OBSERVATORIO ASTRONOMICO DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

DIRECTOR: PROF. DR. REYNALDO PEDRO CESCO

SERIE ASTRONOMICA - Tomo XXXV

APLICACIONES DE UN CIERTO TIPO DE TRANSFORMACIONES CANONICAS A LA MECANICA CELESTE

POR

J. L. SERSIC

OBSERVATORIO ASTRON

25 MAR 1970

LA PLATA

1969

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

PRESIDENTE
DR. ROQUE GATTI

SECRETARIO ASUNTOS ACADÉMICOS
DR. JORGE LUIS SUÑOL

SECRETARIO SUPERVISIÓN ADMINISTRATIVA
CONTADOR PEDRO C. CORONA

GUARDASELLOS
DR. HERBERTO PRIETO DIAZ

APLICACIONES DE UN CIERTO TIPO DE TRANSFORMACIONES CANONICAS A LA MECANICA CELESTE

Por

J. L. SÉRSIC *

SYNOPSIS

A formalism based on a particular kind of canonical transformations is developed and used to discuss the general solutions of the differential equations of the Theory of Perturbations in Celestial Mechanics.

SINOPSIS

Se desarrolla un formalismo basado en una clase particular de transformaciones canónicas y se lo emplea para discutir la solución general de las ecuaciones diferenciales de la Teoría de las Perturbaciones de la Mecánica Celeste.

CONTENIDO

* Actualmente en el Observatorio Astronómico, Córdoba, y Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Buenos Aires.

INTRODUCCION

En el presente trabajo se presenta un formalismo basado en la teoría de los grupos de transformaciones, con miras a su aplicación a los problemas de la Dinámica en general y de la Mecánica Celeste en particular.

La expresión de las coordenadas canónicas de un sistema dinámico por medio de transformaciones canónicas dependientes de un parámetro y una única función (función característica) constituyen el principal objeto de nuestra tarea.

E. W Brown en su *Planetary Theory*, Cap. VI, expresa las perturbaciones de primer orden de las variables canónicas por medio de una transformación infinitesimal dependiente de un parámetro y de una función característica que llama S. Más adelante determina las perturbaciones de segundo orden a través de la misma función y sus derivados, mediante una extensión de la serie de Lagrange para más de una función implícita.

La posibilidad de expresar las transformaciones mencionadas en forma de operadores se vislumbra en el capítulo V de los *Principles of Quantum Mechanics* de P A. M. Dirac, donde se hace uso intensivo de los paréntesis de Poisson y se emplean operadores de la forma $e^{iS/h}$, cuya analogía formal con los que introduciremos más adelante se deduce sin dificultad.

Es, sin embargo, en el método de Peano-Baker de integración de ecuaciones diferenciales lineales (Ince, *Differential Equations*, Cap. XVI, 5) y en sus aplicaciones a la Mecánica Celeste hechas por Yusuke Hagiara donde deben buscarse los antecedentes lógicos del presente trabajo.

Hemos querido, empero, presentarlo desde el punto de vista de la teoría de los grupos de transformaciones, partiendo de la definición de paréntesis de Poisson y su operador (V,) y analizar las propiedades de los grupos de transformaciones que genera, para recién arribar al concepto de sistema canónico asociado y formular el problema de la integración a través de la existencia y convergencia de las soluciones.

Desde el punto de vista dinámico, formulamos el problema de la integración de un sistema hamiltoniano reduciéndolo a la determinación de la función característica de la transformación que resulta de una conveniente elección de la forma de la nueva hamiltoniana. El sistema resultante nos lleva al concepto de órbita intermediaria y de exponentes característicos, así como nos dice sobre la importancia de la convergencia de las soluciones. Las soluciones periódicas, como integrales particulares de un sistema dinámico, así como un procedimiento para el cálculo de las mismas se introducen más adelante. Finalmente se escribe la forma de la solución formal de V y K hasta el segundo orden, para el caso general.

El autor agradece vivamente los oportunos consejos del Dr. Reynaldo P. Cesco, quien dirigiera el presente trabajo.

La Plata, Agosto de 1956.

1. *Consideraciones Generales.*

En el desarrollo del presente trabajo habremos de operar en el campo real, a menos de expresarse lo contrario.

Si E_{2n} es un espacio euclídeo de $2n$ dimensiones, sus puntos $(q_1, q_2 \quad q_n, p_1, p_2 \quad p_n)$ los indicaremos simplemente con (q, p); todo el conjunto abierto, conexo y no vacío de puntos (q, p) de E_{2n} se llama recinto y se designa con mayúsculas: G, D, etc.

Sea la función $F\,(q, p)$, diremos que ella es analítica en un cierto entorno de (q', p') si es desarrollable en serie entera ordenada según las potencias de $q - q'$; $p - p'$, convergente mientras los valores absolutos de esas diferencias no pasen de ciertos límites. (Goursat, *Analyse*; Ch. IV).

Si F, G son dos funciones analíticas de (q, p), se puede definir una función (F, G) de (q, p) poniendo

$$(F, G) = \sum_1^n \frac{\partial(F, G)}{\partial(q_i, p_i)} = -(G, F)$$

La función (F, G) se denomina "paréntesis de Poisson" de F y G (Wintner, *Analytical Foundations*, Cap. I).

Los paréntesis de Poisson gozan de ciertas propiedades que nos limitaremos a enunciar y cuya demostración se encuentra en los tratados clásicos de Análisis y Mecánica Celeste.

Si F, F', F'' son funciones analíticas en un cierto recinto D de E, se tiene

$$(F.F', F'') = (F, F'')\,F' + (F', F'')F \qquad (1)$$

$$(F + F', F'') = (F, F'') + (F', F'') \qquad (2)$$

y también

$$((F, F'), F'' + ((F'', F), F') + ((F', F''), F) = 0 \qquad (3)$$

Además sea $F = F(h)$ donde $h = h(q, p)$. En tal caso se tiene

$$(F, G) = F'(h, G) \qquad \text{donde} \qquad F' = \frac{\partial F}{\partial h}$$

Sean $(h_1, h_2 \quad h_r)$ r funciones de las $2n$ variables independientes (q, p) si es posible expresar todos los paréntesis de Poisson (h_i, h_k) como funciones de $(h_1, h_2 \quad h_r)$, las funciones $(h_1, h_2 \quad h_r)$ se dicen formar un grupo. Cada función h_i se dice pertenecer al grupo. (Lie, *Math. Ann.*, 8, p. 215).

Si las cantidades (h_i, h_k) son todas cero, las funciones se dicen estar en involución, o formar un sistema de involución.

2. *Transformaciones Canónicas.*

Dado E_{2n}, espacio euclídeo de $2n$ dimensiones, si $Q_i\,(q, p)$ y $P_i\,(q, p)$ son $2n$ funciones analíticas de sus argumentos en un recinto E' del mismo, las ecuaciones

$$q_i' = Q_i\,(q, p) \qquad P_i' = P_i\,(q, p) \qquad i = 1, 2 \quad , n \qquad (1)$$

definen una transformación de E' en otro recinto E'' de E_{2n}.

Si además, los paréntesis de Poisson formados con las funciones $Q_i\,(q, p)$ y $P_i\,(q, p)$ cumplen las relaciones

$$(Q_j, P_k) = \sum_1^n \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_i} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \right) = \delta_{ik} \tag{2}$$

la transformación se dirá canónica. (Whittaker, *Analitical Dynamics*, Cap. XI).

De las diversas maneras de expresar el carácter canónico de una transformación tal como (1), la citada es particularmente importante para el desarrollo ulterior de este trabajo.

3. *Operador Canónico.*

Restrinjamos, por ahora, el problema a un espacio E_2 de dos dimensiones y coordenadas q, p; e interpretemos las correspondientes funciones $Q\,(q, p)$ y $P\,(q, p)$ como resultado de efectuar las operaciones S y T sobre q y p respectivamente, es decir

$$q' = Sq \qquad P' = Tp \tag{1}$$

Nuestro problema consistirá en determinar cuál es la forma de los operadores S y T para que la transformación resulte canónica.

Supongamos a ese efecto, que S y T sean desarrollables en serie de potencias de un parámetro α, es decir

$$S = 1 + \alpha\sigma_1 + \alpha^2\sigma_2 + \qquad\qquad T = 1 + \alpha\tau_1 + \alpha^2\tau_2 +$$

donde σ_ν y τ_ν son operadores. Tendremos

$$q' = q + \alpha\sigma_1 q + \alpha^2\sigma_2 q + \qquad\qquad P' = p. + \alpha\tau_1 p + \alpha^2\tau_2 p +$$

y por (2) $\neq$ 2 debe ser

$$(q', p') = (Q, P) = (Sq, Tp) = 1$$

o sea

$$\begin{aligned} 1 &= (q + \alpha\sigma_1 q + \quad , P + \sigma\tau_1 p + \quad) = (q + \alpha\sigma_1 q + \quad .\,, p) + (q + \alpha\tau_1 q + \quad .\,.\,, \alpha\tau_1 p) + \\ &+ \quad = (q, p) + \alpha(\sigma_1 q, p) + \alpha(q, \tau p) + \alpha^2(\sigma_2 q, p) + \alpha^2(\sigma_1 q, \tau_1 p) + \alpha^2(q, \tau_2 p) + \end{aligned}$$

en virtud de (1) y (2) $\neq$ 1. Además, por ser $(q, p) = 1$ deben anularse los coeficientes de las sucesivas potencias de α, o sea

$$(\sigma_1 q, p) + (q, \tau_1 p) = 0 \tag{2a}$$

$$(\sigma_2 q, p) + (\sigma_1 q, \tau_1 p) + (q, \tau_2 p) = 0 \tag{2b}$$

etcétera. Veamos ahora cómo resolver estas ecuaciones respecto de $\sigma_1 q$, $\tau_1 p$, etc. Consideremos la identidad (5) bajo la forma

