

**CALCULO**  
**DE**  
**ESTRUCTURAS HIPERESTATICAS**  
**CONSTITUIDAS POR**  
**PIEZAS RECTILINEAS**

**POR**

**ENRIQUE BUTTY**  
**PROFESOR TITULAR DE LA UNIVERSIDAD**  
**NACIONAL DE BUENOS AIRES**

**TOMO I**

**BUENOS AIRES**  
**CENTRO ESTUDIANTES DE INGENIERIA**  
**DE BUENOS AIRES**  
**1942**



//

1

**CALCULO DE ESTRUCTURAS HIPERESTATICAS  
CONSTITUIDAS POR PIEZAS RECTILINEAS**

—

—

## OBRAS DEL AUTOR

---

### MATEMATICAS Y MECANICA TEORICA

#### **Introducción a la física matemática.**

**TOMO I: Cálculo vectorial. Cálculo tensorial para transformaciones lineales ortogonales y complementos de análisis vectorial. Estudio particular de tensores de segundo rango. 1931, X-427 páginas.**

**TOMO II: Elementos de geometría diferencial. Cálculo tensorial para transformaciones afines y continuas. Cálculo diferencial absoluto. 1934, 444 páginas.**

En preparación:

**Lecciones de mecánica teórica** (Curso dictado en la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de La Plata).

**TOMO I: Introducción matemática. Cálculos vectorial y tensorial. Vectores axiales. Cinemática.**

**TOMO II: Fundamentos de la dinámica. Estática. Dinámica. Mecánica de medios continuos.**

### MECANICA TECNICA

**Método gráfico para el cálculo de las obras de hormigón armado. 1912, IV-190 páginas.**

**Método por reducciones sucesivas para la resolución de sistemas de múltiple indeterminación estática. 1917, IV-275 páginas.**

#### **Resolución estática de sistemas planos.**

**TOMO I: Parte primera: Mecánica general de sistemas planos. Segunda edición, 1939-X-398 páginas.**

**TOMO II: Parte segunda: Principios y leyes fundamentales para la resolución de sistemas planos. Parte tercera: Procedimientos generales para la resolución de sistemas planos. Segunda edición, 1940, 380 páginas.**

**TOMO III: Métodos generales de resolución de sistemas hiperestáticos (en preparación).**

**Método de reducciones sucesivas para la resolución de sistemas hiperestáticos de grado superior. (Curso dictado en la Escuela de Caminos de Madrid, redactado por los alumnos de la misma F. Alicart, F. Altuna y M. Moya). Madrid, 1929, 103 páginas.**

**Tensiones admisibles en puentes metálicos (en colaboración con Humberto Meoli).**  
1930, 101 páginas.

**Pandeo (Inestabilidad del equilibrio elástico y anelástico).**

Tomo I, 1941, XXIV-569 páginas.

Tomo II (en prensa).

**Cálculo de estructuras hiperestáticas constituídas por piezas rectilíneas.**

Texto.

Tomo I, 1942, XIX-302 páginas.

Tomo II (en prensa).

Tablas:

VOLUMEN I: Fórmulas para piezas de momento de inercia constante. Tablas I-XIII, 1942.

VOLUMEN II: Tablas XIV a XVII. 1942.

#### FILOSOFIA CIENTIFICA

**Introducción filosófica a las teorías de la relatividad.** 1924, 270 páginas.

**La duración de Bergson y el tiempo de Einstein.** 1937, 216 páginas.

#### ENSEÑANZA Y VARIOS

**La reforma universitaria y la Facultad de Ingeniería.** 1918, 178 páginas.

**La galería de las madres (Algunas parábolas y paradojas sobre ética universitaria).** 1921, 125 páginas.

**La Ingeniería (Enseñanza. Profesión. Función social).** 1932, VIII-206 páginas.

CALCULO  
DE  
ESTRUCTURAS HIPERESTATICAS  
CONSTITUIDAS POR  
PIEZAS RECTILINEAS

POR

ENRIQUE BUTTY  
PROFESOR TITULAR DE LA UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE BUENOS AIRES

TOMO I

BUENOS AIRES  
CENTRO ESTUDIANTES DE INGENIERIA  
DE BUENOS AIRES  
1942

*Es propiedad.  
Queda hecho el depósito  
de ley.*

## PREFACIO

---

*La presente obra es una exposición sistemática de los distintos procedimientos de cálculo de estructuras hiperestáticas constituidas por piezas rectilíneas, que tanta importancia han adquirido en la técnica, sobre todo con el desarrollo de las obras de hormigón armado.*

*Dichos procedimientos de cálculo son de uso cómodo y rápido cuando las piezas constitutivas de los sistemas tienen momento de inercia constante. Prácticamente este momento es constante, en general, en la parte central de las piezas, pero varía hacia los extremos en virtud de los empates rectilíneos o curvilíneos, que se proyectan para absorber los esfuerzos correspondientes. El cálculo directo que toma en cuenta esta variación del momento de inercia es, por lo común, muy laborioso.*

*Para salvar estos inconvenientes y poder abordar el cálculo de las estructuras constituidas por piezas con empates, en forma que resulte técnicamente cómodo y rápido, se han confeccionado las extensas tablas que se agrupan en tomos independientes. En éstas se dan los diversos elementos que pueden interesar, referentes a deformación y líneas de influencia de piezas rectilíneas en general, con la integración de estas últimas para los principales estados de carga que se presentan en las aplicaciones.*

*Para evitar errores, todas las tablas han sido calculadas dos veces en forma completamente independiente. Si, a pesar de ello, el lector encontrara alguno, se ruega comunicarlo al autor, para salvarlo en futuras ediciones.*

*El tomo I, que aparece conjuntamente con los de tablas, expone los elementos básicos y generales requeridos para el cálculo de sistemas constituidos por piezas rectilíneas. Comienza con un estudio de la deformación de piezas rectas con o sin empates y de las líneas de influencia correspondientes, con su integración para las principales hipótesis de carga que se presentan en las aplicaciones. Se ocupa luego de los momentos de Ritter y de las vigas elásticamente empotradas, a que se reducen, en último análisis, las piezas rectas constitutivas de los sistemas. Trata, más adelante, las vigas rectas empotradas en ambos extremos y articulado-empotradas; las tablas proporcionan las ordenadas de las líneas de influencia de los momentos de empotramiento y los valores de estos últimos para las hipótesis de carga más frecuentes. La utilidad de estas tablas es inmediata, pues los procedimientos de cálculo más modernos, entre ellos el de aproximaciones sucesivas de Cross, parten del cálculo de dichos momentos de empotramiento. El tomo I termina con el estudio general de los sistemas radiales.*

*El tomo II se ocupará de los principales criterios de cálculo conocidos. Tratará, por el método de los focos, el cálculo de vigas continuas, pórticos, entramados, vigas a marcos (Vierendeel), reticulados con uniones rígidas (esfuerzos secundarios), etc. Se ocupará luego del procedimiento aproximado de Cross, y de otros métodos de cálculo que toman como incógnitas auxiliares los desplazamientos y rotaciones de los nudos.*

*El libro ha sido escrito principalmente para llenar las necesidades del curso de Teoría de la Elasticidad que el autor dicta en la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Buenos Aires. Se estima que ha de ser de utilidad, principalmente por las tablas, en las oficinas de estudios y proyectos, de ingenieros y empresas constructoras. A los efectos cumplir desde ya con esta segunda función, se anticipa la aparición del tomo I y de las tablas.*

---

*Para la publicación de este libro el autor ha dispuesto de la eficaz y laboriosa colaboración del personal de ayudantes y asistentes de la referida cátedra de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, principalmente de los jefes de trabajos prácticos ingenieros Roberto E. Fontan y Emilio M. Jáuregui. Ambos han intervenido en el cálculo de tablas y en la corrección de pruebas. El primero se ha ocupado, además, de la confección de las figuras y de la ordenación y revisión del texto. El segundo ha calculado los ejercicios numéricos aclaratorios y ha revisado los desarrollos analíticos y fórmulas. En*

*el cálculo de tablas han intervenido también, el jefe de trabajos prácticos ingeniero Jorge Basaldúa y los ayudantes ingenieros, Angel H. Lomazzi y Federico Batrosse.*

*El autor deja especial constancia de su profundo agradecimiento. Agradece igualmente al Centro Estudiantes de Ingeniería de Buenos Aires, que ha cargado con los gastos del personal de calculistas destinados a la revisión de las tablas.*

Buenos Aires, octubre de 1941.

E. B.

2

1

**I N D I C E**



# INDICE

## CAPITULO I

### DEFORMACION Y ELASTICAS DE PIEZAS RECTILINEAS

	PÁG.
<b>§ 1. — Notaciones y convenciones de signos.</b>	
1. — Ejes de referencia y representación de vectores	3
2. — Momentos	4
3. — Desplazamientos originados por rotaciones infinitésimas	4
4. — Características	6
5. — Notaciones para los elementos de las piezas rectilíneas	6
 <b>§ 2. — Masas-tercia.</b>	
6. — Definiciones	7
7-8. — Expresiones analíticas	8
9. — Expresiones para el caso de piezas de momentos de inercia constante	11
10. — Determinación numérica de las masas-tercia en el caso de piezas de momento de inercia variable	12
11. — Determinación gráfica de las masas-tercia para piezas de momento de inercia variable .	14
12. — Tablas para la obtención de las masas-tercia correspondientes a piezas con algunas leyes especiales de variación del momento de inercia .	16
13-14. — Manejo de las tablas I	19
15-17. — Ejemplos numéricos .	21
 <b>§ 3. — Rotaciones-tercia.</b>	
18. — Definiciones	24
19. — Polígono de las tercias . . . . .	25
20. — Obtención del diagrama lineal de momentos flectores en base al polígono de las tercias. Momentos reducidos . . . . .	26
21-22. — Obtención de los momentos reducidos en función de las rotaciones extremas reducidas	28
23. — Ejemplo numérico.	31

	Pág.
<b>§ 4. — Elásticas fundamentales.</b>	
24-25. — Generalidades sobre elásticas y definiciones	32
26. — Ecuaciones de las elásticas fundamentales para piezas de momento de inercia constante	35
27. — Cálculo numérico de las elásticas fundamentales en el caso de piezas de momento de inercia variable	38
28. — Cálculo numérico de las ordenadas de las elásticas fundamentales en el caso de piezas de momento de inercia variable (otro procedimiento)	39
29. — Elásticas fundamentales para piezas con empates.	41
30-34. — Rotaciones de las elásticas fundamentales	41
 <b>§ 5.— Elásticas originadas por diagramas lineales de momentos flectores.</b>	
35-36. — Obtención mediante las elásticas fundamentales	45
37-38. — Ejercicios numéricos.	47
39-40. — Ecuaciones de las elásticas debidas a diagramas lineales de momentos flectores, para piezas de momento de inercia constante	51
41. — Obtención gráfica de las elásticas debidas a diagramas lineales de momentos flectores, para piezas de momento de inercia constante	53
 <b>§ 6. — Piezas con extremos rígidos.</b>	
42. — Generalidades .	54
43-45. — Masas-tercia	56
46. — Ejemplo numérico	61
47-48. — Elásticas fundamentales	63

---

## CAPITULO II

### LINEAS DE INFLUENCIA. VIGAS SIMPLEMENTE APOYADAS. MOMENTOS DE RITTER

<b>§ 1. — Formas de las líneas de influencia.</b>	
49-50. — Obtención de las líneas de influencia	70
51. — Ecuación general de las líneas de influencia	73
52-53. — Forma de la línea de influencia del momento flector en una sección intermedia de la pieza considerada	74
54-55. — Forma de la línea de influencia del esfuerzo tangencial, o normal, en una sección intermedia de la pieza considerada	77

	Pág.
<b>§ 2. — Integración de las líneas de influencia.</b>	
56. — Cargas verticales y horizontales equivalentes	80
57. — Principales estados de carga que se presentan en las aplicaciones	82
58. — Estado de carga constituido por un par aplicado en una chapa ligada a un elemento de la pieza	84
59. — Integración de las líneas de influencia para los estados de carga anteriores, en el caso de piezas con empates .	85
60-61. — Ejemplo numérico	87
62. — Caso en que las líneas de influencia se dan por ordenadas y rotaciones extremas .	89
63. — Integración de las líneas de influencia en el caso de piezas de momento de inercia constante	89
64. — Ejemplos	90
65. — Integración de las líneas de influencia para las piezas con $J = \text{const.}$ cuando se dan mediante las ordenadas y rotaciones extremas	91
67. — Integración de las líneas de influencia de momentos flectores	92
68. — Ejemplo numérico	92
69. — Integración de las líneas de influencia de esfuerzos tangenciales y normales	94
70. — Ejemplo numérico	94
<b>§ 3. — Diagrama de momentos flectores de vigas simplemente apoyadas.</b>	
71. — Generalidades	96
72. — Carga única concentrada	96
73. — Estados constituidos por cargas concentradas de igual intensidad	97
74. — Cargas continuas uniformes	98
75. — Cargas continuas triangulares	99
76. — Cargas trapezoidales	101
77. — Estados superpuestos de cargas	102
78. — Par aplicado en una sección cualquiera	103
<b>§ 4. — Momentos de Ritter.</b>	
79. — Definiciones	105
80. — Líneas de influencia de los momentos de Ritter	105
81. — Momentos de Ritter para diversas hipótesis de carga	108
<b>§ 5. — Cálculo numérico de los momentos de Ritter para piezas de momento de inercia constante.</b>	
82. — Ecuaciones de las líneas de influencia	109
83. — Expresiones de los momentos de Ritter para diversas hipótesis de carga	109
84-86. — Expresiones simplificadas para algunas hipótesis particulares de carga	110
87. — Par aplicado en una sección cualquiera de la pieza	113
88. — Momentos de Ritter para pares unitarios aplicados en los extremos de la pieza	114

	Pág.
<b>§ 6. — Cálculo gráfico de los momentos de Ritter para piezas de momento de inercia constante.</b>	
89. — Carga constituida por una sola fuerza concentrada . . . . .	114
90. — Estado de carga constituido por varias fuerzas concentradas . . . . .	115
91. — Fuerza aplicada en el punto medio de la luz . . . . .	117
92. — Dos fuerzas iguales aplicadas en los tercios de la luz . . . . .	118
93. — Dos fuerzas iguales aplicadas en puntos que distan 1/4 de los extremos . . . . .	119
94. — Tres fuerzas iguales aplicadas en los puntos que dividen la luz en cuatro partes también iguales . . . . .	120
95. — Más de tres fuerzas iguales aplicadas en puntos que dividen la luz en partes iguales . . . . .	121
96. — Carga uniformemente repartida en toda la longitud de la pieza . . . . .	122
97. — Carga uniformemente repartida parcial . . . . .	123
98. — Par aplicado en una chapa ligada a un elemento de la pieza . . . . .	125

---

### CAPITULO III

#### EMPOTRAMIENTOS ELASTICOS Y CONSTANTES ELASTICAS

##### § 1. — Empotramientos elásticos y focos.

99-101. — Empotramientos elásticos . . . . .	129
102. — Focos . . . . .	132
103-104. — Determinación de la vertical focal . . . . .	133

##### § 2. — Constantes elásticas.

105-109. — Rotaciones específicas y otras magnitudes conexas . . . . .	135
110. — Cálculo gráfico de las constantes angulares . . . . .	138
111-114. — Traslaciones específicas y magnitudes conexas . . . . .	139
115. — Cálculo gráfico de las constantes transversales . . . . .	144
116. — Vigas de momento de inercia constante . . . . .	145
117-120. — Caso en que la viga está empotrada o articulada en el extremo opuesto . . . . .	145
121-124. — Traslaciones específicas libres y magnitudes conexas . . . . .	148
125. — Cálculo gráfico de las constantes transversales libres . . . . .	151
126. — Aplicaciones . . . . .	152
127. — Ejemplo numérico . . . . .	153

---

CAPITULO IV

VIGAS ELASTICAMENTE EMPOTRADAS

	PÁG.
<b>§ 1. — Vigas elásticamente empotradas. Polígono de las tercias.</b>	
128. — Vigas elásticamente empotradas	155
129. — Polígono de las tercias	155
130. — Fuerzas transversales y pares extremos	157
<b>§ 2. — Influencia de desplazamientos de las secciones de arranque y de variaciones de temperatura.</b>	
131. — Momentos flectores y esfuerzos tangenciales originados por desplazamientos accidentales de las secciones extremas	161
132. — Cálculo numérico de los momentos reducidos correspondientes a desplazamientos de las secciones extremas	162
133. — Cálculo de la influencia de las variaciones de temperatura	163
134. — Cálculo de las rotaciones extremas $\theta_A$ y $\theta_B$ para piezas de altura constante	164
135. — Vigas de altura variable	165
136. — Vigas simétricas de altura variable.	166
<b>§ 3. — Cargas fijas. Diagramas de momentos flectores y esfuerzos tangenciales.</b>	
137-140. — Diagramas de momentos flectores.	167
141-142. — Diagramas de esfuerzos tangenciales	172
143-144. — Cálculo numérico de las características	176
145-149. — Ejemplos numéricos	177
<b>§ 4. — Cargas móviles. Líneas de influencia de características.</b>	
150-151. — Líneas de influencia de los momentos flectores en las secciones extremas	188
152-153. — Línea de influencia del momento flector en una sección cualquiera .	190
154. — Forma de las líneas de influencia de momentos flectores	192
155-157. — Líneas de influencia de esfuerzos tangenciales .	194
158-161. — Obtención numérica de las líneas de influencia	197
162. — Ejemplos numéricos . . . . .	201
163. — Integración de las líneas de influencia	205
164. — Ejemplo numérico . . . . .	206
165. — Ecuación analítica de las líneas de influencia para las vigas de momento de inercia constante	208
166. — Ejemplo numérico	208
167. — Cargas indirectas	209
<b>§ 5. — Cargas móviles. Obtención de las líneas de influencia mediante diagramas de características de cargas unitarias.</b>	
168. — Generalidades . . . . .	210
169. — Líneas de influencia de momentos flectores	211

	PÁG.
170. — Líneas de influencia de esfuerzos tangenciales	213
171. — Observación	214
172. — Cargas indirectas	214
173. — Ejemplo numérico	214
<b>§ 6. — Cargas móviles. Obtención de las líneas de influencia mediante los desplazamientos extremos.</b>	
174. — Generalidades	218
175. — Obtención de las ordenadas extremas de las líneas de influencia de características de las vigas elásticamente empotradas	219
176-177. — Rotaciones extremas de las líneas de influencia de los momentos flectores de las vigas elásticamente empotradas	220
178-179. — Rotaciones extremas de las líneas de influencia de los momentos flectores extremos $M'$ y $M''$ de las vigas elásticamente empotradas .	222
180-181. — Rotaciones extremas de la línea de influencia del esfuerzo tangencial $T'$ en el extremo A de las vigas elásticamente empotradas	223
182. — Obtención gráfica de las líneas de influencia	225
183. — Obtención numérica e integración de las líneas de influencia	226
184. — Ejemplo numérico	228
185. — Cálculo de la influencia de las cargas permanentes mediante las rotaciones extremas	230
186-187. — Ejemplos numéricos	230
<b>§ 7. — Cargas móviles uniformes. Diagramas de características máximas y mínimas.</b>	
188. — Generalidades .	232
189-190. — Diagramas de momentos flectores máximos y mínimos	232
191. — Diagramas de momentos flectores máximos y mínimos totales	237
192. — Diagramas de esfuerzos tangenciales máximos y mínimos	238
193. — Diagramas de esfuerzos tangenciales máximos y mínimos totales.	241
<b>§ 8. — Vigas empotradas.</b>	
194. — Generalidades	243
195. — Cálculo numérico de las líneas de influencia	243
196. — Momentos de empotramiento y sus líneas de influencia	244
198. — Momentos de empotramiento y sus líneas de influencia para vigas de momento de inercia constante	245
199-200 — Ejemplo numérico	246
<b>§ 9. — Vigas empotrado-articuladas.</b>	
201. — Generalidades.	249
202. — Cálculo numérico de las líneas de influencia de características	250
203-204. — Momento de empotramiento y su línea de influencia	250

## CAPITULO V

### SISTEMAS RADIALES

	PÁG.
<b>§ 1. — Primer método. Resolución mediante la determinación directa de los focos.</b>	
206. — Generalidades . . . . .	255
207. — Determinación de los focos . . . . .	256
208-209. — Influencia de las cargas permanentes	258
210. — Líneas de influencia . . . . .	260
211. — Influencia de desplazamientos accidentales de las secciones extremas.	263
<b>§ 2. — Segundo método. Resolución mediante la rotación específica del nudo.</b>	
213. — Rotación y características originadas por un par unitario aplicado en el nudo	263
214. — Coeficientes de distribución interna	265
215. — Obtención de los focos adyacentes al nudo	266
<b>§ 3. — Tercer método. Resolución numérica en dos pasos.</b>	
216. — Generalidades . . . . .	268
217. — Cálculo de los momentos flectores extremos originados por cargas permanentes .	268
<b>§ 4. . Sistemas radiales constructivos.</b>	
218. — Generalidades . . . . .	269
219. — Aplicación numérica . . . . .	270
220. — Cálculo de las tercias . . . . .	271
221. — Constantes elásticas angulares . . . . .	273
222-223. — Influencia del par $M = 1$ aplicado en el nudo A.	273
224. — Determinación de los focos . . . . .	277
225-227. — Diagramas de características originados por una carga permanente .	278
228. — Líneas de influencia . . . . .	284
229. — Cálculo de la influencia de la carga permanente mediante las rotaciones extremas	289
230. — Cálculo numérico en dos pasos de la influencia de la carga permanente (tercer procedimiento)	294
231-232. — Influencia de una variación uniforme de temperatura	295



# **CAPITULO I**

## **DEFORMACION Y ELASTICAS DE PIEZAS RECTILINEAS**

---



## CAPITULO I

### DEFORMACION Y ELASTICAS DE PIEZAS RECTILINEAS

#### § 1. — Notaciones y convenciones de signos.

1. Ejes de referencia y representación de vectores. — Cuando sea necesaria la representación analítica, adoptaremos los ejes de referencia de la figura 1, con el eje de las  $z$  positivo hacia la derecha y el de las  $y$  positivo hacia abajo.

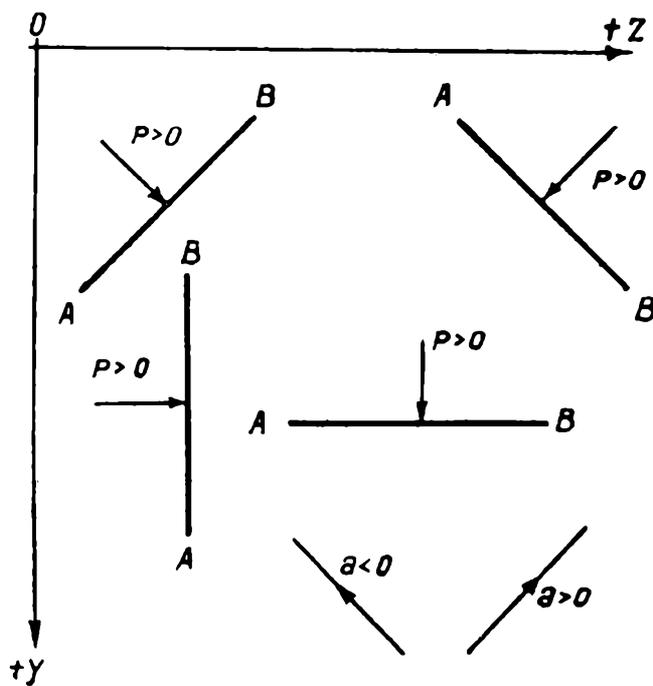


FIG. 1.

Para individualizar el sentido de los vectores (fuerzas, desplazamientos, etc.), les daremos en general signo positivo cuando sea positiva su proyección sobre el eje de las  $z$ , y negativo en caso contrario.

A sus componentes según los ejes de coordenadas les daremos el signo que corresponda, de acuerdo con estos últimos.

En particular, para las cargas, fuerzas exteriores y desplazamientos normales a las piezas rectilíneas, adoptaremos la siguiente convención (que no coincide con la anterior):

Pondremos signo positivo cuando aplicados en  $A$  originen un momento flector negativo en el extremo derecho  $B$ , para las piezas horizontales u oblicuas, y en el superior, para las verticales (para las piezas horizontales y verticales resulta el signo que corresponde de acuerdo con los ejes adoptados).

**2. Momentos.**— Para el momento de una fuerza  $F$  (fig. 2) respecto del punto  $B$ , adoptaremos la convención de signos ordinaria, es decir, el signo positivo cuando la fuerza  $F$  gire alrededor de  $B$ , en el sentido de las agujas de un reloj, y negativo en caso contrario.

Si la fuerza  $F$  se da por sus componentes vertical  $V$  y horizontal  $H$  y

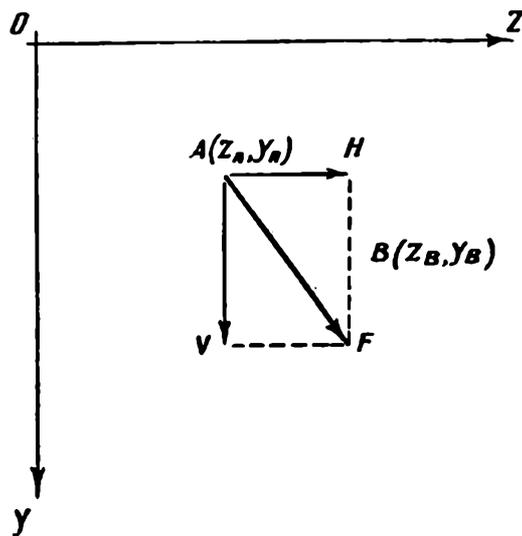


FIG. 2.

si  $z_A$ ,  $y_A$  son las coordenadas de un punto  $A$  de su recta de acción, es inmediato que el momento  $M$  respecto del punto  $B$ , de coordenadas  $z_B$ ,  $y_B$ , está dado por la expresión

$$M = V (z_A - z_B) - H (y_A - y_B).$$

De la anterior resulta:

a) El momento de la componente vertical es igual al producto de ésta (con su signo) por la diferencia de abscisas de los puntos  $A$  y  $B$  (segunda abscisa la del centro de momentos  $B$ ).

b) El momento de la componente horizontal es igual al producto de ésta cambiada de signo, por la diferencia de ordenadas de los puntos  $A$  y  $B$  (segunda ordenada la del centro de momentos).

**3. Desplazamientos originados por rotaciones infinitésimas.**— Supondremos que el eje de las  $x$  positivas esté dirigido hacia arriba del plano, con lo que la terna  $O(x, y, z)$  resulta dextrorsum. Representaremos las

rotaciones infinitésimas positivas  $\theta$ , en torno al punto  $A$ , por un vector  $\theta$ , aplicado en el mismo, normal al plano y con el sentido que va hacia arriba (de las  $x$  positivas). En estas condiciones, el desplazamiento  $\mathbf{a}$  que experimenta el punto  $B$  está dado por la expresión vectorial

$$\mathbf{a} = (B - A) \wedge \theta = -\theta \wedge (B - A).$$

Además, si  $\theta$  es la intensidad de la rotación, con signo positivo cuando indique un giro en el sentido de las agujas de un reloj y negativo en caso contrario (signo de la proyección del vector  $\theta$  sobre el eje positivo  $x$ ), las componentes vertical  $\eta$  y horizontal  $\zeta$  del desplazamiento  $\mathbf{a}$  se deducen de la matriz

$$\begin{vmatrix} -\theta & 0 & 0 \\ 0 & (y_B - y_A) & (z_B - z_A) \end{vmatrix},$$

o sea, se tiene

$$\eta = \theta (z_B - z_A), \quad \zeta = -\theta (y_B - y_A)$$

Si en el punto  $A$  (fig. 3) aplicamos un vector vertical de intensidad  $\theta$

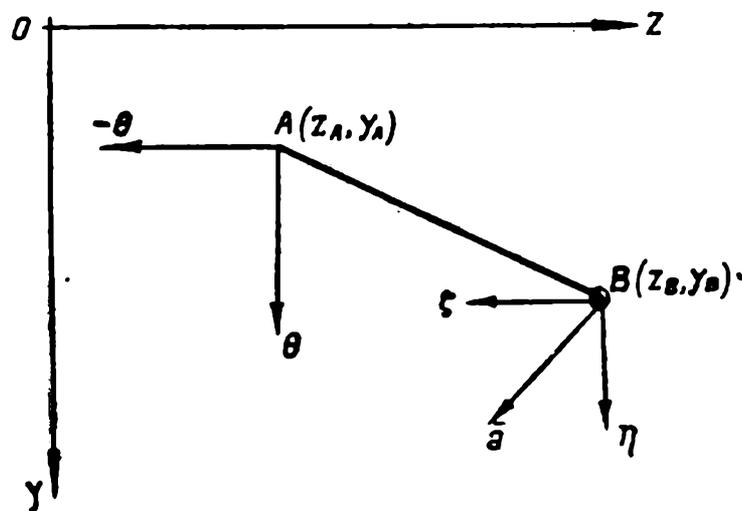


FIG. 3.

y otro horizontal de intensidad  $-\theta$ ,  $\eta$  y  $\zeta$  son los momentos de estos vectores respecto del punto  $B$  (iguales a su producto por las diferencias de abscisas u ordenadas, respectivamente, de los puntos  $A$  y  $B$  (segunda abscisa u ordenada la del centro  $A$  de rotación)). Los vectores vertical  $\theta$  y horizontal  $-\theta$  se llaman *elaciones* vertical y horizontal, respectivamente, correspondientes a la rotación  $\theta$  (\*).

(\*) BUTT, E. *Resolución Estática de Sistemas Planos* (Segunda Edición), Tomo I, pág. 35 y siguientes.

**4. Características.** — Daremos el nombre genérico de *características* al momento flector  $\mathcal{M}$ , esfuerzo tangencial  $\mathcal{T}$  y esfuerzo normal  $\mathcal{N}$ , correspondientes a una sección cualquiera  $N$ . En las piezas oblicuas u horizontales, adoptaremos para las dos primeras características ( $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{T}$ ) las originadas por las fuerzas exteriores que actúan a la izquierda de la sección (fig. 4 *a*); en las piezas verticales (fig. 4 *b*), adoptaremos las originadas por las resultantes de las fuerzas exteriores que actúan abajo de la sección. Según estas convenciones, los momentos flectores serán positivos cuando hagan trabajar a la tracción (tensión positiva) las fibras inferiores de las piezas horizontales u oblicuas (situadas en el sentido

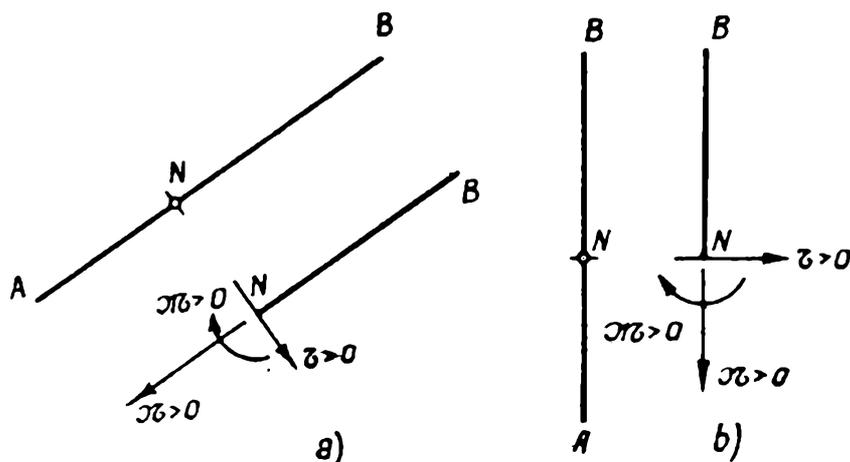


FIG. 4.

de las  $y$  positivas) y las que quedan a la derecha en las piezas verticales (situadas en el sentido de las  $z$  positivas).

Para los esfuerzos tangenciales adoptaremos el signo que resulte de las convenciones de (1), es decir, positivo cuando sea negativo su momento con respecto al extremo  $B$  (derecho para las piezas horizontales u oblicuas y superior para las verticales). Los esfuerzos tangenciales representados en las figuras 4 *a* y 4 *b*, son positivos.

A los esfuerzos normales les daremos signo positivo o negativo según que hagan trabajar la pieza a la tracción o a la compresión, respectivamente. Los representados en las figuras 4 *a* y 4 *b* son positivos.

**5. Notaciones para los elementos de las piezas rectilíneas.** — Representaremos con las letras  $A$  y  $B$ , respectivamente, a los extremos izquierdo y derecho de las piezas horizontales u oblicuas; en las piezas verticales pondremos  $A$  para el extremo inferior y  $B$  para el superior. A fin de simplificar el lenguaje, llamaremos extremo izquierdo y derecho, respectivamente, al inferior y superior de las piezas verticales.

Designaremos  $s$  (fig. 5) la longitud de la pieza, y  $l$  y  $h$  sus luces horizontal y vertical, respectivamente. Cuando las piezas oblicuas bajan hacia la derecha (fig. 5 *b*) (punto  $B$  abajo del  $A$ ) daremos a  $h$  signo negativo.

Llamaremos por brevedad del lenguaje, *piezas negativas* a las piezas oblicuas que bajan hacia la derecha.

Designaremos  $x' = v's$  y  $x'' = v''s$  las distancias, en valor absoluto, entre una sección cualquiera  $N$  y los extremos izquierdo y derecho, respectivamente. Para las distancias horizontales, también en valor absoluto, entre la misma sección y dichos extremos, pondremos  $z' = v'l$  y  $z'' = v''l$ . Análogamente, para la distancia vertical al extremo izquierdo (inferior

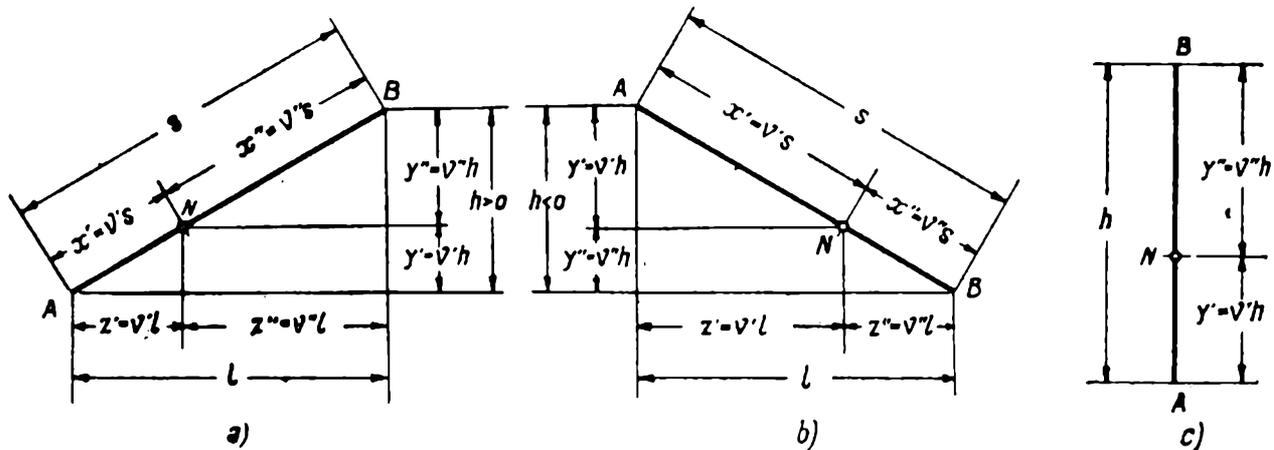


FIG. 5.

en las piezas verticales) pondremos  $y' = v'h$ , y al extremo derecho (superior en las piezas verticales),  $y'' = v''h$  (\*).

Es inmediato que los números  $v'$  y  $v''$  son los mismos, para una sección dada, ya se trate de la distancia oblicua, de la horizontal o de la vertical.

## § 2. — Masas-tercia.

6. Definiciones. — Sea una pieza rectilínea  $AB$  (fig. 6), en general

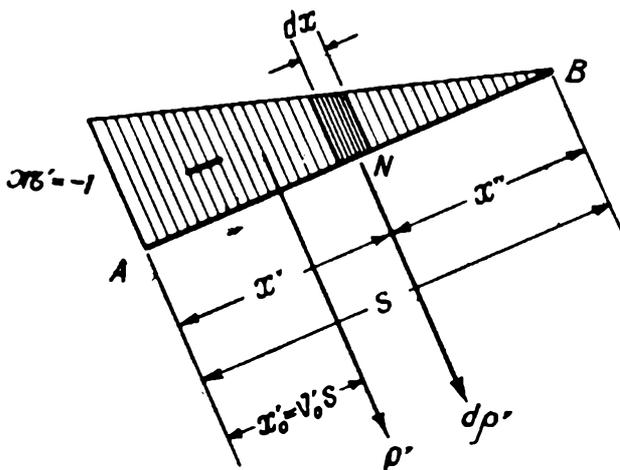


FIG. 6.

de momento de inercia variable, sometida a un diagrama de momentos

(\*) En las piezas negativas, que tienen  $h < 0$ , debería ponerse,  $y' = v'|h|$  e  $y'' = v''|h|$ ; escribiremos simplemente  $y' = v'h$  e  $y'' = v''h$ , sabiendo que debe sustituirse el valor absoluto de  $h$ .

flectores, con  $\mathcal{M}' = -1$  en el extremo izquierdo (inferior si la pieza es vertical). Se llama *masa-tercia izquierda* a la rotación resultante del extremo  $B$  respecto del  $A$ . Análogamente, se llama *masa-tercia derecha* a la rotación, del mismo extremo  $B$  respecto del  $A$ , originada por un diagrama triangular de momentos flectores con  $\mathcal{M}'' = -1$  en el extremo derecho  $B$  (fig. 7). Ambas rotaciones son positivas; sus intensidades  $\rho'$  y  $\rho''$ , respectivamente, se llaman *masas elásticas de las tercias* o simplemente *masas-tercia*.

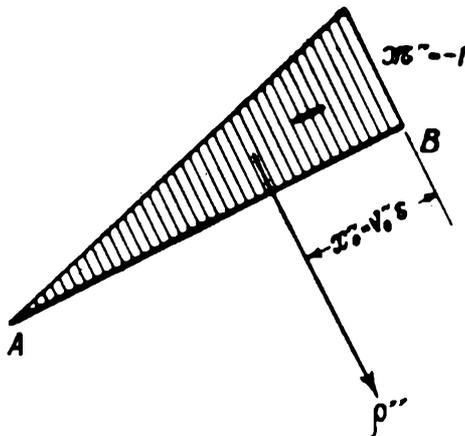


FIG. 7.

Designaremos con  $x'_0 = v'_0 s$  y  $x''_0 = v''_0 s$  a las distancias entre las tercias izquierda y derecha y los extremos adyacentes, respectivamente.

**7. Expresiones analíticas.** — Sean (fig. 6)  $x'$  y  $x''$  las distancias entre una sección cualquiera  $N$  y los extremos  $A$  y  $B$ . Sean, además,  $J = J'(x')$  y  $J = J''(x'')$  las leyes que dan la variación del momento de inercia en función de  $x'$  y  $x''$ .

El momento flector en la sección  $N$  es  $-\frac{x''}{s}$  y la rotación elemental correspondiente (\*)

$$\frac{x''}{s} \cdot \frac{dx''}{E J''(x'')} ;$$

la masa-tercia izquierda será, por consiguiente,

$$[1] \quad \rho' = \frac{1}{E s} \int_0^s \frac{x'' dx''}{J''(x'')} .$$

9

(\*) Cuando el momento flector de las fuerzas exteriores de la izquierda, es negativo, la rotación del extremo derecho  $B$  respecto del izquierdo  $A$ , es positiva.

En cuanto a su punto de aplicación, tomando momentos respecto del extremo  $A$ , se tiene

$$\rho' x'_0 = \frac{1}{E s} \int_0^s \frac{x' x'' dx''}{J''(x'')} \\ [2] \quad x'_0 = \frac{\int_0^s \frac{x' x'' dx''}{J''(x'')}}{\int_0^s \frac{x'' dx''}{J''(x'')}} .$$

Para la masa-tercia derecha, basta permutar en las anteriores  $x'$  y  $x''$ ; resulta así

$$[3] \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho'' = \frac{1}{E s} \int_0^s \frac{x' dx'}{J'(x')} , \\ x''_0 = \frac{\int_0^s \frac{x' x'' dx'}{J'(x')}}{\int_0^s \frac{x' dx'}{J'(x')}} \end{array} \right.$$

Siendo, por otra parte,

$$\int_0^s \frac{x' x'' dx''}{J''(x'')} = \int_0^s \frac{x' x'' dx'}{J'(x')} ,$$

de la [2] y segunda [3] se deduce que

$$x'_0 \int_0^s \frac{x'' dx''}{J''(x'')} = x''_0 \int_0^s \frac{x' dx'}{J'(x')}$$

y, multiplicando por  $\frac{1}{E s}$ ,

$$\rho' x'_0 = \rho'' x''_0 = m ,$$

relación importante de que haremos uso frecuentemente. Establece que: *Los momentos, en valor absoluto, de las masas-tercia, respecto de los extremos adyacentes, son iguales entre sí.*

Llamaremos *momento-tercia* a la magnitud  $m$ .

8. — En el caso de piezas oblicuas, si se desean las elaciones vertical y horizontal de la masa-tercia izquierda (fig. 8), se tiene para sus dis-

tancias horizontal y vertical al extremo izquierdo, respectivamente, como es inmediato,

$$z'_0 = x'_0 \frac{l}{s} = v'_0 l$$

y

$$y'_0 = x'_0 \frac{h}{s} = v'_0 h$$

Análogamente para las distancias entre la elación vertical y horizontal de la masa-tercia derecha y el extremo *B*, resulta

$$z''_0 = v''_0 l$$

y

$$y''_0 = v''_0 h .$$

Además, el momento, en valor absoluto, respecto del extremo *A* de la

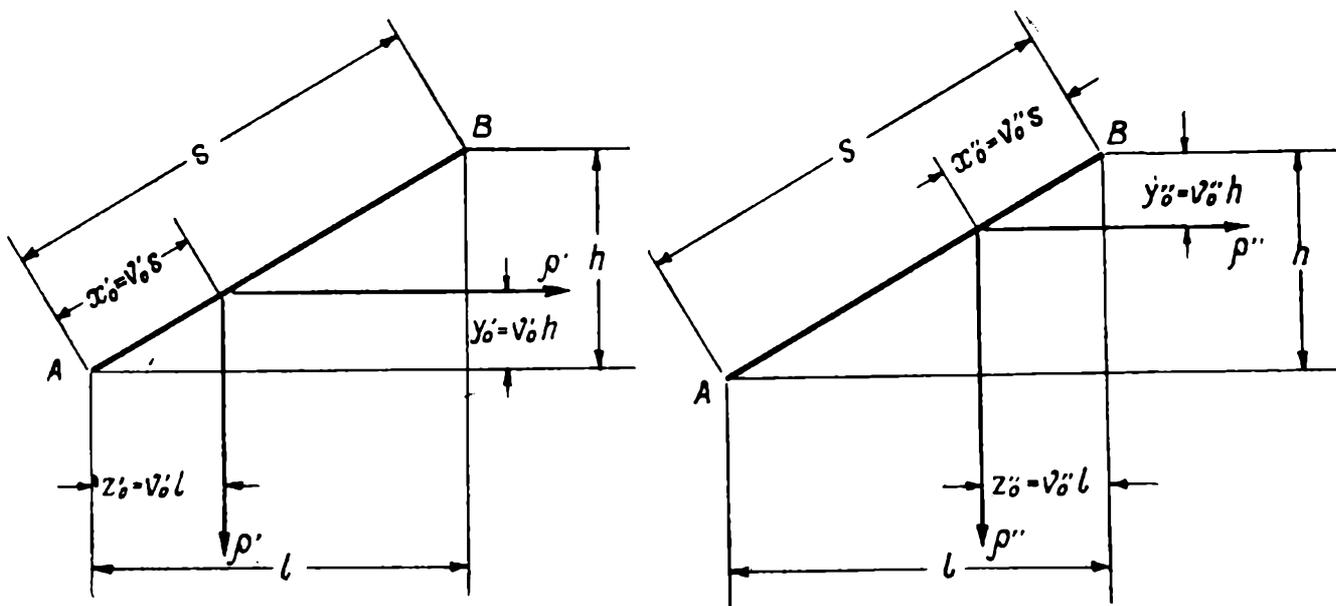


FIG. 8.

elación vertical de la masa-tercia izquierda (o respecto del extremo *B* para la derecha) es

$$m_l = \rho' z'_0 = \rho' v'_0 \frac{l}{s} s ,$$

que, siendo

$$\rho' v'_0 s = m ,$$

da

$$[1] \quad m_l = m \frac{l}{s}$$

Análogamente, el momento de la elación horizontal de la masa-tercia, respecto de su extremo adyacente, es

$$[2] \quad m_h = m \frac{h}{s},$$

debiendo ponerse  $h$  con su signo ( $h < 0$  para las piezas oblicuas negativas).

Llamaremos *momento-tercia vertical* u *horizontal*, respectivamente, a las magnitudes  $m_v$  y  $m_h$ .

Si la pieza es horizontal (vertical) en la [1] (ó [2]) se tiene  $l = s$  ( $h = s$ ) y da  $m_v = m$  ( $m_h = m$ )

**9. Expresiones para el caso de piezas de momento de inercia constante.** — Si la pieza tiene una ley simétrica de variación de momentos de inercia, como sucede en particular para el caso en que este último

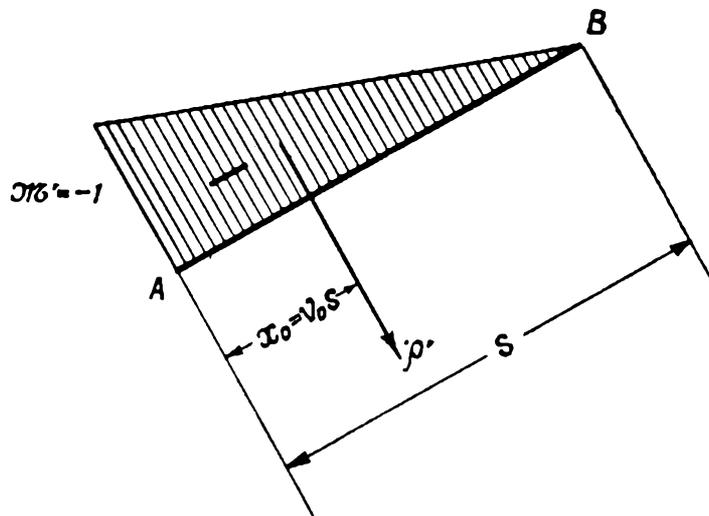


FIG. 9.

sea constante, ambas masas tercias son iguales y tienen posiciones simétricas respecto de los extremos.

Para las piezas de momento de inercia constante, siendo  $\frac{s}{2}$  el área del diagrama de momentos (fig. 9), resulta

$$[1] \quad \rho' = \rho'' = \rho = \frac{s}{2 E J},$$

y para los puntos de aplicación (situados sobre las normales a la pieza

que pasan por los baricentros de los triángulos de momentos) se tiene, a su vez,

$$x'_0 = x''_0 = x_0 = \frac{1}{3} s,$$

o sea,

$$[2] \quad v'_0 = v''_0 = v_0 = \frac{1}{3}.$$

Además, para los momentos-tercia se tiene

$$[3] \quad \left\{ \begin{array}{l} m = \rho' x'_0 = \frac{s^2}{6 E J}, \\ m_l = \frac{s l}{6 E J}, \\ m_h = \frac{s h}{6 E J}. \end{array} \right.$$

10. Determinación numérica de las masas-tercia en el caso de piezas de momento de inercia variable. — Sea la pieza  $AB$  (fig. 10) de

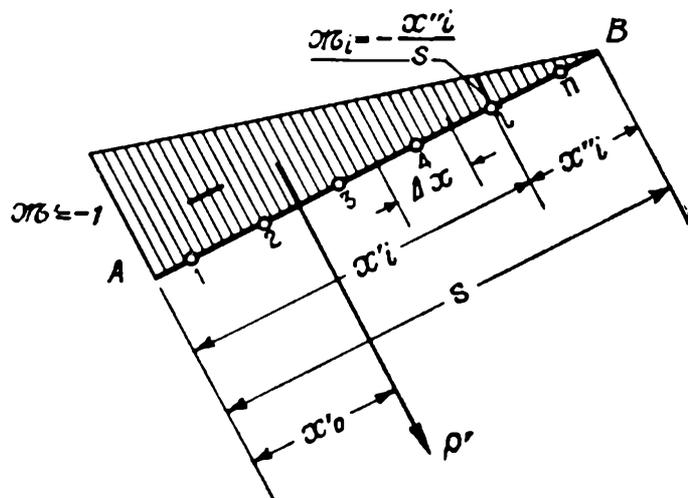


FIG. 10.

momento de inercia variable, y consideremos una cadena elástica equivalente, de un número  $n$  suficientemente grande de uniones o elementos. Recordemos brevemente lo que esto significa (\*). Descompuesta la pieza en un número  $n$  convenientemente grande de elementos  $\Delta x_i$ , los puntos

(\*) BUTRY, E., *Loc. cit.*, tomo I, pág. 179 y siguientes.

medios 1, 2, 3, ...,  $i$ , ...,  $n$  constituyen las uniones elásticas, y las expresiones

$$\rho_i = \frac{\Delta x_i}{E J_i},$$

en las que  $J_i$  es el momento de inercia correspondiente al punto  $i$ , dan las masas elásticas de las mismas. Si  $\mathcal{M}_i$  es el momento flector en la unión  $i$ , se demuestra que la rotación resultante para el elemento respectivo, de la sección extrema derecha respecto de la izquierda, está dada por la expresión

$$\theta_i = - \mathcal{M}_i \rho_i.$$

Establecido lo anterior, consideremos el diagrama de momentos de la figura 10; el momento en la unión  $i$ , de masa elástica  $\rho_i$ , es  $-\frac{x''_i}{s}$  y la rotación correspondiente,

$$\theta_i = - \mathcal{M}_i \rho_i = \frac{x''_i}{s} \rho_i.$$

Para la masa-tercia (rotación resultante), se tiene, por consiguiente,

$$[1] \quad \rho' = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^n \rho_i x''_i.$$

Tomando momentos respecto de  $A$ , resulta

$$\begin{aligned} \rho' x'_0 &= \sum_{i=1}^n \theta_i x'_i, \\ x'_0 &= \frac{\sum_{i=1}^n \theta_i x'_i}{\rho'}, \end{aligned}$$

o sea, sustituyendo y simplificando,

$$[2] \quad x'_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i x'_i x''_i}{\sum_{i=1}^n \rho'_i x''_i}.$$

En igual forma, para la tercia derecha, permutando  $x'_i$  y  $x''_i$ , se obtiene

$$[3] \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho'' = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^n \rho_i x'_i, \\ x''_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i x'_i x''_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i x'_i}. \end{array} \right.$$

Los cálculos se llevan con comodidad disponiéndolos en el cuadro siguiente:

$i$	$\rho_i$	$x'_i$	$x''_i$	$\rho_i x'_i$	$\rho_i x''_i$	$\rho_i x'_i x''_i$
1						
2						
⋮						
$i$						
⋮						
$n$						
				$S_1$	$S_2$	$S_3$

Siendo  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  las sumas de las tres últimas columnas, se tiene

$$\rho' = \frac{1}{s} S_2, \quad \rho'' = \frac{1}{s} S_1,$$

$$x'_0 = \frac{S_3}{S_2}, \quad x''_0 = \frac{S_3}{S_1}.$$

Como comprobación debe resultar

$$\rho' x'_0 = \rho'' x''_0 = m.$$

**11. Determinación gráfica de las masas-tercia para piezas de momento de inercia variable.** — Consideremos (fig. 11) una cadena elás-

tica equivalente a la pieza y, siendo  $\rho_i$  la masa elástica correspondiente a

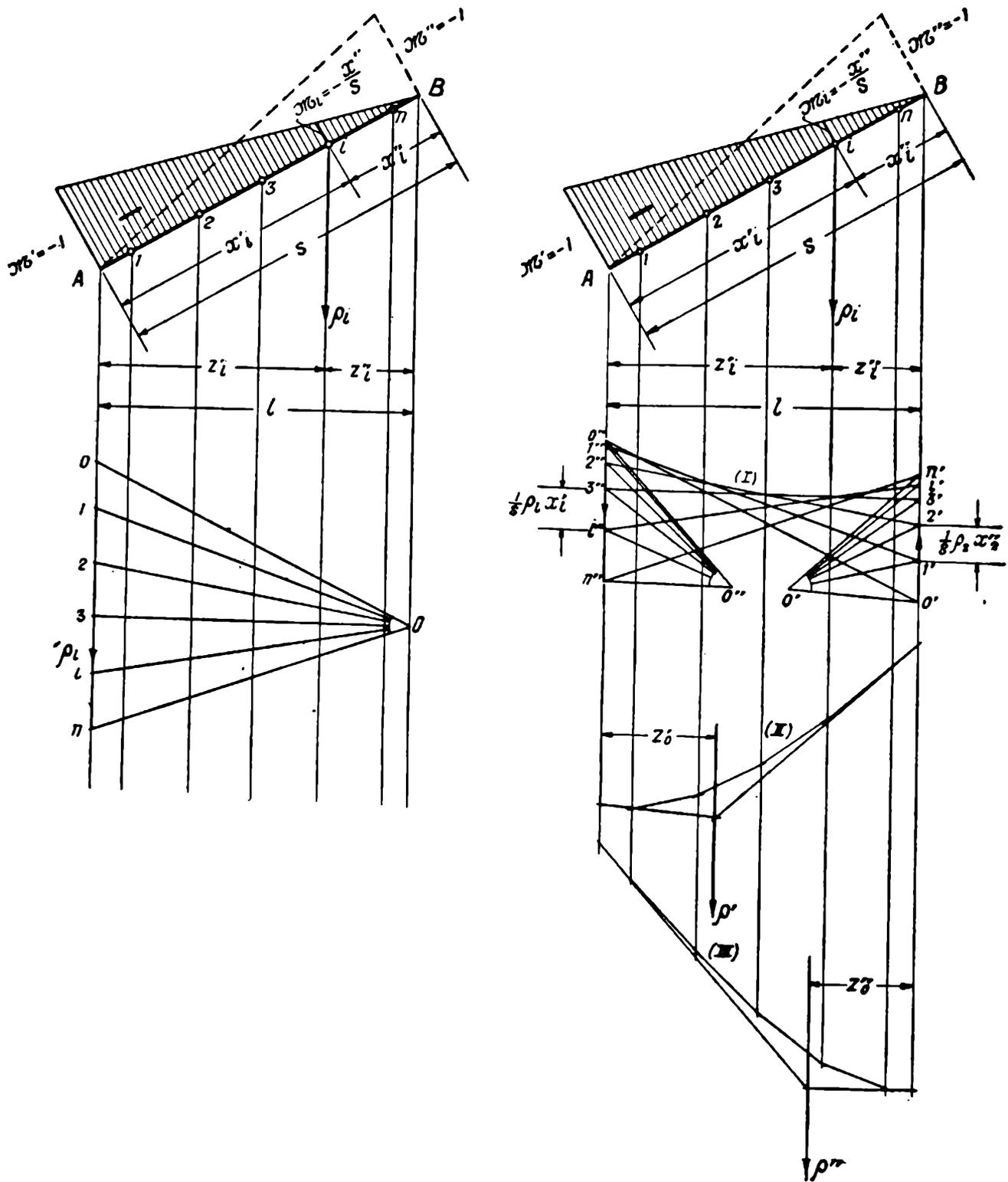


FIG. 11.

la unión  $i$ , construyamos sobre la vertical de  $A$ , en la escala  $\frac{\alpha}{\text{cm}}$ , un polígono  $0, 1, 2, \dots, i, \dots, n$  de estas masas elásticas  $\rho_i$ . Con polo  $O$  situado sobre la vertical  $B$  (distancia polar  $k = l$ ), tracemos el funicular  $(I)$

de los vectores  $\rho_i$  aplicados en las verticales de las respectivas uniones  $i$ . Los segmentos  $\overline{(i-1)'i'}$ , determinados por los lados consecutivos de este funicular, sobre la vertical de  $B$ , leídos en la escala  $\frac{\alpha}{\text{cm}}$  de los  $\rho_i$ , son los momentos de los vectores  $\rho_i$  respecto de dicha vertical, divididos por la distancia polar  $k = l$ ; es decir, se tiene

$$\overline{(i-1)'i'} (\text{cm}) \frac{\alpha}{\text{cm}} = \frac{1}{l} \rho_i z''_i = \frac{1}{l} \rho_i x''_i \frac{l}{s} = \frac{1}{s} \rho_i x''_i.$$

Dichos segmentos representan, pues, las rotaciones  $\theta'_i$  para el diagrama triangular de momentos  $\mathcal{M}' = -1$ . Se tiene, por consiguiente, para la masa-tercia izquierda,

$$\rho' = \overline{0'n'} (\text{cm}) \frac{\alpha}{\text{cm}}.$$

Considerando a  $0', 1', 2', \dots, i', \dots, n'$  como polígono de vectores aplicados en las verticales  $i$ , tomando el polo arbitrario  $O'$  y construyendo el funicular (*II*), la intersección de sus primero y último lados determina la posición de la tercia izquierda, como indica la figura.

En igual forma, el polígono  $0'', 1'', 2'', \dots, i'', \dots, n''$ , determinado sobre la vertical de  $A$  por los lados consecutivos del funicular (*I*), es un polígono de las rotaciones  $\theta''_i$  originadas por el diagrama triangular de momentos flectores (punteado) correspondiente a  $\mathcal{M}'' = -1$ . Se tiene, pues, para la masa-tercia derecha

$$\rho'' = \overline{0''n''} (\text{cm}) \frac{\alpha}{\text{cm}}.$$

Considerando a  $0'', 1'', 2'', \dots, i'', \dots, n''$  como polígono de vectores aplicados en las verticales  $i$ , tomando un polo arbitrario  $O''$  y construyendo el funicular (*III*), la intersección de sus primero y último lados, determina, a su vez, la posición de la tercia derecha.

**12. Tablas para la obtención de las masas-tercia correspondientes a piezas con algunas leyes especiales de variación del momento de inercia.**— En las aplicaciones, principalmente en las obras de hormigón armado, se presentan con frecuencia piezas rectilíneas que tienen una parte central de altura constante y, en los extremos, empates curvilí-

neos o rectilíneos (fig. 12). Designaremos  $a' = \lambda's$  y  $a'' = \lambda''s$  las longitudes de los empates izquierdo y derecho respectivamente. Si  $\lambda'' = 0$  resulta la pieza con un solo empate (fig. 13).

Si la sección de la pieza es rectangular, los momentos de inercia varían según el cubo de su altura  $h_x$ . En el hormigón armado puede presen-

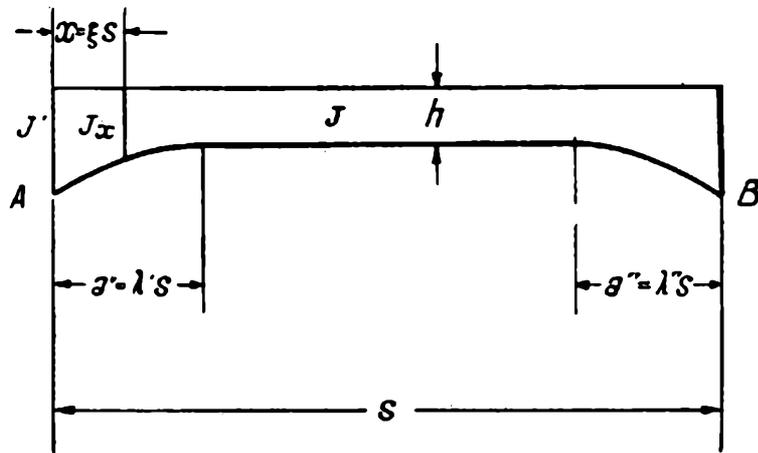


FIG. 12.

tarse la sección rectangular; pero es más común la sección en forma de T. En las estructuras de hierro, lo común es la sección en forma de I. En uno y otro caso, la variación del momento de inercia  $J_x$  es, con suficiente aproximación, también proporcional al cubo de la altura  $h_x$ . Se

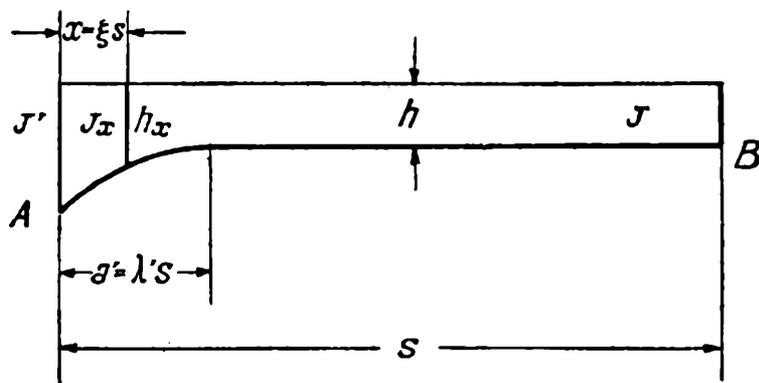


FIG. 13.

puede, pues, preparar tablas que den las masas-tercia para distintas leyes de variación de la altura. Las tablas I, que han sido calculadas en base a otras de Strassner (\*), proporcionan estos elementos para los casos de piezas simétricas (con dos empates) y disimétricas (con un solo empate).

(\*) STRASSNER, A., *Neuere Methoden zur Statik der Rahmentragwerke und der elastischen Bogen-träger*, tercera edición, tomo I, pág. 101 y siguientes.

Estas tablas responden a dos leyes de variación del momento de inercia (o altura). En ellas se entra por las relaciones

$$\lambda = \frac{a}{s},$$

siendo  $a$  la longitud del empate y

$$n = \frac{J}{J'},$$

siendo  $J$  el momento de inercia mínimo de la parte de altura constante y  $J'$  el momento de inercia máximo en el extremo de la pieza.

Las leyes de variación de la altura son las siguientes (\*):

*Ley A.* — Corresponde a empates rectilíneos (fig. 14). La ley de variación de la altura  $h_x$  es

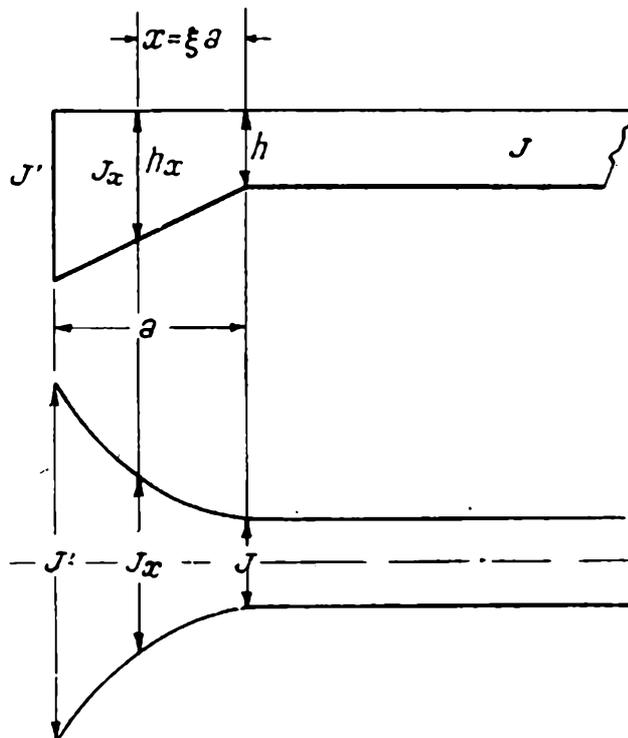


FIG. 14.

$$\frac{h}{h_x} = \frac{1}{1 + c \xi},$$

siendo  $c$  una constante. Para la ley de variación del momento de inercia (representada gráficamente en la figura), con la hipótesis de que sea proporcional al cubo de la altura, se tiene

$$\frac{J}{J_x} = \frac{1}{(1 + c \xi)^3}.$$

(\*) La obra de STRASSNER contiene otra ley correspondiente a empates de gran curvatura, que no hemos incluido, por no ser de uso corriente.

En cuanto a la constante  $c$ , siendo  $J_x = J'$  para  $\xi = 1$ , se tiene

$$\frac{J}{J'} = \frac{1}{(1+c)^3}$$

[a] 
$$c = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} - 1.$$

*Ley B.* — Esta ley corresponde a empates de forma parabólica (fig. 15).

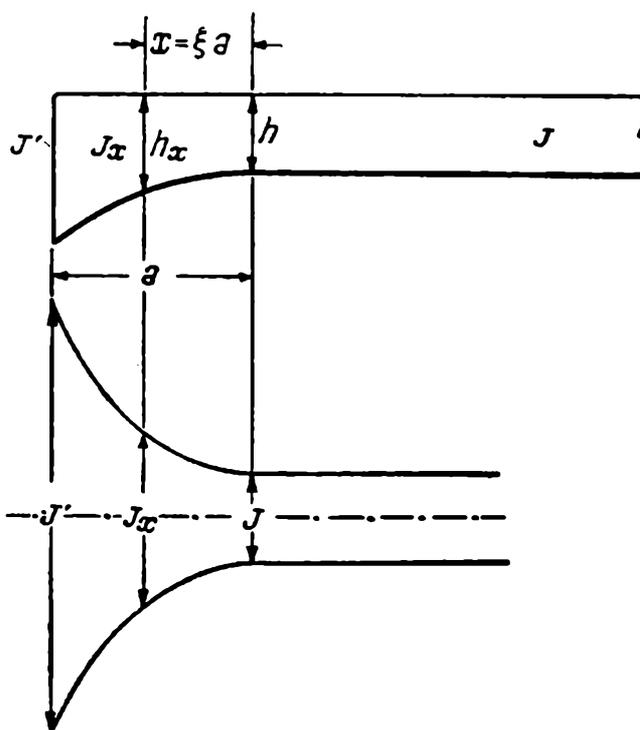


FIG. 15.

Se tiene

$$\frac{h}{h_x} = \frac{1}{1+c\xi^2},$$

o sea,

$$\frac{J}{J_x} = \frac{1}{(1+c\xi^2)^3},$$

con  $c$  constante dada por la misma [a] anterior. La figura da la gráfica de variación del momento de inercia.

**13. Manejo de las tablas I.** — Las piezas con empates no son en realidad de eje rectilíneo; puede suponerse, sin embargo, con suficiente aproximación, que lo tengan coincidente con el eje baricéntrico  $n$  de la parte de altura constante (fig. 16). En la zona del empate, el eje es en realidad una curva  $n'$ ; el error que resulta de suponerlo coincidente con la recta  $n$  no es apreciable en la aplicaciones.

Cuando la pieza con empate se une en su extremo a un pilar (fig. 17 *a* y *b*), no está bien precisado el momento de inercia máximo. Se puede

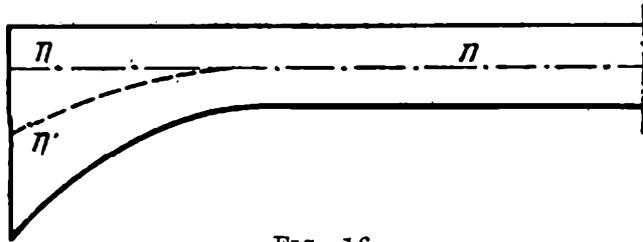


FIG. 16.

tomar, con suficiente aproximación, el correspondiente a la altura  $h'$  determinada, sobre el eje del pilar (o de la viga), por las tangentes  $t$  representadas en las figuras.

14.— Las tablas I permiten calcular las masas elásticas  $\rho'$  y  $\rho''$ , así como la posición de las mismas, mediante los números  $\nu'_0$  y  $\nu''_0$  y el momento-tercia  $m$ , entrando, como se ha dicho, con las relaciones

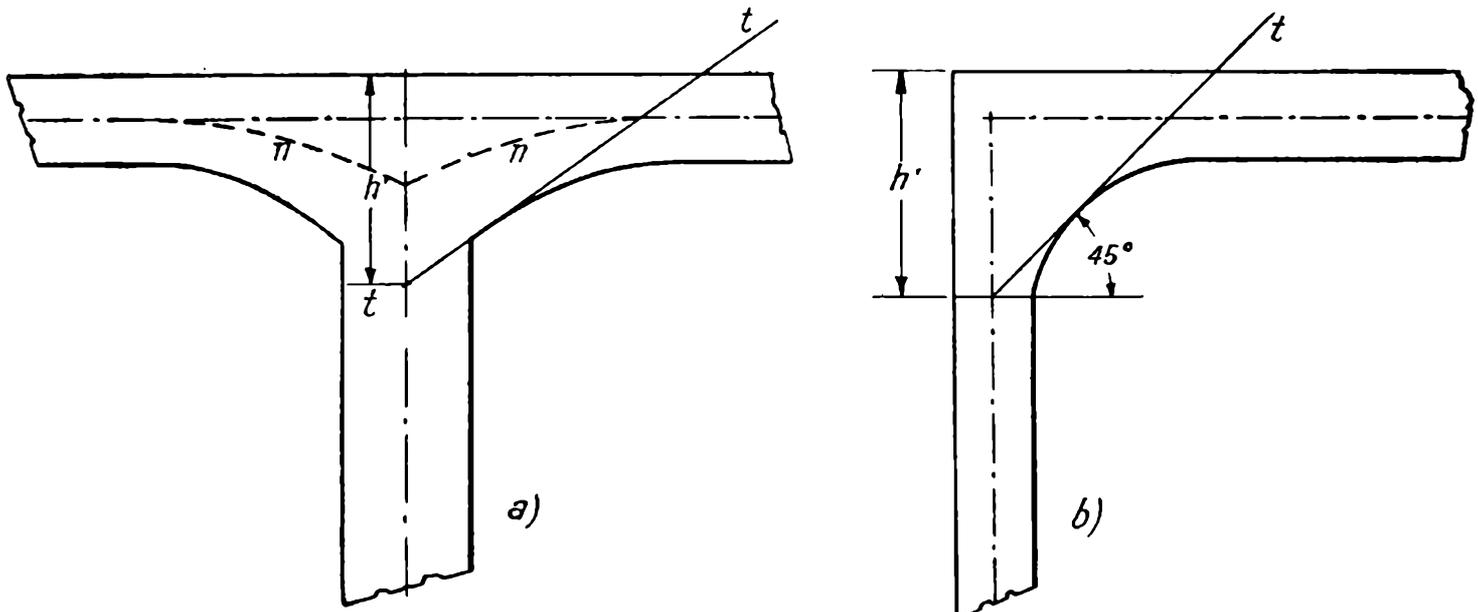


FIG. 17.

$$\lambda = \frac{a}{s}, \quad n = \frac{J}{J'}.$$

Las abscisas numéricas  $\nu'_0$  y  $\nu''_0$  están dadas directamente. En cuanto a  $\rho'$ ,  $\rho''$  y  $m$ , las tablas dan los números  $\bar{\rho}'$ ,  $\bar{\rho}''$  y  $\bar{m}$  tales que

$$[1] \quad \begin{cases} \rho' = k \bar{\rho}' , \\ \rho'' = k \bar{\rho}'' , \\ m = k s \bar{m} , \end{cases}$$

con

$$[2] \quad k = \frac{s}{E J} .$$

15. Ejemplos numéricos.— Sea la viga simétrica de hormigón armado con empates rectos representada en la figura 18, para la que

$$J = 0,0021 \text{ m}^4, \quad J' = 0,0175 \text{ m}^4, \quad a = 1,50 \text{ m}, \\ s = 6,00 \text{ m}, \quad l = 4,50 \text{ m}.$$

Se pide

$$\rho' = \rho'' = \rho, \quad z'_0 = z''_0 = z_0 \quad \text{y} \quad m_l.$$

Se tiene

$$n = \frac{J}{J'} = \frac{0,0021 \text{ m}^4}{0,0175 \text{ m}^4} = 0,12,$$

$$\lambda = \frac{a}{s} = \frac{1,50 \text{ m}}{6,00 \text{ m}} = 0,25,$$

$$k = \frac{s}{EJ} = \frac{6,00 \text{ m}}{2,1 \cdot 10^6 \text{ tm}^{-2} \times 0,0021 \text{ m}^4} = 1360 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1};$$

la tabla I a da

$$\bar{\rho} = 0,342, \quad \nu_0 = 0,407, \quad \bar{m} = 0,139.$$

Resulta

$$\rho = k \bar{\rho} = 1360 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} \times 0,342 = 465 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1},$$

$$z_0 = \nu_0 l = 0,407 \times 4,50 \text{ m} = 183 \text{ m},$$

$$m = k l \bar{m} = 1360 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} \times 4,50 \text{ m} \times 0,139 = 851 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1}.$$

16. — Sea la pieza simétrica de hormigón armado con empates rectos (fig. 18) que tiene

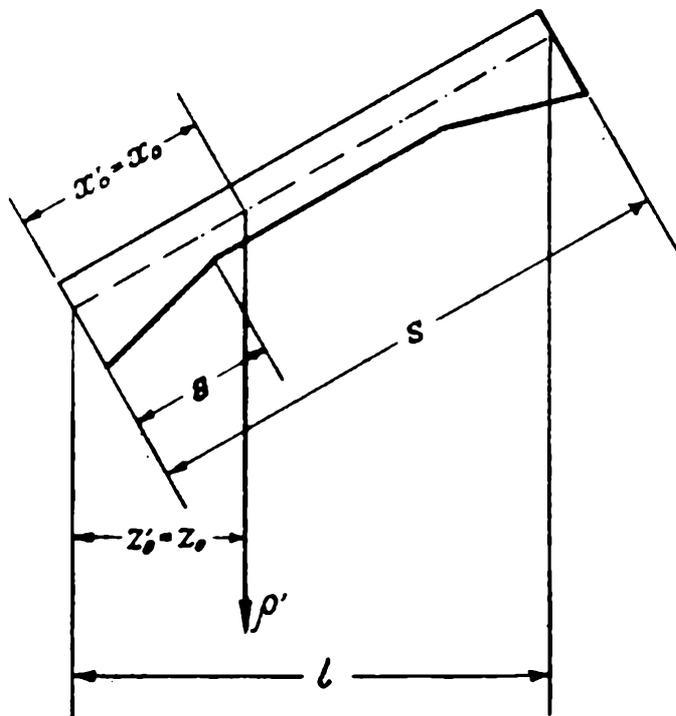


FIG. 18.

$$J = 0,0018 \text{ m}^4, \quad J' = 0,010 \text{ m}^4, \quad a = 1,65 \text{ m}, \\ s = 5,00 \text{ m}, \quad l = 4,20 \text{ m},$$

y para la que se pide  $\rho' = \rho'' = \rho$ ,  $x'_0 = x''_0 = x_0$  y  $m_l$ .

Se tiene

$$n = \frac{J}{J'} = \frac{0,0018 \text{ m}^4}{0,010 \text{ m}^4} = 0,18, \quad \lambda = \frac{a}{s} = \frac{1,65 \text{ m}}{5,00 \text{ m}} = 0,33,$$

$$k = \frac{s}{E J} = \frac{5,00 \text{ m.}}{2,1 \cdot 10^6 \text{ tm}^{-2} \times 0,0018 \text{ m}^4} = 1322 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1}.$$

Como estos valores de  $n$  y  $\lambda$  no corresponden a los números de entrada de la tabla I a, se requiere efectuar una doble interpolación.

Para $n = 0,15$ y $\lambda = 0,30$ :	$\bar{\rho} = 0,322$	$\nu_0 = 0,408$	$\bar{m} = 0,132$
Para $n = 0,20$ y $\lambda = 0,30$ :	$\bar{\rho} = 0,339$	$\nu_0 = 0,400$	$\bar{m} = 0,136$
	$\Delta \bar{\rho} = 0,017$	$\Delta \nu_0 = -0,008$	$\Delta \bar{m} = 0,004$

Para  $n = 0,18$  y  $\lambda = 0,30$  resulta

$$\bar{\rho} = 0,322 + \frac{0,017}{0,05} 0,03 = 0,332,$$

$$\nu_0 = 0,408 - \frac{0,008}{0,05} 0,03 = 0,403,$$

$$\bar{m} = 0,132 + \frac{0,004}{0,05} 0,03 = 0,134.$$

En igual forma se calcula para  $n = 0,18$  y  $\lambda = 0,35$ . Los valores correspondientes, conjuntamente con los anteriores, se dan a continuación:

Para $n=0,18$ y $\lambda=0,30$ :	$\bar{\rho} = 0,332$	$\nu_0 = 0,403$	$\bar{m} = 0,134$
Para $n=0,18$ y $\lambda=0,35$ :	$\bar{\rho} = 0,304$	$\nu_0 = 0,406$	$\bar{m} = 0,124$
	$\Delta \bar{\rho} = -0,028$	$\Delta \nu_0 = 0,003$	$\Delta \bar{m} = -0,010$

Resulta, finalmente, para la pieza dada ( $n = 0,18$ ,  $\lambda = 0,33$ ),

$$\bar{\rho} = 0,332 - \frac{0,028}{0,05} 0,03 = 0,315,$$

$$\nu_0 = 0,403 + \frac{0,003}{0,05} 0,03 = 0,405,$$

$$\bar{m} = 0,134 - \frac{0,010}{0,05} 0,03 = 0,128.$$

Las magnitudes pedidas son, por consiguiente,

$$\rho = k \bar{\rho} = 1.322 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} \times 0,315 = 416 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1},$$

$$x_0 = \nu_0 s = 0,405 \times 5,00 \text{ m} = 2,03 \text{ m},$$

$$m_l = k l \bar{m} = 1322 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} \times 4,20 \text{ m} \times 0,128 = 711 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1}.$$

17. — Sea la pieza disimétrica de empate recto (fig. 19) con

$$J = 0,0025 \text{ m}^4, \quad J' = 0,025 \text{ m}^4, \quad a = 1,55 \text{ m},$$

$$s = 5,55 \text{ m}, \quad l = 4,00 \text{ m}, \quad h = 3,87 \text{ m}.$$

Se pide  $\rho'$ ,  $\rho''$ ,  $y'_0$ ,  $y''_0$  y  $\bar{m}$ .

Se tiene

$$n = \frac{J}{J'} = \frac{0,0025 \text{ m}^4}{0,025 \text{ m}^4} = 0,10, \quad \lambda = \frac{a}{s} = \frac{1,55 \text{ m}}{5,55 \text{ m}} = 0,28,$$

$$k = \frac{s}{EJ} = \frac{5,55 \text{ m}}{2,1 \cdot 10^6 \text{ t m}^{-2} \times 0,0025 \text{ m}^4} = 1057 \cdot 10^{-3} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1}.$$

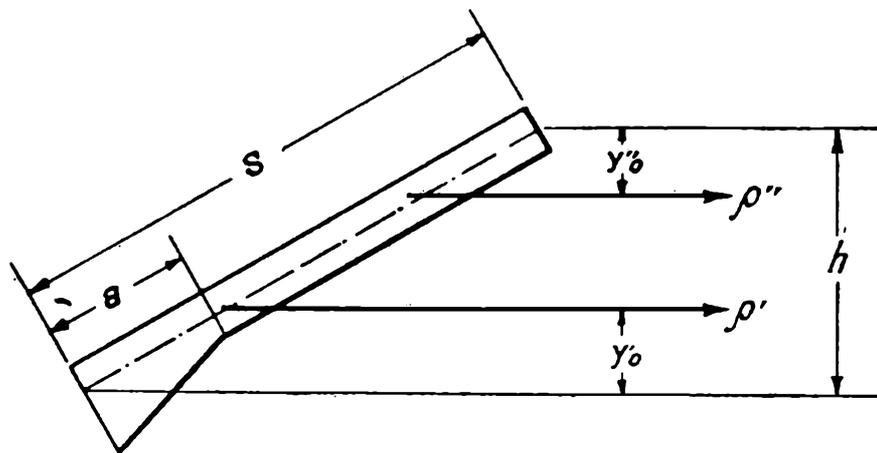


FIG. 19.

Como  $\lambda$  no corresponde a los números de entrada de la tabla I c, se requiere efectuar una interpolación.

