en primer lugar $A < \frac{\pi}{2}$ y distinguiremos dos casos. según que b sea menor o mayor que $\frac{\pi}{2}$.

I. $b < \frac{\pi}{2}$. Si $a = h_c$, resulta $\operatorname{sen}\beta = 1$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ y las diferencias $(a - b)$ y $(A - B)$ son ambas negativas. El problema admite una sola solución, correspondiente a un triángulo rectángulo.

II. Cuando a está comprendido entre h_c y b, la diferencia $(a - b)$ es negativa. Si B_1 es el menor valor de β, se tiene $\operatorname{sen} B_1 > \operatorname{sen} A$, vale decir, $B_1 > A$, puesto que es $\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a} > 1$; luego la diferencia $(A - B)$, es negativa, y con mayor razón la diferencia correspondiente al ángulo B_2, que toma ahora el valor $A - (180^\circ - B_1)$. Luego en este caso el problema admite *dos soluciones*.

III. Si $a = b$. Resulta $\operatorname{sen} B = \operatorname{sen} A$ y entonces sólo hay que considerar la solución que nos da $A - B_1 = 0$, puesto que $a - b = 0$.

La fórmula de Neper nos da

$$\operatorname{ctg}\frac{C}{2} = \frac{\cos a}{\operatorname{ctg} A}, \qquad \operatorname{tg}\frac{c}{2} = \operatorname{tg} a \cos A.$$

El otro valor del ángulo $B_2 = \pi - B_1$ nos da una solución en que el triángulo se ha transformado en el lado b.

IV Si a está comprendido entre b y $(\pi - b)$, la diferencia $(a - b)$ es positiva. Se tiene $\operatorname{sen} a > \operatorname{sen} b$, luego $A > B_1$ y la diferencia $(A - B_1)$ es positiva, y esta solución existe. Para el otro valor $B_2 = \pi - B_1$, la diferencia es $A - (\pi - B_1)$ y resulta negativa, puesto que $A < \frac{\pi}{2}$ y $B_1 < A$, es decir, que esta segunda solución no existe. En este caso el problema admite una sola solución.

V. Si $a = \pi - b$. La diferencia $(a - b)$ es positiva, ya que hemos supuesto que $b < \frac{\pi}{2}$, es decir $(\pi - 2b)$, positivo se tiene sen $\beta =$ sen A. El valor $B_1 = A$ no es aceptable. El otro valor $B_2 = \pi - A$, da para $A - B_2$ un valor $A - (\pi - A) = 2A - \pi$, que es negativo; luego no da solución, pues $(a - b)$ es positiva. Es decir, qué en este caso el problema no admite ***ninguna solución.***

En realidad, en este caso el triángulo degenera en un huso que corresponde al valor $B_2 = \pi - A$, pues según la fórmula de Neper se tiene

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen} \frac{a+b}{2}} \operatorname{ctg} \frac{(A - B_2)}{2} = \infty,$$

luego

$$C = 180° = \pi.$$

VI. Si a está comprendido entre $(\pi \quad b)$ y $(\pi - h_c)$. La diferencia $(a - b)$ resulta positiva y sen B > sen A, puesto que sen $b >$ sen a. Luego $B_1 > A$ y la diferencia $(A - B_1)$ es negativa, es decir, que esta solución no existe. Para el otro valor de $B = \pi - B_1$, resulta $A - (\pi - B_1)$ es también negativa y tampoco el problema admite solución.

2° $b > \frac{\pi}{2}$. Y estudiemos los diferentes casos que pueden presentarse.

I. $a = h_c$. Se tiene $B = \frac{\pi}{2}$ y el problema admite una sola solución, que es un triángulo rectángulo.

II. a comprendido entre h_c y $(180° - b)$, que según hemos visto es mayor que h_c y la diferencia $(a - b)$ es negativa y sen $b >$ sen a, luego $B_1 > A$ y por lo tanto $(A - B_1)$ es negativo y el problema admite esta solución. Para el otro valor de $B_2 = \pi - B_1$ la diferencia $A - (\pi - B_1)$ es también negativo, y también esta solución vale.

Luego en este caso el problema admite dos soluciones.

III. $a = \pi - b$. Resulta sen B = sen A. El valor $B_1 = A$ nos da $(A - B)$ nulo, siendo así que $(a - b)$ es negativo y esta solución no es viable. En este caso el triángulo degenera en un huso. En cambio, el otro valor $(B_2 - \pi - B_1)$ nos da para $(A - B)$ un valor negativo y el problema admite esta solución. Resulta que el problema tiene una solución, y una sola.

IV. a comprendido entre $(180^\circ - b)$ y b. La diferencia $(a - b)$ es negativa. Y se tiene que sen $a >$ sen b, lo que nos da $A > B_1$. El problema no admite esta solución, por ser $A - B_1$ positivo. En cambio, el otro valor $B_2 = \pi - B_1$ nos da que la diferencia $A - (\pi - B_1)$ es negativa, y el problema admite esta solución, y una sola.

V. $a = b$. Cuando $a = b$ el problema no admite ninguna solución. En efecto, siendo $a = b$, se tiene sen $A =$ sen B_1 y puesto que $A < \frac{\pi}{2}$, el primer valor $B_1 = A$, nos da, calculando $\operatorname{tg} \frac{C}{2}$ un valor negativo, lo que no puede ser, pues siempre la tangente de la mitad de un ángulo debe ser positiva, por estar el ángulo comprendido entre 0 y π. Tampoco existe el lado c correspondiente al valor B_1. En lo que se refiere al otro valor de $B_2 = \pi - B_1$, tampoco es aceptable, porque la diferencia $(a - b)$ es igual a cero, mientras que $(A - B_2)$ es negativa. El problema no admite ninguna solución.

VI. $b < a < \pi - h_c$. En este caso la diferencia $a - b$ es positiva y puesto que sen $b >$ sen a, resulta $B_1 > A$ y la diferencia $(A - B_1)$ es negativa y esta solución no es aceptable. La otra solución $B_2 = \pi - B_1$ nos da $A - (\pi - B_1)$ también un valor negativo, puesto que tanto A como B_1 valen menos de $\frac{\pi}{2}$. Luego el problema no admite ninguna solución.

Si ahora consideramos el caso en que $A > \frac{\pi}{2}$, y seguimos un razonamiento análogo, se llega a las conclusiones que se indican en el siguiente cuadro:

$$
A < \frac{\pi}{2}
\begin{cases}
b < \dfrac{\pi}{2}
\begin{cases}
a = h_c, \ldots\ldots\ldots & \text{una solución.} \\
h_c < a < b, & \text{dos soluciones.} \\
a = b \ldots\ldots\ldots & \text{una sol. y una límite.} \\
b < a < \pi - b, & \text{una solución.} \\
a = \pi - b, \ldots\ldots\ldots & \text{una solución límite.} \\
\pi - b < a < \pi - h_c, & \text{ninguna solución.}
\end{cases} \\[2ex]
b > \dfrac{\pi}{2}
\begin{cases}
a = h_c, \ldots\ldots\ldots & \text{una solución.} \\
h_c < a < \pi - b, \ldots\ldots & \text{dos soluciones.} \\
a = \pi - b, \ldots\ldots\ldots & \text{una sol. y una límite.} \\
\pi - b < a < b, \ldots\ldots & \text{una solución.} \\
a = b \ldots\ldots\ldots & \text{una solución límite.} \\
b < a < \pi - h_c, \ldots\ldots & \text{ninguna solución.}
\end{cases}
\end{cases}
$$

$$
A > \frac{\pi}{2}
\begin{cases}
b < \dfrac{\pi}{2}
\begin{cases}
h_c \leq a < b \ldots\ldots\ldots & \text{ninguna solución.} \\
a = b \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{una solución límite.} \\
b < a < \pi - b, \ldots\ldots & \text{una solución.} \\
a = \pi - b, \ldots\ldots\ldots & \text{una solución y otra límite.} \\
\pi - b < a < \pi - h_c, & \text{dos soluciones.}
\end{cases} \\[2ex]
b > \dfrac{\pi}{2}
\begin{cases}
h_c \leq a < \pi - b, & \text{ninguna solución.} \\
a = \pi - b \ldots\ldots\ldots & \text{una solución límite.} \\
\pi - b < a < b, & \text{una solución.} \\
a = b, & \text{una sol. y una sol. límite.} \\
b < a < \pi - h_c, \ldots & \text{dos soluciones.}
\end{cases}
\end{cases}
$$

348. *Otra solución.* — Vamos a dar otra solución del problema. En primer lugar se calcula B por la fómula

$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a},$$

y los valores de C y c, se obtienen, partiendo de las fórmulas

$$\operatorname{ctg} a \operatorname{sen} b = \operatorname{ctg} A \operatorname{sen} C + \cos b \cos C,$$
$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A.$$

Podemos escribir:

$$\operatorname{ctg} a \operatorname{sen} b = \cos b \left(\cos C + \frac{\operatorname{ctg} A}{\cos b} \operatorname{sen} C\right),$$
$$\cos a = \cos b\,(\cos c + \operatorname{tg} b \operatorname{sen} c \cos A),$$

y haciendo

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{ctg} A}{\cos b} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} b \cos A, \tag{1}$$

donde φ y φ_1 son dos ángulos auxiliares de cálculo, se tiene

$$\operatorname{ctg} a \operatorname{sen} b = \frac{\cos b \cos (C - \varphi)}{\cos \varphi},$$
$$\cos a = \frac{\cos b \cos (c - \varphi_1)}{\cos \varphi_1},$$

de donde

$$\left.\begin{aligned}
\cos (C - \varphi) &= \frac{\operatorname{tg} b \cos \varphi}{\operatorname{tg} a}, \\
\cos (c - \varphi_1) &= \frac{\cos a \cos \varphi_1}{\cos b}
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(1)

Y puesto que las relaciones nos permiten calcular φ y φ_1, y las relaciones los ángulos $(C - \varphi)$ y $c - \varphi_1$, se puede obtener C y c.

(2)

Discusión. — Debe tenerse, en primer lugar, que:

$$\frac{\text{sen } b \text{ sen A}}{\text{sen } a} \leq 1.$$

Cumplida esta condición, deben tenerse valores reales para $C - \varphi$ y para $c - \varphi_1$:

De las relaciones anteriores se saca

$\rho = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\rho}}$

$$\cos^2 (C - \varphi) = \frac{\text{tg}^2 b}{\text{tg}^2 a} \cos^2 \varphi = \frac{\text{tg}^2 b}{\text{tg}^2 a} \frac{1}{1 + \dfrac{\text{ctg}^2 \text{A}}{\cos^2 b}}$$

o bien

$$\cos^2 (C - \varphi) = \frac{\text{sen}^2 b \text{ sen}^2 \text{A}}{\text{sen}^2 a} \frac{\cos^2 a}{\text{cco}^2 b \text{ sen}^2 \text{A} + \cos \text{A}}.$$

Y siendo sen b sen A $\leq$ sen a, podemos poner

$$\text{sen}^2 b \text{ sen}^2 \text{A} = \text{sen}^2 a - \text{k}^2$$

donde k puede ser en un caso límite igual a cero.

Se tiene así

$$\cos^2 (C - \varphi) = \frac{\text{sen}^2 b \text{ sen}^2 \text{A}}{\text{sen}^2 a} \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a + k^2} \leq 1.$$

Y también

$$\cos^2 (c - \varphi_1) = \frac{\cos^2 a}{\cos^2 b} \cos^2 \varphi_1 = \frac{\cos^2 a}{\cos^2 b} \frac{1}{1 + \text{tg}^2 b \cos^2 \text{A}}$$

o bien

$$\cos^2 (c - \varphi_1) = \frac{\cos^2 a}{1 - \text{sen}^2 b \text{ sen}^2 \text{A}} = \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a + k^2} \leq 1.$$

Los valores de B, que están determinados por el seno, nos dan dos valores suplementarios B_1 y $\pi - B_1$. Los ángulos $(C - \varphi)$ y $c - \varphi_1$, están determinados por el coseno y nos darán cada uno dos ángulos del tipo $\pm m$ y $\pm n$. Estos valores $\pm m$ y $\pm n$ serán aceptables si nos dan para C y c, respectivamente, valores comprendidos entre 0 y π. Cumplidas estas condiciones, hay que ver todavía cómo deben combinarse los valores B_1 y $(\pi - B_1)$ con estos valores de C y c, para que el triángulo exista.

Tomemos ahora las fórmulas:

$$\cos B = -\cos A \cos C + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos b,$$
$$\operatorname{ctg} b \operatorname{sen} c = \operatorname{ctg} B \operatorname{sen} A + \cos c \cos A.$$

que podemos transformar en:

$$\operatorname{sen} A \cos b \left(\operatorname{sen} C - \frac{\operatorname{ctg} A}{\cos b} \cos C\right) = \cos B,$$

$$\operatorname{ctg} b \left(\operatorname{sen} c - \cos c \frac{\cos A}{\operatorname{ctg} b}\right) = \operatorname{ctg} B \operatorname{sen} A,$$

e introduciendo los ángulos auxiliares de cálculo φ y φ_1, se obtiene:

$$\operatorname{sen}(C - \varphi) = \operatorname{sen} \varphi \frac{\cos B}{\cos A},$$

$$\operatorname{sen}(c - \varphi_1) = \operatorname{sen} \varphi_1 \frac{\cos B}{\cos A},$$

de donde se deduce que $(C - \varphi)$ y $(c - \varphi_1)$, cuyo valor absoluto debe ser inferior a π, deben tener el mismo signo y ser positivos si A y B son de la misma especie y ser negativos si A y B son de distinta especie, es decir, uno mayor y otro menor que $\frac{\pi}{2}$.

Resulta así que los valores de B_1 y B_2, $\pm m$ y $\pm n$, deben satisfacer a las siguientes condiciones:

$$A < \frac{\pi}{2} \ldots\ldots \begin{cases} B = B_1, & C = \varphi + m \quad c = \varphi_1 + n, \\ B = \pi - B_1, & C = \varphi - m \quad c = \varphi_1 - n, \end{cases}$$

$$A > \frac{\pi}{2} \ldots\ldots \begin{cases} B = B_1 & C = \varphi - m \quad c = \varphi_1 - n, \\ B = \pi - B_1 & C = \varphi + m \quad c = \varphi_1 + n, \end{cases}$$

el problema tendrá dos soluciones, una o ninguna, según que dos valores, o uno o ninguno de C y c queden comprendidos entre 0 y π.

Ejercicio: Sea $a = 102°38'10''$, $b = 36°24'50''$, $A = 48°00'20''$.

Siendo $A < 90°$, $b < 90°$ y a comprendido entre b y $(180° - b)$, el problema admite una sola solución.