$$((F', F), F'') + ((F, F''), F') + (F, (F', F'')) = 0$$

en virtud de (0) $\neq$ 1. Poniendo entonces $F'' = p$, $F = q$, $F' = V(q, p)$ donde $V(q, p)$ es una función analítica de q, p en un cierto recinto E' de E_2, saldrá

$$((V, q), p) + ((q, p), V) + (q, (V, p)) = 0$$

y teniendo en cuenta que $(q, p) = 1$, resulta

$$((V, q), p) + (q, (V, p)) = 0 \tag{3}$$

expresión que comparada con ($2a$) nos da

$$\sigma_1 q = (V, q) \qquad \tau_1 P = (V, P) \tag{4}$$

Consideremos en seguida la expresión ($2b$). En la identidad (3) # 1 hagamos

$$F = V(q, p) \qquad F' = (V, q) \qquad F'' = p$$

y

$$F = q \qquad F' = V(p, q) \qquad F'' = (V, p)$$

sucesivamente. Tendremos

$$((V, (V, q)), p) + ((P, V), (V, q) + (((V, q), P), V) = 0 \tag{5}$$

y

$$((q, V), (V, P)) + (((V, P), q), V) + ((V, (V, P)), q) = 0 \tag{6}$$

Observemos ahora que por (0) # 1 es

$$((V, q), (V, p)) = ((P, V), (V, q)) = -((q, V), (V, p))$$

restando entonces (5) y (6)

$$(((V, (V, q)), p) + 2((V, q), (V, p)) + (q, (V, (V, P))) = 0$$

puesto que

(5)-(6) $$(((V, q), p), V) - (((V, p), q) V) = (((V, q), P) + (q, (V p)), V) = 0$$

por (0) y (2) # 1 y (3). La expresión (5)-(6) da, comparándola con ($2b$) y recordando (4)

$$\sigma_2 q = \frac{1}{2}(V, (V, q)) = \frac{1}{2}(V, \sigma_1 q), \qquad \tau_2 p = \frac{1}{2}(V, (V, p)) = \frac{1}{2}(V, \tau_1 p)$$

Hemos determinado así los dos primeros términos de los operadores S y T. Mostraremos ahora que las relaciones de recurrencia

$$n\sigma_n q = (V, \sigma_{n-1} q) \qquad n\tau_n p = (V_1 \tau_{n-1} P) \tag{7}$$

son válidas, permitiéndonos así tener completamente determinados a S, T.

Convengamos en escribir $\sigma_0 = \tau_0 = 1$; en tales condiciones el coeficiente de α^n en el desarrollo de $(Sq; Tp)$ se expresa como

$$\sum_{r=1}^{r=n} (\sigma_r q, \tau_{n-r} p)$$

Diremos entonces que si se tiene

$$\sum_0^n (\sigma_r q, \tau_{n-r} p) = 0 \tag{8}$$

y valen las relaciones (7), habrá de encontrarse

$$\sum_0^{n+1} (\sigma_r q, \tau_{n-r} p) = 0 \tag{9}$$

En efecto, sea el término $(\sigma_r q, \tau_{n-r} p)$ de (8). Aplicando la identidad (3) # 1 a éste y la función $V(q, p)$, tendremos

$$(V, (\sigma_r q, \tau_{n-r} p)) + (\tau_{n-r} p, (V, \sigma_r q)) + ((V, \tau_{n-r} p), \sigma_r q) = 0$$

y con (7) sale

$$(V, (\sigma_r q, \tau_{n-r} q)) + (r+1)(\tau_{n-r} P, \tau_{r+1} q) + (n+1-r)(\tau_{n+1-r} p), \tau_r q) = 0$$

sumando ahora de $r = 0$ a $r = n$ resulta

$$\sum_0^n (V, (\sigma_r q, \tau_{n-r} q)) + \sum_0^n (r+1)(\tau_{n+1-r}, \sigma_{r+1} q) + \sum_0^n (n+1-r)(\tau_{n+1-r} p, \sigma_r q) = 0$$

pero en virtud de (2) # 1 y de (8) se tiene

$$\sum_0^n (V, (\sigma_r q, \tau_{n-r} p)) = (V, \sum_0^n (\sigma_r q, \tau_{n-r} p)) = (V, 0) = 0$$

además teniendo en cuenta que

$$\sum_0^n (r+1)(\tau_{n-r} p, \omega_{r+1} q) = \sum^{n+1} r(\tau_{n+1-r} \mathrm{R}, \sigma_r q)$$

llegamos a

$$\sum_1^{n+1} r(\tau_{n+1-r} p, \sigma_r q) + \sum_0^n (n-r+1)(\tau_{n+1-r} p, \sigma_r q) = (n+1)(\tau_{n+1} p, q) +$$

$$+ (n+1) \sum_1^n (\tau_{n+1-r} p, \sigma_r q) + (n+1)(p, \sigma_{n+1} q) = 0$$

o bien

$$\sum_0^{n+1} (\tau_{n+1-r} p, \sigma_r q) = 0$$

que es nuestra expresión (9) como se quería demostrar. Conocidas entonces las expresiones de $\sigma_1 q$, $\tau_1 p$ por (3) las relaciones (7) nos dan todos los términos de S y T

Las expresiones (1) se pueden escribir entonces

$$q' = Sq = q + \alpha(V, q) + \frac{\alpha^2}{2}(V, (V, q)) + \qquad ; \; p' = Tp = p + \alpha(V, P) + \frac{\alpha^2}{2}(V, (V, P)) +$$

y los operadores

$$S \equiv T \equiv \mathbf{1} + \alpha(V, \;) + \frac{\alpha^2}{2}(V, (V, \;)) +$$

resultan entonces formalmente iguales. Convengamos en escribir ahora $S \equiv T \equiv E^{\alpha V}$ donde por fin

def.: $$E^{\alpha V} \equiv 1 + \alpha(V, \;) + \frac{\alpha^2}{2}(V, (V, \;)) + \frac{\alpha^3}{6}(V, (V, V \;))) +$$

y las (1) resultan ser

$$q' = E^{\alpha V} q \qquad P' = E^{\alpha V} P$$

definiendo la transformación en un recinto E'' de E_2.

4. *Extensión de la operación $E^{\alpha V}$ a las funciones de q, p.*

Sea ahora $F(q', p')$ analítica en un recinto D' de E_2. Teniendo en cuenta la transformación

$$q' = E^{\alpha V} q \qquad p' = E^{\alpha V} p$$

resulta para F

$$F(q', p') = F(Eq, Ep) = F(q + Eq - q, p + Ep - p) = F(q, p) + \frac{\partial F}{\partial q}(Eq - q) +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial p}(Ep - p) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}(Eq - q)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p}(Eq - q)(Ep - p) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(Ep - p)^2 +$$

$$= F(q, p) + \alpha \frac{\partial F}{\partial q}(V, q) + \alpha \frac{\partial F}{\partial p}(V, p) + \frac{\alpha^2}{2}\left\{ \quad \right\} = F(q, p) + \alpha\left(\frac{\partial V}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial V}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial q}\right)$$

$$+ \frac{\alpha^2}{2}\left\{ \quad \right\} +$$

se tiene así definida la operación (transformación) $E^{\alpha V}$ aplicada a una función de q, p; es decir

def.: $$E^{\alpha V} F(q, p) = F(E^{\alpha V} q, E^{\alpha V} p) = F + \alpha(V, F) + \frac{\alpha^2}{2} V, (V, F)) +$$

en un recinto $D \subseteq D'$ de E.

5. *Naturaleza de las transformaciones según el carácter de V*

Sean F y G funciones homogéneas en q, p de grados m y n respectivamente. El paréntesis (F, G) será homogéneo de grado $m + n - 2$ en q, p.

Así entonces, si V es homogénea de grado n en q, p el grado de los sucesivos términos de las transformaciones

$$E^{\alpha V} q = q + \alpha(V, q) + \frac{\alpha^2}{2}(V,(V, q)) + \ldots, E^{\alpha V} p = p + \alpha(V, p) + \frac{\alpha^2}{2}(V,(V, p) +$$

será

$$1 \qquad n - 1 \qquad 2n - 3 \qquad 3n - 5 \qquad 4n - 7$$

es decir, si j es el exponente de α (orden del término), sale para el grado del término de orden j,

$$g(j; n) = j(n - 2) + 1$$

siendo n positivo, debe ser g positiva, pues los distintos términos se forman por derivación. Entonces, si $n = 1$, tendremos sólo los términos de grados

$$g(0; 1) = 1 \quad \text{y} \quad g(1; 1) = 0$$

pues sería $g(k; 1) < 0$ para $k > 1$. La transformación es del tipo

$$q' = q + a \qquad p' = p + b$$

o sea una translación.

El caso $n = 2$ es muy importante, pues

$$g(j; 2) = 1 \quad \text{para todo } j$$

y sale entonces

$$q' = aq + bp; \qquad p' = a'p + b'p; \qquad aa' - bb' = 1$$

es decir, una sustitución lineal canónica. (Jacobiano unitario).

Para $n > 2$ se obtienen series de potencias en q, p cuya convergencia depende naturalmente de los coeficientes de la función V y de la elección del parámetro.