Dicha tabla da:

Para $n=0,10$ y $\lambda=0,25$ :	$\bar{\rho}' = 0,352$	$\bar{\rho}'' = 0,483$	$v'_0 = 0,433$	$v''_0 = 0,315$	$\bar{m} = 0,152$
Para $n=0,10$ y $\lambda=0,30$ :	$\bar{\rho}' = 0,326$	$\bar{\rho}'' = 0,476$	$v'_0 = 0,450$	$v''_0 = 0,308$	$\bar{m} = 0,147$
	$\Delta\bar{\rho}' = -0,026$	$\Delta\bar{\rho}'' = -0,007$	$\Delta v'_0 = 0,017$	$\Delta v''_0 = -0,007$	$\Delta\bar{m} = -0,005$

Para  $n = 0,10$  y  $\lambda = 0,28$ , resulta

$$\bar{\rho}' = 0,352 - \frac{0,026}{0,05} 0,03 = 0,336,$$

$$\bar{\rho}'' = 0,483 - \frac{0,007}{0,05} 0,03 = 0,479,$$

$$v'_0 = 0,433 + \frac{0,017}{0,05} 0,03 = 0,443,$$

$$v''_0 = 0,315 - \frac{0,007}{0,05} 0,03 = 0,311,$$

$$\bar{m} = 0,152 - \frac{0,005}{0,05} 0,03 = 0,149.$$

Las magnitudes pedidas son, finalmente,

$$\rho' = k \bar{\rho}' = 1057 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} \times 0,336 = 355 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1},$$

$$\rho'' = k \bar{\rho}'' = 1057 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} \times 0,479 = 506 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1},$$

$$y'_0 = v'_0 h = 0,443 \times 3,87 \text{ m} = 1,71 \text{ m},$$

$$y''_0 = v''_0 h = 0,311 \times 3,87 \text{ m} = 1,20 \text{ m},$$

$$m_h = k h \bar{m} = 1057 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} \times 3,87 \text{ m} \times 0,149 = 609 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1}.$$

### § 3. — Rotaciones-tercia

18. **Definiciones.** — Sea la pieza sujeta a un diagrama triangular de momentos flectores, con  $\mathcal{M} \neq -1$  (fig. 20). Como los momentos son los

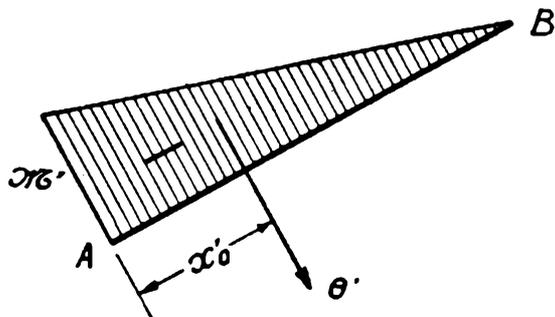


FIG. 20.

que corresponden a  $\mathcal{M}' = -1$ , multiplicados por  $-\mathcal{M}'$ , la rotación resultante, que llamaremos *rotación-tercia izquierda*, o simplemente *tercia izquierda*, tiene el mismo punto de aplicación que la masa-tercia  $\rho'$  y su intensidad es

$$\theta' = -\mathcal{M}' \rho'.$$

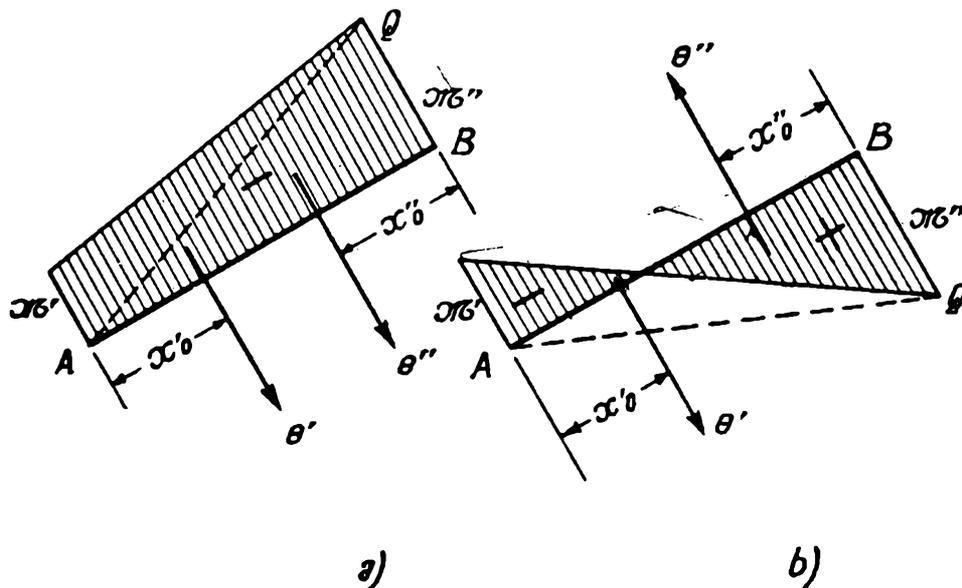


FIG. 21.

En igual forma se define la *tercia derecha*.

Es decir: *La rotación resultante correspondiente a un diagrama triangular de momentos flectores es igual a menos el momento en el extremo,*

multiplicado por la masa-tercia adyacente, y ésta aplicada en la tercia respectiva.

Si la pieza está sujeta a un diagrama lineal de momentos flectores cualquiera (no triangular), se lo puede descomponer (fig. 21 a y b) en dos triángulos mediante la recta  $AQ$ , a los que corresponderán rotaciones-tercia  $\theta'$  y  $\theta''$  aplicadas, respectivamente, en las tercias izquierda y derecha, y de intensidades

$$\theta' = -\mathcal{M}' \rho'$$

y

$$\theta'' = -\mathcal{M}'' \rho''$$

Es decir: La rotación resultante se descompone en dos aplicadas en las tercias (rotaciones-tercia), con intensidades dadas por las expresiones anteriores.

19. Polígono de las tercias.—Sea la pieza rectilínea  $AB$  sujeta a un

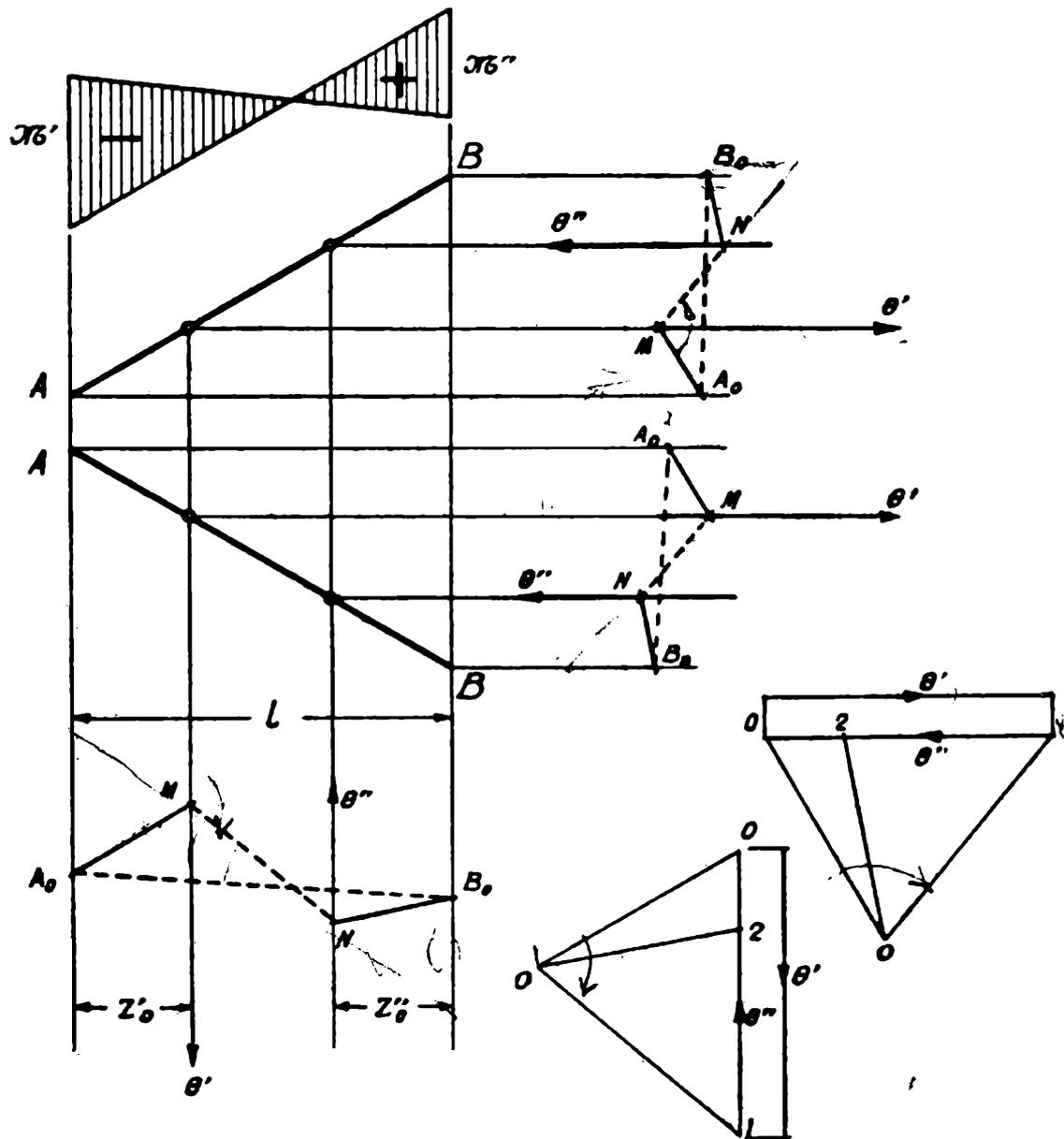


FIG. 22.

diagrama lineal de momentos flectores (fig. 22). De acuerdo con el nú-

mero anterior, la rotación resultante se descompone en dos rotaciones  $\theta'$  y  $\theta''$  aplicadas en las tercias, de intensidades

$$\theta' = - \mathcal{M}' \rho' \quad \text{y} \quad \theta'' = - \mathcal{M}'' \rho''$$

El funicular  $A_0MNB_0$  de las elaciones verticales (horizontales) correspondientes a las rotaciones tercias, se llama *polígono de las tercias vertical (horizontal)*. El primer lado  $A_0M$  y el último  $NB_0$  son las tangentes a la elástica, correspondientes, respectivamente, a las verticales (horizontales) extremas que pasan por  $A$  y  $B$ . El lado  $MN$  se llama *lado intermedio* del polígono de las tercias. La recta  $A_0B_0$  que une los puntos de la elástica correspondientes a los extremos  $A$  y  $B$  de la pieza, se llama *recta de los extremos*.

Debe observarse que, para que el polígono de las tercias resulte orientado (con los desplazamientos positivos hacia abajo en la elástica vertical y hacia la derecha en la horizontal), se requiere llevar, en el polígono de las rotaciones, las positivas hacia abajo (hacia la derecha para la elástica horizontal) y tomar el polo a la izquierda (abajo para la horizontal), como se ha hecho en la figura. Dicho en otra forma, deben tomarse los elementos en forma tal que al pasar del primer radio polar  $O'0$  al segundo  $O'1$ , correspondientes a una rotación positiva, se tenga un sentido de rotación también positivo.

**20. Obtención del diagrama lineal de momentos flectores en base al polígono de las tercias. Momentos reducidos.** — Acabamos de ver como, dado el diagrama lineal de momentos flectores, se obtiene el polígono de las tercias (o, lo que es equivalente, la primera y última tangentes de la elástica). Pasamos a ocuparnos del problema inverso, es decir, dado el polígono de las tercias, hallar el diagrama lineal de momentos flectores de que proviene.

Llamaremos, para ello (fig. 23) momento reducido *vertical (horizontal)* izquierdo  $m'_i$  ( $m'_h$ ), derecho  $m''_i$  ( $m''_h$ ), respectivamente, al momento de la elación vertical (horizontal) correspondiente a la rotación tercia izquierda y derecha respecto del extremo adyacente de la pieza. Estos momentos están representados, en la escala de la elástica, por los segmentos  $A_0A'_0$  y  $B_0B'_0$  (fig. 23), determinados por el polígono de las tercias. Les daremos signo contrario al de la rotación adyacente. Se tiene

$$m'_i = - \theta' z'_0, \quad m''_i = - \theta'' z''_0,$$

< (masor

expresiones que, siendo

$$\theta' = - \mathcal{M}' \rho', \quad \theta'' = - \mathcal{M}'' \rho'',$$

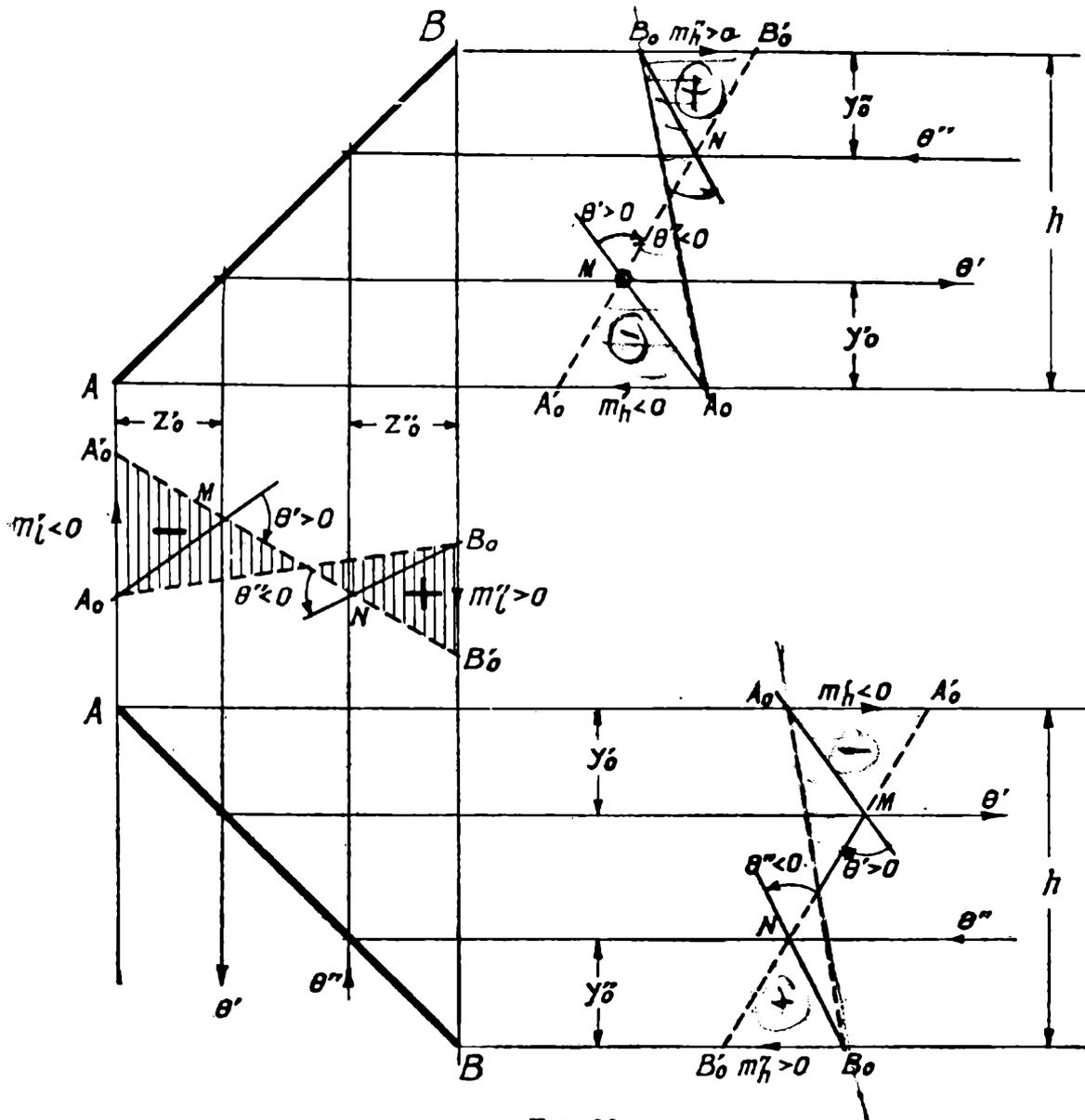


FIG. 23.

dan

$$m'_l = \mathcal{M}' \rho' z'_0, \quad m''_l = \mathcal{M}'' \rho'' z'_0,$$

o sea,

$$[1] \quad m'_l = \mathcal{M}' m_l, \quad m''_l = \mathcal{M}'' m_l.$$

Análogamente se obtendría

$$[2] \quad m'_h = \mathcal{M}' m_h, \quad m''_h = \mathcal{M}'' m_h,$$

siempre que para piezas negativas se ponga  $m_h < 0$ , como corresponde por ser  $h < 0$ .

Las expresiones anteriores permiten calcular los momentos extremos  $\mathcal{M}'$  y  $\mathcal{M}''$  en función de los momentos reducidos dados por los segmentos  $A_0A'_0$  y  $B_0B'_0$ , y obtener, por consiguiente, el diagrama lineal de momentos flectores, en función de estos últimos.

Como los segmentos  $A_0A'_0$  y  $B_0B'_0$  representan en cierta escala los momentos  $\mathcal{M}'$  y  $\mathcal{M}''$ , se tiene que:

*El lado intermedio MN, referido a la recta de los extremos, da un diagrama afín al de momentos flectores.*

Este diagrama resulta en general orientado, con momentos positivos cuando las ordenadas están hacia abajo (derecha) de la recta de los extremos  $A_0B_0$  y negativos en caso contrario, salvo para las elásticas horizontales de las piezas negativas en que resultan invertidos, como es inmediato en virtud de ser  $h < 0$ .

21. Obtención de los momentos reducidos en función de las rotaciones extremas reducidas. — Llamaremos *rotaciones extremas reducidas*

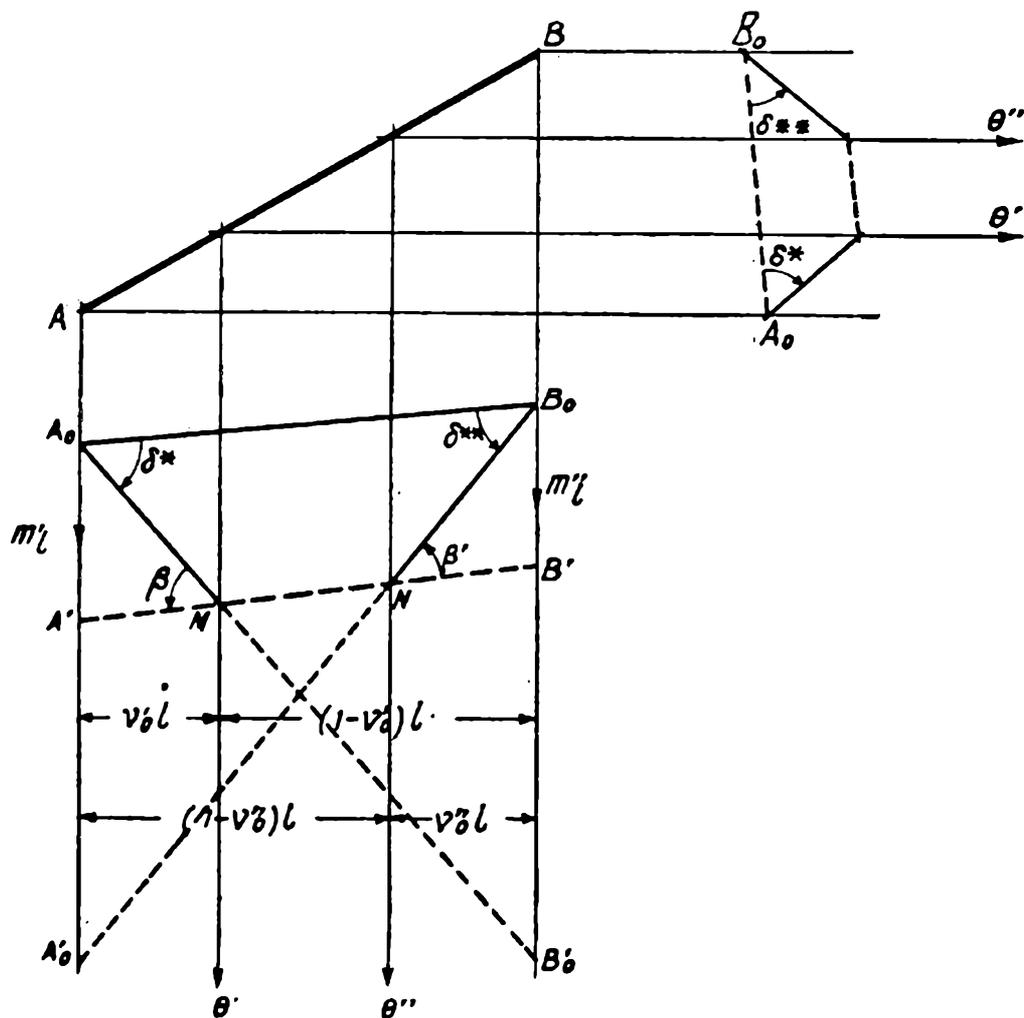


FIG. 24.

das  $\delta^*$  y  $\delta^{**}$  (fig. 24), a las rotaciones representadas por las primera y

última tangentes de la elástica (o, lo que es equivalente, primero y último lados del polígono de las tercias), referidas a la recta de los extremos.

Nos proponemos calcular los momentos reducidos  $m'_l$  y  $m''_l$  ( $m'_h$  y  $m''_h$ ) en función de dichas rotaciones extremas. De la figura se deduce que

$$\delta^* l = m''_l + \beta (1 - \nu'_0) l = m''_l + \frac{m'_l}{\nu'_0} (1 - \nu'_0)$$

y, análogamente, observando que  $\delta^{**} < 0$ ,

$$-\delta^{**} l = m'_l + \frac{m''_l}{\nu''_0} (1 - \nu''_0).$$

Estas expresiones constituyen un sistema de ecuaciones lineales entre las incógnitas  $m'_l$  y  $m''_l$ , que resuelto da

$$[1] \quad \begin{cases} m'_l = l (A' \delta^* + B \delta^{**}), \\ m''_l = -l (B \delta^* + A'' \delta^{**}), \end{cases}$$

con

$$[2] \quad A' = \frac{\nu'_0 (1 - \nu''_0)}{1 - \nu'_0 - \nu''_0}, \quad A'' = \frac{\nu''_0 (1 - \nu'_0)}{1 - \nu'_0 - \nu''_0}, \quad B = \frac{\nu'_0 \nu''_0}{1 - \nu'_0 - \nu''_0}.$$

Para los momentos reducidos horizontales, se obtendría, en igual forma,

$$[3] \quad \begin{cases} m'_h = h (A' \delta^* + B \delta^{**}) = m'_l \frac{h}{l}, \\ m''_h = -h (B \delta^* + A'' \delta^{**}) = m''_l \frac{h}{l}. \end{cases}$$

Si la pieza es simétrica, las [1] y [2] se escriben

$$[4] \quad \begin{cases} m'_l = l (A \delta^* + B \delta^{**}), \\ m''_l = -l (B \delta^* + A \delta^{**}), \\ A = \frac{\nu_0 (1 - \nu_0)}{1 - 2 \nu_0}, \quad B = \frac{\nu_0^2}{1 - 2 \nu_0}. \end{cases}$$

Las tablas II dan los números  $A'$ ,  $A''$  y  $B$  para las piezas con empates (incluyendo el caso particular  $J = \text{const.}$ ).

22. — En las aplicaciones se presenta el caso en que las rotaciones extremas están referidas a un eje  $A'B'$  (fig. 25), distinto de la recta de los extremos. En general se dan las ordenadas extremas  $\eta'$  y  $\eta''$ , referidas a la recta  $A'B'$  y las rotaciones extremas  $\delta'$  y  $\delta''$ . En base a estos elementos es inmediato el trazado del polígono de las tercias y la obtención gráfica de los momentos reducidos  $m'_l$  y  $m''_l$ , como se indica en la figura.

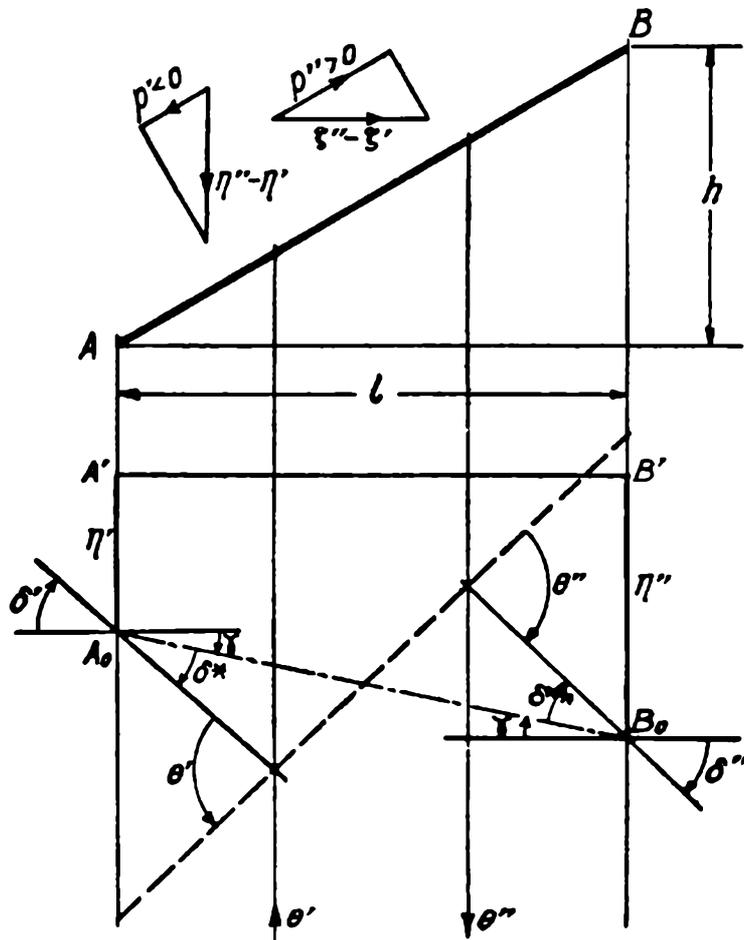


FIG.

Si se desea proceder numéricamente, se requerirá calcular previamente las rotaciones extremas reducidas  $\delta^*$  y  $\delta^{**}$ . De la figura se deduce que

$$[1] \quad \begin{cases} \delta^* = \delta' - \gamma, \\ \delta^{**} = \delta'' - \gamma, \end{cases}$$

con

$$[2] \quad \gamma = \frac{\eta'' - \eta'}{l}.$$

Las rotaciones reducidas de las elásticas vertical y horizontal son iguales. Calculando directamente las de esta última, obtendríamos las mismas expresiones [1], con

$$\gamma = \frac{\zeta'' - \zeta'}{h},$$

siendo  $\zeta'$  y  $\zeta''$  las ordenadas extremas horizontales; resulta, pues, que debe tenerse

$$[3] \quad \frac{\eta'' - \eta'}{l} = \frac{\zeta'' - \zeta'}{h}.$$

Es fácil demostrar, directamente, la expresión anterior. Como se desprecia la deformación axial de la pieza, originada por los esfuerzos normales, la variación de distancia entre los extremos  $B$  y  $A$  debe ser nula, o, lo que es equivalente, debe serlo la proyección sobre  $AB$  del desplazamiento relativo del punto  $B$  respecto del  $A$ . Las componentes de este desplazamiento relativo son  $\eta'' - \eta'$  y  $\zeta'' - \zeta'$  y para sus proyecciones sobre  $AB$ , se tiene, respectivamente,

$$p' = -(\eta'' - \eta') \frac{l}{s}, \quad p'' = (\zeta'' - \zeta') \frac{h}{s};$$

resulta, por consiguiente,

$$-(\eta'' - \eta') \frac{l}{s} + (\zeta'' - \zeta') \frac{h}{s} = 0$$

expresión que, simplificando, da la [3].

**23. Ejemplo numérico.** — Se da la pieza disimétrica con empate parabólico representada en la figura 26, que tiene:

$$\begin{aligned} J &= 0,0020 \text{ m}^4, & J' &= 0,010 \text{ m}^4, & a &= 1,50 \text{ m}, \\ s &= 5,00 \text{ m}, & l &= 4,85 \text{ m}, & h &= 1,20 \text{ m}, \end{aligned}$$

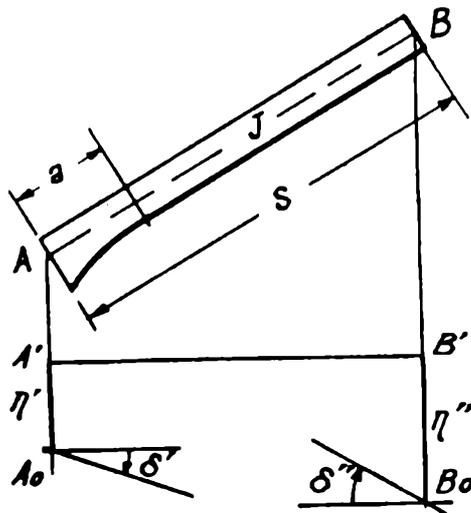


FIG. 26.

y, por tanto,

$$n = \frac{J}{J'} = \frac{0,0020 \text{ m}^4}{0,010 \text{ m}^4} = 0,20,$$

$$\lambda = \frac{a}{s} = \frac{1,50 \text{ m}}{5,00 \text{ m}} = 0,30.$$

Los desplazamientos extremos verticales y horizontales correspondientes a las elásticas originadas por un diagrama lineal de momentos flectores son

$$\begin{aligned}\eta' &= 120 \cdot 10^{-6} \text{ m}, & \eta'' &= 200 \cdot 10^{-6} \text{ m}, \\ \zeta' &= 85 \cdot 10^{-6} \text{ m}, & \zeta'' &= 105 \cdot 10^{-6} \text{ m}, \\ \delta' &= 240 \cdot 10^{-6}, & \delta'' &= 180 \cdot 10^{-6}.\end{aligned}$$

Se tiene

$$\gamma = \frac{\eta'' - \eta'}{l} = \frac{(200 - 120) 10^{-6} \text{ m}}{4,85 \text{ m}} = 16,5 \cdot 10^{-6}$$

y, por lo tanto, las rotaciones extremas reducidas son

$$\begin{aligned}\delta^* &= \delta' - \gamma = (240 - 16,5) 10^{-6} = 223,5 \cdot 10^{-6}, \\ \delta^{**} &= \delta'' - \gamma = (180 - 16,5) 10^{-6} = 163,5 \cdot 10^{-6}.\end{aligned}$$

Para  $\lambda = 0,30$  y  $n = 0,20$  la tabla II e da

$$A' = 0,971, \quad A'' = 0,695, \quad B = 0,459.$$

Los momentos reducidos, dados por las [1] y [3] del número anterior, son, por consiguiente,

$$\begin{aligned}m'_l &= l (A' \delta^* + B \delta^{**}) = \\ &= 4,85 \text{ m} \left[ (0,971 \times 223,5 \cdot 10^{-6}) + (0,459 \times 163,5 \cdot 10^{-6}) \right] = 1420 \cdot 10^{-6} \text{ m}, \\ m''_l &= -l (B \delta^* + A'' \delta^{**}) = \\ &= -4,85 \text{ m} \left[ (0,459 \times 223,5 \cdot 10^{-6}) + (0,695 \times 163,5 \cdot 10^{-6}) \right] = -1048 \cdot 10^{-6} \text{ m}, \\ m'_h &= m'_l \frac{h}{l} = 1420 \cdot 10^{-6} \text{ m} \frac{1,20}{4,85} = 351 \cdot 10^{-6} \text{ m}, \\ m''_h &= m''_l \frac{h}{l} = -1048 \cdot 10^{-6} \text{ m} \frac{1,20}{4,85} = -259 \cdot 10^{-6} \text{ m}.\end{aligned}$$

#### § 4. — Elásticas fundamentales

**24. Generalidades sobre elásticas y definiciones.** — Llamaremos elástica normal, vertical u horizontal, respectivamente, a la que dé los desplazamientos normales a la pieza, sus proyecciones verticales u horizontales. Sus ordenadas las designaremos, respectivamente, con las letras  $\xi$ ,  $\eta$  y  $\zeta$ .

A las ordenadas  $\xi$  de las elásticas normales les daremos el signo convenido en (1), es decir, positivo cuando sea negativo su momento respecto del extremo derecho  $B$  de la pieza. A las ordenadas  $\eta$  y  $\zeta$  les daremos

el signo que tengan respecto de los ejes de referencia adoptados en (1), o

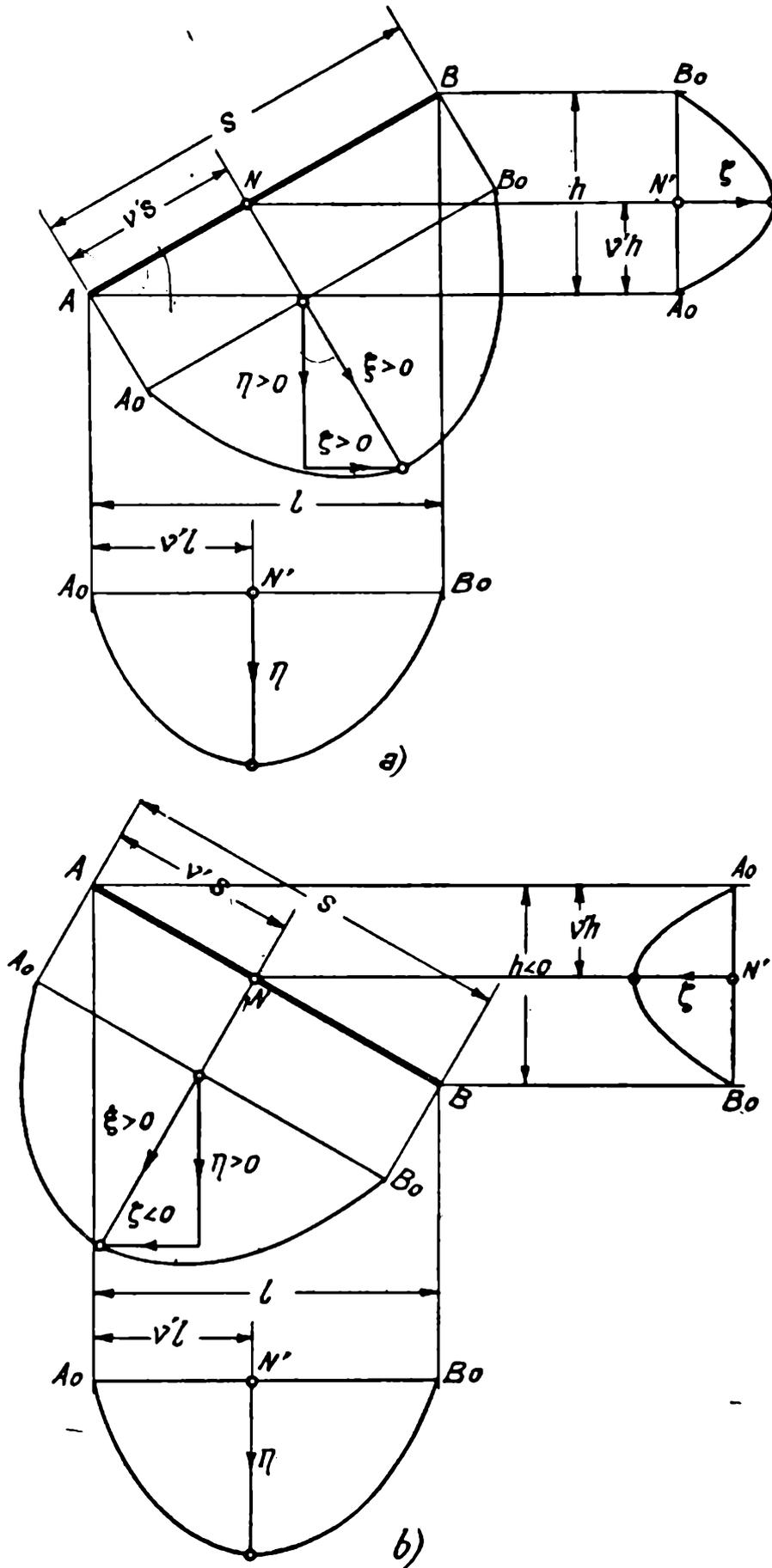


FIG. 27

sea, positivo cuando vayan hacia abajo las primeras y hacia la derecha las segundas.

Como despreciaremos siempre la deformación axil de la pieza, si la elástica tiene desplazamientos extremos nulos (fig. 27), los efectivos desplazamientos de los puntos  $N$  serán los normales  $\xi$ . En este caso, las ordenadas de las elásticas vertical y horizontal se obtienen, en función de las de la normal, mediante las expresiones

$$[1] \quad \begin{cases} \eta = \xi \frac{l}{s}, \\ \zeta = \xi \frac{h}{s}, \end{cases}$$

debiendo darse a  $h$  el signo convenido, para que los  $\zeta$  correspondientes a las piezas negativas resulten con los que les corresponden, como puede verse en la figura.

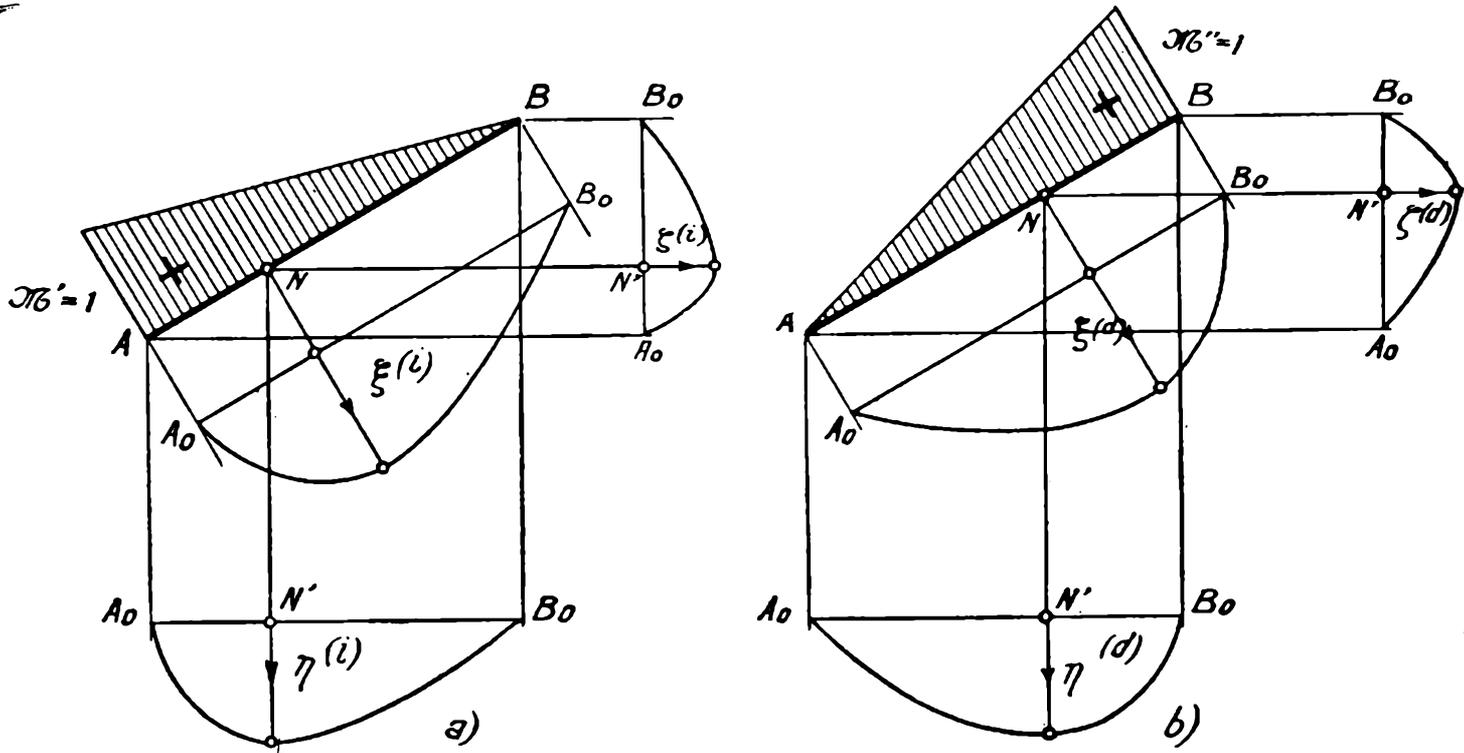


FIG. 28.

A su vez, de las [1] se deduce

$$[2] \quad \zeta = \frac{h}{l} \eta,$$

expresión que permite calcular las ordenadas de la elástica horizontal en función de las de la vertical, siempre, se entiende, que los desplazamientos extremos sean nulos.

25. — Llamaremos *elástica fundamental izquierda* (normal, vertical u horizontal) a la originada por un diagrama triangular de momentos flectores con  $\mathcal{M}' = 1$  (fig. 28 a) y que tenga ordenadas extremas nulas. Análogamente, llamaremos *elástica fundamental derecha* a la que, con ordenadas extremas nulas, es originada por el diagrama triangular de momentos flectores con  $\mathcal{M}'' = 1$  (fig. 28 b). Designaremos las ordenadas de las elásticas fundamentales izquierda (derecha) con las notaciones  $\xi^{(i)}$ ,  $\eta^{(i)}$  o  $\zeta^{(i)}$  ( $\xi^{(d)}$ ,  $\eta^{(d)}$  o  $\zeta^{(d)}$ ), según que se trate, respectivamente, de la normal, vertical u horizontal.

26. Ecuaciones de las elásticas fundamentales para piezas de momento de inercia constante. — Nos ocuparemos exclusivamente de las elásticas normales  $\xi^{(i)}$  y  $\xi^{(d)}$ , en base a las que se obtienen las verticales y horizontales de acuerdo con lo establecido en (24).

Sea la pieza  $AB$  (fig. 29) sometida a un diagrama triangular de momentos flectores, con  $\mathcal{M}' = 1$  en  $A$ .

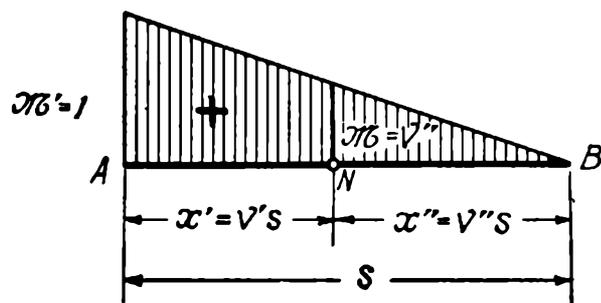


FIG. 29.

El momento  $\mathcal{M}$  en una sección cualquiera  $N$ , de abscisa  $v''s$ , es

$$\mathcal{M} = v''.$$

Tomando a  $x'' = v''s$  como variable independiente, la ecuación diferencial de la línea elástica es

$$[a] \quad \frac{d^2 \xi^{(i)}}{dx''^2} = - \frac{v''}{EJ}.$$

Por otra parte, se tiene

$$\frac{d \xi^{(i)}}{dx''} = \frac{1}{s} \frac{d \xi^{(i)}}{dv''},$$

$$\frac{d^2 \xi^{(i)}}{dx''^2} = \frac{1}{s^2} \frac{d^2 \xi^{(i)}}{dv''^2}.$$

Sustituyendo en la [a] resulta

$$\frac{d^2 \xi^{(i)}}{d\nu''^2} = - \frac{s^2}{EJ} \nu''$$

y, en base a la primera [3] de (9),

$$\frac{d^2 \xi^{(i)}}{d\nu''^2} = - 6 m \nu''$$

Integrando dos veces, se tiene

$$[b] \quad \begin{cases} \frac{d \xi^{(i)}}{d\nu''} = - 3 m \nu''^2 + c_1, \\ \xi^{(i)} = - m \nu''^3 + c_1 \nu'' + c_2, \end{cases}$$

con  $c_1$  y  $c_2$  constantes que se deducen de las condiciones

$$\xi^{(i)} = 0 \quad \text{para} \quad \nu'' = 0,$$

$$\xi^{(i)} = 0 \quad \text{para} \quad \nu'' = 1,$$

que dan

$$c_2 = 0, \quad c_1 = m.$$

Sustituyendo en la [a] se tiene, finalmente,

$$\xi^{(i)} = m (\nu'' - \nu''^3),$$

que es la ecuación de la elástica fundamental izquierda, en función de las abscisas  $\nu''$ , contadas a partir del apoyo derecho.

Para obtenerla en función de las abscisas  $\nu'$  al apoyo izquierdo, basta hacer, en la anterior  $\nu'' = 1 - \nu'$ , con lo que resulta

$$\xi^{(i)} = m (\nu'^3 - 3 \nu'^2 + 2 \nu').$$

Por razones de simetría, la ecuación de la elástica fundamental derecha se obtiene permutando en las anteriores  $\nu'$  y  $\nu''$ .

En resumen, las ecuaciones de las elásticas fundamentales normales son

$$[1] \quad \begin{cases} \xi^{(i)} = m \bar{\xi}^{(i)}, \\ \xi^{(d)} = m \bar{\xi}^{(d)}, \end{cases}$$

con

$$[2] \quad \begin{cases} \bar{\xi}^{(i)} = v'' - v''^3 = 2 v' - 3 v'^2 + v'^3, \\ \bar{\xi}^{(d)} = v' - v'^3 = 2 v'' - 3 v''^2 + v''^3 \end{cases}$$

Las elásticas fundamentales vertical y horizontal son,

$$\eta^{(i)} = \frac{l}{s} \xi^{(i)}, \quad \eta^{(d)} = \frac{l}{s} \xi^{(d)},$$

$$\zeta^{(i)} = \frac{h}{s} \xi^{(i)}, \quad \zeta^{(d)} = \frac{h}{s} \xi^{(d)},$$

y, sustituyendo las expresiones anteriores, resulta

$$[3] \quad \begin{cases} \eta^{(i)} = m_l \bar{\xi}^{(i)}, & \eta^{(d)} = m_l \bar{\xi}^{(d)}, \\ \zeta^{(i)} = m_h \bar{\xi}^{(i)}, & \zeta^{(d)} = m_h \bar{\xi}^{(d)}. \end{cases}$$

**27. Cálculo numérico de las elásticas fundamentales en el caso de piezas de momento de inercia variable.** — El cálculo numérico de las ordenadas de las elásticas fundamentales, se puede efectuar por los procedimientos generales de obtención de elásticas (\*). Ocupémonos de la elástica fundamental normal izquierda.

Considerando una cadena elástica de uniones  $i$  equivalente al sistema, las ordenadas sucesivas de la elástica, referidas a la primera tangente  $A_0B'_0$  (fig. 30), están ligadas por la relación

$$[1] \quad \xi_{k+1} = \xi_k + (x'_{k+1} - x'_k) \sum_{j=1}^k \theta_j,$$

(\*) BUTTY, E., *Loc. cit.*, tomo I, pág. 228.

siendo

$$\theta_j = -\mathcal{M}_j \rho_j \quad (*)$$

y

$$\mathcal{M}_j = \frac{1}{s} x''_j.$$

Para referirlas a la recta de los extremos  $A_0B_0$ , se requiere sumarles las ordenadas

$$\xi'_k = -\frac{\xi_B}{s} x'_k.$$

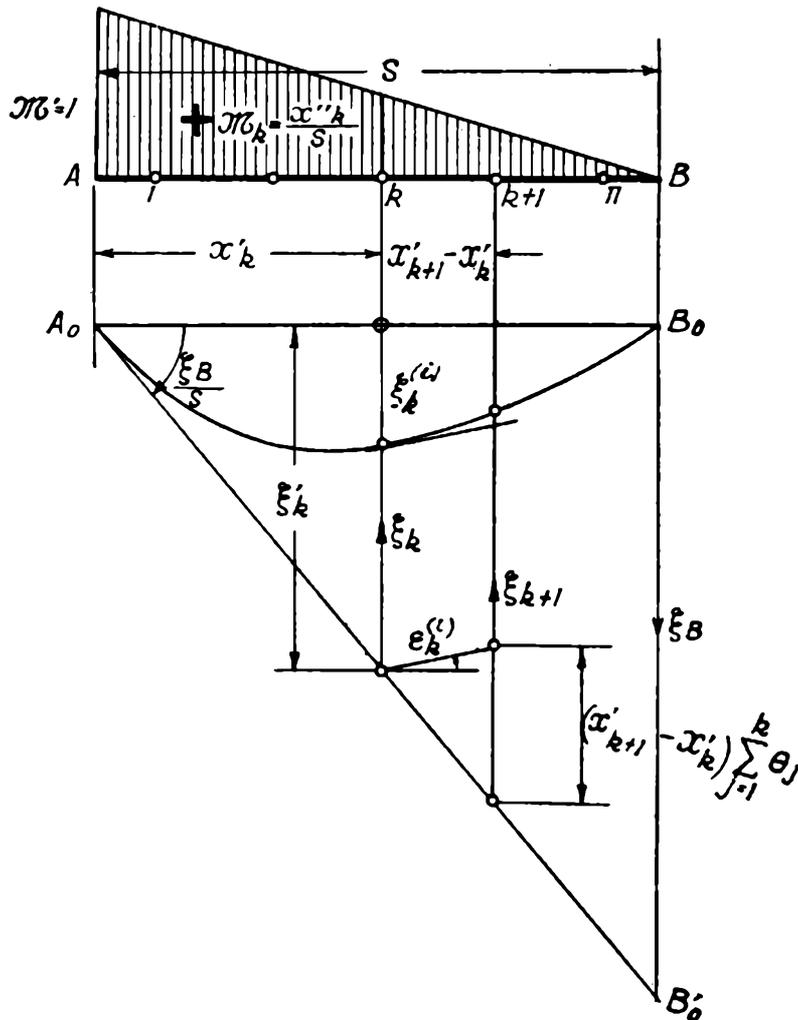


FIG. 30.

Se tiene, en definitiva,

$$[2] \quad \xi^{(i)}_k = \xi_k - \frac{\xi_B}{s} x'_k.$$

(\*) El signo negativo proviene de que deben tomarse los momentos de las fuerzas que actúan a la derecha.

Los cálculos pueden efectuarse con comodidad, disponiéndolos en el cuadro siguiente:

$j$	$\rho_j$	$x'_j$	$x''_j$	$x'_{k+1} - x''_k$	$\mathcal{M}_j = \frac{1}{s} x''_j$	$\theta_j = -\mathcal{M}_j \rho_j$	$\sum_{j=1}^k \theta_j$	$\xi^*_k = (x'_{k+1} - x''_k) \sum_{j=1}^k \theta_j$	$\xi_{k+1} = \xi_k + \xi^*_k$	$\xi'_k = -\frac{\xi_B x'_k}{s}$	$\xi^{(d)}_k = \xi_k + \xi'_k$
1							0	0	0		
2							$\theta_1$	$a$	$\xi_2 = 0 + a$		
3							$\theta_1 + \theta_2$	$b$	$\xi_3 = \xi_2 + b.$		
$n$											
$B$											

Es inmediato que para la elástica fundamental derecha, basta permutar en las anteriores  $x'_k$  con  $x''_k$ ,  $\xi_A$  con  $\xi_B$ .

**28. Cálculo numérico de las ordenadas de las elásticas fundamentales, en el caso de piezas de momento de inercia variable (otro procedimiento).** — Con más comodidad, se puede calcular numéricamente las ordenadas de las elásticas fundamentales, aplicando el teorema de la derivada del trabajo de deformación (Castigliano). Hagámoslo para la elástica fundamental derecha. Se trata de calcular el desplazamiento normal a la pieza correspondiente al punto  $i$ , originado por el diagrama triangular de momentos flectores, con  $\mathcal{M}'' = 1$ , en la viga simplemente apoyada  $AB$  (fig. 31) (esto último por ser nulas las ordenadas extremas). Según el referido teorema de Castigliano, se tiene (\*)

$$[a] \quad \xi^{(d)}_k = \sum_{i=1}^n \mathcal{M}_i \mathcal{M}'_i \rho_i,$$

(\*) BUTRY, E., *Loc. cit.*, tomo II, pág. 124.

siendo  $\mathcal{M}_i$ , los momentos del diagrama de la figura 31 a y  $\mathcal{M}'_i$  los del de la figura 31 b, originados, estos últimos (en la viga simplemente apo-

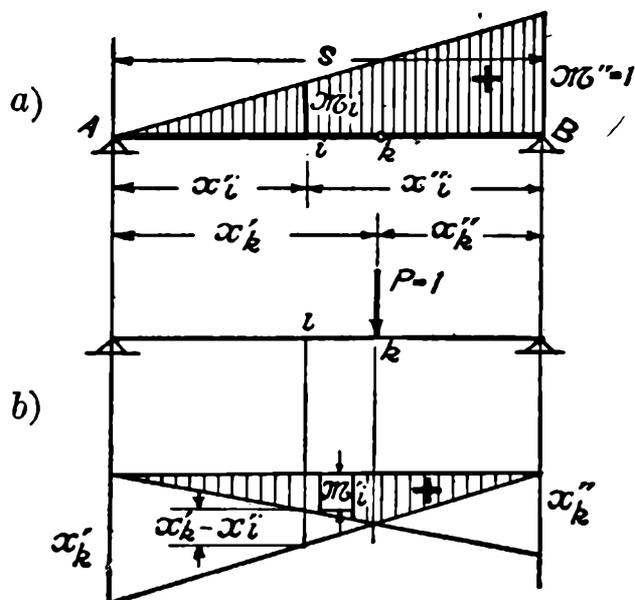


FIG. 31.

yada), por una fuerza  $P = 1$  aplicada en  $k$ .

Se tiene

$$\mathcal{M}_i = \frac{1}{s} x'_i,$$

$$\mathcal{M}'_i = \frac{x'_k}{s} x''_i - (x'_k - x'_i), \quad (i = 1, 2, 3, \dots, k)$$

$$\mathcal{M}'_i = \frac{x'_k}{s} x''_i, \quad (i = k, k + 1, k + 2, \dots, n).$$

Sustituyendo en la [a], resulta

$$\begin{aligned} \xi^{(d)}_k &= \frac{1}{s} \sum_{i=1}^k x'_i \left( \frac{x'_k}{s} x''_i - x'_k + x'_i \right) \rho_i + \frac{1}{s} \sum_{i=k}^n x'_i \frac{x'_k}{s} x''_i \rho_i = \\ &= \frac{x'_k}{s^2} \sum_{i=1}^n \rho_i x'_i x''_i - \frac{x'_k}{s} \sum_{i=1}^k \rho_i x'_i + \frac{1}{s} \sum_{i=1}^k \rho_i x'^2_i \end{aligned}$$

y, en virtud de las [1] y [2] de (10)  $\left( \rho' x'_0 = m = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^n \rho_i x'_i x''_i \right)$ ,

$$[1] \quad \xi^{(d)}_k = \frac{1}{s} \left( m x'_k - x'_k \sum_{i=1}^k \rho_i x'_i + \sum_{i=1}^k \rho_i x'^2_i \right).$$

Se pueden disponer los cálculos en el cuadro siguiente:

					a	b	c	
$i, k$	$x'_i$	$\rho_i x'_i$	$\rho_i x'^2_i$	$\sum_{i=1}^k \rho_i x'_i$	$m x'_k$	$-x'_k \sum_{i=1}^k \rho_i x'_i$	$\sum_{i=1}^k \rho_i x'^2_i$	$\xi^{(d)}_k = \frac{a + b + c}{s}$
1								
2								
$n$								

**29. Elásticas fundamentales para piezas con empates.** — Poniendo

$$[1] \quad \xi^{(i)}_k = m \bar{\xi}^{(i)}_k, \quad \xi^{(d)}_k = m \bar{\xi}^{(d)}_k,$$

las tablas III dan los números  $\bar{\xi}^{(i)}_k$  y  $\bar{\xi}^{(d)}_k$  para las piezas con empates consideradas en (12). Las  $a, b, c, d, e$  y  $f$  proporcionan las ordenadas correspondientes a los puntos  $k$  que resultan de dividir la luz en doce partes iguales; las  $a', b', c', d', e'$  y  $f'$  y  $a'', b'', c'', d'', e''$  y  $f''$  las correspondientes a los puntos de división, respectivamente, en cinco y siete partes iguales (\*).

Estas misma tablas, cuyo manejo es inmediato, dan, en las filas correspondientes a  $n=1$ , los números  $\bar{\xi}^{(i)}$  y  $\bar{\xi}^{(d)}$  para las piezas de momento de inercia constante.

**30. Rotaciones de las elásticas fundamentales.** — Llamaremos *rotación de la elástica fundamental izquierda*  $\epsilon^{(i)}$  (derecha  $\epsilon^{(d)}$ ), correspondiente a la sección  $N$ , a la rotación que se origina en dicha sección durante la deformación que da origen a la elástica fundamental izquierda (derecha). Estas rotaciones están medidas por las tangentes a la elástica fundamental (fig. 32) y representan las que experimentan chapas rígidas  $C$  solidarias con la sección considerada  $N$ . Es inmediato que las rotaciones fundamentales izquierdas (derechas), correspondientes a una

(\*) Se han elegido estos puntos de división, por ser los que, con más frecuencia, están sujetos a cargas concentradas, en las aplicaciones.

Las tablas III  $a, b, c, d, e$  y  $f$  han sido tomadas directamente de la citada obra de STRASSNER. Las restantes han sido calculadas, aproximadamente, obteniendo las ordenadas mediante una interpolación según una parábola cúbica.

sección dada, son iguales para las tres elásticas normal, vertical y horizontal.

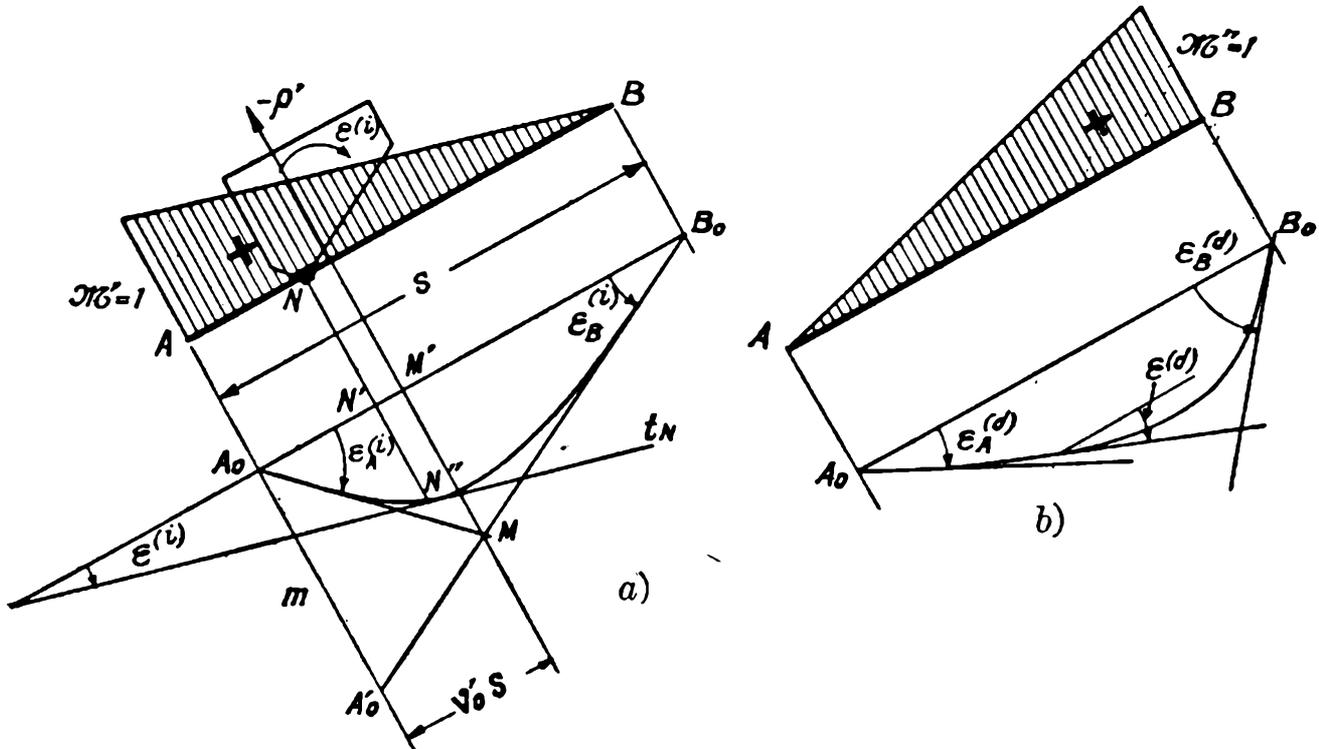


FIG. 32.

Designaremos  $\epsilon_A^{(i)}$  y  $\epsilon_B^{(i)}$  ( $\epsilon_A^{(d)}$  y  $\epsilon_B^{(d)}$ ) a las rotaciones de las elásticas fundamentales izquierda (derecha) correspondientes respectivamente a los extremos  $A$  y  $B$  de la pieza.

31. — Si se trata de una pieza de momento de inercia constante, es inmediato que

$$\epsilon^{(i)} = \frac{d \xi^{(i)}}{dx'} = \frac{1}{s} \frac{d \xi^{(i)}}{dv'}, \quad \epsilon^{(d)} = \frac{d \xi^{(d)}}{dx'} = \frac{1}{s} \frac{d \xi^{(d)}}{dv'},$$

$$\epsilon^{(i)} = -\frac{d \xi^{(i)}}{dx''} = -\frac{1}{s} \frac{d \xi^{(i)}}{dv''}, \quad \epsilon^{(d)} = -\frac{d \xi^{(d)}}{dx''} = -\frac{1}{s} \frac{d \xi^{(d)}}{dv''}.$$

Teniendo en cuenta las [1] y [2] de (26), y las [1] de (14), estas expresiones dan

$$[1] \quad \begin{cases} \epsilon^{(i)} = \frac{m}{s} \bar{\epsilon}^{(i)} = k \bar{m} \bar{\epsilon}^{(i)}, \\ \epsilon^{(d)} = \frac{m}{s} \bar{\epsilon}^{(d)} = k \bar{m} \bar{\epsilon}^{(d)}, \end{cases}$$

con

$$[2] \quad \begin{cases} \bar{\epsilon}^{(i)} = -(1 - 3 v'^2) = 2 - 6 v' + 3 v'^2, \\ \bar{\epsilon}^{(d)} = 1 - 3 v'^2 = -(2 - 6 v'' + 3 v''^2) \end{cases}$$

y, como siempre,

$$k = \frac{s}{EJ}.$$

32. — Si la pieza es de momento de inercia variable (en particular con empates) y se conocen las ordenadas de la elástica fundamental izquierda (derecha) para un número discreto de puntos  $k$ , las rotaciones izquierdas (derechas) pueden calcularse aproximadamente, tomando para el punto  $B$  (fig. 33) la media aritmética de las pendientes de las cuerdas  $AB$  y

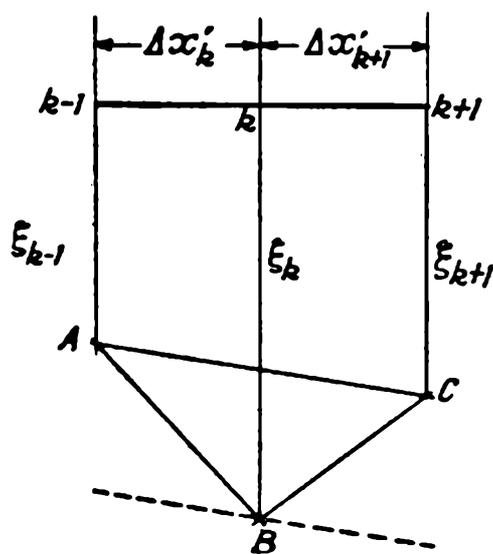


FIG. 33.

$BC$ . Es decir, puede ponerse, con suficiente aproximación

$$\epsilon^{(i)}_k = \frac{1}{2} \left( \frac{\xi^{(i)}_k - \xi^{(i)}_{k-1}}{\Delta x'_k} + \frac{\xi^{(i)}_{k+1} - \xi^{(i)}_k}{\Delta x'_{k+1}} \right),$$

$$\epsilon^{(d)}_k = \frac{1}{2} \left( \frac{\xi^{(d)}_k - \xi^{(d)}_{k-1}}{\Delta x'_k} + \frac{\xi^{(d)}_{k+1} - \xi^{(d)}_k}{\Delta x'_{k+1}} \right).$$

Si, como generalmente sucede, se toma

$$\Delta x'_k = \Delta x'_{k+1} = s \Delta v'_k,$$

las anteriores se escriben

$$\epsilon^{(i)}_k = \frac{\xi^{(i)}_{k+1} - \xi^{(i)}_{k-1}}{2s \Delta v'_k}$$

$$\epsilon^{(d)}_k = \frac{\xi^{(d)}_{k+1} - \xi^{(d)}_{k-1}}{2s \Delta v'_k}$$

y, en particular, para las piezas con empates, recordando las [1] de (31),

$$\varepsilon^{(i)}_k = \frac{m}{2s} \bar{\varepsilon}^{(i)}_k = k m \bar{\varepsilon}^{(i)}_k, \quad \varepsilon^{(d)}_k = \frac{m}{2s} \bar{\varepsilon}^{(d)}_k = k \bar{m} \bar{\varepsilon}^{(d)}_k,$$

con

$$\bar{\varepsilon}^{(i)} = \frac{\xi^{(i)}_{k+1} - \xi^{(i)}_{k-1}}{2 \Delta v'_k}, \quad \bar{\varepsilon}^{(d)} = \frac{\xi^{(d)}_{k+1} - \xi^{(d)}_{k-1}}{2 \Delta v'_k}.$$

Lo que precede equivale a tomar como tangente en  $B$  una paralela a la cuerda  $AC$ .

33. — Las anteriores dan, con suficiente aproximación, las rotaciones de las elásticas fundamentales para los puntos intermedios. No sucede lo mismo con las extremas  $\varepsilon^{(i)}_A$  y  $\varepsilon^{(i)}_B$  ( $\varepsilon^{(d)}_A$  y  $\varepsilon^{(d)}_B$ ). Estas últimas se calculan exactamente en la forma que sigue:

Para el diagrama triangular de momentos flectores con  $\mathcal{M}' = 1$ , que da la elástica fundamental izquierda, se tiene

$$\theta' = -\rho', \quad \theta'' = 0$$

y el polígono de las tercias se reduce al triángulo  $A_0MB_0$  representado en la figura 32, del que se deduce

$$\varepsilon^{(i)}_A = \frac{\overline{MM'}}{v'_0 s}, \quad \varepsilon^{(i)}_B = -\frac{m}{s};$$

siendo

$$\overline{MM'} = \frac{m}{s} (1 - v'_0) s,$$

se obtiene, sustituyendo y simplificando,

$$[1] \quad \varepsilon^{(i)}_A = \frac{m}{s} \bar{\varepsilon}^{(i)}_A, \quad \varepsilon^{(i)}_B = \frac{m}{s} \bar{\varepsilon}^{(i)}_B,$$

con

$$[2] \quad \bar{\varepsilon}^{(i)}_A = \frac{1 - v'_0}{v'_0}, \quad \bar{\varepsilon}^{(i)}_B = -1.$$

Análogamente, se obtendría

$$[3] \quad \varepsilon^{(d)}_A = \frac{m}{s} \bar{\varepsilon}^{(d)}_A, \quad \varepsilon^{(d)}_B = \frac{m}{s} \bar{\varepsilon}^{(d)}_B,$$

con

$$[4] \quad \bar{\varepsilon}^{(d)}_A = 1, \quad \bar{\varepsilon}^{(d)}_B = -\frac{1 - v''_0}{v''_0}.$$

34. — Las tablas IV permiten calcular las rotaciones de las elásticas fundamentales para las piezas con empates, comprendiendo el caso particular de las de momento de inercia constante ( $n = 1$ ).

Dan los números  $\bar{\epsilon}^{(i)}$  y  $\bar{\epsilon}^{(d)}$  tales que

$$[1] \quad \begin{cases} \epsilon^{(i)} = \frac{m}{s} \bar{\epsilon}^{(i)} = k \bar{m} \bar{\epsilon}^{(i)}, \\ \epsilon^{(d)} = \frac{m}{s} \bar{\epsilon}^{(d)} = k \bar{m} \bar{\epsilon}^{(d)}, \end{cases}$$

para los puntos que resultan de dividir la longitud de la pieza en doce partes iguales.

Las rotaciones fundamentales extremas  $\epsilon^{(i)}_A$  y  $\epsilon^{(i)}_B$  ( $\epsilon^{(d)}_A$  y  $\epsilon^{(d)}_B$ ) se obtienen con los números de la tabla correspondientes a los puntos 0 y 12.

Siendo

$$\frac{m}{s} = \frac{s^2}{6 E J s} = \frac{s l}{6 E J l} = \frac{m_l}{l},$$

las [1] se escriben también

$$[2] \quad \epsilon^{(i)} = \frac{m_l}{l} \bar{\epsilon}^{(i)}, \quad \epsilon^{(d)} = \frac{m_l}{l} \bar{\epsilon}^{(d)}$$

#### § 5. — Elásticas originadas por diagramas lineales de momentos flectores.

35. **Obtención mediante las elásticas fundamentales.** — Si la pieza está sujeta a un diagrama triangular de momentos flectores, con  $\mathcal{M}' \neq 1$  ( $\mathcal{M}'' \neq 1$ ), es inmediato que las ordenadas de la elástica vertical izquierda (derecha), referidas a la recta de los extremos, son  $\mathcal{M}' \eta^{(i)}$  ( $\mathcal{M}'' \eta^{(d)}$ ). Estando sometida la pieza a un diagrama lineal cualquiera de momentos flectores (fig. 34) con momentos extremos  $\mathcal{M}'$  y  $\mathcal{M}''$ , las ordenadas de la elástica vertical, referidas siempre a la recta de los extremos, serán, por consiguiente,

$$\eta^* = \mathcal{M}' \eta^{(i)} + \mathcal{M}'' \eta^{(d)}$$

o, recordando las [3] de (26) y [1] de (20),

$$\eta^* = m'_l \bar{\xi}^{(i)} + m''_l \bar{\xi}^{(d)},$$

tanto para piezas con empates, como de momento de inercia constante.

Si la elástica tiene ordenadas extremas  $\eta'$  y  $\eta''$  no nulas, se requerirá agregar a las anteriores las  $\eta^{**}$  de la recta  $A_0B_0$  referidas a la  $A'B'$ , dadas por la expresión

$$\eta^{**} = \eta' + (\eta'' - \eta') v',$$

con lo que la ecuación más general de la elástica vertical, originada por un diagrama lineal de momentos flectores, resulta

$$[1] \quad \eta = m'_l \bar{\xi}^{(2)} + m''_l \bar{\xi}^{(d)} + (\eta'' - \eta') v' + \eta',$$

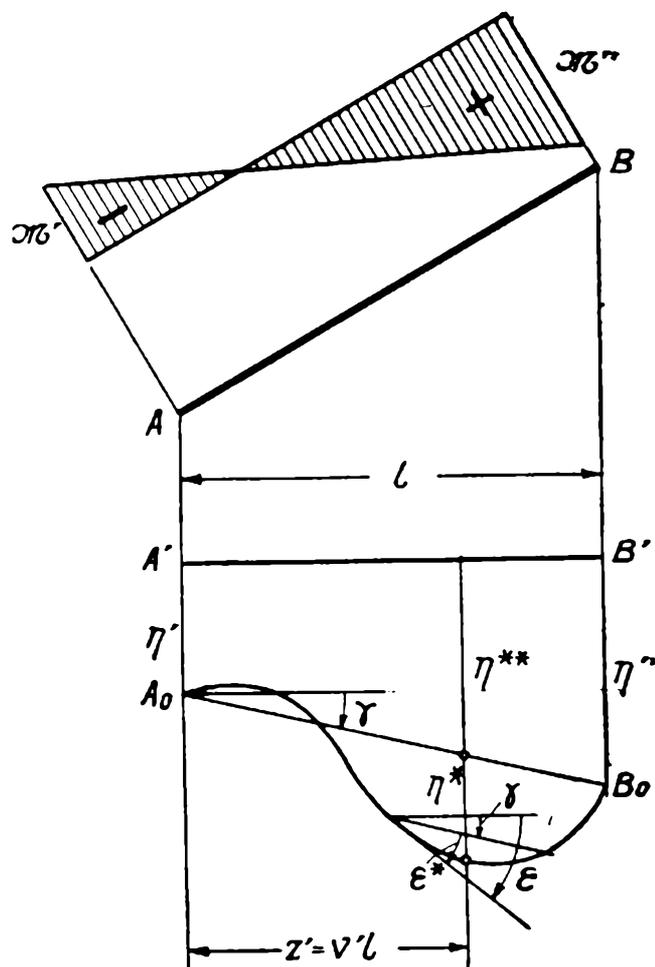


FIG. 34.

y, análogamente, para la elástica horizontal se obtendría

$$[2] \quad \zeta = m'_h \bar{\xi}^{(2)} + m''_h \bar{\xi}^{(d)} + (\zeta'' - \zeta') v' + \zeta'$$

En virtud de la [2] de (24), se tiene para las ordenadas horizontales referidas a la recta de los extremos

$$\zeta^* = \frac{h}{l} \eta^*$$

y, por tanto, una vez calculadas las ordenadas verticales  $\eta^*$ , las horizontales totales se expresan

$$[3] \quad \zeta^* = \frac{h}{l} \eta^* + (\zeta'' - \zeta') v' + \zeta'$$

No debe olvidarse que los desplazamientos extremos están ligados por la relación [3] de (22).

36. — Las rotaciones  $\epsilon$  de la elástica (fig. 34) están dadas por la expresión

$$[a] \quad \epsilon = \epsilon^* + \gamma,$$

siendo  $\epsilon^*$  la rotación de la elástica referida a la recta de los extremos  $A_0B_0$  y  $\gamma$  la de esta última referida al eje  $A'B'$ . Se tiene, como es inmediato,

$$\epsilon^* = \mathcal{M}' \epsilon^{(i)} + \mathcal{M}'' \epsilon^{(d)}, \quad \gamma = \frac{\eta'' - \eta'}{l}$$

Recordando las [2] de (34) y [1] de (20), se tiene

$$\epsilon^* = \frac{1}{l} (m'_l \bar{\epsilon}^{(i)} + m''_l \bar{\epsilon}^{(d)}).$$

Sustituyendo en la [a] resulta, finalmente,

$$[1] \quad \epsilon = \frac{1}{l} (m'_l \bar{\epsilon}^{(i)} + m''_l \bar{\epsilon}^{(d)} + \eta'' - \eta').$$

37. **Ejercicios numéricos.** — Sea la pieza disimétrica tratada en (23) (fig. 26). Las ordenadas y rotaciones extremas son las consignadas en dicho número, es decir:

$$\begin{aligned} \eta' &= 120 \cdot 10^{-6} \text{ m}, & \eta'' &= 200 \cdot 10^{-6} \text{ m}, \\ \zeta' &= 85 \cdot 10^{-6} \text{ m}, & \zeta'' &= 105 \cdot 10^{-6} \text{ m}, \\ \delta' &= 240 \cdot 10^{-6}, & \delta'' &= 180 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Se piden las elásticas vertical y horizontal correspondientes, que están dadas, según acabamos de ver, por las expresiones

$$\eta_k = \eta^*_k + \eta' + (\eta'' - \eta') v_k,$$

$$\zeta_k = \frac{h}{l} \eta^*_k + \zeta' + (\zeta'' - \zeta') v_k,$$

con

$$\eta^*_k = m'_l \bar{\xi}^{(i)}_k + m''_l \bar{\xi}^{(d)}_k.$$

En (23) se ha obtenido

$$m'_l = 1420 \cdot 10^{-6} \text{ m}, \quad m''_l = -1048 \cdot 10^{-6} \text{ m.};$$

además

$$\frac{h}{l} = \frac{1,20 \text{ m}}{4,85 \text{ m}} = 0,247.$$

Los números  $\bar{\xi}^{(i)}_k$  y  $\bar{\xi}^{(d)}_k$ , dados en la tabla III e para los puntos  $k$  resultantes de dividir

la luz en 12 partes iguales, se consignan en el cuadro siguiente, en el que, además, se efectúan los cálculos de las ordenadas pedidas:

	$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Unidad
	$\bar{\xi}^{(i)}_k$	0	0,120	0,224	0,304	0,354	0,374	0,368	0,340	0,294	0,234	0,162	0,083	0	—
	$\bar{\xi}^{(d)}_k$	0	0,083	0,165	0,241	0,307	0,359	0,392	0,403	0,389	0,345	0,268	0,154	0	—
(a)	$m'_l \bar{\xi}^{(i)}_k$	0	170	318	432	503	531	523	483	417	332	230	118	0	$10^{-6} \text{ m}$
(b)	$m''_l \bar{\xi}^{(d)}_k$	0	86,9	173	253	322	376	411	422	408	362	281	161	0	$10^{-6} \text{ m}$
(c)	$\eta^* = a + b$	0	257	491	685	825	907	934	905	825	694	511	279	0	$10^{-6} \text{ m}$
(d)	$\eta^* \frac{h}{l}$	0	63,4	121	169	204	224	231	224	204	171	126	68,9	0	$10^{-6} \text{ m}$
	$\nu_k$	0	0,0833	0,167	0,250	0,333	0,417	0,500	0,583	0,666	0,750	0,833	0,916	1	—
(e)	$(\eta'' - \eta') \nu_k$	0	6,66	13,4	20	26,6	33,4	40	46,6	53,3	60	66,6	73,3	80	$10^{-6} \text{ m}$
(f)	$(\zeta'' - \zeta') \nu_k$	0	1,67	3,34	5	6,66	8,34	10	11,7	13,3	15	16,7	18,3	20	$10^{-6} \text{ m}$
	$\eta_k = c + e + \eta'$	120	384	624	825	972	1060	1094	1072	998	874	698	472	200	$10^{-6} \text{ m}$
	$\zeta_k = d + f + \zeta'$	85	150	209	259	296	317	326	321	302	271	228	172	105	$10^{-6} \text{ m}$

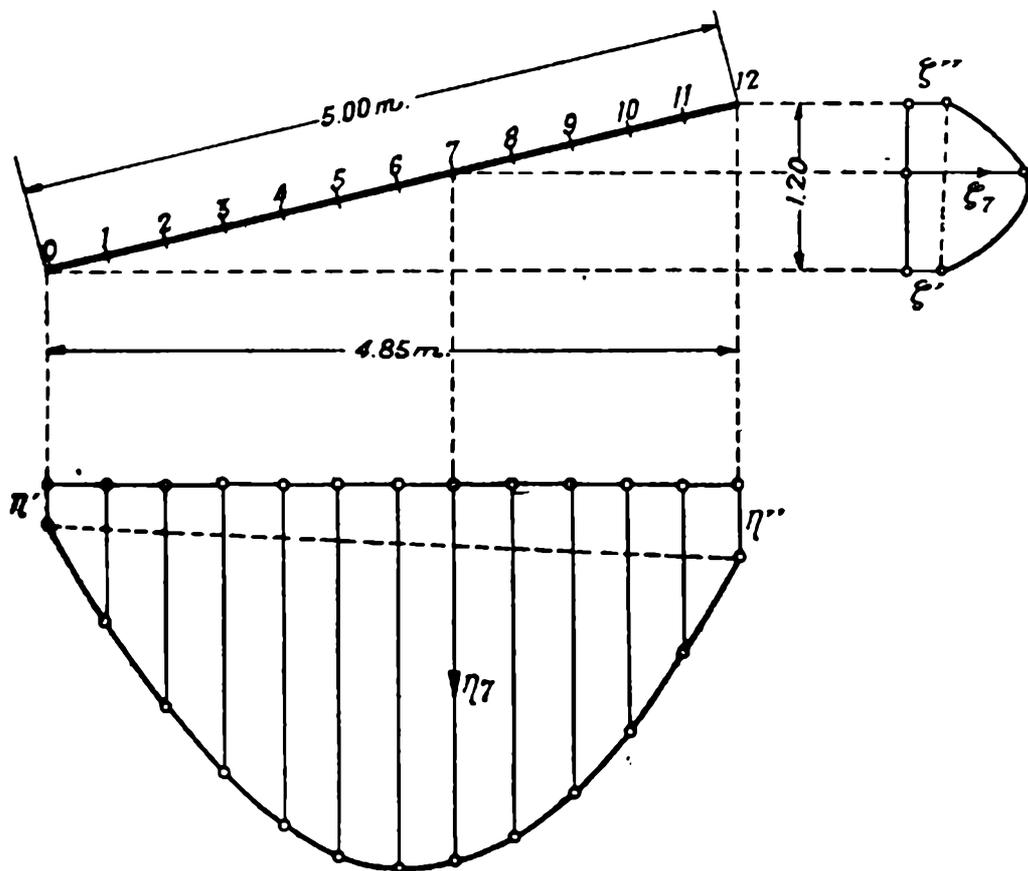


FIG. 35

En la figura 35 se han representado las elásticas así calculadas, en la escala  $\frac{300 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}}$

38. — Sea la pieza disimétrica (fig. 19) considerada en (17), para la que se piden las elásticas vertical y horizontal originadas por un diagrama lineal de momentos flectores, con

$$\mathcal{M}' = 5 \text{ tm}, \quad \mathcal{M}'' = 3,2 \text{ tm}.$$

La pieza considerada tiene

$$l = 4,00 \text{ m}, \quad h = 3,87 \text{ m},$$

$$n = 0,10, \quad \lambda = 0,28,$$

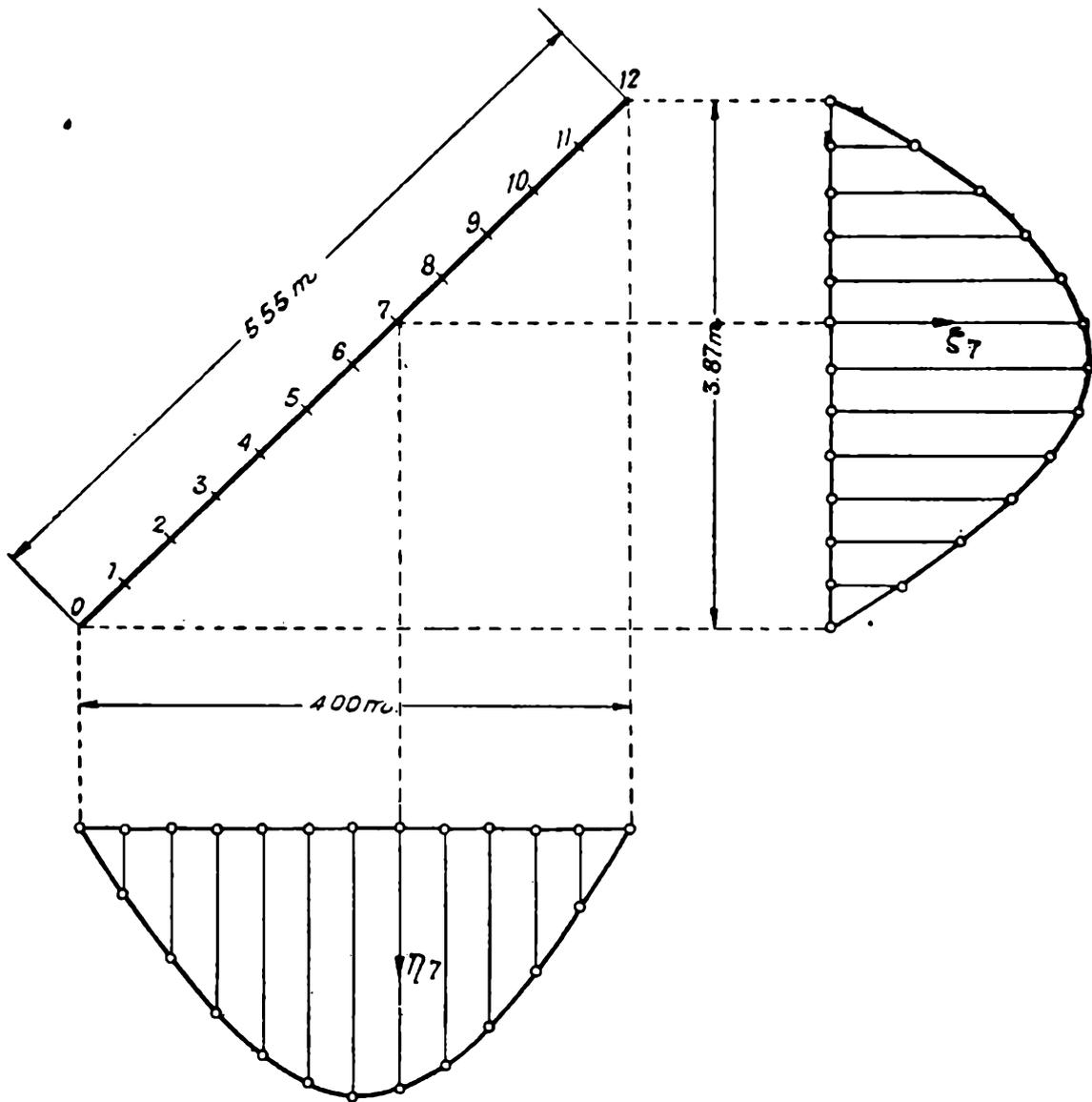


FIG. 36.

y, por consiguiente,

$$\frac{h}{l} = \frac{3,87 \text{ m}}{4,00 \text{ m}} = 0,968.$$

En dicho número (17) se ha obtenido, además, que

$$\bar{m} = 0,149 ,$$

$$k = 1057 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} ;$$

resulta

$$m_l = k l \bar{m} = 1057 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} \times 4 \text{ m} \times 0,149 = 630 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1}.$$

Se tiene, por consiguiente,

$$m'_l = \mathcal{M}' m_l = 5 \text{ tm} \times 630 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1} = 3150 \cdot 10^{-6} \text{ m} ,$$

$$m''_l = \mathcal{M}'' m_l = 3,2 \text{ tm} \times 630 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1} = 2016 \cdot 10^{-6} \text{ m}.$$

Como  $\lambda$  no corresponde a los números de entrada de la tabla III c, se requiere obtener por interpolación los números  $\bar{\xi}^{(i)}$  y  $\bar{\xi}^{(d)}$ . Este cálculo se efectúa en el cuadro siguiente:

	$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
(a)	$\bar{\xi}^{(i)} \left( \begin{array}{l} \lambda = 0,25 \\ \eta = 0,10 \end{array} \right)$	0,107	0,205	0,288	0,343	0,366	0,363	0,338	0,293	0,233	0,162	0,083
	$\bar{\xi}^{(i)} \left( \begin{array}{l} \lambda = 0,30 \\ n = 0,10 \end{array} \right)$	0,099	0,191	0,272	0,330	0,358	0,358	0,335	0,291	0,232	0,162	0,083
(b)	$\frac{\Delta \bar{\xi}_i}{\Delta \lambda} 0,03$	-0,0048	-0,0084	-0,0096	-0,0078	-0,0048	-0,0030	-0,0018	-0,0012	-0,0006	—	—
	$\bar{\xi}^{(i)} = a + b \left( \begin{array}{l} \lambda = 0,20 \\ n = 0,10 \end{array} \right)$	0,102	0,197	0,278	0,335	0,361	0,360	0,336	0,292	0,232	0,162	0,083
(a')	$\bar{\xi}^{(d)} \left( \begin{array}{l} \lambda = 0,25 \\ n = 0,10 \end{array} \right)$	0,083	0,166	0,245	0,314	0,368	0,403	0,415	0,400	0,355	0,276	0,159
	$\bar{\xi}^{(d)} \left( \begin{array}{l} \lambda = 0,30 \\ n = 0,10 \end{array} \right)$	0,083	0,166	0,246	0,318	0,375	0,412	0,426	0,412	0,366	0,285	0,164
(b')	$\frac{\Delta \bar{\xi}^{(d)}}{\Delta \lambda} 0,03$	—	—	0,0006	0,0024	0,0042	0,0054	0,0066	0,0072	0,0066	0,0054	0,003
	$\bar{\xi}^{(d)} = a' + b' \left( \begin{array}{l} \lambda = 0,28 \\ n = 0,10 \end{array} \right)$	0,083	0,166	0,246	0,316	0,372	0,408	0,422	0,407	0,362	0,281	0,162

En el cuadro siguiente se calculan las ordenadas de las elásticas pedidas.