$a = 102°38'10''$	$\operatorname{sen} b = 9.773504$	
$b = 36°24'50''$	$\operatorname{sen} A = 9.871111$	
$A = 48°00'20''$	9.644615	
$B = 26°52'49''$	$\operatorname{sen} a = 9.989352$	
	$\operatorname{sen} B = 9.655263$	
$a + b = 139°03'00''$	$\operatorname{ctg}\frac{A+B}{2} = 0.115916$	$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = 0.427840$
$a - b = 66°13'20''$	$\cos\frac{a-b}{2} = 9{,}923043$	$\cos\frac{A+B}{2} = 9.899798$
$\frac{a+b}{2} = 69°31'30''$	0.038959	0.327638
$\frac{a-b}{2} = 33°06'40''$	$\cos\frac{a+b}{2} = 9.543818$	$\cos\frac{A-B}{2} = 9.992578$
$A + B = 74°53'09''$	$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = 0.495141$	$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = 0.335060$
$A - B = 21°07'31''$		
$\frac{A+B}{2} = 37°26'34''5$	$\operatorname{ctg}\frac{A-B}{2} = 0.729391$	$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2} = 9.814360$
$\frac{A-B}{2} = 10°33'45''5$	$\operatorname{sen}\frac{a-b}{2} = 9.737403$	$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2} = 9.783883$
	0.466794	9.598243
$\frac{C}{2} = 72°15'59''$	$\operatorname{sen}\frac{a+b}{2} = 9.971658$	$\operatorname{sen}\frac{A-B}{2} = 9.263187$
$\frac{c}{2} = 65°11'17''$	$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = 0.495136$	$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = 0.335056$
$C = 144°31'58''$		
$c = 130°22'34''$		

Por el segundo método, es decir, utilizando las fórmulas:

$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{ctg} A}{\cos b}, \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} b \cos A,$$

$$\cos(C - \varphi) = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a} \cos \varphi, \quad \cos(c - \varphi_1) = \frac{\cos a \cos \varphi_1}{\cos b}.$$

$a = 102°38'10''$	$\operatorname{sen} b = 9.773504$	
$b = 36°24'50''$	$\operatorname{sen} A = 9.871111$	
$A = 48°00'20''$	9.644615	
$B = 26°52'49''$	$\operatorname{sen} a = 9.989352$	
$\varphi = 48°12'19''$	$\operatorname{sen} B = 9.655263$	
$\varphi_1 = 26°16'03''$	$\operatorname{ctg} A = 9.954353$	$\cos A = 9.825464$
$C - \varphi = 96°19'39''$	$\cos b = 9.905661$	$\operatorname{tg} b = 9.867843$
$c - \varphi_1 = 104°06'31''$	$\operatorname{tg} \varphi = 0.048692$	$\operatorname{tg} \varphi_1 = 9.693307$
$C = 144°31'58''$	$\cos \varphi = 9.823777$	$\cos \varphi_1 = 9.952665$
$c = 130°22'34''$	$\operatorname{tg} b = 9.867843$	$\cos a = 9.339964\ n$
	9.691620	$9.292629\ n$
	$\operatorname{tg} a = 0.649387\ n$	$\cos b = 9.905661$
	$\cos(C - \varphi) = 9.042233\ n$	$\cos(c - \varphi_1 = 9.386968\ n$

$a = 42°50'20''$ $b = 74°20'30''$ $A = 25°10'10''$	
$B_1 = 37°02'00''$	$B_2 = 142°58'00''$
$a + b = 117°10'50''$ $a - b = -\ 31°30'10''$ $\frac{a+b}{2} = 58°35'25''$ $\frac{a-b}{2} = -\ 15°45'05''$	
$A + B_1 = 62°12'10''$ $A - B_1 = -\ 11°51'50''$ $\frac{A+B_1}{2} = 31°06'05''$ $\frac{A-B_1}{2} = -\ 5°55'55''$	$A + B_2 = 168°08'10''$ $A - B_2 = -117°47'50''$ $\frac{A+B_2}{2} = 84°04'05''$ $\frac{A-B_2}{2} = -\ 58°53'55''$
$\frac{C_1}{2} = 71°54'35''$ $\frac{c_2}{2} = 54°39'93''$	$\frac{C_2}{2} = 10°51'44''$ $\frac{c_1}{2} = 18°08'28''$
$C_1 = 143°49'10''$ $c_1 = 109°18'06''$	$C_2 = 21°43'28''$ $c_2 = 36°16'56''$

$\operatorname{sen} b = 9.983576$ $\operatorname{sen} A = 9.628692$	
9.612268 $\operatorname{sen} a = 9.832470$	
$\operatorname{sen} B = 9.779798$	
$\operatorname{ctg} \frac{A + B_1}{2} = 0.219487$ $\cos \frac{a - b}{2} = 9.983378$	$\operatorname{tg} \frac{a + b}{2} = 0.214218$ $\cos \frac{A + B_1}{2} = 0.932603$
0.202865 $\cos \frac{a + b}{2} = 9.716966$	0.146821 $\cos \frac{A - B_1}{2} = 9.997668$
$\operatorname{tg} \frac{C_1}{2} = 0.485909$	$\operatorname{tg} \frac{c_1}{2} = 0.149153$
$\operatorname{ctg} \frac{A - B_1}{2} = 0.983370\, n$ $\operatorname{sen} \frac{a - b}{2} = 9.433712\, n$	$\operatorname{tg} \frac{a - b}{2} = 9.450334\, n$ $\operatorname{sen} \frac{A + B_1}{2} = 9.713116$
0.417082 $\operatorname{sen} \frac{a + b}{2} = 9.931184$	$9.163450\, n$ $\operatorname{sen} \frac{A - B_1}{2} = 9.014298\, n$
$\operatorname{tg} \frac{C_1}{2} = 0.485901$	$\operatorname{tg} \frac{c_1}{2} = 0.149152$
$\operatorname{ctg} \frac{A + B_2}{2} = 9.016630$ $\cos \frac{a - b}{2} = 9.983378$	$\operatorname{tg} \frac{a + b}{2} = 0.214218$ $\cos \frac{A + B_2}{2} = 9.014298$
9.000008 $\cos \frac{a + b}{2} = 9.716966$	9.228516 $\cos \frac{A - B_2}{2} = 9.713116$
$\operatorname{tg} \frac{C_2}{2} = 9.283042$	$\operatorname{tg} \frac{c_2}{2} = 9.515400$
$\operatorname{ctg} \frac{A - B_2}{2} = 9.780513\, n$ $\operatorname{sen} \frac{a - b}{2} = 9.433712\, n$	$\operatorname{tg} \frac{a - b}{2} = 9.450334\, n$ $\operatorname{sen} \frac{A + B_2}{2} = 9.997668$
9.214225 $\operatorname{sen} \frac{a + b}{2} = 9.931184$	$0.448002\, n$ $\operatorname{sen} \frac{A - B_2}{2} = 9.932603\, n$
$\operatorname{tg} \frac{C_2}{2} = 9.283041$	$\operatorname{tg} \frac{c_2}{2} = 9.515399$

El problema admite dos soluciones y los triángulos son:

$$\text{I.}\quad \begin{cases} a = 42^\circ 50' 20'' \\ b = 74^\circ 20' 30'' \\ c_1 = 109^\circ 18' 06'' \\ A = 25^\circ 10' 10'' \\ B_1 = 37^\circ 02' 00'' \\ C_1 = 143^\circ 49' 10'' \end{cases} \qquad \text{II.}\ldots\ldots \begin{cases} a = 42^\circ 50' 20'' \\ b = 74^\circ 20' 30'' \\ c_2 = 36^\circ 16' 56'' \\ A = 25^\circ 10' 10'' \\ B_2 = 142^\circ 58' 00'' \\ C_2 = 21^\circ 43' 28'' \end{cases}$$

Por el segundo método se tiene:

		$\operatorname{sen} b = 9.983576$ $\operatorname{sen} A = \underline{9.628612}$ 9.612268 $\operatorname{sen} a = 9.832470$	
	$a = 42°50'20''$ $b = 74°20'30''$ $A = 25°10'10''$	$\operatorname{sen} B = 9.779798$	
$B_1 = 37°02'00''$	$B_2 = 142°58'00''$	$\operatorname{ctg} A = 0.327982$ $\cos b = 9.431203$	$\cos A = 9.956674$ $\operatorname{tg} b = 0.552373$
$\varphi = 82°46'18''$ $\varphi_1 = 72°47'31''$		$\operatorname{tg} \varphi = 0.896779$	$\operatorname{tg} \varphi_1 = 0.509047$
$C_1 - \varphi = 61°02'49''$ $c_1 - \varphi_1 = 36°30'38''$	$C_2 - \varphi = -61°02'49''$ $c_2 - \varphi_1 = -36°30'38''$	$\cos \varphi = 9.099763$ $\operatorname{tg} b = \underline{0.552373}$ 9.652136 $\operatorname{tg} a = 9.967207$	$\cos \varphi_1 = 9.471060$ $\cos a = \underline{9.865263}$ 9.336323 $\cos b = 9.431203$
$C_1 = 143°49'07''$ $c_1 = 109°18'09''$	$C_2 = 21°43'29''$ $c_2 = 36°16'53''$	$\cos (C - \varphi) = 9.684929$	$\cos (c - \varphi_1) = 9.905120$

Sexto caso: Resolver un triángulo esférico, dados dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos, por ej. A, B, *a*.

349. *Primer método:* Si nosotros consideramos el triángulo A′B′C′, polar del triángulo buscado, resulta que de este triángulo polar conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. En efecto, conocemos.

$$a' = \pi - A,$$
$$b' = \pi - B,$$
$$A' = \pi - a,$$

luego estamos en el caso anterior, y resolviéndolo y aplicando el mismo razonamiento de discusión, vemos que puede tener o dos soluciones o una o ninguna. Resuelto el triángulo polar, es fácil encontrar los elementos del triángulo buscado.

350. *Segundo método:* Se tiene, en primer lugar, por el teorema del seno:

$$\operatorname{sen} b = \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$$

lo que nos da los valores de b, siempre que $\frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} \leq l$. Hallado b, se calcula C y c, por las fórmulas de Neper:

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A+B}{2} \cdot \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{A-B}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen} \frac{a+b}{2}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \cdot \frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}} \cdot = \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} \frac{\operatorname{sen} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A-B}{2}}.$$

En cuanto a la discusión, se sigue un camino análogo al del caso anterior y el problema puede tener dos soluciones o una o ninguna.

351. *Tercer método:* Se obtienen los elementos desconocidos, por las fórmulas:
para calcular b

$$\operatorname{sen} b = \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}.$$

Para calcular C y c, escribimos

$$\cos A = -\cos B \cos C + \text{sen } B \text{ sen } C \cos a =$$
$$= -\cos B (\cos C - \text{sen } C \cos a \text{ tg } B),$$

$$\text{ctg } a \text{ sen } c = \text{ctg } A \text{ sen } B + \cos c \cos B$$

o bien, introduciendo dos ángulos auxiliares de cálculo φ y φ_1 dados por:

$$\text{tg } \varphi = -\text{tg } B \cos a, \qquad \text{tg } \varphi_1 = -\frac{\text{ctg } a}{\cos B},$$

se tiene

$$\cos (C - \varphi) = -\frac{\cos A \cos \varphi}{\cos B},$$

$$\cos (c - \varphi_1) = -\frac{\text{tg } B}{\text{tg } A} \cos \varphi_1.$$

Y la discusión es análoga a la estudiada en el 5° caso de resolución de triángulos.

Ejemplo. — Sea:

$$A = 102°18'10''$$
$$B = 132°43'50''$$
$$a = 63°14'10''.$$

Primer método: Por el primer método, siendo A'B'C' el triángulo polar tenemos:

$$a' = 180° - A = 180° - 102°18'10'' = 77°41'50'',$$
$$b' = 180° - B = 180° - 132°43'50'' = 47°16'10'',$$
$$A' = 180° - a = 180° - 63°14'10'' = 116°45'50''.$$

Y ahora resolvemos como en el 5° caso.

$a' = 77°41'50''$ $b' = 47°16'10''$ $A' = 116°45'50''$	$\text{sen}\, b' = 9.866023$ $\text{sen}\, A' = 9.950788$	
$B' = 42°09'56''$	9.816811 $\text{sen}\, a' = 9.989910$	
	$\text{sen}\, B' = 9.826901$	
$a' + b' = 124°58'00''$ $a' - b' = 30°25'40''$ $\frac{a' + b'}{2} = 62°29'00''$ $\frac{a' - b'}{2} = 15°12'50''$	$\text{ctg}\, \frac{A' + B'}{2} = 9.269457$ $\cos \frac{a' - b'}{2} = 9.984506$	$\text{tg}\, \frac{a + b}{2} = 0.283215$ $\cos \frac{A + B}{2} = 9.262073$
$A' + B' = 158°55'46''$ $A' - B' = 74°35'54''$	9.253963 $\cos \frac{a' + b'}{2} = 9.664648$	9.545288 $\cos \frac{A - B}{2} = 9.900631$
$\frac{A' + B'}{2} = 79°27'53''$ $\frac{A' - B'}{2} = 37°17'57''$	$\text{tg}\, \frac{C'}{2} = 9.589315$	$\text{tg}\, \frac{c'}{2} = 9.644657$
$\frac{C'}{2} = 21°13'40''$ $\frac{c'}{2} = 23°48'29''$	$\text{ctg}\, \frac{A' - B'}{2} = 0.118175$ $\text{sen}\, \frac{a' - b'}{2} = 9.419002$	$\text{tg}\, \frac{a - b}{2} = 9.434496$ $\text{sen}\, \frac{A + B}{2} = 9.992616$
$C' = 42°27'20''$ $c' = 47°36'58''$	9.537177 $\text{sen}\, \frac{a' + b'}{2} = 9.947863$	9.427112 $\text{sen}\, \frac{A - B}{2} = 9.782456$
	$\text{tg}\, \frac{C'}{2} = 9.589314$	$\text{tg}\, \frac{c'}{2} = 9.644656$

Resuelto el triángulo polar, pasamos a los elementos del triángulo buscado, que son:

$$b = 180^\circ - B' = 137^\circ 50' 04''$$

$$C = 180^\circ - c' = 132^\circ 23' 02''$$

$$c = 180^\circ - C' = 137^\circ 32' 40''.$$

Por el 2º método:

$$\operatorname{sen} b = \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A},$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A + B}{2} \cdot \frac{\cos \frac{a - b}{2}}{\cos \frac{a + b}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{A - B}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{a - b}{2}}{\operatorname{sen} \frac{a + b}{2}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \operatorname{tg} \frac{a + b}{2} \cdot \frac{\cos \frac{A + B}{2}}{\cos \frac{A - B}{2}} = \operatorname{tg} \frac{a - b}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{A + B}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A - B}{2}}.$$

$A = 102°18'10''$	$\operatorname{sen} a = 9.950788$	
$B = 132°43'50''$	$\operatorname{sen} B = 9.866023$	La solución
$a = 63°14'10''$	9.816811	$b = 42°09'56''$
$b = 137°50'04''$	$\operatorname{sen} A = 9.989910$	no corresponde.
$A + B = 235°02'00''$	$\operatorname{sen} b = 9.826901$	
$A - B = -\ 30°25'40''$		
$a + b = 201°04'14''$	$\operatorname{ctg} \frac{A+B}{2} = 9.716785\,n$	$\operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = 0.730543\,n$
$a - b = -\ 74°35'54''$	$\cos \frac{a-b}{2} = 9.909631$	$\cos \frac{A+B}{2} = 9.664648\,n$
$\frac{A+B}{2} = 117°31'00''$	$9.617416\,n$	0.395191
$\frac{A-B}{2} = -\ 15°12'50''$	$\cos \frac{a+b}{2} = 9.262073\,n$	$\cos \frac{A-B}{2} = 9.984506$
$\frac{a+b}{2} = 100°32'07''$	$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = 0.355343$	$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = 0.410685$
$\frac{a-b}{2} = -\ 37°17'57''$	$\operatorname{ctg} \frac{A-B}{2} = 0.565504\,n$	$\operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = 9.881826$
$\frac{C}{2} = 66°11'31''$	$\operatorname{sen} \frac{a-b}{2} = 9.782456\,n$	$\operatorname{sen} \frac{A+B}{2} = 9.947863\,n$
$\frac{c}{2} = 68°46'20''$	0.347960	$9.829689\,n$
$C = 132°23'02''$	$\operatorname{sen} \frac{a+b}{2} = 9.992616$	$\operatorname{sen} \frac{A-B}{2} = 9.419002\,n$
$c = 137°32'40''$	$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = 0.355344$	$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = 0.410687$

Por el tercer método:

$A = 102^\circ 18' 10''$	$\text{sen } a = 9.950788$	
$B = 132^\circ 43' 50''$	$\text{sen B} = 9.866023$	La solución
$a = 63^\circ 14' 10''$	9.816811	$b = 42^\circ 09' 56''$
$b = 139^\circ 50' 04''$	$\text{sen A} = 9.989910$	no es aceptable.
$\varphi = 25^\circ 59' 18''$	$\text{sen } b = 9.826901$	
$\varphi_1 = 36^\circ 37' 20''$		
$C - \varphi = 106^\circ 23' 44''$	$-\text{ tg B} = 0.034440$	$-\text{ ctg } a = 9.702028n$
$c - \varphi_1 = 100^\circ 55' 21''$	$\cos a = 9.653516$	$\cos \text{B} = 9.831583n$
$C = 132^\circ 23' 02''$	$\text{tg } \varphi = 9.687956$	$\text{tg } \varphi_1 = 9.871145$
$c = 137^\circ 32' 41''$	$-\cos \text{A} = 9.328538$	$\text{tg B} = 0.034440$
	$\cos \varphi = 9.953703$	$\cos \varphi_1 = 9.904492$
	9.282241	9.938932
	$\cos \text{B} = 9.831583n$	$\text{tg A} = 0.661372n$
	$\cos (C - \varphi) = 9.450658n$	$\cos (c - \varphi_1) = 9.277560n$