Estudiaremos en particular el caso de V cuadrática y homogénea. Sea

$$2V = Aq^2 + Bp^2 + 2Cqp$$

Si escribimos $D = C^2 - AB$, tenemos para los sucesivos términos de $E^{\alpha V}q$ y $E^{\alpha V}p$

$$\begin{array}{ll} (V, q) = -Bp - Cq & (V, p) = Aq + Bp \\ (V, (V, q)) = Dq & (V, (V, p)) = Dp \\ (V, Dq) = -D(Bp + Cq) & (V, Dp) = D(Aq + Bp) \end{array}$$

de modo que

$$q' = E^{\alpha V}q = q\left(1 + \frac{\alpha^2 D}{2!} + \frac{\alpha^4 D^2}{4!} + \quad\right) - (Bp + Cq)\left(\alpha - \frac{\alpha^3 D}{3!} + \frac{\alpha^5 D^2}{5!} \quad\right)$$

$$p' = E^{\alpha V}p = p\left(1 + \frac{\alpha^2 D}{2!} + \frac{\alpha^4 D^2}{4!} + \quad\right) + (Aq + Bp)\left(\alpha + \frac{\alpha^3 D}{3!} + \frac{\alpha^5 D^2}{5!} + \quad\right)$$

Si es $D < 0$, podemos escribir $\theta = i\sqrt{D}$ y las expresiones anteriores resultan

$$q' = q \cos \alpha\theta - (Bp + Cq)\,\frac{\operatorname{sen} \alpha\theta}{\theta} \qquad p' = p \cos \alpha\theta + (Aq + Cp)\,\frac{\operatorname{sen} \alpha\theta}{\theta}$$

formas periódicas de período $2\pi/\theta$ en α. Tenemos pues que si V es una forma cuadrática definida, la transformación será "estable" en el sentido de que estará acotada para todo α, y periódica, pues al cabo del intervalo $2\pi/\theta$ retomará nuevamente su valor.

6. *Extensión de las transformaciones $E^{\alpha V}$ a más de un par de variables.*

Dado un espacio E_{2n} y definida en un cierto recinto del mismo una función $V(q_i, p_i)$ analítica en los n pares de variables q y p, mostraremos que las expresiones

$$q_i' = E^{\alpha V}q_i \qquad p_i' = E^{\alpha V}p_i \qquad i = 1, 2, \quad n \tag{1}$$

donde

$$(V, F) = \sum_1^n{}_j (V, F)_j = \sum_1^n \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial V}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} \right)$$

son canónicas.

Para ello solo es preciso que cumplan las relaciones (2) # 2:

$$(q_i', p_k') = \delta_{ik}$$

Calculemos pues, el paréntesis $(q_i'; p_k')$:

$$(q_i', p_k') = (q_j, p_k) + \alpha((V, q_j), p_k) + \alpha(q_j(V, p_k)) + \frac{\alpha^2}{2} ((Vq_j))p_k) +$$

y tendremos

$$\begin{aligned} (q_j, p_k) &= \delta_{jk} \\ ((Vq_j)p_k) + (q_j(Vp_k)) &= 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

etc. De manera enteramente análoga, se anulan los restantes términos. Resulta así que las expresiones (1) constituyen una transformación canónica en E_{2n}.

La generalización de estas transformaciones a funciones $F(q, p)$ de $2n$ variables es inmediata y conduce a la misma expresión formal que en el caso $n = 1$, es decir

$$F(E^{\alpha V} q_j, E^{\alpha V} p_k) = E^{\alpha V} F(q_j, p_k) \equiv F(q_j p_k) + \alpha(VF) + \frac{\alpha^2}{2} (V(VE)) +$$

donde, naturalmente, los paréntesis tienen por definición la dada al comienzo de esta página, y no otra.

7. *Propiedades de las Transformaciones.*

Las transformaciones definidas en parágrafos anteriores gozan de ciertas propiedades, unas comunes a la teoría general y otras particulares, propias del especial carácter canónico de las mismas.

Definiciones: el operador

$$E^{\alpha V}$$

se dice depender del parámetro (discreto o continuo) α y de la función característica V. A un operador tal, corresponde siempre, a saber

$$\alpha(V, \ )$$

llamado operador infinitesimal de la transformación.

PROPIEDAD DE GRUPO. Transformando $E^{\beta V}\Phi$ con $E^{\alpha V}$ tenemos

$$E^{\alpha V} E^{\beta V} \Phi = E^{\beta V} \Phi + \alpha(V, E^{\beta V}\Phi) + \frac{\alpha^2}{2} (V(V, E^{\beta V}\Phi)) + \qquad = \Phi + \beta(V\Phi) +$$

$$+ \alpha(V\Phi) + \frac{\alpha^2}{2} (V(V\Phi)) + \alpha\beta(V(V\Phi)) + \frac{\beta^2}{2} (V(V\Phi)) +$$

o sea

$$E^{\alpha V}E^{\beta V} = E^{(\alpha+\beta)V} \tag{1}$$

y observando además que si $\alpha + \beta = 0$ resulta

$$E^{\alpha V}E^{-\alpha V} = 1 \tag{2}$$

puesto que

$$E^{\circ} = 1 \tag{3}$$

por definición de $E^{\alpha V}$; las relaciones (1), (2), (3) nos dicen que las transformaciones $E^{\alpha V}$ forman grupo respecto del parámetro α.

TRANSFORMADA DE UN PARÉNTESIS DE POISSON. Consideremos la función $(F;G)$ y el operador $E^{\alpha V}$, de acuerdo con (2) # 6 tenemos

$$E^{\alpha V}(F,G) = (F,G) + \alpha(V(F,G)) + \frac{\alpha^2}{2}(V,(V,(FG))) +$$

o sea

$$E^{\alpha V}(F,G) = (F,G) + \alpha((V,F),G) + \alpha(F,(V,G)) + \frac{\alpha^2}{2}((V,(V,G)),G) + \alpha^2((V,F),(V,G)) +$$

$$+ \frac{\alpha^2}{2}(F,(V,(V,G)) +$$

de donde sacamos

$$E^{\alpha V}(F,G) = (E^{\alpha V}F, E^{\alpha V}G) \tag{4}$$

PRODUCTO DE TRANSFORMACIONES. Teniendo en cuenta (4) y la definición de $E^{\alpha V}$ sale

$$E^{\beta W}E^{\alpha V} = E^{\alpha E^{\beta W}V}E^{\beta W} \tag{5}$$

y el operador

$$E^{\alpha E^{\beta W}V} = E^{\beta W}E^{\alpha V}E^{-\beta W} \tag{6}$$

se dice transformado de $E^{\alpha V}$ por $E^{\beta W}$

INVARIANCIA. Se dice que una función $F(q, p)$ de los n pares (q, p) es invariante respecto de una transformación dada, o admite esta transformación, cuando aplicando a sus argumentos esta transformación, se halla que la función no cambia.

Diremos que una función $F(q, p)$ admite la transformación infinitesimal $(W;F)$ si la función es una integral de la ecuación $(W;F) = 0$.

Tendremos entonces el teorema: "La condición necesaria y suficiente para que una función $F(q, p)$ admita un grupo de transformaciones a un parámetro es que esta función admita la transformación infinitesimal contenida en el grupo"

CONMUTABILIDAD. Las transformaciones $E^{\alpha V}$, $E^{\beta W}$ son conmutables si las funciones características V, W satisfacen la ecuación.

$$(V,W) = 0$$

En efecto, en tal caso

$$E^{\beta W}\, V = V \qquad E^{\alpha V} W = W$$

y por consiguiente

$$E^{\alpha V} E^{\beta W} = E^{\beta W}\, E^{\alpha V}$$

según (5).

DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES CONMUTABLES. Dado el grupo $E^{\alpha V}$ definido en E_{2n} su operador infinitesimal es el paréntesis

$$(V,\ ) \equiv \sum_1^n (V,\ )_j$$

como hemos visto más arriba y de acuerdo con 6. Consideremos ahora a $(V,\ )$ descompuesto en la forma

$$(V,\ ) = (V,\ )' + (V,\ )'' \tag{7'}$$

donde

$$(V,\ )' = \sum_1^k (V,\ )_j \qquad (V,\ )'' = \sum_{k+1}^n (V,\ )_j$$

Podemos definir entonces los grupos $E'^{\alpha V}$ y $E''^{\alpha V}$ en los espacios E_{2k} y $E_{2(n-k)}$ respectivamente. Mostraremos entonces que

$$E^{\alpha V} = E'^{\alpha V} E''^{\alpha V} \tag{7''}$$

en $E_{2n} = E_{2k} \times E_{2(n-k)}$. En efecto, puesto que

$$(V(V;\ )')'' = (V(V;\ )'')'$$

ya que sus campos de definición guardan la relación $E_{2k} \cap E_{2(n-k)} = 0$.

Haciendo $k = 1$ y aplicando reiteradamente (7), el grupo $E^{\alpha V}$ puede descomponerse en n factores, cada uno de los cuales opera sobre un par (q, p).

No dependiendo esta descomposición en factores nada más que de la descomposición en sumandos (7') la primea será conmutable, puesto que lo es la segunda.

8. *Transformaciones a parámetro funcional.*

Sea el sistema de $r \leqq n$ funciones $h(q, p)$ en involución, es decir tales que $(h_i; h_k) = 0$. Si la función $V(q, p)$ característica de la transformación $E^{\alpha V}$ es de la forma

$$V(q, p) = F(h)$$

donde (h) está por $(h_1, h_2, \quad h_r)$, veamos qué forma adopta dicha transformación. Recurriendo a la expresión (4) # 1 y siendo $G(q, p)$ una función cualquiera de (q, p), tenemos

$$(V, G) = (F, G) = \sum_1^r \frac{\partial F}{\partial hs} (h_s, G) = \sum_1^r F_s'(h_s, G)$$

además las sucesivas derivadas de F respecto de las h son invariantes de grupo, pues son funciones de las h, resulta entonces para nuestra transformación

$$E^{\alpha V} = E^{\alpha F'} \equiv 1 + \alpha \sum_1^r F_s'(h_s,\ ) + \frac{\alpha^2}{2} \sum_1^r \sum_1^r F_s' F_t'(h_s(h_t,\ )) + \tag{1}$$

El operador así definido puede interpretarse como dependiente de los $r \leqq n$ parámetros $\alpha F_s'$ que son a su vez funciones de q y p. Estando las funciones h en involución podemos escribir el operador anterior bajo la forma de producto de r operadores,

$$E^{\alpha F} \equiv E^{(\alpha F_1')h_1} E^{(\alpha F')h_2} \qquad E^{(\alpha F_r)hr} \tag{2}$$

que conmutan entre sí, # 7.