	$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Unidad
	$\bar{\xi}^{(i)}_k$	0,102	0,197	0,278	0,335	0,361	0,360	0,336	0,292	0,232	0,162	0,083	—
	$\bar{\xi}^{(d)}_k$	0,083	0,166	0,246	0,316	0,372	0,408	0,422	0,407	0,362	0,281	0,162	—
(a)	$m'_l \bar{\xi}^{(i)}_k$	321	621	876	1055	1137	1134	1058	920	731	510	261	$10^{-6} \text{ m}$
(b)	$m''_l \bar{\xi}^{(d)}_k$	167	335	496	637	750	823	851	821	730	566	327	$10^{-6} \text{ m}$
(c)	$\eta^* = a + b$	488	956	1372	1692	1887	1957	1909	1741	1461	1076	588	$10^{-6} \text{ m}$
(d)	$\zeta^* = \eta^* \frac{h}{l}$	472	925	1328	1638	1827	1894	1848	1685	1414	1042	569	$10^{-6} \text{ m}$

Estas elásticas están representadas en la figura 36, en la escala  $\frac{750 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}}$

**39. Ecuaciones de las elásticas debidas a diagramas lineales de momentos flectores, para piezas de momento de inercia constante.**— Sea una pieza de momento de inercia constante  $J$ , sujeta a un diagrama lineal de momentos flectores, con momentos extremos  $\mathcal{M}'$  y  $\mathcal{M}''$ . Nos proponemos hallar la ecuación de la elástica vertical, por ejemplo. Sean, además,  $\eta'$  y  $\eta''$  los desplazamientos extremos de esta dirección.

Según la [1] de (35), se tiene

$$\eta = m'_l \bar{\xi}^{(i)} + m''_l \bar{\xi}^{(d)} + (\eta'' - \eta') v' + \eta',$$

y, sustituyendo las expresiones analíticas de  $\bar{\xi}^{(i)}$  y  $\bar{\xi}^{(d)}$  dadas por las [2] de (26), resulta

$$\eta = m'_l (2 v' - 3 v'^2 + v'^3) + m''_l (v' - v'^3) + (\eta'' - \eta') v' + \eta'$$

o sea, ordenando y recordando que  $m'_l = \mathcal{M}' m_l$  y  $m''_l = \mathcal{M}'' m_l$ ,

$$[1] \quad \eta = m_l \left[ (\mathcal{M}' - \mathcal{M}'') v'^3 - 3 \mathcal{M}' v'^2 + (2 \mathcal{M}' + \mathcal{M}'') v' \right] + (\eta'' - \eta') v' + \eta'$$

En igual forma, para la ecuación de la elástica horizontal, se obtendría

$$[2] \quad \zeta = m_h \left[ (\mathcal{M}' - \mathcal{M}'') v'^3 - 3 \mathcal{M}' v'^2 + (2 \mathcal{M}' + \mathcal{M}'') v' \right] + (\zeta'' - \zeta') v' + \zeta'.$$

Las anteriores expresan que:

*Las elásticas de las piezas de rectas de momento de inercia constante, sujetas a diagramas lineales de momentos flectores, son parábolas cúbicas.*

En el caso particular en que el diagrama de momentos flectores sea una recta paralela al eje, es decir, que se tenga  $\mathcal{M} = \text{const.}$  ( $\mathcal{M}' = \mathcal{M}''$ ), la parábola cúbica degenera en una de segundo grado.

40. — Según lo anterior, la ecuación general de la elástica vertical tiene la forma

$$\eta = A (A_0 + A_1 v + A_2 v^2 + A_3 v^3) ,$$

o sea,

$$[1] \quad \eta = A \sum_{j=0}^3 A_j v^j$$

y, análogamente para la horizontal.

Puede interesar la expresión de los coeficientes  $A_j$  en función de las ordenadas y rotaciones extremas  $\eta'$ ,  $\eta''$ ,  $\delta'$  y  $\delta''$

Se tiene para ello las condiciones

$$(\eta)_{v=0} = \eta' , \quad (\eta)_{v=1} = \eta'' ,$$

$$\left( \frac{d\eta}{dz'} \right)_{z'=0} = \frac{1}{l} \left( \frac{d\eta}{dv'} \right)_{v'=0} = \delta' ,$$

$$\left( \frac{d\eta}{dz'} \right)_{z'=l} = \frac{1}{l} \left( \frac{d\eta}{dv'} \right)_{v'=1} = \delta''$$

que, siendo

$$\frac{d\eta}{dv'} = A (A_1 + 2 A_2 v + 3 A_3 v^2)$$

dan, haciendo  $A = 1$ ,

$$\eta' = A_0 ,$$

$$\eta'' = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 ,$$

$$\delta' = \frac{1}{l} A_1 ,$$

$$\delta'' = \frac{1}{l} (A_1 + 2 A_2 + 3 A_3) .$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones lineales entre las incógnitas  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ , se obtiene

$$[2] \quad \begin{cases} A_0 = \eta' , \\ A_1 = l \delta' , \\ A_2 = 3 (\eta'' - \eta') - l (2 \delta' + \delta'') , \\ A_3 = - 2 (\eta'' - \eta') + l (\delta' + \delta'') . \end{cases}$$

**41. Obtención gráfica de las elásticas debidas a diagramas lineales de momentos flectores, para piezas de momento de inercia constante.** — Si se conoce el diagrama lineal de momentos flectores, se comien-

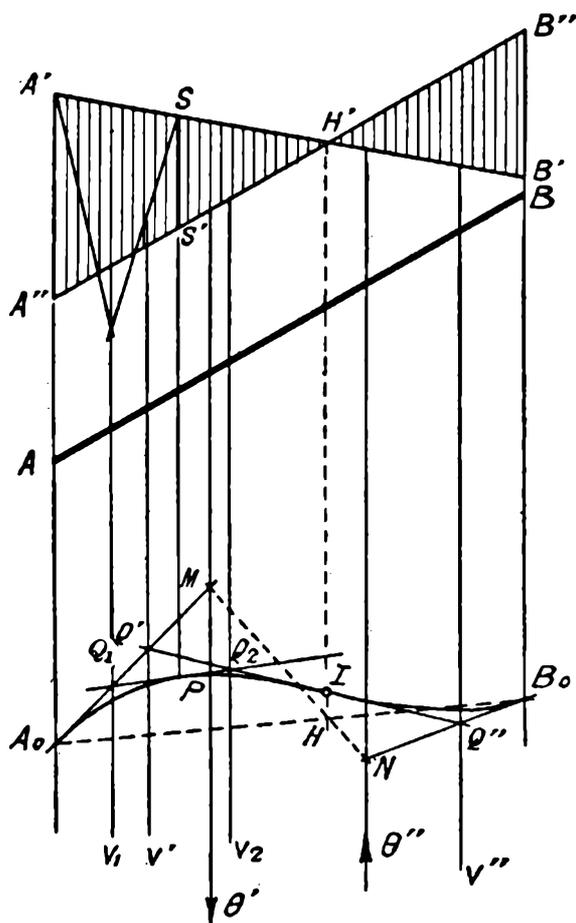


FIG. 37.

za por trazar el polígono de las tercias. Si se da este último, se obtiene, de acuerdo con (20), un diagrama afín al de momentos flectores. Consideremos el segundo caso.

Sea (fig. 37)  $A_0MNB_0$  el polígono de las tercias vertical. Sobre la vertical del punto  $H$  el momento flector es nulo; el diagrama rayado, constituido por dos rectas que se cortan en un punto  $H'$  de dicha vertical, es, en cierta escala, el diagrama de los momentos flectores que origina la elástica pedida.

Esta elástica, es, por otra parte, una curva funicular de las elaciones verticales correspondientes a las rotaciones de la pieza. Las elaciones

elementales son  $-\frac{\mathcal{M} dx}{E J}$  y, siendo  $J = \text{const.}$ , resultan proporcionales a

$\mathcal{M}$ . El diagrama de momentos flectores es, por tanto, también un diagrama de cargas de la curva funicular que constituye la elástica. Esta última se obtiene, mediante puntos y tangentes, por el procedimiento común del trazado de una curva funicular, dado el diagrama de cargas.

Conviene, cuando existe, comenzar por determinar el punto y la tangente de inflexión, correspondientes a la vertical de  $H$ . Para ello, dividido el diagrama de momentos por dicha vertical, se trazan las verticales  $v'$  y  $v''$  que pasan por los baricentros de los triángulos parciales de momentos y se hallan sus puntos de intersección  $Q'$  y  $Q''$ , respectivamente, con el primero y último lados del polígono de las tercias (tangentes extremas de la elástica).  $Q'Q''$  es la tangente de inflexión de la elástica y su punto de intersección  $I$  con la vertical  $HH'$  es el de tangencia correspondiente.

Para determinar otros puntos con sus respectivas tangentes, conviene utilizar como tangentes extremas, la correspondiente a un extremo de la pieza y la de inflexión. Así, para el punto de tangencia correspondiente a la vertical  $SS'$ , se divide el triángulo de momentos  $A'A''H'$ , mediante esta vertical; se trazan las verticales baricentrales  $v_1$  del trapecio  $A''A'SS'$  y  $v_2$  del triángulo  $SS'H'$ , como indica la figura, y se determinan los puntos  $Q_1$ , de intersección de  $v_1$  con la tangente extrema  $A_0M$  y  $Q_2$  de  $v_2$  con la tangente de inflexión  $Q'I$ . La recta  $Q_1Q_2$  es la tangente y su intersección  $P$  con la vertical  $SS'$ , es el punto de tangencia correspondiente a esta vertical.

Repitiendo el procedimiento para un número conveniente de verticales, se obtiene, por puntos y tangentes, la curva funicular que constituye la elástica.

### § 6. — Piezas con extremos rígidos.

**42. Generalidades.** — En el caso de pilares y montantes (fig. 38 *a* y *b*), la parte de los mismos comprendida entre el límite  $B$  de los empates de las vigas y el eje baricéntrico  $n$  tiene un ancho indefinido y es prácticamente indeformable. Es decir, estas piezas poseen una parte  $AB$  deformable y extremos rígidos de longitudes  $b$ . Si estas longitudes  $b$  ( $b'$  y  $b''$ ) son pequeñas relativamente a la longitud total  $h$  de la pieza, puede suponerse que el pilar o montante continúa deformable hasta el eje baricéntrico de la viga, tomando como momento de inercia máximo  $J'$ , el correspondiente a la altura  $h'$  indicada en la figura.

Si las longitudes  $b$  son grandes respecto de  $h$ , se requiere considerar piezas con uno o dos extremos rígidos. El cálculo, para estas últimas, de las masas-tercia y de las elásticas, de que pasamos a ocuparnos, se

efectúa con relativa comodidad, en función de las mismas magnitudes correspondientes a la parte deformable.

Se pueden presentar también piezas oblicuas u horizontales con extremos rígidos, principalmente horizontales en los entrepisos llamados

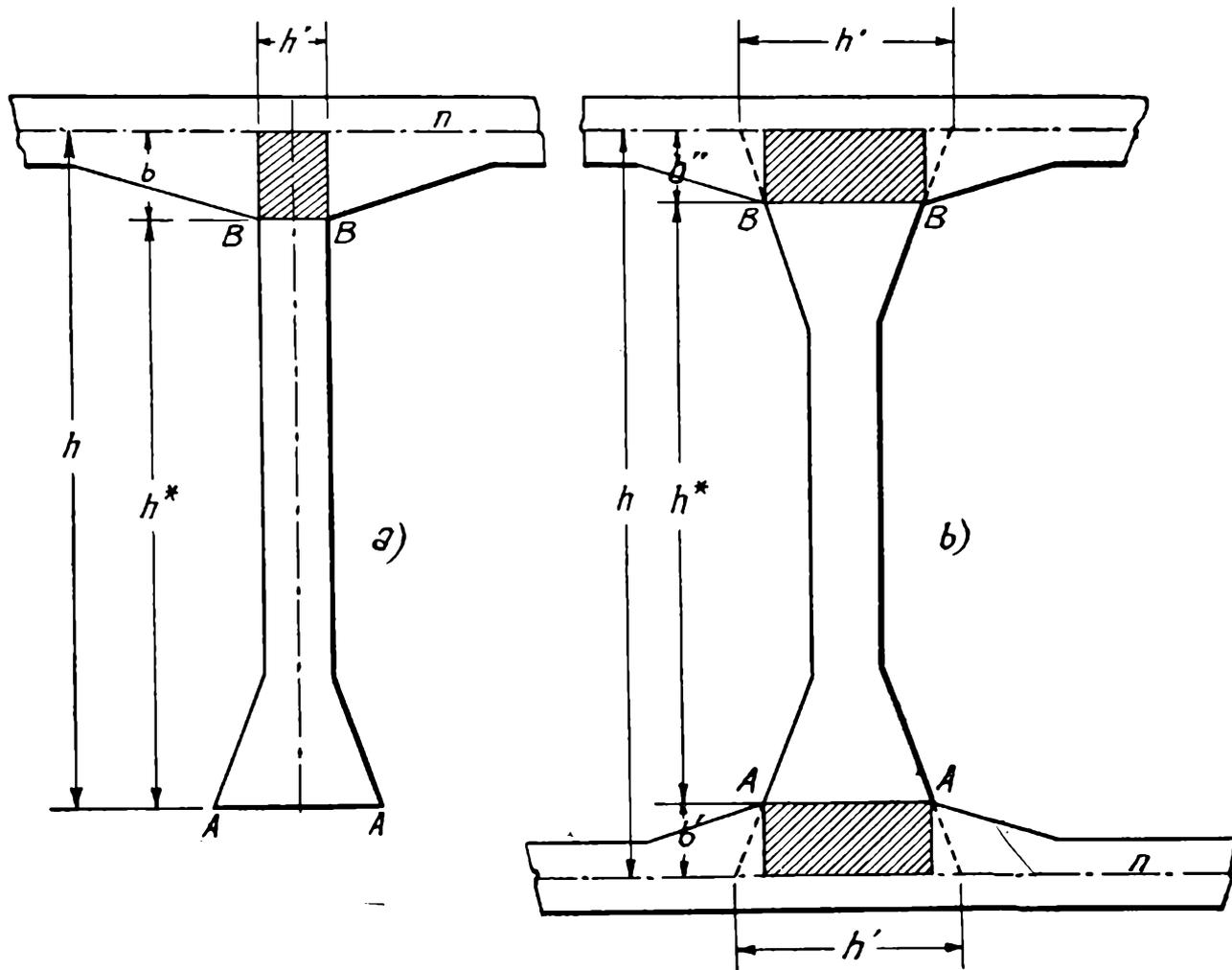


FIG. 38.

*pilzdecken*. Todo se reduce para éstas a reemplazar  $h$  por  $s$  en las expresiones que siguen, determinadas para piezas verticales.

**43. Masas-tercia.** — Sea la pieza  $AB$  con extremos rígidos desiguales  $b' = \chi'h$  y  $b'' = \chi''h$  (fig. 39). A los efectos de calcular la masa-tercia izquierda  $\rho'$ , distante  $\nu'_0 h$  del extremo  $A$ , consideremos un diagrama triangular de momentos flectores con momento  $\mathcal{M}' = -1$ , en el mismo. Designaremos  $\rho^*$ ,  $\rho^{**}$ ,  $\nu^*_0$ ,  $\nu^{**}_0$ , los elementos que definen las masas-tercia de la parte elástica  $A^*B^*$  de la pieza, de longitud  $h^* = (1 - \chi' - \chi'')h$ . Estos elementos se calculan con la tabla I. Así, las masas-tercia de la parte elástica son, según las [1] y [2] de (14),

$$\rho^* = \frac{h^*}{EJ} \bar{\rho}^* = \frac{h(1 - \chi' - \chi'')}{EJ} \bar{\rho}^*,$$

$$\rho^{**} = \frac{h^*}{EJ} \bar{\rho}^{**} = \frac{h(1 - \chi' - \chi'')}{EJ} \bar{\rho}^{**},$$

y sus distancias a los extremos  $y^*_0$  e  $y^{**}_0$ ,

$$y^*_0 = v^*_0 h^* = v^*_0 (1 - \chi' - \chi'') h,$$

$$y^{**}_0 = v^{**}_0 h^* = v^{**}_0 (1 - \chi' - \chi'') h;$$

siendo  $\bar{\rho}^*$ ,  $\bar{\rho}^{**}$ ,  $v^*_0$ ,  $v^{**}_0$  respectivamente las magnitudes designadas en (14)  $\bar{\rho}'$ ;  $\bar{\rho}''$ ,  $v'_0$ ,  $v''_0$ .

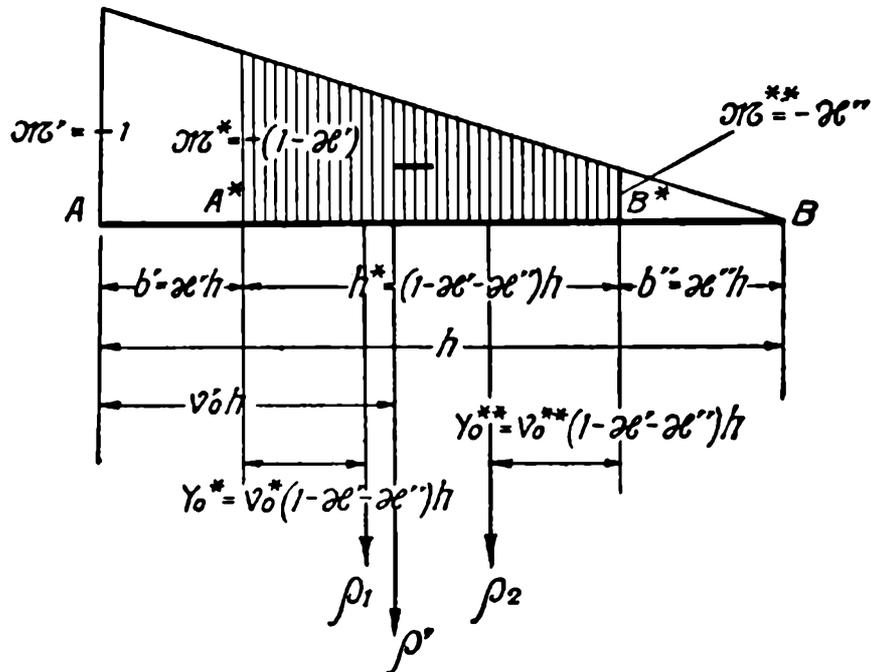


FIG. 39.

Los momentos flectores en  $A^*$  y  $B^*$  son, respectivamente  $\mathcal{M}^* = -(1 - \chi')$  y  $\mathcal{M}^{**} = -\chi''$  y las rotaciones tercias, correspondientes a la parte elástica,

$$\rho_1 = -\mathcal{M}^* \rho^* = k (1 - \chi' - \chi'') (1 - \chi') \bar{\rho}^*,$$

$$\rho_2 = -\mathcal{M}^{**} \rho^{**} = k (1 - \chi' - \chi'') \chi'' \bar{\rho}^{**},$$

con

$$k = \frac{h}{EJ}$$

La masa-tercia izquierda  $\rho'$  de la pieza con extremos rígidos, rotación resultante para el diagrama triangular de momentos flectores considerado, es, por consiguiente,

$$\rho' = \rho_1 + \rho_2$$

o sea, sustituyendo y simplificando,

$$[1] \quad \rho' = k \bar{\rho}',$$

con

$$[2] \quad \bar{\rho}' = (1 - \chi' - \chi'') [(1 - \chi') \bar{\rho}^* + \chi'' \bar{\rho}^{**}].$$

Para su distancia al extremo izquierdo  $A$ , se tiene, tomando momentos respecto del mismo,

$$\rho' v'_0 h = \rho_1 (\chi' h + y^*_0) + \rho_2 [(1 - \chi'') h - y^{**}_0],$$

expresión que, sustituyendo, simplificando y despejando a  $v'_0$ , da

$$[3] \quad v'_0 = \frac{(1 - \chi') [\chi' + v^*_0 (1 - \chi' - \chi'')] \bar{\rho}^* + \chi'' [1 - \chi'' - v^{**}_0 (1 - \chi' - \chi'')] \bar{\rho}^{**}}{(1 - \chi') \bar{\rho}^* + \chi'' \bar{\rho}^{**}}.$$

Las expresiones de la masa-tercia derecha  $\rho''$  y de su distancia numérica  $v''_0$  al extremo  $B$ , se obtienen de inmediato, por razones de simetría, cambiando en las anteriores  $\chi'$ ,  $\bar{\rho}^*$  y  $v^*_0$ , respectivamente por  $\chi''$ ,  $\bar{\rho}^{**}$  y  $v^{**}_0$ , y recíprocamente. Resulta así:

$$[4] \quad \rho'' = k \bar{\rho}'',$$

con

$$[5] \quad \bar{\rho}'' = (1 - \chi' - \chi'') [(1 - \chi'') \bar{\rho}^{**} + \chi' \bar{\rho}^*]$$

y

$$[6] \quad v''_0 = \frac{\chi' [1 - \chi' - v^*_0 (1 - \chi' - \chi'')] \bar{\rho}^* + (1 - \chi'') [\chi'' + v^{**}_0 (1 - \chi' - \chi'')] \bar{\rho}^{**}}{\chi' \bar{\rho}^* + (1 - \chi'') \bar{\rho}^{**}}$$

Si la parte elástica de la pieza es de momento de inercia constante  $J$ , se tiene

$$\bar{\rho}^* = \bar{\rho}^{**} = \frac{1}{2},$$

$$v^*_0 = v^{**}_0 = \frac{1}{3}$$

y, sustituyendo y simplificando, resulta

$$[7] \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho}' = \frac{1}{2} (1 - \chi' - \chi'') (1 - \chi' + \chi''), \\ \bar{\rho}'' = \frac{1}{2} (1 - \chi' - \chi'') (1 + \chi' - \chi''), \\ v'_0 = \frac{\frac{1}{3} (1 - \chi' - \chi'')^2 + \chi' (1 - \chi') + \chi'' (1 - \chi'')}{1 - \chi' + \chi''}, \\ v''_0 = \frac{\frac{1}{3} (1 - \chi' - \chi'')^2 + \chi' (1 - \chi') + \chi'' (1 - \chi'')}{1 + \chi' - \chi''}. \end{array} \right.$$

La tabla Va dan calculadas estas magnitudes para distintos valores de  $\chi'$  y  $\frac{\chi''}{\chi'}$ , cuando se tiene  $\chi'' \geq \chi'$ ; cuando  $\frac{\chi''}{\chi'} = 1$  los dos extremos rígidos tienen igual longitud y cuando  $\frac{\chi''}{\chi'} = 0$  la pieza tiene solamente extremo rígido izquierdo.

La tabla Vb da las mismas magnitudes para las piezas con extremo rígido izquierdo menor que el derecho ( $\chi' \geq \chi''$ ) entrando por  $\chi''$  y  $\frac{\chi'}{\chi''}$ . Los casos  $\frac{\chi'}{\chi''} = 1$  y  $\frac{\chi'}{\chi''} = 0$  corresponden a piezas con extremos rígidos de igual longitud y solo con extremo rígido derecho, respectivamente.

44. — Volviendo a las piezas en que la parte elástica sea con empates, consideremos el caso particular en que ambos extremos rígidos tengan igual longitud (fig. 40 a). Se tiene

$$\chi' = \chi'' = \chi$$

y las [2], [3], [5] y [6] del número anterior dan

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho}' = D_1 \bar{\rho}^* + D_2 \bar{\rho}^{**}, \\ \bar{\rho}'' = D_2 \bar{\rho}^* + D_1 \bar{\rho}^{**}, \\ v'_0 = \frac{D_3 (\bar{\rho}^* + \bar{\rho}^{**}) + D_1 \bar{\rho}^* v^*_0 - D_2 \bar{\rho}^{**} v^{**}_0}{D_4 \bar{\rho}^* + \chi \bar{\rho}^{**}}, \\ v''_0 = \frac{D_3 (\bar{\rho}^* + \bar{\rho}^{**}) + D_1 \bar{\rho}^{**} v^{**}_0 - D_2 \bar{\rho}^* v^*_0}{D_4 \bar{\rho}^{**} + \chi \bar{\rho}^*}, \end{array} \right.$$

con

$$[2] \quad \left\{ \begin{array}{l} D_1 = (1 - \chi) (1 - 2\chi), \quad D_2 = \chi (1 - 2\chi), \\ D_3 = \chi (1 - \chi), \quad D_4 = 1 - \chi. \end{array} \right.$$

Si, además, la pieza es simétrica, se tiene (fig. 40 b)

$$\chi' = \chi'' = \chi, \quad v^*_0 = v^{**}_0, \quad \bar{\rho}^* = \bar{\rho}^{**},$$

y las anteriores dan

$$[3] \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho} = S_1 \bar{\rho}^*, \\ v_0 = S_2 + S_3 v^*_0, \end{array} \right.$$

con

$$[4] \quad S_1 = 1 - 2\chi, \quad S_2 = 2\chi(1 - \chi), \quad S_3 = (1 - 2\chi)^2.$$

Las tablas VI *a* y *b* dan los coeficientes *D* y *S* para distintos valores de  $\chi$ , correspondientes a piezas con dos extremos rígidos de igual longitud.

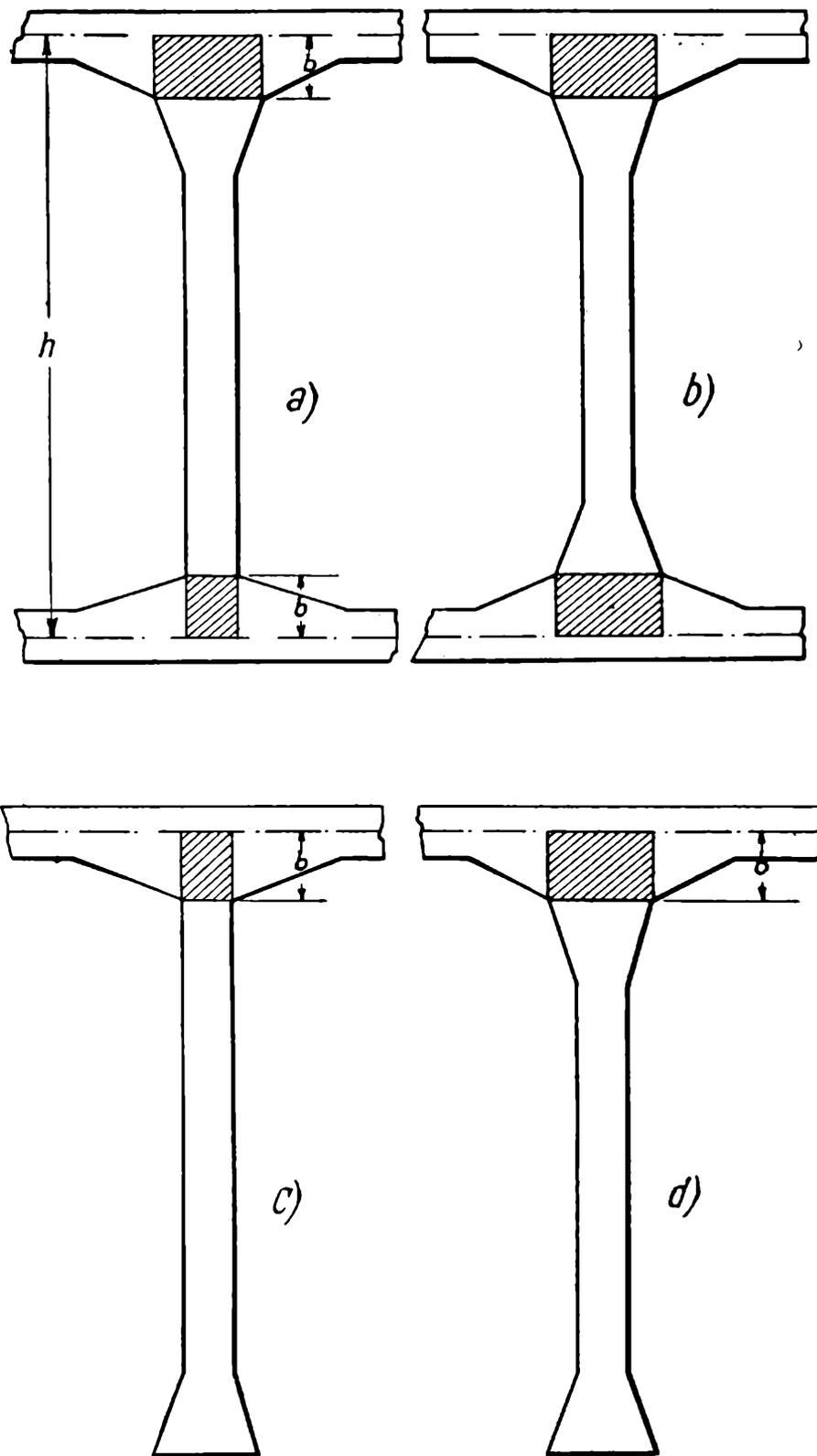


FIG. 40.

45.— Si la pieza posee un sólo extremo rígido y suponiendo que éste sea el derecho, se tiene (fig. 40 c)

$$\chi' = 0, \quad \chi'' = \chi,$$

y las [2], [3], [5] y [6] de (43), dan

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho}' = D_1 \bar{\rho}^* + D_2 \bar{\rho}^{**}, \\ \bar{\rho}'' = D_3 \bar{\rho}^{**}, \\ v'_0 = \frac{D_1 \bar{\rho}^* v_0^* + D_2 \bar{\rho}^{**} (1 - v_0^{**})}{\bar{\rho}^* + \chi \bar{\rho}^{**}}, \\ v''_0 = D_1 v_0^{**} + \chi, \end{array} \right.$$

con

$$[2] \quad D_1 = 1 - \chi, \quad D_2 = \chi (1 - \chi), \quad D_3 = (1 - \chi)^2.$$

Si la parte elástica de la pieza es simétrica (fig. 40 d), se tiene

$$\bar{\rho}^* = \bar{\rho}^{**}, \quad v_0^* = v_0^{**},$$

y las anteriores dan

$$[3] \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho}' = S_1 \bar{\rho}^*, \\ \bar{\rho}'' = S_2 \bar{\rho}^*, \\ v'_0 = S_3 v_0^* + S_4, \\ v''_0 = S_5 v_0^* + \chi, \end{array} \right.$$

con

$$[4] \quad S_1 = 1 - \chi^2, \quad S_2 = (1 - \chi)^2, \\ S_3 = \frac{(1 - \chi)^2}{1 + \chi}, \quad S_4 = \frac{\chi (1 - \chi)}{1 + \chi}, \quad S_5 = 1 - \chi.$$

Si el extremo rígido de la pieza disimétrica es el izquierdo, se tiene

$$\chi' = \chi, \quad \chi'' = 0$$

y las ecuaciones [2], [3], [5] y [6] de (43), dan

$$[5] \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho}' = D_1 \bar{\rho}^*, \\ \bar{\rho}'' = D_2 \bar{\rho}^* + D_3 \bar{\rho}^{**}, \\ v'_0 = \chi + D_3 v_0^*, \\ v''_0 = \frac{D_2 \bar{\rho}^* (1 - v_0^*) + D_3 \bar{\rho}^{**} v_0^{**}}{\chi \bar{\rho}^* + \bar{\rho}^{**}}, \end{array} \right.$$

con

$$D_1 = (1 - \chi)^2, \quad D_2 = \chi (1 - \chi), \quad D_3 = 1 - \chi.$$

Finalmente, si además la parte elástica de la pieza es simétrica, se tiene

$$\bar{\rho}^* = \bar{\rho}^{**}, \quad \nu^*_0 = \nu^{**}_0,$$

y las anteriores dan

$$[7] \quad \begin{cases} \bar{\rho}' = S_1 \bar{\rho}^*, \\ \bar{\rho}'' = S_2 \bar{\rho}^*, \\ \nu'_0 = S_3 \nu^*_0 + \chi, \\ \nu''_0 = S_4 + S_5 \nu^*_0, \end{cases}$$

con

$$S_1 = (1 - \chi)^2, \quad S_2 = 1 - \chi^2, \quad S_3 = 1 - \chi,$$

$$S_4 = \frac{\chi(1 - \chi)}{1 + \chi}, \quad S_5 = \frac{(1 - \chi)^2}{1 + \chi}.$$

A los efectos de facilitar los cálculos, las tablas VI *c*, *d*, *e* y *f* dan los valores de los coeficientes numéricos *D* y *S*, para piezas con parte elástico disimétrica y simétrica, respectivamente y con un sólo extremo rígido.

**46. Ejemplo numérico.** — Consideremos la pieza disimétrica con un sólo extremo rígido representada en la figura 41, que tiene, como la tratada en (17),

$$\begin{aligned} J &= 0,0025 \text{ m}^4, & J' &= 0,025 \text{ m}^4, & a &= 1,55 \text{ m}, \\ s &= 5,55 \text{ m}, & l &= 4,00 \text{ m}, & h &= 3,87 \text{ m}, \end{aligned}$$

y, además,

$$b = 0,50 \text{ m}.$$

Se pide las masas-tercias  $\rho'$  y  $\rho''$ , sus distancias  $y'_0$  y  $y''_0$  a los extremos y el momento-tercia *m*.

Se tiene

$$\chi = \frac{b}{h} = \frac{0,50 \text{ m}}{3,87 \text{ m}} = 0,129$$

y, como en (17),

$$n = 0,10, \quad \lambda = 0,28, \quad k = 1057 \cdot 10^{-6} t^{-1} \text{ m}^{-1}.$$

Las masas-tercia de la parte elástica han sido calculadas en (17), obteniéndose

$$\begin{aligned} \bar{\rho}^* &= 0,336, & \nu^*_0 &= 0,443, \\ \bar{\rho}^{**} &= 0,479, & \nu^{**}_0 &= 0,311. \end{aligned}$$

Corresponden las fórmulas [1] de (45), es decir, se tiene

$$[a] \quad \begin{cases} \bar{\rho}' = D_1 \bar{\rho}^* + D_2 \bar{\rho}^{**}, \\ \bar{\rho}'' = D_3 \bar{\rho}^{**}, \\ \nu'_0 = \frac{D_1 \bar{\rho}^* \nu^*_0 + D_2 \bar{\rho}^{**} (1 - \nu^{**}_0)}{\bar{\rho}^* + \chi \bar{\rho}^{**}}, \\ \nu''_0 = D_1 \nu^{**}_0 + \chi. \end{cases}$$

Como  $\chi$  no coincide con los números de entrada de la tabla VI d, se debe interpolar.  
Para  $\chi = 0,12$  y  $\chi = 0,14$  se tienen los coeficientes del cuadro siguiente:

Para $\chi = 0,12$ :	$D_1 = 0,88$	$D_2 = 0,106$	$D_3 = 0,774$
Para $\chi = 0,14$ :	$D_1 = 0,86$	$D_2 = 0,120$	$D_3 = 0,740$
	$\Delta D_1 = -0,02$	$\Delta D_2 = 0,014$	$\Delta D_3 = -0,034$

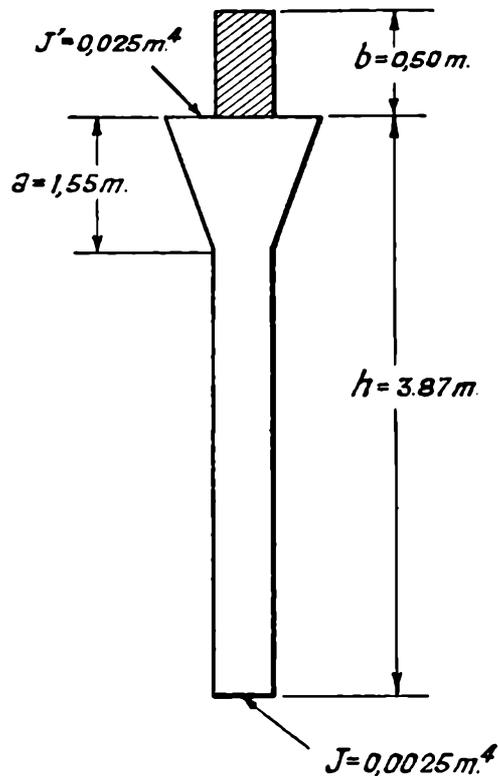


FIG. 41.

Resulta

$$D_1 = 0,88 - \frac{0,02}{0,02} 0,009 = 0,871 ,$$

$$D_2 = 0,106 + \frac{0,014}{0,02} 0,009 = 0,112 ,$$

$$D_3 = 0,774 - \frac{0,034}{0,02} 0,009 = 0,759 .$$

Sustituyendo en las [a], se tiene:

$$\bar{\rho}' = (0,871 \times 0,336) + (0,112 \times 0,479) = 0,347 ,$$

$$\bar{\rho}'' = (0,759 \times 0,479) = 0,364 ,$$

$$v'_0 = \frac{(0,871 \times 0,336 \times 0,443) + (0,112 \times 0,479 \times 0,689)}{0,336 + (0,129 \times 0,479)} = 0,420 ,$$

$$v''_0 = (0,871 \times 0,311) + 0,129 = 0,400 .$$

Las magnitudes pedidas son, finalmente,

$$\rho' = k\bar{\rho}' = 1057 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} \times 0,347 = 366 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1},$$

$$\rho'' = k\bar{\rho}'' = 1057 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} \times 0,364 = 385 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1},$$

$$y'_0 = v'_0 l = 0,420 \times 4 \text{ m} = 1,68 \text{ m},$$

$$y''_0 = v''_0 l = 0,400 \times 4 \text{ m} = 1,60 \text{ m},$$

$$m = \rho' y'_0 = 366 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} \times 1,68 \text{ m} = 616 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1}.$$

47. Elásticas fundamentales.— En el diagrama triangular de momentos flectores, con  $\mathcal{M}' = 1$  en A (fig. 42), que origina la elástica fun-

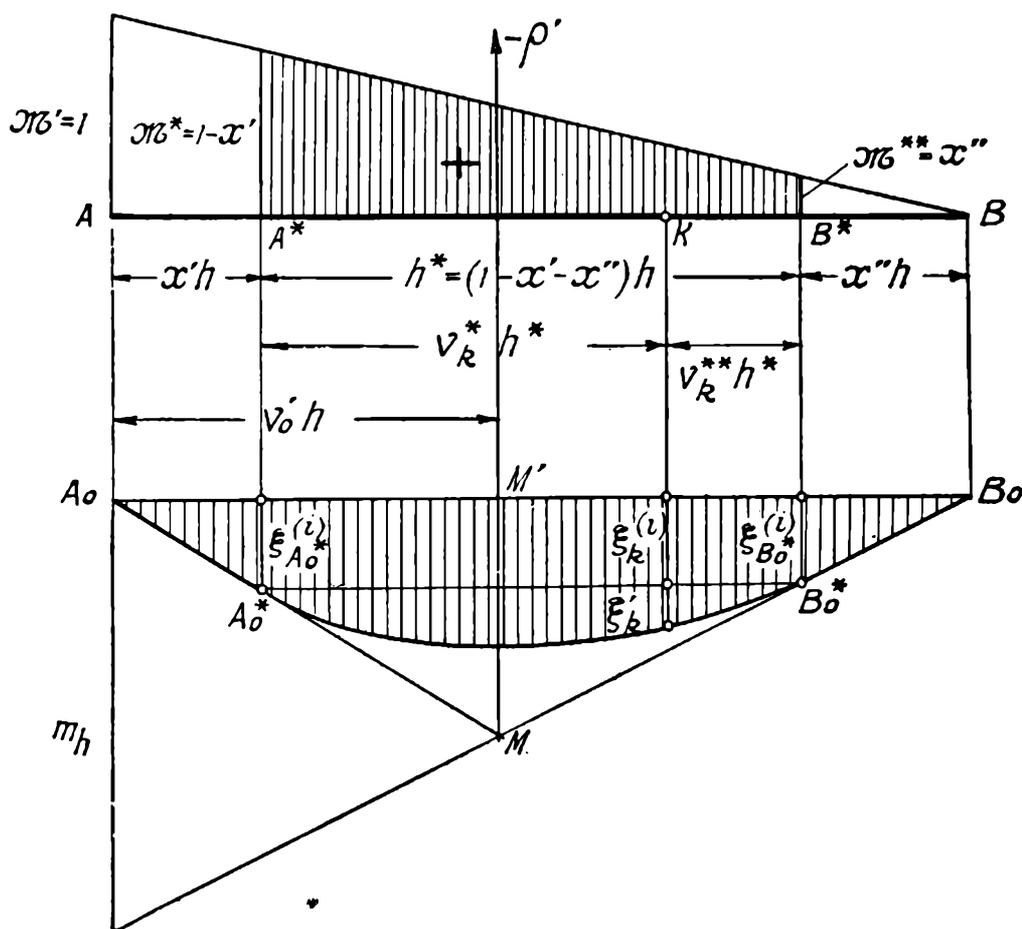


FIG. 42.

damental izquierda, de ordenadas que designaremos  $\xi^{(i)}$ , corresponden a los extremos  $A^*_0$  y  $B^*_0$ , de la parte elástica, momentos

$$\mathcal{M}^* = 1 - \chi', \quad \mathcal{M}^{**} = \chi''.$$

La elástica de la parte  $A^*B^*$  referida a la recta de los extremos  $A^*_0B^*_0$ , es, por consiguiente

$$\xi'_k = \mathcal{M}^* m_h \bar{\xi}^{(i)*}_k + \mathcal{M}^{**} m_h \bar{\xi}^{(d)*}_k = m_h [(1 - \chi') \bar{\xi}^{(i)*}_k + \chi'' \bar{\xi}^{(d)*}_k].$$

siendo  $\bar{\xi}^{(i)*}_k$  y  $\bar{\xi}^{(d)*}_k$ , los números correspondientes a dicha parte (designados  $\bar{\xi}^{(i)}$  y  $\bar{\xi}^{(d)}$  en (29)).

Además, de la figura se deduce, para las ordenadas  $\xi^{(i)}_{A_0}$  y  $\xi^{(i)}_{B_0}$  correspondientes a  $A_0$  y  $B_0$ , que

$$\xi^{(i)}_{A_0} = \frac{\overline{MM'}}{\nu'_0 h} \chi' h, \quad \xi^{(i)}_{B_0} = \frac{m_h}{h} \chi'' h,$$

o, siendo

$$\overline{MM'} = \frac{m_h}{h} (1 - \nu'_0) h,$$

simplificando y en base a la [2] de (33),

$$\xi^{(i)}_{A_0} = m_h \bar{\epsilon}^{(i)}_{A_0} \chi', \quad \xi^{(i)}_{B_0} = m_h \chi''.$$

Las ordenadas  $\xi''_k$  de la recta  $A^*B^*$  referida al eje  $A_0B_0$ , son

$$\xi''_k = \xi^{(i)}_{A_0} + \frac{\xi^{(i)}_{B_0} - \xi^{(i)}_{A_0}}{h^*} \nu^*_k h^*,$$

siendo  $\nu^*_k h^*$  la distancia entre el punto  $k$  y el extremo izquierdo  $A^*$  de la parte elástica.

Las ordenadas totales  $\xi^{(i)}_k$  de la elástica fundamental, son

$$\xi^{(i)}_k = \xi' + \xi''$$

Sustituyendo las expresiones anteriores, simplificando y hallando además, por simetría, la expresión de las ordenadas  $\xi^{(d)}_k$  de la elástica fundamental derecha, se tiene

$$[1] \quad \xi^{(i)}_k = m_h \bar{\xi}^{(i)}_k, \quad \xi^{(d)}_k = m_h \bar{\xi}^{(d)}_k,$$

con

$$[2] \quad \begin{cases} \bar{\xi}^{(i)}_k = (1 - \chi') \bar{\xi}^{(i)*}_k + \chi'' \bar{\xi}^{(d)*}_k + (1 - \nu^*_k) \chi' \bar{\epsilon}^{(i)}_A + \nu^*_k \chi'' \bar{\epsilon}^{(i)}_B, \\ \bar{\xi}^{(d)}_k = \chi' \bar{\xi}^{(i)*}_k + (1 - \chi'') \bar{\xi}^{(d)*}_k + (1 - \nu^*_k) \chi' \bar{\epsilon}^{(d)}_A + \nu^*_k \chi'' \bar{\epsilon}^{(d)}_B. \end{cases}$$

Las partes de la elástica  $A_0A^*$  y  $B_0B^*$ , correspondientes a los extremos rígidos, son líneas rectas.

Para las rotaciones  $\epsilon^{(i)}$  de la elástica se tiene, derivando las [1] y [2] respecto de la distancia  $y^*_k = \nu^*_k h^*$ ,

$$[3] \left\{ \begin{array}{l} \epsilon^{(i)}_k = \frac{m_h}{h} \bar{\epsilon}^{(i)}_k, \quad \epsilon^{(d)}_k = \frac{m_h}{h} \bar{\epsilon}^{(d)}_k \\ \bar{\epsilon}^{(i)}_k = (1 - x' - \chi'') h \left[ (1 - \chi') \bar{\epsilon}^{(i)*}_k + \chi'' \bar{\epsilon}^{(d)*}_k + \chi'' \bar{\epsilon}^{(i)*}_B - \chi' \bar{\epsilon}^{(i)*}_A \right], \\ \bar{\epsilon}^{(d)}_k = (1 - \chi' - \chi'') h \left[ (1 - \chi'') \bar{\epsilon}^{(d)*}_k + \chi' \bar{\epsilon}^{(i)*}_k + \chi'' \bar{\epsilon}^{(d)*}_B - \chi' \bar{\epsilon}^{(d)*}_A \right], \end{array} \right.$$

siendo  $\bar{\epsilon}^{(i)*}_k$  y  $\bar{\epsilon}^{(d)*}_k$  los coeficientes  $\bar{\epsilon}^{(i)}$  y  $\bar{\epsilon}^{(d)}$  de las [1] de (34), que dan las rotaciones de las elásticas fundamentales de la parte deformable  $A^*B^*$ .

Para las rotaciones extremas  $\epsilon^{(i)}_A$  y  $\epsilon^{(i)}_B$  ( $\epsilon^{(d)}_A$  y  $\epsilon^{(d)}_B$ ) en  $A$  y  $B$ , que son iguales a las correspondientes a los puntos  $A^*$  y  $B^*$ , se tiene, como en (33),

$$\begin{aligned} \epsilon^{(i)}_A &= \frac{m_h}{h} \left( \frac{1 - \nu'_0}{\nu'_0} \right), & \epsilon^{(i)}_B &= -\frac{m_h}{h}, \\ \epsilon^{(d)}_A &= \frac{m_h}{h}, & \epsilon^{(d)}_B &= -\frac{m_h}{h} \left( \frac{1 - \nu''_0}{\nu''_0} \right). \end{aligned}$$

48. — Si la pieza tiene dos extremos rígidos de igual longitud, se tiene

$$\chi' = \chi'' = \chi$$

y las anteriores se escriben

$$[1] \left\{ \begin{array}{l} \bar{\xi}^{(i)}_k = (1 - \chi) \bar{\xi}^{(i)*}_k + \chi \bar{\xi}^{(d)*}_k + (1 - \nu^*_k) \chi \bar{\epsilon}^{(i)}_A + \nu^*_k \chi \bar{\epsilon}^{(i)}_B, \\ \bar{\xi}^{(d)}_k = \chi \bar{\xi}^{(i)*}_k + (1 - \chi) \bar{\xi}^{(d)*}_k + (1 - \nu^*_k) \chi \bar{\epsilon}^{(d)}_A + \nu^*_k \chi \bar{\epsilon}^{(d)}_B, \\ \bar{\epsilon}^{(i)}_k = (1 - 2\chi) h \left[ (1 - \chi) \bar{\epsilon}^{(i)*}_k + \chi (\bar{\epsilon}^{(d)*}_k + \bar{\epsilon}^{(i)}_B - \bar{\epsilon}^{(i)}_A) \right], \\ \bar{\epsilon}^{(d)}_k = (1 - 2\chi) h \left[ (1 - \chi) \bar{\epsilon}^{(d)*}_k + \chi (\bar{\epsilon}^{(i)*}_k + \bar{\epsilon}^{(d)}_B - \bar{\epsilon}^{(d)}_A) \right]. \end{array} \right.$$

Finalmente, si la pieza tiene un solo extremo rígido, se tiene

$$\chi' = 0, \quad \chi'' = \chi$$

y las [2], [3] y [4] del número anterior se escriben

$$[2] \left\{ \begin{array}{l} \bar{\xi}^{(i)}_k = \bar{\xi}^{(i)*}_k + \chi \bar{\xi}^{(d)*}_k + \nu^*_k \chi \epsilon^{(i)}_B, \\ \bar{\xi}^{(d)}_k = (1 - \chi) \bar{\xi}^{(d)*}_k + \nu^*_k \chi \bar{\epsilon}^{(d)}, \\ \bar{\epsilon}^{(i)}_k = (1 - \chi) h \left[ \bar{\epsilon}^{(i)}_k + \chi (\bar{\epsilon}^{(d)*}_k + \bar{\epsilon}^{(i)}_B) \right], \\ \bar{\epsilon}^{(d)}_k = (1 - \chi) h \left[ (1 - \chi) \bar{\epsilon}^{(d)*}_k + \chi \bar{\epsilon}^{(d)}_B \right]. \end{array} \right.$$



## **CAPITULO II**

**LINEAS DE INFLUENCIA. VIGAS SIMPLEMENTE APOYADAS.  
MOMENTOS DE RITTER**





## CAPITULO II

### LINEAS DE INFLUENCIA. VIGAS SIMPLEMENTE APOYADAS. MOMENTOS DE RITTER

---

#### § 1. — Formas de las líneas de influencia

49. **Obtención de las líneas de influencia.**— Designaremos en general con la letra  $v$  ( $w$ ) las ordenadas de las líneas de influencia para cargas verticales (horizontales).

Antes de ocuparnos en particular de la forma de las líneas de influencia correspondientes a piezas rectilíneas, recordemos brevemente como se obtiene la línea de influencia de una incógnita hiperestática cualquiera. Sea, al efecto, el sistema representado en la figura 43 *a*, y propongámonos hallar la línea de influencia de una incógnita hiperestática cualquiera, la reacción  $X$  en el apoyo  $C$ , por ejemplo. La ordenada de esta línea de influencia, correspondiente a la sección  $k$  es, por definición, el valor  $v$  de la incógnita  $X$  originada por la fuerza  $P = 1$  aplicada en  $k$ . Si se pone en evidencia la incógnita, se tiene el sistema de la figura 43 *b*, en equilibrio bajo la acción de las fuerzas  $P$  y  $v$ .

Demos una deformación virtual al sistema así obtenido, aplicando una fuerza de intensidad arbitraria  $U$  según la dirección de la incógnita hiperestática  $X$  (fig. 43 *c*) y tracemos la elástica vertical ( $\eta$ ) (horizontal ( $\zeta$ )) originada por la misma. Si  $a$  es el desplazamiento que, durante dicha deformación, corresponde a la incógnita  $v$  (proyección del desplazamiento del punto  $C$  sobre la dirección de esta última), se tiene, aplicando la ley de Betti (\*),

$$P \eta + v a = 0$$

$$[1] \quad v = -\frac{1}{a} \eta.$$

(\*) БУТТЫ, Е., *Loc. cit.*, tomo II, pág. 124.

Es decir:

Las ordenadas de la línea de influencia de la incógnita hiperestática  $X$ , para cargas verticales (horizontales), son iguales a las de la elástica vertical (horizontal) producida por una fuerza arbitraria  $U$ , aplicada según

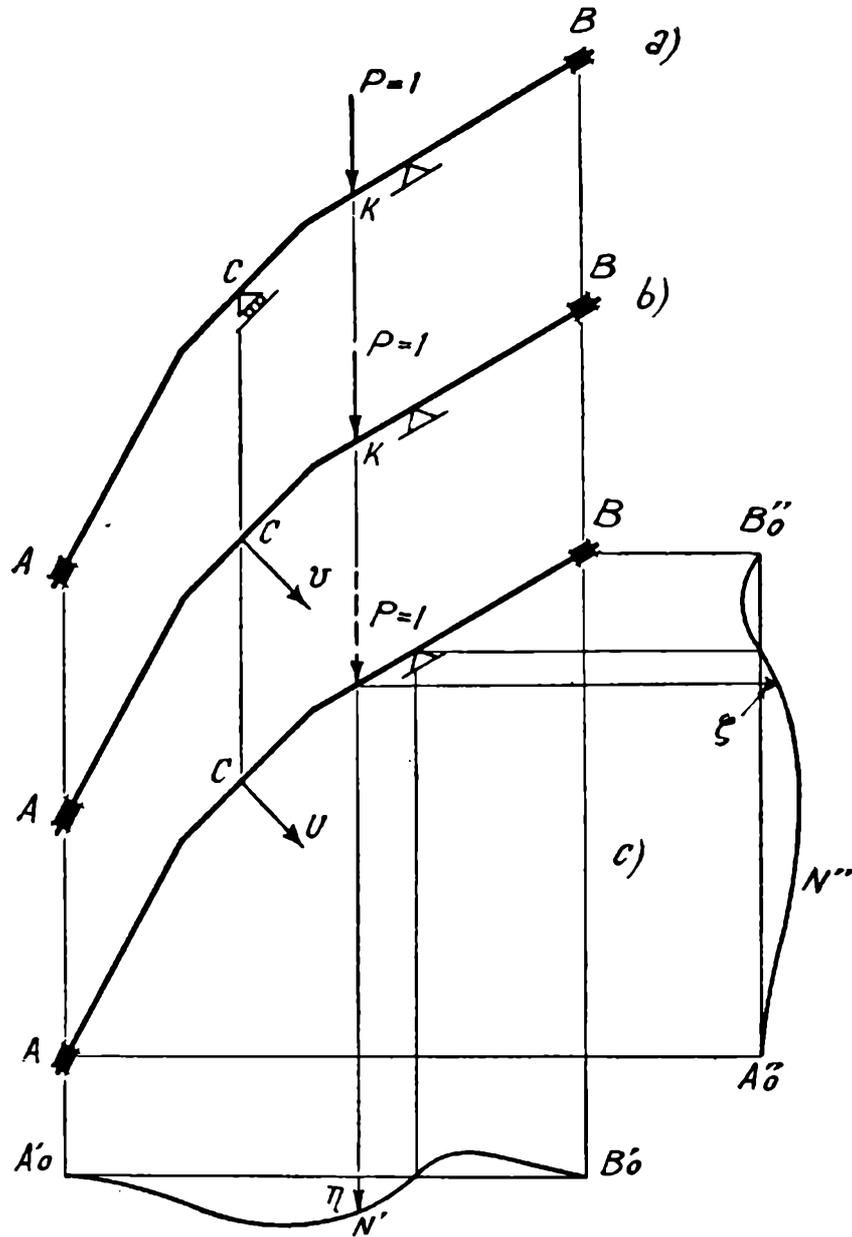


FIG. 43.

la dirección de la incógnita (en el sistema en que ésta se pone en evidencia), multiplicadas por  $-\frac{1}{a}$ , siendo  $a$  el desplazamiento que dicha fuerza  $U$  produce según su propia dirección.

Si, por otra parte, se elige la fuerza arbitraria  $U$  de manera que se obtenga  $a = -1$ , resulta directamente

$$[2] \quad v = \eta,$$

o sea:

La línea de influencia de una incógnita hiperestática  $X$ , para cargas verticales (horizontales), es la elástica vertical (horizontal) de la defor-

mación que, en el sistema en que se ha suprimido el vínculo correspondiente a la misma, origina una fuerza  $U$  de su dirección y de intensidad tal que produzca en esta misma dirección un desplazamiento  $a = -1$ .

50. — En lugar de una fuerza  $U$  se aplicará, según la naturaleza de la incógnita, dos fuerzas opuestas, un par, dos pares opuestos, etc. El desplazamiento  $a$  será, en estos casos, repectivamente, un desplazamiento re-

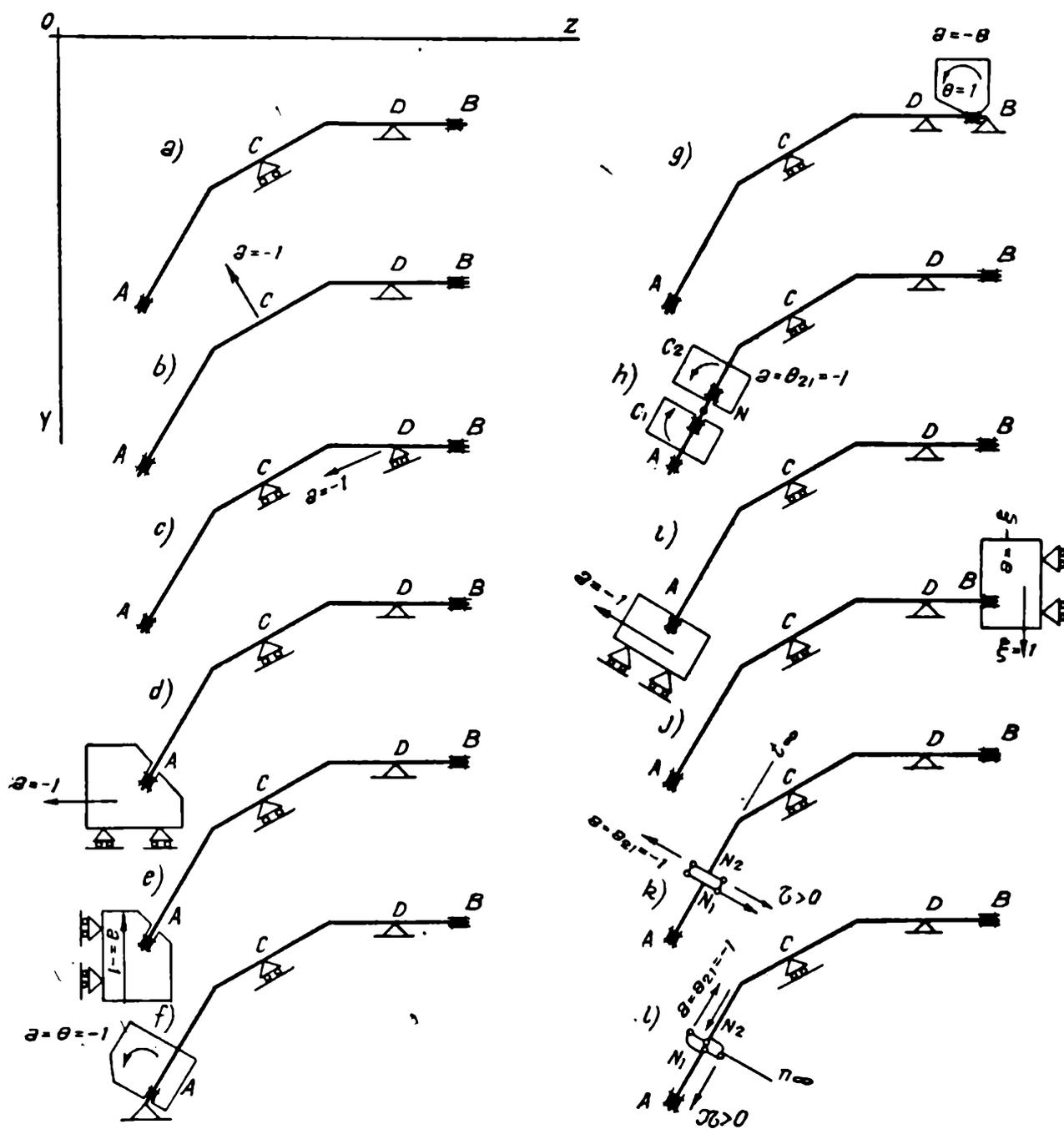


FIG. 44.

lativo, una rotación, una rotación relativa, etc. Las figuras 44 indican como se ponen en evidencia las diversas incógnitas y cual es el desplazamiento  $a$  correspondiente. Expliquémoslas brevemente:

*Reacción en el apoyo móvil C* (fig. 44 b). La incógnita se pone en evidencia suprimiendo el apoyo. El desplazamiento correspondiente  $a$ , es la proyección del desplazamiento de  $C$  sobre la dirección normal al apoyo. Si el apoyo móvil es paralelo a la pieza, el signo del desplazamiento  $a$  es negativo, según las convenciones adoptadas, cuando es positivo su momento respecto del extremo derecho. Si el apoyo móvil no es paralelo a la pieza, el desplazamiento  $a$  será negativo, cuando lo sea su proyección sobre el eje de las  $z$ .

*Componente de la reacción en la articulación D* (fig. 44 c). La componente se pone en evidencia convirtiendo la articulación en un apoyo móvil de su dirección. El desplazamiento  $a$  es el que así resulta para el punto  $D$ . Es negativo cuando lo es su proyección sobre el eje de las  $z$ , salvo el caso en que la componente de la reacción buscada sea normal a la pieza, caso en que  $a$  será negativo cuando sea positivo su momento respecto del extremo derecho de la misma.

*Componente horizontal (vertical) de la reacción en el empotramiento A* (fig. 44 d y e). La incógnita se pone en evidencia, suprimiendo el empotramiento y ligando al primer elemento  $A$  una chapa rígida vinculada a tierra por dos apoyos móviles horizontales (verticales). El desplazamiento  $a$  es la traslación que experimenta esta chapa, siendo negativo cuando esta traslación va hacia la izquierda (arriba).

*Momento flector en el empotramiento izquierdo A* (fig. 44 f). La incógnita se pone en evidencia convirtiendo el empotramiento en una articulación fija y ligando al primer elemento una chapa rígida. El desplazamiento  $a$  es la rotación  $\theta$  de esta chapa.

*Momento flector en el empotramiento derecho B* (fig. 44 g). La incógnita también se pone en evidencia convirtiendo el empotramiento en una articulación fija y ligando al último elemento una chapa rígida. Como el par  $M$  aplicado en esta chapa es opuesto al momento flector  $\mathcal{M}''$  en  $B$  (momento de las fuerzas que actúan a la izquierda), el desplazamiento  $a$  correspondiente a  $\mathcal{M}''$  es también opuesto a la rotación  $\theta$  de dicha chapa. Es decir, para obtener  $a = -1$ , se requiere que sea  $\theta = 1$ .

*Momento flector en la sección cualquiera N* (fig. 44 h). La incógnita se pone en evidencia introduciendo una articulación intermedia en  $N$  y ligando dos chapas rígidas a los elementos adyacentes. El despla-

miento  $\alpha$  es la rotación relativa  $\theta_{21}$  de la chapa  $C_2$  de la derecha respecto de la  $C_1$  de la izquierda.

*Esfuerzo tangencial en el empotramiento izquierdo A* (fig. 44 i). La incógnita se pone en evidencia suprimiendo el empotramiento y ligando al primer elemento  $A$  una chapa rígida vinculada a tierra con dos apoyos móviles de dirección normal a la pieza. El desplazamiento  $a$  es la traslación que experimenta esta chapa, siendo negativo cuando es positivo su momento respecto del extremo derecho de la pieza.

*Esfuerzo tangencial en el empotramiento derecho B* (fig. 44 j). La incógnita se pone en evidencia suprimiendo el empotramiento y ligando al último elemento  $B$  una chapa rígida vinculada a tierra con dos apoyos móviles normales a la pieza. Como la fuerza  $T$  aplicada en esta chapa es opuesta al esfuerzo tangencial  $\mathcal{T}$  en  $B$  (componente de las fuerzas exteriores de la izquierda), el desplazamiento  $a$  correspondiente a  $\mathcal{T}$  es también opuesto a la traslación  $\xi$  de esta chapa. Es decir, para obtener  $a = -1$  se requiere que  $\xi = 1$ .

*Esfuerzo tangencial en la sección cualquiera N* (fig. 44 k). La incógnita se pone en evidencia cortando en la sección  $N$  e introduciendo una articulación en el punto impropio  $t_{\infty}$  de la dirección de la pieza. El desplazamiento  $a$  es el desplazamiento relativo  $a_{21}$  del punto  $N_2$  de la derecha respecto del  $N_1$  de la izquierda. Su signo es negativo cuando resulta positivo su momento respecto del extremo derecho de la pieza.

*Esfuerzo normal en la sección cualquiera N* (fig. 44 l). La incógnita se pone en evidencia cortando la sección e introduciendo una articulación en el punto impropio  $n_{\infty}$  de las normales a la pieza. El desplazamiento  $a$  es, en valor absoluto, el relativo del punto  $N_2$  de la derecha respecto del  $N_1$  de la izquierda. Siendo  $\mathcal{N} > 0$  cuando hace trabajar la pieza a la tracción, se tiene  $a = -1$  cuando este desplazamiento es opuesto al vector  $\mathcal{N} > 0$ . En el caso de la figura, cuando  $a_{21}$  va hacia la derecha.

**51. Ecuación general de las líneas de influencia.** — El esfuerzo  $U$  que se aplica para obtener la línea de influencia, origina en la pieza rectilínea un diagrama lineal de momentos flectores, aun en el caso de características, pues, los dos pares o fuerzas opuestas que en este caso se aplican en la sección, se equilibran entre sí y no alteran la ley de variación de los momentos flectores en la pieza. La elástica que cons-

tituye la línea de influencia será, por consiguiente, de la forma encontrada en (35), es decir, se tendrá

$$v = -\frac{1}{a} (m'_l \bar{\xi}^{(i)} + m''_l \bar{\xi}^{(d)} + (\eta'' - \eta') v' + \eta') ,$$

$$w = -\frac{1}{a} (m'_h \bar{\xi}^{(i)} + m''_h \bar{\xi}^{(d)} + (\zeta'' - \zeta') v' + \zeta') ,$$

o, haciendo  $a = -1$ ,

$$[1] \quad \begin{cases} v = m'_l \bar{\xi}^{(i)} + m''_l \bar{\xi}^{(d)} + (v'' - v') v' + v' , \\ w = m'_h \bar{\xi}^{(i)} + m''_h \bar{\xi}^{(d)} + (w'' - w') v' + w' , \end{cases}$$

siendo  $v'$  y  $v''$  ( $w'$  y  $w''$ ) las ordenadas extremas izquierda y derecha de la línea de influencia vertical (horizontal).

Si la pieza es de momento de inercia constante, la ecuación de la línea de influencia vertical tiene la forma

$$[2] \quad v = A \sum_{j=0}^3 A_j v^j ,$$

e igualmente la horizontal.

Las líneas de influencia pueden darse también por sus ordenadas  $v'$ ,  $v''$  y rotaciones  $\delta'$ ,  $\delta''$  extremas. En este caso, los coeficientes  $m'_l$  y  $m''_l$  de la [1] se calculan de acuerdo con lo establecido en (21) y los  $A_j$  de la [2], haciendo  $A = 1$ , con las expresiones [2] de (40).

**52. Forma de la línea de influencia del momento flector en una sección intermedia de la pieza considerada.** — La línea de influencia del momento flector en  $N$  tiene la forma representada en la figura 45 a. Está constituida por dos ramas  $A_0N'$  y  $N'B_0$ , que se cortan angularmente en el punto  $N'$  de la vertical de  $N$ . La rotación de la tangente  $t_2$  respecto de la  $t_1$ , es igual a  $-1$ .

Las dos ramas  $A_0N'$  y  $N'B_0$  constituyen la misma curva quebrada del ángulo  $-1$  en  $N'$ , curva que es una elástica de la pieza originada por un diagrama lineal de momentos flectores, puesto que, equilibrándose los pares  $\mathcal{M}$  y  $-\mathcal{M}$ , el diagrama de momentos flectores está dado por la misma recta para toda la pieza  $AB$ .

Puede representarse también, por consiguiente, la línea de influencia, sin quebrar la curva, como indica la figura 45 b, refiriendo la parte correspondiente a  $N'B_0$  al eje  $N''B''$  que forma el ángulo 1 con  $A'B'$

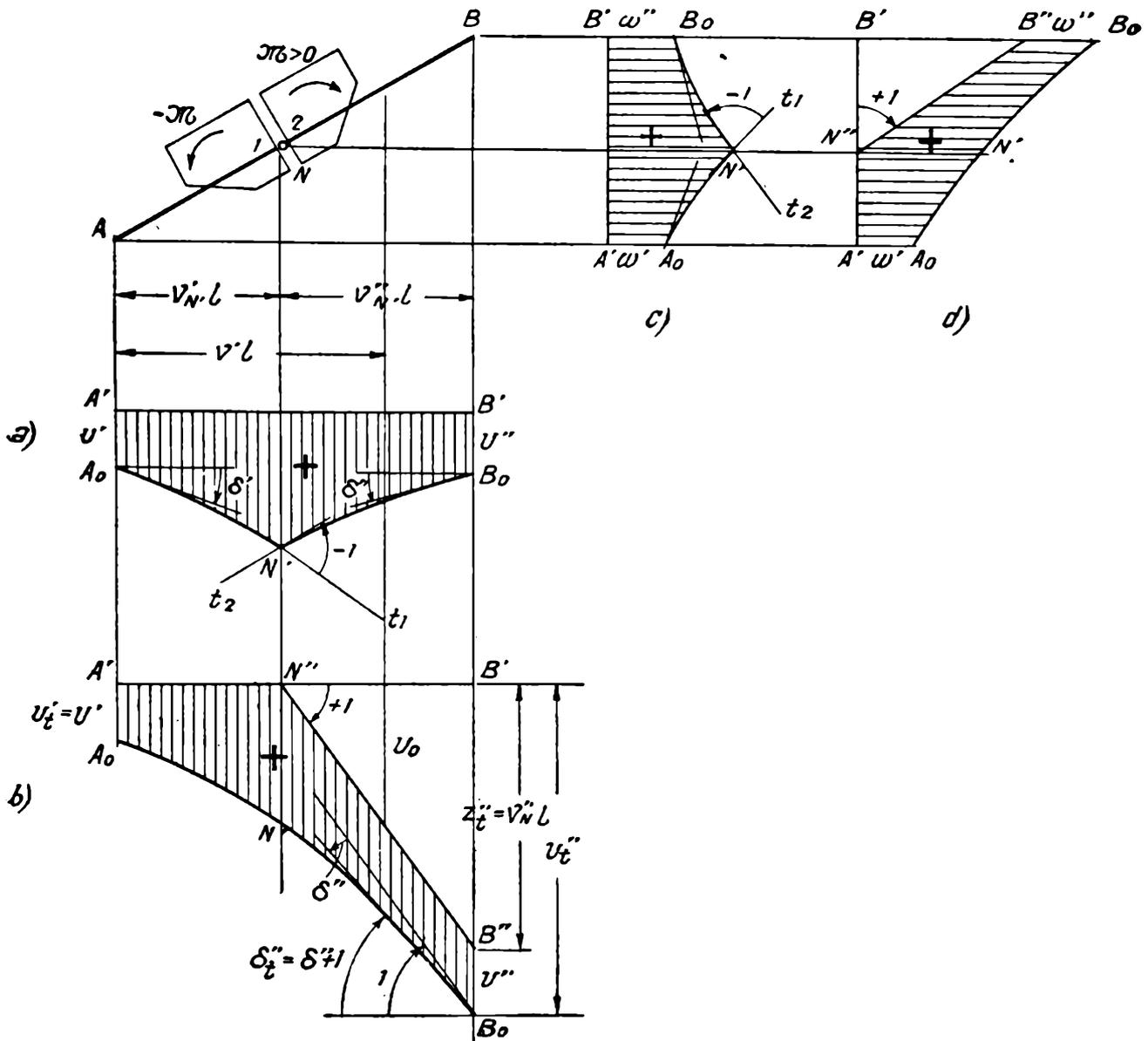


FIG. 45.

La curva  $A_0N'B_0$  es la elástica de deformación para la pieza  $AB$ , sin la articulación intermedia  $N$ , correspondiente al diagrama lineal de momentos flectores producido por los pares  $U$  que originan un desplazamiento  $\alpha = \theta_{21} = -1$ . Tiene la forma [1] ó [2] del número anterior.

La recta  $N''B''$ , referida a  $A'B'$ , es, por otra parte, como resulta de inmediato, la línea de influencia del momento flector en  $N$  para la pieza isostática, empotrada en  $A$  y libre en  $B$ . Su ecuación es

[1] 
$$v_0 = v' - v'_N.$$

En resumen, pues, la ecuación de la línea de influencia del momento flector en la sección  $N$ , es, para cargas verticales,

$$[2] \quad \begin{cases} v = m'_i \bar{\xi}^{(i)} + m''_i \bar{\xi}^{(d)} + (v'' - v') v' + v' & (\text{para } v' \geq v'_N), \\ v = m'_i \bar{\xi}^{(i)} + m''_i \bar{\xi}^{(d)} + (v'' - v') v' + v' - (v' - v'_N) & (\text{para } v' \leq v'_N), \end{cases}$$

6

$$[3] \quad \begin{cases} v = A \sum_{j=0}^3 A_j v'^j & (\text{para } v' \geq v'_N), \\ v = A \sum_{j=0}^3 A_j v'^j - (v' - v'_N) & (\text{para } v' \leq v'_N), \end{cases}$$

si se trata de una pieza de momento de inercia constante, y análogamente para cargas horizontales.

**53.** — Si la línea de influencia vertical (horizontal) del momento flector se da por sus ordenadas  $v', v''$  ( $w', w''$ ) y rotaciones  $\delta', \delta''$  extremas (fig. 45 a), se requiere, para hallar la ecuación de la curva  $A_0N'B_0$  (fig. 45 b), calcular las ordenadas y rotaciones extremas correspondientes. Designándolas  $v'_t, v''_t$  ( $w'_t, w''_t$ ) y  $\delta'_t, \delta''_t$ , se tiene

$$[1] \quad \begin{cases} v'_t = v', & w'_t = w', & \delta'_t = \delta', \\ v''_t = v'' + v''_N l, & w''_t = w'' + v''_N h, & \delta''_t = \delta'' + 1, \end{cases}$$

como es inmediato.

**54. Forma de la línea de influencia del esfuerzo tangencial, o normal, en una sección intermedia de la pieza considerada.** — Algo semejante se presenta para las líneas de influencia de los esfuerzos tangenciales y normales. La figura 46 a (b) da, para cargas verticales, la línea de influencia del esfuerzo tangencial (normal) en  $N$ . Está formada por dos ramas  $A_01'$  y  $2'B_0$ , con tangentes en  $1'$  y  $2'$  paralelas entre sí. Si por  $2'$  se traza una normal (paralela) a la pieza y se determina su intersección  $2''$  con la horizontal de  $1'$ , se tiene para el desplazamiento relativo del punto 2 respecto del 1,  $a_{21} = \overline{2''2'} = -1$  es

inmediato que  $\overline{1'2'} = -\frac{l}{s} \left( -\frac{h}{s} \text{ para la línea de influencia del esfuerzo normal} \right)$ . En las líneas de influencia para cargas horizontales se

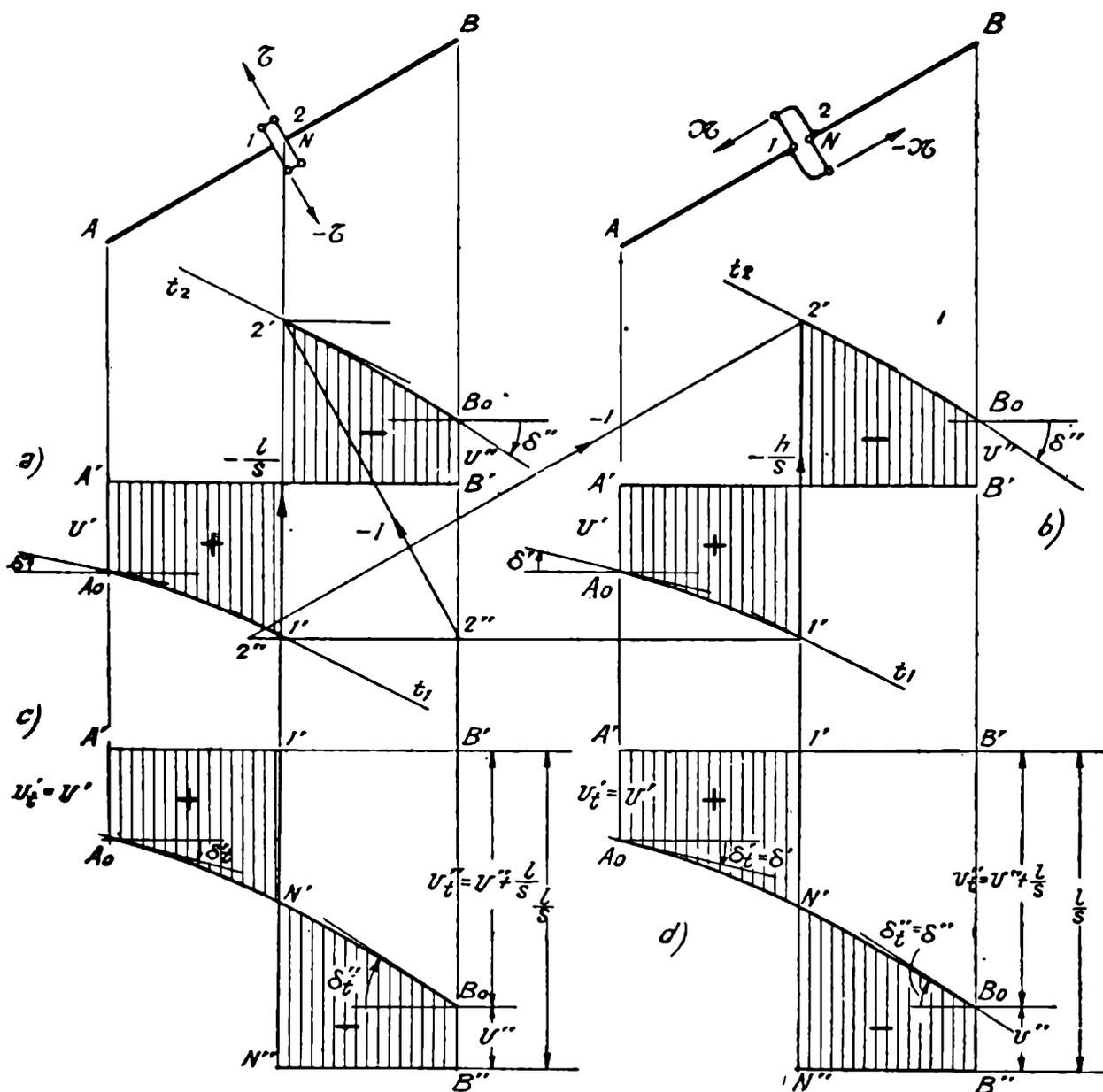


FIG. 46.

obtendría análogamente  $\overline{1'2'} = -\frac{h}{s}$  para el esfuerzo tangencial  $\left( -\frac{l}{s} \text{ para el normal} \right)$ .