Otro ejemplo:
Por el segundo método:

$A = 160°27'40''$ $B = 30°31'20''$ $a = 144°09'50''$	$\text{sen } a = 9.567504$ $\text{sen B} = 9.705755$ 9.473259 $\text{sen A} = 9.524327$ $\text{sen } b = 9.948932$
$b' = 62°45'20''$	$b_2 = 117°14'40''$
$A + B = 190°59'00''$	$A - B = 129°56'20''$
$a + b_1 = 206°55'10''$ $a - b_1 = 81°24'30''$	$a + b_2 = 261°24'30''$ $a - b_2 = 26°55'10''$
$\frac{A+B}{2} = 95°29'30''$	$\frac{A-B}{2} = 64°58'10''$
$\frac{a+b_1}{2} = 103°27'35''$ $\frac{a-b_1}{2} = 40°42'15''$	$\frac{a+b_2}{2} = 130°42'15''$ $\frac{a-b_2}{2} = 13°27'35''$
$\frac{C_1}{2} = 17°23'13''$ $\frac{c_1}{2} = 43°22'57''$	$\frac{C_2}{2} = 8°09'33''$ $\frac{c_2}{2} = 14°43'53''$
$C_1 = 34°46'26''$ $c_1 = 86°45'54''$	$C_2 = 16°19'06''$ $c_2 = 29°29'46''$

$\operatorname{ctg} \frac{A + B}{2} = 8.982914\,n$ $\cos \frac{a - b_1}{2} = 9.879719$ $8.862633\,n$ $\cos \frac{a + b_1}{2} = 9.366912\,n$	$\operatorname{tg} \frac{a + b_1}{2} = 0.620993\,n$ $\cos \frac{A + B}{2} = 8.980916\,n$ 9.601909 $\cos \frac{A - B}{2} = 9.626445$
$\operatorname{tg} \frac{C_1}{2} = 9.495721$	$\operatorname{tg} \frac{c_1}{2} = 9.975464$
$\operatorname{ctg} \frac{A - B}{2} = 9.669277$ $\operatorname{sen} \frac{a - b_1}{2} = 9.814350$ 9.483627 $\operatorname{sen} \frac{a + b_1}{2} = 9.987905$	$\operatorname{tg} \frac{a - b_1}{2} = 9.934631$ $\operatorname{sen} \frac{A + B}{2} = 9.998002$ 9.932633 $\operatorname{sen} \frac{A - B}{2} = 9.957168$
$\operatorname{tg} \frac{C_1}{2} = 9.495722$	$\operatorname{tg} \frac{c_1}{2} = 9.975465$
$\operatorname{ctg} \frac{A + B}{2} = 8.982914\,n$ $\cos \frac{a - b_2}{2} = 9.987905$	$\operatorname{tg} \frac{a + b_2}{2} = 0.065369\,n$ $\cos \frac{A + B}{2} = 8.980916\,n$
$8.970819\,n$ $\cos \frac{a + b_2}{2} = 9.814569\,n$	9.046285 $\cos \frac{A - B}{2} = 9.626445$
$\operatorname{tg} \frac{C_2}{2} = 9.156469$	$\operatorname{tg} \frac{c_2}{2} = 9.419840$
$\operatorname{ctg} \frac{A - B}{2} = 9.669277$ $\operatorname{sen} \frac{a - b_2}{2} = 9.366912$	$\operatorname{tg} \frac{a - b_2}{2} = 9.379007$ $\operatorname{sen} \frac{A + B}{2} = 9.998002$
9.036189 $\operatorname{sen} \frac{a + b_2}{2} = 9.879719$	9.377009 $\operatorname{sen} \frac{A - B}{2} = 9.957168$
$\operatorname{tg} \frac{C_2}{2} = 9.156470$	$\operatorname{tg} \frac{c_2}{2} = 9.419841$

El problema admite dos soluciones.

Por el tercer método:

		sen a = 9.767504 sen B = 9.705755	
		9.473259 sen A = 9.524327	
A = 160°27′40″ B = 30°31′20″ a = 144°09′50″		sen b = 9.948932	
		— tg B = 9.770534 n cos a = 9.908857 n	— ctg a = 0.141354 cos B = 9.935221
b_1 = 62°45′20″	b_2 = 117°14′40″	tg φ = 9.679391	tg φ_1 = 0.206133
φ = 25°32′45″ φ_1 = 28°39′04″		— cos A = 9.974242 cos φ = 9.955322	tg B = 9.770534 cos φ_1 = 9.722825
$C_1 - \varphi$ = 9°13′40″ $c_1 - \varphi_1$ = 28°39′04″	$C_2 - \varphi$ = — 9°13′40″ $c_2 - \varphi_1$ = — 28°39′04″	9.929564 cos B = 9.935221	9.493359 tg A = 9.550085
C_1 = 34°46′25″ c_1 = 86°45′54″	C_2 = 16°19′05″ c_2 = 29°27′46″	cos (C — φ) = 9.994343	cos (c — φ_1) = 9.943274

CAPÍTULO VII

ELEMENTOS SECUNDARIOS EN EL TRIÁNGULO ESFÉRICO. OTRAS PROPIEDADES DEL TRIÁNGULO ESFÉRICO

352. *Alturas.* — Llamamos alturas en el triángulo esférico ABC, a los arcos de círculo máximo que partiendo de un vértice caen normalmente sobre los lados opuestos.

Los designaremos respectivamente por h_a, h_b y h_c (fig. 158) y se tiene:

$$\text{sen } h_a = \text{sen } b \text{ sen C} = \text{sen } c \text{ sen B}.$$

$$\text{sen } h_b = \text{sen } c \text{ sen A} = \text{sen } a \text{ sen C}.$$

$$\text{sen } h_c = \text{sen } a \text{ sen B} = \text{sen } b \text{ sen A}.$$

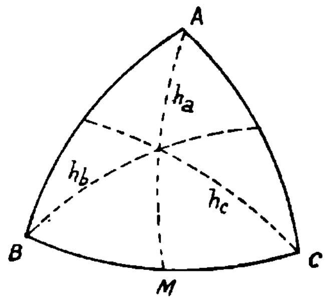


Figura 158

Y teniendo en cuenta las fórmulas del (nº 281) y de los grupos X (nº 307) y XVIII (nº 313), se tiene:

$$\text{sen } h_a = \frac{2\text{H}}{\text{sen } a} = \frac{2h}{\text{sen A}},$$

$$\text{sen } h_b = \frac{2\text{H}}{\text{sen } b} = \frac{2h}{\text{sen B}},$$

$$\text{sen } h_c = \frac{2\text{H}}{\text{sen } c} = \frac{2h}{\text{sen C}},$$

De la figura 158, teniendo en cuenta que los triángulos AMC y AMB son rectángulos en el vértice M, se obtiene:

$$\cos b = \cos h_a \cos \text{MC} \quad \text{y} \quad \cos c = \cos h_a \cos \text{MB},$$

de donde

$$\frac{\cos b}{\cos \text{MC}} = \frac{\cos c}{\cos \text{MB}}$$

y también

$$\frac{\cos b - \cos c}{\cos b + \cos c} = \frac{\cos \text{MC} - \cos \text{MB}}{\cos \text{MC} + \cos \text{MB}},$$

y entonces:

$$\operatorname{tg}\frac{MC-MB}{2}=\operatorname{tg}\frac{b+c}{2}\operatorname{tg}\frac{b-c}{2}\operatorname{ctg}\frac{a}{2}.$$

Haciendo

$$\frac{MC-MB}{2}=\varphi,$$

y siendo

$$\frac{MC+MB}{2}=\frac{a}{2},$$

resulta

$$MC=\frac{a}{2}+\varphi,$$

$$MB=\frac{a}{2}-\varphi.$$

Y entonces

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\frac{b+c}{2}\operatorname{tg}\frac{b-c}{2}\operatorname{ctg}\frac{a}{2}$$

$$\cos h_a=\frac{\cos b}{\cos\left(\frac{a}{2}+\varphi\right)}=\frac{\cos c}{\cos\left(\frac{a}{2}-\varphi\right)}.$$

Y en la misma forma se procede para las otras alturas.

Tomemos el triángulo de lados a, b, c, siguiente:

$a = 43°04'40''$ $b = 68°17'50''$ $c = 75°47'50''$	$\operatorname{tg}\frac{b+c}{2} = 0.489443$ $\operatorname{tg}\frac{b-c}{2} = 8.816529$ $\operatorname{ctg}\frac{a}{2} = 0.403739$
$b + c = 144°05'40''$ $b - c = -\ 7°30'00''$	
$\frac{b+c}{2} = 72°02'50''$ $\frac{b-c}{2} = -\ 3°45'00''$ $\frac{a}{2} = 21°32'20''$	$\operatorname{tg}\varphi = 9.709711$ $\cos b = 9.567957$ $\cos\left(\frac{a}{2}+\varphi\right) = 9.997924$
$\varphi = -\ 27°08'10''$ $\frac{a}{2}-\varphi = 48°40'30''$ $\frac{a}{2}+\varphi = -\ 5°35'50''$	$\cos h_a = 9.570033$ $\cos c = 9.389794$ $\cos\left(\frac{a}{2}-\varphi\right) = 9.819761$
$h_a = 68°11'17''$	$\cos h_a = 9.570033$

Y usando las fórmulas:

$$\text{sen } h_a = \frac{2H}{\text{sen } a}, \qquad \text{sen } h_b = \frac{2H}{\text{sen } b}, \qquad \text{sen } h_c = \frac{2H}{\text{sen } c},$$

donde

$$H = \sqrt{\text{sen } p \text{ sen } (p-a) \text{ sen } (p-b) \text{ sen } (p-c)}$$

se tiene:

$a = 43°04'40''$ $b = 68°17'50''$ $c = 75°47'50''$	$\text{sen } p = 9.9991488$ $\text{sen } (p-a) = 9.8774581$ $\text{sen } (p-b) = 9.6306135$ $\text{sen } (p-c) = 9.4850264$
$2p = 187°10'20''$ $p = 93°35'10''$ $p - a = 50°30'30''$ $p - b = 25°17'20''$ $p - c = 17°47'20''$	$S^2 = 9.0022468$
	$S = 9.5011234$ $2 = 0.3010300$
$h_a = 68°11'17''$ $h_b = 43°02'13''$ $h_c = 40°51'02''$	$2H = 9.8021534$ $\text{sen } a = 9.8344147$ $\text{sen } b = 9.9680693$ $\text{sen } c = 9.9865180$
	$\text{sen } h_a = 9.9677387$ $\text{sen } h_b = 9.8340841$ $\text{sen } h_c = 9.8156354$

353. *Arcos bisectores.* — Tengamos el triángulo ABC (fig. 159) y tracemos el arco de círculo máximo que divide el ángulo A en dos partes iguales. Sea b_a el arco AM. Llamando, como indica la figura, φ al ángulo que forma b_a con MB, se tiene

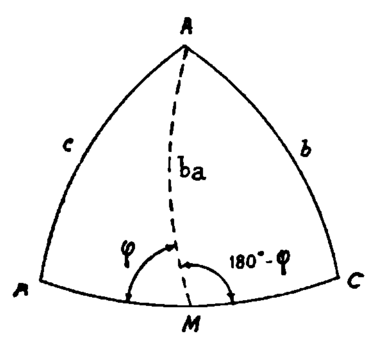


Figura 159

$$\cos B = -\cos\frac{A}{2}\cos\varphi + \text{sen}\frac{A}{2}\text{ sen }\varphi\cos b_a$$

$$\cos C = \cos\frac{A}{2}\cos\varphi + \text{sen}\frac{A}{2}\text{ sen }\varphi\cos b_a.$$

De donde, sumando y restando, se tiene

$$\cos b_a = \frac{\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\varphi},$$

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{sen}\frac{B+C}{2}\operatorname{sen}\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

Se calcula primero φ y luego b_a y las bisectrices correspondientes a los ángulos B y C se obtienen en la misma forma.

354. *Medianas.* — Para calcular el arco de círculo máximo que va de un vértice al punto medio del lado opuesto, tenemos, según la figura 160:

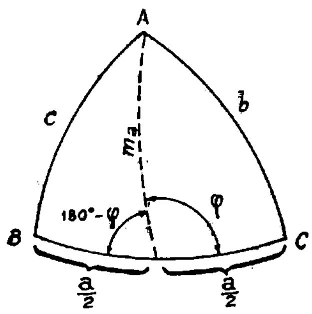


Figura 160

$$\cos b = \cos\frac{a}{2}\cos m_a + \operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen} m_a \cos\varphi,$$

$$\cos c = \cos\frac{a}{2}\cos m_a - \operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen} m_a \cos\varphi,$$

de donde:

$$\cos m_a = \frac{\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}},$$

y en forma análoga para las otras medianas.

355. *Radio del círculo circunscripto al triángulo esférico.* — *a) En función de los ángulos:* Sea el triángulo ABC y suponemos trazada la circunferencia de centro P, polo del triángulo ABC y de radio esférico R. Se tiene

$$R = PA = PB = PC.$$

Trazando por el polo P un arco de círculo máximo PM normal al lado a, el triángulo rectángulo PBM nos da

$$\cos x = \operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{ctg} R$$

de donde

$$\operatorname{ctg} R = \frac{\cos x}{\operatorname{tg}\frac{a}{2}}.$$

Pero los triángulos PAB, PBC y PAC son isósceles, luego se tiene, según la figura 161

$$y + z = A, \quad x + y = B, \quad x + z = C$$

es decir

$$x + \overbrace{y + z}^{A} = \frac{A+B+C}{2} = 90^\circ + \varepsilon,$$

luego

$$x = 90^\circ - (A - \varepsilon)$$

y resulta

$$\operatorname{ctg} R = \frac{\operatorname{sen}(A-\varepsilon)}{\operatorname{tg}\frac{a}{2}}. \qquad (1)$$

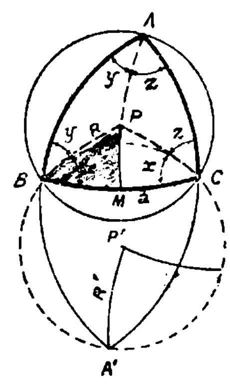


Figura 161

Y análogamente

$$\operatorname{ctg} R = \frac{\operatorname{sen}(B-\varepsilon)}{\operatorname{tg}\frac{b}{2}} \qquad (2)$$

$$\operatorname{ctg} R = \frac{\operatorname{sen}(C-\varepsilon)}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}}. \qquad (3)$$

Y reemplazando en la primera de estas tres últimas a $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ por su valor en función de los ángulos

$$\operatorname{ctg} R = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(A-\varepsilon)\operatorname{sen}(B-\varepsilon)\operatorname{sen}(C-\varepsilon)}{\operatorname{sen}\varepsilon}}, \qquad (4)$$

o bien (nº 312)

$$\operatorname{ctg} R = \sqrt{\frac{\cos(P-A)\cos(P-B)\cos(P-C)}{-\cos P}},$$

$$\operatorname{tg} R = \sqrt{\frac{-\cos P}{\cos(P-A)\cos(P-B)\cos(P-C)}}.$$

356. *b) En función de los lados.* — Poniendo

$$\operatorname{sen}(A-\varepsilon) = \operatorname{sen}\left[A - \frac{1}{2}(A+B+C-180^\circ)\right] = \cos\left(\frac{B+C}{2} - \frac{A}{2}\right)$$

$$= \cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{A}{2} + \operatorname{sen}\frac{B+C}{2}\operatorname{sen}\frac{A}{2}.$$

Y reemplazando $\cos\frac{B+C}{2}$ y $\operatorname{sen}\frac{B+C}{2}$, por sus valores dados por las fórmulas de Delambre, se tiene

$$\operatorname{sen}(A-\varepsilon) = \frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} + \frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

y entonces

$$\operatorname{sen}(A-\varepsilon) = \frac{\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\left[\cos\frac{b+c}{2} + \cos\frac{b-c}{2}\right]$$

y resulta

$$\operatorname{sen}(A-\varepsilon) = \frac{2\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$$

o bien

$$\operatorname{sen}(A-\varepsilon) = \frac{\sqrt{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}}{2\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cos\frac{a}{2}}.$$