Consideremos ahora la función Φ_k de las variables (q, p). Si Φ_k admite las $r - 1$ transformaciones infinitesimales $(h_s; \Phi_k)$, $s \# k$, la (1) nos da:

$$E^{\alpha F}\Phi_k = E^{(\alpha F'\alpha)hk}\,\Phi_k \tag{3}$$

y si se tiene $\Psi(\Phi_j)$ resultará también

$$E^{\alpha F}\Psi(\Phi_j) = \Psi(E^{(\alpha Fj')hj}\Phi_j)$$

Esta última expresión nos reduce la sola transformación (1) dependiente de $F(h)$ y del parámetro α a r transformaciones dependientes de las funciones h y de los parámetros $\alpha F'_j$.

ALGUNOS GRUPOS DE FUNCIONES (h) QUE CONDUCEN A TRANSFORMACIONES DE INTERÉS. Sean las $r \leqq n$ funciones $h_i = q_i$, $i = 1, 2, \quad r$. Evidendemente $(q_i; q_k) = 0$. Toda función de la forma $\Phi_k(q_i, p_i)$ admite las transformaciones infinitesimales $(h_s; \Phi_k)$, $s \neq k$, y por lo tanto en caso de ser $\Phi_k = p_k$ tenemos

$$E^{\alpha F}p_k = E^{(\alpha Fk')qk}\,p_k = p_k + \alpha F_k'$$

en virtud de (3). Y para la transformada de $\Psi(q_i, p_i)$ sale con (4)

$$E^{\alpha F}\Psi(q_i p_i) = \Psi(q_i, p_i + \alpha F_i')$$

Otro grupo de funciones h —muy general— es el de variables separadas, es decir

$$h_i = h_i(q_i, p_i) \qquad i = k, 2, \quad r$$

que nos deja amplia libertad de elección para la forma de las funciones h de los pares de variables (q, p) correspondientes. Las relaciones (3) y (4) se escriben

$$(3') \quad E^{\alpha F(h)}\Phi(q_k, p_k) = E^{(\alpha Fk')hk}\Phi_k, \quad (4') \quad E^{\alpha F(h)}\Psi(q_j p_j) = \Psi(E^{(\alpha F')hj}q_j;\, E^{(\alpha F')hj})$$

Observemos que al depender de un solo par de variables, cada transformación está encuadrada dentro de las consideraciones hechas en el parágrafo 5.

9. *Sistema de ecuaciones diferenciales asociado a un grupo.*

Sea el grupo de transformaciones

$$q = E^{\alpha V'}q' \qquad p = E^{\alpha V'}p' \tag{1}$$

cuya función característica $V(q', p'; \alpha)$ es analítica en el recinto E_{2n}.

Si existe un intervalo $0 \leqq \alpha < \alpha_1$, donde el grupo (1) admite derivadas respecto de α, a saber

$$\frac{dq}{d\alpha} = E^{\alpha V'}(V', q') \qquad \frac{dp}{d\alpha} = E^{\alpha V'}(V', p')$$

o teniendo en cuenta (4) # 7, resulta

$$\frac{dq}{d\alpha} = (V, q) \qquad \frac{dp}{d\alpha} = (V, p) \tag{2}$$

un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden (ecuaciones canónicas) cuyos segundos miembros son analíticos para todo

$$|q_i| < r_i \qquad |p_i| < r_i \qquad |\beta| < \mu$$

Un sistema tal se dice ser asociado al grupo de transformaciones canónicas en cuestión.

10. *Analiticidad de los grupos de transformaciones.*

Recíprocamente, dado el sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales canónicas

$$\frac{dq}{d\alpha} = (V, q) \qquad \frac{dp}{d\alpha} = (V, p) \tag{1}$$

cuya función característica $V(q, p; \alpha)$ es analítica en el recinto

$$|q_i| < r_i \qquad |p_i| < r_i \qquad |\beta| < \mu$$

existen $2n$ integrales que son idénticas a las transformaciones

$$q = E^{\alpha V'} q' \qquad p = E^{\alpha V'} p' \tag{2}$$

y analíticas en el entorno de $\alpha = 0$, que se reducen a q_i', p_i', $i = 1, 2, \ldots n$ para $\alpha = 0$. (Cauchy).

En efecto, sea $V' = V(q', p'; \alpha)$, tenemos

$$\left(\frac{dq}{d\alpha}\right)_0 = (V', q'); \left(\frac{d^2q}{d\alpha^2}\right)_0 = \frac{\partial}{\partial q}(V', q')\left(\frac{dq}{d\alpha}\right)_0 + \frac{\partial}{\partial p'}(V, p')\left(\frac{dp'}{d\alpha}\right)_0 = (V', (V', q'))^* \qquad \text{etc.,}$$

y entonces las series

$$q(\alpha) = q' + \alpha q_0' + \frac{1}{2}\alpha^2 q_0'' + \ldots, p(\alpha) = p' + \alpha p_0 + \frac{1}{2}\alpha^2 p_0'' + \ldots$$

se escribirán

$$q = q' + \alpha(V', q') + \frac{1}{2}\alpha^2(V', (V', (V', q'))) + \ldots; \; p = p' + \alpha(V', p') + \frac{1}{2}\alpha^2(V', (V', p')) + \ldots$$

lo cual prueba la primera parte del teorema.

---

* pues

$$\frac{\partial}{\partial q'}(V', q')\left(\frac{dq'}{d\alpha}\right)_0 + \frac{\partial}{\partial p'}(V', p')\left(\frac{dp'}{d\alpha}\right)_0 = \frac{\partial}{\partial q'}(V', q')(V', q') + \frac{\partial}{\partial p'}(V', p')(V', p') =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial q}(V', q')\frac{\partial V'}{\partial p'} + \frac{\partial}{\partial p}(V', p')\frac{\partial V'}{\partial q'} = (V', (V', q))$$

Resta ahora demostrar la analiticidad de las soluciones en un entorno de q_i', p_i'. Sea entonces N una cota superior de V en su dominio de analiticidad, la función

$$B = N\left(1-\frac{\beta}{\mu}\right)^{-1} \ln\left(1-\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)$$

donde

$$\varepsilon = \min\{r_i\} \qquad a_i = \frac{\varepsilon}{r_i} \leqq 1 \qquad \sigma = \sum_1^n a_i(q_i + p_i)$$

será entonces mayorante de V Definiendo ahora las funciones

$$Q_i = q_i - q_i' \;\; ; \;\; P_i = p_i - p_i' \qquad \sigma' = \sum_1^n a_i(q_i' + p_i') \qquad S = \sum_1^n a_i(Q_i + P_i)$$

a cada ecuación del sistema corresponderán las ecuaciones auxiliares

$$\frac{dQ_i}{d\alpha} = \left|\frac{\partial B}{\partial P_i}\right| = \frac{Na_i}{\left(1-\frac{\beta}{\mu}\right)(\varepsilon' - S)} \qquad \frac{dP}{d\alpha} = \left|\frac{\partial B}{\partial q_i}\right| = \frac{Na_i}{\left(1-\frac{\beta}{\mu}\right)(\varepsilon' - S)}$$

donde se ha puesto: $\varepsilon' = \varepsilon - \sigma$. Observando ahora que

$$\frac{dS}{d\alpha} = \frac{2N\rho^2}{\left(1-\frac{\beta}{\mu}\right)(\varepsilon' - S)} \tag{3}$$

siendo $\rho^2 = \sum_1^n a^2{}_i \leqq n$, tenemos la cadena de igualdades

$$\frac{1}{a_i}\frac{dQ_i}{d\alpha} = \frac{1}{a}\frac{dP_i}{d\alpha} = \frac{1}{2\rho^2}\frac{dS}{d\alpha} = \frac{N}{\left(1-\frac{\beta}{\mu}\right)(\varepsilon' - S)}$$

y notando que las funciones $\frac{1}{a_i}\frac{dQ_i}{d\alpha}$, $\frac{1}{a_i}\frac{dP_i}{d\alpha}$ y $\frac{1}{2\rho^2}\frac{dS}{d\alpha}$ por definición se anulan con α, y tienen derivadas iguales, ellas serán idénticas. Entonces

$$Q_i = P_i = \frac{a_i}{2\rho^2} S$$

y la (3) nos proporciona la ecuación para determinar S. La solución que se reduce a cero para $\alpha = 0$, es

$$S(\alpha, \beta) = \varepsilon' - \sqrt{\varepsilon'^2 - \frac{4\rho^2 N\alpha}{1-\beta/\mu}}$$

de aquí que tengamos para las mayorantes de las $2n$ integrales (q, p) del sistema (1)

$$q \ll q_i' + \frac{a_i}{2\rho^2} S(\alpha, \beta) \qquad p_i \ll p_i' + \frac{a_i}{2\rho^2} S(\alpha, \beta)$$

funciones éstas que resultan ser analíticas para todo $|\beta| < \mu$ y $|\alpha| < \alpha_1(\beta)$ donde $\alpha_1(\beta)$ es la distancia de punto de ramificación de S al origen.

Queda probada así la última parte del teorema.