También en este caso se puede representar la línea de influencia mediante una sola curva  $A_0N'B_0$  (fig. 46 c (d)) (cuya ecuación es la de la rama  $A_0N'$  extendida a toda la pieza), refiriendo la parte  $A_0N'$  al eje  $A'B'$  y la  $N'B_0$  al eje  $N''B''$ , paralelo al anterior y que pasa por el pun-

to  $B''$ , tal que  $\overline{B'B''} = \frac{l}{s} \left( \overline{B'B''} = \frac{h}{s} \right)$ , o  $\overline{B'B''} = \frac{h}{s} \left( \overline{B'B''} = \frac{l}{s} \right)$  para la línea de influencia horizontal.

La curva  $A_0N'B_0$  es la elástica correspondiente al diagrama lineal de momentos flectores originado por el esfuerzo  $U$  que produce un desplazamiento correspondiente a la incógnita  $a = -1$  en la pieza  $AB$ , sin la traslación permitida por la articulación impropia intermedia en  $N$ . Su ecuación es de la forma [1] ó [2] de (51).

La recta  $N''B''$  referida a la  $A'B'$  es, por otra parte, como resulta de inmediato, la línea de influencia del esfuerzo tangencial (normal) en  $N$  para la pieza isostática empotrada en  $A$  y libre en  $B$ .

En resumen, las líneas de influencia de los esfuerzos tangenciales tienen la forma

$$[1] \left\{ \begin{array}{l} v = m'_{\iota} \bar{\xi}^{(i)} + m''_{\iota} \bar{\xi}^{(d)} + (v'' - v') v' + v', \quad (\text{para } v' \cong v'_N) \\ w = m'_{h} \bar{\xi}^{(i)} + m''_{h} \bar{\xi}^{(d)} + (w'' - w') v' + w', \\ v = m'_{\iota} \bar{\xi}^{(i)} + m''_{\iota} \bar{\xi}^{(d)} + (v'' - v') v' + v' - \frac{l}{s}, \quad (\text{para } v' \cong v'_N) \\ w = m'_{h} \bar{\xi}^{(i)} + m''_{h} \bar{\xi}^{(d)} + (w'' - w') v' + w' - \frac{h}{s}, \end{array} \right.$$

6

$$[2] \left\{ \begin{array}{l} v(w) = A \sum_{j=0}^3 A_j v'^j, \quad (\text{para } v' \cong v'_N) \\ v = A \sum_{j=0}^3 A_j v'^j - \frac{l}{s}, \\ w = A \sum_{j=0}^3 A_j v'^j - \frac{h}{s}, \end{array} \right. \quad (\text{para } v' \cong v'_N)$$

en los casos de piezas de momento de inercia constante.

La forma de la línea de influencia de los esfuerzos normales es, a su vez,

$$[3] \quad \begin{cases} v = m'_i \bar{\xi}^{(i)} + m''_i \bar{\xi}^{(d)} + (v'' - v') v' + v', & (\text{para } v \geq v'_N) \\ w = m'_h \bar{\xi}^{(i)} + m''_h \bar{\xi}^{(d)} + (w'' - w') v' + w', & \\ v = m'_i \bar{\xi}^{(i)} + m''_i \bar{\xi}^{(d)} + (v'' - v') v' + v' - \frac{h}{s}, & (\text{para } v' \geq v'_N) \\ w = m'_h \bar{\xi}^{(i)} + m''_h \bar{\xi}^{(d)} + (w'' - w') v' + w' - \frac{l}{s}, & \end{cases}$$

ó

$$[4] \quad \begin{cases} v(w) = A \sum_{j=0}^3 A_j v'_j, & (\text{para } v' \leq v'_N) \\ v = A \sum_{j=0}^3 A_j v'_j - \frac{h}{s}, & \\ w = A \sum_{j=0}^3 A_j v'^j - \frac{l}{s}, & (\text{para } v' \geq v'_N) \end{cases}$$

en el caso de piezas de momento de inercia constante.

55. — Si la línea de influencia del esfuerzo tangencial se da por sus ordenadas  $v', v''$  y rotaciones extremas  $\delta', \delta''$ , se requiere calcular, para obtener la ecuación de la curva  $A_0 N' B_0$  (fig. 46 b), las ordenadas  $v'_i, v''_i, w'_i, w''_i$  y rotaciones  $\delta'_i, \delta''_i$  que le corresponden. Se tiene

$$[1] \quad \begin{cases} v'_i = v', & v''_i = v'' + \frac{l}{s}, & \delta'_i = \delta', \\ w'_i = w', & w''_i = w'' + \frac{h}{s}, & \delta''_i = \delta'' \end{cases}$$

y, análogamente,

$$[2] \quad \begin{cases} v'_i = v', & v''_i = v'' + \frac{h}{s}, & \delta'_i = \delta', \\ w'_i = w', & w''_i = w'' + \frac{l}{s}, & \delta''_i = \delta'', \end{cases}$$

para las líneas de influencia de los esfuerzos normales.

§ 2. — Integración de las líneas de influencia.

56. Cargas verticales y horizontales equivalentes. — Si sobre la pieza actúan cargas oblicuas cualesquiera  $F_i$  (fig. 47), se puede calcu-

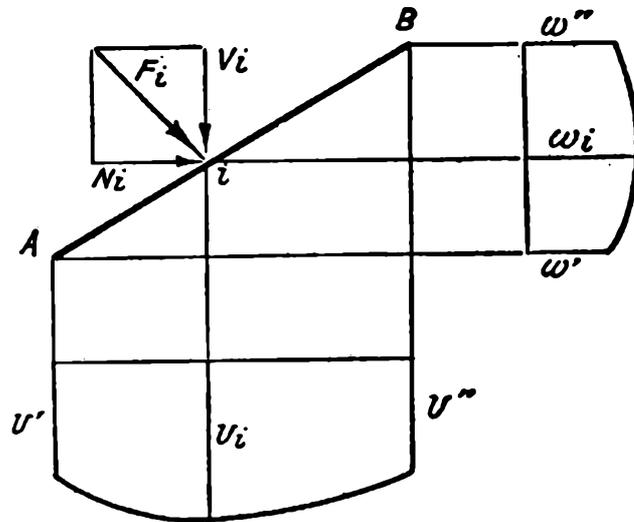


FIG. 47.

lar su influencia descomponiéndolas según las verticales  $V_i$  y horizontales  $H_i$  y utilizando luego las líneas de influencia para ambas direcciones.

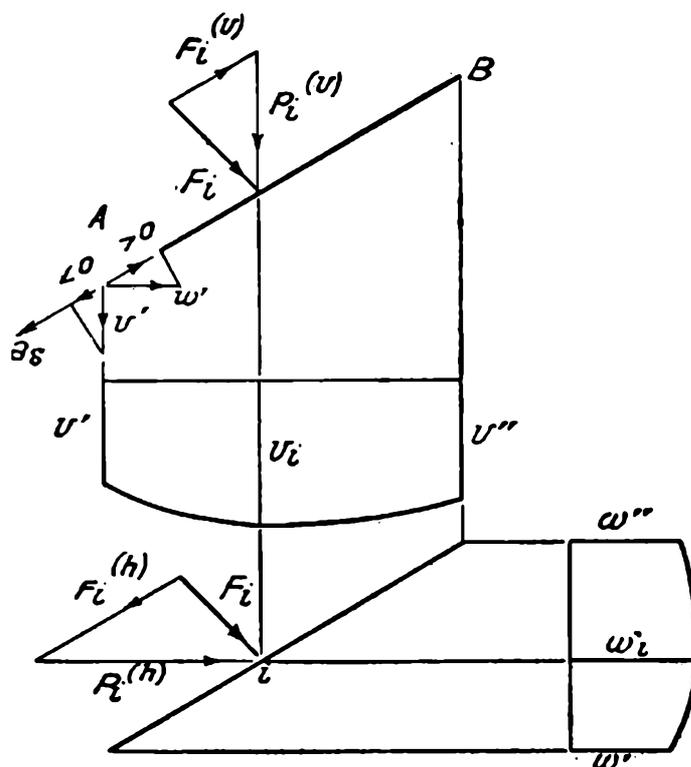


FIG. 48.

Si  $X$  es la incógnita que corresponde a dichas líneas de influencia, se tiene

$$X = \sum V_i v_i + \sum H_i w_i.$$

Es más cómodo descomponer la fuerza  $F_i$  según la vertical  $P_i^{(v)}$ , (horizontal  $P_i^{(h)}$ ) y la paralela  $F_i^{(v)}$  ( $F_i^{(h)}$ ) a la pieza (fig. 48). En este caso, se requiere trazar solamente la línea de influencia vertical (horizontal), siempre que se conozca el desplazamiento  $a_s$  de la línea de influencia (o elástica) paralelo a la pieza  $AB$  (único desde que se desprecia la influencia de los esfuerzos normales).

Se tiene, en efecto,

$$[1] \quad \begin{cases} X = \sum P_i^{(v)} v_i + X^{(v)} \\ X^{(v)} = Q^{(v)} a_s, \quad Q^{(v)} = \sum F_i^{(v)}, \end{cases}$$

o

$$[2] \quad \begin{cases} X = \sum P_i^{(h)} w_i + X^{(h)}, \\ X^{(h)} = Q^{(h)} a_s, \quad Q^{(h)} = \sum F_i^{(h)}. \end{cases}$$

Se tiene, además,

$$[3] \quad a_s = w' \frac{l}{s} - v' \frac{h}{s},$$

como resulta de inmediato observando la figura.

Si se trata de la línea de influencia del esfuerzo normal en  $N$  (fig. 49),

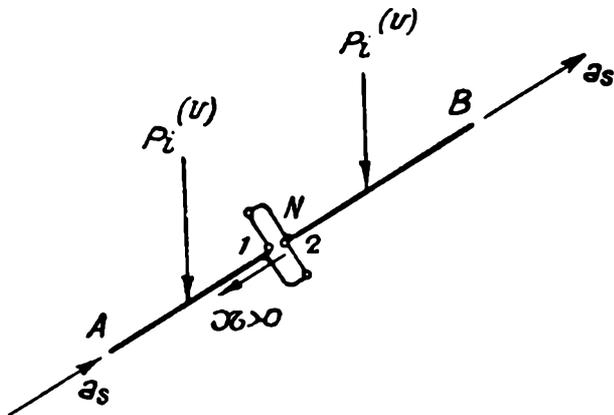


FIG. 49.

la parte  $AN$ , situada a la izquierda de la sección  $N$ , experimenta el desplazamiento  $a_s$  y la  $NB$ , situada a la derecha, el  $a_s + 1$  ( $a = 1$  cuando tiene un sentido opuesto a  $\mathcal{N} > 0$ , es decir cuando va hacia arriba, en cuyo caso  $a_{21} = 1$ ).

La incógnita  $X$  se expresará, por consiguiente,

$$[4] \quad X = \sum P_i^{(v)} v_i + Q^{(v)} a_s + Q^{(v)*},$$

ó

$$[5] \quad X = \sum P_i^{(h)} w_i + Q^{(h)} a_s + Q^{(h)*},$$

siendo  $Q^{(v)*}$  ( $Q^{(h)*}$ ) la suma de las componentes paralelas a la pieza situadas a la derecha de la sección  $N$ .

Llamaremos *cargas verticales (horizontales) equivalentes* a las  $P^{(v)}$ , ( $P^{(h)}$ ), así obtenidas.

**57. Principales estados de carga que se presentan en las aplicaciones.** — Pasamos a ocuparnos de las aplicaciones de las líneas de in-

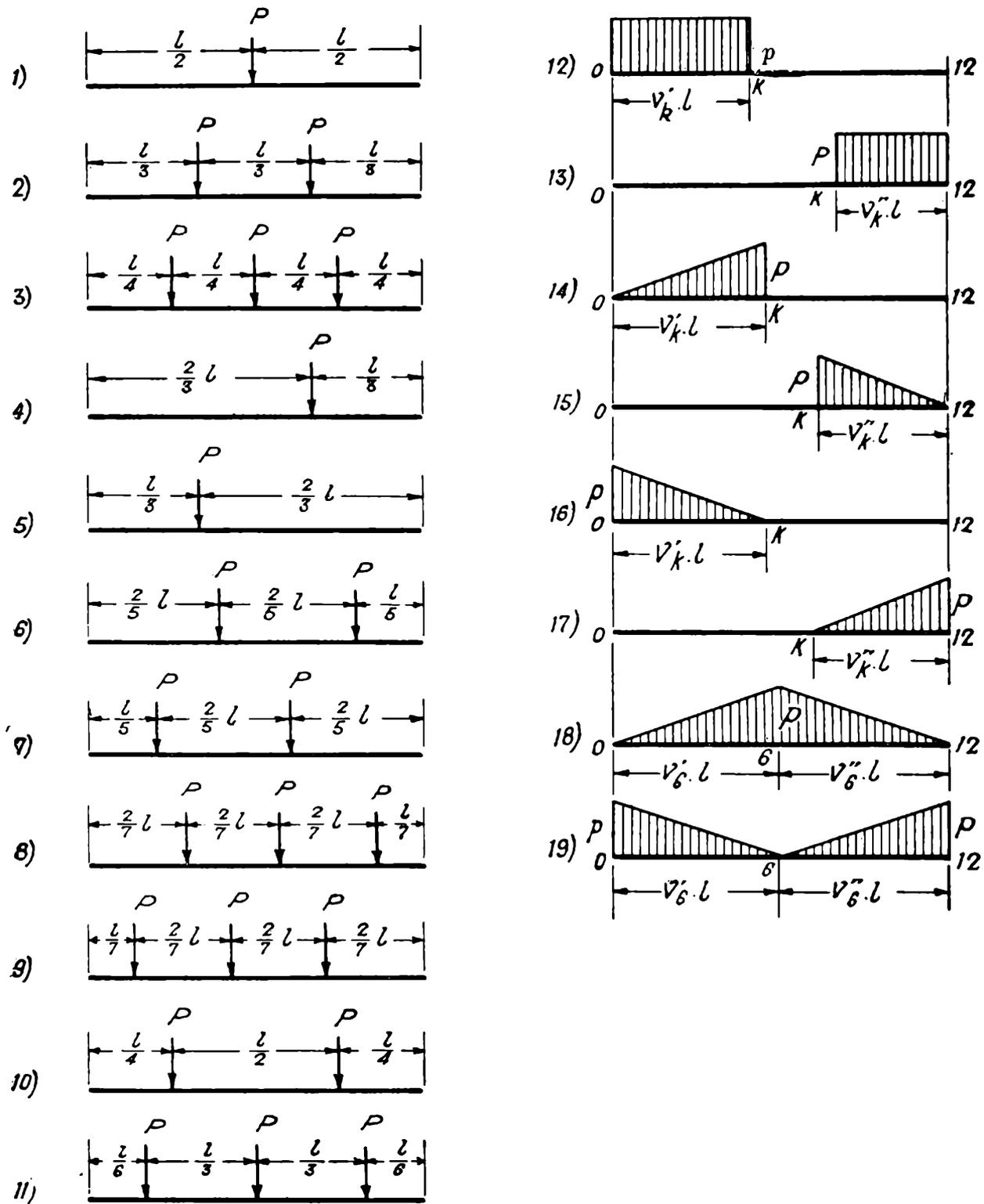


FIG. 50.

fluencia en la obtención de los valores  $X$  de las incógnitas correspondientes a los estados de carga representados en la figura 50, que fre-

cuentemente se presentan en las aplicaciones. Consideraremos solo cargas verticales. Si las cargas son oblicuas deberán ser reemplazadas por las cargas verticales equivalentes  $P^{(v)}$  y al valor  $X$  de la incógnita habrá que agregar el  $X^{(v)}$  correspondiente a las componentes paralelas a la pieza, calculado de acuerdo con lo establecido en el número anterior.

Los estados de carga 1 a 11 inclusive, están constituídos por cargas concentradas de igual intensidad  $P$ . La carga total  $Q$  se expresa

$$Q = n_0 P$$

siendo  $n_0$  el número de cargas concentradas.

Los estados de carga 12 y 13 están constituídos por cargas continuas uniformes, extendidas desde un extremo de la pieza hasta un punto resultante de dividir la luz en doce partes iguales. El caso particular  $v'_k = 1$  corresponde a la carga uniforme extendida en toda la longitud de la pieza. La carga total se expresa

$$Q = p v'_k l \quad \text{ó} \quad Q = p v''_k l .$$

Los estados de carga 14 a 17 inclusive consisten en cargas continuas triangulares extendidas de un extremo de la pieza hasta la sección  $k$  resultante de dividir la luz en doce partes iguales. Comprenden también el caso particular ( $v'_k = 1$  ó  $v''_k = 1$ ) de la carga triangular extendida en toda la longitud de la pieza. La carga total se expresa

$$Q = \frac{1}{2} p v'_k l \quad \text{ó} \quad Q = \frac{1}{2} p v''_k l .$$

Los estados 18 y 19 representan dos combinaciones de los anteriores. Las cargas totales para ambos estados son:

$$Q = \frac{pl}{2} .$$

La carga total correspondiente al estado 20 es

$$Q = pl (1 - v^*) .$$

En resumen, pues, la carga total tiene la siguiente expresión general

$$Q = P \overline{X}^{(c)} \quad \text{ó} \quad Q = pl \overline{X}^{(c)} ,$$

con números  $\overline{X}^{(c)}$  que se agrupan en la tabla IX.

Otros estados lineales de cargas pueden obtenerse por combinación de los anteriores. Así el representado en la figura 51 *a*, es diferencia de los dos dados en las figuras 51 *b* y *c*. El de la figura 52 es suma de los dos

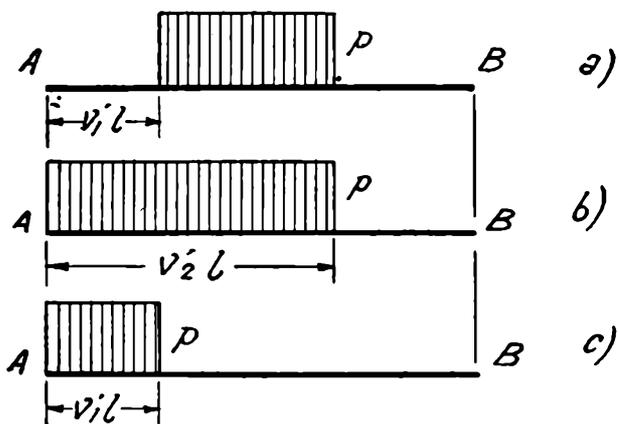


FIG. 51.

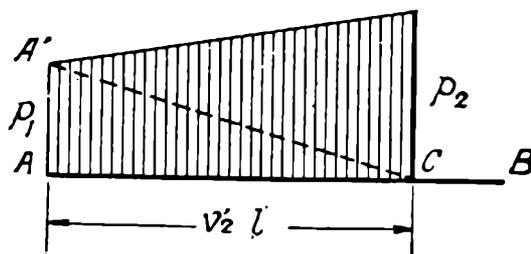


FIG. 52.

triangulares obtenidos mediante la diagonal  $A'C$ . El de la figura 53 *a*, es diferencia de los dos representados en las figuras 53 *b* y *c*, los que, a su

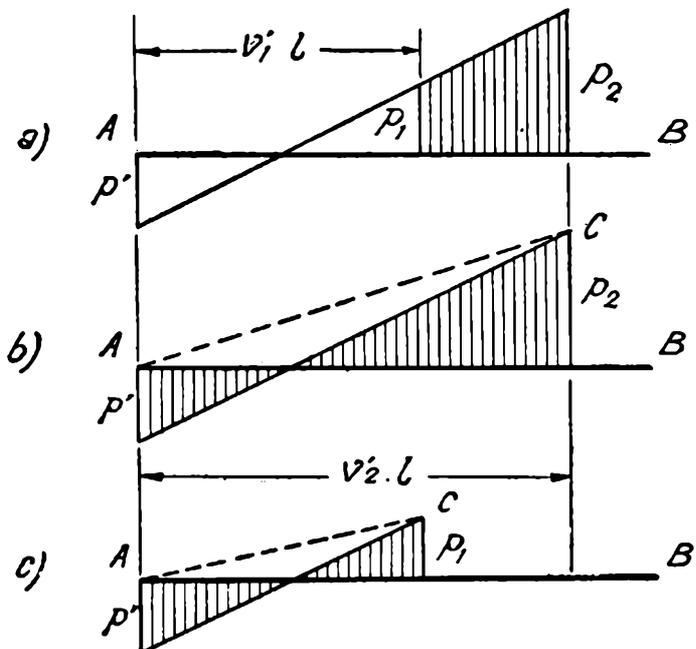


FIG. 53.

vez, son sumas algebraicas de los dos triangulares que se obtienen mediante la diagonal  $AC$ .

**58. Estado de carga constituido por un par aplicado en una chapa ligada a un elemento de la pieza.** — Se trata del estado de carga representado en la figura 54. Se presenta principalmente en los pilares con ménsulas  $N$  (fig. 55), en las que inciden fuerzas verticales  $P$  (ménsulas de sostén de puentes rodantes, por ejemplo). Este estado de carga es equivalente al par  $M = Pp$  aplicado en la chapa  $N$  y a la

fuerza axial  $P$  Se trata de calcular la influencia de pares  $M$  aplicados en chapas como la indicada en la figura.

Si  $A_0N'B_0$  (fig. 54) es la línea de influencia de la incógnita  $X$  (o la elástica que la constituye), el desplazamiento que corresponde a una carga vertical aplicada en  $N$ , es la ordenada  $v$ . El desplazamiento correspondiente a un par  $M$  está dado por la tangente  $t$  en  $N$ , o sea, es la rotación  $\epsilon$  de esta tangente, referida al eje  $A'B'$  Es decir, se tiene

$$[1] \quad X = M \epsilon .$$

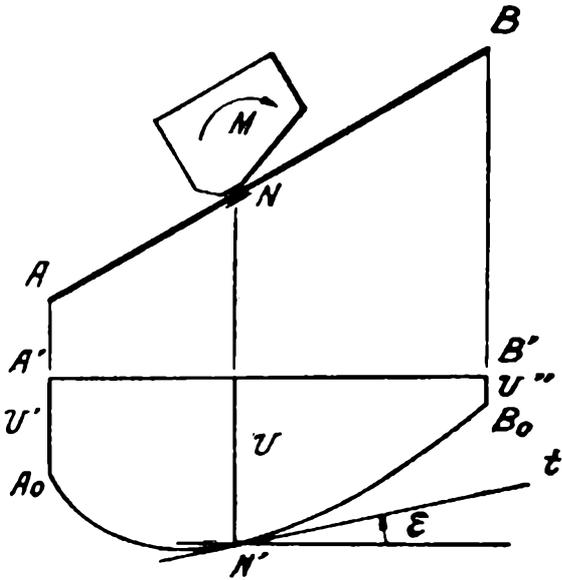


FIG. 54.

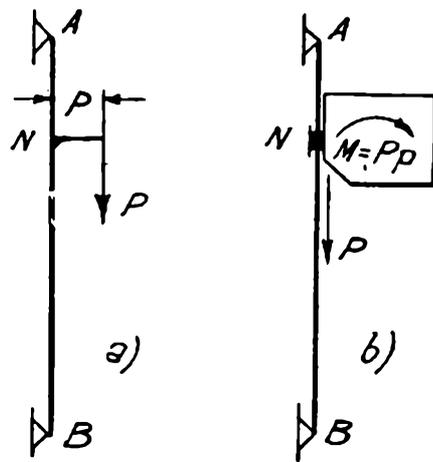


FIG. 55.

En otras palabras, la línea de influencia para los pares aplicados en las diversas secciones de la pieza, está dada por la gráfica representativa de la primera derivada

$$[2] \quad \epsilon = \frac{dv}{dz'} = \frac{1}{l} \frac{dv}{dv'}$$

de la curva que constituye la línea de influencia para cargas verticales.

**59. Integración de las líneas de influencia para los estados de carga anteriores, en el caso de piezas con empates.** — Según lo establecido, la forma general de la línea de influencia es

$$v = m'_l \bar{\xi}^{(i)} + m''_l \bar{\xi}^{(d)} + (u' - v') v' + v'.$$

El valor de la incógnita correspondiente a un determinado estado de carga podrá expresarse, pues,

$$X = X^{(i)} + X^{(d)} + X^{(k)} + X^{(c)},$$

siendo  $X^{(a)}$ ,  $X^{(d)}$ ,  $X^{(l)}$  y  $X^{(c)}$  las partes correspondientes sucesivamente a los cuatro términos de la expresión anterior.

Las tablas VII dan los números  $\bar{X}^{(a)}$  y  $\bar{X}^{(d)}$  correspondientes a los dos primeros términos, cuando en ellos se hace  $m'_l = m''_l = l = 1$  y suponiendo, además, que  $P = 1$  para las cargas concentradas y  $p = 1$  para las continuas.

En base a dichos números  $\bar{X}^{(a)}$  y  $\bar{X}^{(d)}$  se tiene

$$X^{(a)} = m'_l P \bar{X}^{(a)},$$

$$X^{(d)} = m''_l P \bar{X}^{(d)},$$

para las cargas concentradas, y

$$X^{(a)} = m'_l pl \bar{X}^{(a)},$$

$$X^{(d)} = m''_l pl \bar{X}^{(d)},$$

para las continuas.

La tabla VIII da los números  $\bar{X}^{(l)}$  correspondientes al tercer término, cuando  $v'' - v' = 1$  y  $P = 1$  ó  $p = 1$ , según el caso. Con ellos se tiene

$$X^{(l)} = P (v'' - v') \bar{X}^{(l)},$$

para las cargas concentradas, y

$$X^{(l)} = pl (v'' - v') \bar{X}^{(l)},$$

para las continuas.

Finalmente, el cuarto término, correspondiente a la ordenada constante  $v'$ , es igual a la carga total que incide en la pieza, multiplicada por esta ordenada. Es decir, según las expresiones de esta carga total dadas en el número anterior, se tiene,

$$X^{(c)} = P v' \bar{X}^{(c)},$$

para las cargas concentradas, y

$$X^{(c)} = pl v' \bar{X}^{(c)},$$

para las continuas.

En resumen, pues, el valor de la incógnita  $X$ , es

$$[1] \quad X = P (m'_l \bar{X}^{(a)} + m''_l \bar{X}^{(d)} + (v'' - v') \bar{X}^{(l)} + v' \bar{X}^{(c)}),$$

para cargas concentradas, y

$$[2] \quad X = pl (m'_i \bar{X}^{(i)} + m''_i \bar{X}^{(d)} + (v'' - v') \bar{X}^{(l)} + v' \bar{X}^{(e)}),$$

para las continuas, y se obtiene cómodamente, utilizando las referidas tablas VII, VIII y IX.

**60. Ejemplo numérico.**—Sea el sistema disimétrico, con empate recto a la izquierda, representado en la figura 56, que tiene

$$J = 0,0025 \text{ m}^4, \quad J' = 0,025 \text{ m}^4,$$

$$s = 6,00 \text{ m}, \quad l = 4,50 \text{ m}, \quad h = 3,97 \text{ m}, \quad a = 1,50 \text{ m},$$

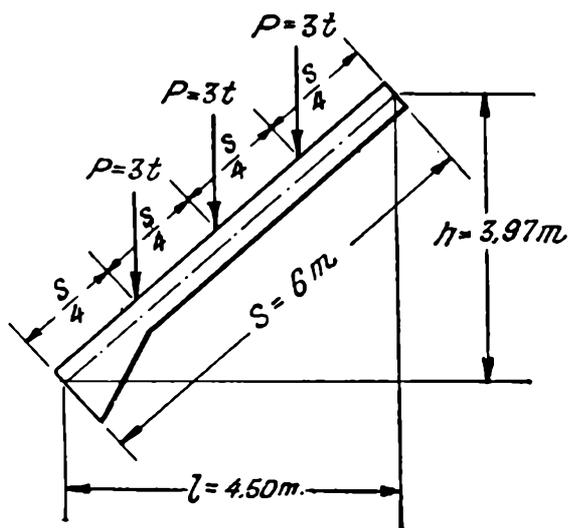


FIG. 56.

y para el que, por consiguiente,

$$n = \frac{J}{J'} = \frac{0,0025 \text{ m}^4}{0,025 \text{ m}^4} = 0,10,$$

$$\lambda = \frac{a}{s} = \frac{1,50 \text{ m}}{6,00 \text{ m}} = 0,25.$$

La línea de influencia para una determinada incógnita  $X$  es

$$v = 0,375 \bar{\xi}^{(i)} + 0,226 \bar{\xi}^{(d)} - 0,115 v' + 0,333.$$

Se pide el valor de la incógnita  $X$  para el estado de cargas concentradas representando en la figura, con intensidad  $P = 3t$ .

La tabla VII<sup>1-11c</sup> da para este estado de carga (estado 3) y para  $n = 0,10$  y  $\lambda = 0,25$ ,

$$\bar{X}^{(i)} = 0,884, \quad \bar{X}^{(d)} = 1,003.$$

Las tablas VIII y IX dan, a su vez, para este estado de carga,

$$\bar{X}^{(l)} = 1,5, \quad \bar{X}^{(e)} = 3.$$

Se tiene, por consiguiente, siendo, de acuerdo con la ecuación de la línea de influencia dada

$$m'_l = 0,375, \quad m''_l = 0,226, \quad v'' - v' = -0,115, \quad v' = 0,333,$$

que

$$X = 3 \text{ t} (0,375 \times 0,884 + 0,226 \times 1,003 - 0,115 \times 1,5 + 0,333 \times 3) = 4,11 \text{ t}.$$

61. — Para el sistema anterior y con la misma línea de influencia, se pide el valor de la incógnita correspondiente a la carga representada en la figura 57. Se tiene

$$v'_k = \frac{z'_k}{l} = \frac{2,43 \text{ m}}{4,50 \text{ m}} = 0,54.$$

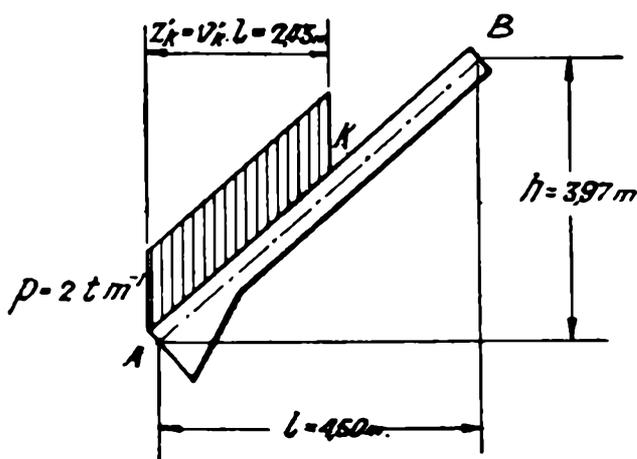


FIG. 57.

Como este valor de  $v'_k$  no coincide con los que figuran en las tablas VII<sup>12c</sup>, VIII y IX, debe calcularse para  $v'_k = 0,50$  y  $v'_k = 0,583$  é interpolar. La tabla VII<sup>12c</sup> (para  $n = 0,10$  y  $\lambda = 0,25$ ) y las VIII y IX, dan

Para $v'_k = 0,500$	$\bar{X}^{(i)} = 0,125$	$\bar{X}^{(d)} = 0,115$	$\bar{X}^{(l)} = 0,125$	$\bar{X}^{(c)} = 0,500$
Para $v'_k = 0,583$	$\bar{X}^{(i)} = 0,154$	$\bar{X}^{(d)} = 0,150$	$\bar{X}^{(l)} = 0,170$	$\bar{X}^{(c)} = 0,583$
	$\Delta \bar{X}^{(i)} = 0,029$	$\Delta \bar{X}^{(d)} = 0,035$	$\Delta \bar{X}^{(l)} = 0,045$	$\Delta \bar{X}^{(c)} = 0,083$

Se tienen pues, para  $v'_k = 0,54$

$$\bar{X}^{(i)} = 0,125 + \frac{0,029}{0,083} 0,04 = 0,139$$

$$\bar{X}^{(d)} = 0,115 + \frac{0,035}{0,083} 0,04 = 0,132,$$

$$\bar{X}^{(l)} = 0,125 + \frac{0,045}{0,083} 0,04 = 0,147,$$

$$\bar{X}^{(c)} = 0,500 + \frac{0,083}{0,083} 0,04 = 0,540.$$

Recordando los valores de  $m'_l$ ,  $m''_l$ ,  $(v'' - v')$  y  $v'$  dados en el número anterior, resulta

$$X = 2 \text{ tm}^{-1} (0,375 \times 0,139 + 0,226 \times 0,132 - 0,115 \times 0,147 + 0,333 \times 0,540) \text{ m} = 0,490 \text{ t.}$$

**62. Caso en que las líneas de influencia se dan por las ordenadas y rotaciones extremas.** — Si la línea de influencia se da por las ordenadas  $v'$ ,  $v''$  y rotaciones  $\delta'$ ,  $\delta''$  extremas, se calculan previamente las magnitudes  $m'_l$  y  $m''_l$  de acuerdo con lo establecido en (21) y luego se procede exactamente como en el caso anterior.

☛ ☛

**63. Integración de las líneas de influencia en el caso de piezas de momento de inercia constante.** — Para las piezas con  $J = \text{const.}$  la ecuación de la línea de influencia se escribe

$$[a] \quad v = A \sum_{j=0}^3 A_j v'^j$$

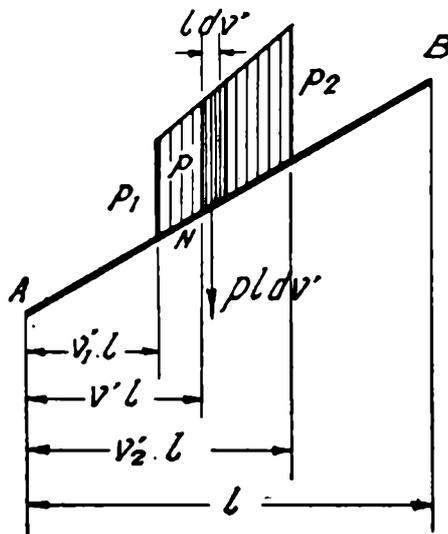


FIG. 58.

Consideremos el estado de carga trapezoidal representado en la figura 58 y hallemos la expresión de la incógnita  $X$  correspondiente.

La carga específica en el punto  $N$ , de abscisa  $v'$ , es

$$p = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{v'_2 - v'_1} (v' - v'_1)$$

y la carga elemental correspondiente al elemento  $l dv'$ ,

$$[b] \quad pl dv' = \left[ p_1 + \frac{p_2 - p_1}{v'_2 - v'_1} (v' - v'_1) \right] l dv'$$

El valor de la incógnita correspondiente a esta carga elemental, si  $v$  es la ordenada respectiva de la línea de influencia, es

$$dX = p l v dv'$$

o, sustituyendo las expresiones [a] y [b],

$$dX = \left[ p_1 + \frac{p_2 - p_1}{v'_2 - v'_1} (v' - v'_1) \right] l A \sum_{j=0}^3 A_j v'^j dv'$$

Por consiguiente, para la carga total trapezoidal se tendrá

$$X = \int_{v'_1}^{v'_2} dX$$

o sea, sustituyendo, efectuando la integración y simplificando,

$$[1] \quad X = \frac{A l}{v'_2 - v'_1} \sum_{j=0}^3 A_j \left[ (p_1 v'_2 - p_2 v'_1) \frac{v'^{j+1}_2 - v'^{j+1}_1}{j+1} + (p_2 - p_1) \frac{v'^{j+2}_2 - v'^{j+2}_1}{j+2} \right]$$

De la fórmula anterior se deducen, como casos particulares, las expresiones que dan los valores de la incógnita para los distintos casos de cargas lineales (uniformes, triangulares y trapezoidales).

Para los estados con cargas concentradas considerados en (57), la expresión de la incógnita  $X$  se obtiene multiplicando la intensidad de  $P$  por la suma de las ordenadas de la ecuación [a] correspondiente a los puntos de aplicación de dichas cargas concentradas.

Las fórmulas I son las expresiones que de esta manera se obtienen para los distintos estados de carga considerados en (57) y algunos otros.

**64. Ejemplos.** — La línea de influencia de una incógnita  $X$ , para una pieza con  $J = \text{const.}$  es

$$v = -\frac{1}{3} (3 - 2v' + v'^2 - 6v'^3),$$

es decir, se tiene

$$A = -\frac{1}{3}, \quad A_0 = 3, \quad A_1 = -2, \quad A_2 = 1, \quad A_3 = -6.$$

Si pide la expresión que da a  $X$ , para una carga uniformemente repartida  $p$ , extendida en toda la longitud de la pieza.

Las fórmulas I dan, para este caso,

$$X = pl A \left( A_0 + \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{3} + \frac{A_3}{4} \right)$$

y sustituyendo las expresiones anteriores, se tiene

$$X = -\frac{pl}{3} \left( 3 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} - \frac{6}{4} \right),$$

o sea, simplificando.

$$X = -\frac{5}{18} pl.$$

**65. Integración de las líneas de influencia para las piezas con  $J = \text{const.}$ , cuando se dan mediante las ordenadas y rotaciones extremas.**— Si la línea de influencia de una incógnita  $X$ , correspondiente a una pieza de momento de inercia constante, se da mediante sus ordenadas  $v'$ ,  $v''$  y rotaciones  $\delta'$ ,  $\delta''$  extremas, los coeficientes  $A_j$  de la ecuación (haciendo  $A = 1$ )

$$v = \sum_{j=0}^3 A_j v'^j,$$

se obtienen mediante dichos desplazamientos con las expresiones [2] de (40). Sustituyendo estas expresiones en las fórmulas I se han obtenido las que se agrupan en las fórmulas II, que dan los valores de la incógnita  $X$  directamente en función de dichos desplazamientos extremos.

**66. Ejemplo.** — Sean

$$v' = 0,223 \text{ m}, \quad v'' = 0,117 \text{ m}, \quad \delta' = 0,342, \quad \delta'' = -0,228,$$

los desplazamientos extremos de la línea de influencia de la incógnita  $X$  correspondiente a una pieza rectilínea con proyección horizontal  $l$ , sujeta al estado de cargas de la figura 59.

Las fórmulas II dan, para este estado de cargas,

$$X = \frac{pl}{60} \left[ 30 v' v + 20 l \delta' v^2 + 15 \left( 3 (v'' - v') - l (2 \delta' + \delta'') \right) v^3 + 12 \left( l (\delta' + \delta'') - 2 (v'' - v') \right) v^4 \right]$$

y, sustituyendo los valores anteriores, se obtiene

$$X = \frac{pl}{60} \left\{ (30 \times 0,223 \text{ m} \times 0,75) + (20 \times 0,342 \times 0,75) l + 15 \left[ 3 (0,117 \text{ m} - 0,223 \text{ m}) - l (2 \times 0,342 - 0,228) \right] 0,75^3 + 12 \left( l (0,342 - 0,228) - 2 (0,117 \text{ m} - 0,223 \text{ m}) \right) 0,75^4 \right\}$$

o sea.

$$X = (0,0631 \text{ m} + 0,0188 l) pl.$$

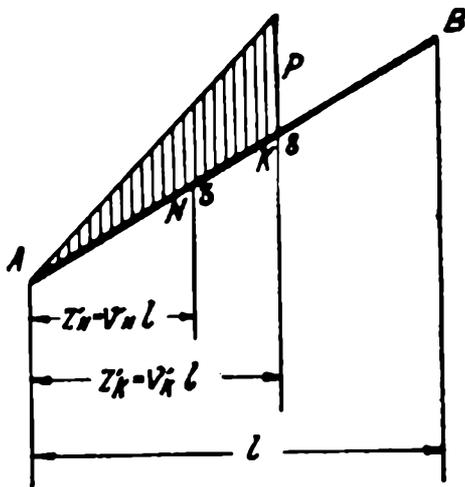


FIG. 59.

**67. Integración de las líneas de influencia de momentos flectores.**

Si se trata de la línea de influencia del momento flector en la sección  $N$ , de abscisa  $z'_N = v'_N l$ , al valor  $X$  de la incógnita, calculado para la curva continua  $A_0 N' B_0$  (fig. 45), de acuerdo con lo que acabamos de establecer, se requerirá agregar, según (52), el valor del momento flector en la sección  $N$  correspondiente a la viga isostática empotrada en  $A$  y libre en  $B$ , cuya línea de influencia está representada por la recta  $N'' B''$  referida a la  $A' B'$ . Es decir, se tendrá

$$[1] \quad X = X' + X^{(0)},$$

siendo  $X'$  el valor de la incógnita correspondiente a la curva continua y  $X^{(0)}$  el correspondiente a dicho sistema isostático.

Poniendo

$$X^{(0)} = -Pl \bar{X}^{(0)} \quad \text{ó} \quad X^{(0)} = -pl^2 \bar{X}^{(0)},$$

según que se trate de cargas concentradas o continuas, la tabla **Xa** da los números  $\bar{X}^{(0)}$  correspondientes a líneas de influencia de momentos flectores en las secciones que resultan de dividir la luz en doce partes iguales.

**68. Ejemplo numérico.** — Para la pieza representada en la figura 56, que tiene (60)

$$n = 0,10, \quad \lambda = 0,25; \quad l = 4,50 \text{ m},$$

la línea de influencia del momento flector en la sección  $N$ , de abscisa  $z'_N = 1,13$  m. ( $v'_N = 0,25$ ) (fig. 59), referida a un único eje, tiene

$$\begin{aligned} v' &= 0,286, & \delta' &= 0,382, \\ v'' &= 0,153, & \delta'' &= -0,213. \end{aligned}$$

Se pide el valor de la incógnita correspondiente a la carga triangular representada en la figura 59, con

$$p = 2 \text{ tm}^{-1}, \quad v'_k = 0,666.$$

Los desplazamientos extremos de la línea de influencia, referidos a ejes quebrados (curva única) son, según las [1] de (53),

$$\begin{aligned} v'_t &= v' = 0,286 \text{ m.}, \\ v''_t &= v'' + v''_N l = 0,153 \text{ m} + (0,75 \times 4,50 \text{ m}) = 3,53 \text{ m.}, \\ \delta'_t &= \delta' = 0,382, \\ \delta''_t &= \delta'' + 1 = -0,213 + 1 = 0,787 \end{aligned}$$

Para las rotaciones extremas referidas a la recta de los extremos se tiene ([1] y [2] de (22))

$$\gamma = \frac{v''_t - v'_t}{l} = \frac{3,53 \text{ m} - 0,286 \text{ m}}{4,50 \text{ m}} = 0,720$$

y

$$\begin{aligned} \delta^* &= \delta'_t - \gamma = 0,382 - 0,720 = -0,338, \\ \delta^{**} &= \delta''_t - \gamma = 0,787 - 0,720 = 0,067. \end{aligned}$$

Para  $n = 0,10$  y  $\lambda = 0,25$ , la tabla II o da

$$A' = 1,18, \quad A'' = 0,710, \quad B = 0,540$$

y resulta, por consiguiente ([1] de (21)),

$$\begin{aligned} m'_l &= l (A' \delta^* + B \delta^{**}) = 4,50 \text{ m} (1,18 (-0,338) + 0,540 (0,067)) = -1,63 \text{ m.} \\ m''_l &= -l (B \delta^* + A'' \delta^{**}) = -4,50 \text{ m} (0,540 (-0,338) + 0,710 (0,067)) = 0,608 \text{ m.} \end{aligned}$$

El valor de la incógnita  $X$  es

$$X = pl (m'_l \bar{X}^{(i)} + m''_l \bar{X}^{(d)} + (v''_t - v'_t) \bar{X}^{(l)} + v'_t \bar{X}^{(c)} - l \bar{X}^{(0)})$$

Las tablas VII<sup>14</sup>c (para  $n = 0,10$ ,  $\lambda = 0,25$ ,  $v_k = 0,666$ ) y las VIII, IX y X a ( $v'_N = 0,25$ ), dan para la hipótesis de carga considerada,

$$\begin{aligned} \bar{X}^{(i)} &= 0,106, & \bar{X}^{(d)} &= 0,116, \\ \bar{X}^{(l)} &= 0,148, & \bar{X}^{(c)} &= 0,333, & \bar{X}^{(0)} &= 0,0687. \end{aligned}$$

Resulta, pues, sustituyendo,

$$X = 2 \text{ tm}^{-1} \times 4,50 \text{ m} \left( -1,63 \text{ m} \times 0,106 + 0,608 \text{ m} \times 0,116 + (3,53 - 0,286) \text{ m} \times 0,148 + \right. \\ \left. + 0,286 \text{ m} \times 0,333 - 4,50 \text{ m} \times 0,0687 \right)$$

o sea, efectuando las operaciones,

$$X = -2,41 \text{ tm}.$$

**69. Integración de las líneas de influencia de esfuerzos tangenciales y normales.** — Si se trata de la línea de influencia del esfuerzo tangencial (normal) en la sección  $N$  de abscisa  $z'_N = v'_N l$ , al valor de la incógnita calculado para la curva continua, se requerirá agregar, según (54), el valor del esfuerzo tangencial (normal) en la sección  $N$  correspondiente a la viga isostática, empotrada en  $A$  y libre en  $B$ , cuya línea de influencia está representada por la recta  $N''B''$  (fig. 46) referida a la  $A'B'$ . Es decir, se tendrá

$$X = X' + X^{(0)},$$

siendo  $X'$  el valor del esfuerzo tangencial (normal) correspondiente a la curva continua y  $X^{(0)}$  el que las cargas producen en dicho sistema isostático.

Poniendo

$$X^{(0)} = -P \frac{l}{s} \bar{X}^{(0)} \quad \text{ó} \quad X^{(0)} = -\frac{pl^2}{s} \bar{X}^{(0)},$$

para el esfuerzo tangencial y

$$X^{(0)} = -P \frac{h}{s} \bar{X}^{(0)} \quad \text{ó} \quad X^{(0)} = -\frac{plh}{s} \bar{X}^{(0)},$$

para el normal, la tabla X b da los números  $\bar{X}^{(0)}$ , para las líneas de influencia de esfuerzos tangenciales y normales en las secciones que resulten de dividir la luz en doce partes iguales.

**70. Ejemplo numérico.** — Para la pieza representada en la figura 56, que tiene

$$n = 0,10, \quad \lambda = 0,25, \\ s = 6,00 \text{ m}, \quad l = 4,50 \text{ m}, \quad h = 3,97 \text{ m},$$

la línea de influencia del esfuerzo tangencial en la sección  $N$  de abscisa  $z'_N = 1,13$  m ( $v'_N = 0,25$ ) referida a un único eje, tiene

$$\begin{aligned} v' &= 0,286 \text{ m}, & \delta' &= 0,382, \\ v'' &= 0,153 \text{ m}, & \delta'' &= -0,213. \end{aligned}$$

Se pide el valor de la incógnita correspondiente a la carga uniformemente repartida extendida en toda la longitud de la pieza, con  $p = 2,5 \text{ tm}^{-1}$ .

Los desplazamientos extremos de la línea de influencia, referida a ejes quebrados, (curva única) son, según las [1] de (55),

$$\begin{aligned} v'_t &= v' = 0,286 \text{ m}, \\ v''_t &= v'' + \frac{l}{s} = 0,153 \text{ m} + \frac{4,50 \text{ m}}{6,00 \text{ m}} = 0,903 \text{ m}, \\ \delta'_t &= \delta' = 0,382, \\ \delta''_t &= \delta'' = -0,213. \end{aligned}$$

Para las rotaciones, referidas a la recta de los extremos, se tiene

$$\gamma = \frac{v''_t - v'_t}{l} = \frac{0,903 \text{ m} - 0,286 \text{ m}}{4,50 \text{ m}} = 0,137$$

y

$$\begin{aligned} \delta^* &= \delta'_t - \gamma = 0,382 - 0,137 = 0,245, \\ \delta^{**} &= \delta''_t - \gamma = -0,213 - 0,137 = -0,350. \end{aligned}$$

La tabla II c da, para  $n = 0,10$  y  $\lambda = 0,25$ ,

$$A' = 1,18, \quad A'' = 0,710, \quad B = 0,540,$$

y resulta, por consiguiente,

$$\begin{aligned} m'_l &= l(A' \delta^* + B \delta^{**}) = 4,50 \text{ m} (1,18 \times 0,245 - 0,540 \times 0,350) = 0,450 \text{ m}, \\ m''_l &= -l(B \delta^* + A'' \delta^{**}) = -4,50 \text{ m} (0,540 \times 0,245 - 0,710 \times 0,350) = 0,527 \text{ m}. \end{aligned}$$

El valor de la incógnita  $X$  es

$$X = pl \left( m'_l \bar{X}^{(i)} + m''_l \bar{X}^{(d)} + (v''_t - v'_t) \bar{X}^{(l)} + v'_t \bar{X}^{(c)} - \frac{h}{s} \bar{X}^{(0)} \right).$$

La tabla VII<sup>12</sup> c (para  $n = 0,10$ ,  $\lambda = 0,25$ ,  $v'_k = 1$ ) y las VIII, IX y X ( $v'_N = 0,25$ ) dan, para la hipótesis de carga considerada,

$$\begin{aligned} \bar{X}^{(i)} &= 0,233, & \bar{X}^{(d)} &= 0,267, \\ \bar{X}^{(l)} &= 0,500, & \bar{X}^{(c)} &= 1,00, & \bar{X}^{(0)} &= 0,417. \end{aligned}$$

Resulta, pues, sustituyendo que

$$X = 2,5 \text{ tm}^{-1} \times 4,50 \text{ m} \left[ 0,450 \times 0,233 + 0,527 \times 0,267 + (0,903 - 0,286) 0,500 + 0,286 \times 1,00 - \frac{3,97}{6,00} 0,417 \right],$$

o sea, efectuando las operaciones,

$$X = 6,35 \text{ t.}$$

### § 3. — Diagrama de momentos flectores de vigas simplemente apoyadas.

**71. Generalidades.** — Para el cálculo de los diagramas de momentos flectores de sistemas hiperestáticos constituídos por piezas rectilíneas, se requiere, como se verá más adelante, comenzar por obtener para cada pieza el diagrama de momentos en la hipótesis de que esté simplemente apoyada en sus extremos *A* y *B*. Las tablas XI sirven para facilitar su trazado. Aunque en realidad no requieren mayor explicación, exponemos a continuación sumariamente la forma de aplicarlas.

**72. Carga única concentrada.** — El diagrama de momentos flectores es el triángulo representado en la figura 60. El momento flector má-

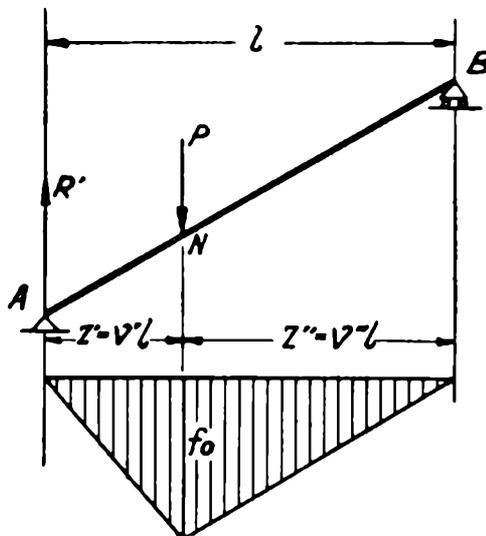


FIG. 60.

ximo  $f_0$  en la sección *N* de aplicación de la fuerza *P* es, como se sabe,

$$f_0 = \frac{P z' z''}{l} = \frac{P v' l v'' l}{l},$$

o sea

[1]

$$f_0 = Pl \bar{f}_0,$$

con

[2]

$$\bar{f}_0 = v' v''$$

La tabla XI *a* da los números  $\bar{f}_0$  para diversos valores de  $\nu'$  (o  $\nu''$ ). Da también la reacción  $\mathcal{R}'$  mediante los números  $\bar{\mathcal{R}}'$ , tales que,

$$\mathcal{R}' = P \bar{\mathcal{R}}', \quad \text{con} \quad \bar{\mathcal{R}}' = \nu''$$

Esta reacción sirve para calcular el esfuerzo tangencial  $\mathcal{T}'_0$  de la viga simplemente apoyada, dado por la expresión

$$\mathcal{T}'_0 = \mathcal{R}' \frac{l}{s},$$

como es inmediato.

**73. Estados constituídos por cargas concentradas de igual intensidad.** — Se trata de los estados de cargas concentradas  $P$  representados en la figura 50 (1 a 11). El diagrama de momentos flectores es el polígono funicular de dichas cargas. Poniendo

$$f_i = Pl \bar{f}_i,$$

las tablas XI *b* dan los números  $\bar{f}_i$  para los diversos estados de carga. Dan también los números  $\bar{\mathcal{R}}'$  tales que

$$\mathcal{R}' = P \bar{\mathcal{R}}', \quad \text{con} \quad \bar{\mathcal{R}}' = \sum \nu''_i.$$

**74. Cargas continuas uniformes.** — Se trata del estado de carga representado en la figura 61, o, como casos particulares, en la figura 62. Se comienza por trazar el diagrama de momentos  $A'C'B'$  de la carga total  $Q = pc$ , a cuya recta de acción corresponde la abscisa numérica

$$[1] \quad \nu_G = \nu_1 + \frac{1}{2} \bar{c}$$

siendo  $\bar{c} = \frac{c}{l}$  y  $c$  la proyección horizontal de la longitud cargada. Para ello se calcula el momento flector máximo  $f_0$  mediante la tabla XI *a*.

Se bajan las verticales correspondientes a los extremos  $M$  y  $N$  de la carga y se obtienen los puntos  $M'$  y  $N'$  del diagrama de momentos. Entre éstos, el diagrama es la curva funicular  $M'C''N'$  de la carga uniforme (parábola de segundo grado), que se puede obtener gráficamente por puntos

y tangentes en la forma conocida, observando que las tangentes en  $M'$  y en  $N'$  son, respectivamente,  $A'C'$  y  $A''C'$ .

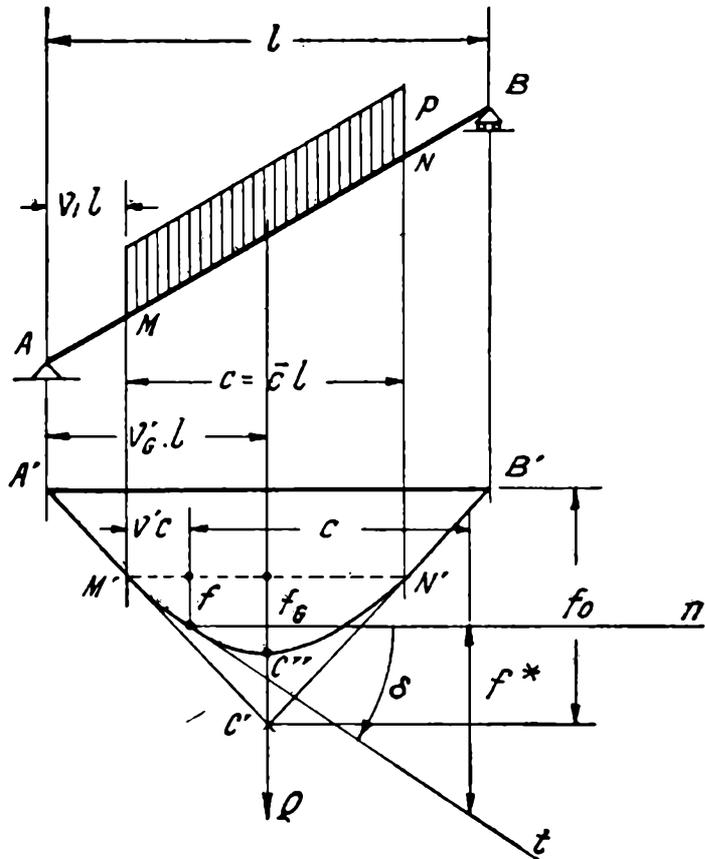


FIG. 61.

Llamando  $f$  las ordenadas de la curva  $A'C''B'$  referidas a la recta  $M'N'$ , y poniendo

$$[2] \quad f = pc^2 \bar{f},$$

las tablas XI d dan los números  $\bar{f}$

La misma tabla permite determinar las tangentes  $t$  a la curva

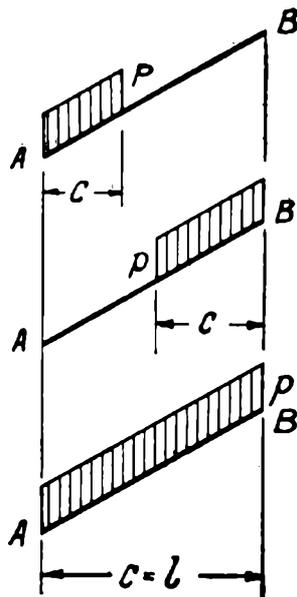


FIG. 62.

$M'C''N'$ , mediante las rotaciones  $\delta$  referidas a las rectas  $n$  paralelas a  $M'N'$ . Dan los números  $\bar{\delta}$  tales que

$$[3] \quad \delta = pc \bar{\delta}.$$

Las tangentes  $t$  se determinan más cómodamente mediante las ordenadas  $f^*$  distantes  $c$  de la sección considerada, dadas por la expresión

$$[4] \quad f^* = \delta c = pc^2 \bar{\delta}.$$

Estas ordenadas se llevan hacia abajo (arriba) de la paralela  $n$  a la recta  $M'N'$  cuando son positivas (negativas).

La tabla XI c da para mayor número de secciones, los números  $\bar{f}$  y  $\bar{\delta}$ , cuando la carga se extiende en toda la viga.

**75. Cargas continuas triangulares.**— Se trata de la carga triangular representada en la figura 63, o de las similares de la figura 64.

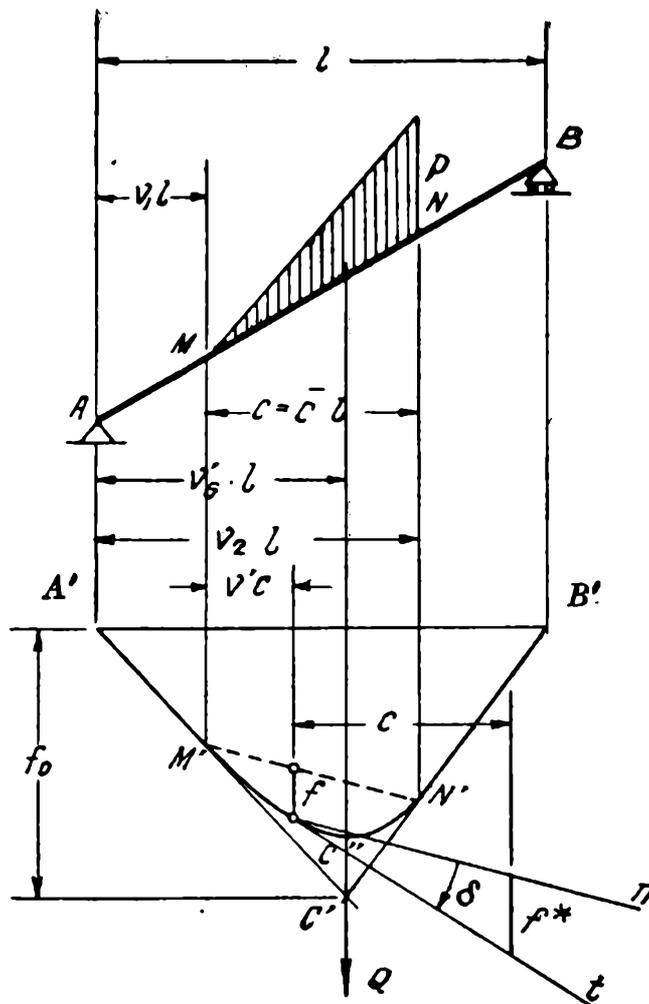


FIG. 63.

Se comienza también por trazar el diagrama de momentos  $A'C'B'$  de la carga total

$$[1] \quad Q = \frac{pc}{2},$$

aplicada en el baricentro del triángulo de cargas y cuya recta de acción tiene la abscisa numérica

$$[2] \quad v'c = v_1 + \frac{2}{3} \bar{c}.$$

para ello se calcula el momento flector máximo  $f_0$  mediante la tabla XI a.

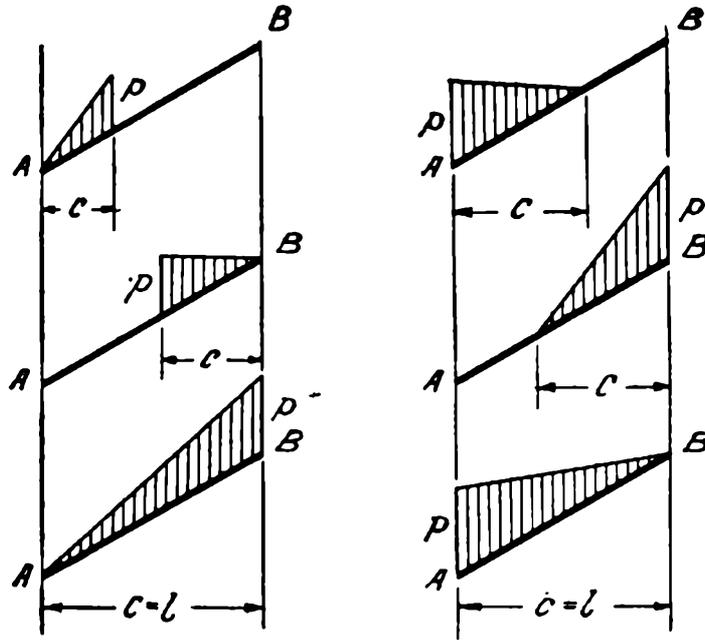


FIG. 64.

Bajando las verticales correspondientes a los extremos  $M$  y  $N$  de la carga, se obtienen los puntos de tangencia  $M'$  y  $N'$  de los extremos de

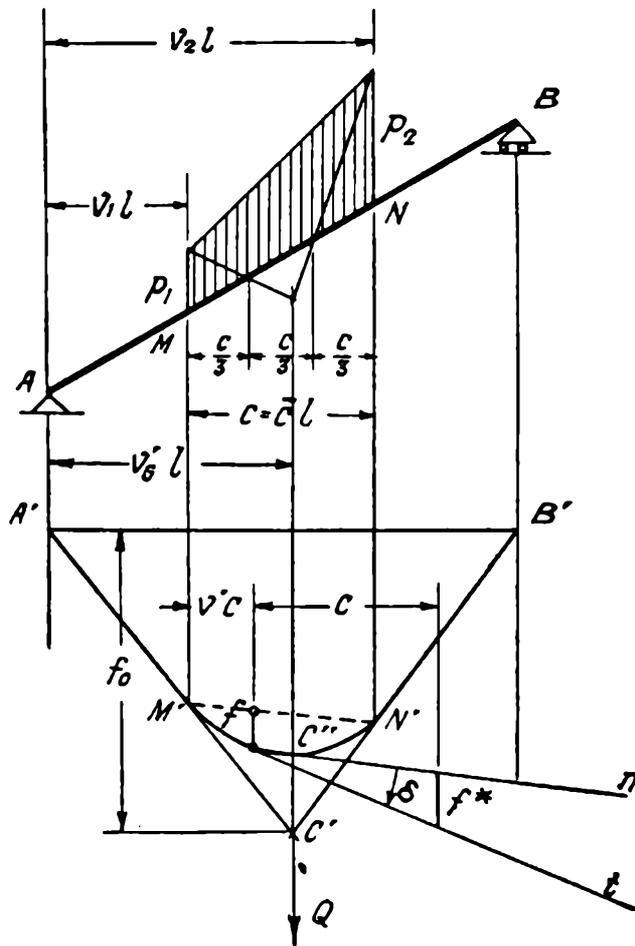


FIG. 65.

la curva funicular  $A'C'N'$ , parábola cúbica que se puede obtener por puntos y tangentes en la forma conocida.

Llamando  $f$  las ordenadas de esta curva, referidas a la recta  $M'N'$ , y poniendo

$$[3] \quad f = pc^2 \bar{f},$$

la tabla XI *e* da los números  $\bar{f}$  para las diversas abscisas  $v'$ .

Permiten además, como en los casos anteriores, determinar las tangentes mediante las magnitudes  $\bar{\delta}$ , calculando las ordenadas

$$[4] \quad f^* = pc^2 \bar{\delta}.$$

La tabla XI *d* da, para mayor número de secciones, los números  $\bar{f}$  y  $\bar{\delta}$  cuando la carga se extiende en toda la viga.

**76. Cargas trapezoidales.** — Se trata del estado de carga representado en la figura 65, o los casos similares de las figuras 66. Se comienza

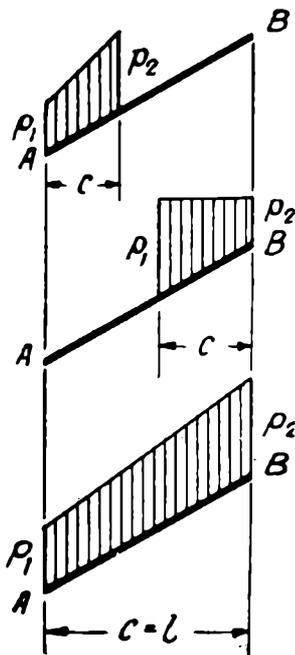


FIG. 66.

también por trazar, utilizando la tabla XI *a*, el diagrama de momentos  $A'C'B'$  de la carga total

$$[1] \quad Q = \frac{p_1 + p_2}{2} c = \frac{p_1 c}{2} (1 + \kappa), \quad \text{con} \quad \kappa = \frac{p_2}{p_1},$$

aplicada en el baricentro del trapecio de cargas, de abscisa numérica

$$[2] \quad v'_G = v_1 + \frac{1 + 2\kappa}{3(1 + \kappa)} \bar{c}.$$

Mediante las verticales correspondientes a los extremos  $M$  y  $N$  de la carga, se obtienen los puntos de tangencia  $M'$  y  $N'$  de la curva funicular

$M'C''N'$ , parábola cúbica que puede obtenerse gráficamente, por puntos y tangentes.

Poniendo

$$[3] \quad f = p_1 c^2 \bar{f},$$

con

$$[4] \quad \bar{f} = \bar{f}' + \kappa \bar{f}'',$$

las tablas XI  $f$  dan los números  $\bar{f}'$  y  $\bar{f}''$  que facilitan el cálculo numérico de las ordenadas de esta curva referidas a la recta  $M'N'$ . Las tangen-

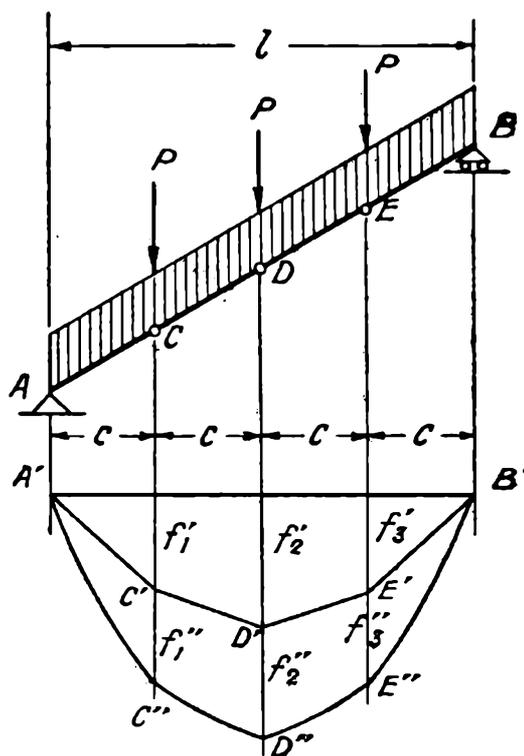


FIG. 67.

tes se obtienen como en los casos anteriores, calculando las ordenadas

$$[5] \quad f^* = pc^2 \bar{\delta}$$

con

$$\bar{\delta} = \bar{\delta}' + \kappa \bar{\delta}''$$

y números  $\bar{\delta}'$  y  $\bar{\delta}''$  dados por dichas tablas XI  $f$

**77. Estados superpuestos de cargas.** — Para los estados de carga que resulten de la superposición de dos o más de los anteriores, por ejemplo para el caso de la figura 67, el diagrama de momentos flectores se obtiene como indica la misma, que no requiere mayor explicación. Se comienza por trazar el diagrama  $AC'D'E'B'$  correspondiente a las cargas

concentradas, calculando las ordenadas  $f'_1$ ,  $f'_2$  y  $f'_3$ . Se calculan luego las ordenadas  $f''_1$ ,  $f''_2$  y  $f''_3$  del diagrama de momentos originado por la carga uniformemente repartida y se las suma a las anteriores, obteniendo los puntos  $C''$ ,  $D''$  y  $E''$ .

La curva entre dos cualesquiera de estos puntos, los  $C''$  y  $D''$  por ejemplo, se obtiene siguiendo lo establecido en (74) para una carga uniforme parcial. Las tangentes extremas en los puntos  $C''$  y  $D''$  pueden obtenerse observando que se cortan en un punto  $H$  de la sección media entre los mismos, distante  $2f$  de la recta  $C''D''$ , siendo  $f$  la ordenada de la curva referida a la misma.

**78. Par aplicado en una sección cualquiera.** — Se trata del estado de carga representado en la figura 68. El diagrama de momentos está

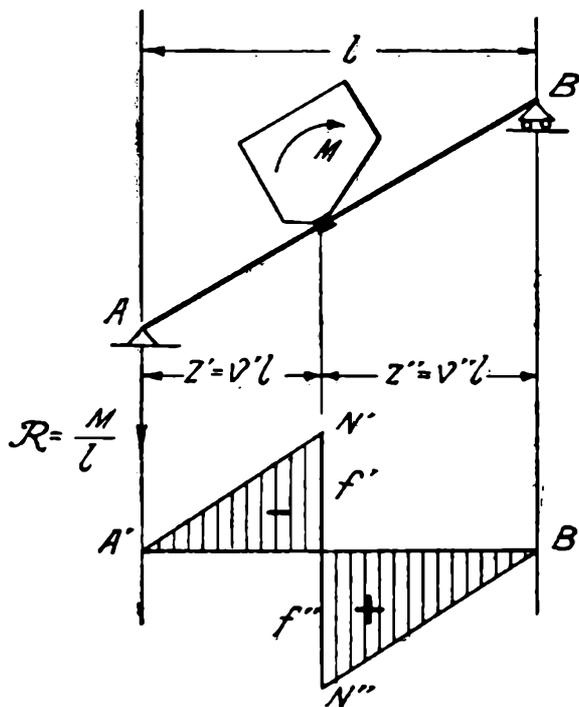


FIG. 68.

dados por las dos rectas paralelas  $A'N'$  y  $N''B'$ . Los momentos en  $N$ , como resulta de inmediato, son

$$[1] \quad \begin{cases} f' = -\frac{M}{l} z' = -M v' \\ f'' = \frac{M}{l} z'' = M v'' \end{cases}$$

§ 4. — Momentos de Ritter.

79. **Definiciones.** — Sea la viga simplemente apoyada  $AB$  (fig. 69), sujeta a un diagrama cualquiera de cargas verticales positivas. Sea ade-

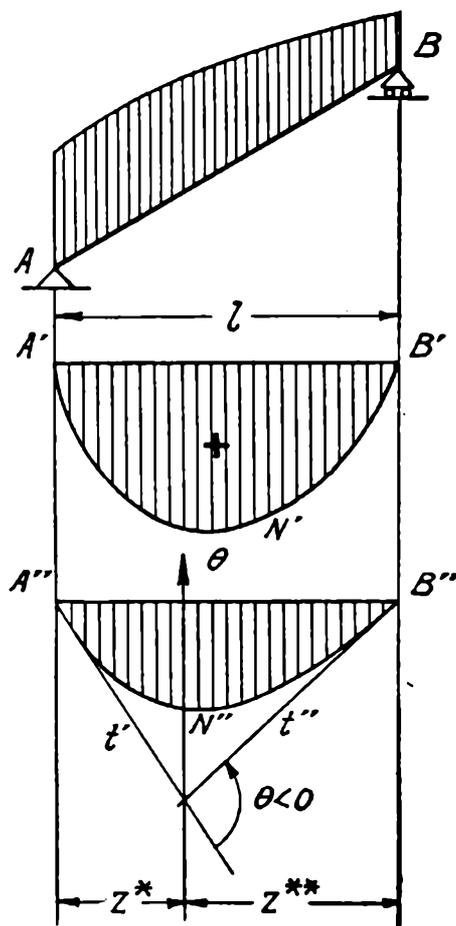


FIG. 69.

más,  $A''N''B''$  la elástica de la deformación que éstas originan y  $\theta$  la rotación resultante del extremo  $B$  respecto del  $A$  (negativa por serlo para todas las secciones los momentos de las fuerzas que actúan a la derecha). Se llama *momento de Ritter izquierdo*  $T^{(i)}$  (derecho  $T^{(d)}$ ) al producto de la rotación  $\theta$  por  $-\frac{z^*}{m_l}$  ( $-\frac{z^{**}}{m_l}$ ), siendo  $z^*$  ( $z^{**}$ ) la distancia entre la rotación  $\theta$  y el extremo izquierdo (derecho). Es decir, los momentos de Ritter izquierdo y derecho, son respectivamente

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{l} T^{(i)} = -\frac{1}{m_l} \theta z^*, \\ T^{(d)} = -\frac{1}{m_l} \theta z^{**}. \end{array} \right.$$

Si la pieza está sujeta a un diagrama de cargas horizontal positivas (de izquierda a derecha) (fig. 70), los momentos de Ritter se definen, análogamente, por las expresiones

$$[2] \quad \begin{cases} T^{(i)} = -\frac{1}{m_h} \theta y^* , \\ T^{(d)} = -\frac{1}{m_h} \theta y^{**} \end{cases}$$

Según lo anterior, los momentos de Ritter para cargas verticales (horizontales) son, salvo signo, los momentos de la elación vertical (horizontal) de la rotación  $\frac{\theta}{m_i} \left( \frac{\theta}{m_h} \right)$ , respecto de los extremos  $A$  y  $B$  de

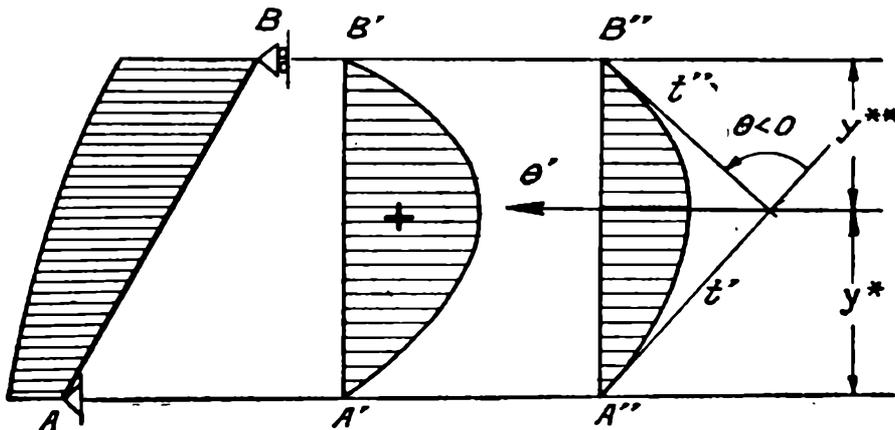


FIG. 70.

la pieza. El signo es contrario al de dicha rotación y resulta positivo cuando todas las cargas lo son.

La unidad de  $m_i$  es  $[t^{-1}]$ . Sustituyendo en las [1] y siendo  $\theta$  un número, resulta para los momentos de Ritter la unidad  $[stm]$ , que corresponde al momento de una fuerza. El empleo de la palabra *momento* se justifica, por consiguiente.

Los momentos de Ritter, de cuya determinación nos pasamos a ocuparnos con todo detalle, son magnitudes que desempeñan un papel fundamental en el cálculo de sistemas hiperestáticos constituídos por piezas rectilíneas.

**80. Líneas de influencia de los momentos de Ritter.** — Designaremos con las letras  $v^{(i)}$  y  $v^{(d)}$  a las ordenadas de las líneas de influencia, para cargas verticales, de los momentos de Ritter, izquierdo y derecho respectivamente.

Sea la viga simplemente apoyada  $AB$  (fig. 71 a). La ordenada  $v^{(i)}$  correspondiente al punto  $k$  de abscisa  $v'l$  es el valor del momento de Ritter  $T^{(i)}$  originado por la fuerza  $P = 1$  aplicada en el mismo. Si  $\theta$

es la rotación del extremo  $B$  respecto del  $A$ , producida por la carga  $P = 1$ , se tiene, según las definiciones anteriores,

$$[a] \quad v^{(i)} = -\frac{1}{m_2} \theta z^* .$$

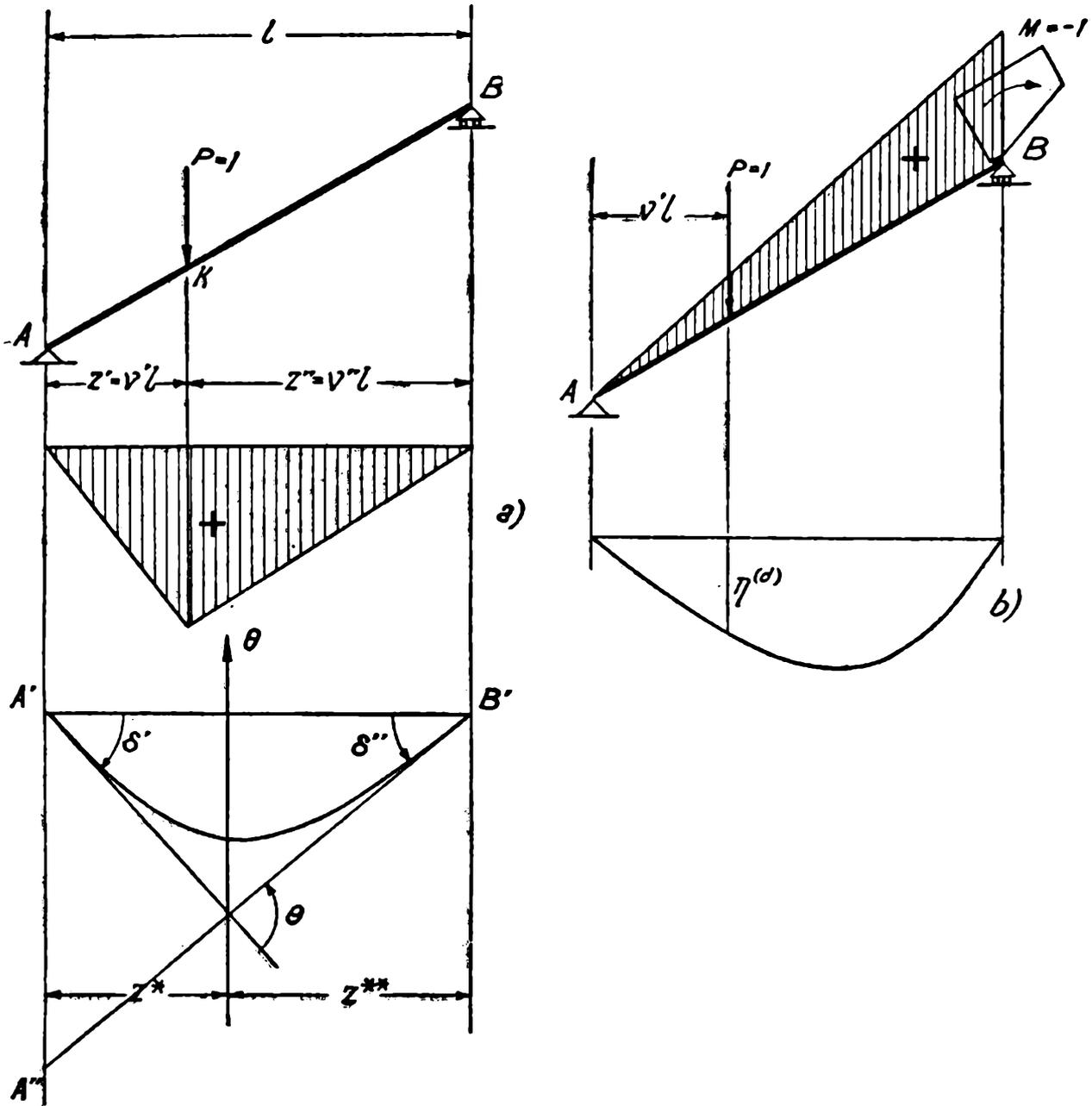


FIG. 71.

De la figura se deduce que

$$\overline{A'A''} = -\theta z^* = -\delta'' l .$$

Sustituyendo en la [a] resulta

$$[b] \quad v^{(i)} = -\frac{l}{m_2} \delta''$$

Para calcular la rotación  $\delta''$ , apliquemos en una chapa ligada al extremo  $B$  (fig. 71  $b$ ) un par  $M = -1$  (momento flector  $\mathcal{M}'' = 1$ ), que origina un diagrama triangular de momentos flectores. La elástica respectiva es la fundamental derecha de ordenadas  $\eta^{(d)}$ . El desplazamiento que dicho par produce según la dirección de la fuerza  $P = 1$  es, por lo tanto  $\eta^{(d)}$ . El desplazamiento que la fuerza  $P = 1$  produce según la dirección de dicho par  $M = -1$ , es, por otra parte, la rotación  $\delta''$ . Según la ley de Betti se tiene, por consiguiente,

$$P \eta^{(d)} = M \delta'' ,$$

ó sea ( $P = 1$ ,  $M = -1$ ),

$$\delta'' = - \eta^{(d)}$$

Sustituyendo en la [b] resulta, finalmente,

$$[1] \quad v^{(i)} = \frac{l}{m_l} \eta^{(d)}$$

Para la línea de influencia del momento de Ritter derecho, se encontraría, análogamente,

$$[2] \quad v^{(d)} = \frac{l}{m_l} \eta^{(i)}$$

Por último, para las ordenadas  $w^{(i)}$  y  $w^{(d)}$  de las líneas de influencia de los momentos de Ritter izquierdo y derecho, correspondientes a cargas horizontales, se obtendría, en igual forma,

$$[3] \quad \left\{ \begin{array}{l} w^{(i)} = \frac{h}{m_h} \zeta^{(d)} , \\ w^{(d)} = \frac{h}{m_h} \zeta^{(i)} \end{array} \right.$$

Las expresiones anteriores establecen que:

*La línea de influencia del momento de Ritter izquierdo (derecho) es la elástica fundamental derecha (izquierda) multiplicada por  $\frac{l}{m_l}$ .*

Sustituyendo en las expresiones anteriores las [3] de (26), se tiene

$$[4] \quad \left\{ \begin{array}{ll} v^{(i)} = l \bar{\xi}^{(d)} , & w^{(i)} = |h| \bar{\xi}^{(d)} , \\ v^{(d)} = l \bar{\xi}^{(i)} , & w^{(d)} = |h| \bar{\xi}^{(i)} . \end{array} \right.$$

Según (58) las líneas de influencia de los momentos de Ritter, para pares aplicados en las diversas secciones de la pieza, son las curvas derivadas de las anteriores respecto de la variable  $z'$ , es decir, llamando  $\delta^{(i)}$  y  $\delta^{(d)}$  a sus ordenadas, se tiene

$$\delta^{(i)} = \frac{dv^{(i)}}{dz'} = \frac{1}{l} \frac{dv^{(i)}}{dv'} = \frac{d\bar{\xi}^{(d)}}{dv'},$$

$$\delta^{(d)} = \frac{dv^{(d)}}{dz'} = \frac{1}{l} \frac{dv^{(d)}}{dv'} = \frac{d\bar{\xi}^{(i)}}{dv'},$$

o sea, recordando las [1] de (31),

$$[5] \quad \begin{cases} \delta^{(i)} = \bar{\varepsilon}^{(d)}, \\ \delta^{(d)} = \bar{\varepsilon}^{(i)}. \end{cases}$$

**81. Momentos de Ritter para diversas hipótesis de carga.** — Comparando las ecuaciones

$$v^{(i)} = l \bar{\xi}^{(d)}, \quad v^{(d)} = l \bar{\xi}^{(i)},$$

con la forma general [1] de (51) de las líneas de influencia, se tiene

$$m'_l = 0, \quad m''_l = l, \quad v' = v'' = 0,$$

para la primera, y

$$m'_l = l, \quad m''_l = 0, \quad v' = v'' = 0,$$

para la segunda.