Y reemplazando en (1) del número anterior:

$$\operatorname{ctg} R = \frac{\sqrt{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}}{2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}} \qquad (1)$$

y haciendo

$$H = \sqrt{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}$$

resulta:

$$\operatorname{ctg} R = \frac{H}{2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}.$$

357. Consideremos ahora el círculo inscripto en el triángulo A'BC (fig. 161). Aplicando al triángulo A'BC las fórmulas (4) del nº 355 y (1) del nº 356 y teniendo en cuenta que es $A' = A$, $B' = 180° - B$, $C' = 180° - C$, $a' = a$, $b' = 180° - b$, $c' = 180° - c$, y llamando

R_a al radio esférico del círculo circunscripto al triángulo correspondiente al lado a, R_b al correspondiente al lado b y R_c al lado c, se obtiene fácilmente

$$\operatorname{ctg} R_a = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\varepsilon \operatorname{sen}(B-\varepsilon)\operatorname{sen}(C-\varepsilon)}{\operatorname{sen}(A-\varepsilon)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}}{2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}},$$

$$\operatorname{ctg} R_b = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\varepsilon \operatorname{sen}(A-\varepsilon)\operatorname{sen}(C-\varepsilon)}{\operatorname{sen}(B-\varepsilon)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}}{2\operatorname{sen}\frac{b}{2}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{c}{2}},$$

$$\operatorname{ctg} R_c = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\varepsilon \operatorname{sen}(A-\varepsilon)\operatorname{sen}(B-\varepsilon)}{\operatorname{sen}(C-\varepsilon)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}}{2\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}.$$

358. ***Radio del círculo inscripto.*** — *a). En función de los lados :* Se tiene (fig. 162) siendo O el centro del círculo, que

$$r = OE = OF = OH,$$

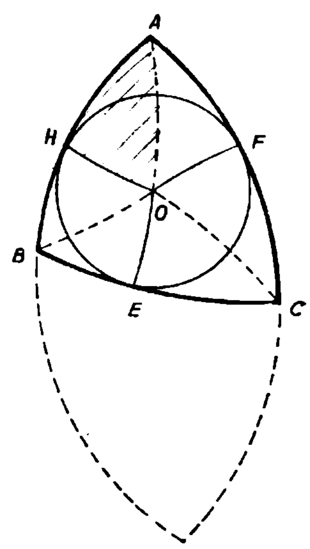


Figura 162

y los arcos de círculo máximo OA, OB y OC dividen respectivamente a los ángulos A, B y C en dos partes iguales.

El triángulo rectángulo OHA, nos da

$$\operatorname{tg} r = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{sen} AH.$$

Pero

$$AH = AF, \quad BH = BE \quad y \quad CE = CF$$

luego

$$AH = (p - a)$$

y entonces

$$\operatorname{tg} r = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{sen}(p-a) \qquad (1)$$

y reemplazando $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ por su valor en función de los lados (nº 308)

$$\operatorname{tg} r = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p}} = \frac{H}{\operatorname{sen} p}.$$

359. *b). En función de los ángulos.* — Se tiene

$$\operatorname{sen}(p-a) = \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}(a+b+c)-a\right] = \operatorname{sen}\left[\frac{b+c}{2}-\frac{a}{2}\right]$$

o bien

$$\operatorname{sen}(p-a) = \operatorname{sen}\frac{b+c}{2}\cos\frac{a}{2} - \operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{b+c}{2}$$

y reemplazando $\operatorname{sen}\frac{b+c}{2}$ y $\cos\frac{b+c}{2}$ por sus valores sacados de las fórmulas de Delambre, se tiene

$$\operatorname{sen}(p-a) = \frac{2\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\operatorname{sen}\varepsilon\operatorname{sen}(A-\varepsilon)\operatorname{sen}(B-\varepsilon)\operatorname{sen}(C-\varepsilon)}}{\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C},$$

o también

$$\operatorname{sen}(p-a) = \frac{\sqrt{\operatorname{sen}\varepsilon\operatorname{sen}(A-\varepsilon)\operatorname{sen}(B-\varepsilon)\operatorname{sen}(C-\varepsilon)}}{2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}},$$

y reemplazando en la (1) del número anterior.

$$\operatorname{tg} r = \frac{\sqrt{\operatorname{sen}\varepsilon\operatorname{sen}(A-\varepsilon)\operatorname{sen}(B-\varepsilon)\operatorname{sen}(C-\varepsilon)}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

360. *Radios de los círculos ex-inscriptos.* — Llamando r_a, r_b y r_c, a los radios de los círculos ex-inscriptos opuestos a los ángulos A, B y C, respectivamente, se obtiene por un camino análogo

$$\operatorname{tg} r_a = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}(p-a)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen}(A-\varepsilon)\operatorname{sen}(B-\varepsilon)\operatorname{sen}(C-\varepsilon)}}{2\cos\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}},$$

$$\operatorname{tg} r_b = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}(p-b)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen}(A-\varepsilon)\operatorname{sen}(B-\varepsilon)\operatorname{sen}(C-\varepsilon)}}{2\cos\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}},$$

$$\operatorname{tg} r_c = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}(p-c)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen}(A-\varepsilon)\operatorname{sen}(B-\varepsilon)\operatorname{sen}(C-\varepsilon)}}{2\cos\frac{C}{2}\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}}.$$

Otras propiedades del triángulo esférico

361. TEOREMA: *El arco de círculo máximo que une los puntos medios de los lados de un triángulo esférico, corta al tercer lado en dos puntos equidistantes del punto medio de este tercer lado.* — Sean M_1, M_2 y M_3 los puntos medios de los tres lados a, b y c y M_2M_3 el arco que corta al lado a en los puntos X e Y. Es claro que X e Y son extremos de un diámetro, porque dos círculos máximos se cortan en puntos diametralmente opuestos (fig. 163). Siendo O el polo del círculo XM_2M_3Y, los arcos de círculo máximo OA, OB y OC caen normalmente sobre el arco XM_2M_3Y, y los ángulos D, E y F valen 90°.

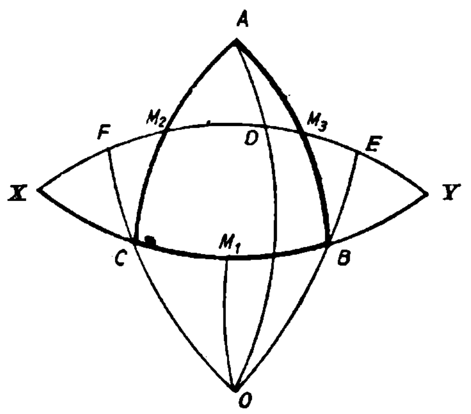


Figura 163

Los triángulos rectángulos ADM_3 y BEM_3 son iguales por tener igual hipotenusa, ya que M_3 es el punto medio del lado c, e igual ángulo en M_3, por opuestos por el vértice. Igualmente los triángulos rectángulos ADM_2 y CFM_2, son iguales entre sí, por tener igual hipotenusa e igual el ángulo en M_2.

Luego:

$$AD = BE = CF.$$

Los triángulos rectángulos XFC e YEB son iguales por tener el ángulo en X igual al ángulo en Y, e iguales los catetos opuestos a estos ángulos, luego:

$$BY = CX$$

y por lo tanto el punto M_1, medio de a, nos da:

$$M_1X = M_1Y = \frac{1}{2} XM_1Y = 90°,$$

lo que demuestra el teorema.

362. Teorema: *El polo del círculo máximo que une los puntos medios de dos lados de un triángulo, es también el polo del círculo circunscripto al triángulo colunar.* — Se llama triángulo colunar, el triángulo que completa el huso, y por lo tanto, cada triángulo tiene tres triángulos colunares.

Según la figura 163 y llamando t a los arcos iguales

$$AD = BE = CF = t,$$

se obtiene:

$$OA = OD + DA = \frac{\pi}{2} + t, \qquad t = OA - \frac{\pi}{2},$$

$$OB = OC = \frac{\pi}{2} - t.$$

Y entonces:

$$OB = OC = \frac{\pi}{2} - \left(OA - \frac{\pi}{2}\right) = \pi - OA = OA_1,$$

siendo A_1 el punto diametralmente opuesto al vértice A.

Es decir, que O equidista de los vértices triángulo A_1BC, que es el triángulo colunar correspondiente al ángulo A. El punto O es el centro del círculo circunscripto al triángulo A_1BC, lo que demuestra el teorema.

363. Podemos ahora encontrar este radio que hemos llamado R_a. Tenemos en primer lugar:

$$R_a = \frac{\pi}{2} - t \qquad \cos R_a = \operatorname{sen} t$$

y también del triángulo AM_2M_3:

$$\frac{\operatorname{sen} M_2M_3}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} AM_3}{\operatorname{sen} M_2} \quad \text{y} \quad \frac{\operatorname{sen} M_2}{\operatorname{sen} AD} = \frac{1}{\operatorname{sen} AM_2},$$

de donde

$$\operatorname{sen} t \operatorname{sen} M_2M_3 = \operatorname{sen} AM_2 \operatorname{sen} AM_3 \operatorname{sen} A.$$

Es también:

$$M_2M_3 = \frac{1}{2} FE = \frac{1}{2} \widehat{COB} = \widehat{COM_1} = \widehat{M_1OB},$$

luego:

$$\cos R_a \operatorname{sen} \widehat{COM_1} = \operatorname{sen} \frac{b}{2} \operatorname{sen} \frac{c}{2} \operatorname{sen} A.$$

Por otra parte, el triángulo rectángulo CM_1O, nos da:

$$\frac{\operatorname{sen} \widehat{COM_1}}{\operatorname{sen} CM_1} = \frac{\operatorname{sen} 90^\circ}{\operatorname{sen} CO}$$

o bien:

$$\operatorname{sen} \widehat{COM_1} \operatorname{sen} R_a = \operatorname{sen} \frac{a}{2}.$$

Y resulta:

$$\operatorname{tg} R_a = \frac{\operatorname{sen} \frac{a}{2}}{\operatorname{sen} \frac{b}{2} \operatorname{sen} \frac{c}{2} \operatorname{sen} A}.$$

Si reemplazamos sen A por su igual $2 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$ y luego expresamos $\operatorname{sen} \frac{A}{2}$ y $\cos \frac{A}{2}$ en función de los lados del triángulo, obtenemos:

$$\operatorname{tg} R_a = \frac{2 \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} \operatorname{sen} \frac{a}{2}}{\sqrt{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a) \operatorname{sen}(p-b) \operatorname{sen}(p-c)}}.$$

Y poniendo como

$$H = \sqrt{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a) \operatorname{sen}(p-b) \operatorname{sen}(p-c)},$$

se obtiene:

$$\operatorname{ctg} R_a = \frac{H}{2 \operatorname{sen}\frac{a}{2} \cos\frac{b}{2} \cos\frac{c}{2}},$$

y en la misma forma:

$$\operatorname{ctg} R_b = \frac{H}{2 \operatorname{sen}\frac{c}{2} \cos\frac{a}{2} \cos\frac{c}{2}},$$

$$\operatorname{ctg} R_c = \frac{H}{2 \operatorname{sen}\frac{c}{2} \cos\frac{a}{2} \cos\frac{b}{2}}.$$

Como habíamos obtenido en el (nº 357).

364. *Representación del exceso esférico.* — Tomando nuevamente la figura 163, puesto que los triángulos XCF e YBE son iguales, como así también M_2CF con M_2AD y M_3DA con M_3EB, se tiene:

$$\widehat{XCF} = \widehat{YBE}, \qquad \widehat{M_2CF} = \widehat{M_2AD}, \qquad \widehat{M_3BE} = \widehat{M_3AD},$$

y también:

$$2XCF = XCA - M_2CF + YBA - M_3BE.$$

Pero es:

$$XCA = \pi - C, \qquad YBA = \pi - B,$$

$$M_2CF + M_3BE = M_2AD + M_3AD = A.$$

Luego:

$$2XCF = \pi - C + \pi - B - A = \pi - 2\varepsilon$$

siendo 2ε el exceso esférico. Quiere decir que el ángulo XCF (o YBE) representa el complemento de la mitad del exceso esférico

$$XCF = YBE = \frac{\pi}{2} - \frac{2\varepsilon}{2}.$$

365. Teorema de Legendre. — En una triangulación de primer orden, los lados oscilan alrededor de los 40 kilómetros, y puesto que el radio de la tierra tiene un valor aproximado a los 6400 Km, resulta que los lados de una triangulación tienen un valor aproximado a $\frac{40}{6400} = \frac{1}{160}$ del radio terrestre. Siendo a el valor del lado del triángulo y R el radio de la tierra supuesta esférica, se tiene aproximadamente:

$$\frac{a}{R} = \frac{1}{160}$$

y expresando a en grados sexagesimales, resulta:

$$a \doteq 0^\circ 21' 30''$$

es decir, que los lados del triángulo son siempre muy pequeños.

Si se imagina un triángulo plano cuyos lados tengan la misma longitud que los del triángulo esférico, los dos triángulos difieren poco entre sí y tendrán aproximadamente la misma superficie.

Si se calculan los tres ángulos del triángulo esférico, la suma de sus ángulos excede muy poco de 180° y se encuentra que el exceso esférico es del orden de los $3''$, ángulo tan pequeño que podemos confundirlo con su tangente.

Bajo estas condiciones, puede establecerse con Legendre que:

Si los lados de un triángulo esférico son pequeños con respecto al radio de la esfera, tal el caso de los triángulos geodésicos de 1^er^ orden, se puede, sin cometer error apreciable, reemplazar el triángulo esférico por un triángulo plano, cuyos lados son respectivamente iguales a los del triángulo esférico y cuyos ángulos sean los del triángulo esférico disminuídos de la tercera parte del exceso esférico correspondiente.

Se ve entonces que es un teorema que señala una aproximación, que al proceder en esta forma no se hacen las transformaciones con exactitud matemática, sino con una aproximación que no influye prácticamente en los resultados.

Tomemos una esfera cuyo radio suponemos igual a la unidad y consideremos sobre ella un triángulo ABC cuyos lados a, b y c expresamos en radianes. Llamemos A_1, B_1 y C_1 los ángulos del triángulo plano cuyos lados son a, b y c. El triángulo esférico nos da:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c},$$

da MacLaurin

y desarrollando ahora los senos y cosenos de los lados en serie y tomando hasta la 4ª potencia, se tiene:

$$\cos A = \frac{1 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{24}a^4 - \left(1 - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{24}b^4\right)\left(1 - \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{24}c^4\right)}{\left(b - \frac{1}{6}b^3\right)\left(c - \frac{1}{6}c^3\right)},$$

efectuando las operaciones y despreciando los términos de grado mayor que el cuarto, resulta:

$$\cos A = \frac{\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) + \frac{1}{24}(a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2c^2)}{bc\left[1 - \frac{1}{6}(b^2 + c^2)\right]}$$

y multiplicando numerador y denominador por $\left[1 + \frac{1}{6}(b^2 + c^2)\right]$ y despreciando siempre los términos superiores al cuarto grado

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{24\,bc}. \quad (1)$$

El triángulo plano de lados a, b y c, nos da:

$$\cos A_1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$$

y también, puesto que

$$\operatorname{sen} A_1 = 2 \operatorname{sen}\frac{A_1}{2}\cos\frac{A_1}{2},$$

reemplazando $\operatorname{sen}\frac{A_1}{2}$ y $\cos\frac{A_1}{2}$ en función de los lados,

$$\operatorname{sen}^2 A_1 = \frac{4}{b^2c^2}p(p-a)(p-b)(p-c)$$

que puede escribirse:

$$\operatorname{sen}^2 A_1 = -\frac{4}{b^2c^2}\,\frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{16}$$

o también:

$$-\frac{bc}{6}\operatorname{sen}^2 A_1 = \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{24\,bc}.$$

Luego la relación (1) se transforma en:

$$\cos A = \cos A_1 - \frac{bc}{6} \operatorname{sen}^2 A_1.$$

Si hacemos

$$A = A_1 + x$$

tenemos

$$\cos A_1 \cos x - \operatorname{sen} A_1 \operatorname{sen} x = \cos A_1 - \frac{bc}{6} \operatorname{sen}^2 A_1.$$

Y puesto que A_1 difiere muy poco de A, x es un ángulo muy pequeño, y se puede poner

$$\cos x = 1, \qquad \operatorname{sen} x = x$$

lo que nos da:

$$x = \frac{1}{6} bc \operatorname{sen} A_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A_1.$$

Pero $\frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A_1$ es el área del triángulo $A_1 B_1 C_1$ y como ésta difiere muy poco del área del triángulo ABC se puede escribir

$$x = \frac{1}{3} S.$$

Puesto que la superficie del triángulo esférico ABC (nº 327) siendo el radio igual a uno, es

$$S = (2\varepsilon)'' \operatorname{sen} 1''.$$

Es decir, que

$$x = \frac{1}{3} 2\varepsilon'' \operatorname{sen} 1''.$$

Y expresado en segundos sexagesimales

$$x = \frac{1}{3} (2\varepsilon'').$$

Luego es

$$A_1 = A - \frac{1}{3} (2\varepsilon''),$$

y en la misma forma se obtiene

$$B_1 = B - \frac{1}{3}(2\varepsilon'')$$

$$C_1 = C - \frac{1}{3}(2\varepsilon''),$$

lo que demuestra el teorema.