11. *Convergencia de las integrales.*

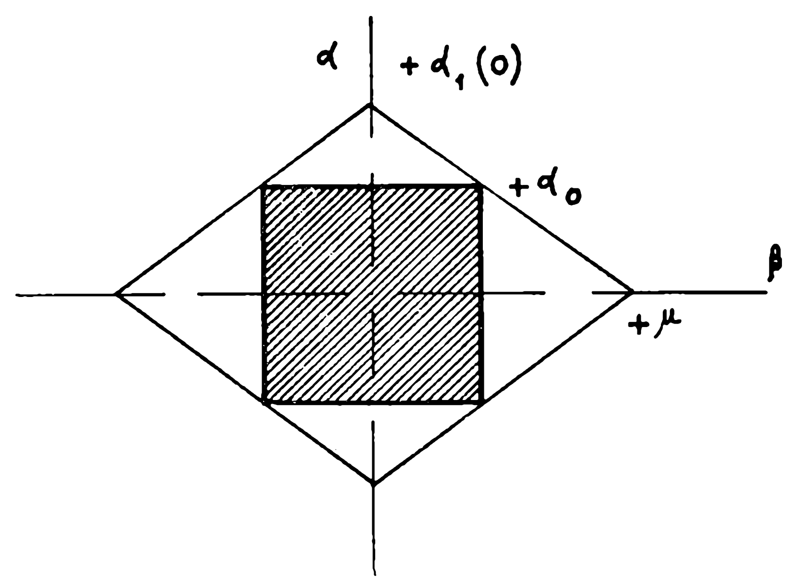
Siendo $S(\alpha, \beta)$ mayorante de las $2n$ integrales (2) # 10 del sistema (1) # 10, éstas convergen al menos en el recinto de convergencia de S. Dicho recinto está dado por las desigualdades

$$(1) \quad |\beta| < \mu \qquad (1') \quad |\alpha| < \alpha_1(\beta)$$

donde $\alpha_1(\beta)$ es el punto de ramificación de $S(\alpha, \beta)$, es decir

$$\alpha_1(\beta) = \frac{(\varepsilon - \sigma)^2}{4\rho^2 N}\left(1 - \frac{\beta}{\mu}\right) \quad (2)$$

Tenemos así que S converge en un rombo centrado en el origen del plano (α, β) y de semi-diagonales $(0, \mu)$ y $(0, \alpha)$ respectivamente. (Figura 1*a*).



Diremos ahora:

Si α_0 es raíz de la ecuación $\alpha_0 = \alpha_1(\alpha_0)$, es decir

$$\alpha_0 = \frac{\mu}{1 + \dfrac{4\rho^2 \mu N}{(\varepsilon - \sigma')^2}} < \mu \tag{3}$$

existe un recinto definido por

$$|\beta| < \alpha_0 \qquad |\alpha| < \alpha_0 \tag{4}$$

en que $S(\alpha, \beta)$ y por consiguiente las integrales (2) # 10, convergen uniformemente para todo α que satisfaga a las (4).

En efecto, siendo $\alpha_0 < \mu$ por (3), sale

$$|\beta| < \alpha_0 < \mu$$

y entonces β satisface la condición (1). Ahora siendo $|\beta| < \alpha_0$ tenemos

$$\alpha_1(\beta) > \alpha_1(\alpha_0) = \alpha_0$$

y por tanto

$$|\alpha| < \alpha_0 < \alpha_1(\beta)$$

que es la (1'). Queda probada así la convergencia en el recinto (4), y que dicha convergencia es uniforme se desprende del hecho que α_0 es una constante independiente —al menos— de α y β, según (3).

COROLARIO: Las transformaciones de la forma

$$q = E^{\alpha V(\alpha)}\, q' \qquad P = E^{\alpha V(\alpha)} p$$

convergen uniformemente en el recinto (4).

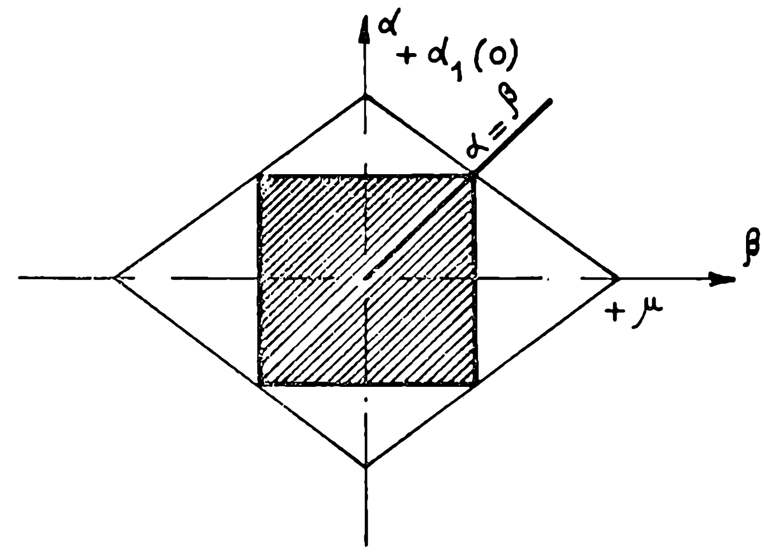
En efecto, pudiéndose elegir arbitrariamente α y β siempre que

$$|\alpha| < \alpha_0 \qquad |\rho| < \alpha_0$$

puede ponerse en particular

$$\alpha = \beta$$

y las transformaciones (1) # 10 se reducirán al grupo precedente.



12. *Convergencia de los grupos de transformaciones que genera una función característica homogénea.* (Cf. # 5).

Si V es homogénea de grado m en q, p (en E_2), se escribe

$$V = \sum_0^m B_k q^k p^{m-k}$$

y sale

$$V \ll \sum_0^m |B_k|\, q^k p^{m-k} \ll N(q + P)^m \ll N(2S)^m \qquad 2S \gg q + p$$

si N es el máximo valor absoluto de sus coeficientes. La mayorante S satisface la ecuación

$$\frac{dS}{d\alpha} = m2^m N S^{m-1}$$

cuyas integrales para $m = 1$, $m = 2$, y $m > 2$, son respectivamente

$$S = S_0 + 2N\alpha \qquad\qquad S = S_0\, e^{8N\alpha}$$

$$S = S_0[1 - m(m-2)2^m N S_0^{m-2}, \alpha]^{\frac{1}{2-m}}$$

Se observa así que si V es lineal o cuadrática, los grupos de transformaciones que genera, son analíticos para todo α.

Si tenemos $m > 2$, hay un punto singular en

$$\alpha_1(S_0) = [m(m-2)2^m N S_0^{m-2}]^{-1}$$

y las transformaciones serán analíticas para $|\alpha| < \alpha_1(S_0)$.

13. *Integración directa de los Sistemas Dinámicos.*

Sea $H(q, p)$ una función de las $2n$ variables (q, p), analítica en un entorno del origen. Las $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden

$$q = (H, q) \qquad P = (H, p) \tag{1}$$

se dicen ser canónicas (# 9) o hamiltonianas y definen el movimiento de un sistema dinámico con n grados de libertad, si H representa la energía del mismo. Suponemos que H no contiene explícitamente el tiempo, o lo que es lo mismo, suponemos conservativo al sistema.

Si $q(0)$, $p(0)$ son $2n$ constantes correspondientes a un punto regular de la función H, tendremos que el grupo de transformaciones canónicas a parámetro continuo t,

$$q_{(t)} = E^{tH_0}\, q(0) \qquad P_{(t)} = E^{tH_0}\, p(0) \tag{2}$$

representa un sistema de integrales analíticas (# 10) para

$$|\, q_i(0)\,| < r_i \qquad |\, P_i(0)\,| < r_i \qquad 0 \leqq t \leqq t_1 = \frac{(t - \sigma)^2}{4\rho^2 N}$$

donde N es una cota superior de $|\, H_0\,|$ en su dominio de analiticidad, y σ_1, r_i, t, p tienen idéntico significado al de las correspondientes cantidades del # 10.

Toda función $F(q, p)$ constante será también integral del sistema (1). En este caso F admitirá el grupo (2) o lo que es lo mismo es una integral de la ecuación $(H; F) = 0$.

14. *Sistemas Dinámicos que dependen de un parámetro.*

Dado el sistema canónico

$$q = (H,q) \qquad \rho = (H,\rho) \qquad H = H_0 + \alpha H_1 + \alpha^2 H_2 + \tag{1}$$

cuya hamiltoniana es función analítica de las $2n$ variables (q, p) y del parámetro α en un cierto entorno del origen de E_{2n} y el intervalo $|\,\alpha\,| < \mu$ respectivamente.

El grupo de transformaciones correspondientes a las condiciones iniciales $q(0)$, $p(0)$, dependerá de α y lo escribiremos

$$q_{(t,\alpha)} = E^{tH(0)}\, q(0) \qquad p_{(t,\alpha)} = E^{tH(0)}\, p(0) \tag{2}$$

Estas integrales son analíticas para $0 \leqq t < t_1$ y sus coeficientes dependen de α; mostraremos ahora cómo es posible expresar las integrales de (1) como funciones analíticas de α, cuyos coeficientes dependen del tiempo.

15. *Integración Formal.*

Dado el sistema definido en el parágrafo anterior y en esas condiciones, diremos: Si $V(q, p; \alpha)$ y $F(q, p; \alpha)$ son funciones analíticas en un cierto entorno del origen y en el intervalo $|\,\alpha\,| < \mu'$, y vale la relación

$$E^{\alpha V} F = H \tag{1}$$

entre sí y H; además si las $2n$ constantes (q_0, p_0) están ligadas a las $q(0)$, $p(0)$, por el grupo de transformaciones

$$q(0) = E^{\alpha V_0}\, q_0 \qquad p(0) = E^{\alpha V_0}\, p_0 \qquad V_0 \equiv V(q_0, p_0; \alpha) \tag{2}$$

las integrales (2) # 14 del sistema (1) # 14 se expresarán como

$$q(\alpha, t) = E^{\alpha V} E^{tF_0} q_0; \qquad p(\alpha, t) = E^{\alpha F} E^{tF_0} p_0 \tag{3}$$

En efecto, según la expresión (5) # 7, tenemos

$$E^{tF_0} E^{\alpha V_0} = E^{\alpha V} E^{tF_0} = E^{tE^{\alpha V} F_0} E^{\alpha V_0} \qquad V = E^{tF_0} V_0$$

de tal suerte que

$$q(\alpha, t) = E^{tE^{\alpha V} F_0} E^{\alpha V_0} q_0 \qquad p(\alpha, t) = E^{tE^{\alpha V} F_0} E^{\alpha V_0} p_0$$

se reducen a las (2) # 14 en virtud de (1) y de (2).

16. *Orbita intermediaria.*

Las expresiones

$$q' = E^{tF_0} q_0 \qquad p' = E^{tF_0} p_0 \tag{1}$$

que se interpretan como las integrales de un nuevo sistema canónico

$$q' = (F', q') \qquad p' = (F', p') \tag{2}$$

son funciones analíticas del tiempo, convergentes para $0 \leqq t < t_1$, tal como (2) # 13. Los $2n$ parámetros (q', p') definen en E_{2n} y en el intervalo $(0, t_1)$ una trayectoria llamada órbita intermediaria del sistema (1) # 14 relativa a F.