De acuerdo con las [1] y [2] de (59), se tendrá, por consiguiente, para los momentos de Ritter  $T^{(i)}$  y  $T^{(d)}$  correspondientes a una cualquiera de las hipótesis de carga consideradas en (57), que

$$[1] \quad T^{(i)} = Pl \bar{X}^{(d)}, \quad T^{(d)} = Pl \bar{X}^{(i)},$$

si se trata de cargas concentradas, y

$$[2] \quad T^{(i)} = pl^2 \bar{X}^{(d)}, \quad T^{(d)} = pl^2 \bar{X}^{(i)},$$

si las cargas son continuas. Los números  $\bar{X}^{(i)}$  y  $\bar{X}^{(d)}$  son los dados por las tablas VII.

§ 5. — Cálculo numérico de los momentos de Ritter para piezas de momento de inercia constante.

82. Ecuaciones de las líneas de influencia. — Para las piezas con momento de inercia constante se tiene ([2] de (26) y [2] de (31))

$$\begin{aligned} \bar{\xi}^{(d)} &= v' - v'^3, & \bar{\xi}^{(i)} &= 2 v' - 3 v'^2 + v'^3, \\ \bar{\varepsilon}^{(d)} &= 1 - 3 v'^2, & \bar{\varepsilon}^{(i)} &= 2 - 6 v' + 3 v'^2, \end{aligned}$$

y sustituyendo en las expresiones encontradas en las [4] y [5] de (80), resulta para las líneas de influencia de los momentos de Ritter, las expresiones

$$[1] \quad \begin{cases} v^{(i)} = l (v' - v'^3), & v^{(d)} = l (2 v' - 3 v'^2 + v'^3), \\ \delta^{(i)} = 1 - 3 v'^2, & \delta^{(d)} = 2 - 6 v' + 3 v'^2. \end{cases}$$

83. Expresiones de los momentos de Ritter para diversas hipótesis de carga. — Comparando con la forma general de las líneas de influencia,

$$v = A \sum_{j=0}^3 A_j v^j,$$

las ecuaciones

$$v^{(i)} = l (v' - v'^3), \quad v^{(d)} = l (2 v' - 3 v'^2 + v'^3),$$

que dan los momentos de Ritter izquierdo y derecho, se tiene

$$A = l, \quad A_0 = 0, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -1$$

para la primera, y

$$A = l, \quad A_0 = 0, \quad A_1 = 2, \quad A_2 = -3, \quad A_3 = 1,$$

para la segunda.

Reemplazando estos valores de los coeficientes  $A$  y  $A_j$  en las fórmulas I, se obtienen las expresiones analíticas que proporcionan los momentos de Ritter para las diversas hipótesis de carga en ellas consideradas, expresiones que se agrupan en las fórmulas III.

**84. Expresiones simplificadas para algunas hipótesis particulares de carga.** — Pasamos a dar otra forma a algunas de las fórmulas III, por ser necesaria para las demostraciones de la obtención gráfica de los momentos de Ritter de piezas de momento de inercia constante, de que nos ocuparemos en el parágrafo siguiente.

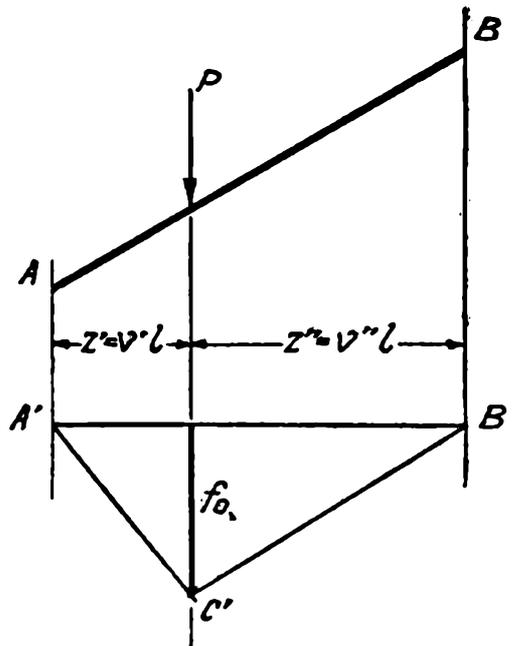


FIG. 72.

Comencemos por una carga concentrada  $P$  (fig. 72). Se tiene

$$T^{(i)} = Pl (v' - v'^3),$$

o sea,

$$T^{(i)} = Pl v' (1 - v'^2) = \frac{Pl v' l (1 - v') l (1 + v')}{l^2},$$

expresión que, siendo

$$l v' = z', \quad l (1 - v') = z'',$$

$$l (1 + v') = l + z',$$

da

$$T^{(i)} = \frac{P z' z'' (l + z')}{l^2}.$$

En igual forma, para  $T^{(d)}$  se obtendría

$$T^{(d)} = \frac{P z' z'' (l + z'')}{l^2}.$$

Por otra parte,

$$\frac{P z' z''}{l}$$

es el momento flector máximo  $f_0$  originado por la fuerza  $P$  en la viga simplemente apoyada  $AB$ . Sustituyendo en las anteriores, resulta, finalmente,

$$[1] \quad \begin{cases} T^{(i)} = \frac{f_0}{l} (l + z'), \\ T^{(d)} = \frac{f_0}{l} (l + z''). \end{cases}$$

85. — Para una carga uniformemente repartida  $p$  extendida en toda la longitud de la pieza, las fórmulas III dan

$$T^{(i)} = T^{(d)} = \frac{pl^2}{4}.$$

Siendo

$$f_m = \frac{pl^2}{8}$$

el momento flector máximo para dicha carga, en la viga simplemente apoyada (flecha de la parábola de momentos), la anterior se escribe

$$[1] \quad T^{(i)} = T^{(d)} = 2f_m.$$

86. — Sea, ahora, la carga uniformemente repartida parcial representada en la figura 73. Para esta hipótesis de carga las fórmulas III dan

$$[a] \quad \begin{cases} T^{(i)} = \frac{pl^2}{4} [2 (v'^2_2 - v'^2_1) - (v'^4_2 - v'^4_1)] = \\ = \frac{pl^2}{2} (v'^2_2 - v'^2_1) \left( 1 - \frac{v'^2_2 + v'^2_1}{2} \right) = \\ = \frac{pl^2}{2} (v'_2 + v'_1) (v'_2 - v'_1) \left[ 1 - \frac{(v'_1 + v'_2)^2 - 2 v'_1 v'_2}{2} \right]. \end{cases}$$

Representemos la carga uniforme parcial por la abscisa

$$z'_G = v'_G l$$

de su punto medio y por la proyección horizontal

$$c = \bar{c} l$$

de longitud cargada. Se tiene

$$\begin{aligned} v'_1 &= v'_G - \frac{\bar{c}}{2}, & \bar{c} &= v'_2 - v'_1, \\ v'_2 &= v'_G + \frac{\bar{c}}{2}, & v'_G &= \frac{v'_2 + v'_1}{2}, \end{aligned}$$

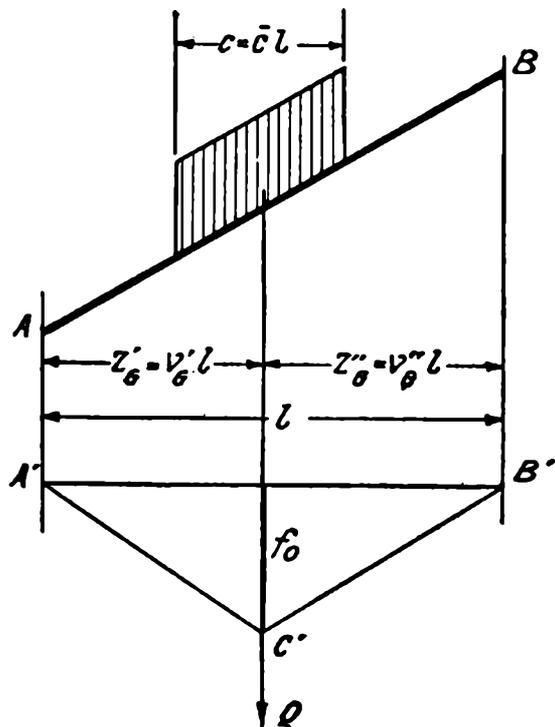


FIG. 73.

y la [a] se escribe

$$\begin{aligned} T^{(2)} &= pl^2 \bar{c} v'_G \left[ 1 - 2 v'^2_G + \left( v'_G - \frac{\bar{c}}{2} \right) \left( v'_G + \frac{\bar{c}}{2} \right) \right] = \\ &= pl^2 \bar{c} v'_G \left( 1 - v'^2_G - \frac{\bar{c}^2}{4} \right) = pl^2 c v'_G \left[ \frac{l(1 - v'_G) l(1 + v'_G)}{l^2} - \frac{l^2 \bar{c}^2}{4 l^2} \right] \end{aligned}$$

o, siendo

$$l(1 - v'_G) = z'_G, \quad l(1 + v'_G) = l + z'_G, \quad l\bar{c} = c,$$

$$T^{(2)} = \frac{p c z'_G}{l^2} \left[ z'_G (l + z'_G) - \frac{c^2}{4} \right]$$

Por otra parte,

$$\frac{p c z'_G z''_G}{l} = f_0$$

es el momento flector máximo de la carga concentrada total  $Q = pc$ . Reemplazando en la anterior, se llega finalmente á

$$[1] \quad T^{(i)} = \frac{f_0}{l} (l + z'_G) - \frac{f_0 c^2}{4 z'_G l},$$

y análogamente, por simetría,

$$[2] \quad T^{(d)} = \frac{f_0}{l} (l + z''_G) - \frac{f_0 c^2}{4 z''_G l}.$$

**87. Par aplicado en una sección cualquiera de la pieza.** — De acuerdo con las [1] de (82), el momento de Ritter izquierdo, para el par  $M$  aplicado en la sección de abscisa  $z' = v' l$  (fig. 74) es

$$T^{(i)} = M \delta^{(i)} = M (1 - 3 v'^2),$$

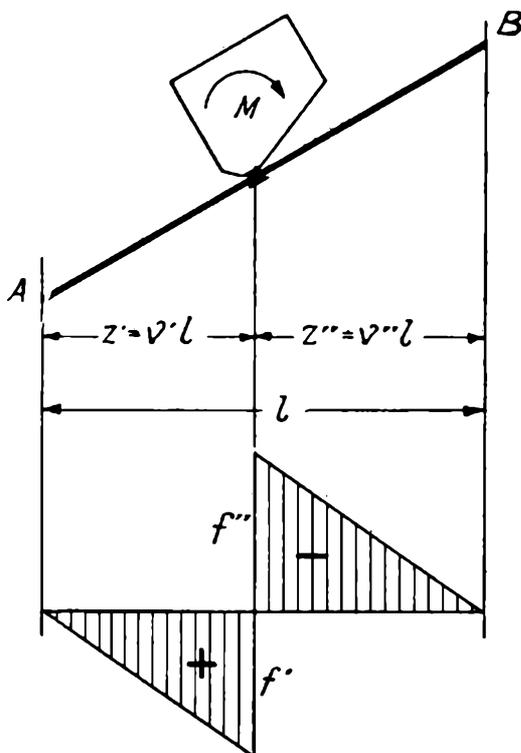


FIG. 74.

o sea,

$$\begin{aligned} T^{(i)} &= M [(1 - v'^2) - 2 v'^2] = M [(1 - v') (1 + v') - 2 v'^2] = \\ &= \frac{M}{l^2} [l (1 - v') l (1 + v') - 2 l^2 v'^2], \end{aligned}$$

expresión que, teniéndose

$$l (1 - v') = z'', \quad l (1 + v') = l + z', \quad l v' = z',$$

se escribe

$$T^{(i)} = \frac{M}{l^2} [z'' (l + z') - 2 z'^2].$$

Siendo, por otra parte,

$$f' = -\frac{M}{l} z', \quad f'' = \frac{M}{l} z'',$$

los momentos flectores que el par origina en la sección  $N$ , la anterior se escribe, finalmente,

$$[1] \quad T^{(i)} = \frac{f''}{l} (l + z') + 2 \frac{f'}{l} z'$$

Para el momento de Ritter derecho, se obtendría, análogamente, por simetría,

$$[2] \quad T^{(d)} = \frac{f'}{l} (l + z'') + 2 \frac{f''}{l} z''$$

**88. Momentos de Ritter para pares unitarios aplicados en los extremos de la pieza.** — En las aplicaciones ofrece particular interés el cálculo de los momentos de Ritter para pares unitarios aplicados en los extremos  $A$  y  $B$  de la pieza. El par unitario aplicado en una sección cualquiera origina, según las [1] de (82), los momentos de Ritter

$$T^{(i)} = \delta^{(i)} = 1 - 3 v'^2,$$

$$T^{(d)} = \delta^{(d)} = 2 - 6 v' + 3 v'^2.$$

Si el par está en el extremo  $A$  ( $v' = 0$ ) se tiene

$$[1] \quad \delta^{(i)}_A = 1, \quad \delta^{(d)}_A = 2$$

y si actúa en el extremo  $B$  ( $v' = 1$ ),

$$[2] \quad \delta^{(i)}_B = -2, \quad \delta^{(d)}_B = -1.$$

### § 6. — Cálculo gráfico de los momentos de Ritter para piezas de momento de inercia constante.

**89. Carga constituida por una sola fuerza concentrada.** — Sea la pieza  $AB$  (fig. 75) cargada con la fuerza  $P$  aplicada en  $N$ ; sea, además,  $A'N'B'$  el diagrama triangular de momentos flectores correspondiente. Los momentos de Ritter  $T^{(i)}$  y  $T^{(d)}$  se obtienen con la siguiente construcción:

Se lleva a partir de la vertical de  $P$  y hacia ambos lados, los segmentos  $N''S = N''Q = l$ ; se proyecta, desde  $S$  y  $Q$ , el vértice  $N'$  del triángulo

de momentos sobre las verticales de los apoyos, determinando los puntos  $A''$  y  $B''$ . Leyendo los segmentos en la escala de momentos flectores, se tiene

$$T^{(i)} = \overline{A' A''},$$

$$T^{(d)} = \overline{B' B''}$$

En efecto; de la figura se deduce

$$\overline{A' A''} = \frac{\overline{N' N''}}{\overline{N'' S}} \overline{S A'} = \frac{f_0}{l} (l + z'),$$

que coincide con la primera [1] de (84) que da la expresión de  $T^{(i)}$

En igual forma se demuestra para  $T^{(d)}$ .

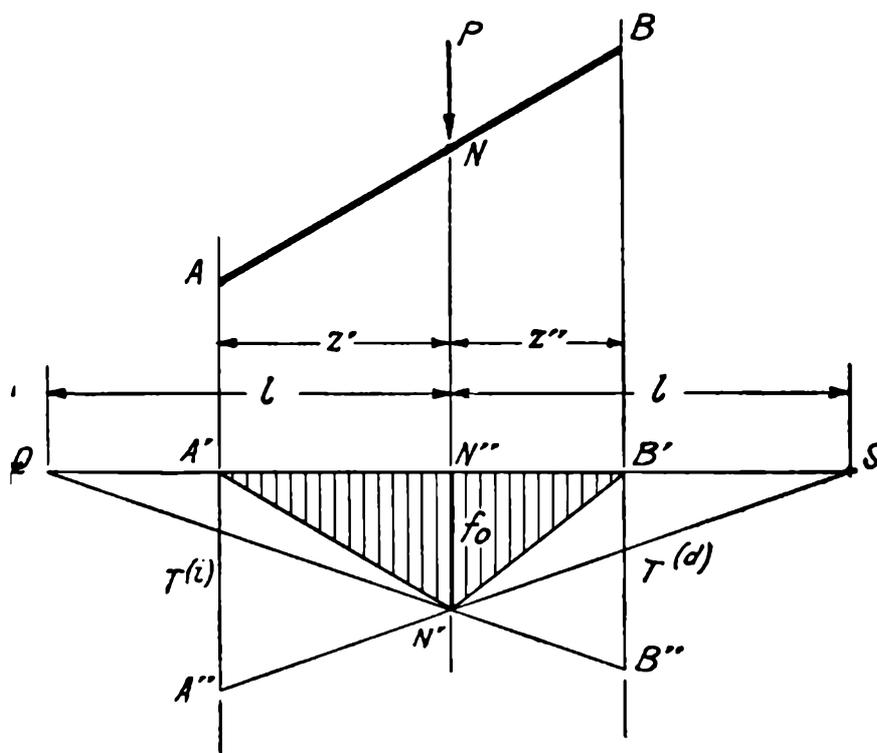


FIG. 75.

### 90. Estado de carga constituido por varias fuerzas concentradas.

— Sea la pieza  $AB$  (fig. 76) sujeta a las fuerzas  $P_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, i, \dots, n$ ) y  $A' 1, 2, \dots, j, \dots, n, B'$  el diagrama de momentos flectores correspondiente.

Si se prolongan los lados del funicular que se interceptan sobre  $P_j$ , hasta cortar en  $A_j$  y  $B_j$  las verticales de los apoyos, y se traza la recta  $A_j B_j$ , se tiene en

$$\overline{j(j)} = f_j = \frac{P_j z'_j z''_j}{l}$$

el momento flector originado por la sola fuerza  $P_j$ , en la sección en que ésta está aplicada. Supongamos determinados estos momentos  $f_j$  para todas las fuerzas, como se hace en la figura.

En base a los mismos, los momentos de Ritter se obtienen gráficamente como sigue:

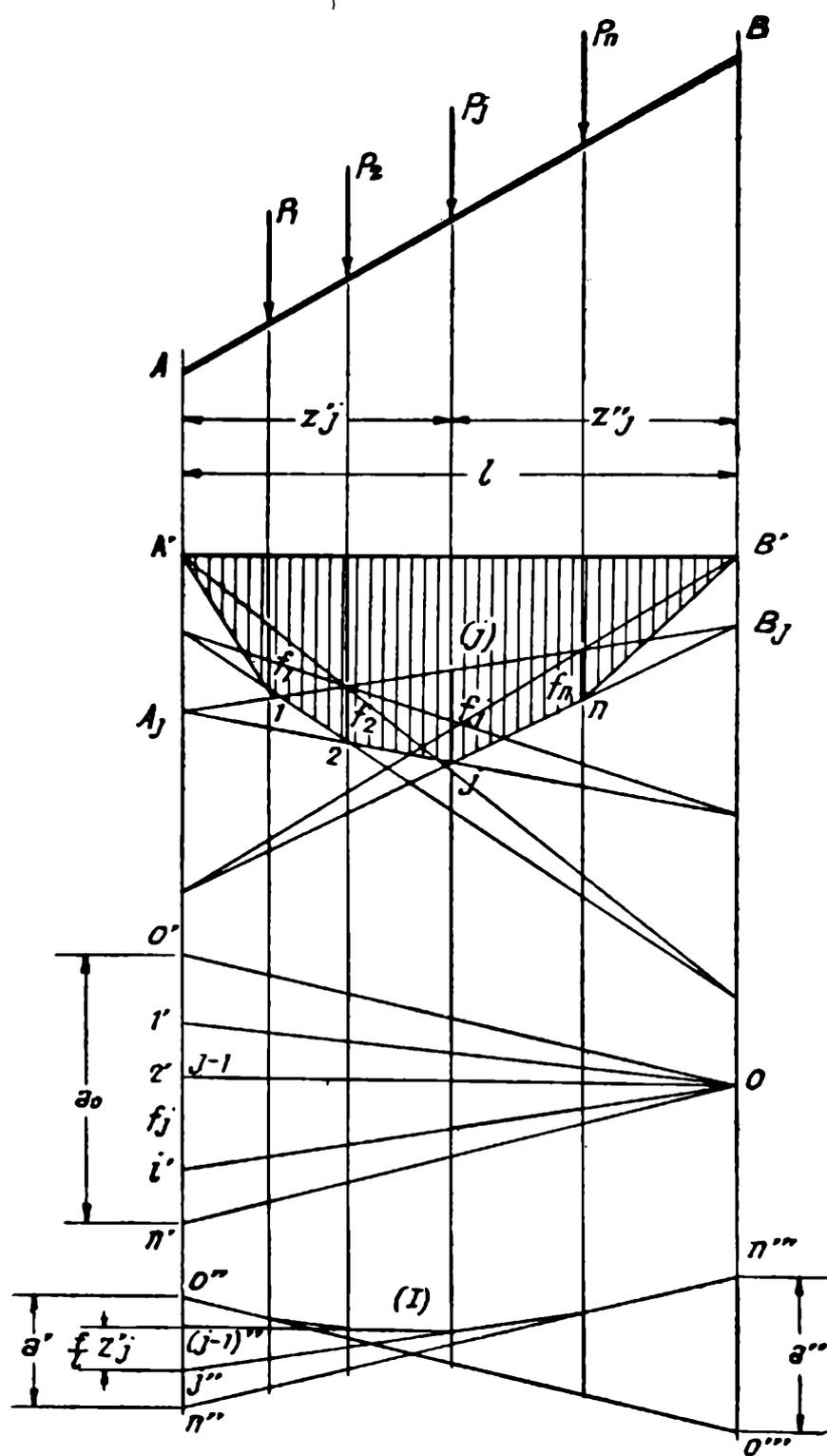


FIG. 76.

Sobre la vertical de  $A$  se lleva en  $O', 1', \dots, j', \dots, n'$ , un polígono de los  $f_j$ ; con polo  $O$  perteneciente a la vertical de  $B$  (distancia polar  $k = l$ ) se construye el funicular (I) de los  $f_j$  aplicados en las rectas de

acción de las respectivas fuerzas  $P_j$ . Siendo  $a_0 = \overline{0'n'}$  y  $a' = \overline{0''n''}$ ,  $a'' = \overline{0'''n'''}$ , los segmentos que los primero y último lados de (I) determinan, respectivamente, sobre las verticales de  $A$  y  $B$ , se tiene

$$[a] \quad \begin{cases} T^{(i)} = a_0 + a', \\ T^{(d)} = a_0 + a'' \end{cases}$$

En efecto, para la fuerza  $P_j$ , el momento de Ritter izquierdo es, según la [1] de (84),

$$\frac{f_j}{l} (l + z'_j) = f_j + \frac{1}{l} f_j z'_j$$

y, para todas las que actúan sobre el sistema, se tiene

$$[b] \quad T^{(i)} = \sum_{j=1}^n f_j + \frac{1}{l} \sum_{j=1}^n f_j z'_j.$$

Es inmediato que

$$[c] \quad a_0 = \sum_{j=1}^n f_j.$$

Por otro lado, el segmento  $\overline{(j-1)''j''}$ , que los dos lados del funicular (I), correspondientes a la vertical  $j$ , determinan sobre la vertical de  $A$ , multiplicado por la distancia polar  $l$ , es igual al momento  $f_j z'_j$ , o sea

$$\overline{(j-1)''j''} = \frac{1}{l} f_j z'_j$$

y, por consiguiente,

$$[d] \quad a' = \overline{0''n''} = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^n f_j z'_j.$$

Sustituyendo las [c] y [d] en la [b] se llega a la primera [a].

En igual forma se demuestra para  $T^{(d)}$ .

**91. Fuerza aplicada en el punto medio de la luz (fig. 77).** — Los momentos de Ritter se obtienen con la construcción siguiente:

Se lleva, hacia arriba, un segmento  $\overline{NN'} = \frac{f}{4}$ ; desde  $B'$  se proyecta el punto  $N'$  sobre la vertical de  $A$ , en  $A''$  y se tiene

$$T^{(i)} = T^{(d)} = \overline{A'A''}$$

En efecto, de acuerdo con las fórmulas III se tiene

$$T^{(i)} = T^{(d)} = \frac{3}{8} P l$$

lo que, siendo

$$f = \frac{P l}{4},$$

da

$$T^{(i)} = T^{(d)} = \frac{3}{2} f,$$

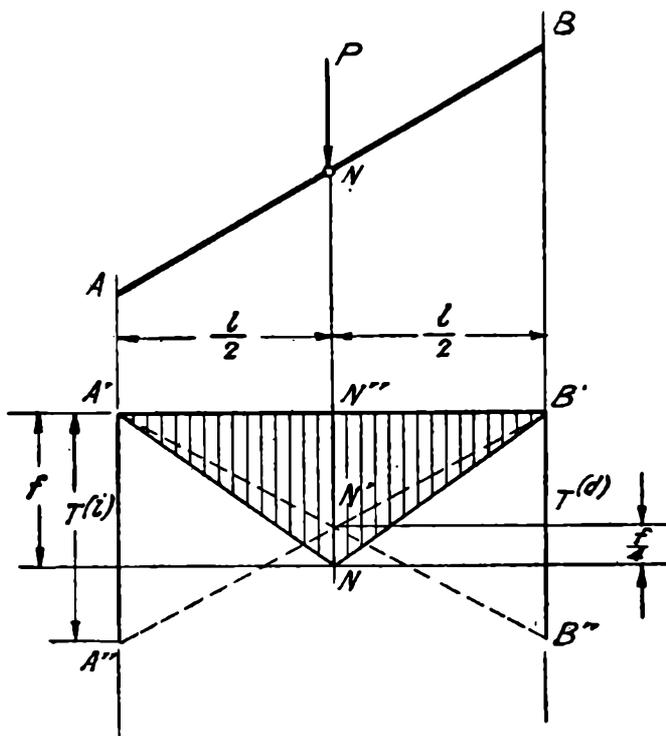


FIG. 77.

y en la figura resulta

$$\overline{A' A''} = \frac{\overline{N' N''}}{\overline{N'' B'}} \overline{B' A'} = \frac{\frac{3}{4} f}{\frac{l}{2}} l = \frac{3}{2} f,$$

como corresponde.

**92. Dos fuerzas iguales aplicadas en los tercios de la luz (fig. 78).**  
 — Proyectando desde B' el punto N (intersección del diagrama de momentos con el eje de simetría), sobre la vertical de A, en A'', se tiene

$$T^{(i)} = T^{(d)} = \overline{A' A''}$$

En efecto, de acuerdo con las fórmulas III se tiene

$$T^{(i)} = T^{(d)} = \frac{2}{3} P l,$$

lo que, siendo (tabla XI b)

$$f = \frac{P l}{3},$$

da

$$T^{(i)} = T^{(d)} = 2 f,$$

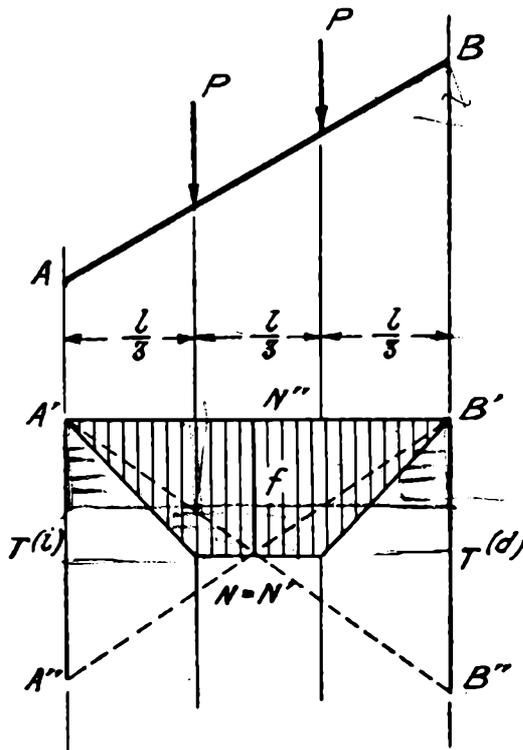


FIG. 78.

y en la figura resulta

$$\overline{A' A''} = 2 f,$$

como corresponde.

93. Dos fuerzas iguales aplicadas en puntos que distan  $\frac{l}{4}$  de los extremos. (fig. 79). — Se lleva sobre el eje de simetría y hacia abajo un segmento  $NN' = \frac{f}{8}$ ; desde  $B'$  se proyecta  $N'$  sobre la vertical de  $A$ . en  $A''$ , y se tiene

$$T^{(i)} = T^{(d)} = \overline{A' A''}$$

En efecto, según las fórmulas III se tiene

$$T^{(i)} = T^{(d)} = \frac{9}{16} P l,$$

lo que, siendo (tabla XI b)

$$f = \frac{Pl}{4},$$

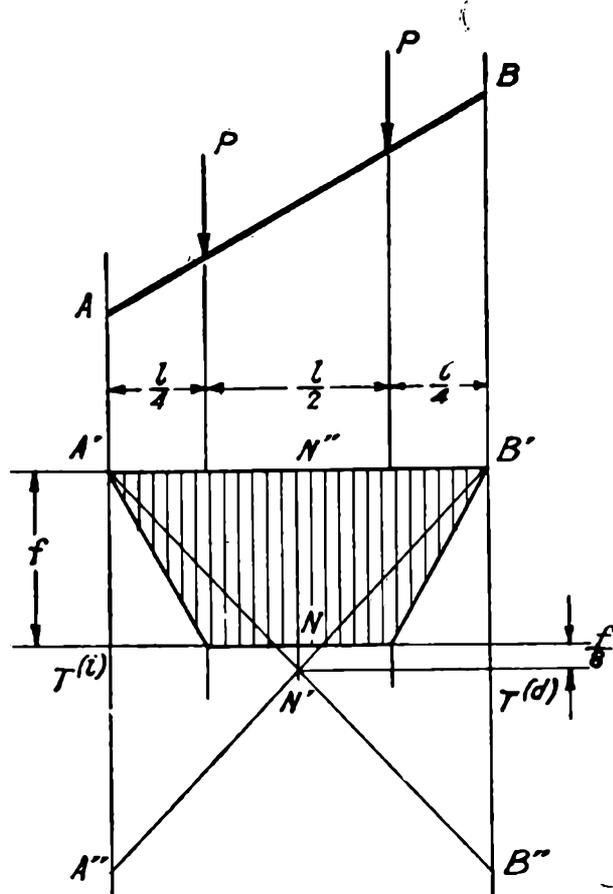


FIG. 79.

da

$$T^{(i)} = T^{(d)} = \frac{9}{4} f$$

y en la figura resulta

$$\overline{A'A''} = \frac{\overline{N'N''}}{\overline{N''B'}} \overline{A'B'} = \frac{\frac{9}{8} f}{\frac{l}{2}} l = \frac{9}{4} f,$$

como corresponde.

**94. Tres fuerzas iguales aplicadas en los puntos que dividen la luz en cuatro partes también iguales (fig. 80). — Se lleva hacia arriba un segmento  $NN' = \frac{f}{16}$ ; desde  $B'$  se proyecta  $N'$  sobre la vertical de  $A$ , en  $A''$ , y se tiene**

$$T^{(i)} = T^{(d)} = \overline{A'A''}$$

En efecto, de acuerdo con las fórmulas III, se tiene

$$T^{(i)} = T^{(d)} = \frac{15}{16} P l;$$

que, siendo (tabla XI b)

$$f = \frac{P l}{2},$$

da

$$T^{(i)} = T^{(d)} = \frac{15}{8} f,$$

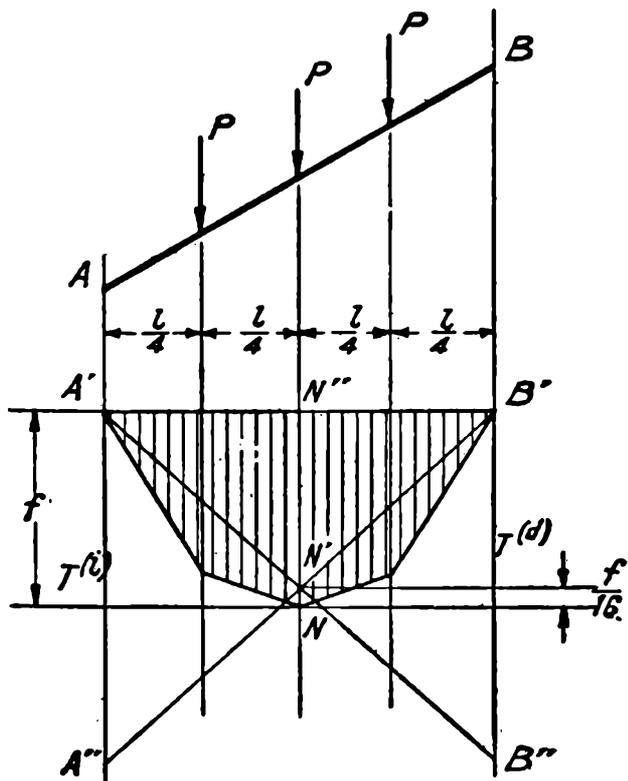


FIG. 80.

y de la figura resulta

$$\overline{A' A''} = \frac{\overline{N' N''}}{\overline{N'' B'}} \overline{A' B'} = \frac{\frac{15}{16} f}{\frac{l}{2}} l = \frac{15}{8} f,$$

como corresponde.

**95. Más de tres fuerzas iguales aplicadas en puntos que dividen la luz en partes iguales.** — A medida que aumenta el número de fuerzas concentradas aplicadas en puntos que dividen la luz en partes iguales, el punto  $N'$  de las figuras 77, 78 y 79 se aproxima, cada vez más, al punto

$N$ , extremo de la flecha del polígono de momentos flectores. Así, para cuatro fuerzas se tiene

$$f = 0,6 Pl, \quad T^{(i)} = 1,2 Pl$$

y, por tanto,

$$\overline{NN'} = f - \frac{T^{(i)}}{l} \frac{l}{2} = f - \frac{T^{(i)}}{2} = 0.$$

Para cinco fuerzas se tiene, análogamente,

$$f = 0,75 Pl, \quad T^{(i)} = 1,46 Pl = 1,46 \frac{f}{0,75} = 1,94 f$$

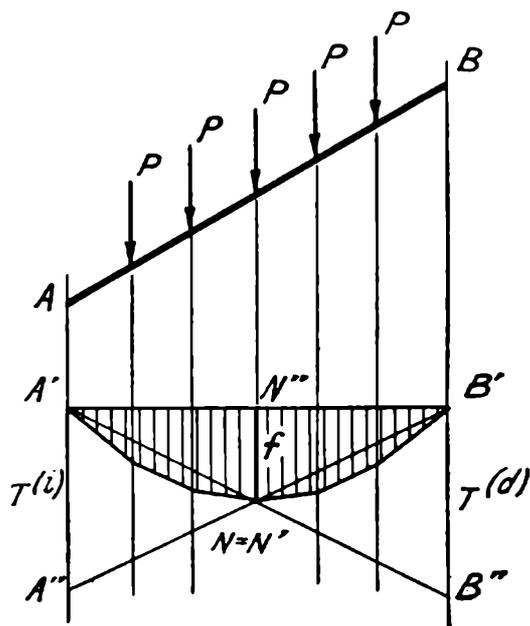


FIG. 81.

y, por tanto,

$$\overline{NN'} = f - \frac{T^{(i)}}{2} = f - 0,97 f = 0,03 f \cong 0.$$

Con suficiente aproximación, pues, se puede suponer, cuando el número de fuerzas es mayor de tres, que el punto  $N'$  coincide con el  $N$ . La determinación de los momentos de Ritter se efectúa, por lo tanto, como indica la figura 81.

**96. Carga uniformemente repartida en toda la longitud de la pieza (fig. 82).** — Desde  $B'$  se proyecta el vértice  $N$  de la parábola de momentos sobre la vertical de  $A$ , en  $A''$  y se tiene

$$T^{(i)} = T^{(d)} = \overline{A'A''},$$

como resulta de inmediato, observando que, en la figura,  $\overline{A'A''}$  es el

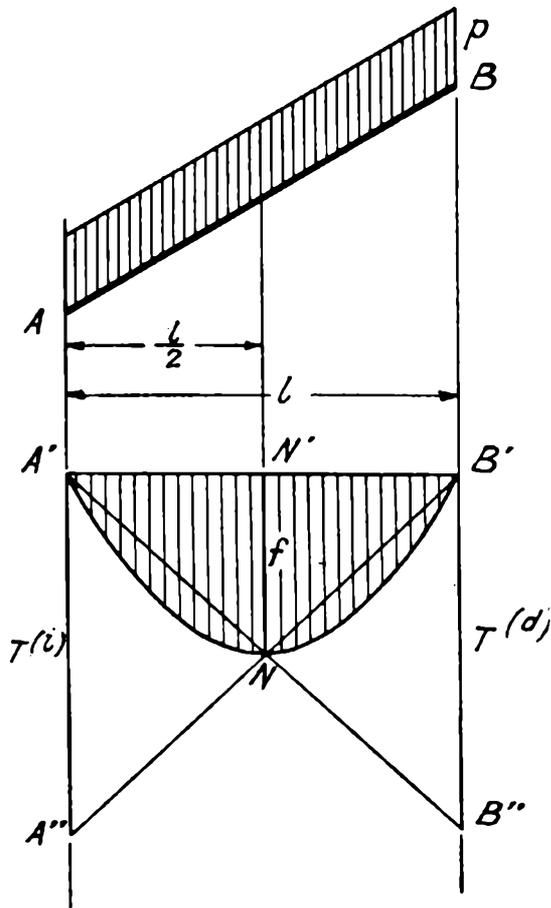


FIG. 82.

doble de  $f$  y recordando la [1] de (85).

**97. Carga uniformemente repartida parcial (fig. 83).** — Para obtener el diagrama de momentos flectores que esta carga origina en la viga simplemente apoyada, se construye primeramente el diagrama de momentos  $A'NB'$  de la fuerza concentrada  $Q = pc$ , aplicada en el punto medio de  $CD$ , y se traza luego la parábola tangente a  $A'N$  y  $B'N$ , respectivamente, en los puntos  $C'$  y  $D'$  de su intersección con las verticales de  $C$  y  $D$ . La flecha del triángulo de momentos  $A'NB'$  correspondiente a la fuerza  $Q = pc$  es

$$f_0 = \frac{pc z'_G z''_G}{l}$$

Para determinar los momentos de Ritter se procede en la siguiente forma: Se halla primeramente, con la construcción dada en (89) los momentos de Ritter  $a'$  y  $a''$  de la fuerza concentrada  $Q = pc$ ; se trazan las verticales  $n'$  y  $n''$  distanciadas  $\frac{c}{2}$  de  $A'$  y  $B'$ , respectivamente; se hallan sus puntos de intersección  $R$  y  $S$  con  $A'N$  y  $B'N$ , respectivamente,

puntos que se proyectan paralelamente a  $A'B'$ , sobre las verticales de  $A$  y  $B$ , en  $R'$  y  $S'$ ; se unen  $S'$  y  $R'$  con  $A'$  y  $B'$ , respectivamente, y siendo  $b'$  y  $b''$  los segmentos que estas rectas determinan sobre  $n'$  y  $n''$  (contados a partir del eje  $A'B'$ ), resulta

$$T' = a' - b',$$

$$T'' = a'' - b''$$

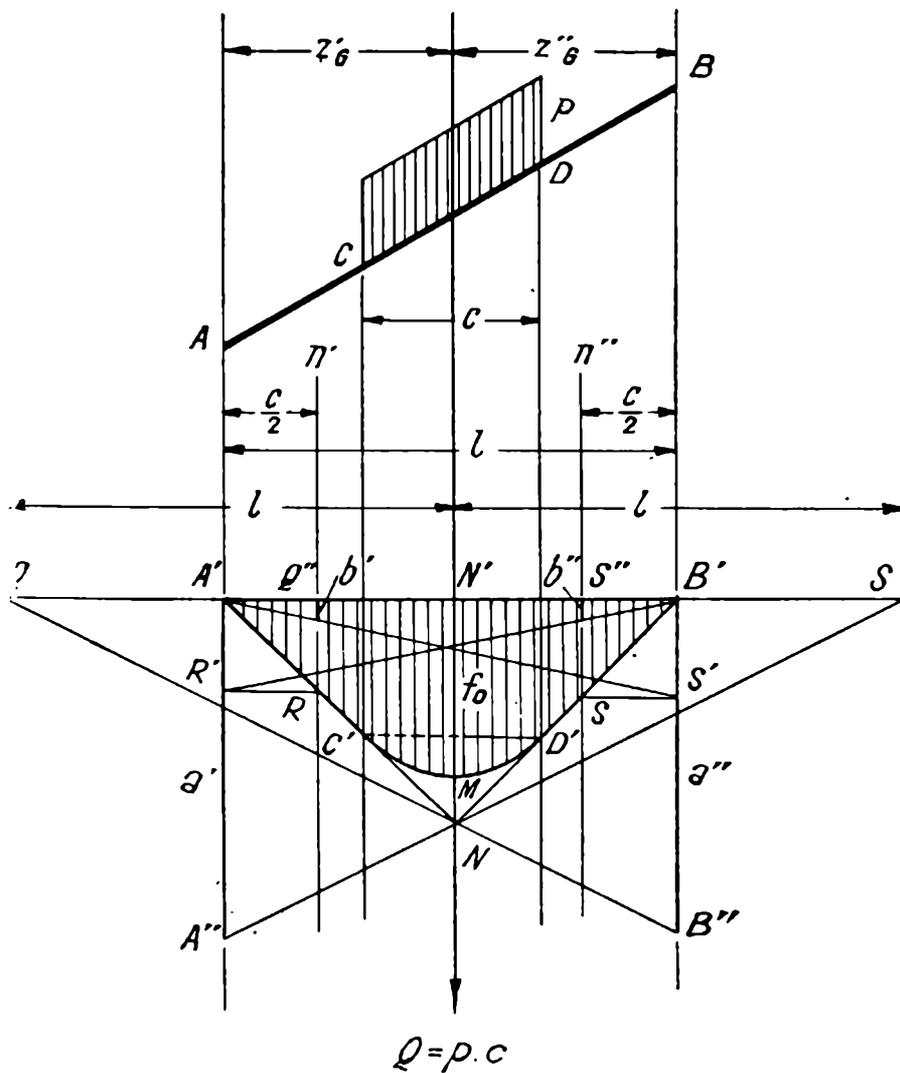


FIG. 83.

En efecto, según la [1] de (86) se tiene

$$T^{(a)} = \frac{f_0}{l} (l + z'_g) - \frac{f_0 c^2}{4 z''_g l}$$

El primer término representa, de acuerdo con la [1] de (84) el momento de Ritter  $a'$  de la fuerza concentrada  $Q = p c$ . Sólo resta demostrar que

[a] 
$$b' = \frac{f_0 c^2}{4 z''_g l};$$

de la figura resulta

$$b' = \frac{\overline{B'S'}}{\overline{B'A'}} \overline{A'Q''} = \frac{\overline{B'S'}}{l} \frac{c}{2},$$

con

$$\overline{B'S'} = \overline{S''S} = \frac{\overline{N'N}}{\overline{N'B'}} \overline{B'S''} = \frac{f_0}{z''_G} \frac{c}{2};$$

sustituyendo en la anterior se obtiene la [a], como corresponde.

**98. Par aplicado en una chapa ligada a un elemento de la pieza** (fig. 84).—El par  $M$  origina en la viga simplemente apoyada el diagrama de momentos flectores  $A'C'C''B'$  constituido por dos rectas paralelas distantes verticalmente de un segmento igual a  $M$ . Se tiene, según (78), tomando los segmentos con signo positivo cuando están hacia abajo del eje y negativo en caso contrario, que

$$\overline{DC'} = f' = -\frac{M}{l} z',$$

$$\overline{DC''} = f'' = \frac{M}{l} z''$$

Los momentos de Ritter se determinan con la construcción siguiente: Se lleva hacia arriba, sobre la vertical de  $N$ , el segmento  $C'E' = f'$  y horizontalmente, a partir de la misma vertical, el  $DS = l$ ; desde  $S$  se proyecta el punto  $C''$  sobre la vertical de  $A$ , en  $A''$  y el  $E'$  sobre la vertical de  $B$ , en  $B''$ .

Siendo

$$a' = \overline{A'A''},$$

$$b' = \overline{B'B''},$$

con signo positivo cuando el segmento está abajo del eje y negativo en caso contrario ( $a' > 0$ ,  $b' < 0$ ), se tiene

$$[a] \quad T^{(a)} = a' + b'$$

Análogamente, llevando hacia abajo, a partir de  $C''$ , el segmento  $\overline{C''E''} = f''$  y a partir de la vertical  $N$ , el  $\overline{DR} = l$ ; proyectando desde  $R$  el punto  $C'$  sobre la vertical de  $B$ , en  $B'''$  y el  $E''$  sobre la vertical de  $A$ , en  $A'''$  y siendo

$$a'' = \overline{B'B'''},$$

$$b'' = \overline{A'A'''},$$

con segmentos leídos con la misma convención de signos ( $a'' < 0$ ,  $b'' > 0$ ), resulta

$$T^{(d)} = a'' + b''$$

En efecto, según la [1] de (86) se tiene

$$[b] \quad T^{(d)} = \frac{f''}{l} (l + z') + \frac{2f'}{l} z'$$

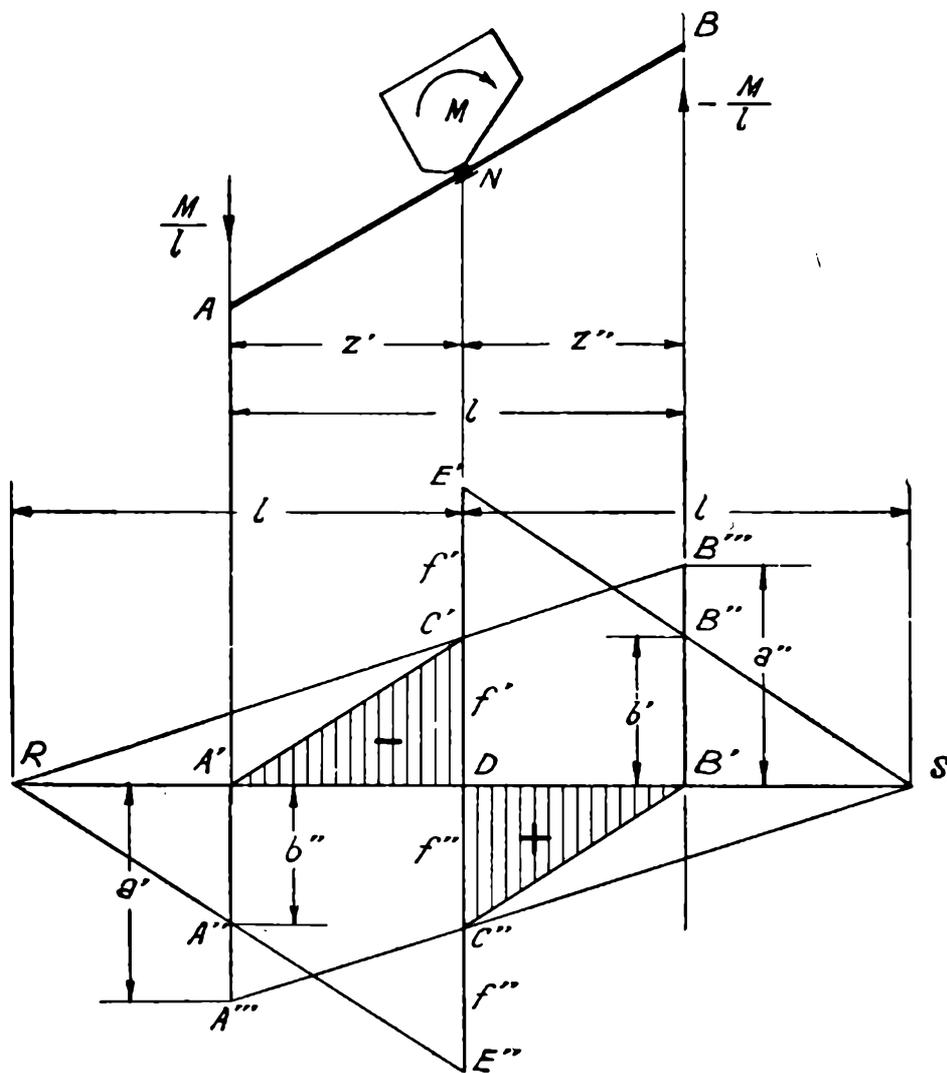


FIG. 84.

y de la figura 84 resulta

$$a' = \overline{A'A'''} = \frac{\overline{DC'''}}{\overline{DS}} \overline{SA'} = \frac{f''}{l} (l + z')$$

y, además, tomando en cuenta el signo,

$$b' = \overline{B'B''} = \frac{\overline{DE'}}{\overline{DS}} \overline{B'S} = \frac{2f'}{l} (l - z'') = \frac{2f'}{l} z'$$

Sustituyendo en la [a] resulta la [b], como corresponde. En igual forma se demuestra para  $T^{(d)}$ .

## **CAPITULO III**

**EMPOTRAMIENTOS ELASTICOS**

**y**

**CONSTANTES ELASTICAS**





## CAPITULO III

### EMPOTRAMIENTOS ELASTICOS Y CONSTANTES ELASTICAS

#### § 1. — Empotramientos elásticos y focos.

99. **Empotramientos elásticos.** — Se dice que la pieza  $AB$  tiene un *empotramiento elástico* en  $A$  cuando está vinculada en este extremo en la siguiente forma: a) el punto  $A$  es fijo, y b) la sección extrema  $A$

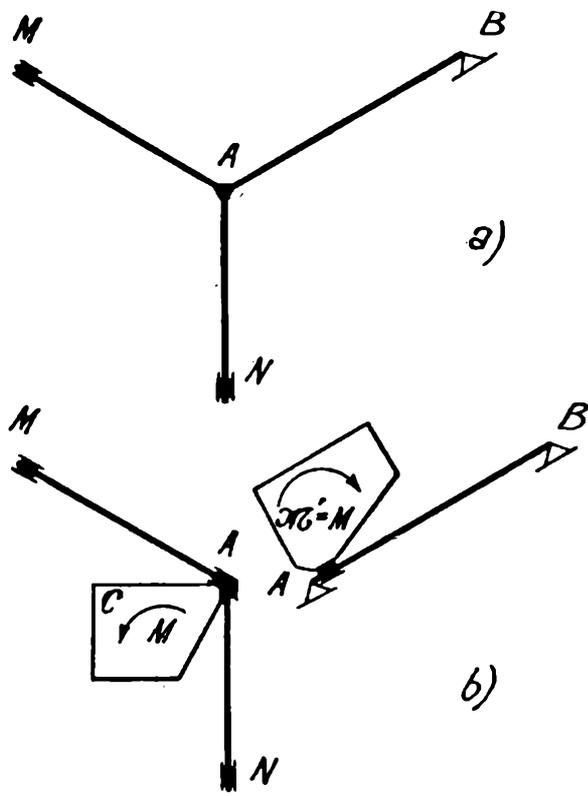


FIG. 85.

puede experimentar rotaciones  $\varphi'$  (de la derecha respecto de la izquierda) proporcionales al momento flector  $\mathcal{M}'$  en la misma, y dadas por la expresión

$$\varphi' = - \mathcal{M}' \bar{\varphi}',$$

siendo  $\bar{\varphi}'$  un coeficiente constante, que se llama *rotación específica del empotramiento*.

La pieza  $AB$  (fig. 85) está elásticamente empotrada en  $A$ . Por de pronto el punto  $A$  es fijo, si se desprecia, como generalmente puede hacerse, las deformaciones axiales de las piezas  $MA$  y  $NA$ . Además, si se aplica en una chapa  $C$  (fig. 85  $b$ ) ligada a la unión  $A$ , un par  $M = 1$ , esta chapa experimentará una rotación  $\bar{\varphi}'$  y para un par cualquiera  $M$ , una rotación  $\varphi' = M \bar{\varphi}'$ . Esta última rotación  $\varphi'$  es igual a la que origina un momento flector  $\mathcal{M}' = -M$  en el extremo  $A$  de la pieza  $AB$ , supuesto articulado (puesto que cuando en la chapa actúa un par  $M$ , en el extremo de la pieza  $AB$  actúa un par o momento flector opuesto, es decir, igual a  $-M$ ).

Siendo, pues,  $A$  un punto fijo y experimentando la sección extrema rotaciones

$$\varphi' = -\mathcal{M}' \bar{\varphi}',$$

la pieza  $AB$  está, efectivamente, elásticamente empotrada en dicho extremo  $A$ .

100. — La rotación específica  $\bar{\varphi}'$  es la rotación que experimenta el extremo  $A$  bajo la acción de un momento flector  $\mathcal{M}' = -1$ .

Su inversa

$$\overline{\mathcal{M}'} = \frac{1}{\bar{\varphi}'}$$

se llama *grado de empotramiento*. Es igual al momento flector que hay que aplicar en el extremo de la pieza para producir una rotación  $\varphi' = -1$ .

Si la pieza  $AB$  está rígidamente empotrada en  $A$ , se tendrá  $\varphi' = 0$  para cualquier  $\mathcal{M}'$ , es decir,

$$\bar{\varphi}' = 0 \quad \left( \overline{\mathcal{M}'} = \frac{1}{\bar{\varphi}'} = \infty \right);$$

si está articulada en  $A$ , el momento que se requiere para producir una rotación  $\varphi' = -1$  es nulo, es decir, se tiene que

$$\overline{\mathcal{M}'} = 0, \quad \left( \bar{\varphi}' = \frac{1}{\overline{\mathcal{M}'}} = \infty \right).$$

Resulta, pues, que el *empotramiento rígido* y la *articulación* son los casos particulares de empotramientos elásticos, que corresponden, respectivamente, a los grados de empotramiento infinito y nulo.

101.— Podemos representar esquemáticamente un empotramiento elástico (fig. 86 a), ligando al extremo izquierdo de la pieza una chapa rígida  $S_A$  con una articulación fija en  $A$  y un apoyo móvil cualquiera, a los efectos de que permanezca fija, e intercalando en la sección inmediata, a la derecha de  $A$ , una unión elástica de coeficiente de rotación específica o masa elástica  $\varphi'$ .

Si la chapa  $S_A$  permanece fija (como corresponde en realidad al empotramiento elástico), en una elástica cualquiera de la pieza, de eje  $A'B'$ , (fig. 86 b) la elástica de la chapa (recta representativa de sus despla-

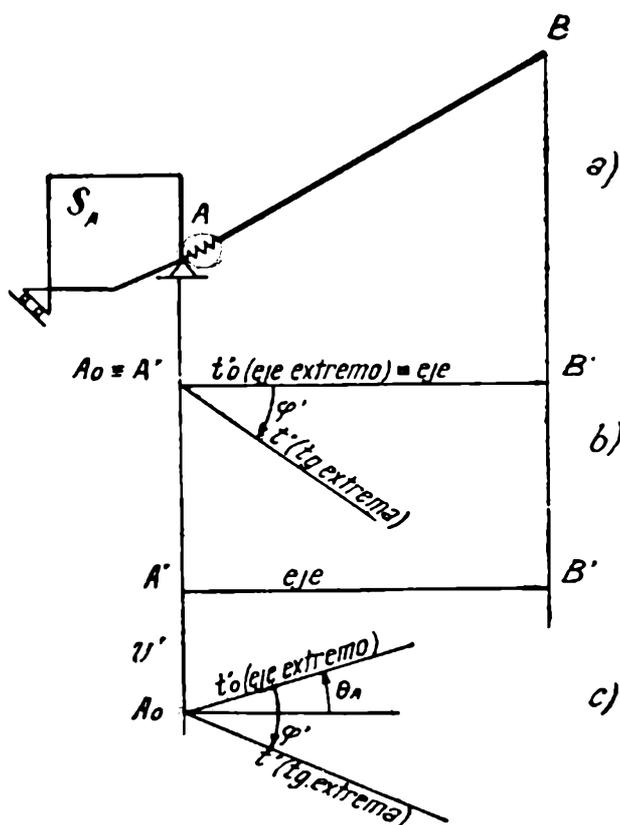


FIG. 86.

mientos verticales), coincidirá con este último. La primera tangente será una recta  $t'$  que formará con el eje  $A'B'$  la rotación  $\varphi'$ .

Supongamos, ahora, que, por cualquier circunstancia, la chapa  $S_A$  experimenta un desplazamiento y que, en virtud del mismo, el punto  $A$  sufre un descenso  $v'$  (fig. 86 c) y la chapa una rotación  $\theta_A$ . Tomemos la recta  $A'B'$  como eje de la elástica y llevemos en  $A'A_0$  el desplazamiento  $v'$ . La elástica de la chapa será una recta  $t'_0$  que forma con el eje  $A'B'$  una rotación igual a  $\theta_A$ . La primera tangente, a su vez, será una recta  $t'$  que forma con  $t'_0$  una rotación igual a  $\varphi'$ .

Llamaremos *eje de la elástica* a la recta  $A'B'$ , *eje extremo-izquierdo* a la recta  $t'_0$  (elástica de la chapa) y *tangente extrema-izquierda* a la primera tangente  $t'$  de la elástica. Repetimos que cuando la chapa  $S_A$  no se desplaza, el eje extremo-izquierdo y el eje de la elástica coinciden.

102. Focos.—Sea la pieza  $AB$  (fig. 87 a) elásticamente empotrada en  $A$ , con rotación específica  $\bar{\varphi}'$ . Supongámosla sometida al diagrama lineal de momentos flectores representado en la figura y construyamos, respecto del eje  $A_0B'$ , un polígono de las tercias  $A_0MNB_0$ . A las dos rotaciones tercias  $\theta' = -\mathcal{M}' \rho'$  y  $\theta'' = -\mathcal{M}'' \rho''$ , habrá que agregar la rotación  $\varphi' = -\mathcal{M}' \bar{\varphi}'$ , originada por el empotramiento elástico.

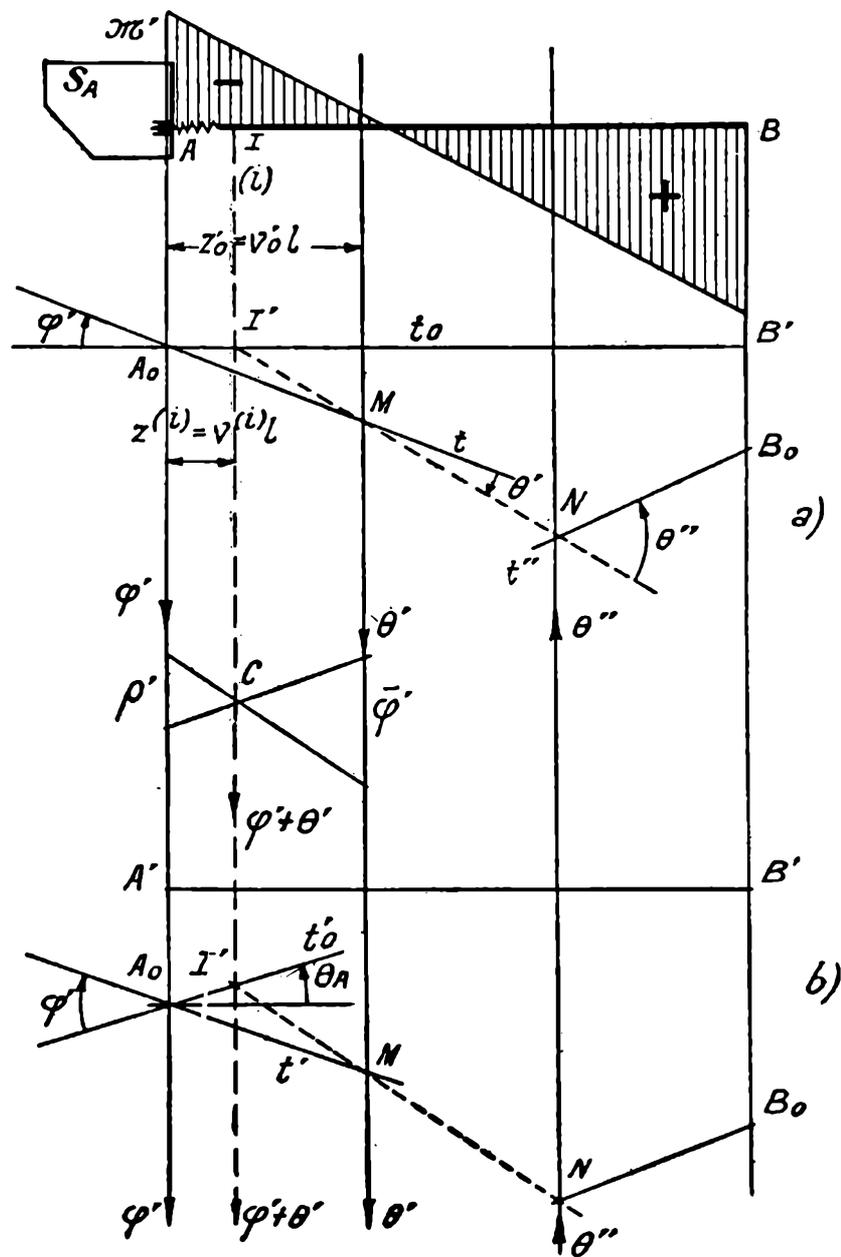


FIG 87.

Cualquiera que sea el momento  $\mathcal{M}'$  en  $A$ , las rotaciones  $\varphi'$  y  $\theta'$  son proporcionales, respectivamente, a  $\bar{\varphi}'$  y  $\rho'$ ; su resultante  $\bar{\varphi}' + \rho'$  tendrá, pues, una recta de acción independiente de  $\mathcal{M}'$ . Esta recta de acción (i) de posición fija, se llama *vertical focal izquierda*; su punto  $I$  de intersección con la pieza  $AB$ , se llama *foco izquierdo*.

Si la chapa  $S_A$  se desplaza, la elástica toma la forma de la figura 87 b. El eje extremo izquierdo  $t'_0$  y el lado intermedio  $MN$  se cortan en el punto  $I'$  de la vertical focal, que se llama *foco izquierdo de la elástica*.

En todos los casos se tiene que:

*El foco izquierdo de la elástica es el punto de intersección del eje extremo con la vertical focal, y el lado intermedio del polígono de las tercias (o el lado siguiente a la rotación tercia izquierda, cuando existen otras rotaciones además de las tercias), pasa por este foco de la elástica.*

Huelga decir que si la pieza está empotrada elásticamente en el extremo derecho, se definen en igual forma el foco derecho  $D$  y la vertical focal derecha ( $d$ ). En este caso, el foco derecho  $D'$  de la elástica, es el punto de intersección de ( $d$ ) con el eje extremo derecho  $t''_0$ . Además, el lado intermedio del polígono de las tercias (o el anterior a la tercia derecha), pasa por el foco derecho  $D'$  de la elástica.

**103. Determinación de la vertical focal.** — La vertical focal izquierda ( $i$ ) se determina gráficamente componiendo las elaciones verticales  $\bar{\varphi}'$  y  $\rho'$ , aplicadas respectivamente en  $A$  y en la tercia izquierda. Como indica la figura 87 a, se lleva sobre la vertical de  $A$  un segmento igual a  $\rho'$  y sobre la tercia izquierda uno igual a  $\bar{\varphi}'$  y se unen sus extremos en cruz; el punto  $C$  de intersección pertenece a ( $i$ ). En igual forma se procedería para determinar la vertical focal derecha.

Analíticamente, llamando  $z^{(i)} = v^{(i)} l$  la distancia entre la vertical focal y el extremo izquierdo, se tiene, tomando momentos respecto del mismo, que

$$\rho' v'_0 l = (\rho' + \bar{\varphi}') v^{(i)} l$$

$$[1] \quad v^{(i)} = \frac{\rho' v'_0}{\rho' + \bar{\varphi}'}$$

Para la vertical focal derecha, llamando  $z^{(d)} = v^{(d)} l$  su distancia al extremo derecho, se obtendría análogamente,

$$[2] \quad v^{(d)} = \frac{\rho'' v''_0}{\rho'' + \bar{\varphi}''}$$

104. — Si la viga está rígidamente empotrada en  $A$  ( $\bar{\varphi}' = 0$ ), la [1] da (fig. 88 *a*)  $v^{(2)} = v'_0$ ; el foco izquierdo es el punto de aplicación de la tercia izquierda.

La [1] del número anterior puede escribirse, siendo  $\bar{\mathcal{M}}' = \frac{1}{\bar{\varphi}'}$ , en la forma

$$v^{(2)} = \frac{\rho' v'_0}{\rho' + \frac{1}{\bar{\mathcal{M}}'}} = \frac{\bar{\mathcal{M}}' \rho' v'_0}{\bar{\mathcal{M}}' \rho' + 1}.$$

Si la pieza está articulada en  $A$  (fig. 88 *b*), es decir, si se tiene  $\bar{\mathcal{M}}' = 0$ , la anterior da  $v^{(2)} = 0$ ; el foco izquierdo coincide, por consiguiente, con el extremo  $A$ .

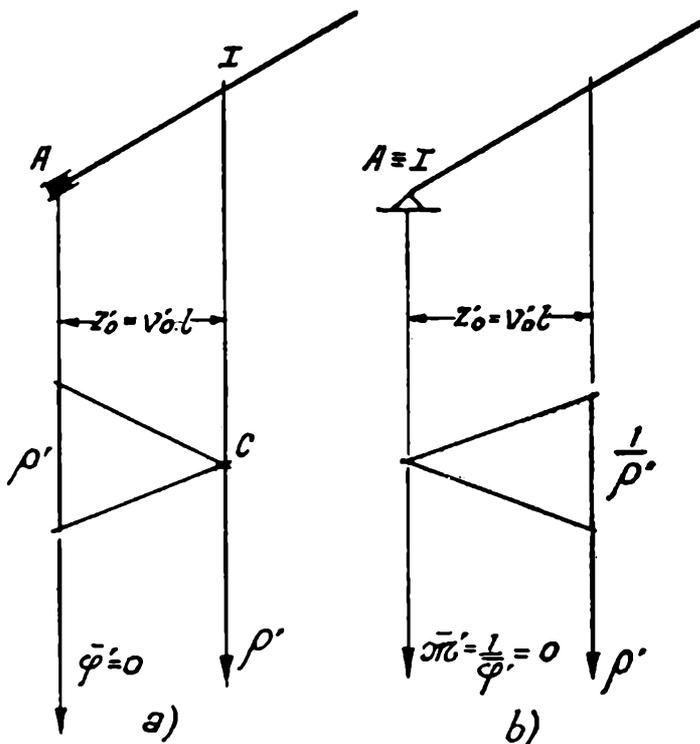


FIG. 88.

En resumen, pues, se tiene que:

*Para las piezas rígidamente empotradas en el extremo izquierdo  $A$  (derecho  $B$ ) el foco izquierdo (derecho) es el punto de aplicación de la tercia izquierda (derecha); para las articuladas en el extremo izquierdo  $A$  (derecho  $B$ ) es este mismo extremo, y para las elásticamente empotradas es un punto intermedio entre el extremo  $A$  ( $B$ ) y el de aplicación de la tercia izquierda (derecha), tanto más próximo a este último, cuanto mayor sea el grado de empotramiento.*

§ 2. — Constantes elásticas.

105. **Fuerzas transversales y pares extremos.** — Sea la pieza elásticamente empotrada  $AB$  (fig. 89). Suprimamos los vínculos de los extremos y en las chapas  $S_A$  y  $S_B$  hagamos actuar las fuerzas exteriores requeridas para mantener la pieza en equilibrio, descomponiéndolas según las direcciones de las respectivas características. Obtendremos así en el extremo izquierdo (derecho) un par  $M'$  ( $M''$ ), una fuerza perpendicular a la pieza  $Q'$  ( $Q''$ ) y una paralela  $N'$  ( $N''$ ).

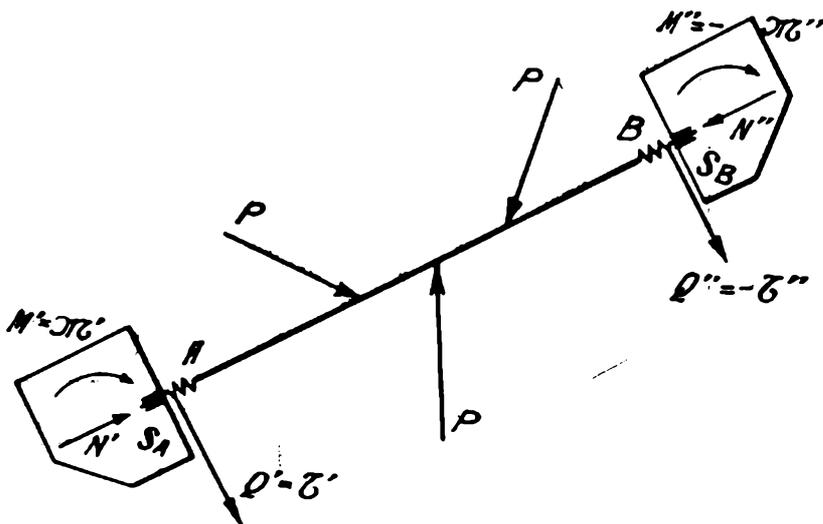


FIG. 89.

Por razones de comodidad en el manejo de los signos, en muchas aplicaciones, como veremos, conviene calcular estas componentes de las fuerzas extremas en lugar de las características respectivas. Llamaremos *pares extremos* a las  $M'$  y  $M''$  y *fuerzas transversales extremas* a las  $Q'$  y  $Q''$ .

Los pasajes de las fuerzas y pares extremos a las características extremas y los recíprocos son inmediatos; se tiene, en efecto,

$$[1] \quad \begin{cases} M' = \mathcal{M}' , & Q' = \mathcal{Q}' , \\ M'' = -\mathcal{M}'' , & Q'' = -\mathcal{Q}'' . \end{cases}$$

Es decir:

Los pares y fuerzas transversales izquierdas (inferiores para los pilares) son iguales, respectivamente, a los momentos flectores y esfuerzos tan-

genciales extremos izquierdos; los derechos (superiores) son iguales y de signo contrario.

**106. Rotaciones específicas y otras magnitudes conexas.**—Sea la pieza elásticamente empotrada en  $B$  y articulada en  $A$  (fig. 90 a). Apliquemos en  $A$  un par extremo  $M' = 1$  y supongamos determinados, como indica la figura, el diagrama de momentos flectores y la elástica correspondientes.

Se llama *rotación específica izquierda* a la rotación  $\beta'$  de la primera tangente, bajo la acción de dicho par  $M' = 1$ . A su vez, se llama *coeficiente de influencia angular*, sobre el par extremo  $M''$  en  $B$  del par  $M'$  en  $A$ , al par  $\alpha_{BA}$  originado en  $B$  por el  $M' = 1$ . Debe observarse que, siendo negativo el momento flector  $M''$  en  $B$ , este par  $\alpha_{BA} > 0$ .

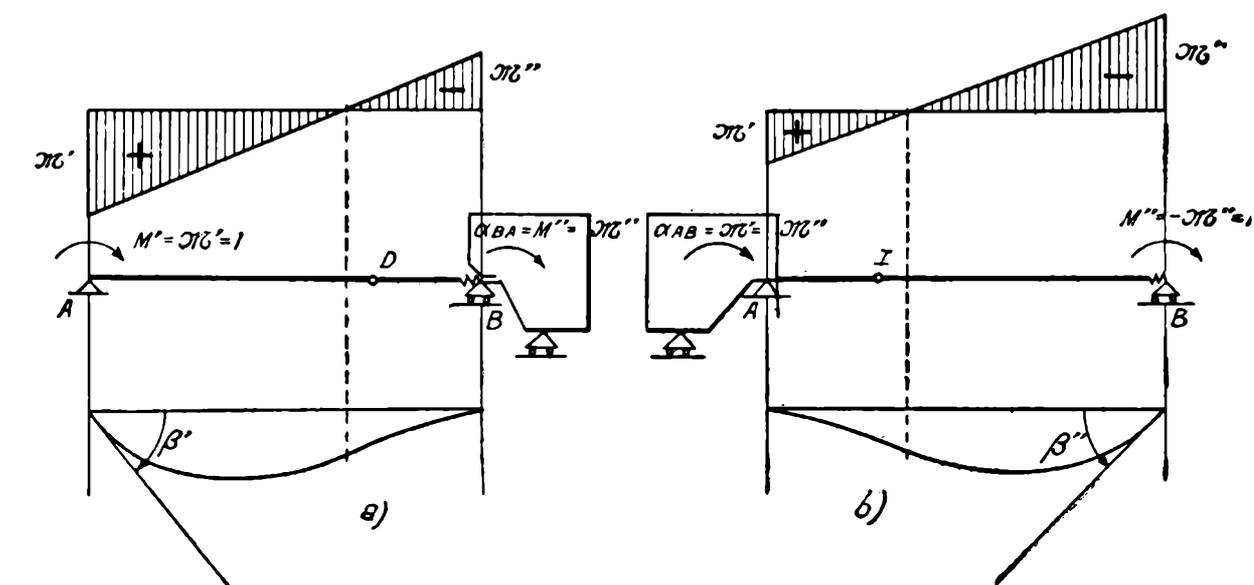


FIG. 90.

*coeficiente de influencia angular*, sobre el par extremo  $M''$  en  $B$  del par  $M'$  en  $A$ , al par  $\alpha_{BA}$  originado en  $B$  por el  $M' = 1$ . Debe observarse que, siendo negativo el momento flector  $M''$  en  $B$ , este par  $\alpha_{BA} > 0$ .

En igual forma se define la *rotación específica derecha*  $\beta''$  (fig. 90 b) y el *coeficiente de influencia*  $\alpha_{AB}$  del par derecho sobre el izquierdo.

**107.** — La inversa de la rotación específica izquierda (derecha)

$$[1] \quad \mu' = \frac{1}{\beta'} \quad \left( \mu'' = \frac{1}{\beta''} \right),$$

se llama *rigidez angular izquierda* (derecha). Es el par que hay que aplicar en  $A$  ( $B$ ) (fig. 91) para que la tangente extrema izquierda  $t'$  (derecha  $t''$ ) experimente una rotación  $\varphi' = 1$  ( $\varphi'' = 1$ ).

El par  $\mu_{BA}$  ( $\mu_{AB}$ ) que se origina en  $B$  ( $A$ ) en la deformación que tiene una rotación izquierda  $\varphi' = 1$  (derecha  $\varphi'' = 1$ ), se llama *par inducido*

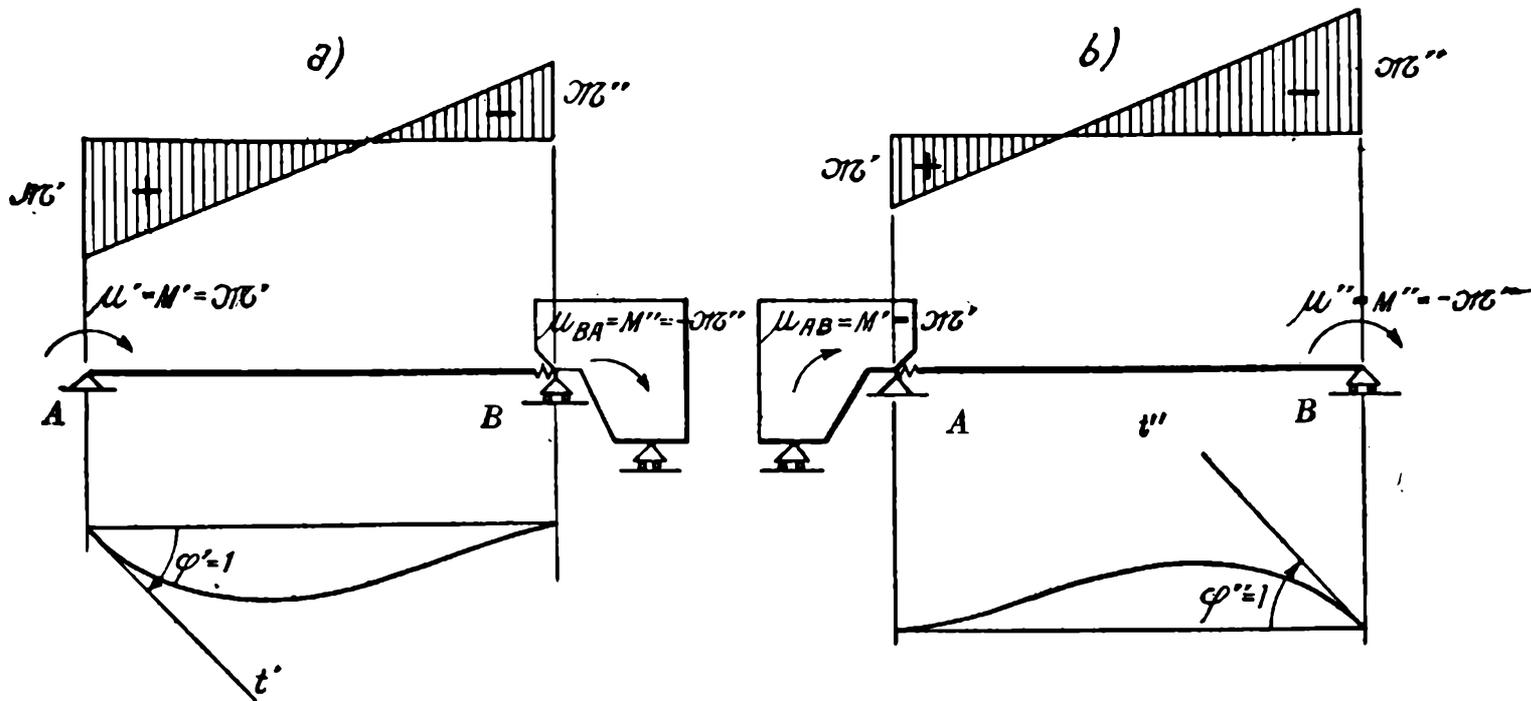


FIG. 91.

en  $B$  ( $A$ ) por la rotación  $\varphi' = 1$  en  $A$  ( $\varphi'' = 1$  en  $B$ ). Se tiene, como es inmediato,

$$[2] \quad \mu_{AB} = \alpha_{AB} \mu' \quad , \quad (\mu_{BA} = \alpha_{BA} \mu'')$$

108. — Calculemos las magnitudes que acabamos de definir, comenzando por la rotación específica  $\beta'$ .

Para ello tracemos el polígono de las tercias originado por el diagrama lineal de momentos flectores que produce el par  $M' = 1$  en  $A$  (fig. 92).

No desplazándose la chapa  $S_B$ , el eje extremo derecho  $t''_0$  coincide con el eje de la elástica  $A_0B_0$  y, por consiguiente, el foco derecho de esta última es el punto  $D'$  de intersección de  $A_0B_0$  con la vertical focal derecha ( $d$ ).

Si  $A_0M$  es la tangente extrema izquierda  $t'$ , que forma el ángulo buscado  $\beta'$  con el eje  $A_0B_0$ , el lado intermedio será la recta  $MD'$ . Uniendo con  $B_0$  su punto de intersección  $N$  con la tercia derecha, se tiene la tangente extrema derecha  $t''$ .