CAPÍTULO VIII

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. APLICACIONES

366. *Resolver un triágulo esférico dados dos lados b y c, y la mediana m_a.* — De la fórmula del nº 354, se saca

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2}}{\cos m_a}.$$

Calculado el lado a estamos en el 1er caso de resolución general de triángulos (nos 331 y 332).

367. *Resolver un triángulo esférico conociendo a, b y m_a.*— Primero se resuelve el triángulo ACM, del cual se conocen los tres lados $\frac{a}{2}$, b y m_a. Se pueden así calcular los ángulos C, MAC y AMC (fig. 164) y por lo tanto se tiene AMB = (180° − AMC). Ahora, en el triángulo AMB se conocen dos lados $\frac{a}{2}$ y m_a y el ángulo comprendido AMB, y podemos resolverlo y calcular B, c y por lo tanto A = CAM + MAB.

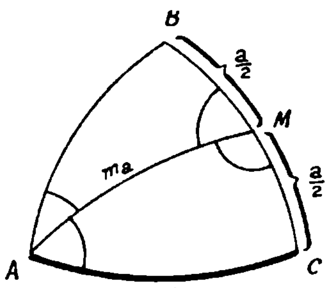


Figura 164

368. *Resolver un triángulo esférico conociendo un ángulo A y los segmentos l_1 y l_2 en que la bisectriz del ángulo B divide al lado b.* — Según la figura 165:

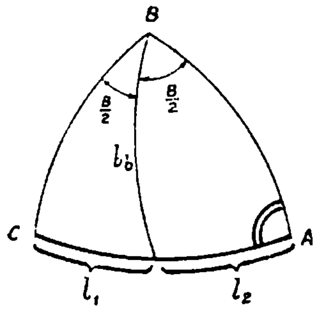


Figura 165

$$\frac{\operatorname{sen} l_1}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}} = \frac{\operatorname{sen} b_a}{\operatorname{sen} C},$$

$$\frac{\operatorname{sen} l_2}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}} = \frac{\operatorname{sen} b_b}{\operatorname{sen} A}.$$

De donde

$$\frac{\operatorname{sen} l_1}{\operatorname{sen} l_2} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C}$$

o bien

$$\operatorname{sen} C = \frac{\operatorname{sen} l_2}{\operatorname{sen} l_1} \operatorname{sen} A.$$

Calculado C, se está en el caso 4° del n° 341, pues se conoce un lado $b = l_1 + l_2$ y los ángulos adyacentes A y C.

369. *Problema : Resolver un triángulo esférico, conociendo un ángulo* A, *uno de los lados de este ángulo* b *y la suma de los otros dos lados* $m = (a + c)$. — Tenemos :

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A,$$

y puesto que $a = m - c$,

$$\cos a = \cos m \cos c + \operatorname{sen} m \operatorname{sen} c,$$

de donde

$$\operatorname{tg} c = \frac{\cos m - \cos b}{\operatorname{sen} m \left(\dfrac{\operatorname{sen} b \cos A}{\operatorname{sen} m} - 1\right)}.$$

Introduciendo un ángulo auxiliar de cálculo φ dado por :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{sen} b \cos A}{\operatorname{sen} m},$$

se tiene :

$$\operatorname{tg} c = \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen} \dfrac{m+b}{2} \operatorname{sen} \dfrac{m-b}{2} \cos \varphi}{\operatorname{sen} m \operatorname{sen} (45° - \varphi)}.$$

370. *Problema : Resolver un triángulo esférico, conociendo un ángulo* A, *uno de los lados de este ángulo* b *y la diferencia de los otros dos lados* $(a - c) = l$. — Tenemos, puesto que $a = l + c$,

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A,$$
$$\cos a = \cos l \cos c - \operatorname{sen} l \operatorname{sen} c,$$

o bien :

$$\cos l \cos c - \operatorname{sen} l \operatorname{sen} c = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A,$$

y también

$$\cos c (\cos l - \cos b) = \operatorname{sen} c (\operatorname{sen} l + \operatorname{sen} b \cos A),$$

y entonces

$$\operatorname{tg} c = \frac{\cos l - \cos b}{\operatorname{sen} l + \operatorname{sen} b \cos A} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{l+b}{2} \operatorname{sen} \frac{b-l}{2}}{\operatorname{sen} l \left(1 + \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} l} \cos A\right)}.$$

Y haciendo

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} l} \cos A,$$

donde φ es un ángulo auxiliar de cálculo, se obtiene:

$$\operatorname{tg} c = \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen} \frac{b+l}{2} \operatorname{sen} \frac{b-l}{2} \cos \varphi}{\operatorname{sen} l \cos (45^\circ - \varphi)}.$$

Ejercicio:

$A = 44^\circ 44' 50''$ $b = 68^\circ 17' 50''$ $l = -32^\circ 43' 10''$	$\operatorname{sen} b = 9.968069$ $\cos A = 9.851393$
$b + l = 35^\circ 34' 40''$ $b - l = 101^\circ 01' 00''$	9.819462 $\operatorname{sen} l = 9.732816\, n$
	$\operatorname{tg} \varphi = 0.086646\, n$
$\frac{b+l}{2} = 17^\circ 47' 20''$ $\frac{b-l}{2} = 50^\circ 30' 30''$	$2 = 0.301030$
	$\sqrt{2} = 0.150515$ $\operatorname{sen} \frac{b+l}{2} = 9.485026$
$\varphi = -50^\circ 40' 40''.6$ $45^\circ - \varphi = 95^\circ 40' 40''.6$	$\operatorname{sen} \frac{b-l}{2} = 9.887458$
$c = 75^\circ 47' 47''$ $a = 43^\circ 04' 36''$	$\cos \varphi = 9.801868$
	9.324859
	$\operatorname{sen} l = 9.732816\, n$ $\cos (45^\circ - \varphi) = 8.995366\, n$
	8.728246
	$\operatorname{tg} c = 0.596685$

371. *Problema : Dado un triángulo esférico, hallar el arco de círculo máximo que une los polos de los círculos circunscripto e inscripto.*—Sea O el polo del círculo circunscripto, y O_1 el polo del círculo circunscripto en el triángulo ABC (fig. 166). Llamemos al arco de círculo máximo

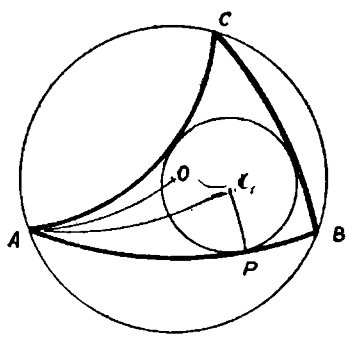


Figura 166

$$OO_1 = x.$$

Se tiene, según la figura 102,

$$\cos x = \cos AO \cos AO_1 + \\ + \operatorname{sen} AO \operatorname{sen} AO_1 \cos OAO_1.$$

Siendo $2P = A + B + C$, se tiene

$$OAB = P - C,$$

y puesto que

$$O_1AB = \frac{A}{2},$$

resulta:

$$OAO_1 = P - C - \frac{A}{2} = \frac{B-C}{2}.$$

Por otra parte, trazando desde O_1 el arco de círculo máximo O_1P normal al lado AB, que es $O_1P = r$, el triángulo rectángulo O_1AP, nos da, siendo $AP = (p-a)$ (nº 358)

$$\cos O_1A = \cos r \cos (p-a)$$

y

$$\operatorname{sen} O_1A = \frac{\operatorname{sen} r}{\operatorname{sen} \frac{A}{2}}.$$

Luego, siendo $OA = R$:

$$\cos x = \cos R \cos r \cos (p-a) + \frac{\operatorname{sen} r}{\operatorname{sen} \frac{A}{2}} \operatorname{sen} R \cos \frac{B-C}{2},$$

o bien:

$$\frac{\cos x}{\cos R \operatorname{sen} r} = \operatorname{ctg} r \cos (p-a) + \operatorname{tg} R \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A}{2}}.$$

Y puesto que, según las fórmulas de Delambre:

$$\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{b+c}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a}{2}}.$$

Y según nº 358

$$\operatorname{tg} r=\frac{H}{\operatorname{sen} p},$$

y según nº 356

$$\operatorname{tg} R=\frac{2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{H}.$$

Se obtiene

$$\frac{\cos x}{\cos R\operatorname{sen} r}=\frac{\operatorname{sen} p\cos(p-a)+2\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c}{2}}{H}.$$

Pero

$$2\operatorname{sen} p\cos(p-a)=\operatorname{sen} a+\operatorname{sen}(b+c)=\operatorname{sen} a+2\operatorname{sen}\frac{b+c}{2}\cos\frac{b+c}{2}$$

y

$$4\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c}{2}=2\operatorname{sen}\frac{b+c}{2}\left(\cos\frac{b-c}{2}-\cos\frac{b+c}{2}\right).$$

Y sumando:

$$2\operatorname{sen} p\cos(p-a)+4\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c}{2}=\operatorname{sen} a+2\operatorname{sen}\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2}$$

$$=\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} b+\operatorname{sen} c,$$

luego:

$$\frac{\cos r}{\cos R\operatorname{sen} r}=\frac{\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} b+\operatorname{sen} c}{2H}.$$

Y podemos poner:

$$\left(\frac{\cos x}{\cos R\operatorname{sen} r}\right)^2-1=$$

$$=\frac{1+\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b+\operatorname{sen} a\operatorname{sen} c+\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c-\cos a\cos b\cos c}{2H^2}$$

o también

$$\left(\frac{\cos x}{\cos R \operatorname{sen} r}\right)^2 - 1 = (\operatorname{ctg} r + \operatorname{tg} R)^2.$$

Y entonces

$$\cos^2 x = \cos^2 (R - r) + \cos^2 R \operatorname{sen}^2 r$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 (R - r) - \cos^2 R \operatorname{sen}^2 r.$$

Siendo r_a el radio del círculo ex-inscripto al ángulo A y O_a, su polo, el arco de círculo máximo OO_a, está dado por x_a, tal que

$$\operatorname{sen}^2 x_a = \operatorname{sen}^2 (R + r) - \cos^2 R \operatorname{sen}^2 r_a,$$

y análogamente para x_b y x_c.

372. *Volumen del paralelepípedo oblicuángulo.* — Sea (fig. 167), un paralelepípedo y llamemos a, b, c las tres aristas que concurren a un vértice y sean α, β, γ, los ángulos que ellas forman entre sí. Llamando S a la superficie de la base y H a la altura, se tiene que el volumen V está dado por:

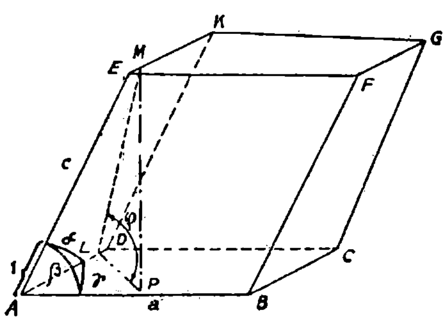


Figura 167

$$V = SH.$$

El área de la base S, tiene por expresión

$$S = a\, b \operatorname{sen} \gamma.$$

Y la altura H = MP se puede expresar

$$H = MP = ML \operatorname{sen} \varphi = c \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \varphi$$

que se obtiene bajando desde un punto cualquiera de la arista EK la normal MP al plano de la base. Trazando desde P la perpendicular PL a la arista AD, por el teorema de las tres perpendiculares, resulta ML normal a AD y el ángulo MLP = φ, mide el diedro formado por la base y la cara ADKE.

Luego se tiene:

$$V = abc \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \varphi$$

o bien

$$V = 2\, abc \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Suponiendo una esfera de radio igual a la unidad y centro en A, se determina un triángulo esférico en su intersección con el triedro de vértice A, cuyos lados son α, β y γ, y uno de cuyos ángulos es el ángulo φ. Llamando $2p = (\alpha + \beta + \gamma)$ al perímetro del triángulo esférico, se tiene

$$\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-\alpha)\operatorname{sen}(p-\gamma)}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma}}, \qquad \cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-\beta)}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma}},$$

luego:

$$V = 2\,abc\sqrt{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-\alpha)\operatorname{sen}(p-\beta)\operatorname{sen}(p-\gamma)}$$

que es la expresión del volumen.

373. *Reducción de un ángulo al horizonte.* — Si se mide un ángulo AOB y lo proyectamos sobre un plano horizontal, el ángulo A'OB' es el ángulo OAOB reducido al horizonte (fig. 168).

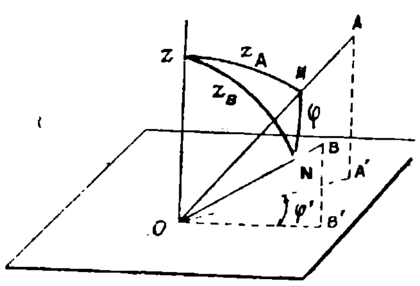


Figura 168

Trazando en el punto O la vertical OZ, los ángulos ZOA y ZOB son las distancias zenitales de las visuales OA y OB y los ángulos AOA' y BOB' que esas visuales forman con el horizonte, son las alturas de esas visuales.

Supongamos conocido el ángulo AOB $= \varphi$ y las distancias zenitales de las visuales OA y OB, que llamaremos respectivamente z_A y z_B.

Si con centro en O y radio igual a la unidad describimos una esfera, el triedro OABZ determinará un triángulo esférico ZMN, cuyos tres lados son respectivamente:

$$MN = \varphi, \qquad ZM = z_A, \qquad ZN = z_B.$$

Podemos calcular el ángulo en Z, que es igual al ángulo $A'OB' = \varphi'$, para lo cual tenemos:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi'}{2} = \operatorname{tg} A'OB' = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-z_a)\operatorname{sen}(p-z_B)}{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-\varphi)}}$$

14/306) donde $2p = z_A + z_B + \varphi$.

Queda así resuelto el problema.

374. *Problema : Suponiendo la tierra esférica y dadas las coordenadas geográficas de dos puntos de su superficie, determinar en función de éstas, la distancia que las separa, medida sobre el arco de círculo máximo que los une.* — Sea EE′ (fig. 169) el ecuador, P_N el polo norte, A y B dos puntos de la superficie terrestre, $P_N E P_S E'$ el meridiano de Greenwich, meridiano a partir del cual se miden las longitudes, que las consideramos positivas de 0° a 180°, medidas hacia el Oeste, y de 0° a 180°, medidas hacia el Este. Las latitudes las consideramos positivas desde el ecuador hacia el polo Norte y negativas desde el ecuador hacia el polo Sur.