En la adecuada elección de la función F yace la posibilidad de extender el intervalo $(0, t)$ de convergencia de la órbita intermediaria del sistema. Para ello basta recordar (# 12) que si la función característica es lineal o cuadrática en (q, p) el intervalo de convergencia es infi ito. Además no es preciso que F sea lineal o cuadrática sino solamente función derivable de formas (h) lineales o cuadráticas en involución (# 8). Con estas observaciones estamos en condiciones de hacer la

17. *Determinación de la Función Característica.*

Si $H(q, p; \alpha)$ se reduce para $\alpha = 0$ a una función $J(h)$, de las $r \leqq n$ funciones h_i de (q_i, p_i) respectivamente, las (2) # 14 y (3) # 15 pasan a ser las integrales particulares

$$q(t, 0) = E^{tJ_0} q_0 \qquad p(t, 0) = E^{tJ_0} p_0$$

que en virtud de # 8 se escriben

$$q(t, 0) = E^{(tJ_0')h_0} q_0 \qquad p(t, 0) = E^{(tJ_0')h_0} p_0 \tag{1}$$

Entonces: si las integrales particulares (1) convergen para $|\, tJ_0' \,| < \infty$ es posible determinar la función $V(q, p; \alpha)$ de tal modo $F(a, p; \alpha) \equiv K(h; \alpha)$ y las ecuaciones que definen la órbita intermediaria

$$q'(t) = E^{(tK_0')h} q_0 \qquad p'(t) = E^{(tK_0')h} p_0 \tag{2}$$

serán convergentes para $|\, t K_0' \,| < \infty$ y se reducen a (1) para $\alpha = 0$.

En efecto, escribiendo

$$K = J(h) + \alpha K_1 + \alpha^2 K_2 + \qquad ; \; V = V_1 + \alpha V_2 + \alpha^2 V_3 + \qquad (3)$$

la (1) # 15 nos da la serie de ecuaciones

$$K_0 = H_0 = J(h)$$
$$(V_1, K) + K_1 = H_1$$
$$(V_2, K) + K_2 = H_2 - \frac{1}{2}(V,(V,K))$$

Si cada función H_i se descompone en la forma

$$H_i = S_i(h) + Q_i(q, p)$$

y las ecuaciones precedentes toman la forma genérica,

$$K_s(h) + (V_s, K) = M_s(h) + L_s(q, p)$$

Determinaremos V escribiendo

$$K_s(h) = M_s(h) \quad (4) \qquad (V_s, K) = L_s(q, p) \qquad (4')$$

donde las funciones $M_s(h)$, $L_s(q, p)$ tienen las expresiones

$$M_1 = S(h) \qquad L_1 = Q_1(q_1 p)$$

$$M_2 = S_2(h) - \frac{1}{2}(V_1 L_1); \qquad L_2 = Q_2(q_1 p) - \frac{1}{2}(V_1 L_1) q,p$$

$$M_3 = S.(h) - \frac{1}{2}(V_1 L_2); \qquad L_? = Q.(q,p) - \frac{1}{2}(V_1, L_2) q,p$$

$$- \frac{1}{2}(V_2 L); - \frac{1}{6}(V_1(V_1 L_1)); \qquad - \frac{1}{2}(V_2 L_1) qp - \frac{1}{6}(V_1(V_1 L_1)) q,p$$

Los sucesivos términos de V se determinan a través de las ecuaciones (4′).

Siendo K por (4) función de las solas (h) las (2) serán convergentes para $| tK' | < \infty$ tal como sucede con (1), y además $K' = J' + \alpha M' +$ se reduce a J' para $\alpha = 0$, de donde (2) tiende a (1) con $\alpha \to 0$.

Las n funciones

$$g_i = K_{i0}' = \frac{\partial K_0}{\partial h_i}$$

se denominan "exponentes característicos" de las integrales del sistema.

La órbita intermediaria (2) conserva las propiedades de aquella definida por las integrales particulares (1), dada la forma en que se ha determinado K. En particular si las funciones (h) son formas cuadráticas definidas, las $2n$ integrales (1) admitirán a lo sumo $r \leqq n$ períodos (# 5) $2\pi/K_0'$ respectivamente por par, si $J(h)$ depende de r funciones h. Pero la órbita intermediaria (2) sí dependerá de n períodos $2\pi/K_0'$ por par de variables, pues aquellas $n - r$ funciones h ignorables en J habrán de aparecer por lo menos en M_1. El exponente característico correspondiente será por lo menos del orden de α y el par de integrales correspondientes de (2) admitirá un período del orden de $2\pi/\alpha M_1'$, esto es, mayor que los restantes. De lo dicho se desprende que las integrales de largo período en (2) tienden a constantes en (1) cuando $\alpha \rightarrow 0$.

18. *Convergencia de los desarrollos de V y K.*

Según hemos visto en el # 11, las transformaciones

$$E^{\alpha V_0} q_0 \qquad E^{\alpha V_0} p_0$$

convergen si

$$|q_{0i}| < r_i \qquad |p_{0i}| < r_i \qquad |\alpha| < \sigma_1 = \frac{\mu'}{1 + \dfrac{4\rho^2\mu' N}{(\varepsilon - \sigma_0)^2}} < \mu'$$

Además supongamos que V y K converjan para todo $|q_{0i}|$, $|p_{0i}| < r_i$ y $|\alpha| < \mu$. En tal caso la transformada de K_0 por V_0, es decir

$$E^{\alpha V_0} K_0(h, \alpha) = K(E^{\alpha V_0} h_0; \alpha)$$

Convergerá por el teorema de Riemman para

$$|\alpha| < \sigma_1 = \frac{\mu'}{1 + \dfrac{4\rho^2\mu' N}{(\varepsilon - \sigma_0)^2}}$$

pero dicha transformada es por definición, la función H que sabemos analítica para $|q_{0i}|$, $|p_{0i}| < r_i$ y $|\alpha| < \mu$; es preciso entonces poner

$$\mu = \frac{\mu'}{1 + \dfrac{4\rho^2\mu' N}{(\varepsilon - \sigma_0)^2}}$$

de donde K_0 y V_0 serán analíticas para $|q_{0i}|$, $|p_{0i}| < r_i$ y $|\alpha| < \alpha_1 = \dfrac{\mu}{1 + \dfrac{4\rho^2\mu N}{(\varepsilon - \sigma_0)^2}}$

19. *Teorema de Poincaré.*

Hemos determinado V y K en # 17 a condición de que las funciones del grupo (h) sean cuadráticas en (q, p) de manera que la órbita intermediaria (2) # 17 tenga por recinto de analiticidad a $|q_{0i}| < r_i$, $|p_{0i}| < r_i$

y $| tK_0' | < \infty$. Ahora bien, siendo $V(q_0, p_0; \alpha)$ analítica en un entorno $| q_{0i} | < r_i$, $| p_{0i} | < r_i$ del origen y para todo α tal que $| \alpha | < \mu'$, la función

$$V = E^{tK_0} V(q_0, p_0; \alpha) = V(q', p'; \alpha)$$

conservará dicho carácter si

$$| q_i' | < r_i \qquad | p_i' | < r_i \qquad | \alpha | < \mu'$$

En estas condiciones, el grupo (3) # 15 se interpreta como la transformada de (2) según V. Dichas integrales convergen en virtud de (6) # 11 para

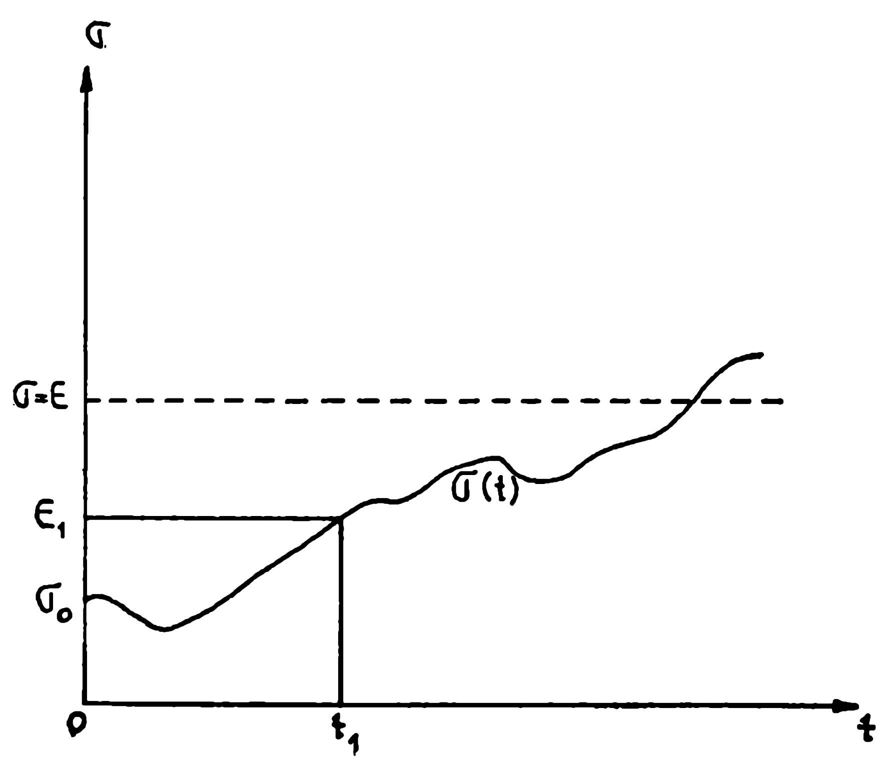
$$| q_i' | < r_i \qquad | p_i | < r_i \quad \text{y} \quad | \alpha | < \frac{\mu}{1 + \dfrac{4\rho^2\mu N}{(\varepsilon - \sigma_0)^2}} \quad \sigma' = \sum_1^n a_i(q_i' + p_i')$$