De la figura se deduce que

$$\beta' = \frac{\overline{MM'}}{v'_0 s}$$

y, siendo

$$\overline{MM'} = \frac{m}{s(1 - v^{(d)})} (1 - v'_0 - v^{(d)}) s,$$

resulta, sustituyendo, recordando que  $m = \rho' \nu'_0 s$  y simplificando, que

$$\beta' = \rho' \frac{1 - \nu'_0 - \nu^{(d)}}{1 - \nu^{(d)}}.$$

Análogamente, para la rotación específica  $\beta''$  del extremo derecho (en la viga elásticamente empotrada en el izquierdo), se tiene, por razones de simetría,

$$\beta'' = \rho'' \frac{1 - \nu''_0 - \nu^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}}.$$

109. — Para el coeficiente de influencia angular  $\alpha_{BA}$ , de la figura 92 se deduce que

$$\frac{\alpha_{BA}}{\nu^{(d)} s} = \frac{M'}{(1 - \nu^{(d)}) s}$$

$$\alpha_{BA} = \frac{\nu^{(d)}}{1 - \nu^{(d)}}.$$

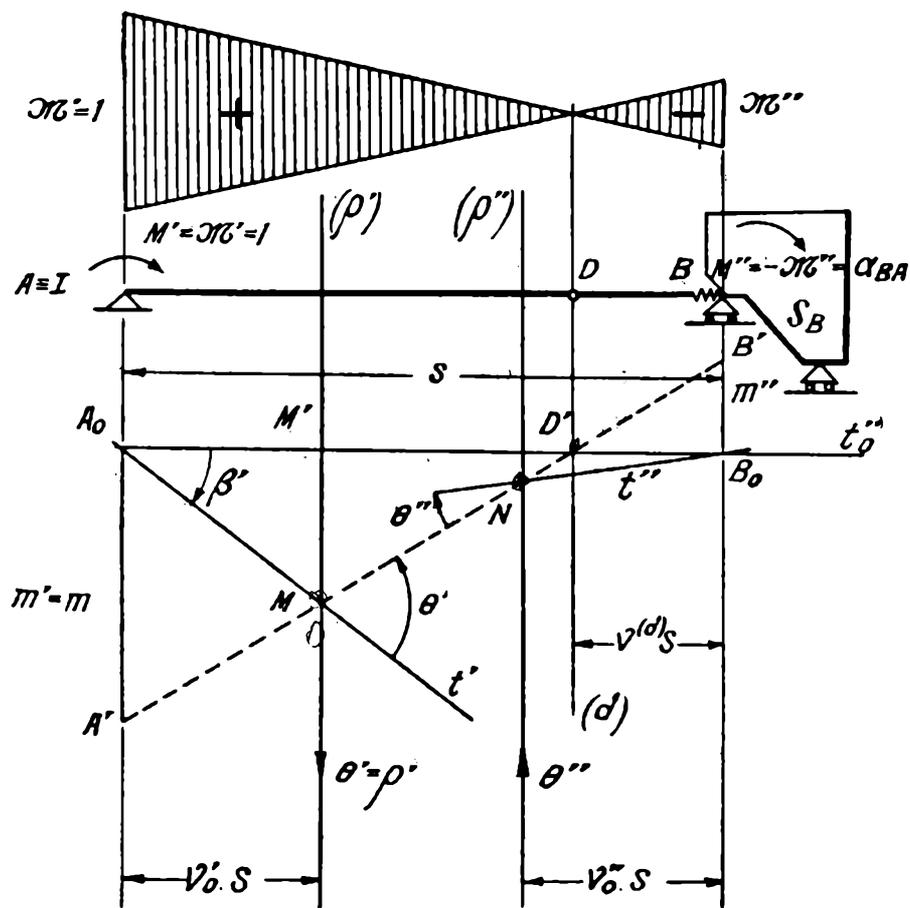


FIG. 92.

y, análogamente, por simetría se obtiene

$$\alpha_{AB} = \frac{\nu^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}}.$$

110.— Resumiendo, se tienen las siguientes expresiones correspondientes a las magnitudes definidas:

Para las *rotaciones específicas*

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta' = k \bar{\beta}' \quad , \quad \beta'' = k \bar{\beta}'' \quad , \\ \bar{\beta}' = \bar{\rho}' \frac{1 - \nu'_0 - \nu^{(d)}}{1 - \nu^{(d)}} \quad , \quad \bar{\beta}'' = \bar{\rho}'' \frac{1 - \nu''_0 - \nu^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}} \\ k = \frac{s}{EJ} \quad ; \end{array} \right.$$

para los *coeficientes de influencia angular*

$$[2] \quad \alpha_{BA} = \frac{\nu^{(d)}}{1 - \nu^{(d)}} \quad , \quad \alpha_{AB} = \frac{\nu^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}} \quad ;$$

para las *rigideces angulares*

$$[3] \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu' = \frac{1}{k} \bar{\mu}' \quad , \quad \mu'' = \frac{1}{k} \bar{\mu}'' \quad , \\ \bar{\mu}' = \frac{1}{\bar{\beta}'} \quad , \quad \bar{\mu}'' = \frac{1}{\bar{\beta}''} \quad , \end{array} \right.$$

y para los *pares inducidos* por las rotaciones extremas,

$$[4] \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_{BA} = \frac{1}{k} \mu_{BA} \quad , \quad \mu_{AB} = \frac{1}{k} \mu_{AB} \quad , \\ \bar{\mu}_{BA} = \alpha_{BA} \bar{\mu}' \quad , \quad \bar{\mu}_{AB} = \alpha_{AB} \bar{\mu}'' \end{array} \right.$$

Designaremos, en conjunto, *constantes angulares*, a las magnitudes así definidas.

111. **Cálculo gráfico de las constantes angulares.** — Las constantes angulares, se obtienen gráficamente, de inmediato, recurriendo al polígono de las tercias.

Como el par  $M = 1$ , que define la rotación específica  $\beta'$  (fig. 92), origina una rotación

$$\theta' = \rho' \quad ,$$

para el momento reducido izquierdo, se tiene

$$m' = m .$$

Se lleva, pues, en la escala

$$\frac{\alpha}{\text{cm}} ,$$

adoptada para la elástica,

$$\overline{A_0 A'} = m ;$$

el lado intermedio es  $A'D'$  y con él se completa el polígono de las tercias  $A_0 M N B_0$ .

La rotación específica  $\beta'$  se mide en el mismo, en la escala de la elástica  $\frac{\alpha}{\text{cm}}$ .

El mismo polígono de las tercias da el momento reducido  $m''$ , igual a  $-\overline{B_0 B'}$  leído en la escala de la elástica. Se tiene, para el coeficiente de influencia  $\alpha_{BA}$ ,

$$\alpha_{BA} = -\frac{m''}{m} ,$$

como es inmediato.

Además,

$$\mu' = \frac{1}{\beta'} , \quad \mu_{BA} = \alpha_{BA} \mu'$$

Si se desea obtener directamente la rigidez angular  $\mu'$  y el momento inducido  $\mu_{BA}$  se procede en la forma siguiente:

Se lleva un ángulo  $\beta' = 1$  (fig. 92) en la escala de la elástica, determinando el punto  $M$ ;  $MD'$  es el lado intermedio, con el que se completa el polígono de las tercias. Del mismo se deducen los momentos reducidos  $m'$  y  $m''$ . Se tiene

$$\mu' = \frac{m'}{m} , \quad \mu_{BA} = -\frac{m''}{m} .$$

**112. Traslaciones específicas y magnitudes conexas.** — Sea la pieza elásticamente empotrada en  $B$  (fig. 93 *a*) y con una articulación  $A_\infty$  en el punto impropio de su dirección, en el extremo  $A$ . Apliquemos en  $A$  una fuerza transversal  $Q' = 1$  y supongamos determinados como indica la figura, el diagrama de momentos flectores y la elástica correspondientes.

Se llama *traslación específica izquierda* a la traslación  $a'$  del extremo  $A$  bajo la acción de dicha fuerza  $Q' = 1$ .

A su vez, se llaman *pares influidos en A y B* a los  $\gamma'$  y  $\gamma_{BA}$ , respectivamente, que  $Q' = 1$  origina en los extremos izquierdo y derecho.

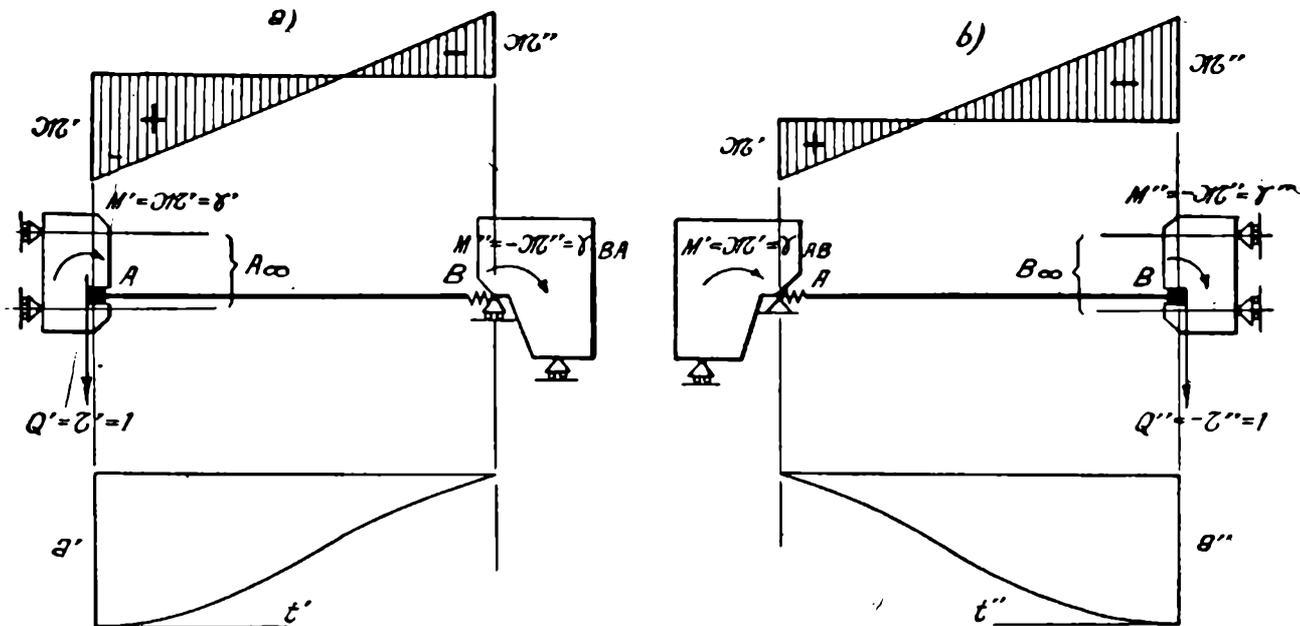


FIG. 93.

Además, se llama *coeficiente de influencia transversal* al par  $\alpha^*_{BA}$  en  $B$  producido por un par  $M' = 1$  en el extremo  $A$  del sistema considerado. Es inmediato que

$$[a] \quad \gamma_{BA} = \alpha^*_{BA} \gamma'$$

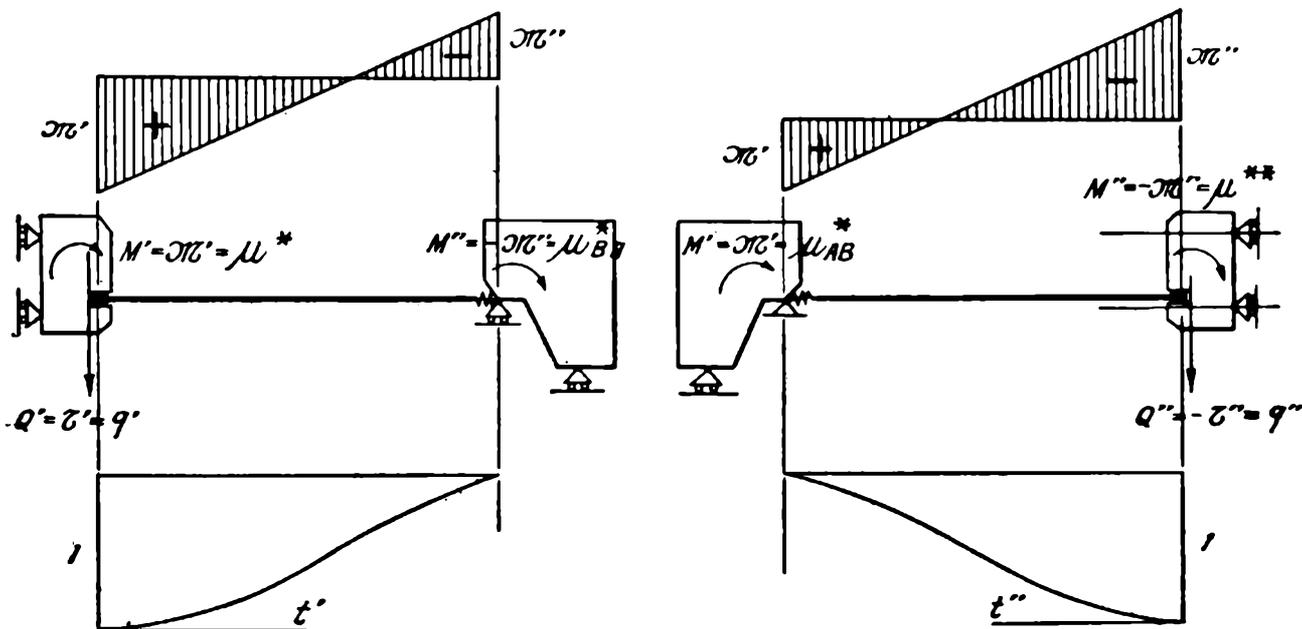


FIG. 94.

En igual forma se definen la traslación específica derecha  $a''$  (fig. 93 b), los pares inducidos  $\gamma''$  y  $\gamma_{AB}$ , por la fuerza transversal derecha  $Q'' = 1$ , y el coeficiente de influencia transversal  $\alpha^*_{AB}$  del par en  $B$  sobre el par en  $A$ .

113. — La inversa de la *traslación específica izquierda* (derecha)

$$q' = \frac{1}{a'} \quad \left( q'' = \frac{1}{a''} \right)$$

se llama *rigidez transversal izquierda* (derecha). Es la fuerza transversal que hay que aplicar en  $A(B)$  (fig. 94) para que dicho extremo experimente una traslación  $a' = 1$  ( $a'' = 1$ ).

Los pares  $\mu^*$  y  $\mu^*_{BA}$  ( $\mu^{**}$ ,  $\mu^{**}_{AB}$ ) que se originan respectivamente en  $A$  y  $B$  ( $B$  y  $A$ ) durante la deformación producida por una traslación  $a' = 1$  del extremo izquierdo ( $a'' = 1$  del derecho), se llaman *pares inducidos* en  $A$  y  $B$  ( $B$  y  $A$ ) por la traslación izquierda (derecha)  $a' = 1$  ( $a'' = 1$ ). Se tiene, como es inmediato,

$$\begin{aligned} \mu^* &= \frac{\gamma'}{a'} & \left( \mu^{**} &= \frac{\gamma''}{a''} \right) \\ \mu^*_{BA} &= \frac{\gamma_{BA}}{a'} & \left( \mu^*_{AB} &= \frac{\gamma_{AB}}{a''} \right) \end{aligned}$$

y, además,

$$\mu^*_{BA} = \alpha^*_{BA} \mu^* \quad (\mu^*_{AB} = \alpha^*_{AB} \mu^{**})$$

114. — Calculemos las magnitudes que acabamos de definir.

Para ello, tracemos el polígono de las tercias originado por el diagrama lineal de momentos flectores que produce la fuerza transversal  $Q' = 1$  en  $A$  (fig. 95). Como la chapa  $S_B$  no se desplaza, el eje extremo derecho  $t''_0$  coincide con el eje de la elástica  $A'B_0$  y, por consiguiente, el foco derecho de esta última es el punto de intersección  $D'$  de  $A'B_0$  con la vertical focal derecha ( $d$ ).

Si  $A_0M$  es la tangente extrema izquierda  $t'$  trasladada de la magnitud  $a'$ , el lado intermedio será la recta  $MD'$ . Uniendo con  $B_0$  su punto de intersección  $N$  con la tercia derecha, se obtiene la tangente extrema derecha  $t''$ .

Se tiene, por de pronto, en general, recordando que, por las convenciones adoptadas, los esfuerzos tangenciales positivos producen momentos negativos en  $B$ , que

$$\mathcal{M}'' = \mathcal{M}' - \mathcal{T}' s,$$

o, siendo en nuestro caso,

$$[a] \quad \mathcal{T}' = Q' = 1, \quad \mathcal{M}' = M' = \gamma', \quad \mathcal{M}'' = -M'' = -\gamma_{BA},$$

$$[b] \quad -\gamma_{BA} = \gamma' - s.$$

Por otra parte,

$$m' = \alpha v'_0 s, \quad -m'' = \alpha v^{(d)} s,$$

siendo  $\alpha$  el ángulo indicado en la figura; de las anteriores se deduce

[c] 
$$\frac{m''}{m'} = -\frac{v^{(d)}}{v'_0}.$$

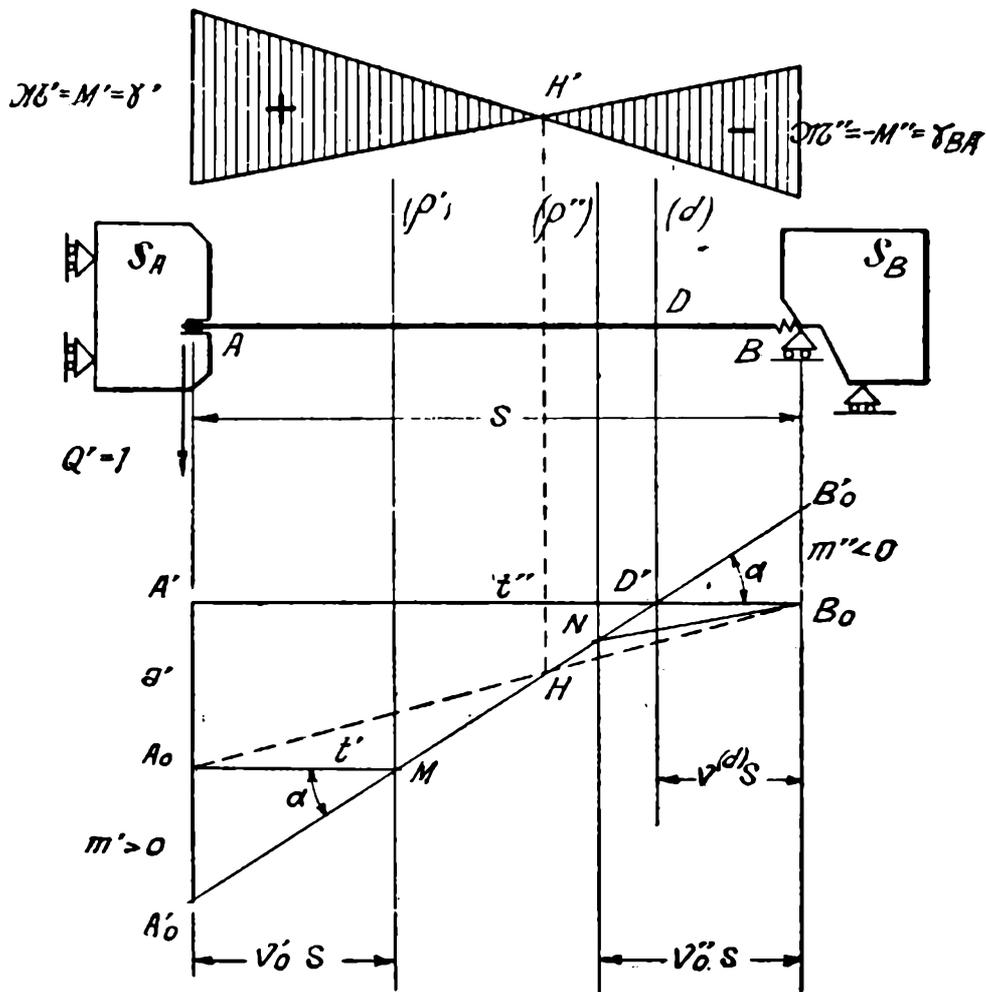


FIG. 95.

Finalmente, de la figura también se deduce que

$$a' = \alpha (1 - v'_0 - v^{(d)}) s$$

y, siendo

$$\alpha = \frac{m'}{v'_0 s},$$

resulta

[d] 
$$a' = m' \frac{1 - v'_0 - v^{(d)}}{v'_0}.$$

En base a las [a], siendo  $m' = \mathcal{M}' m$  y  $m'' = \mathcal{M}'' m$ , y teniendo en cuenta la [a] de (112), las [c] y [d] dan

$$[e] \quad \alpha^*_{BA} = \frac{\gamma_{BA}}{\gamma'} = \frac{\nu^{(d)}}{\nu'_0},$$

$$[f] \quad a' = \gamma' m \frac{1 - \nu'_0 - \nu^{(d)}}{\nu'_0}.$$

Reemplazando en la [b] el valor de  $\gamma_{BA}$  deducido de la [e] y despejando  $\gamma'$ , se tiene

$$[g] \quad \gamma' = \frac{\nu'_0}{\nu'_0 + \nu^{(d)}} s.$$

Por último, reemplazando en la [f] este valor de  $\gamma'$  y simplificando, se obtiene

$$[h] \quad a' = \frac{1 - \nu'_0 - \nu^{(d)}}{\nu'_0 + \nu^{(d)}} m s.$$

115. — Resumiendo y hallando, por simetría, las correspondientes a la fuerza  $Q'' = 1$  en el extremo derecho, se tienen las siguientes expresiones de las magnitudes definidas:

Para las *traslaciones específicas*,

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{ll} a' = k s^2 \bar{a}', & a'' = k s^2 \bar{a}'', \\ \bar{a}' = \bar{\rho}' \nu'_0 \frac{1 - \nu'_0 - \nu^{(d)}}{\nu'_0 + \nu^{(d)}}, & \bar{a}'' = \bar{\rho}'' \nu''_0 \frac{1 - \nu''_0 - \nu^{(d)}}{\nu''_0 + \nu^{(d)}}, \\ & k = \frac{s}{E J}; \end{array} \right.$$

para los *coeficientes de influencia transversales*,

$$[2] \quad \alpha^*_{BA} = \frac{\nu^{(d)}}{\nu'_0}, \quad \alpha^*_{AB} = \frac{\nu^{(d)}}{\nu''_0};$$

para los *pares influídos* por la fuerza transversal  $Q' = 1$  (ó  $Q'' = 1$ ),

$$[3] \quad \left\{ \begin{array}{ll} \gamma' = s \bar{\gamma}', & \gamma'' = s \bar{\gamma}'', \\ \bar{\gamma}' = \frac{\nu'_0}{\nu'_0 + \nu^{(d)}}, & \bar{\gamma}'' = \frac{\nu''_0}{\nu''_0 + \nu^{(d)}}, \\ \gamma_{BA} = s \bar{\gamma}_{BA}, & \gamma_{AB} = s \bar{\gamma}_{AB}, \\ \bar{\gamma}_{BA} = \alpha^*_{BA} \bar{\gamma}', & \bar{\gamma}_{AB} = \alpha^*_{AB} \bar{\gamma}''; \end{array} \right.$$

y para los pares inducidos por el desplazamiento transversal  $a = 1$ ,

$$[4] \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mu^* = \frac{1}{k s} \bar{\mu}^*, & \mu^{**} = \frac{1}{k s} \bar{\mu}^{**}, \\ \bar{\mu}^* = \frac{\bar{\gamma}'}{a'}, & \bar{\mu}^{**} = \frac{\bar{\gamma}''}{a''}, \\ \mu^*_{BA} = \frac{1}{k s} \bar{\mu}^*_{BA}, & \mu^*_{AB} = \frac{1}{k s} \bar{\mu}^*_{AB}, \\ \bar{\mu}^*_{BA} = \alpha^*_{BA} \bar{\mu}^*, & \bar{\mu}^*_{AB} = \alpha^*_{AB} \bar{\mu}^{**} \end{array} \right.$$

Llamaremos en conjunto a las magnitudes anteriores *constantes transversales* de la pieza.

**116. Cálculo gráfico de las constantes transversales.** — Se obtienen de inmediato mediante el polígono de las tercias (fig. 95). Conviene comenzar por la rigidez transversal.

Se lleva en la escala de la elástica

$$\overline{A'A_0} = 1 ;$$

por  $A_0$  se traza la paralela al eje  $A_0M$ , y  $MD'$  da el lado intermedio, con el que se completa el polígono de las tercias. Del mismo se deduce  $m'$  y  $m''$  y se tiene, para los pares inducidos

$$\mu^* = \frac{m'}{m}, \quad \mu^*_{BA} = -\frac{m''}{m},$$

$$\alpha^*_{BA} = \frac{\mu^*_{BA}}{\mu^*}.$$

Para la rigidez  $q'$  se tiene

$$q' = \frac{\mu^* + \mu^*_{BA}}{s}.$$

Para la traslación específica y pares influídos, se tiene

$$a' = \frac{1}{q'},$$

$$\gamma' = \frac{\mu^*}{q'}, \quad \gamma_{BA} = \frac{\mu^*_{BA}}{q'}$$

117. Vigas de momento de inercia constante. — Si la viga es de momento de inercia constante, se tiene

$$v'_0 = v''_0 = \frac{1}{3}, \quad \rho' = \rho'' = \rho = \frac{k}{2},$$

y resulta, para las constantes angulares y transversales,

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{ll} \bar{\beta}' = \frac{2 - 3 v^{(d)}}{6 (1 - v^{(d)})}, & \bar{\beta}'' = \frac{2 - 3 v^{(i)}}{6 (1 - v^{(i)})}, \\ \alpha_{BA} = \frac{v^{(d)}}{1 - v^{(d)}}, & \alpha_{BA} = \frac{v^{(i)}}{1 - v^{(i)}}, \\ \bar{\alpha}' = \frac{2 - 3 v^{(d)}}{6 (1 + 3 v^{(d)})}, & \bar{\alpha}'' = \frac{2 - 3 v^{(i)}}{6 (1 + 3 v^{(i)})}, \\ \alpha^*_{BA} = 3 v^{(d)}, & \alpha^*_{AB} = 3 v^{(i)}, \\ \gamma' = \frac{s}{1 + 3 v^{(d)}}, & \gamma'' = \frac{s}{1 + 3 v^{(i)}}. \end{array} \right.$$

118. Caso en que la viga está empotrada o articulada en el extremo opuesto. — Si la viga está rígidamente empotrada en el extremo

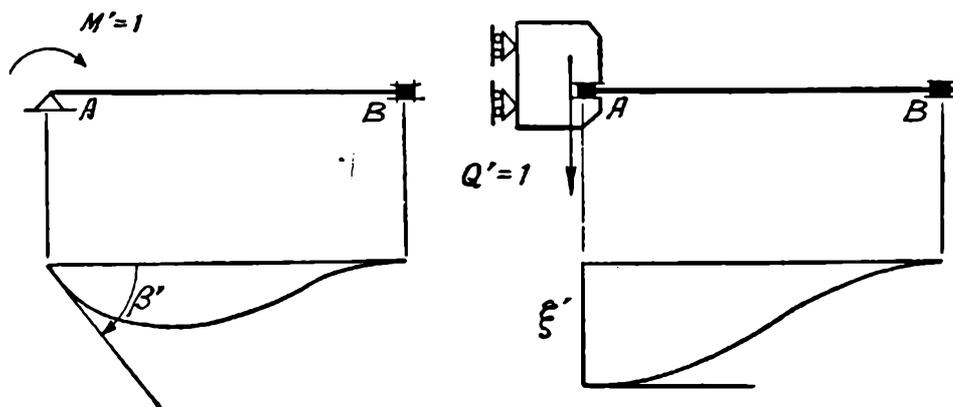


FIG. 96.

opuesto al que se aplica el par  $M = 1$  o la fuerza  $Q = 1$  (fig. 96), se tiene

$$v^{(d)} = v''_0 \quad \text{ó} \quad v^{(i)} = v'_0,$$

según que se trate, respectivamente, del desplazamiento específico del extremo izquierdo o del derecho, y las expresiones de (110), correspondientes a las constantes angulares, toman la forma siguiente:

$$[1] \left\{ \begin{array}{ll} \beta' = k \bar{\beta}', & \text{con } \bar{\beta}' = \bar{\rho}' \frac{1 - \nu'_0 - \nu''_0}{1 - \nu''_0}, \\ \beta'' = k \bar{\beta}'', & \text{con } \bar{\beta}'' = \bar{\rho}'' \frac{1 - \nu'_0 - \nu''_0}{1 - \nu'_0}, \\ \alpha_{BA} = \frac{\nu''_0}{1 - \nu''_0}, & \alpha_{AB} = \frac{\nu'_0}{1 - \nu'_0}, \\ \mu' = \frac{1}{k} \bar{\mu}', & \text{con } \bar{\mu}' = \frac{1}{\bar{\beta}'}, \\ \mu'' = \frac{1}{k} \bar{\mu}'', & \text{con } \bar{\mu}'' = \frac{1}{\bar{\beta}''}, \\ \mu_{BA} = \frac{1}{k} \bar{\mu}_{BA}, & \text{con } \bar{\mu}_{BA} = \alpha_{BA} \bar{\mu}', \\ \mu_{AB} = \frac{1}{k} \bar{\mu}_{AB}, & \text{con } \bar{\mu}_{AB} = \alpha_{AB} \bar{\mu}'' \end{array} \right. \quad \left( k = \frac{s}{EJ} \right)$$

Análogamente las expresiones de (115) correspondientes a las constantes transversales, toman la forma siguiente:

$$[2] \left\{ \begin{array}{ll} a' = k s^2 \bar{a}', & \text{con } \bar{a}' = \bar{\rho}' \nu'_0 \frac{1 - \nu'_0 - \nu''_0}{\nu'_0 + \nu''_0}, \\ a'' = k s^2 \bar{a}'', & \text{con } \bar{a}'' = \bar{\rho}'' \nu''_0 \frac{1 - \nu'_0 - \nu''_0}{\nu'_0 + \nu''_0}, \\ \alpha^*_{BA} = \frac{\nu''_0}{\nu'_0}, & \alpha^*_{AB} = \frac{\nu'_0}{\nu''_0} = \frac{1}{\alpha^*_{BA}}, \\ \gamma' = s \bar{\gamma}', & \text{con } \bar{\gamma}' = \frac{\nu'_0}{\nu'_0 + \nu''_0}, \\ \gamma'' = s \bar{\gamma}'', & \text{con } \bar{\gamma}'' = \frac{\nu''_0}{\nu'_0 + \nu''_0}, \\ \gamma_{BA} = s \bar{\gamma}_{BA}, & \text{con } \bar{\gamma}_{BA} = \alpha^*_{BA} \bar{\gamma}', \\ \gamma_{AB} = s \bar{\gamma}_{AB}, & \text{con } \bar{\gamma}_{AB} = \alpha^*_{AB} \bar{\gamma}'' \end{array} \right.$$

$$[2] \left\{ \begin{array}{ll} \mu^* = \frac{1}{ks} \bar{\mu}^*, & \text{con } \bar{\mu}^* = \frac{\bar{\gamma}'}{\bar{u}'} , \\ \mu^{**} = \frac{1}{ks} \bar{\mu}^{**}, & \text{con } \bar{\mu}^{**} = \frac{\bar{\gamma}''}{\bar{u}''} , \\ \mu^*_{BA} = \frac{1}{ks} \bar{\mu}^*_{BA}, & \text{con } \bar{\mu}^*_{BA} = \alpha^*_{BA} \bar{\mu}^* , \\ \mu^*_{AB} = \frac{1}{ks} \bar{\mu}^*_{AB}, & \text{con } \bar{\mu}^*_{AB} = \alpha^*_{AB} \bar{\mu}^{**} \end{array} \right.$$

119. — Si la viga está articulada en el extremo opuesto al que se aplica el par  $M = 1$  o la fuerza  $Q = 1$ , se tiene (fig. 97).

$$v^{(d)} = 0 \quad \delta \quad v^{(s)} = 0 ,$$

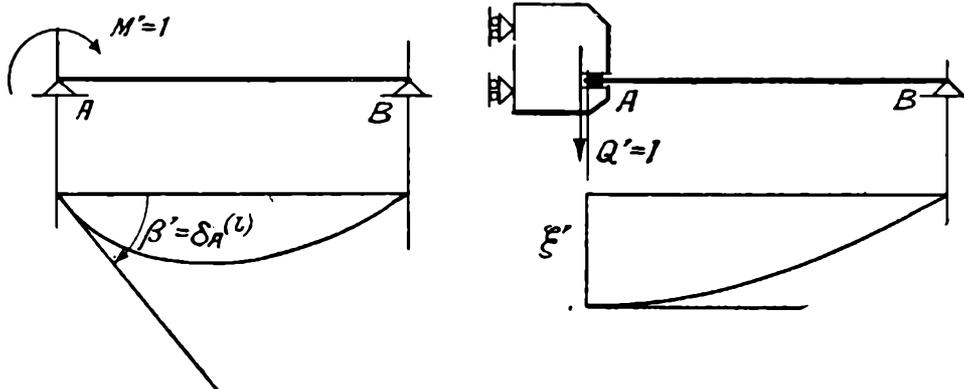


FIG. 97.

según que se trate, respectivamente, del desplazamiento específico del extremo izquierdo o del derecho, y las expresiones de las constantes angulares de (110) toman la forma

$$[1] \left\{ \begin{array}{ll} \beta' = k \bar{\beta}' , & \text{con } \bar{\beta}' = \bar{\rho}' (1 - \nu'_0) , \\ \beta'' = k \bar{\beta}'' , & \text{con } \bar{\beta}'' = \bar{\rho}'' (1 - \nu''_0) , \\ \alpha_{BA} = \alpha_{AB} = 0 , \\ \mu_{BA} = \mu_{AB} = 0 . \end{array} \right.$$

Análogamente, las expresiones de (115) correspondientes a las constantes transversales, toman la forma

$$[2] \left\{ \begin{array}{ll} a' = k s^2 \bar{a}' , & \text{con } \bar{a}' = \bar{\rho}' (1 - \nu'_0) , \\ a'' = k s^2 \bar{a}'' , & \text{con } \bar{a}'' = \bar{\rho}'' (1 - \nu''_0) , \\ \alpha^*_{BA} = \alpha^*_{AB} = 0 , \\ \gamma' = \gamma'' = s , \\ \gamma_{BA} = \gamma_{AB} = 0 , \\ \mu^*_{BA} = \mu^*_{AB} = 0 . \end{array} \right.$$

120.— Si la pieza es de momento de inercia constante y está empotrada en el extremo opuesto, las [1] y [2] de (117), recordando que  $\rho' = \rho'' = \rho = \frac{k}{2}$  y las [2] de (113), dan  $\left( v^{(d)} = v^{(i)} = \frac{1}{3} \right)$

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta' = \beta'' = \beta = \frac{1}{4} k \\ \alpha_{BA} = \alpha_{AB} = \frac{1}{2}, \\ a' = a'' = a = \frac{1}{12} k s^2. \\ \alpha^*_{BA} = \alpha^*_{AB} = 1 \\ \gamma' = \gamma'' = \gamma = \frac{1}{2} s \end{array} \right.$$

121.— Las constantes angulares y transversales, correspondientes a los casos particulares en que el extremo opuesto esté empotrado o articulado, son magnitudes de mucha importancia para el cálculo de sistemas hiperestáticos constituídos por piezas rectilíneas.

Las tablas XII y XIII dan sus valores para las piezas con empates, respectivamente empotradas y articuladas en el extremo opuesto, comprendiendo el caso particular en que  $J = \text{const.}$  ( $n = 1$ ).

122. Traslaciones específicas libres y magnitudes conexas.— Sea la pieza elásticamente empotrada en  $B$  y con un apoyo móvil normal a

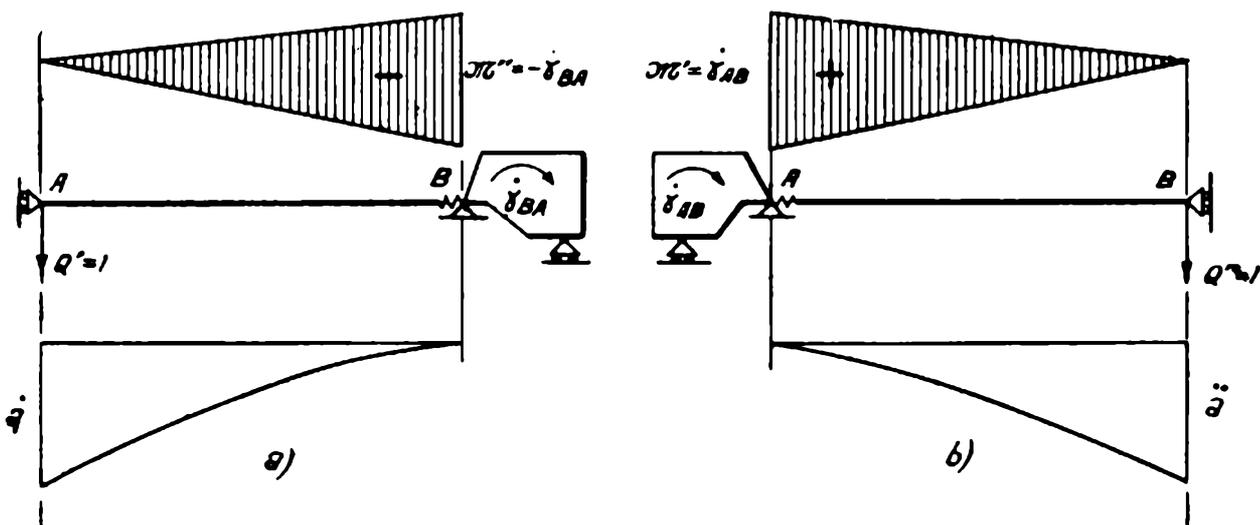


FIG. 98.

su eje en  $A$  (fig. 98 a). Apliquemos en  $A$  una fuerza transversal  $Q' = 1$  y supongamos determinados, como indica la figura, el diagrama de momentos flectores y la elástica correspondientes.

Se llama *traslación específica libre izquierda*, a la traslación  $\dot{a}$  del extremo  $A$  bajo la acción de dicha fuerza  $Q' = 1$ . A su vez se llama *par inducido en  $B$*  al  $\dot{\gamma}_{BA}$ , que dicha fuerza  $Q' = 1$  origina en el extremo  $B$ .

En igual forma se definen la *traslación específica libre derecha*  $\dot{a}$  (fig. 97 b) y el *par inducido en  $A$* ,  $\dot{\gamma}_{AB}$ , por  $Q'' = 1$ .

123. — La inversa de la traslación específica libre izquierda (derecha)

$$\dot{q} = \frac{1}{\dot{a}} \quad \left( \ddot{q} = \frac{1}{\ddot{a}} \right),$$

se llama *rigidez transversal libre izquierda (derecha)*. Es la fuerza transversal  $Q'$  ( $Q''$ ) que hay que aplicar en  $A$  ( $B$ ) (fig. 99) para que dicho extremo experimente una traslación  $\xi = 1$ .

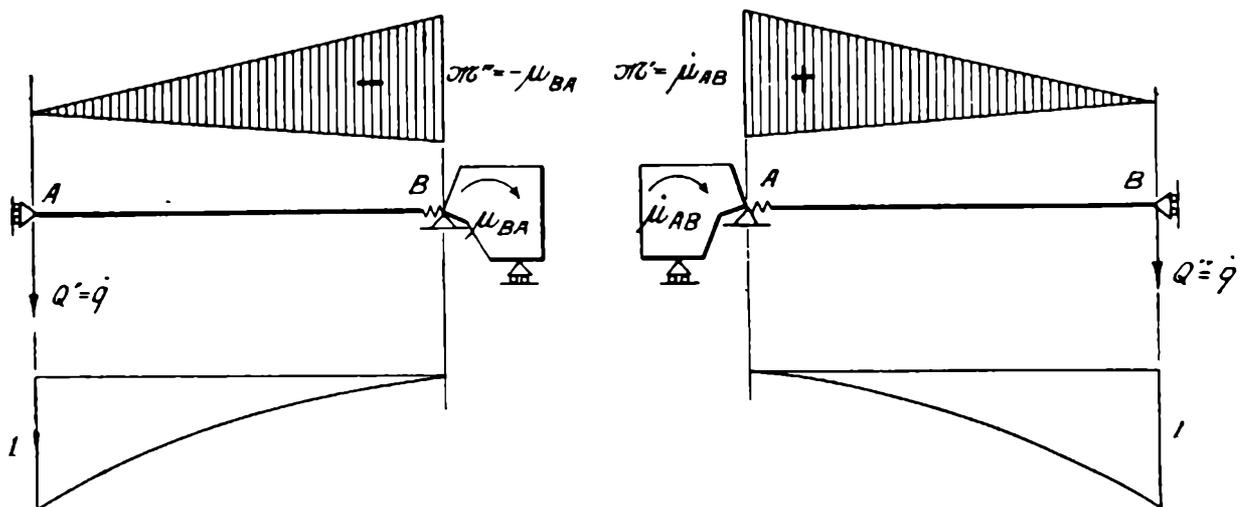


FIG. 99.

El par  $\dot{\mu}_{BA}$  ( $\dot{\mu}_{AB}$ ) que se origina en  $B$  ( $A$ ) durante la deformación que origina la traslación  $\xi = 1$  en el extremo izquierdo (derecho) se llama *par inducido en  $B$  ( $A$ )* por la traslación izquierda (derecha)  $\xi = 1$ . Se tiene, como es inmediato,

$$\dot{\mu}_{BA} = \frac{\dot{\gamma}_{BA}}{\dot{a}}, \quad \left( \dot{\mu}_{AB} = \frac{\dot{\gamma}_{AB}}{\dot{a}} \right).$$

124. — Calculemos las magnitudes que acabamos de definir.

Para ello tracemos el polígono de las tercias originado por el diagrama lineal de momentos flectores que produce la fuerza  $Q' = 1$  en  $A$  (fig. 100). Como la chapa  $S_B$  no se desplaza, el eje extremo derecho  $t''_0$  coincide con el eje  $A_0B'$  de la elástica y, por consiguiente, el foco derecho de esta

última es el punto de intersección  $D'$  de  $A'B_0$  con la vertical focal derecha ( $d$ ). Para la rotación tercia izquierda se tiene  $\theta = 0$ , y el polígono de las tercias se reduce al de la rotación  $\theta''$ . Si  $A'A_0 = \dot{a}$  es el desplazamiento que  $Q' = 1$  origina en  $A$ , el lado intermedio (anterior a la rotación  $\theta''$ )

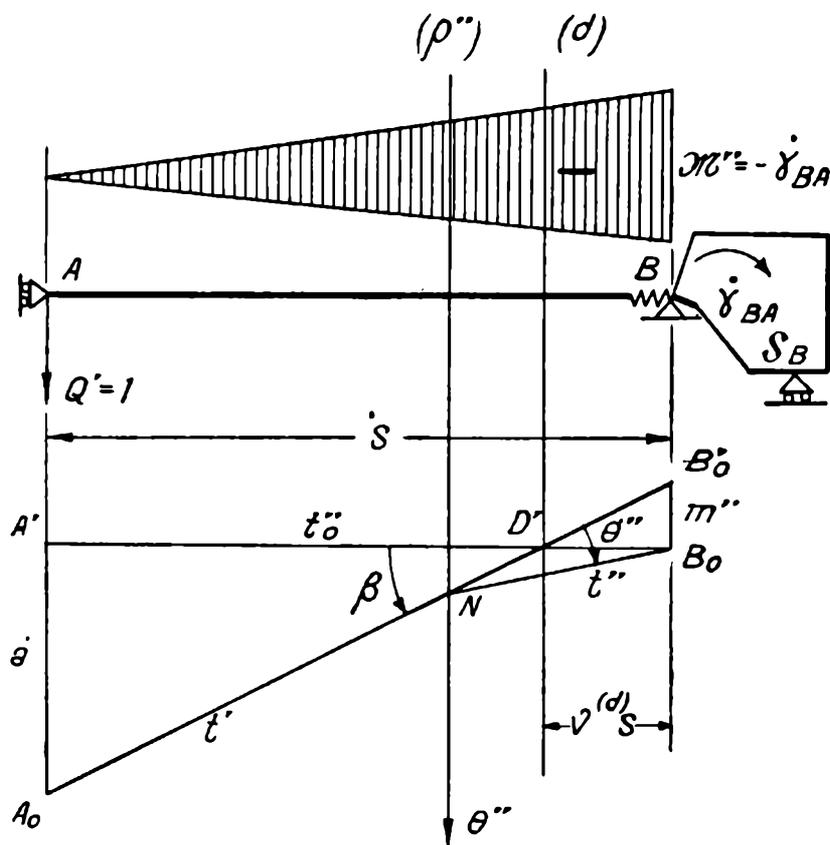


FIG. 100.

es el  $A_0D'$  que pasa por el foco de la elástica. Uniendo con  $B_0$  su intersección  $N$  con  $(\rho'')$ , se obtiene la tangente extrema derecha  $t''$ .

Se tiene, por de pronto, que

$$\mathcal{M}'' = -\dot{\gamma}_{BA} = -Q' s = -s$$

[a]  $\dot{\gamma}_{BA} = s.$

Además, en la figura resulta

$$\beta = \frac{\dot{a}}{(1 - \nu^{(d)}) s}$$

y

$$m'' = -\dot{\gamma}_{BA} m = -\beta \nu^{(d)} s.$$

Remplazando en esta última el valor de  $\beta$  dado por la anterior, recordando la [a] y despejando a  $\dot{a}$ , se obtiene

$$\dot{a} = m s \frac{1 - \nu^{(d)}}{\nu^{(d)}}.$$

125. — Resumiendo y hallando por simetría las correspondientes a la fuerza  $Q'' = 1$  en el extremo derecho, se tiene las siguientes expresiones de las magnitudes arriba definidas:

Para las *traslaciones específicas libres*

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{a} = k s \dot{\bar{a}}, \quad \ddot{a} = k s \ddot{\bar{a}}, \\ \dot{\bar{a}} = \bar{m} \frac{(1 - \nu^{(d)})}{\nu^{(d)}}, \quad \ddot{\bar{a}} = \bar{m} \frac{(1 - \nu^{(i)})}{\nu^{(i)}}, \\ k = \frac{s}{E J}; \end{array} \right.$$

para el *par influido* por la fuerza  $Q = 1$  en el extremo opuesto

$$[2] \quad \dot{\gamma}_{BA} = \gamma_{AB} = s;$$

para las *rigideces transversales libres*,

$$[3] \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{q} = \frac{1}{k s} \dot{\bar{q}}, \quad \ddot{q} = \frac{1}{k s} \ddot{\bar{q}}, \\ \dot{\bar{q}} = \frac{1}{\dot{\bar{a}}} = \frac{\nu^{(d)}}{\bar{m} (1 - \nu^{(d)})}, \quad \ddot{\bar{q}} = \frac{1}{\ddot{\bar{a}}} = \frac{\nu^{(i)}}{\bar{m} (1 - \nu^{(i)})}, \end{array} \right.$$

y para los *pares inducidos* por el desplazamiento  $a = 1$  en el extremo opuesto,

$$[4] \quad \dot{\mu}_{BA} = \frac{\dot{\gamma}_{BA}}{\dot{\bar{a}}} = \frac{1}{k} \dot{\bar{q}}, \quad \dot{\mu}_{AB} = \frac{\dot{\gamma}_{AB}}{\dot{\bar{a}}} = \frac{1}{k} \dot{\bar{q}}.$$

Llamaremos, en conjunto, a las magnitudes anteriores, *constantes transversales libres* de la pieza.

126. **Cálculo gráfico de las constantes transversales libres.** — Se recurre el polígono de las tercias (fig. 100). La fuerza  $Q' = 1$  origina en  $B$  un momento flector

$$\mathcal{M}'' = -s$$

y, por tanto,

$$m'' = -s m.$$

Se lleva este momento reducido en  $B_0B'_0$ , se une  $B'_0$  con  $D'$  y se tiene el lado intermedio y, con él, el polígono de las tercias  $A_0NB_0$ . Del mismo modo se deduce la traslación específica libre  $\dot{\bar{a}}$ , dada por el segmento

$\overline{A'A_0}$  leído en la escala de la elástica. Por otra parte, el par inducido en  $B$  es

$$\dot{\gamma}_{BA} = \wp.$$

La rigidez transversal y el par inducido en  $B$ , son

$$\dot{q} = \frac{1}{\dot{a}}, \quad \dot{\mu}_{BA} = \frac{\dot{\gamma}_{BA}}{\dot{a}}$$

Si se desea obtener directamente estas últimas magnitudes, se procede en la forma siguiente:

Se lleva, en la escala de la elástica,

$$\overline{A_0A'} = 1 ;$$

el lado intermedio  $A_0D'$  determina el segmento  $B_0B'$  que da a  $m''$ . Se tiene

$$\dot{\mu}_{BA} = -\frac{m''}{m}, \quad \dot{q} = \frac{\dot{\mu}_{BA}}{s},$$

como es inmediato.

**127. Aplicaciones.**—Las *constantes elásticas* de las piezas rectas (angulares y transversales), permiten, entre muchos otros, resolver numéricamente el siguiente problema: Con fuerzas aplicadas en el extremo  $A$ , la pieza  $AB$  empotrada en  $B$  experimenta la deformación representada en la figura 101 *a*, tal que al punto  $A$  corresponde el desplazamiento  $\xi_A$  y a la primera tangente la rotación  $\delta'$ . Se pide los diagramas de momentos flectores y de esfuerzos tangenciales correspondientes.

La deformación de la figura 101 *a* se puede obtener como suma de las dos representadas en las figuras 101 *b* y *c*.

A la de la figura 101 *b* corresponden pares extremos

$$M'_1 = \delta' \mu', \quad M''_1 = \delta' \mu_{BA}$$

y a la de la figura 105 *c*.

$$M'_2 = \xi' \mu^*, \quad M''_2 = \xi' \mu^*_{BA}.$$

Se tiene, por consiguiente, para los momentos flectores extremos,

$$\mathcal{M}' = M'_1 + M'_2, \quad \mathcal{M}'' = -(M''_1 + M''_2),$$

o sea,

$$[1] \quad \begin{cases} \mathcal{M}' = \delta' \mu' + \xi' \mu^*, \\ \mathcal{M}'' = -(\delta' \mu_{BA} + \xi' \mu^*_{BA}). \end{cases}$$

Para el esfuerzo tangencial, constante en la pieza, se tiene

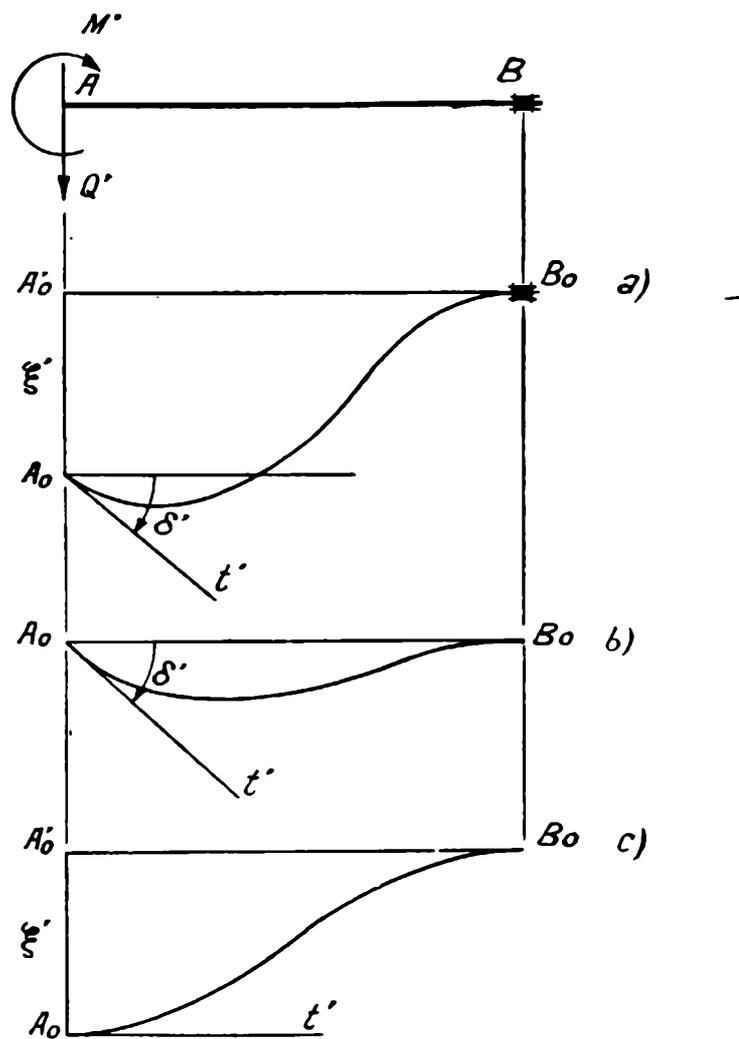


FIG. 101.

$$\mathcal{M}'' = \mathcal{M}' - \mathcal{T}' s$$

[2]

$$\mathcal{T}' = \frac{\mathcal{M}' - \mathcal{M}''}{s}$$

128. Ejemplo. numérico — Sea la pieza disimétrica con empate recto tratada en (60) (fig. 56), que tiene

$$n = 0,10, \quad \lambda = 0,25, \quad l = 4,50 \text{ m},$$

$$s = 6,00 \text{ m}, \quad k = \frac{s}{EJ} = 1140 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1}.$$

Estando empotrada en \$B\$, el punto \$A\$ experimenta una traslación

$$\xi' = 500 \cdot 10^{-6} \text{ m},$$

y una rotación

$$\theta' = 200 \cdot 10^{-6}.$$

La tabla XII o da

$$\begin{aligned}\bar{\mu}' &= 7,75, & \bar{\mu}^* &= 19,5, \\ \bar{\mu}_{BA} &= 3,57, & \bar{\mu}^*_{BA} &= 14,2,\end{aligned}$$

y se tiene, por consiguiente,

$$\mu' = \frac{1}{k} \bar{\mu}' = \frac{7,75}{1140 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1}} = 6800 \text{ tm.},$$

$$\mu^* = \frac{1}{k_s} \bar{\mu}^* = \frac{19,5}{1140 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} \times 6 \text{ m}} = 2850 \text{ t},$$

$$\mu_{BA} = \frac{1}{k} \bar{\mu}_{BA} = \frac{3,57}{1140 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1}} = 3140 \text{ tm.},$$

$$\mu^*_{BA} = \frac{1}{k_s} \bar{\mu}^*_{BA} = \frac{14,2}{1140 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} \times 6 \text{ m}} = 2075 \text{ t}.$$

Resulta, por tanto, de acuerdo con las [1] y [2] del número anterior,

$$\mathcal{M}' = \theta' \mu' + \xi' \mu^* = (200 \times 6800 \text{ tm} + 500 \text{ m} \times 2850 \text{ t}) \cdot 10^{-6} = 2,785 \text{ tm}.$$

$$\mathcal{M}'' = -(\theta' \mu_{BA} + \xi' \mu^*_{BA}) = -(200 \times 3140 \text{ tm} + 500 \text{ m} \times 2075 \text{ t}) \cdot 10^{-6} = 1,665 \text{ tm}$$

$$\mathcal{T}' = \frac{\mathcal{M}' - \mathcal{M}''}{s} = \frac{(2,785 + 1,665) \text{ tm}}{6,00 \text{ m}} = 0,742 \text{ t}.$$



## **CAPITULO IV**

### **VIGAS ELASTICAMENTE EMPOTRADAS**

---

,



## CAPITULO IV

### VIGAS ELASTICAMENTE EMPOTRADAS

---

#### § 1. — Vigas elásticamente empotradas. Polígono de las tercias.

129. Vigas elásticamente empotradas. — Se llaman *vigas elásticamente empotradas* las que están provistas de empotramientos elásticos en ambos extremos (fig. 102 a). Las supondremos siempre libremente dilatables; para ello colocaremos en  $B$  un apoyo móvil paralelo a  $AB$ , en

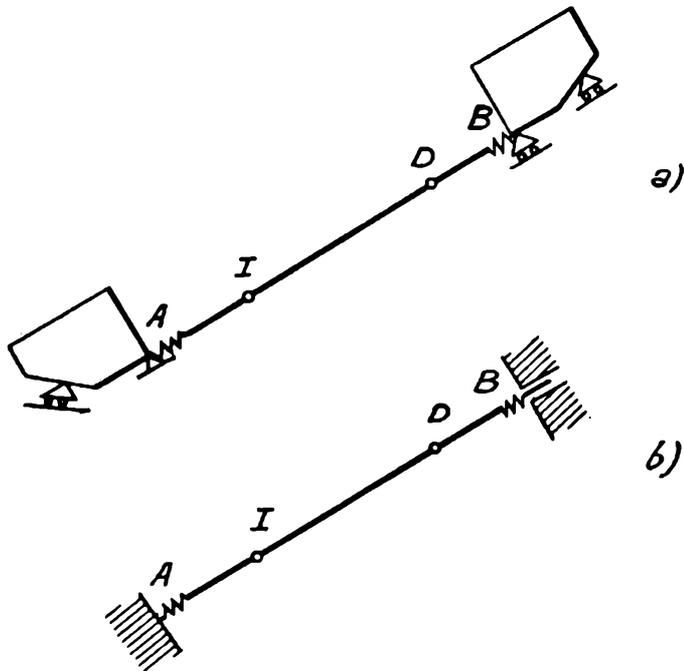


FIG. 102.

lugar de una articulación fija. Desde le punto de vista cinemático o estático, el punto  $B$  permanece fijo, como corresponde a un empotramiento elástico. Por otra parte, si la viga no es libremente dilatante, solo cambian las tensiones originadas por la temperatura y por los esfuerzos normales; ninguna modificación se introduce en lo que respecta

a los momentos flectores y esfuerzos tangenciales originados por las cargas.

Representaremos esquemáticamente las vigas elásticamente empotradas en la forma que lo hace la figura 102 *b*. El esquema del extremo derecho indica que al mismo corresponde el apoyo móvil. Supondremos determinados los focos *I* y *D*, en la forma expuesta en (103); su posición indicará el grado de empotramiento de los extremos adyacentes.

Salvo lo establecido respecto a la libre dilatabilidad, todas las piezas constitutivas de un sistema formado por partes rectilíneas, cuyos nudos no pueden desplazarse, son vigas elásticamente empotradas. Así, por ejemplo, lo son todas las piezas del sistema representado en la figura 103,

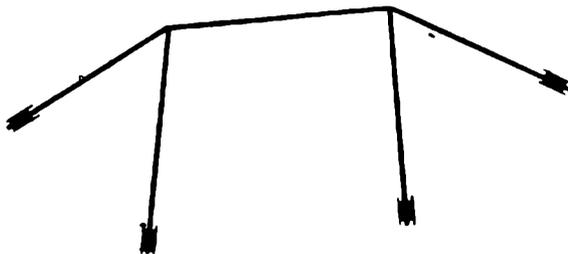


FIG. 103.

cuyos extremos no pueden desplazarse y están elásticamente empotrados de acuerdo con lo expuesto en (99).

Esto explica el interés que puede tener el estudio de este tipo de vigas, que pasamos a efectuar.

**130. Polígono de las tercias.** — Sea la viga elásticamente empotrada *AB* (fig. 104) y supongamos determinados sus focos *I* y *D*. Supongamos, además, que las secciones extremas (chapas *S<sub>A</sub>* y *S<sub>B</sub>*) experimenten desplazamientos consistentes en rotaciones aplicadas en puntos *O<sub>A</sub>* y *O<sub>B</sub>*, de intensidades  $\theta_A$  y  $\theta_B$ ; para precisar ideas supondremos, además, que

$$\theta_A > 0, \quad \theta_B < 0.$$

Estos desplazamientos de las chapas se originan (suprimidos los vínculos que los inmovilizan) por fuerzas aplicadas en ellas. La viga en sí está descargada y el diagrama de momentos flectores es lineal, por consiguiente. Nos proponemos trazar el polígono de las tercias correspondiente.

Sean  $\eta'$  y  $\eta''$  los desplazamientos verticales que  $\theta_A$  y  $\theta_B$  originan, res-

pectivamente, en  $A$  y  $B$ . Tomando como eje de la elástica a la recta  $A'B'$ , representémoslos en  $\overline{A'A_0}$  y  $\overline{B'B_0}$ ; por  $A_0$  y  $B_0$  tracemos las rectas  $t'_0$  y  $t''_0$  que forman con dicho eje los ángulos  $\theta_A$  y  $\theta_B$  y que serán los

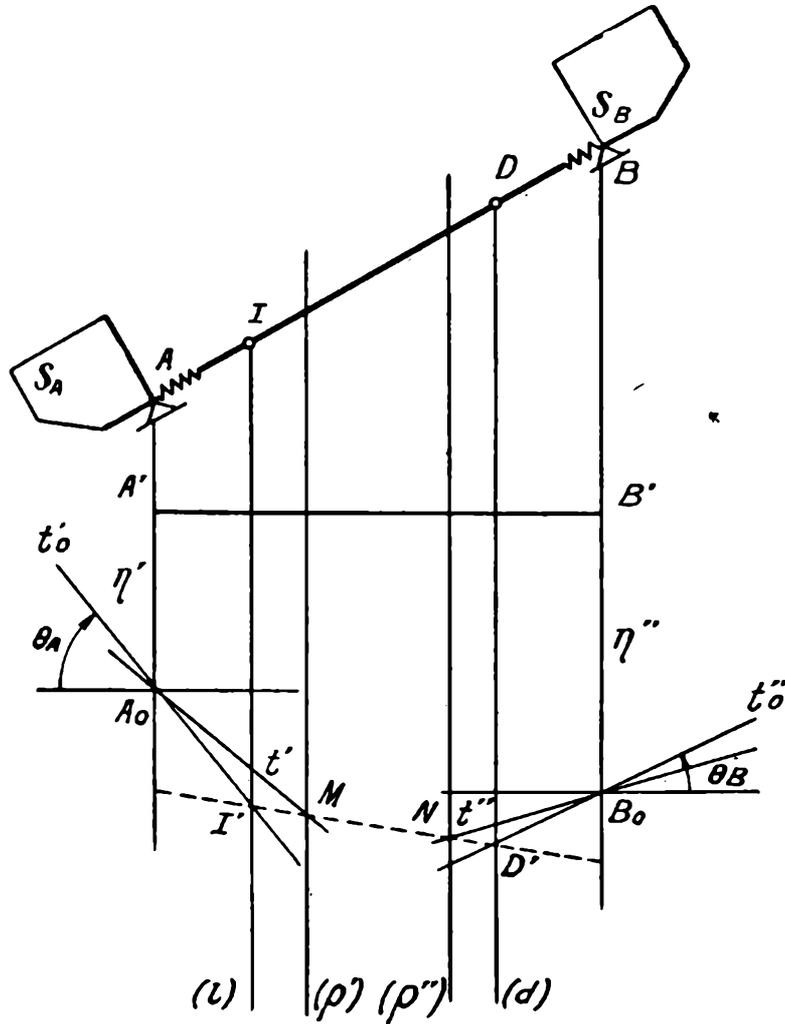


FIG. 104.

ejes extremos de la elástica. Los puntos  $I'$  y  $D'$  que estos ejes extremos determinan sobre las verticales focales, son, de acuerdo con (102), los focos de la elástica. Como no hay más rotaciones que las tercias (viga descargada), el lado intermedio debe pasar por estos focos y es, por consiguiente, la recta  $I'D'$ . Uniendo los puntos  $M$  y  $N$  que esta última determina sobre las rectas de acción de las tercias, respectivamente con  $A_0$  y  $B_0$ , se tienen las tangentes extremas de la elástica  $t'$  y  $t''$ , y, con ellas, completado el polígono de las tercias  $A_0MNB_0$  pedido.

**§ 2. — Influencia de desplazamientos de las secciones de arranque y de variaciones de temperatura.**

131. Momentos flectores y esfuerzos tangenciales originados por desplazamientos accidentales de las secciones extremas. — Sea la viga elásticamente empotrada  $AB$  (fig. 105). Supongamos que las secciones extremas o, lo que es lo mismo, las chapas  $S_A$  y  $S_B$ , experimenten determinados desplazamientos, rotaciones  $\theta_A$  y  $\theta_B$ , por ejemplo, en torno a puntos  $O_A$  y  $O_B$ . A estos desplazamientos de las chapas corresponden desplazamientos  $\eta'$  y  $\eta''$  para los extremos  $A$  y  $B$ , y rotaciones  $\theta_A$  y  $\theta_B$  para los ejes extremos  $t'_0$  y  $t''_0$ .

Nos proponemos calcular los momentos flectores y esfuerzos tangenciales originados por estos desplazamientos de las secciones extremas.

Para ello, observando que el diagrama de momentos flectores es lineal, por estar descargada la viga, tracemos el polígono de las tercias correspondiente, de acuerdo con lo expuesto en (130).

Del mismo se deducen los momentos reducidos  $m'_i$  y  $m''_i$ , con el signo tomado de acuerdo con (20). En base a estas últimas magnitudes se tiene

$$\mathcal{M}' = \frac{m'_i}{m_i}, \quad \mathcal{M}'' = \frac{m''_i}{m_i}$$

El esfuerzo tangencial en la viga es constante. Bastará determinar el  $\mathcal{T}'$  correspondiente al extremo  $A$ . Se tiene, recordando la convención de signos adoptada ( $\mathcal{T} > 0$  cuando su momento respecto de  $B$  es negativo), que

$$\mathcal{M}'' = \mathcal{M}' - \mathcal{T}' s$$

$$[1] \quad \mathcal{T}' = \frac{\mathcal{M}' - \mathcal{M}''}{s}.$$

132. Cálculo numérico de los momentos flectores correspondientes a desplazamientos de las secciones extremas. — Las rotaciones

de las chapas  $S_A$  y  $S_B$ , referidas a la recta de los extremos  $A_0B_0$ , son

$$[1] \quad \theta^*_A = \theta_A - \gamma, \quad \theta^*_B = \theta_B - \gamma,$$

con

$$[2] \quad \gamma = \frac{\eta'' - \eta'}{l}.$$

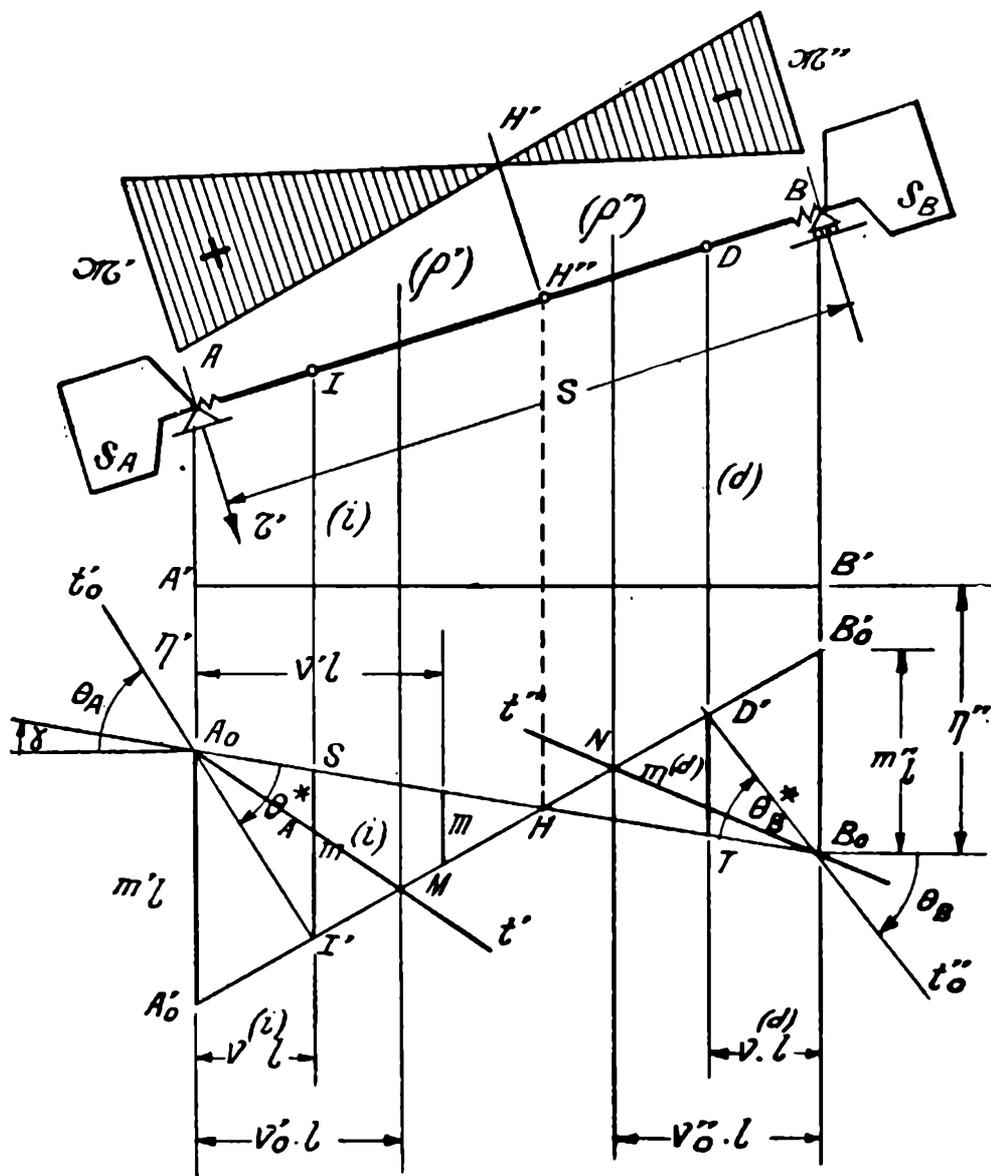


FIG. 105.

Para las ordenadas

$$m^{(i)} = \overline{SI'}, \quad m^{(d)} = \overline{TD'},$$

de los focos de la elástica, referidas a la recta de los extremos, se tiene

$$[a] \quad m^{(i)} = \theta^*_A \nu^{(i)} l, \quad m^{(d)} = -\theta^*_B \nu^{(d)} l.$$

La ordenada  $m$  de la recta  $A'_0B'_0$ , referida a la de los extremos  $A_0B_0$ , para la abscisa  $v'l$ , es

$$m = m^{(i)} + \frac{m^{(d)} - m^{(i)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}} (v' - v^{(i)})$$

Se tiene, por consiguiente, para el punto  $A'$  ( $v' = 0$ ),

$$m'_i = m^{(i)} - \frac{m^{(d)} - m^{(i)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}} v^{(i)}$$

y, análogamente, por simetría

$$m''_i = m^{(d)} + \frac{m^{(d)} - m^{(i)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}} v^{(d)}$$

Sustituyendo las expresiones [a] de  $m^{(i)}$  y  $m^{(d)}$ , recordando que  $m'_i = \mathcal{M}' m_i$ ,  $m''_i = \mathcal{M}'' m_i$  y simplificando, resulta, finalmente,

$$[2] \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}' = \frac{l}{m_i} \left[ \theta^*_A v^{(i)} + \frac{\theta^*_B v^{(d)} + \theta^*_A v^{(i)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}} v^{(i)} \right] \\ \mathcal{M}'' = \frac{l}{m_i} \left[ \theta^*_B v^{(d)} - \frac{\theta^*_B v^{(d)} + \theta^*_A v^{(i)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}} v^{(d)} \right] \end{array} \right.$$

### 133. Cálculo de la influencia de las variaciones de temperatura.

— Siendo la viga, como hemos supuesto, libremente dilatable, las variaciones uniformes de temperatura no tienen ninguna influencia. No sucede lo mismo cuando la variación no es uniforme. Consideremos que se presenta una diferencia de temperatura entre la cara superior e inferior de la viga, suponiendo que en una sección normal varíe linealmente entre los límites establecidos.

Sean  $t_s$  y  $t_i$  las temperaturas que respectivamente corresponden a las caras superior e inferior y pongamos, para su diferencia,

$$\Delta t = t_s - t_i,$$

con el signo que corresponda.

Supongamos la viga simplemente apoyada (fig. 105), es decir, dejemos las chapas extremas en libertad de girar en torno a los puntos  $A$  y  $B$ . En virtud de la variación de la temperatura, estas chapas experimentan rotaciones  $\theta_A$  y  $\theta_B$  que no se hubieran producido en la viga

elásticamente empotrada, debido a su inamovilidad. El problema se reduce, pues, a calcular los momentos flectores correspondientes a rotaciones de las chapas extremas opuestas a las anteriores (que las anulen), es decir,  $\theta^{(t)}_A = -\theta_A$  y  $\theta^{(t)}_B = -\theta_B$ . Se resuelve obteniendo los momentos reducidos  $m'_l$  y  $m''_l$ , mediante un polígono de las tercias o numéricamente, en la forma expuesta anteriormente.

**134. Cálculo de las rotaciones extremas  $\theta_A$  y  $\theta_B$  para piezas de altura constante.** — Todo se reduce, pues, al cálculo de las rotaciones extremas producidas por la temperatura en la viga hecha isostática. Consideremos primeramente el caso de vigas con sección transversal de altura  $h^*$  constante. Para un elemento  $ds$  (fig. 106), contando las tem-

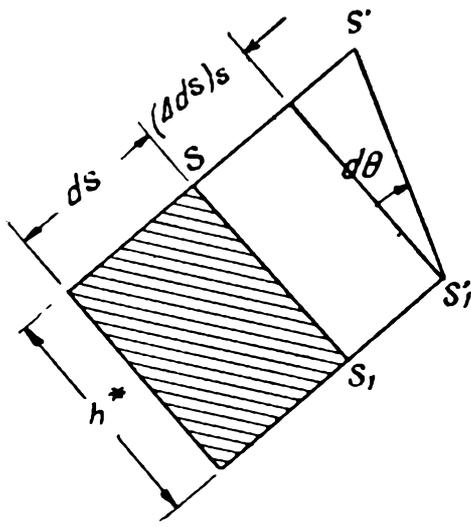


FIG. 106.

peraturas a partir de  $0^\circ$ , las fibras superiores e inferiores experimentan alargamientos (positivos o negativos) dados por las expresiones

$$(\Delta ds)_s = \varepsilon_t t_s ds,$$

$$(\Delta ds)_i = \varepsilon_t t_i ds,$$

siendo  $\varepsilon_t$  el coeficiente de dilatación lineal. La sección  $SS_1$ , que en virtud de la ley de variación lineal de temperatura supuesta, se conservará plana, pasará a la posición  $S'S'_1$ , experimentando una rotación

$$d\theta = \frac{(\Delta ds)_s - (\Delta ds)_i}{h^*},$$

o sea,

$$d\theta = \frac{\varepsilon_t \Delta t ds}{h^*}.$$

La rotación total del extremo  $B$  respecto del  $A$  será

$$\theta = \int_0^s d\theta = \frac{\varepsilon_t \Delta t s}{h^*}$$

y estará aplicada en el punto medio de la viga. Como resulta de inmediato de la observación de la figura 107, se tiene

$$\theta_A = -\frac{\theta}{2}, \quad \theta_B = \frac{\theta}{2}$$

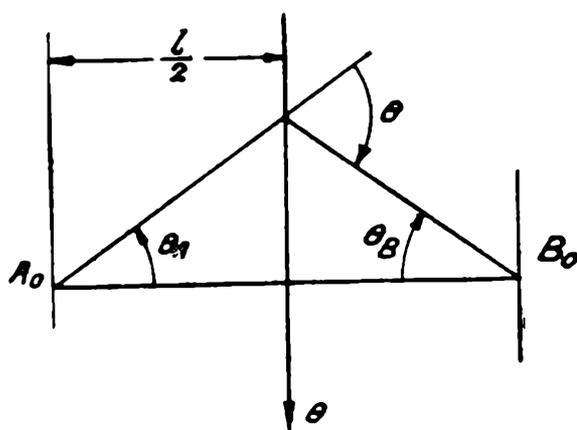


FIG. 107.

y, por consiguiente,

$$\theta^{(t)}_A = \frac{\theta}{2}, \quad \theta^{(t)}_B = -\frac{\theta}{2}$$

**135. Vigas de altura variable.** — Si la pieza es de altura variable, se la divide en un número  $n$  suficientemente grande de elementos  $\Delta s_i$ ; para cada uno de ellos corresponderá una rotación

$$[1] \quad \theta_i = \frac{\varepsilon_t \Delta t \Delta s_i}{h_i^*},$$

que podemos suponer aplicada en su punto medio. Construyendo (fig. 108) el funicular ( $I$ ) de sus elaciones verticales, obtendremos la elástica de deformación, que, referida a la recta de los extremos, da, con su primero y último lados  $t'_0$  y  $t''_0$ , las rotaciones  $\theta_A$  y  $\theta_B$ .

La recta determinada por las intersecciones de  $t'_0$  y  $t''_0$  con las verticales focales, da, a su vez, como es inmediato, y en la forma que indica la figura, los momentos reducidos  $m'_l$  y  $m''_l$ , en base a los cuales se tiene

$$\mathcal{M}' = -\frac{m'_l}{m_l}, \quad \mathcal{M}'' = -\frac{m''_l}{m_l},$$

con el signo menos, por haberse tomado directamente las rotaciones  $\theta_A$  y  $\theta_B$  y no sus opuestas  $\theta^{(t)}_A$  y  $\theta^{(t)}_B$ , como corresponde.

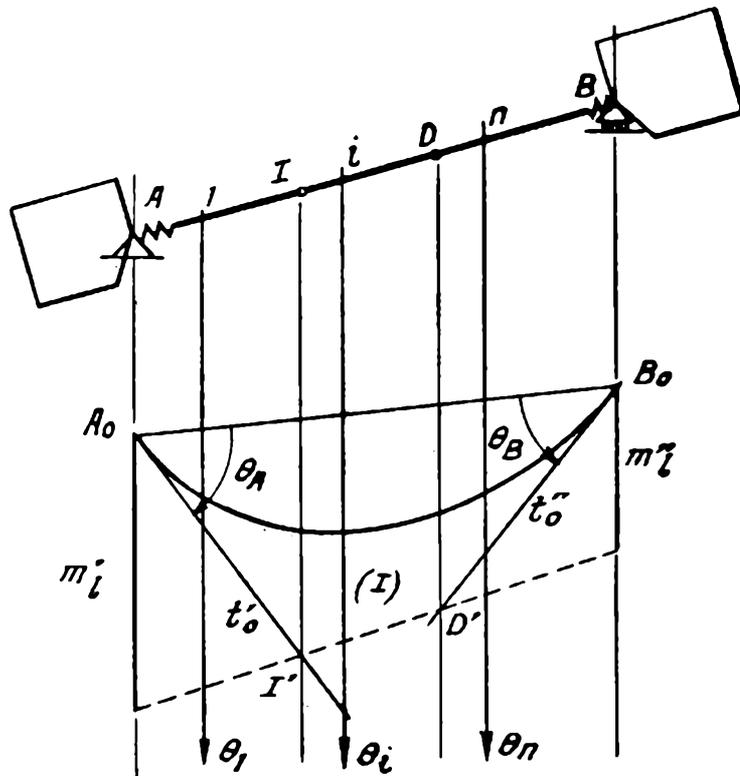


FIG. 108.

136. Vigas simétricas de altura variable. — Si la viga de altura variable es simétrica, puede ser cómodo dividirla en elementos de igual

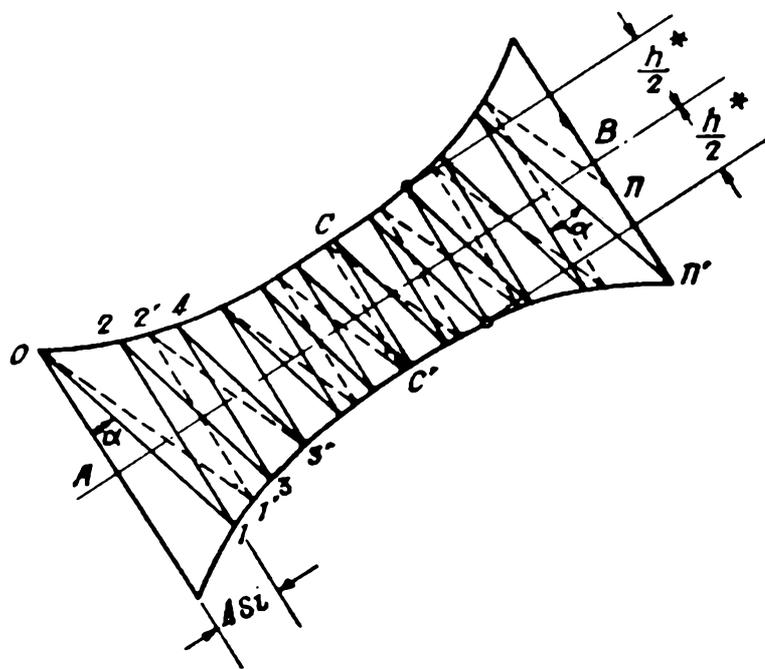


FIG. 109.

rotación  $\theta_i$ , lo que se obtiene, según la [1] del número anterior, si su longitud  $\Delta s_i$  es tal que

$$\frac{\Delta s_i}{h^*_i} = \text{const.},$$

siendo  $h^*_i$  la altura correspondiente a una sección cualquiera del elemento  $i$ . Ello se logra con la construcción siguiente: Se dibuja hacia ambos lados del eje  $AB$  (fig. 109), las curvas  $c$  y  $c'$  de ordenadas  $\frac{h^*}{2}$ . Por 0

se traza una recta inclinada  $01$  y luego la poligonal de vértices sobre dichas curvas y lados sucesivamente normales a  $AB$  y paralelos a  $01$ . Se llega así, en general, a un último lado normal que no pasa por  $B$ . Repitiendo la construcción, partiendo de la recta  $01'$  diversamente inclinada, se obtiene, después de uno o dos tanteos, la poligonal de trazos llenos, con el último vértice  $n'$  situado sobre la normal que pasa por  $B$ .

Dividiendo la viga en los elementos  $\Delta s_i$  determinados por las normales a  $AB$  de esta última poligonal, se tiene

$$\frac{\Delta s_i}{h^*_i} = \operatorname{tg} \alpha = \text{const.},$$

con  $h^*_i$  altura correspondiente a una sección interior de cada elemento.

Las rotaciones  $\theta_i$  que la temperatura origina para cada elemento en el sistema hecho isostático, son, pues, iguales entre sí y dadas por la expresión

$$\theta_i = \varepsilon_t \Delta t \operatorname{tg} \alpha.$$

La rotación resultante  $\theta$ , si  $n$  es el número de elementos, será

$$\theta = n \varepsilon_t \Delta t \operatorname{tg} \alpha$$

y, como está aplicada en el punto medio de la luz, se tendrá, como en el caso de vigas de altura constante,

$$\theta_A = -\frac{\theta}{2}, \quad \theta_B = \frac{\theta}{2},$$

o sea,

$$\theta^{(t)}_A = \frac{\theta}{2}, \quad \theta^{(t)}_B = -\frac{\theta}{2}.$$

### § 3. — Cargas fijas. Diagramas de momentos flectores y esfuerzos tangenciales.

137. **Diagramas de momentos flectores.**—Sea la viga elásticamente empotrada  $AB$  (fig. 110 *a*), de focos  $I$  y  $D$  y sometida a un estado cualquiera a las cargas verticales equivalentes (56). Nos propondremos determinar el diagrama de momentos flectores que estas últimas originan.