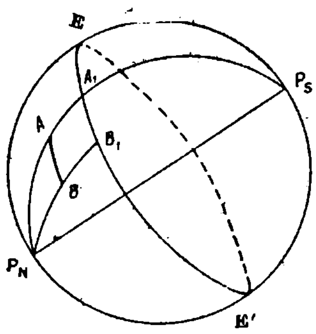


Figura 169

Llamemos λ_A y φ_A, la longitud y latitud del punto A, y λ_B, φ_B la longitnd y latitud del punto B. El ángulo AP_NB vale

$$AP_NB = \lambda_B - \lambda_A$$

y además

$$P_NA = 90^\circ - \varphi_A, \qquad P_NB = 90^\circ - \varphi_B.$$

Luego, llamando x a la distancia AB, el triángulo AP_NB, nos da:

$$\cos x = \operatorname{sen} \varphi_A \operatorname{sen} \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos (\lambda_B - \lambda_A).$$

e introduciendo un ángulo auxiliar de cálculo φ dado por:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{ctg} \varphi_A \cos (\lambda_B - \lambda_A),$$

se tiene:

$$\cos x = \frac{\operatorname{sen} \varphi_A \operatorname{sen} (\varphi_B + \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Conociendo el valor de x en segundos de arco, es fácil obtener x en kilómetros. Admitiendo el cuadrante de la Tierra igual a 10.000 Km, se obtiene:

$$x_{km} = \frac{x''.10.000}{90 \times 60 \times 60}.$$

Ejemplo : Hallar la distancia entre el Observatorio Astronómico de La Plata y el Observatorio de Córdoba, suponiendo la Tierra esférica y con las siguientes coordenadas geográficas.

La Plata: $\varphi_{L.P} = -34^\circ 54' 30''$ $\lambda_{L.P} = 3^h 51^m 43^s.7$

Córdoba: $\varphi_C = -31^\circ 25' 15''$ $\lambda_C = 4^h 16^m 47^s.2.$

Se tiene:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{ctg}\varphi_{L.P}\cos(\lambda_C - \lambda_{L.P}),$$

$$\cos x = \frac{\operatorname{sen}\varphi_{L.P}\operatorname{sen}(\varphi_C + \varphi)}{\cos\varphi}.$$

$$\lambda_C - \lambda_{L.P} = 25^m\,03^s.5 = 6°15'52''$$

$$\varphi = -\ 54°55'50''$$

$$\varphi_C + \varphi = -\ 86°21'05''$$

$$x = 6°17'40'' = 22660$$

$$x_{km} = \frac{22660 \times 10000}{90 \times 60 \times 60} = 699.4\ \text{Km}$$

$$\log \operatorname{ctg}\varphi_{L.P} = 0.156253\,n$$

$$\log\cos(\lambda_C - \lambda_{L.P}) = \underline{9.997399}$$

$$\log \operatorname{tg}\varphi = 0.153652\,n$$

$$\log \operatorname{sen}\varphi_{L.P} = 9.757597\,n$$

$$\operatorname{sen}(\varphi_C + \varphi) = \underline{9.999119\,n}$$

$$9.756716$$

$$\log\cos\varphi = \underline{9.759342}$$

$$\log\cos x = 9.977374$$

Ejercicios propuestos

1. Calcular las líneas trigonométricas de los arcos

$$\frac{\pi}{8}, \quad \frac{\pi}{16}, \quad \frac{\pi}{15}, \quad \frac{2\pi}{15}, \quad \frac{4\pi}{15}, \quad \frac{7\pi}{15}.$$

2. Calcular los lados de los polígonos regulares de 3, 5, 6, 10, 15 y 20 lados.

3. Calcular las funciones goniométricas de los arcos:

$$\frac{\pi}{2^2}, \quad \frac{\pi}{2^3}, \quad \frac{\pi}{2^3 \times 3}, \quad \frac{\pi}{2 \times 3 \times 5}, \quad \frac{\pi}{5 \times 2^3}.$$

4. Calcular $\operatorname{sen} 3\alpha$ en función de $\operatorname{sen} \alpha$ y verificar para $\alpha = 30^\circ$.

5. Calcular $\cos 3\alpha$ en función de $\cos \alpha$ y verificar para $\alpha = 30^\circ$.

6. Siendo $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, calcular $\operatorname{sen} \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{sen} 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ y $\operatorname{tg} 2\alpha$.

7. Sabiendo que $\operatorname{tg} 2\alpha = \sqrt{3}$, calcular $\operatorname{tg} 3\alpha$.

8. Siendo $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, calcular sen, cos y tg de 15°, $7^\circ 30'$ y $3^\circ 45'$.

9. Siendo $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, calcular sen, cos y tg de 15°, $7^\circ 30'$ y $3^\circ 45'$.

10. Calcular $\cos 4\alpha$ y $\cos \frac{\alpha}{4}$ en función de $\cos \alpha$.

Verificar las siguientes igualdades:

11. $$\operatorname{sen} 105^\circ + \cos 105^\circ = \cos 45^\circ.$$

12. $$\cos 9^\circ = \frac{1}{8}\left(\sqrt{10} + \sqrt{2} + 2\sqrt{5 - \sqrt{5}}\right).$$

13. $$\cos 27^\circ = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5 + \sqrt{5}} + \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

14. Siendo $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, calcular $\operatorname{tg} 15^\circ$ y $\operatorname{tg} 7^\circ 30'$.

15. Calcular $\operatorname{tg} 2\alpha$ en función de $\operatorname{sen} 3\alpha$.

16. Verificar que $\operatorname{tg} 9^\circ = 1 + \sqrt{5} - \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$.

Identidades. — Verificar las siguientes fórmulas :

17. $$\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) - \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = 2 \operatorname{tg} 2\alpha.$$

18. $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha.$$

19. $$\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen}\alpha}{1 + \operatorname{sen}\alpha}}.$$

20. $$\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \frac{2 \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha}.$$

21. $$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}.$$

22. $$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{\operatorname{sen} 2\alpha}.$$

23. $$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2 \operatorname{ctg}\alpha.$$

24. $$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = 2\,\frac{3 + \cos 4\alpha}{1 - \cos 4\alpha}.$$

25. $$\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1 + \operatorname{sen}\alpha}.$$

26. $$\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{ctg}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = 2 \sec\alpha.$$

27. $$\operatorname{sen} 5\alpha \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}^2 3\alpha - \operatorname{sen}^2 2\alpha.$$

28. $$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

29. $$\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta.$$

30. $$\operatorname{sen} 7\alpha \operatorname{sen} 3\alpha = \operatorname{sen}^2 5\alpha - \operatorname{sen}^2 2\alpha.$$

31. $$\operatorname{sen} 3\alpha = 4 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right).$$

32. $$\operatorname{sen} 5\alpha = 5 \operatorname{sen}\alpha - 20 \operatorname{sen}^3\alpha + 16 \operatorname{sen}^5\alpha.$$

33. $$\cos 5\alpha = 16 \cos^5\alpha - 20 \cos^3\alpha + 5 \cos\alpha.$$

34. $$\sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha = \sec^2\alpha \operatorname{cosec}^2\alpha.$$

35. $$\operatorname{sen}^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha.$$

36. $$\operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha) + \operatorname{ctg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) = 0.$$

37. $$\frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = (1 + \operatorname{tg} \alpha) \cos^2 \alpha.$$

38. $$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha.$$

39. $$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{cosec}^2 \alpha} = \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

40. $$(1 + \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)^2 = 2 (1 + \operatorname{sen} \alpha)(1 + \cos \alpha).$$

41. $$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} + \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta} = 1.$$

42. Siendo $(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\pi}{2}$, probar que se verifica

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \gamma + 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma = 1.$$

43. Siendo $\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x = m$, y $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x = n$, probar que se verifica

$$m^2 - n^2 = 4 \sqrt{m n}.$$

44. Siendo $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, probar que

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}^2 \alpha & \operatorname{ctg} \alpha & 1 \\ \operatorname{sen}^2 \beta & \operatorname{ctg} \beta & 1 \\ \operatorname{sen}^2 \gamma & \operatorname{ctg} \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Estudio de funciones (máximos y mínimos):

45. Hallar el máximo de

$$y = \operatorname{sen} x + \cos x.$$

46. Hallar el máximo de

$$y = \operatorname{sen} x \cos x.$$

47. Hallar el valor de x comprendido entre 0° y 90° que hace mínima la expresión

$$y = \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x.$$

48. Hallar el valor de x que hace máxima y mínima la expresión

$$y = \cos x + \cos 2x.$$

49. Hallar el valor de x que hace máxima y mínima la expresión

$$y = 3 \operatorname{sen} x + 4 \cos x.$$

50. Hallar los valores de x que hacen máxima y mínima la expresión:

$$y = a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} x.$$

donde a y b son positivos.

51. Hallar los valores de x que hacen máxima y mínima la expresión

$$y = 2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x.$$

52. Hallar el máximo y el mínimo de la expresión

$$y = a \operatorname{sen} x + b \cos x.$$

53. Hallar el máximo y mínimo de la expresión:

$$y = \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg}^3 x}, \text{ cuando } x \text{ varía entre } 0° \text{ y } 90°.$$

Variaciones de las funciones. — Estudiar las variaciones de las siguientes funciones y representarlas gráficamente:

54. $$y = \operatorname{sen} x + \cos x.$$

55. $$y = \operatorname{sen} x - \cos x.$$

56. $$y = \operatorname{tg} x + \sec x.$$

57. $$y = \operatorname{sen} (\alpha + x) \operatorname{sen} (\alpha - x).$$

58. $$y = \frac{\cos 3x}{1 + \cos 2x}.$$

59. $$y = \frac{\cos x + \operatorname{sen} x - 1}{\cos x - \operatorname{sen} x + 2}.$$

Límites :

60. Hallar el límite de $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ para $x = 0$

61. » $\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x}$ » $x = 0$

62. » $\dfrac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos x}$ » $x = 0$

63. » $\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{x}{2} + \cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x+\cos x}$ » $x = \pi$

64. » $\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{ctg} x}$ » $x = \dfrac{\pi}{4}$

65. » $\dfrac{\cos 2x}{\cos x - \cos\dfrac{\pi}{4}}$ » $x = \dfrac{\pi}{4}$

66. » $\dfrac{1-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$ » $x = 0.$

67. » $\dfrac{\operatorname{sen} m x}{\operatorname{sen} n x}$ » $x = 0.$

68. » $\dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \alpha}$ » $x = \alpha.$

69. » $\dfrac{\cos 2x}{1-\sqrt{2}\operatorname{sen} x}$ » $x = \dfrac{\pi}{4}.$

Hacer calculables por logaritmos las expresiones siguientes :

70. $y = 1 + \operatorname{sen} x + \cos x.$

71. $y = 1 + \cos x + \cos 2x.$

72. $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y).$

73. $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 9x.$

74. $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x + r) + \operatorname{sen}(x + 2r)$

y aplicar para $\begin{cases} x = 18°20'15'' \\ r = 5°30'45''. \end{cases}$

75. $y = \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x.$

76. $y = \cos 2x + \cos 4x.$

77. $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{3} - \operatorname{tg}\frac{x}{6}.$

78. $y = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha + \beta + \gamma).$

79. $y = \cos(\alpha + \beta + \gamma) + \cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\alpha + \gamma - \beta) + \cos(\beta + \gamma - \alpha).$

80. $y = \operatorname{sen}(\alpha + \beta - \gamma) + \operatorname{sen}(\alpha + \gamma - \beta) + \operatorname{sen}(\beta + \gamma - \alpha) - \operatorname{sen}(\alpha + \beta + \gamma).$

81. $y = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) + \operatorname{tg}(\beta - \gamma) + \operatorname{tg}(\gamma - \alpha).$

82. $y = \operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) - (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma).$

83. $y = \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta - \operatorname{sen}^2(\alpha + \beta).$

84. $y = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma + \operatorname{sen}\delta$

siendo $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°.$

85. $y = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta - 2\cos\alpha - 2\cos\beta.$

86. $y = \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta + m\cos\alpha\cos\beta.$

Resolver las siguientes ecuaciones goniométricas :

87. $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 7x.$

88. $6\cos x = \operatorname{tg} x.$

89. $6\operatorname{sen} x = 5\cos^2 x.$

90. $\operatorname{sen} 2x = \cos 3x.$

91. $\operatorname{sen} 3x = 8\operatorname{sen}^3 x.$

92. $\operatorname{tg} 2x = 3\operatorname{tg} x.$

93. $\operatorname{sen} x + \cos x = \sec x.$

94. $\cos 2x = \cos x + 1.$

95. $\cos 3x = \operatorname{sen} 5x.$

96. $\operatorname{tg} 2x = 7 \operatorname{tg} x.$

97. $\cos x = a \operatorname{tg} x.$

98. $\cos 3x = m \cos^2 x.$

99. $\operatorname{sen} 3 x = m \operatorname{sen} x.$

100. $\operatorname{sen} x + 2 \cos x = \sec x.$

101. $2 \operatorname{tg} x = 7 \operatorname{sen} x.$

102. $\operatorname{sen} x + \cos x = 1.$

103. $\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

104. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3.$

105. $\operatorname{sen} x + \cos x = 0.$

106. $\operatorname{sen} x - \cos x = 0.$

107. $1 - \operatorname{sen} x = \cos 2x.$

108. $\operatorname{sen} x - \cos x = 0.7.$

109. $\operatorname{sen} x + \cos x + 2 \operatorname{sen} x \cos x = 2.$

110. $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = \cos^2 x + \cos x.$

111. $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x = \sec x - 1.$

112. $\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} x = 0.$

113. $\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x = \cos x.$

114. $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} 2x.$

115. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x = 0.$

116. $\operatorname{sen} x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{3 + 10\sqrt{3}}{6}.$

117. $\operatorname{sen} x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \sec x + \operatorname{cosec} x = a.$

118. $\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x + m \cos x = n.$

119. $\frac{a}{\operatorname{sen} x} + \frac{a}{\cos x} = b.$

120. $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = a.$

121. $\operatorname{sen}^2 2x - \operatorname{sen}^2 x = a.$

122. $$\cos 2x = m \cos x.$$

123. $$\cos 2x + m \operatorname{sen} x = n.$$

124. $$\operatorname{sen} 3x = m \operatorname{sen}^2 x.$$

125. $$\operatorname{tg} x = (2 - \sqrt{3}) \operatorname{tg} \frac{x}{3}.$$

126. $$\cos x = a \operatorname{tg} x.$$

127. $$\sqrt{3} \operatorname{cosec} x^2 = 4 \operatorname{ctg} x.$$

128. $$\cos 3x + \operatorname{sen} 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

129. $$\operatorname{tg} \frac{x + a}{x - a} = m.$$

130. $$5 \operatorname{sen} x = 12 \cos^2 x.$$

131. $$\operatorname{tg}^2 x + \cos^2 x = m.$$

132. $$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} (\alpha + x) + \operatorname{sen} (\alpha + 2x) = 0.$$

133. $$\cos \alpha + \cos (\alpha + x) + \cos (\alpha + 2x) = 0.$$

134. $$\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{5}.$$

135. $$\operatorname{tg} (x + \alpha) + \operatorname{tg} (x - \alpha) = 2 \operatorname{ctg} x.$$

136. $$\operatorname{sen} x + \cos x = \operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x.$$

137. $$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x.$$

138. $$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0.$$

139. $$\operatorname{sen}^2 2x - \operatorname{sen}^2 x = a.$$

140. $$\operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen} 3x + 2 \operatorname{sen}^2 x = 1.$$

141. $$\operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x = a.$$

142. $$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} (\alpha - x) = a.$$

143. $$m \operatorname{sen} (\alpha - x) = n \operatorname{sen} (\beta - x).$$

144. $$\operatorname{sen} (\alpha + x) = \cos (\beta + x).$$

Ecuaciones con más de una incógnita.