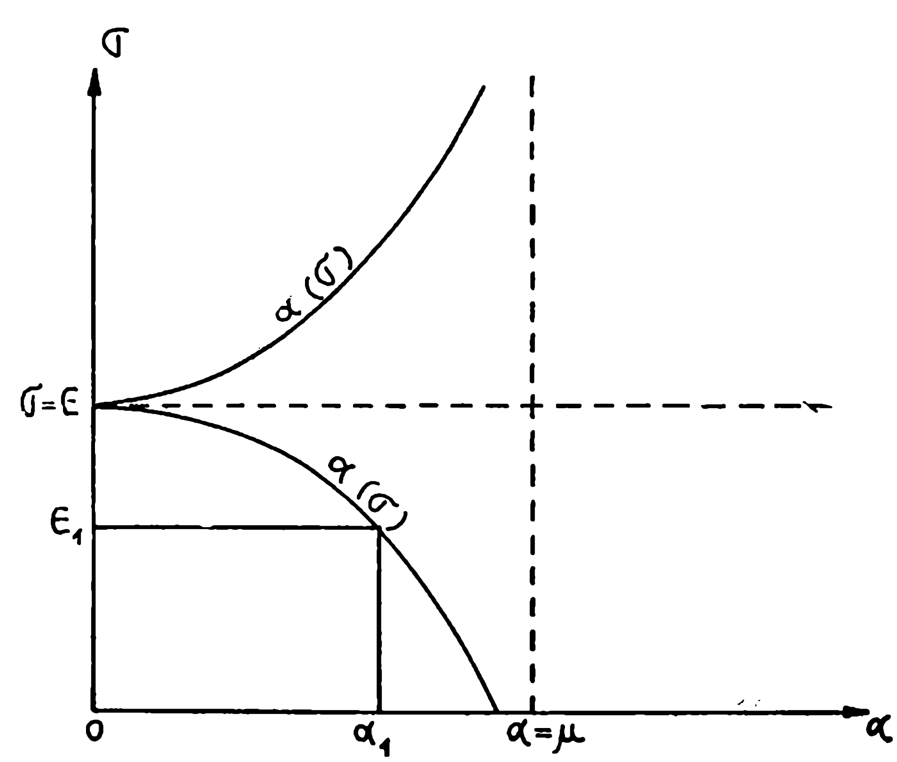
Diremos entonces que: "dado arbitrariamente $0 \leqq \alpha, < \mu$ puede determinarse t tal que las integrales (3) # 15 converjan para todo $0 \leqq t < t$, y para todo $0 \leqq \sigma < \alpha_1$. (Teorema de Poincaré).

Efectivamente, dado que $| q_0 |$, $| p_0 | < E$, existe un intervalo $(0, t)$ tal que $| \sigma' | \leqq E_1 < \varepsilon$ si $0 \leqq t < t_1$, en virtud de la continuidad de las (2) # 17. Entonces las relaciones

$$| \sigma' | \leqq \varepsilon < \varepsilon_1 \qquad | q_{0i} | < r_i, \qquad | p_{0i} | < r_i, \qquad 0 \leqq t < t_1, \qquad | \alpha | \leqq \alpha_1 = \frac{\mu'}{1 + \dfrac{4\rho^2\mu' N}{(\varepsilon - \varepsilon)^2}}$$

reemplazan las anteriores y queda demostrado el teorema (figs. 3 y 4).





20. *Existencia de Soluciones Periódicas.*

Las integrales del sistema (1) # 14, es decir

$$q(t, \alpha) = E^{\alpha V} q(t) \qquad p(t. \alpha) = E^{\alpha V} p(t) \tag{1}$$

son $2n$ funciones analíticas de $q, p; \alpha$ en un recinto $|q_i|, |p_i| < r_i$, $0 \leqq \alpha < \alpha_1$ y el intervalo $0 \leqq t < t_1(\varepsilon)$ en virtud del teorema de Poincaré.

Si por lo menos hay $r \leqq n$ funciones h_1 en $K(h; \alpha)$ que sean cuadráticas definidas, existirán al menos r pares de integrales

$$q(t) = E^{(tK')hr} q_{0r} \qquad p(t) = E^{(tK')hr} p_{0r} \qquad r = 1, 2, \quad \nu = n$$

de la órbita intermediaria, que serán periódicas de períodos $2\pi/K_r'$ respectivamente por par. (# 5 y # 16)

Sea entonces (q_s, p_s) el s-ésimo par de variables intermediarias periódicas. Si definimos ahora las $2n$ funciones no nulas

$$\left.\begin{array}{l} \eta_i(0) = \{q_i(0; \alpha)\}\, q_{0j}, p_{0j} = 0 \\ \xi_i(0) = \{p_i(0; \alpha)\}\, q_{0j}, p_{0j} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{lll} i = 1, 2, 3 & n & \\ j = 1, 2, 3 & s-1,\ s+1, & n \end{array} \tag{2}$$

de las solas variables q_{0s}, p_{0s}, tendremos las relaciones

$$\left.\begin{array}{l} q_i(0, \alpha) - \eta_i(0) = \sum\limits_j q_{0j}\, \Phi_j(0) + \sum\limits_j p_{0j}\, \psi_j(0) \\ p_i(0, \alpha) - \xi_i(0) = \sum\limits_j q_{0j}\, \Phi_j'(0) + \sum\limits_j p_{0j}\, \psi_j'(0) \end{array}\right\} \begin{array}{lll} i = 1, 2, 3 & n & \\ j = 1, 2, 3 & s-1,\ s+1, & n \end{array}$$

cuyos segundos miembros son analíticos en el recinto $|q_{0j}| < \varepsilon$; $|p_{0j}| < \varepsilon$ y el intervalo $0 \leqq \alpha < \alpha_1 < \mu$. En tales condiciones sus transformadas por E^{tK^0} devienen

$$q_i(t_1 \alpha) - \eta_i(t) = \sum_j E^{(tK')hj} q_{0j} \Phi_i(\theta) + \sum_j E^{(tK')hj} p_{0j} \psi_{0j}(\theta)$$

$$p_i(t, \alpha) - \xi_i(t) = \sum_j E^{(tK')hj} q_{0j} \Phi_j(\theta) + \sum_j E^{(tK')hj} p_{0j} \psi_j(\theta)$$

ya que las $\eta(0)$, $\xi(0)$ dependen solamente de las q_{0j}, p_{0j} por definición (2). Entonces, siendo las h_j cuadráticas (definidas si $j \leqq \nu$) es (# 5):

$$E^{(tK')hj} q_{0j} = q_{0j} a_j(t) + p_{0j} b_j(t); \; E^{(tK')hj} p_{0j} = q_{0j} a_j'(t) + p_{0j} b_j(t)$$

donde a_j, b_j, a_j', b_j' son coeficientes analíticos para todo t (# 12). Además $\Phi_j(\theta)$, $\psi_j(\theta)$, $\Phi_j'(\theta)$ serán analíticas para

$$\begin{array}{llll} |q_{0s}|, & |p_{0s}| < r_s' < r_s & |q_{0j}|, & |p_{0j}| < \zeta_1 < r_i \\ & 0 \leqq \alpha < \alpha_1 < \mu & (\theta) < t_1(\zeta_1) & \end{array}$$

siendo θ un punto intermedio del intervalo $(0, t)$. En consecuencia, tanto las a_j, b_j, a_j', b_j' como las $\Phi_j, \psi_j, \Phi_j', \psi_j'$ estarán acotadas para todo $0 \leqq t < t_1(\zeta_1)$, es decir

$$|a_j| < A_j \qquad |b_j| < B_j \qquad |\Phi_j| < F_j \qquad |\psi_j| < G_j \quad \text{si} \quad 0 \leqq t < t_1(\zeta_1)$$

y análogas acentuadas. Las (3) resultan entonces:

$$| q(t, \alpha) - \eta(t, \alpha) | \leqq \sum q_{0j}(F_j a_j + b_j G_j) + \sum p_{0j}(F_j b_j' + G_j a_j')$$
$$| p(t, \alpha) - \xi(t, \alpha) | \leqq \sum q_{0j}(F_j' a_j + b_j G_j) + \sum p_{0j}(F_j' b_j' + G_j' a_j')$$

y si N es el mayor de los $4(n-1)$ coeficientes de q_0, p_0, resulta

$$\begin{matrix} | q(t, \alpha) - \eta(t, \alpha) | < \zeta_1 N \\ \\ | p(t, \alpha) - \xi(t, \alpha) | < \zeta_1 N \end{matrix} \qquad \text{Si} \begin{cases} | q_{0j} |, \quad | p_{0j} | < \zeta_1 < r_i \\ | q_{0s} |, \quad | p_{0s} | \leqq r_s' < r_s \\ | \alpha | < \sigma_1 < \mu \quad 0 \leqq t < t_1(\zeta_1) \end{cases} \tag{4}$$

Diremos entonces: Dado el sistema canónico ($i = 1, 2, \quad n$)

$$q_i = (H, q_i) \qquad p_i = (H, p_i) \qquad H = H_0(h) + \alpha H_1 + \alpha^2 H_2 +$$

cuya hamiltoniana es analítica para $0 \leqq \alpha < \mu$, y sus integrales

$$q(t,\alpha) = E^{\alpha V} q(t) \qquad p(t,\alpha) = E^{\alpha V} p(t)$$

convergentes para $| q_{0i} |, | p_{0i} | < r_i < r_i'$; $| \alpha | < \alpha_1 < \mu$, $0 \leqq t < t$, si hay por lo menos una forma definida h, entre las n formas cuadráticas h y las $2n$ funciones (2) no son todas nulas; existen $2n$ funciones periódicas

$$\eta_i(t) = E^{(tK_0')hs}\, \eta_i(0) \qquad \xi_i(t) = E^{(tK_0)hs}\, \xi_i(0) \tag{6}$$

de período $2\pi/K_0'{}_s$, tales que

$$| q(t_1\alpha) | - \eta(t) | < \zeta_1 N \qquad | p(t_1\alpha) - \xi(t) | < \zeta_1 N$$

si

$$| q_{0s} |, | p_{0j} | < \zeta_1 < r_i' \qquad | q_{0s} |, | p_{0j} | < r_s' < r_s \qquad | \alpha | < \alpha_1 < \mu,\ 0 \leqq t < t_1$$

y estas $2n$ funciones periódicas, serán las integrales particulares del sistema correspondientes a las $2n$ condiciones iniciales $q_{0j} = p_{0j} = 0$; $q_{0s}, p_{0s} \# 0$ convergentes ahora para $| q_{0s} |, l\, p_{0s} | < r_s' < \frac{1}{2} r_s$ y $| \alpha | \alpha_0, t < \infty$.