Construyamos respecto del eje  $A'B'$  en  $A'NB'$  el diagrama de momentos

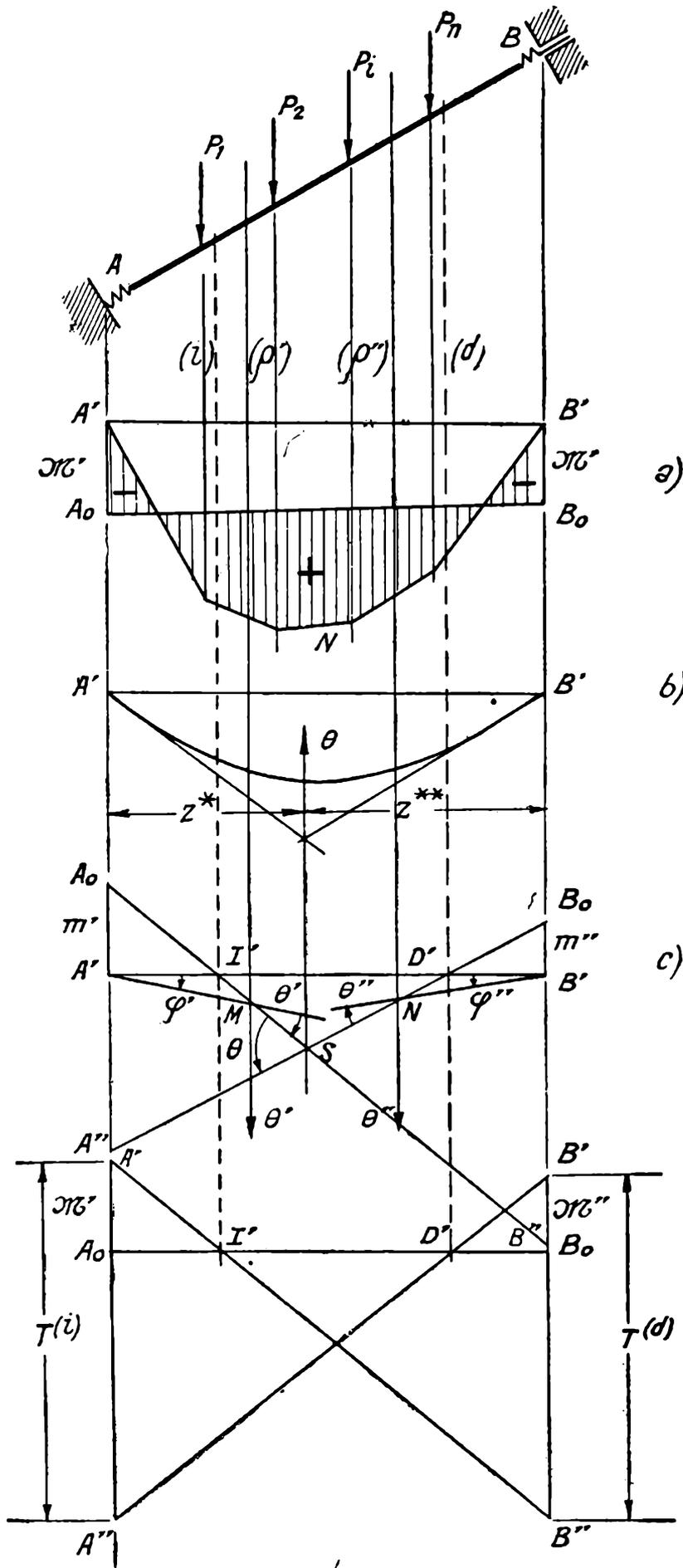


FIG. 110.

flectores correspondiente a la viga supuesta simplemente apoyada. En vir-

tud de los empotramientos, se producirán en  $A$  y  $B$  momentos  $\mathcal{M}'$  y  $\mathcal{M}''$ ; supongámoslos conocidos y representados con signo contrario en  $A'A_0$  y  $B'B_0$ . El polígono  $A'NB'$  referido a la recta  $A_0B_0$  daría el diagrama de momentos flectores de la viga elásticamente empotrada.

Todo el problema se reduce, pues, a la determinación de la recta  $A_0B_0$ , que se llama *línea de cierre* del diagrama de momentos flectores.

Sea  $\theta$  (fig. 110 *b*) la rotación debida al diagrama de momentos de la viga simplemente apoyada. Existen, además, dos rotaciones tercias  $\theta'$  y  $\theta''$  producidas por el diagrama lineal que representa la línea de cierre. Tracemos (fig. 110 *b*) un polígono de las elaciones verticales correspondientes a estas tres rotaciones  $\theta'$ ,  $\theta$  y  $\theta''$ , referido al eje  $A'B'$  (fig. 110 *c*). Como las secciones de arranque de los empotramientos permanecen fijas, los ejes extremos coinciden con el eje  $A'B'$  de la elástica y los focos de esta última son los puntos  $I'$  y  $D'$  de intersección con este eje de las verticales focales (*i*) y (*d*).

Los dos lados del funicular de  $\theta$  son los siguientes: el que sigue a  $\theta'$  y el anterior a  $\theta''$ ; según (102) pasan respectivamente por  $I'$  y  $D'$ . Si  $S$  es un punto cualquiera de  $\theta$ , las rectas  $I'S$  y  $SD'$  serán, pues, dichos lados (salvo la escala de la elástica). Si  $M$  y  $N$  son los puntos en que respectivamente cortan a las tercias izquierda y derecha, se tendrá, en  $A'M$  y  $NB'$ , las tangentes extremas.

El polígono de las elaciones  $\theta'$ ,  $\theta$  y  $\theta''$  buscado, es pues, el  $A'MSNB'$ . Prolongando sus lados hasta cortar las verticales de los apoyos, se tiene

$$[a] \quad \begin{cases} \overline{A'A_0} = m'_l = m_l \mathcal{M}' , \\ \overline{B'B_0} = m''_l = m_l \mathcal{M}'' , \end{cases}$$

y, además, según (79),

$$[b] \quad \begin{cases} \overline{A'A''} = -\theta z^* = m_l T^{(i)} , \\ \overline{B'B''} = -\theta z^{**} = m_l T^{(d)} , \end{cases}$$

siendo  $T^{(i)}$  y  $T^{(d)}$  los momentos de Ritter correspondientes a la carga considerada.

Las [a] permitirían calcular los momentos de empotramiento, que son ambos negativos, pues  $m'_l$  y  $m''_l$  están hacia arriba del eje  $A'B'$  de la elástica. Pero, para ello, se requeriría dividir los segmentos  $\overline{A'A_0}$  y  $\overline{B'B_0}$  por  $m_l$ . Se puede obtener directamente segmentos representativos de los momentos, en la forma siguiente: Se lleva en la escala en que

está dibujado el diagrama de momentos de la viga simplemente apoyada y sobre las verticales de los apoyos (fig. 110 *d*), segmentos

$$\overline{A'A''} = T^{(i)},$$

$$\overline{B'B''} = T^{(d)},$$

representativos de los momentos de Ritter. Se unen sus extremos en cruz, obteniendo las rectas  $A'B''$  y  $B'A''$ , que se llaman *líneas cruzadas o cruzadas de Ritter*: Se determinan los puntos  $I'$  y  $D'$  de intersección de la vertical focal (*i*) con  $A'B''$  y de la (*d*) con  $B'A''$ . La recta  $I'D'$  determina en las verticales de los apoyos, segmentos que, leídos en la escala de momentos, dan directamente

$$\overline{A_0A'} = \mathcal{M}'$$

$$\overline{B_0B'} = \mathcal{M}''$$

Es inmediato, pues la figura 110 *d* reproduce la 110 *c*, en otra escala, obtenida precisamente dividiendo por  $m_i$  las ordenadas de esta última.

138. — Prácticamente y resumiendo, para obtener el diagrama de momentos flectores que un estado cualquiera de cargas origina en una viga elásticamente empotrada, se procede en la forma siguiente:

Se construye (fig. 111 *a*), referido al eje  $A'B'$ , el diagrama de momentos flectores  $A'NB'$  que las cargas originan en la viga  $AB$  supuesta simplemente apoyada. Se calcula gráfica o numéricamente los momentos de Ritter  $T^{(i)}$  y  $T^{(d)}$  correspondientes y se llevan los segmentos  $A'A''$  y  $B'B''$  que los representan, en la escala del diagrama anterior. Se trazan las cruzadas de Ritter  $A'B''$  y  $B'A''$ , que determinan los extremos de dichos segmentos y se las corta en  $I'$  y  $D'$  con las verticales focales (*i*) y (*d*). La recta  $I'D'$  es la línea de cierre, y el diagrama de momentos de la viga simplemente apoyada, referido a la misma, como indica el rayado de la figura, es el que las cargas originan en la viga elásticamente empotrada.

139. — El diagrama de momentos flectores así obtenido, resulta referido a la línea de cierre  $A_0B_0$ , en general oblicua. Si se lo desea referido a un eje horizontal  $A'B'$  (u oblicuo dado de antemano), se puede proceder en la forma siguiente:

Se llevan (fig. 111 *b*) los segmentos representativos de los momentos de Ritter hacia arriba del eje  $A'B'$  adoptado, obteniendo, también hacia arriba, las cruzadas de Ritter. Los puntos  $I'$  y  $D'$  de intersección de

estas últimas con las verticales focales, determinan la línea de cierre  $A_0B_0$  orientada (arriba del eje por tratarse de momentos negativos). Si se construye el funicular que da el diagrama de momentos de la viga

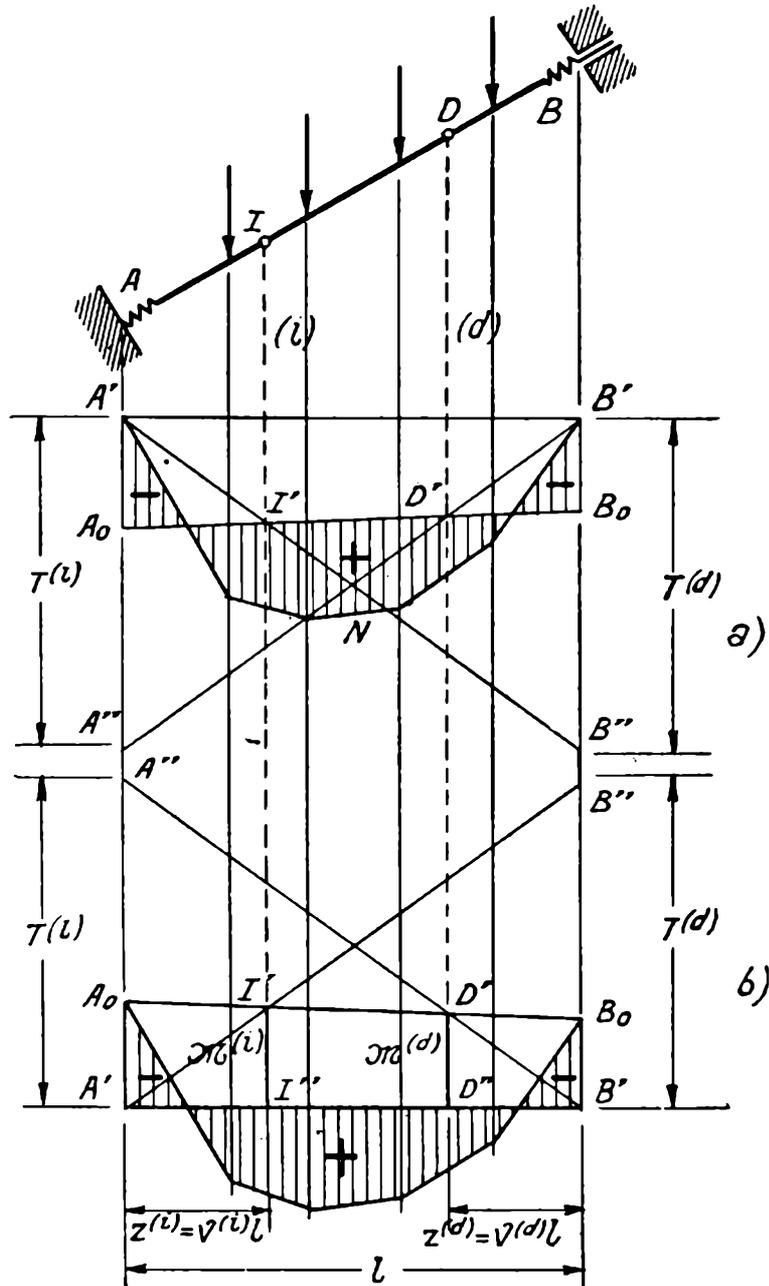


FIG. 111.

simplemente apoyada, haciéndolo pasar por  $A_0$  y  $B_0$ , es decir, tomando como eje de referencia a la línea de cierre, este funicular da el diagrama de momentos de la viga elásticamente empotrada, si se lo refiere, como indica el rayado de la figura, al eje  $A'B'$

140.— Si se trata de una pieza de momento de inercia constante, los momentos de Ritter pueden determinarse gráficamente, como sabemos. Las construcciones requerirán obtener previamente el diagrama de momentos flectores de la viga simplemente apoyada, referido al eje  $A'B'$ ; además, las mismas construcciones dan, en general, directamente las cruzadas de Ritter hacia abajo, como se deduce de inmediato observando

las figuras 75 a 84. En este caso, resulta más cómodo obtener los diagramas de momentos de la viga elásticamente empotrada, refiriéndolos a las líneas de cierre oblicuas que resulten, los que, por otra parte, se pueden transformar luego, sin mucho trabajo, de modo a referirlos a otro eje cualquiera.

En cambio, si se trata de una viga de momento de inercia variable (o de  $J = \text{const.}$ , cuando  $T^{(i)}$  y  $T^{(d)}$  se determinan numéricamente) para obtener los momentos de Ritter, no es necesario construir previamente el diagrama de momentos flectores de la viga simplemente apoyada. En estos casos, puede ser cómodo referir el diagrama de momentos de la viga elásticamente empotrada a un eje horizontal u oblicuo dado de antemano. Además, no es indispensable trazar las cruzadas de Ritter; la línea de cierre puede obtenerse mediante sus ordenadas  $\mathcal{M}^{(i)}$  y  $\mathcal{M}^{(d)}$  correspondientes a las verticales focales, que llamaremos *momentos focales* y que están dadas, como resulta de inmediato (fig. 111 b), por las expresiones

$$[1] \quad \begin{cases} \mathcal{M}^{(i)} = -\frac{T^{(d)}}{l} z^{(i)} = -T^{(d)} y^{(i)} \\ \mathcal{M}^{(d)} = -\frac{T^{(i)}}{l} z^{(d)} = -T^{(i)} y^{(d)} \end{cases}$$

con el signo menos por tratarse de momentos flectores negativos.

En resumen, cuando se determinan numéricamente los momentos de Ritter, se procede en la forma siguiente:

Se calculan los momentos focales  $\mathcal{M}^{(i)}$  y  $\mathcal{M}^{(d)}$  con las expresiones anteriores; se los lleva con su signo (hacia arriba) sobre las verticales focales, a partir del eje  $A'B'$  adoptado, obteniendo los puntos  $I'$  y  $D'$ , que determinan la recta de cierre  $A_0B_0$ . El diagrama de momentos flectores de la viga simplemente apoyada, referido a  $A_0B_0$ , da, si se lo refiere a  $A'B'$ , el de la elásticamente empotrada.

**141. Diagramas de esfuerzos tangenciales.**— Obtenido el diagrama de momentos flectores, el de esfuerzos tangenciales resulta de inmediato recordando que:

1º) El diagrama de momentos flectores es un funicular del diagrama de cargas y el esfuerzo de corte en una sección cualquiera (resultante de las fuerzas exteriores que actúen a la izquierda de la sección, que no coincide con el esfuerzo tangencial sino en el caso en que las fuerzas sean normales a la viga), está determinado por los radios polares paralelos a la línea de cierre y al lado del funicular (o tangente de la curva funicular) correspondiente a la sección.

2º) El diagrama de esfuerzos tangenciales es la integral del diagrama de cargas y la derivada del de momentos flectores.

Sea, por ejemplo, la viga elásticamente empotrada  $AB$  (fig. 112 a)

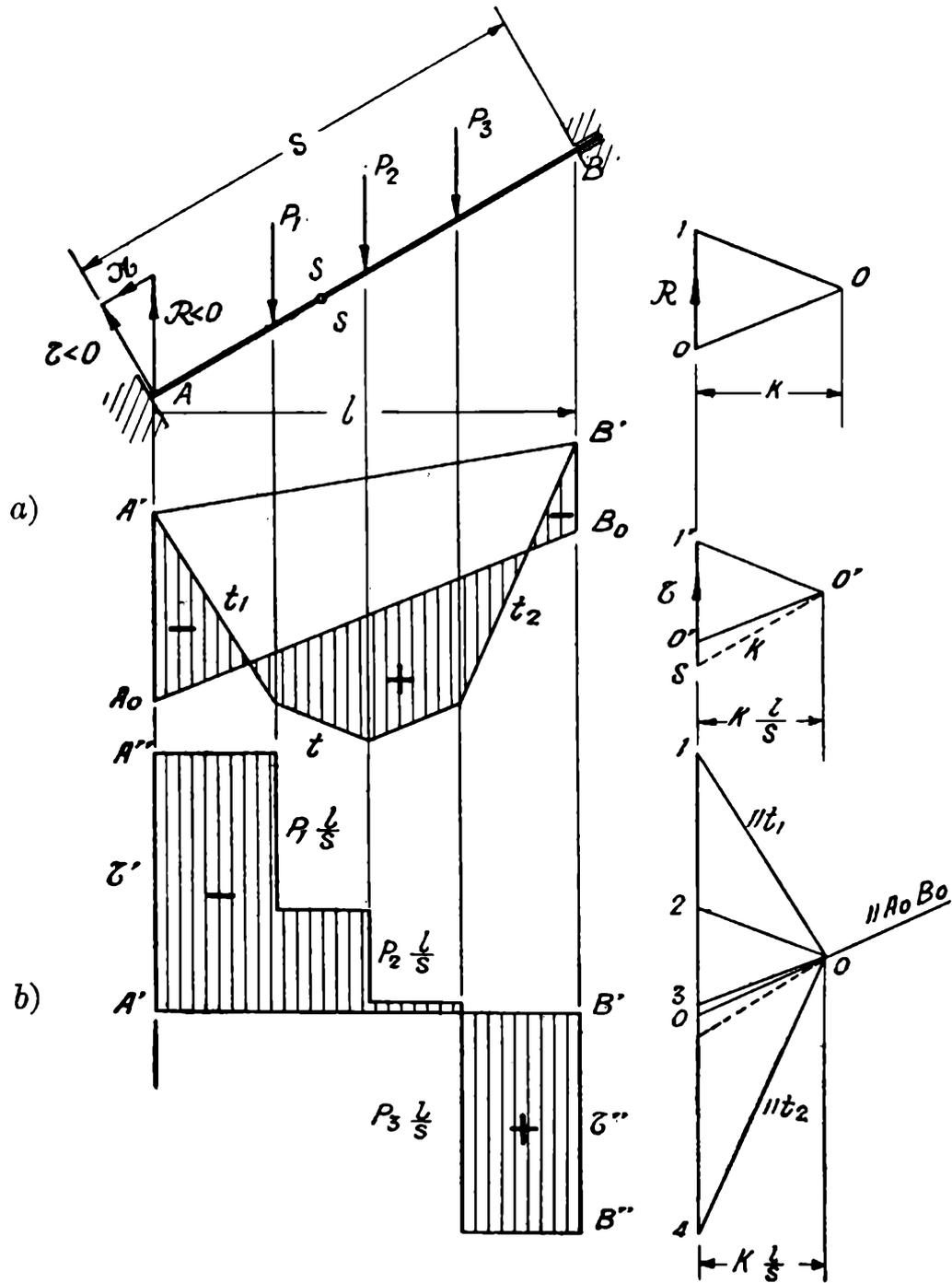


FIG. 112.

y supongamos que el diagrama de momentos flectores esté representado en la escala

$$\frac{5 \text{ tm}}{\text{cm}} .$$

Nos proponemos trazar el diagrama de esfuerzos tangenciales en la escala

$$\frac{2 \text{ t}}{\text{cm}} .$$

Si  $k$  es la distancia polar con que se ha construído el funicular que constituye el diagrama de momentos flectores, debe tenerse

$$\frac{2 t}{\text{cm}} k = \frac{5 \text{ tm}}{\text{cm}}$$

$$k = 2,5 \text{ m}.$$

Tomemos el punto  $O$  como polo y tracemos a la izquierda (del lado de  $A$ ) una vertical distante del mismo un segmento que, en la escala de longitudes en que está dibujada la viga, represente a  $k$ . Trazando por  $O$  las paralelas a la línea de cierre  $A_0B_0$  y al lado  $t$  del funicular de momentos cortado por la sección  $SS$  (o tangente a la curva funicular correspondiente a  $SS$ ), se tiene

$$\mathcal{R} = \overline{O1},$$

siendo  $\mathcal{R}$  el esfuerzo de corte en la sección  $SS$ .

El esfuerzo tangencial  $\mathcal{T}$  se obtiene descomponiendo  $\mathcal{R}$  según la normal y la paralela a la viga, y resulta, como se deduce de la figura,

$$\mathcal{T} = \mathcal{R} \frac{l}{s}.$$

Si se toma  $k \frac{l}{s}$  como distancia polar (llevando  $O'S$  igual a  $k$  paralelamente a la viga), se tiene directamente,

$$\mathcal{T} = \overline{O'1'},$$

con el signo que resulte para el segmento  $\overline{O'1'}$ , contado a partir de  $O'$ .

Huelga agregar que si el cálculo de las características se hace para cargas horizontales (u horizontales equivalentes), se requiere tomar la distancia polar  $k \frac{|h|}{s}$ , con el polo  $O$  siempre del lado superior (fig. 113).

142.— Resumiendo, se procede prácticamente en la forma que sigue:

Fijada la escala de esfuerzos tangenciales, se calcula la distancia polar  $k \frac{l}{s}$  (ó  $k \frac{|h|}{s}$ ), siendo  $k$  el cociente de las escalas de momentos y de esfuerzos tangenciales. Se fija el polo del lado de  $B$ . Por el polo se trazan (fig. 112 *b*) paralelas a la línea de cierre y a los pri-

mero y último lados  $t_1$  y  $t_2$  del funicular de momentos (o primera y última tangentes), determinando, respectivamente, los puntos 0, 1 y 2. Se tiene

$$\mathcal{T}' = \overline{01},$$

$$\mathcal{T}'' = \overline{02},$$

siendo  $\mathcal{T}'$  y  $\mathcal{T}''$  los esfuerzos tangenciales correspondientes a los extremos  $A$  y  $B$  de la viga.

Se los representa, luego, a partir del eje  $A'B'$ , en  $\overline{A'A''}$  y  $\overline{B'B''}$ , respectivamente. El resto del diagrama se obtiene determinando un nú-

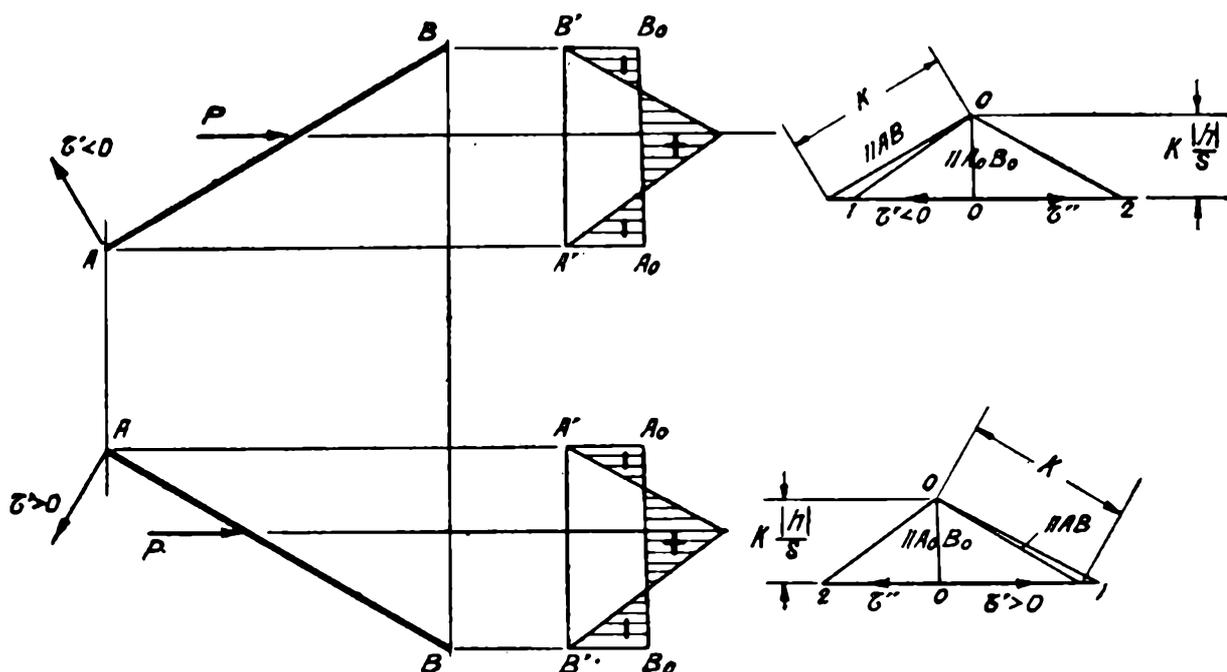


FIG. 113.

mero conveniente de ordenadas mediante radios polares paralelos a los lados (o tangentes del diagrama de momentos). Pero, resulta más directamente observando que:

1º) En la sección en que actúa una fuerza concentrada  $P$ , el diagrama tiene un salto brusco, debiendo sumarse a la ordenada anterior la  $P_i \frac{l}{s}$  (o la  $P_i \frac{h}{s}$  si se trata de cargas horizontales).

2º) Si entre dos secciones no actúan cargas, el diagrama es una recta paralela al eje.

3º) Si entre dos secciones hay una carga uniformemente repartida, el diagrama es una recta oblicua.

4c) Si entre dos secciones hay una carga trapezoidal, o triangular, el diagrama es una parábola de segundo grado.

143. Cálculo numérico de las características. — Se comienza por calcular los momentos focales

$$\mathcal{M}^{(i)} = -T^{(d)} v^{(i)}, \quad \mathcal{M}^{(d)} = -T^{(i)} v^{(d)}.$$

El momento flector es una sección cualquiera de abscisa  $v'l$  es (fig. 114)

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^* + \mathcal{M}_0,$$

siendo

$$\mathcal{M}^* = \mathcal{M}^{(i)} + \frac{\mathcal{M}^{(d)} - \mathcal{M}^{(i)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}} (v' - v^{(i)})$$

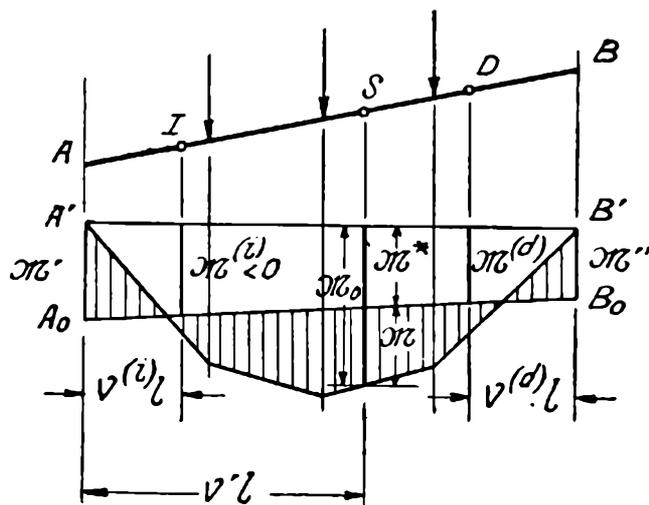


FIG. 114.

y  $\mathcal{M}_0$  el que corresponde a la viga simplemente apoyada.

Sustituyendo, se tiene

$$[1] \quad \mathcal{M} = \mathcal{M}^{(i)} + \frac{\mathcal{M}^{(d)} - \mathcal{M}^{(i)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}} (v' - v^{(i)}) + \mathcal{M}_0.$$

Para los momentos flectores extremos  $\mathcal{M}'$  y  $\mathcal{M}''$  ( $v' = 0$  y  $v' = 1$ ) resulta, después de simplificar,

$$[2] \quad \begin{cases} \mathcal{M}' = \mathcal{M}^{(i)} - \frac{\mathcal{M}^{(d)} - \mathcal{M}^{(i)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}} v^{(i)}, \\ \mathcal{M}'' = \mathcal{M}^{(i)} + \frac{\mathcal{M}^{(d)} - \mathcal{M}^{(i)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}} (1 - v^{(i)}). \end{cases}$$

144. — El esfuerzo tangencial en el extremo A es

$$\mathcal{T}' = \mathcal{T}^* + \mathcal{T}'_0,$$

siendo  $\mathcal{T}^*$  el que corresponde al diagrama lineal de momentos flectores representado por la línea de cierre y  $\mathcal{T}'_0$  el esfuerzo tangencial en  $A$  de la viga simplemente apoyada.

Teniéndose

$$\mathcal{T}^* = \frac{\mathcal{M}' - \mathcal{M}''}{l} = \frac{\mathcal{M}^{(i)} - \mathcal{M}^{(d)}}{(1 - \nu^{(i)} - \nu^{(d)}) l}$$

resulta, sustituyendo

$$[1] \quad \mathcal{T}' = \frac{\mathcal{M}^{(i)} - \mathcal{M}^{(d)}}{(1 - \nu^{(i)} - \nu^{(d)}) l} + \mathcal{T}'_0.$$

En una sección cualquiera de abscisa  $\nu' l$ , se tiene

$$[2] \quad \mathcal{T} = \frac{\mathcal{M}^{(i)} - \mathcal{M}^{(d)}}{(1 - \nu^{(i)} - \nu^{(d)}) l} + \mathcal{T}'_0 + \frac{l}{s} \sum_k P_i,$$

siendo

$$\sum_k P_i$$

la suma de las cargas que actúan a la izquierda de la sección.

Si las cargas son horizontales, se cambia, en las anteriores,  $l$  por  $h$  (con su signo).

**145. Ejemplos numéricos.** — Sea una pieza elásticamente empotrada (fig. 115), simétrica, con empates rectos, que tiene

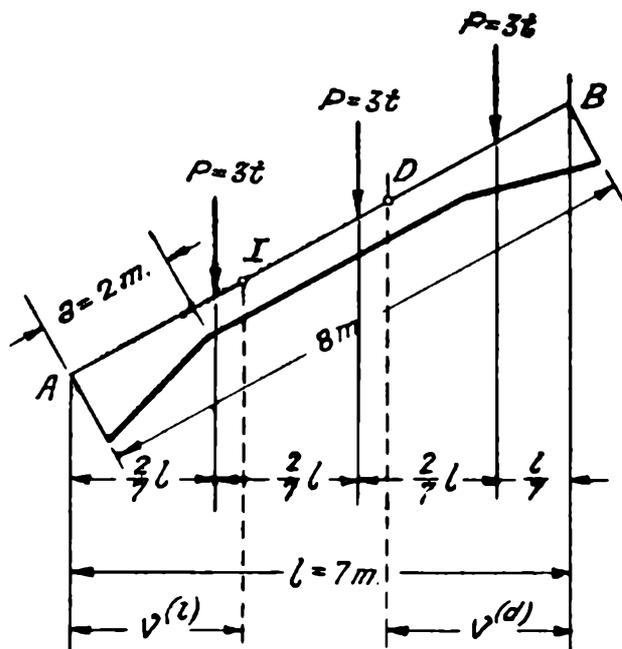


FIG. 115.

$$s = 8,00 \text{ m}, \quad l = 7,00 \text{ m}, \quad a = 2,00 \text{ m},$$

$$J = 0,001 \text{ m}^4, \quad J' = 0,005 \text{ m}^4,$$

y para la que, por tanto,

$$\lambda = \frac{a}{s} = \frac{2,00 \text{ m}}{8,00 \text{ m}} = 0,25, \quad n = \frac{J}{J'} = \frac{0,001 \text{ m}^4}{0,005 \text{ m}^4} = 0,20.$$

Las abscisas numéricas de los focos son

$$v^{(i)} = 0,342, \quad v^{(d)} = 0,368.$$

Está sometida al estado de cargas concentradas representado en la figura (estado 8), con

$$P = 3 \text{ t}.$$

Se pide los diagramas de momentos flectores y de esfuerzos tangenciales.

La tabla VII<sup>1-11a</sup>, para  $n = 0,20$  y  $\lambda = 0,25$ , da

$$\bar{X}^{(i)} = 0,852, \quad \bar{X}^{(d)} = 0,868,$$

y, por tanto, los momentos focales son

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(i)} &= -T^{(d)} v^{(i)} = -Pl \bar{X}^{(i)} v^{(i)}, \\ \mathcal{M}^{(d)} &= -T^{(i)} v^{(d)} = -Pl \bar{X}^{(d)} v^{(d)}, \end{aligned}$$

o sea, poniendo

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(i)} &= Pl \bar{\mathcal{M}}^{(i)}, \\ \mathcal{M}^{(d)} &= Pl \bar{\mathcal{M}}^{(d)}, \\ \bar{\mathcal{M}}^{(i)} &= -\bar{X}^{(i)} v^{(i)} = -0,852 \times 0,342 = -0,291, \\ \bar{\mathcal{M}}^{(d)} &= -\bar{X}^{(d)} v^{(d)} = -0,868 \times 0,368 = -0,319. \end{aligned}$$

Se tiene, además,

$$Pl = 3 \text{ t} \times 7 \text{ m} = 21 \text{ tm}.$$

En la figura 116 se han representado las magnitudes  $\bar{\mathcal{M}}^{(i)}$ ,  $\bar{\mathcal{M}}^{(d)}$  en la escala

$$\frac{1,5}{10 \text{ cm}},$$

con lo que se ha obtenido la línea de cierre  $A_0B_0$ .

La tabla XI b da, para el estado de cargas considerado,

$$\bar{f}_1 = 0,369, \quad \bar{f}_2 = 0,448, \quad \bar{f}_3 = 0,245,$$

magnitudes que llevadas, en la misma escala anterior, a partir del eje  $A_0B_0$ , dan el diagrama de momentos flectores para la viga simplemente apoyada. Resulta así el diagrama rayado en la figura, que da el de momentos flectores de la viga elásticamente empotrada, en la escala

$$Pl \frac{1,5}{10 \text{ cm}} = \frac{31,5 \text{ tm}}{10 \text{ cm}}.$$

Adoptando la escala

$$\frac{1 \text{ t}}{10 \text{ cm}}$$

para el diagrama de esfuerzos tangenciales, resulta

$$k = \frac{\frac{31,5 \text{ tm}}{10 \text{ cm}}}{\frac{1 \text{ t}}{0,63 \text{ cm}}} = 2 \text{ m.}$$

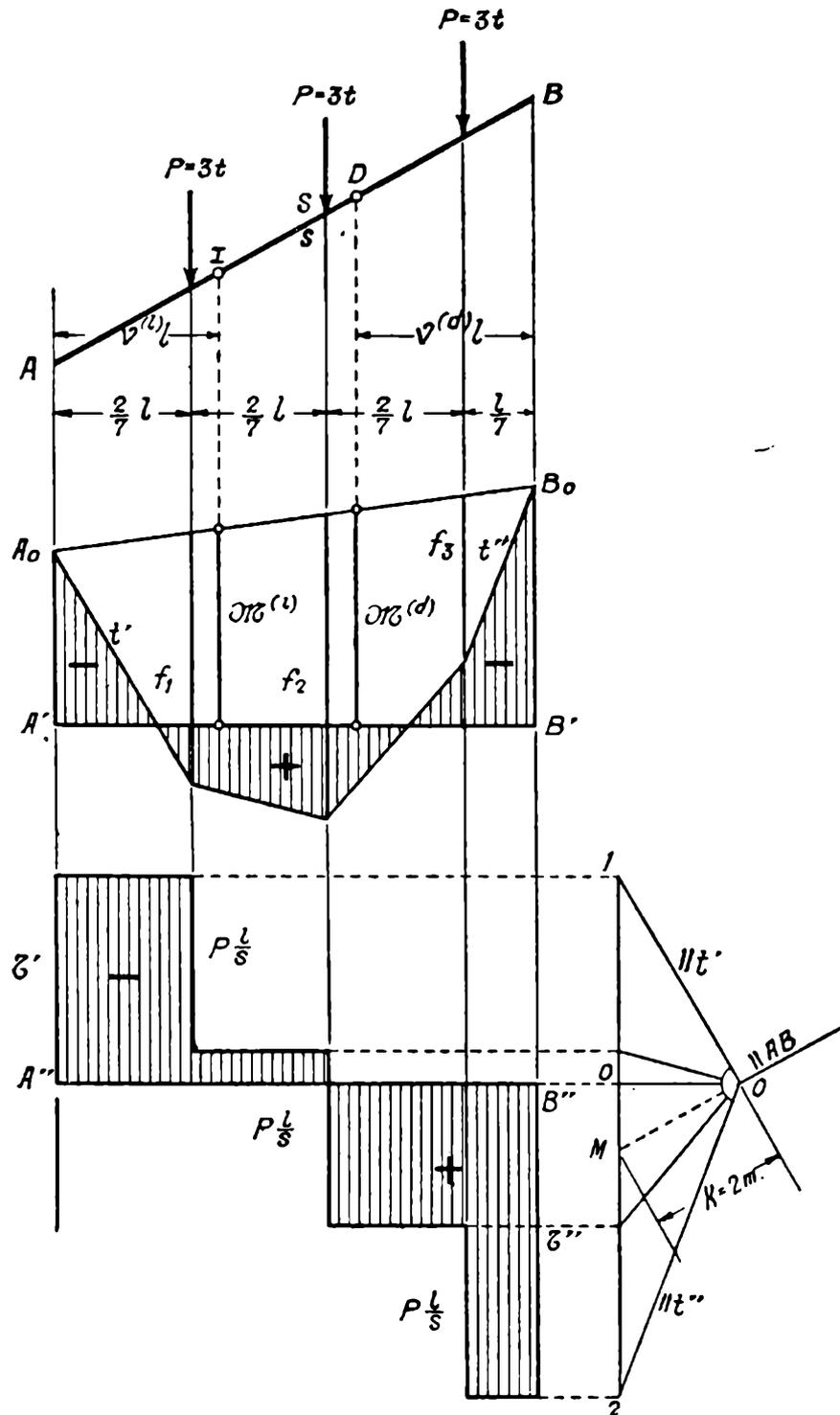


FIG. 116.

Se ha llevado esta distancia polar en la escala de longitudes  $\left( \frac{1 \text{ m}}{0,66 \text{ cm}} \right)$  en  $MO$  so-

bre una paralela a la pieza  $AB$ . Con las paralelas al eje  $A'B'$  y al primero y último lados del diagrama de momentos, se han obtenido los esfuerzos tangenciales extremos, en base a los cuales ha resultado el diagrama de esfuerzos tangenciales de la figura, que no requiere mayores explicaciones.

146. — Se pide calcular numéricamente, para el mismo estado de cargas anterior, el momento flector y el esfuerzo tangencial en la sección  $SS$ .

Se tiene

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 - \frac{\mathcal{M}^{(i)} - \mathcal{M}^{(d)}}{1 - \nu^{(i)} - \nu^{(d)}} (\nu' - \nu^{(i)}) + \mathcal{M}_0,$$

siendo

$$\mathcal{M}^{(i)} = Pl \overline{\mathcal{M}}^{(i)}, \quad \mathcal{M}^{(d)} = Pl \overline{\mathcal{M}}^{(d)},$$

con

$$\overline{\mathcal{M}}^{(i)} = -0,297, \quad \overline{\mathcal{M}}^{(d)} = -0,314.$$

A su vez,

$$\mathcal{M}_0 = Pl \bar{f}_2,$$

con

$$\bar{f}_2 = 0,448.$$

Sustituyendo se obtiene

$$\mathcal{M} = Pl \left( \overline{\mathcal{M}}^{(i)} - \frac{\overline{\mathcal{M}}^{(i)} - \overline{\mathcal{M}}^{(d)}}{1 - \nu^{(i)} - \nu^{(d)}} (\nu' - \nu^{(i)}) + \bar{f}_2 \right),$$

que, teniéndose

$$\nu^{(i)} = 0,342, \quad \nu^{(d)} = 0,368,$$

$$\nu' = \frac{4}{7} = 0,572,$$

da

$$\mathcal{M} = 21 \text{ tm} \left( -0,297 - \frac{-0,297 - (-0,314)}{1 - 0,342 - 0,368} (0,572 - 0,342) + 0,448 \right) = 2,88 \text{ tm}.$$

Para el esfuerzo tangencial se tiene, según la [2] de (144) y poniendo

$$\mathcal{T}_0 = P \overline{\mathcal{T}}_0,$$

para el de la viga simplemente apoyada,

$$\mathcal{T} = P \left( \frac{\overline{\mathcal{M}}^{(i)} - \overline{\mathcal{M}}^{(d)}}{1 - \nu^{(i)} - \nu^{(d)}} + \overline{\mathcal{T}}_0 \right)$$

A su vez, siendo

$$\mathcal{R}' = P \overline{\mathcal{R}}'$$

el esfuerzo de corte vertical extremo de la viga simplemente apoyada, se tiene

$$\mathcal{T}_0 = (\mathcal{R}' - P) \frac{l}{s} = P \frac{l}{s} (\overline{\mathcal{R}}' - 1).$$

Sustituyendo resulta

$$\mathcal{G} = P \left( \frac{\overline{\mathcal{M}}^{(i)} - \overline{\mathcal{M}}^{(d)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}} + \frac{l}{s} (\overline{\mathcal{R}}' - 1) \right).$$

Siendo, según la tabla XI b,

$$\overline{\mathcal{R}}' = 1,29,$$

se tiene, sustituyendo,

$$\mathcal{G} = 3t \left( \frac{-0,297 - (-0,314)}{1 - 0,342 - 0,368} + \frac{7}{8} (1,29 - 1) \right) = 0,936 t.$$

147. — Para la misma viga se pide los diagramas de momentos flectores y esfuerzos tangenciales correspondientes a la carga uniformemente repartida parcial representada en la figura 117.

Los valores de  $\overline{X}^{(i)}$  y  $\overline{X}^{(d)}$  correspondientes a la carga considerada se obtienen por diferencia de los correspondientes a cargas uniformes extendidas entre el extremo  $A$  y puntos de abscisas numéricas  $v_2 = 0,583$  y  $v_1 = 0,25$ .

Con los valores de tabla VII<sup>12a</sup> (para  $n = 0,20$  y  $\lambda = 0,25$ ) se obtiene así

$$\overline{X}^{(i)} = 0,168 - 0,0432 = 0,1248,$$

$$\overline{X}^{(d)} = 0,146 - 0,0309 = 0,1151.$$

Resulta

$$\overline{\mathcal{M}}^{(i)} = -pl^2 \overline{X}^{(i)} v^{(i)} = -2,00 \text{ tm}^{-1} \times 7,00^2 \text{ m}^2 \times 0,1248 \times 0,342 = -4,18 \text{ tm}$$

$$\overline{\mathcal{M}}^{(d)} = -pl^2 \overline{X}^{(d)} v^{(d)} = -2,00 \text{ tm}^{-1} \times 7,00^2 \text{ m}^2 \times 0,1151 \times 0,368 = -4,15 \text{ tm}.$$

Adoptando la escala

$$\frac{1,5 \text{ tm}}{\text{cm}}$$

para el diagrama de momentos flectores y llevando en la misma estos momentos focales, se ha obtenido la recta  $A_0B_0$ .

La carga total es

$$P_t = p c = 2 \text{ tm}^{-1} \times 2,33 \text{ m} = 4,66 t,$$

con

$$v'_G = v_1 + \frac{1}{2} \bar{c} = v_1 + \frac{c}{2l} = 0,25 + 0,167 = 0,417.$$

Para este valor de  $v'_G$ , la tabla XI a, da

$$\bar{f}_0 = 0,243$$

y resulta, para la carga considerada concentrada,

$$f_0 = P_t l \bar{f}_0 = 4,66 t \times 7,00 \text{ m} \times 0,243 = 7,94 \text{ tm}.$$

Llevando en la escala de momentos esta ordenada  $f_0$ , se ha obtenido el diagrama de momentos  $A_0MB_0$  de la carga supuesta concentrada. Bajando las verticales correspondientes a los extremos de la carga uniforme, se han obtenido los puntos de tangencia extremos de la parábola  $SQT$ , que se ha trazado por puntos y tangentes.

Resulta así, para el diagrama de momentos flectores de la viga elásticamente empotrada, el rayado de la figura.

Para los esfuerzos tangenciales se ha adoptado la escala

$$\frac{0,75 t}{\text{cm}}$$

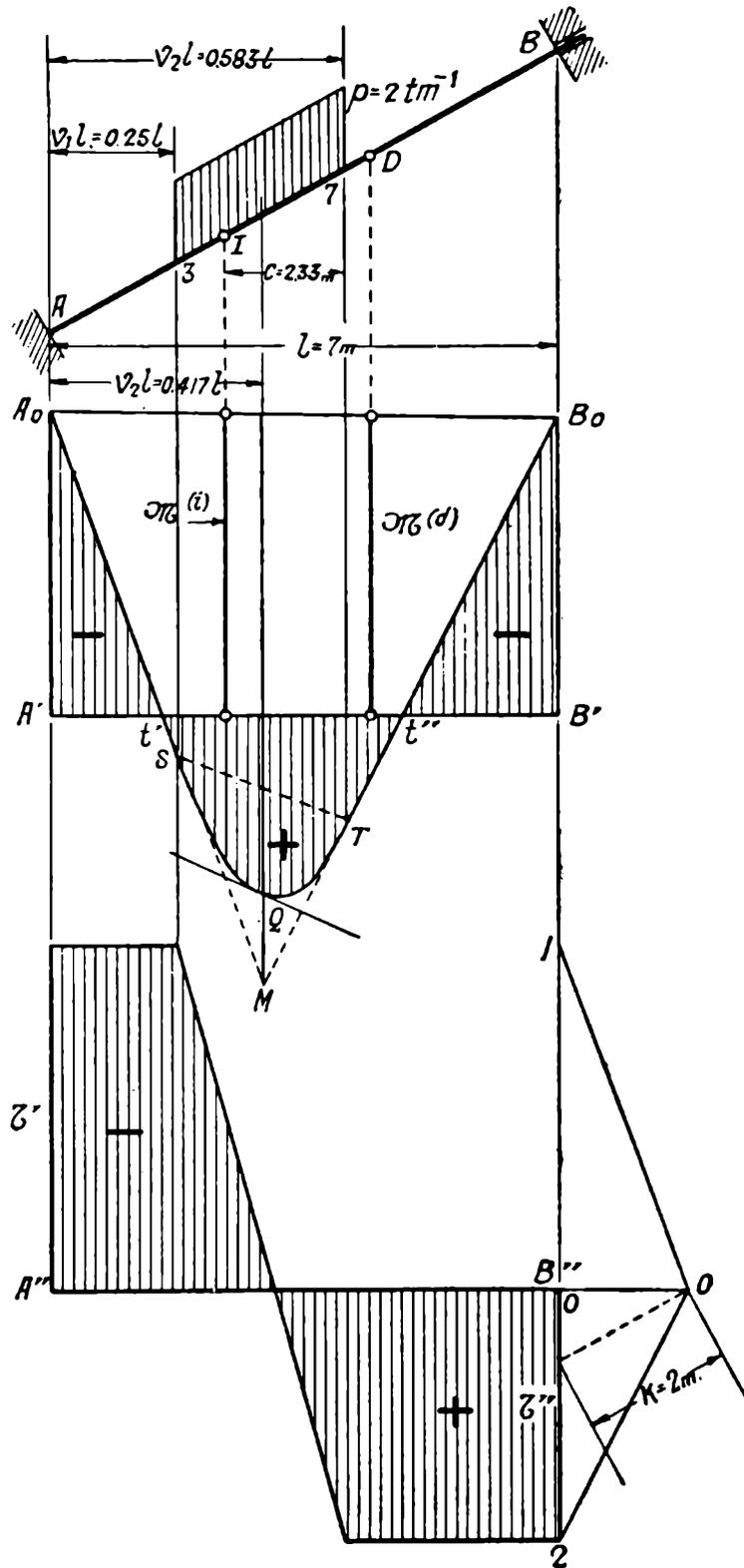


FIG. 117.

con lo que la distancia polar es

$$k = \frac{\frac{1,5 \text{ tm}}{\text{cm}}}{\frac{0,75 t}{\text{cm}}} = 2 \text{ m}.$$

Con esta distancia polar se ha trazado el diagrama de esfuerzos tangenciales de la figura, que no requiere nuevas explicaciones.

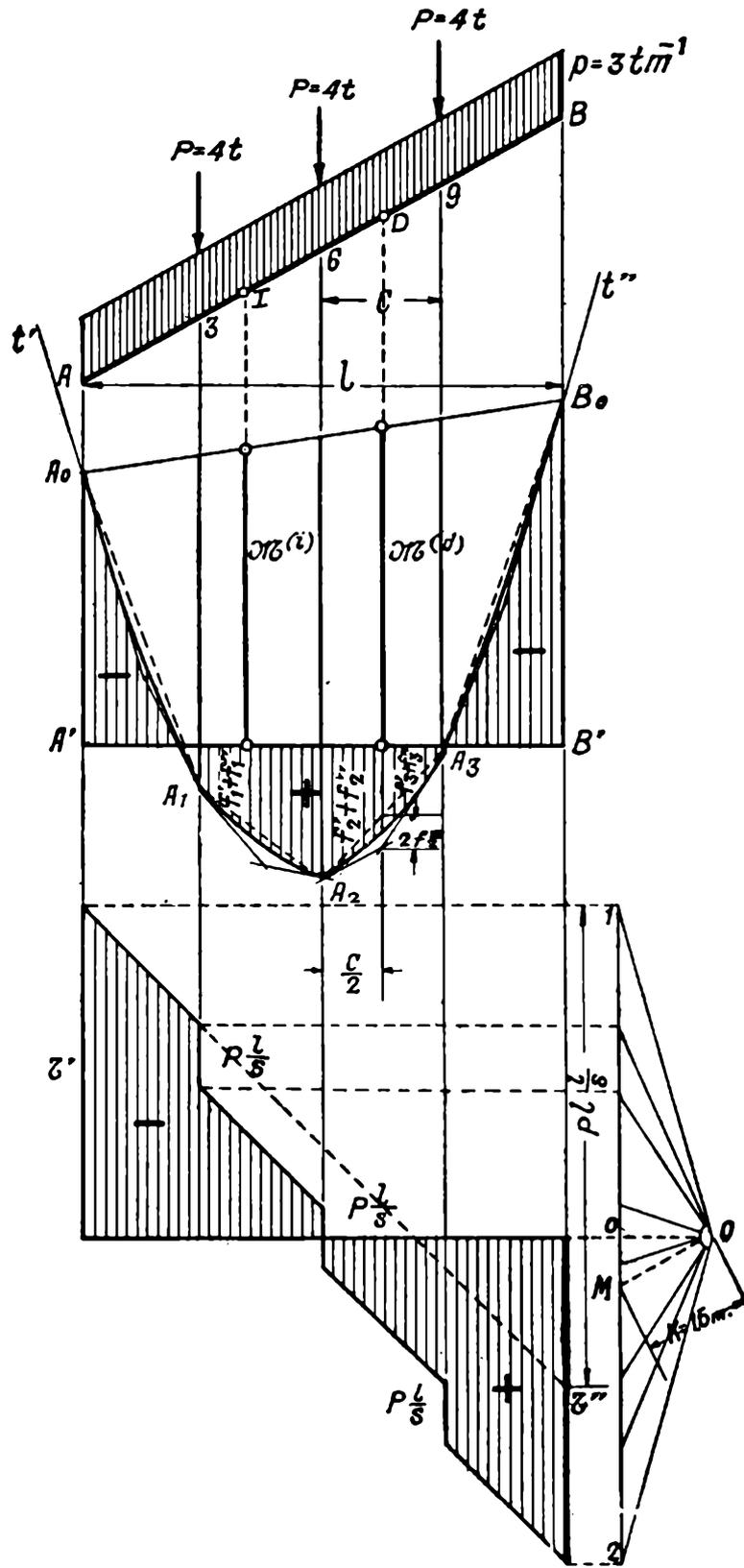


FIG. 118.

148. — Consideremos, finalmente, que sobre la misma viga anterior actúa el estado de carga de la figura 118. Los momentos focales son

$$\mathcal{M}^{(i)} = - (Pl \bar{X}^{(i)'} + pl^2 \bar{X}^{(i)''}) v^{(i)},$$

$$\mathcal{M}^{(d)} = - (Pl \bar{X}^{(d)'} + pl^2 \bar{X}^{(d)''}) v^{(d)},$$

siendo  $\bar{X}^{(i)'}$  y  $\bar{X}^{(d)'}$  los valores de la tabla VII  $a^3$  correspondientes al estado de cargas concentradas y  $\bar{X}^{(i)''}$  y  $\bar{X}^{(d)''}$  los de la carga uniforme (tabla VII  $a^{12}$ ).

Las tablas VII $^{1-11a}$  y VII $^{12a}$  dan

$$\begin{aligned}\bar{X}^{(i)'} &= 0,948, & \bar{X}^{(d)'} &= 0,948, \\ \bar{X}^{(i)''} &= 0,25, & \bar{X}^{(d)''} &= 0,25.\end{aligned}$$

Sustituyendo, resulta

$$\mathcal{M}^{(i)} = - (4 \text{ t} \times 7 \text{ m} \times 0,948 + 3 \text{ tm}^{-1} \times 7^2 \text{ m}^2 \times 0,25) 0,342 = - 21,7 \text{ tm},$$

$$\mathcal{M}^{(d)} = - (4 \text{ t} \times 7 \text{ m} \times 0,948 + 3 \text{ tm}^{-1} \times 7^2 \text{ m}^2 \times 0,25) 0,368 = - 23,3 \text{ tm}.$$

Llevadas estas magnitudes, en la escala

$$\frac{10 \text{ tm}}{1,32 \text{ cm}},$$

se ha obtenido la recta  $A_0B_0$ .

Para los momentos flectores que las cargas concentradas originarían en la viga simplemente apoyada, se tiene

$$f'_i = Pl\bar{f}_{(i)};$$

siendo, según la tabla XI  $b$ ,

$$\bar{f}_1 = \bar{f}_3 = 0,375, \quad \bar{f}_2 = 0,50,$$

resulta

$$f'_1 = f'_3 = 4 \text{ t} \times 7 \text{ m} \times 0,375 = 10,50 \text{ tm},$$

$$f'_2 = 4 \text{ t} \times 7 \text{ m} \times 0,5 = 14 \text{ tm}.$$

Las ordenadas de la parábola de momentos originada por la carga uniforme, correspondientes a los puntos de aplicación de las cargas concentradas ( $v'_1 = 0,25$ ,  $v'_2 = 0,50$ ), son

$$f''_i = pl^2\bar{f}''_i,$$

con (tabla XI  $a$ )

$$\bar{f}''_1 = \bar{f}''_3 = 0,0937, \quad \bar{f}''_2 = 0,125,$$

o sea,

$$f''_1 = f''_3 = 3 \text{ tm}^{-1} \times 7^2 \text{ m}^2 \times 0,0937 = 13,77 \text{ tm},$$

$$f''_2 = 3 \text{ tm}^{-1} \times 7^2 \text{ m}^2 \times 0,125 = 18,37 \text{ tm}$$

En la figura se ha llevado, a partir de la recta  $A_0B_0$ , las ordenadas  $f'_i + f''_i$ , obteniendo los puntos  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ .

Entre dos fuerzas concentradas el diagrama de momentos es una parábola cuyas ordenadas referidas a la recta  $A_iA_{i+1}$ , para los puntos que dividen la distancia  $c$  en cuatro partes iguales son

$$f'''_i = pc^2\bar{f}'''_i,$$

con (tabla XI  $d$ )

$$\bar{f}'''_1 = \bar{f}'''_3 = 0,0937, \quad \bar{f}'''_2 = 0,125, \quad pc^2 = 9,20 \text{ tm};$$

resulta

$$f'''_1 = f'''_3 = 0,862 \text{ tm}, \quad f'''_2 = 1,15 \text{ tm}.$$

Las tangentes en los extremos de cada rama  $A_i A_{i+1}$  de parábola se cortan en la sección media en un punto distante

$$2f'''_2 = 2 \times 1,15 \text{ tm} = 2,30 \text{ tm}$$

de la recta  $A_i A_{i+1}$ .

El diagrama de esfuerzos tangenciales, trazado en la figura en la escala

$$\frac{5 \text{ t}}{\text{cm}},$$

no requiere explicaciones.

149. — Consideremos, por último, el mismo sistema de (60), siendo  $v^{(i)} = 0,433$  y  $v^{(d)} = 0,315$ , sujeto al estado de cargas representado en la figura 119. Como este último no corresponde a los que figuran en las tablas, calcularemos los momentos de Ritter mediante sus líneas de influencia. Para obtener la línea de influencia  $v^{(i)}$  ( $v^{(d)}$ ) se han representado en la figura 120 los números  $\bar{\xi}^{(d)}$  ( $\bar{\xi}^{(i)}$ ) dados por la tabla III  $\sigma$  (para  $n = 0,10$  y  $\lambda = 0,25$ ), en la escala

$$\frac{1}{6,5 \text{ cm}}.$$

Estas curvas dan las líneas de influencia de los momentos de Ritter  $T^{(i)}$  y  $T^{(d)}$ , en la escala

$$l \frac{1}{6,5 \text{ cm}} = 4,50 \text{ m} \frac{1}{6,5 \text{ cm}} = \frac{1 \text{ m}}{1,44 \text{ cm}}$$

Para calcular los momentos de Ritter que corresponden al estado de cargas dado, se han obtenido, mediante un planímetro, las ordenadas medias de estas líneas de influencia (sin leerlas en la escala) en las partes correspondientes a las cargas uniformes  $p_5$  y  $p_6$ , resultando

$$\begin{aligned} v^{(i)}_5 (\text{cm}) &= 1,35 \text{ cm}, & v^{(i)}_6 (\text{cm}) &= 2,1 \text{ cm}, \\ v^{(d)}_5 (\text{cm}) &= 1,5 \text{ cm}, & v^{(d)}_6 (\text{cm}) &= 1,6 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Las cargas totales correspondientes a dichas cargas uniformes son

$$\begin{aligned} P_5 &= 2 \text{ tm}^{-1} \times 2 \text{ m} = 4 \text{ t}, \\ P_6 &= 3 \text{ tm}^{-1} \times 2,5 \text{ m} = 7,5 \text{ t} \end{aligned}$$

Los cálculos se efectúan en el cuadro siguiente:

$j$	$P_j$ (t)	$v^{(i)}_j$ (cm)	$v^{(d)}_j$ (cm)	$P_j v^{(i)}_j$ (tcm)	$P_j v^{(d)}_j$ (tcm)
1	3	1,1	1,35	3	4,05
2	5	2,5	2,4	12,5	12
3	4	2,6	1,9	10,4	7,6
4	8	1,8	1,1	14,4	8,8
5	4	1,35	1,5	5,4	6
6	7,5	2,1	1,6	15,75	12
				61,45	50,45

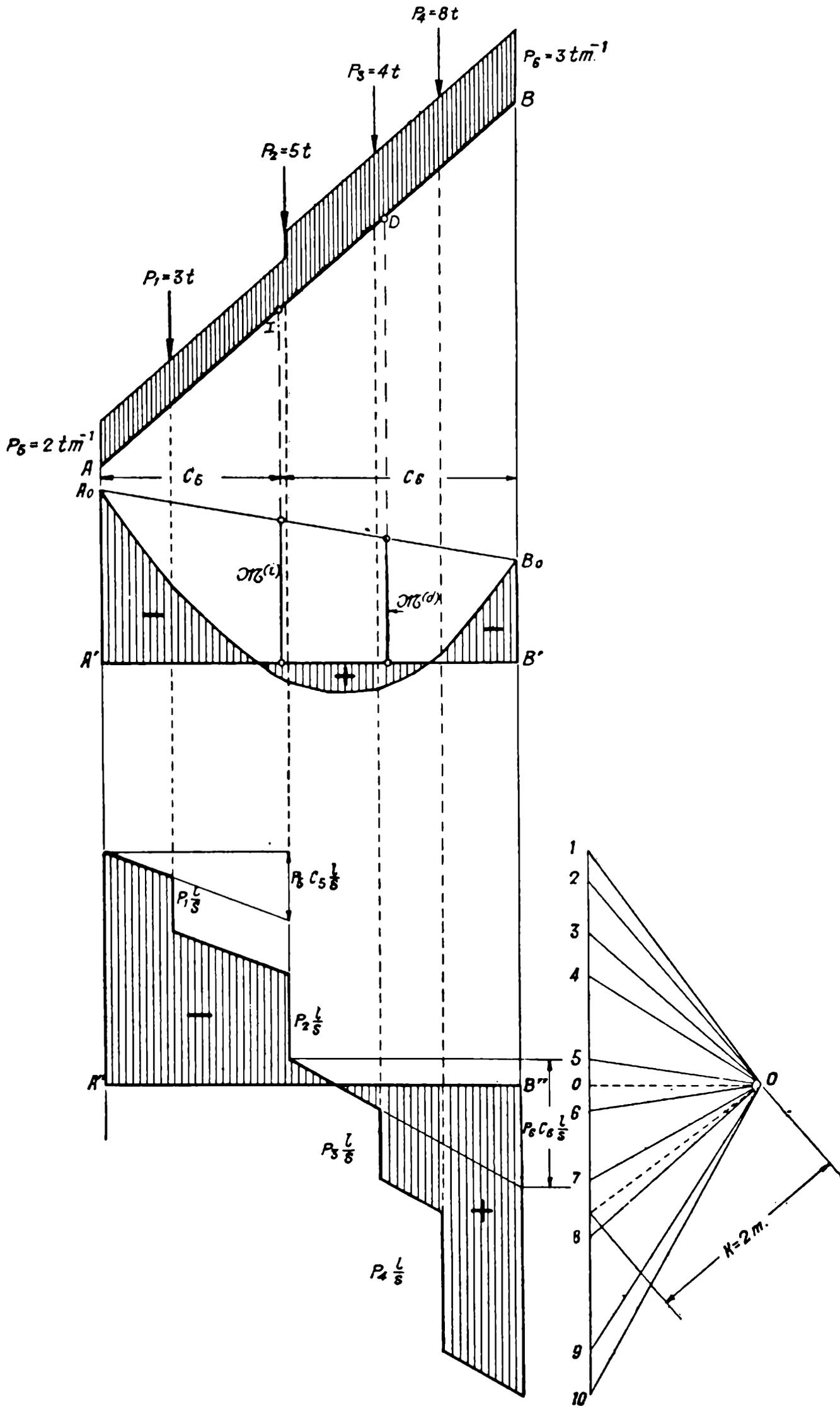


FIG. 119

Resulta

$$T^{(i)} = 61,45 \text{ tm} \frac{1 \text{ m}}{1,44 \text{ cm}} = 42,8 \text{ tm},$$

$$T^{(d)} = 50,45 \text{ tm} \frac{1 \text{ m}}{1,44 \text{ cm}} = 35 \text{ tm}$$

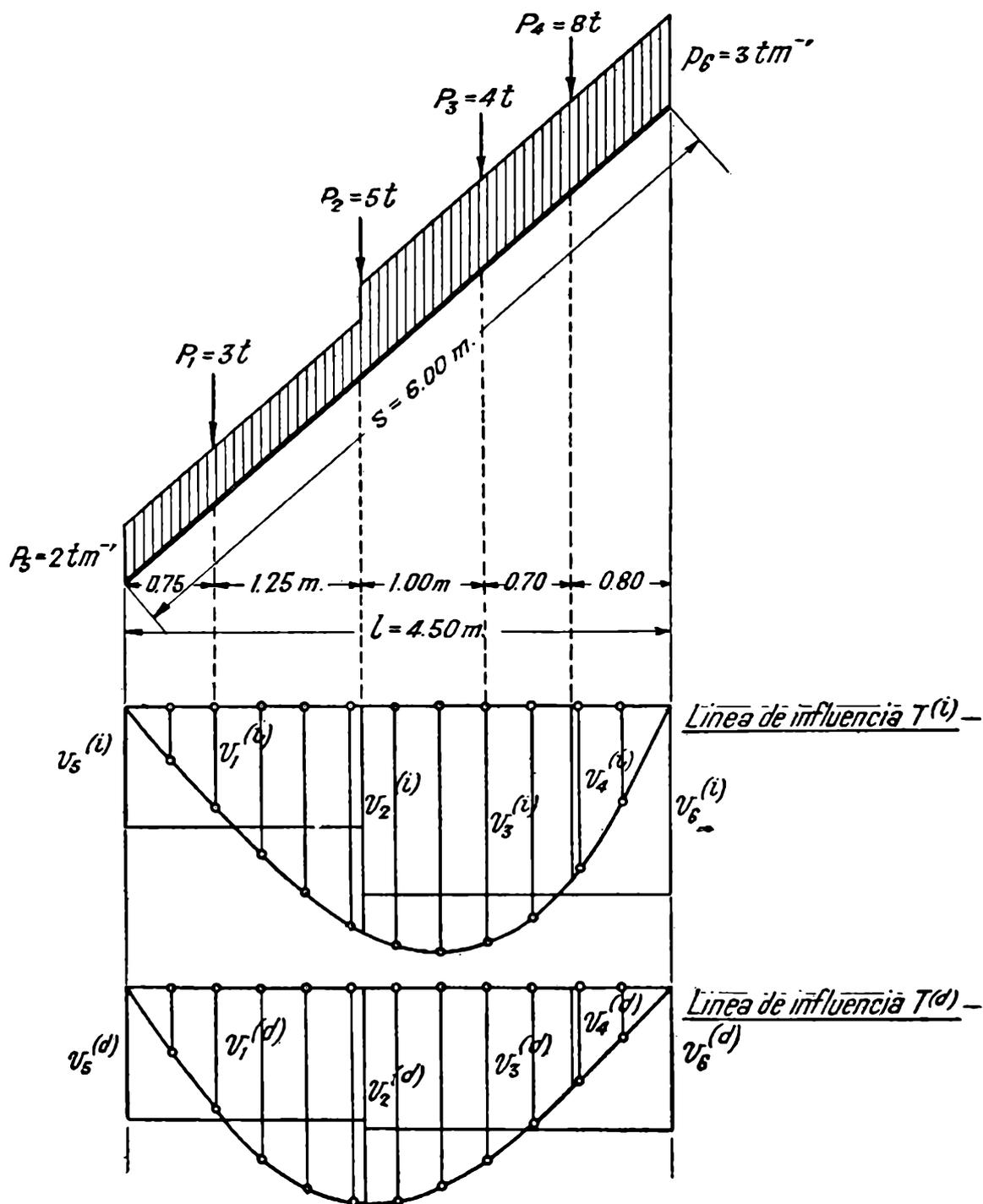


FIG. 120.

y, por consiguiente,

$$\mathcal{M}^{(i)} = - T^{(d)} v^{(i)} = - 35 \text{ tm} \times 0,433 = - 15,2 \text{ tm},$$

$$\mathcal{M}^{(d)} = - T^{(i)} v^{(d)} = - 42,8 \text{ tm} \times 0,315 = - 13,5 \text{ tm}.$$

Con estos elementos se han trazado los diagramas representados en la figura 119, en la escala  $\frac{10 \text{ tm}}{\text{cm}}$  el de momentos flectores y de  $\frac{4 \text{ t}}{\text{cm}}$  el de esfuerzos tangenciales.

§ 4. — Cargas móviles. Líneas de influencia de características.

150. Líneas de influencia de los momentos flectores en las secciones extremas. — Sea la viga elásticamente empotrada  $AB$  (fig. 121), de

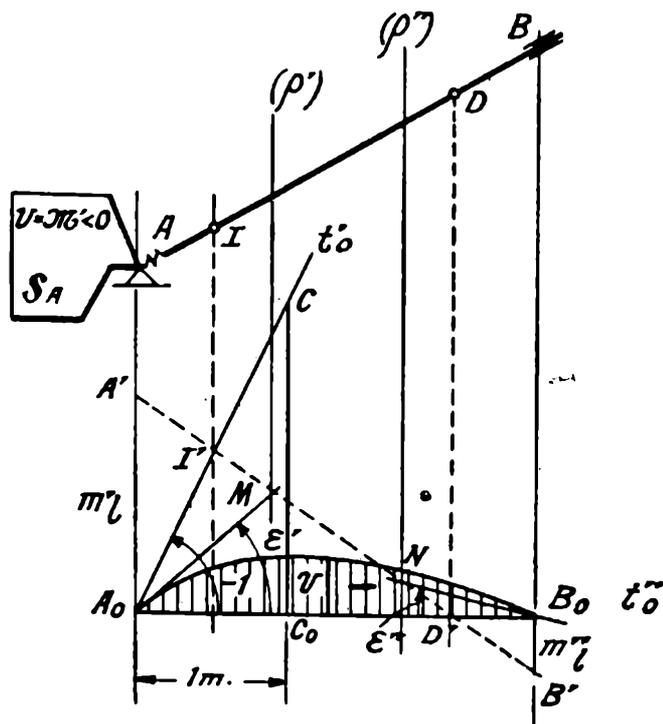


FIG. 121.

la que nos proponemos trazar la línea de influencia del momento flector  $\mathcal{M}'$  en A, en la escala

$$\frac{1 \text{ m}}{3 \text{ cm}}.$$

La incógnita  $\mathcal{M}'$  se pone en evidencia dejando la chapa  $S_A$  en libertad de girar en torno al punto A y haciendo actuar sobre ella un par  $M = \mathcal{M}'$ . La línea de influencia es la elástica de la deformación originada por un par  $U$  de intensidad tal que la chapa experimente una rotación  $\theta_A = -1$ . El diagrama de momentos que origina el par  $U$  es lineal, desde que en la viga no actúan cargas; la elástica respectiva se puede obtener, por tanto, mediante el polígono de las tercias.

La rotación  $\theta_A = -1$  debe llevarse en la escala adoptada para la línea de influencia. A una distancia  $u = 1$  m. del polo A, la rotación  $\theta_A = -1$  produce un desplazamiento vertical  $-1 \times 1 \text{ m} = -1 \text{ m}$ , que, en la escala  $\frac{1 \text{ m}}{3 \text{ cm}}$  se representa por un segmento igual a 3 cm. Llevando, pues, a partir de  $A_0$  el segmento  $\overline{A_0C_0} = 1 \text{ m}$ , en la escala de longitudes en que está dibujada la viga, y la ordenada  $\overline{C_0C} = 3 \text{ cm}$ , la recta  $CA_0$  representa la rotación  $-1$  referida al eje  $A_0B_0$ .

La recta  $A_0C$  es el eje extremo izquierdo  $t'_0$ ; el derecho  $t''_0$  coincide con  $A_0B_0$ . Los focos de la elástica son los puntos  $I'$  y  $D'$  de intersección de estos ejes con las verticales focales. La recta  $I'D'$  es el lado intermedio, y con éste queda determinado el polígono de las tercias  $A_0MNB_0$ .

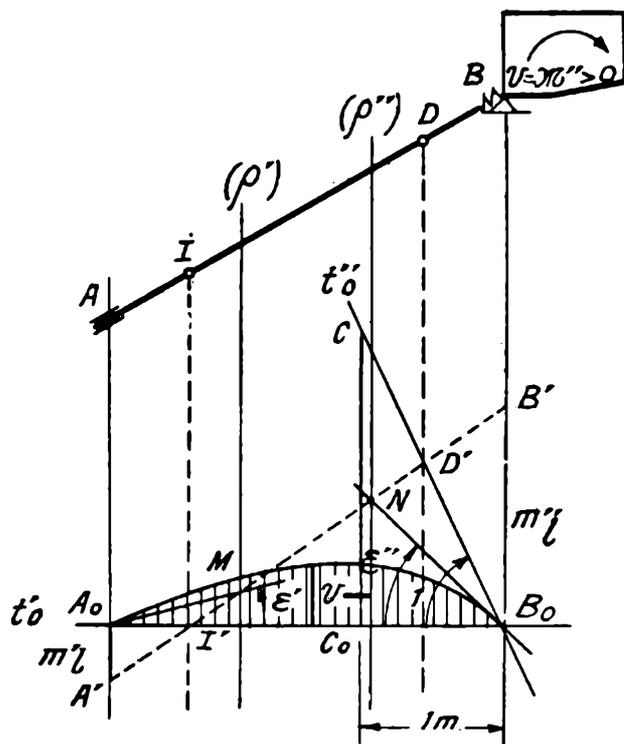


FIG. 122.

La línea de influencia buscada es la elástica que corresponde a dicho polígono de las tercias. Sus ordenadas  $v_k$  son, según (51),

$$v_k = m'_l \bar{\xi}^{(v)}_k + m''_l \bar{\xi}^{(d)}_k.$$

Siendo  $m'_l = \overline{A_0A'} > 0$  y  $m''_l = \overline{B_0B'} < 0$ , con los segmentos leídos en la escala  $\frac{1 \text{ m}}{3 \text{ cm}}$  adoptada para la línea de influencia.

Si la viga es de momento de inercia constante, la elástica que constituye la línea de influencia se puede trazar directamente, por puntos y tangentes, en la forma conocida (41).

151.— La línea de influencia del momento flector  $M''$  en el extremo derecho  $B$ , se obtiene en forma análoga, como se vé en la figura 122. En este caso debe llevarse, según (50), una rotación  $\theta_B = 1$ .

152. Línea de influencia del momento flector en una sección cualquiera.— El momento flector en la sección  $N$ , se pone en evidencia en la forma que indica la figura 123. Para hallar su línea de influen-

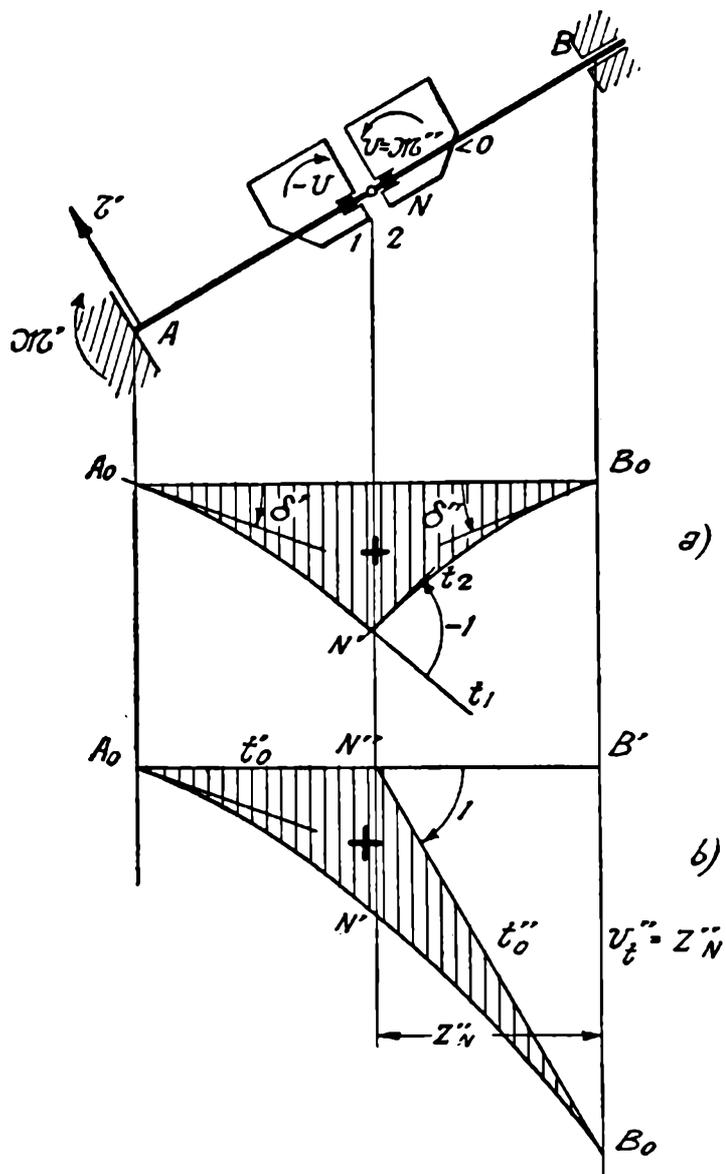


FIG. 123.

cia se debe hacer actuar en las chapas 1 y 2, dos pares opuestos, de intensidad tal que la 2 experimente, respecto de la 1, una rotación  $\theta_{21} = -1$ . La elástica originada por estos pares, es decir, la línea de influencia, tiene la forma de la figura 123 a; está constituida por dos ramas que se cortan en el punto  $N'$  de la vertical de  $N$ , siendo la rotación de la tangente  $t_2$  respecto de la  $t_1$  igual a  $-1$ .

Los dos pares opuestos  $U$ , aplicados en las chapas 2 y 1, originan en la viga, un diagrama lineal de momentos flectores. Si  $M'$  y  $T'$  son, en efecto, el momento flector y el esfuerzo tangencial en  $A$ , debidos a di-

chos pares, el momento en una sección cualquiera, anterior o posterior a  $N$ , es

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}' - \mathcal{T}' x',$$

pues los pares  $U$  no intervienen por ser opuestos y actuar en la misma sección. Por consiguiente, la elástica que constituye la línea de influencia podrá obtenerse mediante un polígono de las tercias, que quedará determinado si damos sus ejes extremos  $t'_0$  y  $t''_0$ .

Si suponemos que  $A_0N'B_0$  (fig. 123 b) es esta elástica, sin tomar en cuenta la rotación alrededor de  $N$ , la parte correspondiente a  $NB$  se tendrá que referir a la recta  $N''B_0$ , que formará con el eje  $A_0B'$  una rotación igual a 1, como es inmediato. Los ejes extremos izquierdo y derecho son, pues, respectivamente,  $A_0B'$  y  $N''B_0$ .

153. — De acuerdo con lo que antecede, la línea de influencia del momento flector  $\mathcal{M}_N$  en  $N$  (fig. 124) se obtiene como sigue:

Sea  $A_0B'_0$  el eje; por el punto  $N''$ , situado en la vertical de  $N$ , se traza la recta  $N''B_0$  que, en la escala adoptada para la línea de influencia, representa una rotación  $\theta = 1$ . Se tienen así los ejes extremos  $t'_0$  y  $t''_0$  y, con ellos, los focos  $I'$  y  $D'$  de la elástica, que determinan el lado intermedio  $I'D'$ ; con estos elementos se completa el polígono de las tercias  $A_0MNB_0$ .

Las ordenadas de la elástica, que constituye la línea de influencia, referidas a la recta de los extremos  $A_0B_0$ , están dadas, como sabemos, por la expresión

$$v^*_k = m'_l \bar{\xi}^{(i)}_k + m''_l \bar{\xi}^{(d)}_k,$$

siendo  $m'_l = \overline{A_0A''} < 0$  y  $m''_l = \overline{B_0B''} < 0$ , debiendo leerse estos segmentos en la escala adoptada. Calculadas las ordenadas  $v^*_k$  mediante las tablas III y llevadas, en la escala adoptada, a partir del eje  $A_0B_0$ , se obtiene la curva  $A_0N'B_0$ , que, referida a los ejes  $A_0N''$  y  $N''B_0$ , da la línea de influencia buscada.

Si se la quiere referir a un solo eje, basta llevar las ordenadas correspondientes a la parte  $NB$ , a partir del eje  $A'_0B'_0$ , siendo  $A'_0$  el punto determinado por la recta  $N''A'_0$  que forma la rotación  $-1$  con el eje  $A_0B'_0$ , como es inmediato; es decir, a partir del eje  $N'B'_0$ , siendo  $N'$  el punto de intersección de  $A_0B_0$  con el vertical de  $N$ .

Si la viga es de momento de inercia constante, la curva  $A_0N'B_0$  puede obtenerse por puntos y tangentes en la forma conocida. También se puede, en este caso, referir la línea de influencia a un único eje. Basta limitar el trazado de la curva anterior a la parte  $AN$  y, para la parte  $NB$ , trazar la elástica que pasa por los puntos  $A'_0$  y  $B'_0$  y cuyas tangentes extremas izquierda y derecha son respectivamente  $A'_0N''$  y  $N''B'_0$ .

154. Forma de las líneas de influencia de momentos flectores. — Las líneas de influencia de momentos flectores están dadas por curvas que no pueden tener más de un punto de inflexión, pues los diagramas lineales de momentos flectores de que provienen, no pueden acusar más de una sección con momento nulo.

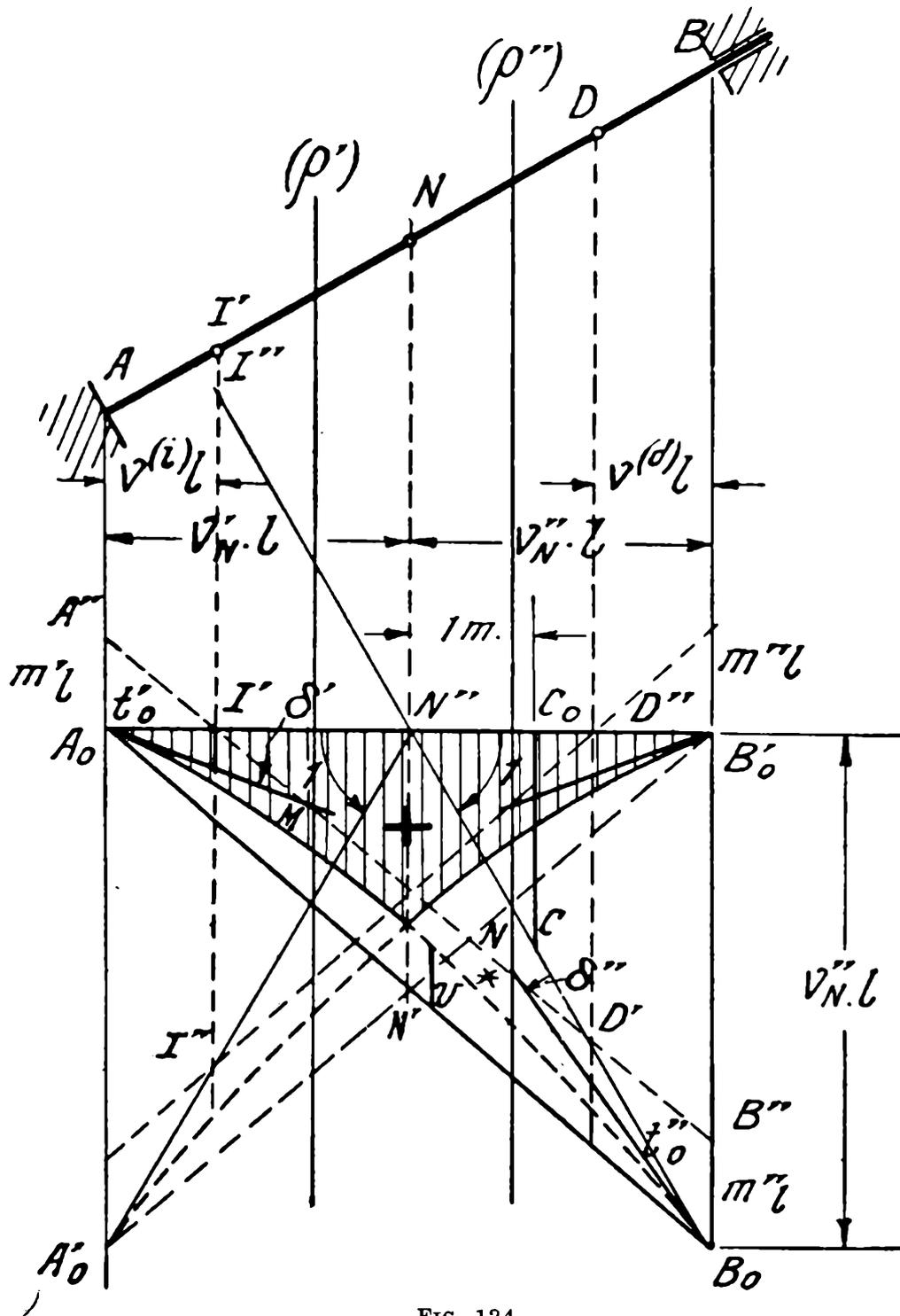


FIG. 124.