145. $$\left\{ \begin{aligned} &\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1 \\ &\cos^2 x - \cos^2 y = \frac{1}{2}. \end{aligned} \right.$$

146. $$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \sqrt{2} \\ \cos^2 x + \cos^2 y = 1. \end{cases}$$

147. $$\begin{cases} \sqrt{2} \operatorname{sen} x = \sqrt{3} \operatorname{sen} y \\ \sqrt{2} \cos x = \operatorname{sen} y. \end{cases}$$

148. $$\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = \sqrt{3} \\ \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = 3. \end{cases}$$

149. $$\begin{cases} \operatorname{sen} x = \cos 2y \\ \operatorname{sen} 2y = \cos y. \end{cases}$$

150. $$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a \\ \operatorname{tg} (x + y) = b. \end{cases}$$

151. $$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a \\ \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} + \operatorname{tg} \dfrac{y}{2} = b. \end{cases}$$

152. $$\begin{cases} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = a \\ \cos x \cos y = b. \end{cases}$$

153. $$\begin{cases} \cos x + \cos y = a \\ \cos 2x + \cos 2y = b. \end{cases}$$

154. $$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = a \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = b. \end{cases}$$

155. $$\begin{cases} x + y = 30^\circ \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = 3. \end{cases}$$

156. $$\begin{cases} x + y = 30^\circ \\ \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = 1.5 \end{cases}$$

157. $$\begin{cases} \operatorname{sen} (x + y) = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

158. $$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = a \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = b. \end{cases}$$

159. $$\begin{cases} \cos x + \cos y = a \\ \cos 2x + \cos 2y = b. \end{cases}$$

160. $$\begin{cases} 9 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 4 \\ 2 \operatorname{ctg} x + 4 \operatorname{ctg} y = 1. \end{cases}$$

161. $$\begin{cases} x + y = \alpha \\ \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = a \cos^2 x. \end{cases}$$

162. $$\frac{\operatorname{sen} x}{a} = \frac{\operatorname{sen} y}{b} = \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{c}.$$

163. $$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = a \\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} y = b. \end{cases}$$

164. $$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = a \\ \operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^3 y = b. \end{cases}$$

165. $$\begin{cases} \operatorname{sen} x = m \cos y \\ \operatorname{tg}^2 x = m \operatorname{tg} y. \end{cases}$$

166. $$\frac{\operatorname{tg} x}{a} = \frac{\operatorname{tg} y}{b} = \frac{\operatorname{tg}(x+y)}{c}$$

167. $$\begin{cases} a \operatorname{sen}(x+y) - b \operatorname{sen}(x-y) = 2m \cos x \\ a \operatorname{sen}(x+y) + b \operatorname{sen}(x-y) = 2n \cos y. \end{cases}$$

168. $$\begin{cases} \cos(2x+y) = \operatorname{sen}(x-2y) \\ \cos(x+2y) = \operatorname{sen}(2x-y). \end{cases}$$

169. $$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 z = 1 \\ \cos^2 x + \cos^2 y - \cos^2 z = 1 \\ \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{tg}^2 z = 1. \end{cases}$$

Resolución de triángulos rectángulos planos. — Resolver un triángulo rectángulo conociendo:

170. $$\begin{cases} B = 42^\circ 30' 15'' \\ a = 250.35 \text{ m.} \end{cases}$$

171. $\begin{cases} a = 985.32 \text{ m} \\ b = 643.25 \text{ m.} \end{cases}$

172. $\begin{cases} b = 947.30 \text{ m} \\ c = 14.70 \text{ m.} \end{cases}$

173. $c = 845.20 \text{ m} \quad \dfrac{b}{a} = 0.8.$

174. $a = 854.30 \text{ m} \quad h_a = 320.15 \text{ m.}$

175. $a = 645.20 \text{ m} \quad (b - c) = 245.30 \text{ m.}$

176. $S = 8747 \text{ m}^2 \quad B = 47°54'15''.$

Demostrar que entre los elementos de un triángulo rectángulo se verifica:

177. $$\cos(B - C) = \frac{2\,bc}{a^2}.$$

178. $$\operatorname{tg}(B - 45°) = \frac{b - c}{b + c}.$$

179. $$\operatorname{sen} 3\,B = \frac{3\,bc^2 - b^3}{a^3}.$$

180. $$\operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} = \frac{a - c}{a + c}.$$

181. Demostrar que si en un triángulo se verifica que

$$\frac{\operatorname{sen} B + \cos C}{\cos B + \operatorname{sen} C} = \operatorname{tg} B,$$

el triángulo es rectángulo.

182. La bisectriz del ángulo recto de un triángulo rectángulo divide al lado opuesto en dos segmentos m y n, conocidos. Resolver el triángulo.

183. Resolver un triángulo rectángulo, conociendo R y p.

184. Resolver un triángulo rectángulo, conociendo B y la diferencia $(b - c) = d$.

185. Resolver un triángulo rectángulo, conociendo R y r.

186. Resolver un triángulo rectángulo, conociendo $2p$ y la altura correspondiente a la hipotenusa h_a.

187. Resolver un triángulo rectángulo, conociendo a y la bisectriz b_b, correspondiente al ángulo B.

188. Resolver un triángulo rectángulo, conociendo el cateto b y la diferencia $(a - c) = d$.

Resolución de triángulos planos cualesquiera. — Resolver un triángulo, conociendo:

189.	$A = 36°20'15''$	$B = 74°24'13''$	$a = 1234.23$ m.
190.	$A = 57°20'15''$	$B = 45°20'12''$	$c = 127.30$ m.
191.	$a = 845.22$ m	$b = 632.15$ m	$C = 70°15'13''$.
192.	$a = 744.20$ m	$b = 657.15$ m	$c = 1004.05$ m.
193.	$a = 1037.25$ m	$b = 1132.15$ m	$A = 67°20'12''$.
194.	$a = 537.10$ m	$b = 385.40$	$A = 69°20'15''$.
195.	$a = 804.15$ m	$b = 357.20$	$A = 124°15'20''$.

Mostrar que en todo triángulo se verifica que:

196. $$2\,S = \frac{a^2 - b^2}{\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} A}.$$

197. $$1 - \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{c}{p}.$$

198. $$a \cos A + b \cos B = c \cos (A - B).$$

199. $$a^2 + b^2 + c^2 = 2\,(ab \cos C + bc \cos A + ca \cos B).$$

200. $$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = \frac{c^2}{ab \operatorname{sen} C}.$$

201. $$\frac{\operatorname{sen}(A + B)}{\operatorname{sen}(A - B)} = \frac{c^2}{a^2 - b^2}.$$

202. $$\operatorname{tg} B = \frac{b \operatorname{sen} C}{a - b \cos C}.$$

203. $$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} C = 2 \operatorname{sen} B.$$

204. $$(a + b) \cos C + (b + c) \cos A + (c + a) \cos B = 2p.$$

205. $$a \cos \frac{B - C}{2} = (b + c) \operatorname{sen} \frac{A}{2}.$$

206. $$(b^2 - c^2) \operatorname{ctg} A + (c^2 - a^2) \operatorname{ctg} B + (a^2 - b^2) \operatorname{ctg} C = 0.$$

207. $$(a + b + c)\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\right) = 2c \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

208. $$\operatorname{sen}\frac{B - C}{2} = \frac{b - c}{2} \cos \frac{A}{2}.$$

209. $$a(b\cos C - c\cos B) = b^2 - c^2.$$

210. $$a\,\text{sen}\left(\frac{A}{2} + B\right) = (b + c)\,\text{sen}\,\frac{A}{2}.$$

211. $$\frac{\cos A}{b} - \frac{\cos B}{a} = \frac{\cos C}{c}\left(\frac{\text{sen}\,B}{\text{sen}\,A} - \frac{\text{sen}\,A}{\text{sen}\,B}\right).$$

212. $$abc\,\text{sen}\,\frac{A-B}{2}\,\text{sen}\,\frac{A-B}{2} = p(a-b)(p-c).$$

213. $$b^2\,\text{sen}\,2C + c^2\,\text{sen}\,2B = 2bc\,\text{sen}\,A.$$

214. $$b^2\cos^2 C - c^2\cos^2 B = b^2 - c^2.$$

215. $$p\left(\text{tg}\,\frac{A}{2} + \text{tg}\,\frac{B}{2}\right) = c\,\text{ctg}\,\frac{C}{2}.$$

216. $$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{a\,\text{sen}\,B\,\text{sen}\,C}{p}.$$

217. $$\frac{\text{sen}\,(B - C)}{\text{sen}\,(B + C)} = \frac{b^2 - c^2}{a^2}.$$

218. $$a(\cos B + \cos C) = 2(b + c)\,\text{sen}^2\,\frac{A}{2}.$$

219. $$a(\cos B - \cos C) = 2(b - c)\cos^2\frac{A}{2}.$$

220. $$a\,\text{sen}\,(B - C) + b\,\text{sen}\,(C - A) + c\,\text{sen}\,(A - B) = 0.$$

221. $$(a + b)^2\,\text{sen}^2\,\frac{C}{2} + (a - b)^2\,\text{sen}^2\,\frac{C}{2} = c^2.$$

222. $$(a + b)\,\text{tg}\,\frac{C}{2} + (a - b)\,\text{ctg}\,\frac{C}{2} = 2b\,\text{ctg}\,B.$$

223. $$a\cos A + b\cos B - c\cos C = 2a\,\text{sen}\,B\,\text{sen}\,C.$$

224. $$(b^2 - c^2)\,\text{ctg}\,A + (c^2 - a^2)\,\text{ctg}\,B + (a^2 - b^2)\,\text{ctg}\,C = 0.$$

225. $$(a - b)\,\text{ctg}\,\frac{C}{2} + (c - a)\,\text{ctg}\,\frac{B}{2} + (b - c)\,\text{ctg}\,\frac{A}{2} = 0.$$

226. $$a^2 + b^2 + c^2 = 4S(\text{ctg}\,A + \text{ctg}\,B + \text{ctg}\,C).$$

227. $$2S = \frac{a^2 - b^2}{\text{ctg}\,B - \text{ctg}\,A}.$$

228. $$\text{sen}\,A + \text{sen}\,B + \text{sen}\,C = \frac{p}{R}.$$

229. $$a \cos A + b \cos B + c \cos C = \frac{2pr}{R}.$$

230. $$abc = 8R^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C.$$

231. $$r_a = \frac{1}{8} R (1 - \cos A),\ r_b = \frac{1}{8} R (1 - \cos B),\ r_c = \frac{1}{8} R (1 - \cos C).$$

232. $$S = 4Rr \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

233. $$64Rr_a r_b r_c = \left(\frac{abc}{2p}\right)^2.$$

234. $$\frac{r}{R} = \frac{a \cos A + b \cos B + c \cos C}{a + b + c}.$$

235. $$\sqrt{r_a r_b} + \sqrt{r_a r_c} + \sqrt{r_b r_c} = r.$$

Siendo $A + B + C = \pi$, mostrar que:

236. $$\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C = 4 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C.$$

237. $$\cos A + \cos B - \cos C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - 1.$$

238. $$\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C = 2 (1 + \cos A \cos B \cos C).$$

239. $$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = - 4 \cos A \cos B \cos C - 1.$$

240. $$\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = 1 - 4 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C.$$

241. $$\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B - \operatorname{sen} 2C = 4 \cos A \cos B \cos C.$$

242. $$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C.$$

243. $$\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1 - 2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C.$$

244. $$\operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{C}{2} - 2 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2} = 1.$$

245. $$\operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{B}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{C}{2} + 2 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2} = 1.$$

246. $$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1.$$

247. $$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

248. $$\operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} C \operatorname{ctg} A = 1.$$

249. $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C - \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C = \frac{1}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}$.

250. $\operatorname{sen}(A + 2B) + \operatorname{sen}(B + 2C) + \operatorname{sen}(C + 2A) =$

$$= 4 \operatorname{sen} \frac{A - B}{2} \operatorname{sen} \frac{B - C}{2} \operatorname{sen} \frac{C - A}{2}.$$

251. Resolver un triángulo conociendo a R y r.

252. Resolver un triángulo conociendo los ángulos y la suma $(a^2 + b^2 + c^2)$ de los cuadrados de los lados.

253. Resolver un triángulo conociendo los ángulos y la suma $(a^2 + b^2 - c^2)$.

254. Resolver un triángulo conociendo un lado a, la altura correspondiente a ese lado h_a y el producto $K = \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}$.

255. Mostrar que si se llama x, y, z, a las distancias de los vértices de un triángulo al punto de encuentro dè las alturas, se verifica que

$$S = \frac{1}{2}(ax + by + cz).$$

256. Si en un triángulo $\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} = 2 \cos C$, el triángulo es isósceles.

257. Si en un triángulo $\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B} = \frac{\operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen}^2 B}$ el triángulo es isósceles o rectángulo.

258. Si en un triángulo $\operatorname{sen} A = \frac{\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C}{\cos B + \cos C}$, el triángulo es rectángulo.

259. Demostrar que si entre los tres ángulos de un triángulo ABC, se cumple la relación

$$\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C = 2$$

el triángulo es rectángulo.

260. Calcular la distancia entre los centros de dos circunferencias exteriores de radios conocidos R y R′, sabiendo que el triángulo formado por las tangentes comunes exteriores y una de las tangentes comunes interiores, es un triángulo isósceles.

Resolver un triángulo conociendo

261. a A y b_a

262. a A y m_a

263.	a A	h_a
264.	a A	$(bc) = m^2$
265.	a A	$(b^2 + c^2) = l^2$.

CUADRILÁTERO

266. En un cuadrilátero convexo, se conocen los lados a, b, c y d y el área S. Calcular los ángulos.

267. En un cuadrilátero convexo se conocen tres lados y los ángulos que ellos forman. Calcular los demás elementos.

268. Resolver un trapecio conociendo los ángulos y las diagonales.

269. Resolver un cuadrilátero inscriptible conociendo a, b, c y B.

270. Resolver un cuadrilátero inscriptible conociendo tres lados y una diagonal.

271. Resolver un cuadrilátero inscriptible, conociendo dos lados opuestos y las diagonales.

272. Resolver un trapecio conociendo un ángulo, la superficie y sabiendo que es inscriptible en un círculo de radio R.

273. En un cuadrilátero inscriptible ABCD, se da un ángulo B, los dos lados a y b, que forman el ángulo B y la diferencia $d = c - d$ entre los otros dos lados. Resolver el cuadrilátero y calcular el radio del círculo circuscripto.

274. En un cuadrilátero se conocen los cuatro lados a, b, c y d y la suma de los ángulos opuestos $B + D = \varphi$. Calcular la superficie.

Triángulos esféricos rectángulos. — Resolver un triángulo esférico rectángulo, conociendo :

275.	$a = 58°30'15''$	$b = 41°13'20''$.
276.	$a = 126°13'19''$	$b = 57°15'13''$.
277.	$b = 51°41'15''$	$c = 72°10'12''$.
278.	$b = 125°12'41''$	$c = 134°24'10''$.
279.	$a = 50°20'15''$	$B = 73°18'25''$.
280.	$a = 111°07'43''$	$B = 55°27'12''$.
281.	$a = 91°02'15''$	$B = 88°58'18''$.
282.	$b = 47°15'12''$	$B = 55°22'14''$.
283.	$b = 79°27'15''$	$B = 83°25'18''$.

284.	$b = 128°19'19''$	$B = 125°18'15''$.
285.	$b = 91°13'15''$	$C = 63°12'12''$.
286.	$b = 125°25'17''$	$C = 57°10'16''$.
287.	$B = 75°20'18''$	$C = 59°25'15''$.
288.	$B = 89°58'15''$	$C = 88°20'17''$.

289. Resolver un triángulo esférico rectángulo, conociendo la hipotenusa a y el radio del círculo inscripto r.

290. Demostrar que en el triángulo esférico rectángulo se verifica:

$$\cos a \operatorname{tg} c = \operatorname{sen} b \operatorname{ctg} B.$$

291. $$\operatorname{sen}(a - b) = \cos b \operatorname{sen} c \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

292. $$\operatorname{sen}(a - c) = \cos a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} \frac{B}{2}.$$

293. $$\cos(a - b) = \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

294. $$\cos(a + b) = \cos c - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

295. $$\operatorname{sen}(a + b) = 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos^2 \frac{C}{2}.$$

296. $$\operatorname{sen}(a + b) \operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 B.$$

297. $$\operatorname{tg}^2 \frac{b}{2} = \operatorname{tg} \frac{a + c}{2} \operatorname{tg} \frac{c - a}{2}.$$

298. $$\frac{\operatorname{tg}^2 b}{\operatorname{tg}^2 c} = \frac{\operatorname{sen}(a + c) \operatorname{sen}(a - c)}{\operatorname{sen}(a + b) \operatorname{sen}(a - c)}.$$

299. $$\operatorname{sen}^2 b + \operatorname{sen}^2 c - \operatorname{sen}^2 a = \operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c.$$

300. $$\operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 C = \operatorname{sen}(a - c) \operatorname{sen}(a + c).$$

301. $$\operatorname{sen}^2 B \operatorname{sen}^2 a = \operatorname{sen}(a - b) \operatorname{sen}(a + b).$$

302. $$\operatorname{sen}(B + C) = \frac{\cos b + \cos c}{1 + \cos b \cos c}.$$

303. $$\operatorname{sen}(B - C) = \frac{\cos b - \cos c}{1 - \cos b \cos c}.$$

Triángulos esféricos cualquiera. — Resolver un triángulo esférico, conociendo:

304.	$a = 35°17'15''$	$b = 50°27'17''$	$c = 66°23'13''$.
305.	$a = 125°17'15''$	$b = 137°18'12''$	$c = 55°17'14''$.
306.	$A = 85°20'12''$	$B = 95°17'15''$	$C = 106°26'42''$.
307.	$a = 50°12'10''$	$b = 112°22'15''$	$C = 29°12'14''$.
308.	$A = 115°12'15''$	$B = 78°10'05''$	$C = 120°12'15''$.
309.	$a = 105°10'05''$	$b = 37°25'15''$	$A = 50°27'17''$.
310.	$a = 45°23'47''$	$b = 76°40'24''$	$A = 22°57'12''$.
311.	$A = 101°10'15''$	$B = 135°27'02''$	$a = 60°10'15''$.
312.	$A = 161°29'15''$	$B = 29°10'15''$	$a = 143°12'15''$.