En efecto, las integrales (1) del sistema (1) # 14 están mayoradas por las funciones

$$q_i' + \frac{a_i}{2\rho^2} S(\alpha, \beta) \qquad \text{y} \qquad p_s' + \frac{a_i}{2\rho^2} S(\alpha, \beta)$$

según lo visto en el # 10. Las mayorantes de las ξ, η, serán entonces

$$q_s' + \frac{a_s}{2\rho^2}\Big(S(\alpha_1\beta) \Big)_{0,0} \qquad p_s + \frac{a_s}{2\rho^2}\Big(S(\alpha, \alpha) \Big)_{0,0} \qquad \frac{a_j}{2\rho^2}\Big(S(\alpha_1\alpha) \Big)_{0,0}$$

convergentes para todo t si

$$| \alpha | < \alpha_0 = \cfrac{\mu}{1 + \cfrac{2\mu\rho^2 M}{(\varepsilon - \varepsilon_1)^{\circ}}} \qquad \text{y} \qquad | q_{0j} |\, ;\, | p_{0j} | < r_s' < \frac{r_s}{2}$$

pues

$$|\sigma(t)| \leqq \varepsilon_1 = \sqrt{2}\, a_s \sqrt{q_{0s}^2 + p_{0s}^2} < 2\, a_s r_s' < a_s r_s = \varepsilon$$

ya que

$$\sigma(t) = a_s(q_s + p_s) = a_s(q_{0s} + p_{0s}) \cos K_s't + a_s(q_{0s} - p_{0s}) \operatorname{sen} K_s't$$

$$\sigma(t) \leqq \sqrt{2}\, a_s \sqrt{q_{0s}^2 + p_{0s}^2} = \varepsilon_1$$

21. *Cálculo de las Soluciones Periódicas.*

Determinaremos ahora las funciones $\eta_i(0)$; $\xi_i(0)$ definidas en el parágrafo anterior, conociendo la función característica del problema.

Hemos visto en el # 7 que un operador tal como E puede descomponerse en la forma

$$E^{\alpha V} = E'^{\alpha V} E''$$

para lo cual es preciso que los operadores infinitesimales respectivos sean

$$(V_1\ )' = (V_1\ )_s \qquad (V_1\ )'' = \sum{}' (V_1\ )_j$$

y tengamos

$$(V_1\ ) = (V_1\ )' + (V_1\ )''$$

el ápice en la suma indicando la exclusión del índice $j = s$.

En tales circunstancias tenemos

$$E^{\alpha V} q_{0i} = E'^{\alpha V} E''^{\alpha V} q_{0i} \qquad E^{\alpha V} p_{0i} = E'^{\alpha V} E''^{\alpha V} p_{0i}$$

y si la función característica se escribe

$$V = W_0 + W_1 + W_2 +$$

cuando se ordena según sus términos de grado $r = 0, 1, 2,$ en q_0, p_0; definiremos

$$\eta_{0s} = q_{0s} \qquad \eta_{0j} = [E'^{\alpha V} q_{0j}]_{q_{0j} = p_{0j} = 0} = \alpha(W_1 q_{0s}) + \frac{\alpha^2}{2}(W_1(W_2 q_{0j})) + \tag{2}$$

$$\xi_{0s} = p_{0s} \qquad \xi_{0j} = [E'^{\alpha V} p_{0j}]_{q_{0j} = p_{0j} = 0} = \alpha(W_1 p_{0j}) + \frac{\alpha^2}{2}(W_1(W_2 p_{0j})) +$$

y las expresiones (1) resultan cuando hacemos $q_{0j} = p_{0j} = 0$

$$[E^{\alpha V_0} q_{0i}]_{0\cdot 0} = E^{\alpha[V]_{0\cdot 0}} [E''^{\alpha V} q_{0i}] \; ; \; [E^{\alpha V_0} p_{0i}]_{0\cdot 0} = E''^{\alpha[V]_{0\cdot 0}} [E''^{\alpha V} p_{0i}]_{0\cdot 0}$$

puesto que $E'^{\alpha V}$ no opera sobre q_0, p_0. Observando que $[V]_{0\cdot 0} = W_0$ y teniendo en cuenta (2), sale

$$\eta_i(0) = E^{\alpha W_0} \eta_{0i} \qquad \xi_i(0) = E^{\alpha W_0} \xi_{0i} \tag{3}$$

expresiones éstas que nos resuelven el problema. Siendo por definición (2) el par η_{0s}, ξ_{0s}, canónico, resulta que $\eta_s(0)$, $\xi_s(0)$, también lo es. Por el contrario los $n - 1$ pares restantes, $\eta_i(0)$, $\xi_j(0)$, no son canónicos.

22. *Expresiones Generales de la Solución.*

La forma de la función hamiltoniana que frecuentemente aparece en la teoría de las perturbaciones de la Mecánica Celeste es

$$H = J(c) + \mu R(c, w) \tag{1}$$

donde μ es un parámetro pequeño y R una "serie de D'Alembert" (Brown and Shook, *Cambridge,* 1933) de la forma

$$R = \sum Q \cos N \tag{2}$$

donde las Q son funciones de las variables canónicas c_i y las N son combinaciones lineales de las variables conjugadas w_i.

Antes de proceder al cálculo de la solución general, escribiremos algunas fórmulas de utilidad para dicho cálculo. Si $A(c, w) = Q' \operatorname{sen} N'$, $B(c, w) = Q \cos N$ y ponemos $j = \partial N/\partial w$, $j' = \partial N'/\partial w'$, el paréntesis de Poisson (A, B) puede escribirse abreviadamente

$$(A_1 B) = (Q' \operatorname{sen} N', Q \cos N) = -\frac{1}{2}\left(j'Q' \frac{\partial Q}{\partial c} \pm jQ \frac{\partial Q'}{\partial c}\right) \cos (N \pm N') \tag{3}$$

Por otra parte, si $A = Q' \operatorname{sen} N'$, $B = Q \operatorname{sen} N$, se tendrá

$$(A_1 B) = (Q' \operatorname{sen} N', Q \operatorname{sen} N) = -\frac{1}{2}\left(jQ \frac{\partial Q'}{\partial c} \pm j'Q' \frac{\partial Q}{\partial c}\right) \operatorname{sen} (N \pm N') \tag{4}$$

Las expresiones (3) y (4) deben, por supuesto, sumarse para todos los pares de variables (C, w) y las dos combinaciones de signos.

Con estas premisas es fácil deducir de (1) y (2), con las ecuaciones del # 17 la siguiente expresión de la función característica $V(c, w)$ del problema

$$V = -\sum \frac{Q}{\nu} \operatorname{sen} N - \frac{1}{4} \mu \sum{}' \left[\frac{j'Q'}{\nu'} \frac{\partial Q}{\partial c} \pm jQ \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{Q'}{\nu'}\right)\right] \frac{\operatorname{sen} (N \pm N')}{\nu \pm \nu'} + 0(\mu^2) \tag{5}$$

donde $\nu = -(K, N)$ es el "movimiento medio" del argumento N y el ápice en la sumatoria doble implica supresión de los términos diagonales $N = N'$

La función hamiltoniana $K(c)$ se escribe entonces

$$K = J(c) - \frac{1}{4} \mu^2 \sum j \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{Q^2}{\nu}\right) + 0(\mu^3) \tag{6}$$

y de ella se deducen los "movimientos medios" de las variables de ángulo w_{i0} intermediarias

$$g_i = i0_w = -\frac{\partial K}{\partial c_{i0}} = -\frac{\partial J}{\partial c_{i0}} + \frac{1}{4} \mu^2 \sum j \frac{\partial^2}{\partial c_{i0} \partial c}\left(\frac{Q^2}{y}\right) + \tag{7}$$

La expresión (5) de la función característica permite hallar ahora las transformadas de cualquier función de las variables canónicas (c, w). En particular las coordenadas en la órbita, que tienen expresiones del tipo

$$\xi = \sum X \operatorname{sen} K\theta \qquad \eta = \sum H \cos K\theta$$

se transforman a través de las operaciones

$$\xi = E^{\mu V}\xi_0 \qquad \eta = E^{\mu V}\eta_0$$

en las siguientes

$$\xi = \sum X \operatorname{sen} K\theta - \frac{1}{2}\mu \sum \left[iKX \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{Q}{\nu}\right) \pm \frac{jQ}{\nu}\frac{\partial X}{\partial c} \right] \operatorname{sen}(K\theta \pm N) +$$

$$\eta = \sum H \cos K\theta + \frac{1}{2}\mu \sum \left[\frac{jQ}{\nu}\frac{\partial H}{\partial c} \pm iKH \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{Q}{\nu}\right) \right] \cos(K\theta \pm N) +$$

fórmulas que contienen las perturbaciones de primer orden en μ de las coordenadas. En dichas expresiones hemos puesto $i = \partial\theta/\partial w$. Por supuesto que los términos de orden superior al primero se calculan de modo enteramente análogos y recurriendo reiteradamente a las fórmulas (5) y (6).

Se terminó de imprimir el día 12 de diciembre de 1969, en la Imprenta López S.R.L., José María Penna 1551, Banfield, Provincia de Bs. As.