313. Calcular el área de un triángulo esférico trazado sobre una esfera de radio igual a 20.50 m, cuyos lados son

$$a = 75°53'20''$$
$$b = 82°25'15''$$
$$c = 99°22'15''$$

314. Calcular el área de un triángulo esférico trazado sobre una esfera de radio igual a 45.30 m y cuyos ángulos son

$$A = 40°20'15'', \qquad B = 52°27'14'', \qquad C = 138°25'15''.$$

Mostrar que en un triángulo se verifican las siguientes relaciones:

315. $$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$$

316. $$\cos (a+b) = \cos c - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \operatorname{sen} B \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$$

317. $$\cos (a-b) = \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \operatorname{sen} B \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$$

318. $$\frac{\operatorname{sen} (a+b)}{\operatorname{sen} c} = \frac{\cos A + \cos C}{1 - \cos C}.$$

319. $$\frac{\operatorname{sen}^2 a}{\operatorname{sen}^2 b} = \frac{1 - \cos a \cos b \cos c}{1 - \cos A \cos B \cos C}.$$

320. Si en un triángulo esférico se verifica que $A = B = 2C$, se tiene que

$$8 \operatorname{sen}\left(a + \frac{C}{2}\right) \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} \cos \frac{c}{2} = \operatorname{sen}^3 a.$$

321. Resolver un triángulo esférico dados

$$A\ B \text{ y } 2p.$$

322. Resolver un triángulo esférico dados A, b y $(a + c) = m$.

323. Resolver un triángulo esférico dados el ángulo A y los segmentos en que la bisectriz del ángulo B divide al lado b.

324. Mostrar que un triángulo esférico, llamando

$$H = \sqrt{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a) \operatorname{sen}(p-b) \operatorname{sen}(p-c)},$$

se cumplen las siguientes relaciones:

325. $\operatorname{tg} R_a = \frac{1}{H^2}[\operatorname{sen} p - \operatorname{sen}(p-a) - \operatorname{sen}(p-b) - \operatorname{sen}(p-c)]$

326. $(\operatorname{ctg} r + \operatorname{tg} R)^2 = \frac{1}{4H^2}(\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c)^2 - 1$

327. $(\operatorname{ctg} r - \operatorname{tg} R) = \frac{1}{4H^2}(\operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c - \operatorname{sen} a)^2 - 1$

328. $\operatorname{tg} r_a \operatorname{tg} r_b \operatorname{tg} r_c = \operatorname{tg} r \operatorname{sen}^2 p$

329. $\operatorname{tg} R + \operatorname{ctg} r = \operatorname{tg} R_a + \operatorname{ctg} r_a = \operatorname{tg} R_b + \operatorname{ctg} r_b = \operatorname{tg} R_c + \operatorname{ctg} r_c$

$$= \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} r + \operatorname{ctg} r_a + \operatorname{ctg} r_c)$$

330. $\operatorname{tg} r \operatorname{tg} r_a \operatorname{tg} r_b \operatorname{tg} r_c = H^2$

ÍNDICE

PRIMERA PARTE

TEORÍA DE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS

SEGUNDA PARTE

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS PLANOS. TEOREMAS RESPECTIVOS. APLICACIONES

TERCERA PARTE

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

ESTA OBRA

TERMINÓSE DE IMPRIMIR EL DÍA 12 DE JULIO DE 1945

EN LA IMPRENTA Y CASA EDITORA « CONI »

CALLE PERÚ 684, BUENOS AIRES

PUBLICACIONES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS

A PARTIR DE ENERO DE 1939

SERIE PRIMERA. — INFORMACIONES GENERALES.

1.	Anuario 1938-39, mayo 1939	(Nº 120)	$ 1.50
2.	Inauguración de la ampliación del laboratorio de Ensayo de Materiales, agosto de 1939	(Nº 124)	—
3.	Laboratorio de Ensayo de Materiales, agosto de 1940	(Nº 131)	—
4.	Escuela del Motor	(Nº 132)	—
5.	Elección de autoridades y acto de transmisión del decanato	(Nº 135)	—
6.	Anuario 1941	(Nº 145)	$ 2.00
7.	Entrega de publicaciones en acto público por el señor Embajador de Gran Bretaña, Sir Esmond Ovey, el día 6 de octubre de 1941	(Nº 148)	—
8.	Digesto 1941	(Nº 149)	$ 2.00
9.	Disposiciones de interés para los estudiantes, 1942	(Nº 153)	$ 1.00
10.	Anuario 1942	(Nº 156)	$ 2.00
11.	Planes de Estudio	(Nº 160)	$ 0.30
12.	Departamento de Mecánica	(Nº 163)	$ 2.00
13.	Instituto de Aeronáutica	(Nº 164)	—
14.	Programas de examen, 1943	(Nº 165)	$ 1.50
15.	Ordenanza general de ingreso y programas de los cursos preparatorios	(Nº 170)	$ 2.50

SERIE SEGUNDA. — REVISTA Y CONTRIBUCIONES.

1.	Trabajos de los ingenieros M. Simonoff y E. A. Arnaboldi. Mayo de 1939	(Nº 121)	$ 2.40
2.	Trabajos de los doctores R. G. Loyarte, J. Pláceres, F. Charola, R. F. Recorder. R. P. Cesco, y A. E. Sagastume Berra. Enero de 1940	(Nº 127)	$ 2.40
3.	Trabajos del doctor P. Montel y de los ingenieros J. S. Gandolfo y M. Simonoff. Abril de 1940	(Nº 128)	$ 2.40
4.	Trabajos de los doctores A. Durañona y Vedia y G. Knie y de los ingenieros J. S. Gandolfo y A. Dorfman. Octubre de 1940	(Nº 136)	$ 2.00
5.	Trabajos de los ingenieros A. Gray y R. Martínez de Vedia y del doctor E. Sábato Diciembre de 1940	(Nº 139)	$ 3.00
6.	Trabajos de los doctores R. G. Loyarte, R. Carratalá, D. Vucetich, B. Gross, G. García e ingeniero E. Dickmann. Abril de 1941	(Nº 143)	$ 3.00
7.	Trabajos de los doctores A. Durañona y Vedia, A. E. Sagastume Berra y R. P. Cesco y de los ingenieros E. A. Arnaboldi y F. F. Langmann. Diciembre de 1941	(Nº 150)	$ 3.00
8.	Trabajos del doctor A. E. Sagastume Berra, y de los ingenieros A. Escudero y E. A. Arnaboldi, R. Martínez de Vedia y A. Dorfman	(Nº 161)	$ 4.00
9.	Trabajos de los doctores R. J. Ambrosis, F. Vierheller, Antero Bueno, A. E. Sagastume Berra y E. Castellano, y del ingeniero F. F. Langmann. — Bibliografía	(Nº 168)	$ 4.00
10.	Trabajos de los ingenieros A. R. Gray, J. S. Gandolfo, C. Di Corleto, M. Mesny, y doctores C. Pasqualini, F. Vierheller y A. Bueno	(Nº 173)	$ 4.00
11.	Trabajos de los ingenieros C. Di Corleto, J. A. Brochiero, R. Dupeyron, y doctores A. E. Sagastume Berra, R. J. Ambrosis, Rodríguez y Balseiro	(Nº 174)	$ 4.00
12.	Trabajos de los ingenieros E. Mallol, Juan A. Brochiero, Simón A. Delpech y señor Mario Bunge	(Nº 177)	$ 2.00
13.	Trabajos de los ingenieros O. Delfino, J. J. Ré, M. Mesny y E. Mallol	(Nº 179)	$ 3.00
14.	Contribuciones de los doctores R. Grinfeld, R. Cesco, J. C. Vignaux y F. Vierheller.	(Nº 180)	$ 4.00

SERIE TERCERA. — PUBLICACIONES ESPECIALES.

*.	Saneamiento urbano en la República Argentina. Primera parte. Provisión de agua. Cuaderno Nº 4, por el ingeniero E. Artaza. Junio de 1939	(Nº 122)	$ 3.80
1.	Conmemoración de la Independencia nacional (julio 1938), julio 1939	(Nº 123)	—
*.	Tercera Reunión Anual de Caminos. Conferencias de los ingenieros T. Sánchez de Bustamante, V. Carri, J. Zuker, A. P. Grisi, A. Kashirski, C. K. Preus, N. Alurralde, M. Fornari, E. Arenas, J. Boiso, y doctor A. Zanetta, septiembre 1939	(Nº 125)	$ 10.00
2.	Estudio de la evolución fluvial que determina el endicamiento del río San Juan, por el ingeniero J. S. Gandolfo. Enero 1940	(Nº 126)	$ 4.00
3.	Conmemoración de la Independencia nacional (julio 1939), abril 1940	(Nº 129)	—
*.	Física General. Tomo IV. segunda edición, por el doctor Ramón G. Loyarte	(Nº 130)	$ 20.00
4.	Lista de Publicaciones. Agosto 1940	(Nº 133)	—

Saneamiento urbano en la República Argentina. Primera parte. Provisión de agua, por el ingeniero E. Artaza. Cuaderno Nº 5. Septiembre 1940... (Nº 134) $ 5.00
5. Cuarta Reunión Anual de Caminos (I). Discurso inaugural del doctor H. Magliano. Conferencias de los ingenieros A. Lodeiro Blanco, A. J. L. Bolognesi, A. M. Podestá, E. F. Tagle, V. Carri y J. L. Carattino........ (Nº 137) $ 5.00
6. Cuarta Reunión Anual de Caminos (II), Conferencias de los ingenieros P. Palazzo, E. Arenas y A. Kashirski........ (Nº 138) $ 5.00
7. Cálculo de estructuras de Hormigón Armado, por el ingeniero Julio Zuker........ (Nº 140) $ 6.00
8. Saneamiento urbano en la República Argentina, Tercera parte. Obra domiciliaria. Tomo I, por el ingeniero Evaristo Artaza. Abril de 1941........ (Nº 141) $ 20.00
9. Física general. Tomo I, cuarta edición, por el profesor doctor Ramón G. Loyarte. Abril de 1941... (Nº 142) $ 15.00
10. La viga placa, por J. Montú........ (Nº 144) $ 4.00
11. Determinaciones de detonancia de combustibles y carburantes........ (Nº 146) $ 3.00
12. La Anisotropía óptica por deformación elástica de los medios transparentes y su aplicación a la Fotoelasticimetría, por el ingeniero Raúl Buich........ (Nº 147) $ 8.00
13. Sistemas hiperestáticos planos, por el ingeniero Félix De Medina (Nº 151) $ 5.00
14. Vigas de hormigón armado con armadura doble simétrica sometidas a flexión compuesta, por el ingeniero Julio R. Castiñeiras........ (Nº 152) $ 1.00
15. Producción, transporte y distribución de la energía eléctrica, por el ingeniero Miguel Simonoff........ (Nº 154) $ 25.00
16. El proyecto económico de estructuras de hormigón armado, por el ingeniero Julio R. Castiñeiras........ (Nº 155) $ 5.00
17. Física general. Tomo II, tercera edición, por el profesor doctor Ramón G. Loyarte (Nº 157) $ 15.00
18. Tablas para vigas con chanfles rectos y parabólicos, para facilitar la resolución de sistemas hiperestáticos, por los ingenieros G. A. Rabuffetti y E. A. Arnaboldi..... (Nº 158) $ 2.00
19. Quinta Reunión Anual de Caminos. Discurso inaugural del ingeniero Julio R. Castiñeiras. Conferencias de los doctores C. L. Ruiz y E. Petroni, agrimensor L. de Carli, ingenieros A. P. Grisi, J. Zuker, A. M. Podestá, E. F. Tagle, E. Arenas, A. Kashirski, M. A. Fornari, ingeniero agrónomo A. Arena e ingeniero J. J. Font....... (Nº 159) $ 10.00
20. Saneamiento urbano en la República Argentina. Primera parte. Provisión de agua, por el ingeniero E. Artaza. Cuaderno Nº 6. Febrero 1943........ (Nº 162) $ 15.00
21. Física general. Tomo III. Calor, tercera edición, por el profesor doctor Ramón G. Loyarte........ (Nº 166) $ 15.00
22. Electricidad. I, Electricidad y magnetismo. II, Electricidad corpuscular, por el ingeniero Miguel Simonoff........ (Nº 167) $ 18.00
23. Saneamiento urbano en la República Argentina. Segunda parte. Desagües urbanos, por el ingeniero E. Artaza. Cuaderno Nº 1. Noviembre 1943........ (Nº 169) $ 4.00
24. Semejanza mecánica, por el ingeniero C. Berta........ (Nº 171) $ 4.00
25. Aceros y tratamientos térmicos, por el ingeniero A. Lodeiro Blanco.. (Nº 172) $ 4.00
26. Carburantes, Combustibles y Lubricantes. Ensayos normales, por los asistentes doctor E. Castellano e ingeniero M. Mesny, del Departamento de Mecánica........ (Nº 175) $ 3.00
27. Física general. Tomo I, quinta edición, por el doctor R. G. Loyarte, junio de 1944. (Nº 176) $ 18.00
28. Tratado de Optica. Primer fascículo, por el doctor E. Loedel Palumbo........ (Nº 178) $ 7.50
29. Aurel Stodola a través de sus libros, por el ingeniero Emilio Mallol........ (N 181) —
30. Trigonometría, por el ingeniero Numa Tapia........ (Nº 182) $ 25.00
31. Introducción a la Matemática superior, por el doctor Alberto E. Sagastume Berra.. (Nº 183)

PUBLICACIONES EN PRENSA Y EN PREPARACIÓN:

Nº 184. Elementos fundamentales de metalografía microscópica, por el ingeniero Antonio E. Sturla.
Nº 185. Revista. Trabajos de los ingenieros Enrique C. Beltrami, Félix Langmann, Carlos Gadda y Miguel Simonoff, y señor Juan A. Cibraro.
Nº 186. Física General, por el doctor Ramón G. Loyarte. Tomo IV. Tercera edición.
Nº 187. Capacidad de captación de las presas de rejilla, por el ingeniero Félix Langmann.
Nº 188. Revista. Trabajos de los ingenieros Miguel Simonoff y R. Martínez de Vedia, del doctor Clodoveo Pasqualini y del señor Douglas Smink.
Nº 189. Saneamiento urbano. Obras domiciliarias, por el ingeniero Evaristo Artaza. Cuadernos 1, 2 y 3. Tercera edición.
Nº 190. Grado de irregularidad de alternadores, por el ingeniero Juan A. Brochiero.
Nº 191. Tratado de Óptica, por el doctor E. Loedel Palumbo. (Fascículo 2º.)
Nº 192. Contribuciones. Trabajo del doctor Reynaldo P. Cesco. (Esta entrega contendrá, además, otros trabajos del Departamento de Matemáticas e Instituto de Física.)

Se enviará, sin cargo, a quien lo solicite, la «Lista de Publicaciones», que contiene la nómina completa de publicaciones de la Facultad.