Las de los momentos flectores  $M'$  y  $M''$  en las secciones extremas y  $M_N$  en la sección  $N$  comprendida entre los focos (fig. 121, 122 y 123), tienen rotaciones extremas  $\delta'$  y  $\delta''$  de signo contrario y no pueden, por consiguiente, cortar los ejes. Todas sus ordenadas son del mismo signo, negativo para las dos primeras y positivo para la tercera, como se representan en las figuras 125 a, b y c.

El polígono de las tercias que da la línea de influencia del momento flector en el foco  $I$ , posee la forma representada en la figura 126; tiene  $\delta' > 0$  y  $\delta'' = 0$ , pues el lado intermedio coincide con el eje extremo  $N'B_0$  y, por tanto,  $N$  se encuentra sobre este último. La línea de influencia es toda positiva y tangente al eje en la vertical de  $B$  (fig. 125 *d*).

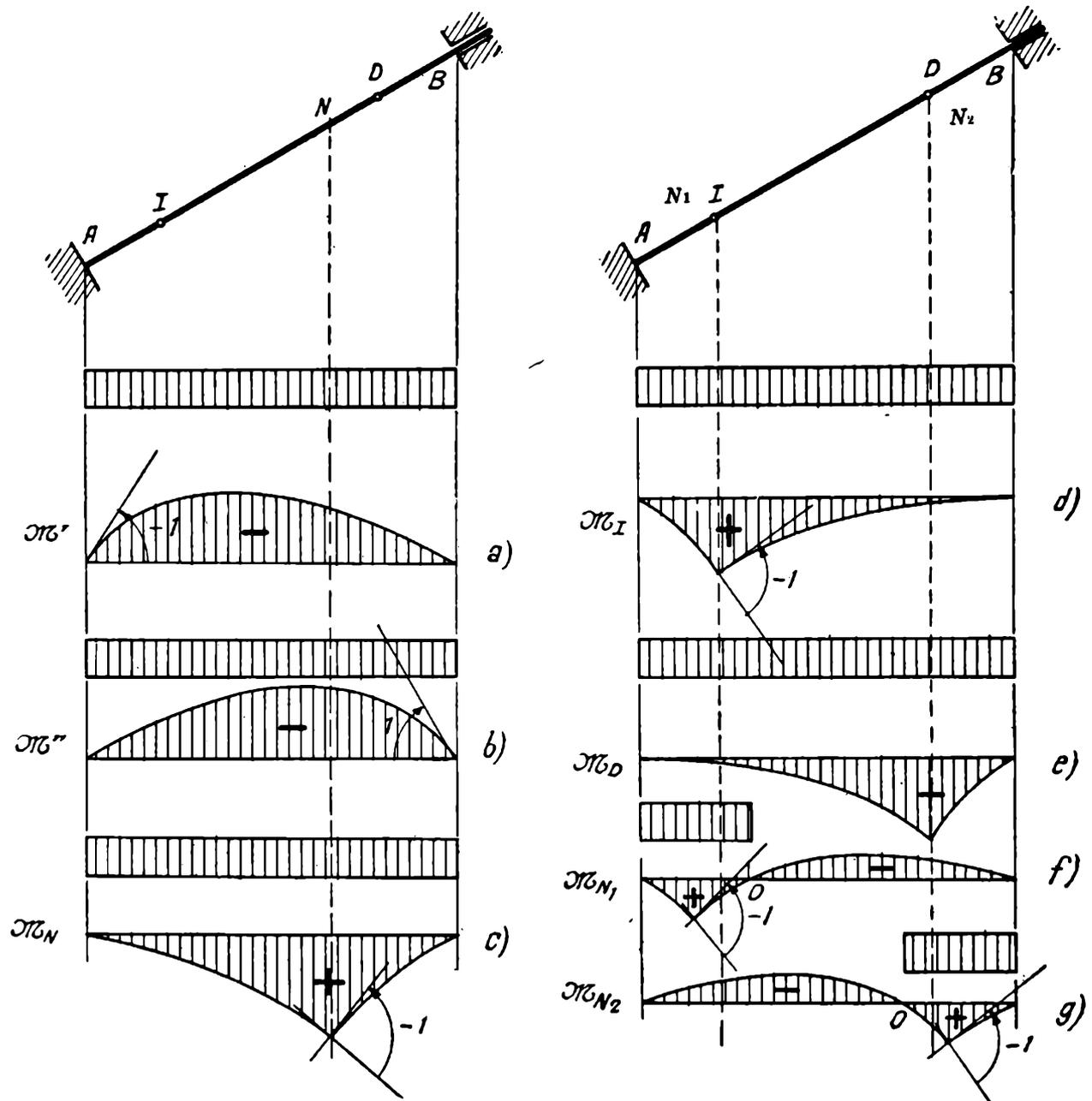


FIG. 125.

Análogamente, la del momento flector en el foco  $D$  es también positiva y tangente al eje en correspondencia a la vertical del extremo  $A$  (fig. 125 *e*).

En la figura 127 se da el polígono de las tercias de la línea de influencia correspondiente a una sección  $N_1$ , comprendida entre el extremo  $A$  y el foco izquierdo  $I$ . Las rotaciones extremas  $\delta'$  y  $\delta''$  son de signo contrario. Otro tanto sucede con  $m'_1$  y  $m''_1$  y, por tanto, con los momentos  $M'$  y  $M''$ . Es decir, la curva posee un punto de inflexión.

Con estas condiciones, debe necesariamente cortar a los ejes en un punto y resulta con la forma de la figura 125 *f*; entre *A* y *O* las ordenadas son positivas y entre *O* y *B*, negativas.

Análogamente, la línea de influencia del momento flector en una sección  $N_2$  comprendida entre el foco derecho *D* y el extremo *B* tiene la forma que indica la figura 125 *g*.

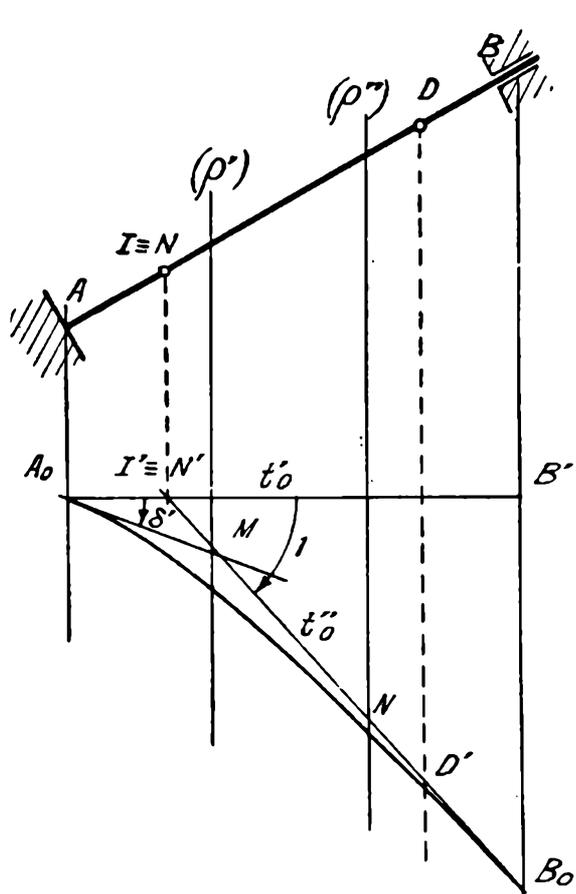


FIG. 126.

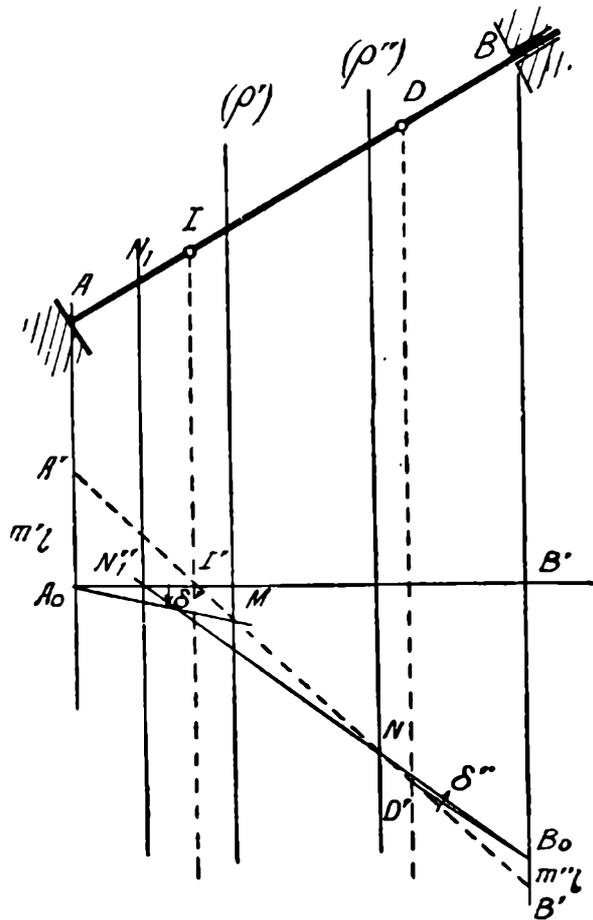


FIG. 127.

La figura 125 da, para cada caso, la longitud de carga uniformemente repartida que debe aplicarse a los efectos de obtener el máximo momento flector positivo. Para el máximo momento flector negativo, corresponde la carga complementaria (que sumada con la anterior, carga totalmente la viga).

**155. Líneas de influencia de esfuerzos tangenciales.** — El esfuerzo tangencial  $\mathcal{T}'$  en *A* se pone en evidencia como indica la figura 128. La fuerza  $U = \mathcal{T}'$  capaz de producir en la chapa  $S_A$  un desplazamiento  $\alpha = -1$ , tiene el sentido indicado. A este desplazamiento, como se deduce del polígono de descomposición  $A'RA_0$ , corresponde un desplazamiento vertical  $v' = -\frac{l}{s}$

La línea de influencia se obtiene como sigue:

Si  $A'B_0$  es el eje, se lleva a partir de  $A'$  normalmente a la pieza, el vector  $A'R = -1$ ; trazando por  $R$  la paralela al eje, se determina el punto  $A_0$ , tal que

$$\overline{A'A_0} = v' = -\frac{l}{s}.$$

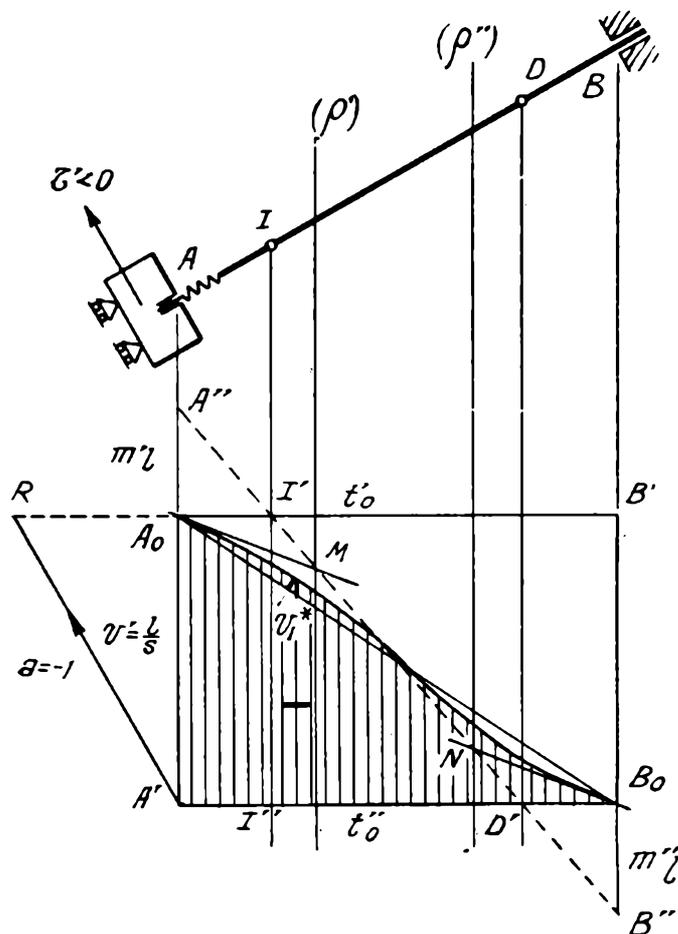


FIG. 128.

Como la sección extrema  $A$  no puede experimentar rotaciones, el eje extremo izquierdo es la paralela  $t'_0$  al eje  $A'B_0$ ; el eje extremo derecho  $t''_0$  coincide con  $A'B_0$ . Con estos elementos, el polígono de las tercias se obtiene en la forma conocida y como indica claramente la figura.

Las ordenadas  $v^*_k$  de la línea de influencia, referidas a la línea de los extremos  $A_0B_0$ , se calculan, como en los casos anteriores, con la expresión

$$v^*_k = m'_l \bar{\xi}^{(i)}_k + m''_l \bar{\xi}^{(d)}_k,$$

siendo  $m'_l = \overline{A_0A''}$  y  $m''_l = \overline{B_0B''}$ , con segmentos leídos con su signo en la escala adoptada.

Calculadas estas ordenadas, y llevadas a partir de  $A_0B_0$ , se obtiene, en definitiva, la línea de influencia.

Huelga agregar que si la viga es de momento de inercia constante, esta curva puede obtenerse por puntos y tangentes.

156. — La línea de influencia del esfuerzo tangencial  $\mathcal{T}''$ , en el extremo derecho  $B$ , se obtiene en la misma forma, como indica la figura 129, que no requiere mayor explicación. Debe recordarse que, según (50), debe darse a la chapa  $S_B$  un desplazamiento  $a=1$ .

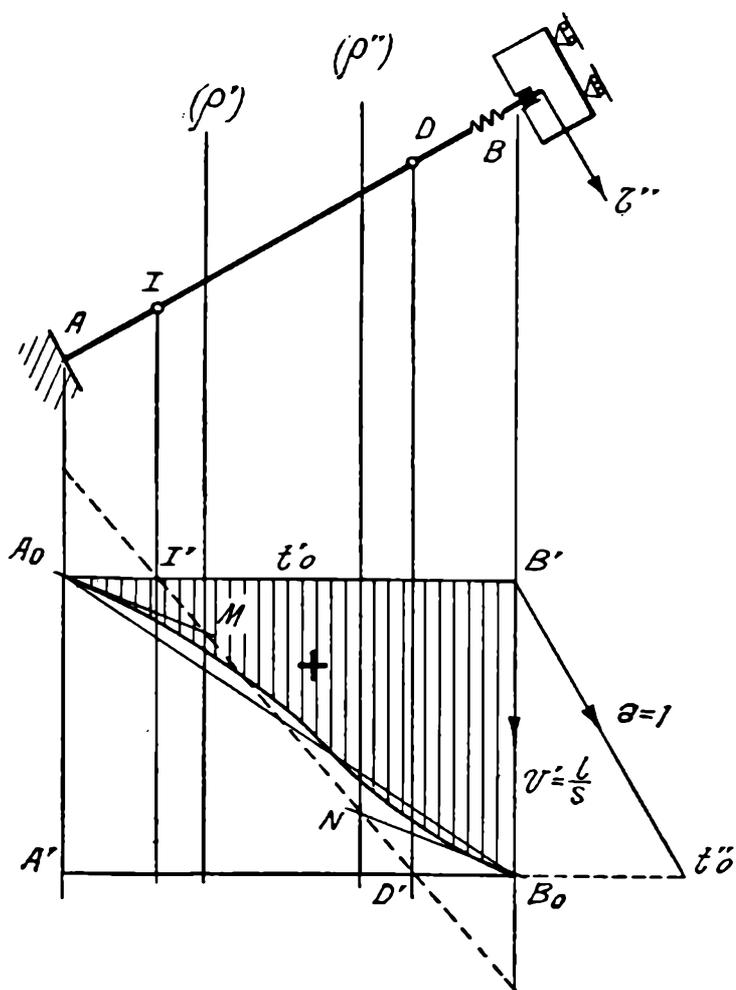


FIG. 129.

Por otra parte, es inmediato que se trata de la misma curva que da la línea de influencia  $\mathcal{T}'$  (fig. 128), referida al eje paralelo a  $A'B_0$  que pasa por  $A_0$ .

157. — Las líneas de influencia del esfuerzo tangencial en una sección cualquiera  $N$ , se pueden obtener por el mismo camino, como indica la figura 130, con suficiente claridad. Pero es más cómodo deducirlas observando que sus ordenadas son iguales a las de la línea de influencia del esfuerzo tangencial  $\mathcal{T}'$  a la derecha de la sección  $N$ , e iguales a las de  $\mathcal{T}''$  a la izquierda de la misma. Trazando a partir del eje  $A'B'$  (fig. 131), las líneas de influencia de  $\mathcal{T}'$  y de  $\mathcal{T}''$  y cortándolas con la vertical de  $N$ , se obtiene la línea de influencia del esfuerzo tangencial  $\mathcal{T}$  en esta sección, como indica el rayado de la figura.

Las mismas curvas sirven para las líneas de influencia del esfuerzo tangencial para cualquier otra sección  $N_1$ .

158. Obtención numérica de las líneas de influencia. — Los polígonos de las tercias que, de acuerdo con lo que antecede, se construyen para determinar las líneas de influencia, sirven para su trazado, por

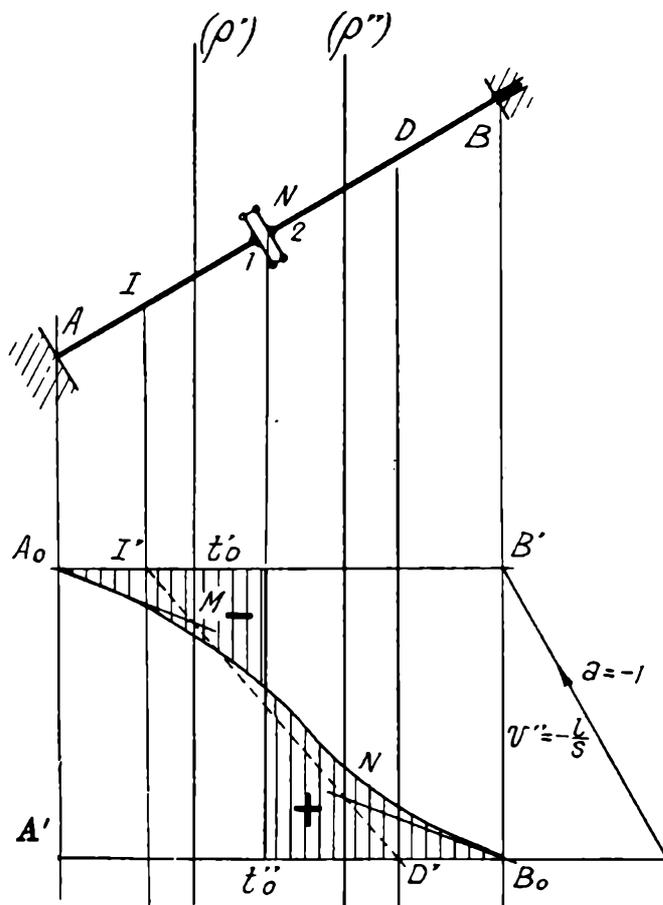


FIG. 130.

puntos y tangentes, cuando la viga es de momento de inercia constante.

Cuando el momento de inercia es variable, se utilizan sólo para determinar las magnitudes  $m'_l$  y  $m''_l$ , con las cuales se calcula luego, numéri-

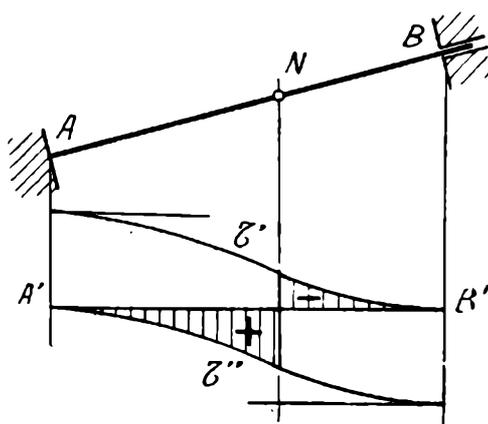


FIG. 131.

camente, las ordenadas  $v^*$ , referidas a la recta de los extremos. En este caso, puede ser más cómodo dar las expresiones analíticas de  $m'_l$  y  $m''_l$ , de modo a poder llevar los cálculos en forma numérica en su totalidad. Es de lo que pasamos a ocuparnos.

Designaremos  $v^N_k$  a las ordenadas en los puntos  $k$  de la línea de influencia del momento flector en la sección  $N$ ; las de las líneas de influencia de los momentos flectores en los extremos  $A$  y  $B$ , correspondientes al punto  $k$ , serán  $v^A_k$  y  $v^B_k$ . Pondremos, además,  $m'_{l,N}$  y  $m''_{l,N}$  para las magnitudes  $m'_l$  y  $m''_l$  de la línea de influencia del momento flector en  $N$ .

159. — De la figura 124, que da el lado intermedio del polígono de las tercias correspondiente a la línea de influencia del momento flector en  $N$ , se deduce, tomando en cuenta los signos,

$$m'_{l,N} = - \frac{\overline{D' D''}}{\overline{I' D''}} \overline{I' A_0} = - \frac{\overline{D' D''}}{(1 - v^{(i)} - v^{(d)}) l} v^{(i)} l,$$

que, siendo, a su vez,

$$\overline{D' D''} = \overline{N'' D''} = (v''_N - v^{(d)}) l,$$

da, sustituyendo y simplificando,

$$\overline{m}'_{l,N} = \frac{m'_{l,N}}{l} = - \frac{v''_N - v^{(d)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}} v^{(i)}$$

Análogamente, se tiene

$$m''_{l,N} = - \frac{\overline{I' I''}}{\overline{I' D''}} \overline{D'' B'_0} = - \frac{\overline{I' I''}}{(1 - v^{(i)} - v^{(d)}) l} v^{(d)} l,$$

que, siendo

$$\overline{I' I''} = \overline{I' N''} = (v'_N - v^{(i)}) l,$$

da

$$\overline{m}''_{l,N} = \frac{m''_{l,N}}{l} = - \frac{v'_N - v^{(i)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}} v^{(d)}$$

Las ordenadas de la línea de influencia, referidas al eje de los extremos  $A_0 B_0$ , son, de acuerdo con (51),

$$v^{*N}_k = m'_{l,N} \overline{\xi}^{(i)}_k + m''_{l,N} \overline{\xi}^{(d)}_k.$$

Para obtener las  $v^N_k$ , hay que agregar las ordenadas de la recta  $A_0 B_0$  referidas a  $A_0 B'_0$ , dadas por la expresión

$$\frac{v''_N l}{l} v'_k l = v''_N v'_k l = (1 - v'_N) v'_k l.$$

Además, para la parte situada a la derecha de  $N$ , se requiere restar las ordenadas de la recta  $N''B_0$  referidas al mismo eje, es decir, sumar las

$$-(v'_k - v'_N) l.$$

Para las ordenadas  $w^N_k$  de las líneas de influencia, destinadas a cargas horizontales, se tiene, además, como es inmediato,

$$w^N_k = \frac{h}{l} v^N_k.$$

Resumiendo, se tiene

$$[1] \left\{ \begin{array}{l} v^N_k = l \left[ \bar{m}'_{l,N} \bar{\xi}^{(i)}_k + \bar{m}''_{l,N} \bar{\xi}^{(d)}_k + (1 - v'_N) v'_k \right], \quad (k \text{ ant. } N) \\ v^N_k = l \left[ \bar{m}'_{l,N} \bar{\xi}^{(i)}_k + \bar{m}''_{l,N} \bar{\xi}^{(d)}_k + v'_N (1 - v'_k) \right], \quad (k \text{ post. } N) \\ w^N_k = \frac{h}{l} v^N_k, \\ \bar{m}'_{l,N} = - \frac{1 - v'_N - v^{(d)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}} v^{(i)}, \\ \bar{m}''_{l,N} = - \frac{v'_N - v^{(i)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}} v^{(d)} \end{array} \right.$$

160.—En la línea de influencia del momento flector  $\mathcal{M}'$  en el extremo  $A$ , todos los puntos  $k$  están a la derecha de  $A = N$  y, además,  $v'_N = 0$ . Resulta, por consiguiente,

$$[1] \left\{ \begin{array}{l} v^A_k = l \left( \bar{m}'_{l,A} \bar{\xi}^{(i)}_k + \bar{m}''_{l,A} \bar{\xi}^{(d)}_k \right), \\ w^A_k = \frac{h}{l} v^A_k, \\ \bar{m}'_{l,A} = - \frac{1 - v^{(d)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}} v^{(i)}, \\ \bar{m}''_{l,A} = \frac{v^{(i)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}} v^{(d)} \end{array} \right.$$

Análogamente, en la línea de influencia del momento flector  $\mathcal{M}''$  en el empotramiento  $B$ , todos los puntos  $k$  están a la izquierda de  $N$  y se tiene  $v'_N = 1$ .

Resulta

$$[2] \quad \left\{ \begin{array}{l} v_k^B = l (\bar{m}'_{l,B} \bar{\xi}^{(i)}_k + \bar{m}''_{l,B} \bar{\xi}^{(d)}_k) , \\ w_k^B = \frac{h}{l} , \\ \bar{m}'_{l,B} = \frac{\nu^{(d)}}{1 - \nu^{(i)} - \nu^{(d)}} \nu^{(i)} , \\ \bar{m}''_{l,B} = - \frac{1 - \nu^{(i)}}{1 - \nu^{(i)} - \nu^{(d)}} \nu^{(d)} \end{array} \right.$$

161. — Para la línea de influencia del esfuerzo  $\mathcal{C}'$  en el extremo  $A$ , de la figura 128, que da el polígono de las tercias que le corresponde, se deduce, tomando en cuenta los signos,

$$m'_{l,T'} = - \frac{\overline{I' I''}}{\overline{I'' D'}} \overline{A_0 I'} = - \frac{\frac{l}{s}}{(1 - \nu^{(i)} - \nu^{(d)}) l} \nu^{(i)} l ,$$

$$m''_{l,T'} = \frac{\overline{I' I''}}{\overline{I'' D'}} \overline{D' B_0} = \frac{\frac{l}{s}}{(1 - \nu^{(i)} - \nu^{(d)}) l} \nu^{(d)} l ,$$

o sea,

$$\bar{m}'_{l,T'} = m'_{l,T'} \frac{s}{l} = - \frac{\nu^{(i)}}{1 - \nu^{(i)} - \nu^{(d)}} ,$$

$$\bar{m}''_{l,T'} = m''_{l,T'} \frac{s}{l} = \frac{\nu^{(d)}}{1 - \nu^{(i)} - \nu^{(d)}} .$$

A las ordenadas  $v^*_k$ , referidas a la recta de los extremos  $A_0 B_0$ , dadas por la expresión

$$v^*_k = \frac{l}{s} (\bar{m}'_{l,T'} \bar{\xi}^{(i)}_k + \bar{m}''_{l,T'} \bar{\xi}^{(d)}_k) ,$$

se requiere sumar las de esta recta, referidas al eje  $A' B_0$ , iguales a

$$- \frac{l}{s} (1 - \nu'_k) l = - \frac{l}{s} (1 - \nu'_k) .$$

Para cargas horizontales se tiene, por otra parte, como es inmediato,

$$w_k = v_k \frac{h}{l}$$

En resumen, se tiene

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{l} v_k = \frac{l}{s} (\bar{m}'_l \bar{\xi}^{(i)}_k + \bar{m}''_l \bar{\xi}^{(d)}_k + v'_k - 1), \\ w_k = v_k \frac{h}{s}, \\ \bar{m}'_{l,T'} = - \frac{v^{(i)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}}, \\ \bar{m}''_{l,T'} = \frac{v^{(d)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}} \end{array} \right.$$

162. Ejemplos numéricos. — Consideremos el sistema tratado en (145), que tiene

$$\begin{array}{l} n = 0,20, \quad \lambda = 0,25, \\ s = 8,00 \text{ m}, \quad l = 7,00 \text{ m}, \quad v^{(i)} = 0,342, \quad v^{(d)} = 0,368, \end{array}$$

y calculemos las líneas de influencia de los momentos flectores extremos  $\mathcal{M}'$  y  $\mathcal{M}''$ , del momento flector en la sección media ( $v'_N = 0,5$ ) y del esfuerzo tangencial  $\mathcal{T}'$  en  $A$ .

Para el momento flector  $\mathcal{M}'$  en  $A$ , se tiene, según las [1] de (160),

$$\bar{m}'_{l,A} = - \frac{1 - v^{(d)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}} v^{(i)} = - \frac{1 - 0,368}{1 - 0,342 - 0,368} 0,342 = - \frac{0,632 \times 0,342}{0,290} = -0,745,$$

$$\bar{m}''_{l,A} = \frac{v^{(i)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}} v^{(d)} = - \bar{m}'_{l,A} \frac{v^{(d)}}{1 - v^{(d)}} = 0,745 \frac{0,368}{1 - 0,368} = 0,434,$$

y la línea de influencia es

$$v^A_k = l (-0,745 \bar{\xi}^{(i)} + 0,434 \bar{\xi}^{(d)}).$$

Sus ordenadas se calculan en el cuadro siguiente, en base a las ordenadas  $\bar{\xi}^{(i)}$  y  $\bar{\xi}^{(d)}$  de la tabla III a ( $n = 0,20$ ,  $\lambda = 0,25$ ):

			a	b		
k	$\bar{\xi}^{(i)}$	$\bar{\xi}^{(d)}$	$\bar{m}'_{l,A} \bar{\xi}^{(i)}$	$\bar{m}''_{l,A} \bar{\xi}^{(d)}$	a + b	$v_k = l(a + b)$
1	0,123	0,083	-0,0916	0,0360	-0,0556	-0,389
2	0,231	0,165	-0,172	0,0716	-0,100	-0,70
3	0,318	0,242	-0,237	0,105	-0,132	-0,924
4	0,372	0,308	-0,277	0,134	-0,143	-1,00
5	0,394	0,358	-0,294	0,155	-0,139	-0,973
6	0,388	0,388	-0,289	0,168	-0,121	-0,847
7	0,358	0,394	-0,267	0,171	-0,096	-0,672
8	0,308	0,372	-0,229	0,161	-0,068	-0,476
9	0,242	0,318	-0,180	0,138	-0,042	-0,294
10	0,165	0,231	-0,123	0,100	-0,023	-0,161
11	0,083	0,123	-0,0618	0,0533	-0,0085	-0,0595

Para la línea de influencia del momento flector  $\mathcal{M}''$  en  $B$ , se tiene, según las [2] de (160),

$$\bar{m}'_{l,B} = \frac{v^{(d)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}} v^{(i)} = \bar{m}''_{l,A} = 0,434,$$

$$\bar{m}''_{l,B} = - \frac{1 - v^{(i)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}} v^{(d)} = - \bar{m}'_{l,B} \frac{(1 - v^{(i)})}{v^{(i)}} = - 0,434 \frac{1 - 0,342}{0,342} = - 0,834,$$

y resulta

$$v_k^B = l (0,434 \bar{\xi}^{(i)} - 0,834 \bar{\xi}^{(d)})$$

Estas ordenadas se calculan en el cuadro siguiente:

$k$	$\bar{\xi}^{(i)}$	$\bar{\xi}^{(d)}$			$a + b$	$v_k = l(a + b)$
			$a$	$b$		
			$\bar{m}'_{l,B} \bar{\xi}^{(i)}$	$\bar{m}''_{l,B} \bar{\xi}^{(d)}$		
1	0,123	0,083	0,0534	- 0,0692	- 0,0158	- 0,111
2	0,231	0,165	0,100	- 0,138	- 0,0380	- 0,266
3	0,318	0,242	0,138	- 0,202	- 0,064	- 0,448
4	0,372	0,308	0,161	- 0,257	- 0,096	- 0,672
5	0,394	0,358	0,171	- 0,299	- 0,128	- 0,896
6	0,388	0,388	0,168	- 0,324	- 0,156	- 1,09
7	0,358	0,394	0,155	- 0,328	- 0,173	- 1,21
8	0,308	0,372	0,133	- 0,310	- 0,177	- 1,24
9	0,242	0,318	0,105	- 0,265	- 0,160	- 1,12
10	0,165	0,231	0,0716	- 0,193	- 0,121	- 0,847
11	0,083	0,123	0,0360	- 0,103	- 0,067	- 0,469

Para la línea de influencia del momento flector en la sección  $v'_N = 0,5$  se tiene, según las [1] de (159),

$$\bar{m}'_{l,N} = - \frac{1 - v'_N - v^{(d)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}} v^{(i)} = - \frac{1 - 0,5 - 0,368}{1 - 0,342 - 0,368} 0,342 = - 0,156$$

$$\bar{m}''_{l,N} = - \frac{v'_N - v^{(i)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}} v^{(d)} = - \frac{0,5 - 0,342}{1 - 0,342 - 0,368} 0,368 = - 0,200$$

y sus ordenadas, dadas por las expresiones [1] de (159),

$$(1 - v'_N = 0,5 \quad , \quad 1 - v'_k = v''_k)$$

$$v^N_k = l (-0,156 \bar{\xi}^{(i)} - 0,200 \bar{\xi}^{(d)} + 0,5 v'_k) \quad (\text{para } k \text{ ant. } N),$$

$$v^N_k = l (-0,156 \bar{\xi}^{(i)} - 0,200 \bar{\xi}^{(d)} + 0,5 v''_k) \quad (\text{para } k \text{ post. } N),$$

se calculan en el cuadro siguiente:

			a	b	c		
k	$\bar{\xi}^{(i)}$	$\bar{\xi}^{(d)}$	$\bar{m}'_{lN} \bar{\xi}^{(i)}$	$\bar{m}''_{lN} \bar{\xi}^{(d)}$	0,5 v'_k	$v_k = a + b + c$	$v^N_k = l(a + b + c)$
1	0,123	0,083	-0,0192	-0,0166	0,0416	0,0058	0,0410
2	0,231	0,165	-0,0360	-0,033	0,0833	0,0143	0,1001
3	0,318	0,242	-0,0496	-0,0484	0,125	0,0270	0,189
4	0,372	0,308	-0,0580	-0,0616	0,166	0,0464	0,325
5	0,394	0,358	-0,0615	-0,0716	0,208	0,075	0,526
6	0,388	0,388	-0,0605	-0,0776	0,250	1,12	0,783
k	$\bar{\xi}^{(i)}$	$\bar{\xi}^{(d)}$	$\bar{m}'_{lN} \bar{\xi}^{(d)}$	$\bar{m}''_{lN} \bar{\xi}^{(d)}$	0,5 v''_k	$v_k = a + b + c$	$v^N_k = l(a + b + c)$
7	0,358	0,394	-0,0558	-0,0788	0,208	0,0737	0,516
8	0,308	0,372	-0,0480	-0,0744	0,166	0,0436	0,305
9	0,242	0,318	-0,0377	-0,0636	0,125	0,0237	0,166
10	0,165	0,231	-0,0257	-0,0462	0,0833	0,0114	0,0798
11	0,083	0,123	-0,0129	-0,0246	0,0416	0,00416	0,0292

Para la línea de influencia del esfuerzo tangencial  $\mathcal{T}'$  en A se tiene, según [1] de (161),

$$\bar{m}'_{l, T'} = - \frac{v^{(i)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}} = - \frac{0,342}{0,290} = - 1,18$$

$$\bar{m}''_{l, T''} = \frac{v^{(d)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}} = \frac{0,368}{0,290} = 1,27$$

y sus ordenadas, dadas por la expresión

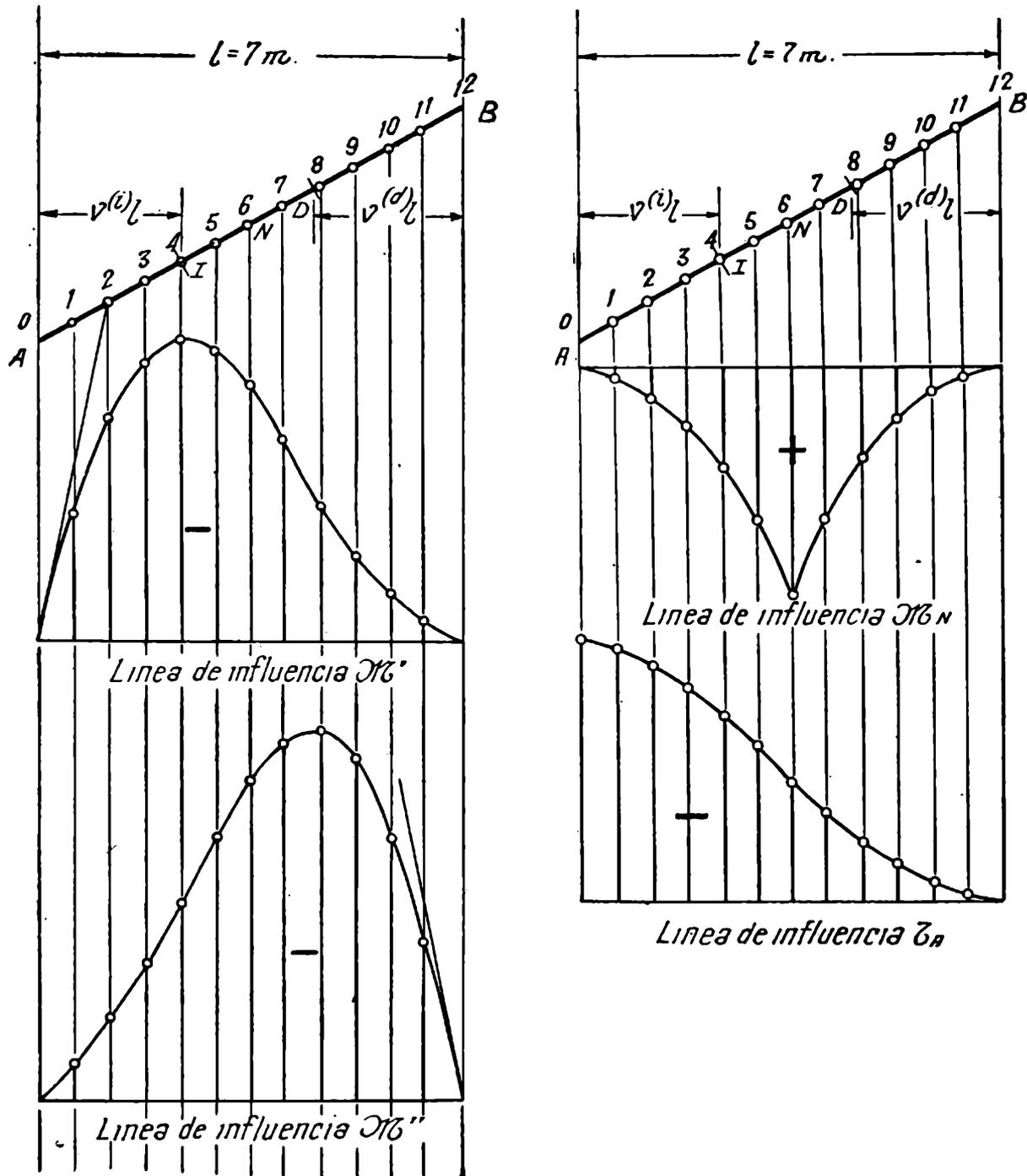


FIG. 132.

$$v_k = \frac{l}{8} (-1,18 \bar{\xi}^{(i)} + 1,27 \bar{\xi}^{(d)} + v'_k - 1),$$

se calculan en el cuadro siguiente:

$k$	$v'_k$	$\bar{\xi}^{(i)}$	$\bar{\xi}^{(d)}$			$v'_k - 1$	$a + b + c$	$v_k = \frac{l}{s}(a+b+c)$
				$a$	$b$			
				$\bar{m}'_l \bar{\xi}^{(i)}$	$\bar{m}''_l \bar{\xi}^{(d)}$			
0	0	0	0	0	0	-1,00	-1,00	-0,875
1	0,0833	0,123	0,083	-0,145	0,105	-0,917	-0,957	-0,837
2	0,167	0,231	0,165	-0,273	0,210	-0,833	-0,896	-0,781
3	0,250	0,318	0,242	-0,375	0,307	-0,750	-0,818	-0,716
4	0,333	0,372	0,308	-0,439	0,391	-0,667	-0,715	-0,626
5	0,417	0,394	0,358	-0,465	0,455	-0,583	-0,593	-0,519
6	0,500	0,388	0,388	-0,458	0,493	-0,500	-0,465	-0,407
7	0,583	0,358	0,394	-0,422	0,500	-0,417	-0,339	-0,297
8	0,666	0,308	0,372	-0,363	0,472	-0,334	-0,225	-0,196
9	0,750	0,242	0,318	-0,286	0,404	-0,250	-0,132	-0,116
10	0,833	0,165	0,231	-0,195	0,293	-0,167	-0,069	-0,0604
11	0,916	0,083	0,123	-0,0979	0,156	-0,0833	-0,0250	-0,0219
12	1,00	0	0	0	0	0	0	0

En la figura 132 se han trazado todas estas líneas de influencia.

**163. Integración de las líneas de influencia.** — Según (59), la integración de una línea de influencia, en general, se efectúa, para los estados de cargas concentradas considerados en las tablas, mediante la expresión

$$X = P (m'_l \bar{X}^{(i)} + m''_l \bar{X}^{(d)} + (v'' - v') \bar{X}^{(0)} + v' \bar{X}^{(c)}).$$

Si se trata de la línea de influencia de un momento flector o esfuerzo tangencial, se requiere agregar el momento flector o esfuerzo tangencial  $X^{(0)}$  que las cargas producen en la viga isostática, empotrada en  $A$  y libre en  $B$ , teniéndose en definitiva

$$[a] \quad X = P (m'_l \bar{X}^{(i)} + m''_l \bar{X}^{(d)} + (v'' - v') \bar{X}^{(0)} + v' \bar{X}^{(c)} + X^{(0)},$$

Para el momento flector en la sección intermedia  $N$ , de una viga elásticamente empotrada, se tiene

$$\begin{aligned} v' &= 0, & v'' &= v''_N l, \\ m'_{l,N} &= l \bar{m}'_{l,N}, & m''_{l,N} &= l \bar{m}''_{l,N} \end{aligned}$$

con  $\bar{m}'_{l,N}$  y  $\bar{m}''_{l,N}$  dados por las [1] de (159). Además, según (67),

$$X^{(0)} = - Pl \bar{X}^{(0)},$$

con  $X^{(0)}$  dado por la tabla X.

Sustituyendo en la [a] resulta, como expresión general del momento flector en una sección intermedia  $N$ ,

$$[1] \quad \mathcal{M}_N = Pl (\bar{m}'_{l,N} \bar{X}^{(i)} + \bar{m}''_{l,N} \bar{X}^{(d)} + v'_{N} \bar{X}^{(l)} - \bar{X}^{(o)}).$$

Para los momentos flectores  $\mathcal{M}'$  y  $\mathcal{M}''$  en las secciones extremas, se tiene

$$v' = 0, \quad v'' = 0, \quad \bar{X}^{(o)} = 0,$$

y resulta

$$[2] \quad \begin{cases} \mathcal{M}' = Pl (\bar{m}'_{l,A} \bar{X}^{(i)} + \bar{m}''_{l,A} \bar{X}^{(d)}), \\ \mathcal{M}'' = Pl (\bar{m}'_{l,B} \bar{X}^{(i)} + \bar{m}''_{l,B} \bar{X}^{(d)}), \end{cases}$$

con  $\bar{m}'_{l,A}$ ,  $\bar{m}''_{l,A}$  y  $\bar{m}'_{l,B}$ ,  $\bar{m}''_{l,B}$  dados por las [1] y [2] de (160).

Finalmente, para el esfuerzo tangencial  $\mathcal{G}'$  en el extremo izquierdo, se tiene

$$v' = -\frac{l}{s}, \quad v'' = 0, \quad \bar{X}^{(o)} = 0,$$

$$m'_{l,T'} = \frac{l}{s} \bar{m}'_{l,T'}, \quad m''_{l,T'} = \frac{l}{s} \bar{m}''_{l,T'},$$

con  $\bar{m}'_{l,T'}$  y  $\bar{m}''_{l,T'}$  dados por las [1] de (161).

Sustituyendo en la [a] resulta

$$[3] \quad \mathcal{G}' = P \frac{l}{s} (\bar{m}'_{l,T'} \bar{X}^{(i)} + \bar{m}''_{l,T'} \bar{X}^{(d)} + \bar{X}^{(l)} - \bar{X}^{(e)}).$$

Para los estados de cargas continuas se reemplaza  $P$  por  $pl$  en las [1], [2] y [3].

**164. Ejemplo numérico.** — Sea la viga elásticamente empotrada tratada en (162), que tiene

$$\begin{aligned} n &= 0,20, & \lambda &= 0,25, \\ l &= 7,00 \text{ m}, & s &= 8,00 \text{ m}, & v^{(i)} &= 0,342, & v^{(d)} &= 0,368, \end{aligned}$$

y sobre la que actúa una carga uniformemente repartida en toda su longitud, de intensidad

$$p = 3 \text{ tm}^{-1}.$$

Se pide el momento flector  $\mathcal{M}_N$  en la sección media ( $v'_{N} = 0,5$ ), los momentos flectores extremos  $\mathcal{M}'$  y  $\mathcal{M}''$  y el esfuerzo tangencial  $\mathcal{G}'$  en el extremo izquierdo.

La tabla VII<sup>12a</sup>, para  $n = 0,20$  y  $\lambda = 0,25$  y una carga uniformemente repartida, da

$$\bar{X}^{(i)} = 0,250, \quad \bar{X}^{(d)} = 0,250;$$

La tabla VIII da

$$\bar{X}^{(l)} = 0,500$$

y la tabla Xa, para  $\nu'' = 0,5$ ,

$$\bar{X}^{(o)} = 0,125.$$

Para la línea de influencia del momento flector  $\mathcal{M}_N$  en la sección media hemos encontrado, en (162),

$$\bar{m}'_{l,N} = -0,156, \quad \bar{m}''_{l,N} = -0,200$$

Sustituyendo en la [1] del número anterior, resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_N &= pl^2 (\bar{m}'_{l,N} \bar{X}^{(i)} + \bar{m}''_{l,N} \bar{X}^{(d)} + \nu''_N \bar{X}^{(l)} - \bar{X}^{(o)}) = 3 \text{ tm}^{-1} \times 7^2 \text{ m}^2 \\ &(-0,156 \times 0,250 + (-0,200 \times 0,250) + 0,5 \times 0,500 - 0,125) = 5,29 \text{ tm}. \end{aligned}$$

Para la línea de influencia del momento flector  $\mathcal{M}'$ , en (162) hemos encontrado

$$\bar{m}'_{l,A} = -0,745, \quad \bar{m}''_{l,A} = 0,434;$$

sustituyendo en la [2] del número anterior, resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{M}' &= pl^2 (\bar{m}'_{l,A} \bar{X}^{(i)} + \bar{m}''_{l,A} \bar{X}^{(d)}) = 3 \text{ tm}^{-1} \times 7^2 \text{ m}^2 (-0,745 \times 0,250 + 0,434 \times 0,250) = \\ &= -11,47 \text{ tm}. \end{aligned}$$

Para la línea de influencia del momento flector  $\mathcal{M}''$ , en (162) hemos encontrado

$$\bar{m}'_{l,B} = 0,434, \quad \bar{m}''_{l,B} = -0,834,$$

y la [2] del número anterior da

$$\begin{aligned} \mathcal{M}'' &= pl^2 (\bar{m}'_{l,B} \bar{X}^{(i)} + \bar{m}''_{l,B} \bar{X}^{(d)}) = 3 \text{ tm}^{-1} \times 7^2 \text{ m}^2 (0,434 \times 0,250 + (-0,834 \times 0,250) = \\ &= -14,7 \text{ tm}. \end{aligned}$$

Finalmente, en (162) hemos encontrado, para la línea de influencia de  $\mathcal{G}'$ ,

$$\bar{m}'_{l,T'} = -1,18, \quad \bar{m}''_{l,T'} = 1,27,$$

y, según la tabla IX, se tiene

$$\bar{X}^{(e)} = 1;$$

la [3] del número anterior da

$$\begin{aligned} \mathcal{G}' &= p \frac{l^2}{s} (\bar{m}'_{l,T'} \bar{X}^{(i)} + \bar{m}''_{l,T'} \bar{X}^{(d)} + \bar{X}^{(l)} - \bar{X}^{(e)}) = 3 \text{ tm}^{-1} \frac{7^2 \text{ m}^2}{8 \text{ m}} (-1,18 \times 0,250 + \\ &+ 1,27 \times 0,250 + 0,500 - 1) = -8,75 \text{ t}. \end{aligned}$$

165. Ecuación analítica de las líneas de influencia para las vigas de momento de inercia constante. — En las vigas de momento de inercia constante, se tiene

$$[a] \quad \begin{cases} \bar{\xi}^{(i)} = 2 v' - 3 v'^2 + v'^3 \\ \bar{\xi}^{(d)} = v' - v'^3 \end{cases}$$

y las ecuaciones de las líneas de influencia resultan de inmediato, sustituyendo en las expresiones de (52) y (53). Con estas expresiones se pueden calcular las incógnitas correspondientes a los diversos estados de carga, utilizando las fórmulas I.

166. Ejemplo numérico. — Sea, por ejemplo, la viga elásticamente empotrada  $AB$ , (fig. 133) de  $J = \text{const.}$ , con

$$v^{(i)} = 0,250, \quad v^{(d)} = 0,275.$$

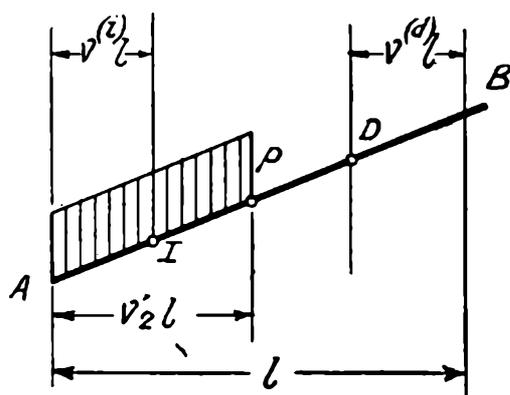


FIG. 133.

Se piden las expresiones que dan el momento flector  $\mathcal{M}'$  en  $A$  para diversas hipótesis de carga.

La línea de influencia del momento flector  $\mathcal{M}'$  en el extremo  $A$ , es, según la [2] de (52) y tomando en cuenta las [a] anteriores,

$$v = l \left[ \bar{m}'_{l,A} (2 v' - 3 v'^2 + v'^3) + \bar{m}''_{l,A} (v' - v'^3) \right],$$

con

$$\bar{m}'_{l,A} = - \frac{1 - v^{(d)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}} v^{(i)} = - \frac{1 - 0,275}{1 - 0,250 - 0,275} 0,250 = - 0,381,$$

$$\bar{m}''_{l,A} = \frac{v^{(i)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}} v^{(d)} = \frac{0,250}{1 - 0,250 - 0,275} 0,275 = 0,144.$$

Sustituyendo, ordenando respecto de las potencias de  $v'$  y simplificando, resulta,

$$v = l (-0,618 v' + 1,14 v'^2 - 0,525 v'^3).$$

Sus coeficientes son

$$A = l, \quad A_0 = 0, \quad A_1 = -0,618, \quad A_2 = 1,14, \quad A_3 = -0,525;$$

para la carga uniformemente repartida de la figura 133, las fórmulas I, dan

$$X = \frac{A pl}{12} (12 A_0 v'_2 + 6 A_1 v'^2_2 + 4 A_2 v'^3_2 + 3 A_3 v'^4_2),$$

o sea, sustituyendo,

$$\begin{aligned} X &= \frac{pl^2}{12} [6 (-0.618 v'^2_2) + 4 \times 1,14 v'^3_2 + 3 (-0,525 v'^4_2)] = \\ &= \frac{pl^2}{12} (-3,71 v'^2_2 + 4,56 v'^3_2 - 1,58 v'^4_2) \end{aligned}$$

Para una carga uniformemente repartida en toda la viga, haciendo  $v'_2 = 1$  en la anterior, resulta

$$X = \frac{pl^2}{12} (-3,71 + 4,56 - 1,58) = -0,0608 pl^2.$$

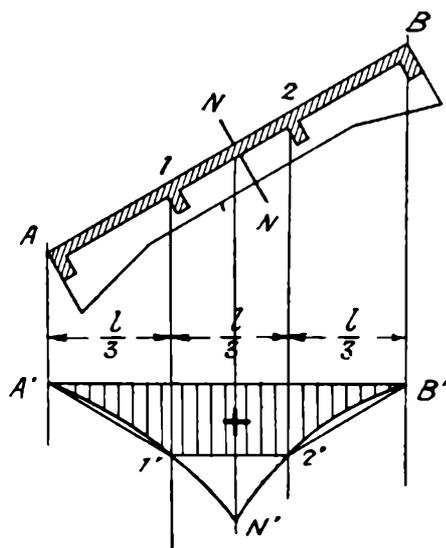


FIG. 134.

Para el estado de cargas concentradas N° 5 (fig. 50), las fórmulas I dan

$$X = \frac{AP}{27} (27 A_0 + 9 A_1 + 3 A_2 + A_3)$$

y, sustituyendo, resulta

$$X = \frac{Pl}{27} (-9 \times 0,618 + 3 \times 1,14 - 0,525) = -0,099 Pl.$$

Todas estas expresiones sirven para las vigas elásticamente empotradas con los valores dados de  $v(i)$  y  $v(d)$ , cualquiera que sea su luz horizontal  $l$  (o su longitud  $s$ ).

**167. Cargas indirectas.** — Cuando las cargas se transmiten a las vigas, indirectamente, mediante viguetas (fig. 134), la línea de influencia entre dos viguetas consecutivas es una recta, como se sabe. Si  $A'N'B'$  es la línea de influencia del momento flector en  $N$  para cargas directas,

la que corresponde a cargas indirectas está constituida por la poligonal  $A'1'2'B'$ , obtenida como indica la figura 134. Análogamente, la línea de influencia del esfuerzo tangencial  $\mathcal{T}'$  en  $A$  es la poligonal  $A_01'2'B_0$  (fig. 135) con vértices  $1'$  y  $2'$  sobre la línea de influencia  $A_0NB_0$ , correspondiente a cargas directas.

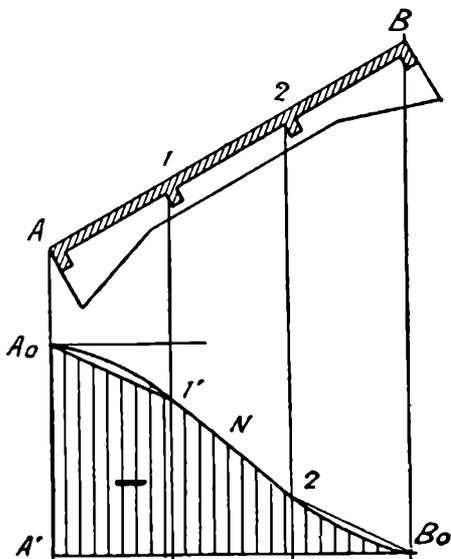


FIG. 135.

Para obtener estas líneas no se requiere calcular (o determinar gráficamente), más que las ordenadas correspondientes a los extremos y a las secciones correspondientes a las viguetas intermedias.

§ 5. — Cargas móviles. Obtención de las líneas de influencia mediante diagramas de características de cargas unitarias.

168. Generalidades. — La ordenada  $v_k^N$ , correspondiente a la sección  $k$  (fig. 136), de la línea de influencia del momento flector  $M_N$  en la sección  $N$ , es, por definición, el momento en  $N$  originado por la fuerza  $P = 1$  aplicada en  $k$ . Si se construye, pues, el diagrama de momentos flectores producido por esta fuerza, representado en la figura, se tiene

$$v_k^N = \overline{N'N''}$$

Dicho diagrama da, por lo tanto, las ordenadas correspondientes a la sección  $k$  de las líneas de influencia de los momentos flectores en todas las secciones  $N$ .

El segmento  $\overline{01}$ , obtenido como indica la figura, es el esfuerzo tangencial  $\mathcal{T}'$  en el extremo  $A$  originado por la fuerza  $P = 1$  aplicada en  $k$ . Por razón análoga, será la ordenada de la línea de influencia de este

esfuerzo tangencial, que corresponde a la sección  $k$ . Designándola  $v^T_k$ , se tiene

$$v^T_k = \overline{01}.$$

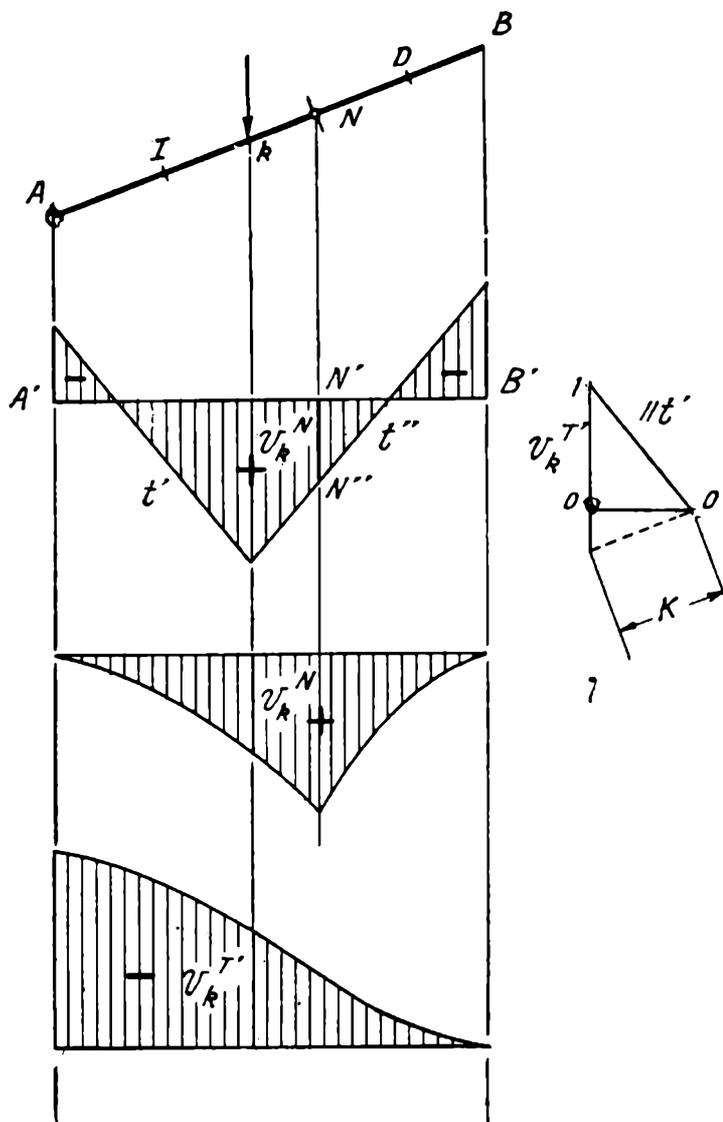


FIG. 136.

**169. Líneas de influencia de momentos flectores.** — Las consideraciones anteriores indican un camino cómodo para obtener las ordenadas de todas las líneas de influencia que se deseen. Basta trazar (fig. 137 a) los diagramas de momentos flectores originados por un número  $n$  convenientemente grande de fuerzas  $P_j = 1$  aplicadas en los puntos  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Las ordenadas de la línea de influencia del momento flector  $\mathcal{M}_N$  en  $N$ , son las  $v^{N_1}, v^{N_2}, \dots, v^{N_j}, \dots, v^{N_n}$  de estos diagramas, correspondientes a la vertical de  $N$ . Con ellas se traza directamente esta línea de influencia de  $\mathcal{M}_N$ , como indica la figura 137 b. Las sucesivas ordenadas de las líneas de influencia de los momentos flectores extremos  $\mathcal{M}'$  y  $\mathcal{M}''$  son respectivamente las  $v^{A_1}, \dots, v^{A_j}, \dots, v^{A_n}$  y

$v_1^B, \dots, v_j^B, \dots, v_n^B$  (fig. 137 a). Con ellas se traza estas líneas de influen-

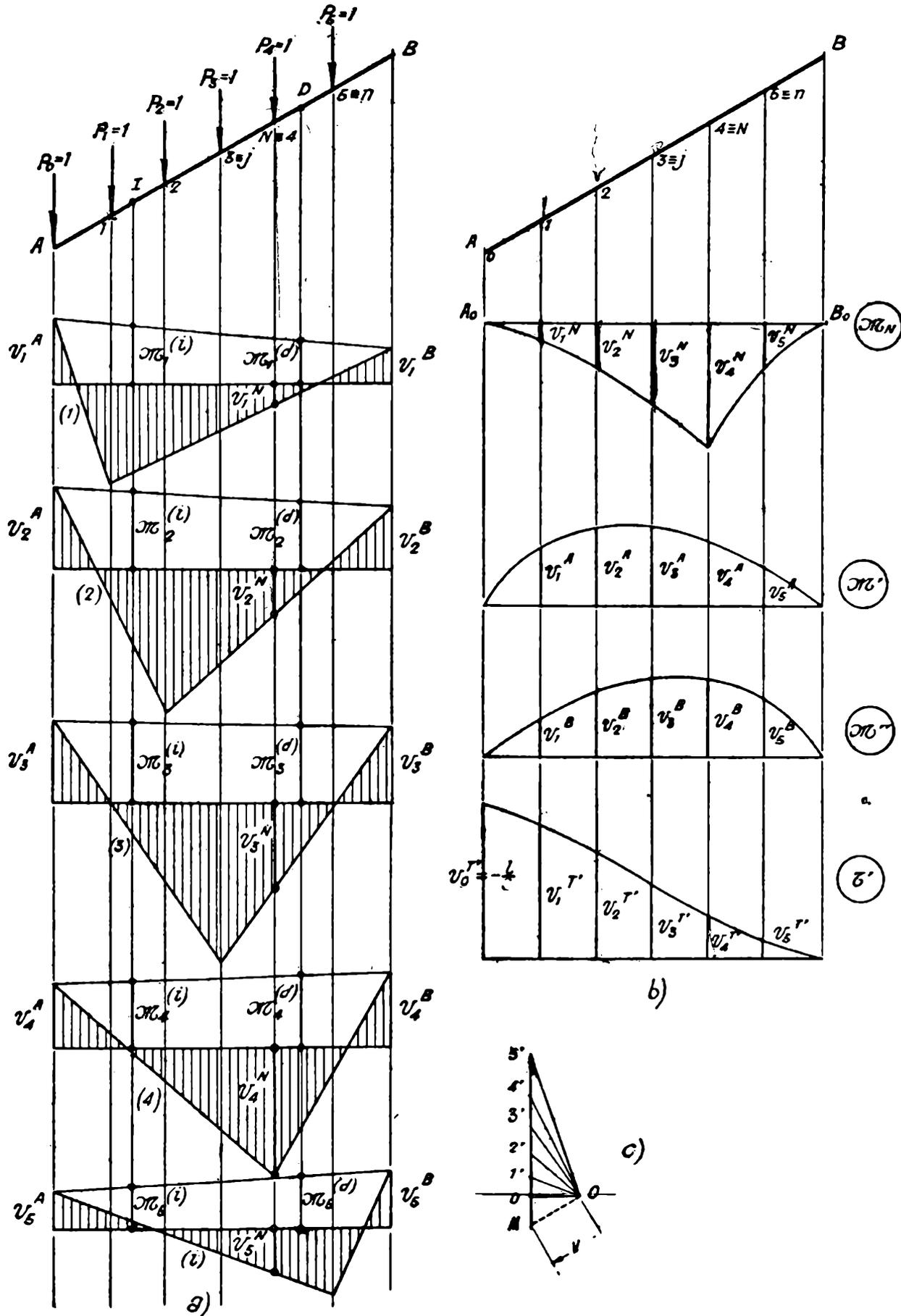


FIG. 137.

cia, como indica la figura 137 b.

170. Líneas de influencia de esfuerzos tangenciales. — Tomando el polo  $O$  (fig. 137 c), trazando el segmento  $MO = k$  paralelo a la viga y por  $M$  una vertical, las paralelas  $OO$  a los ejes  $A'B'$  y a los primeros lados (1), (2), ..., ( $j$ ), ..., ( $n$ ) de los diagramas de momentos flectores originados por las fuerzas  $P_j = 1$ , determinan los segmentos

$$v^{T'_1} = \overline{O1}, \dots, v^{T'_j} = \overline{Oj'}, \dots, v^{T'_n} = \overline{On'},$$

que representan los esfuerzos tangenciales  $\mathcal{T}'$  en  $A$  originados por estas fuerzas y que son, por consiguiente, las ordenadas de la línea de influencia de  $\mathcal{T}'$ , que se traza en la forma que indica la figura 135 b. La ordenada  $v^{T'_0}$ , correspondiente al extremo  $A$ , es

$$v_0^{T'} = -\frac{l}{s},$$

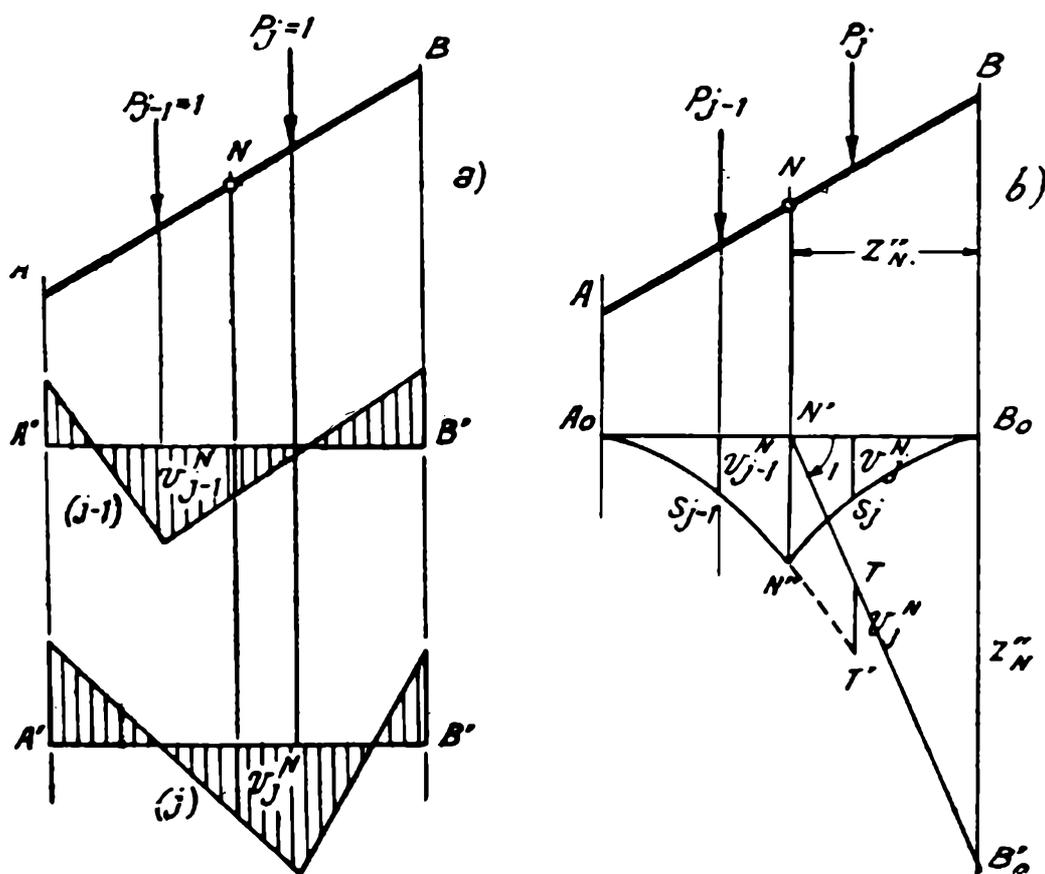


FIG. 138.

como sabemos, o como resulta aplicando en  $A$  la fuerza  $P_0 = 1$ .

Si se construyeran los diagramas de esfuerzos tangenciales correspondientes a las fuerzas  $P_j = 1$ , se obtendría análogamente las ordenadas de las líneas de influencia de los esfuerzos tangenciales en las diversas secciones de la viga. Pero ello no es necesario, por cuanto estas líneas de influencia se obtienen de inmediato, según (157), cuando se posee la de  $\mathcal{T}'$ .

**171. Observación.** — Si con el procedimiento anterior se traza la línea de influencia del momento flector en la sección  $N$  comprendida entre las fuerzas unitarias  $P_{j-1}$  y  $P_j$  (fig. 138), quedan determinados los puntos  $S_{j-1}$  y  $S_j$ , pero no el angular  $N'$ . Este se puede determinar en la forma siguiente:

Se trata de la recta  $N'B'_0$  que forma el ángulo 1 con eje  $A_0B_0$ . A partir del punto  $T$  de la misma, situado sobre la vertical de  $P_j$ , se lleva el segmento

$$\overline{TT'} = v^{N_j}.$$

La recta  $T'S_{j-1}$  corta a la vertical de  $N$  en el punto angular  $N''$ , como es inmediato.

**172. Cargas indirectas.** — El procedimiento de obtención de las líneas de influencia mediante cargas unitarias es cómodo principalmente en el caso de cargas indirectas, en que se requiere calcular solo las ordenadas correspondientes a las viguetas  $y$ , por tanto, trazar únicamente los diagramas de momentos flectores para fuerzas unitarias que actúan en las mismas.

**173. Ejemplo numérico.** — Sea la viga elásticamente empotrada, simétrica, con empates rectos, representada en la figura 139, que tiene

$$\begin{aligned} s &= 10 \text{ m.}, & l &= 9,00 \text{ m.}, \\ J &= 0,002 \text{ m}^4, & J' &= 0,02 \text{ m}^4, & a &= 4,00 \text{ m.}, \\ v^{(i)} &= 0,20, & v^{(d)} &= 0,25, \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$n = \frac{J}{J'} = \frac{0,002 \text{ m}^4}{0,02 \text{ m}^4} = 0,10, \quad \lambda = \frac{a}{s} = \frac{4,00 \text{ m}}{10,00 \text{ m.}} = 0,40.$$

Las cargas se transmiten indirectamente mediante las cuatro viguetas 0, 1, 2, 3, representadas en la figura.

Se pide las líneas de influencia de los momentos flectores  $\mathcal{M}_N$  en la sección  $N$  ( $v_N = 0,25$ ),  $\mathcal{M}'$  en  $A$  y  $\mathcal{M}''$  en  $B$ , y del esfuerzo tangencial  $\mathcal{T}'$  en  $A$ .

Debemos comenzar por trazar los diagramas de momentos flectores para las fuerzas  $P_1 = 1$  y  $P_2 = 1$  aplicadas en 1 y 2, respectivamente.

Para la fuerza concentrada en  $j$  los momentos de Ritter son

$$T^{(i)}_j = P_j l \bar{\xi}^{(d)}_j,$$

$$T^{(d)}_j = P_j l \bar{\xi}^{(i)}_j,$$

y los momentos focales

$$\mathcal{M}^{(i)}_j = -T^{(d)}_j v^{(i)} = -P_j l \bar{\xi}^{(i)}_j v^{(i)},$$

$$\mathcal{M}^{(d)}_j = -T^{(i)}_j v^{(d)} = -P_j l \bar{\xi}^{(d)}_j v^{(d)}$$

La tabla III a, con  $n = 0,10$  y  $\lambda = 0,40$  y para los puntos 1 y 2 ( $\nu_1 = 0,333$ ;  $\nu_2 = 0,667$ ), da

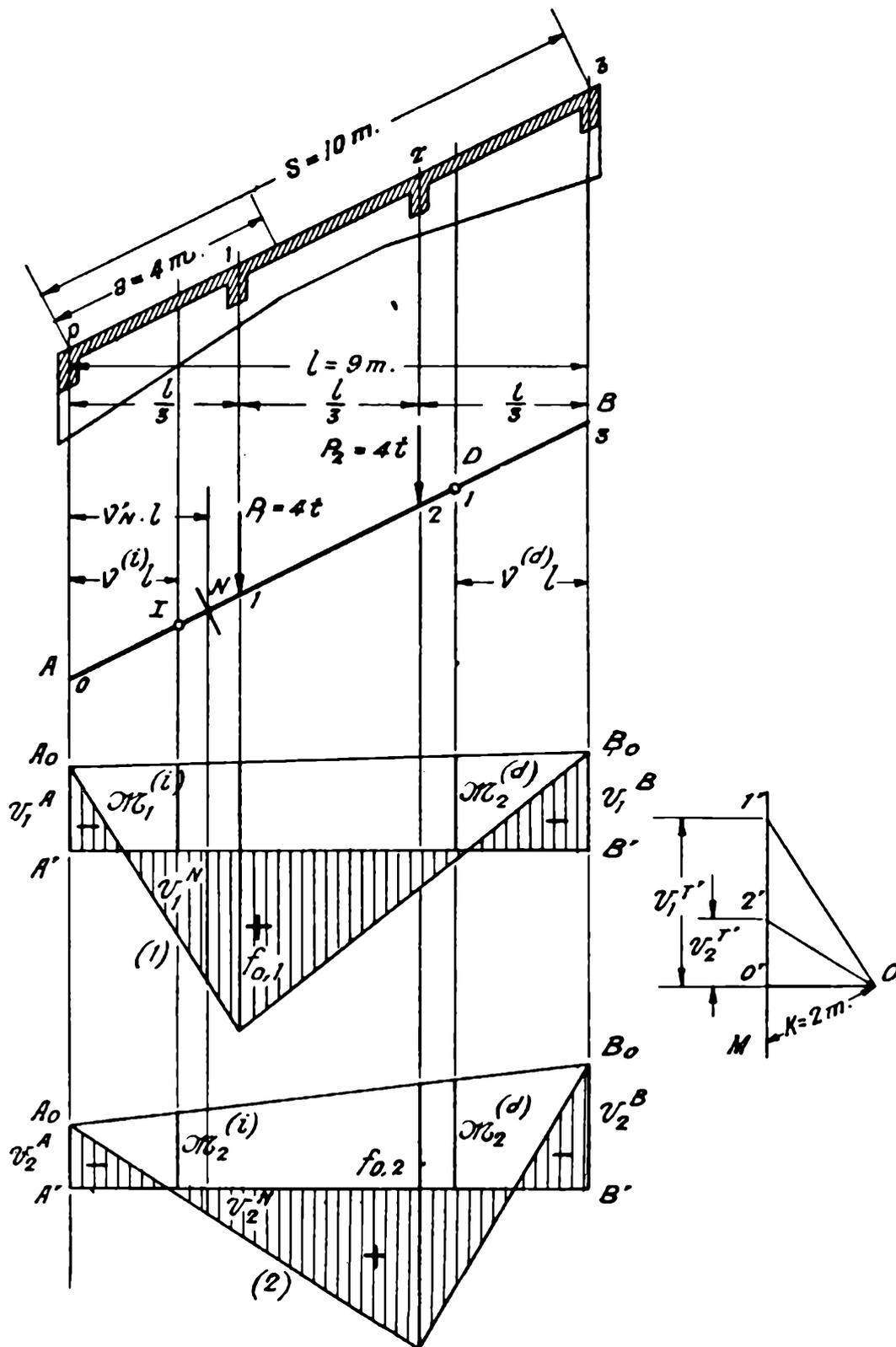


FIG. 139.

$$\bar{\xi}^{(i)}_1 = 0,365, \quad \bar{\xi}^{(d)}_1 = 0,319,$$

$$\bar{\xi}^{(i)}_2 = 0,319, \quad \bar{\xi}^{(d)}_2 = 0,365.$$

Se tiene, por consiguiente,

$$\overline{\mathcal{M}}^{(i)}_1 = \bar{\xi}^{(i)}_1 v^{(i)} = 0,365 \times 0,20 = 0,0730 ,$$

$$\overline{\mathcal{M}}^{(d)}_1 = \bar{\xi}^{(d)}_1 v^{(d)} = 0,319 \times 0,25 = 0,0798 ,$$

$$\overline{\mathcal{M}}^{(i)}_2 = \bar{\xi}^{(i)}_2 v^{(i)} = 0,319 \times 0,20 = 0,0638 ,$$

$$\overline{\mathcal{M}}^{(d)}_2 = \bar{\xi}^{(d)}_2 v^{(d)} = 0,365 \times 0,25 = 0,0913 .$$

La tabla XI a da, además, para las fuerzas  $P_1$  y  $P_2$ , respectivamente,

$$\bar{f}_{0,1} = 0,2211 , \quad \bar{f}_{0,2} = 0,2211 .$$

Llevando estas magnitudes en la escala

$$\frac{1}{13,5 \text{ cm}} ,$$

se han obtenido los diagramas de la figura 139, que, leídos en la escala

$$Pl \frac{1}{13,5 \text{ cm}} = \frac{1 \text{ t} \times 9 \text{ m}}{13,5 \text{ cm}} ,$$

son los de momentos flectores originados por las cargas  $P_1$  y  $P_2$ .

Para los esfuerzos tangenciales se ha elegido la escala  $\frac{1 \text{ t}}{3 \text{ cm}}$ , con lo que resulta la distancia polar

$$k = \frac{\frac{9 \text{ tm}}{13,5 \text{ cm}}}{\frac{1 \text{ t}}{3 \text{ cm}}} = 2 \text{ m} .$$

Con esta distancia polar, se han obtenido en la figura los esfuerzos tangenciales en  $A$

$$\bar{v}^{T'}_1 = \overline{0'1'} , \quad \bar{v}^{T'}_2 = \overline{0'2'} ,$$

debidos a las fuerzas  $P_1$  y  $P_2$ , que son las ordenadas para los puntos 1 y 2 de la línea de influencia de  $\mathcal{G}'$ . La ordenada en el punto  $A$  es

$$v^{T'}_0 = - \frac{l}{s} = - \frac{9,00 \text{ m}}{10,00 \text{ m}} = - 0,90 .$$

Resumiendo, de las gráficas de la figura resultan las siguientes ordenadas para las líneas de influencia, leídas directamente en centímetros:

Para  $\mathcal{M}_N$ ,

$$v^{N_1} (\text{cm}) = 1,5 \text{ cm}, \quad v^{N_2} (\text{cm}) = 0,3 \text{ cm};$$

para  $\mathcal{M}'$ ,

$$v^{A_1} (\text{cm}) = -0,95 \text{ cm}, \quad v^{A_2} (\text{cm}) = -0,7 \text{ cm};$$

para  $\mathcal{M}''$ ,

$$v^{B_1} (\text{cm}) = -1,1 \text{ cm}, \quad v^{B_2} (\text{cm}) = -1,4 \text{ cm},$$

y para  $\mathcal{T}'$ ,

$$v^{T'_0} (\text{cm}) = \frac{v^{T'_0}}{1} = -2,7 \text{ cm},$$

$$\frac{1}{3 \text{ cm}}$$

$$v^{T'_1} (\text{cm}) = -1,85 \text{ cm}, \quad v^{T'_2} (\text{cm}) = -0,75 \text{ cm}.$$

Mediante estas ordenadas se ha trazado en la figura 140, las líneas de influen-

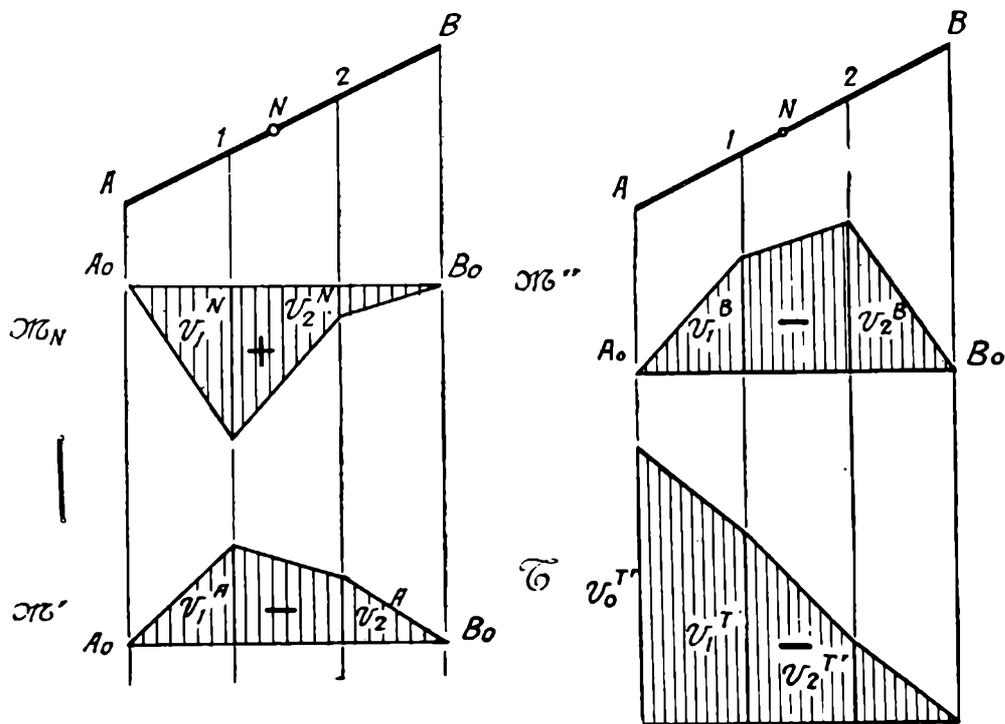


FIG. 140.

cia pedidas. Llevándolas directamente en centímetros, las escalas de estas líneas de influencia son, respectivamente, las de momentos flectores y de esfuerzos tangenciales de los diagramas de la figura 139.

§ 6. — Cargas móviles. Obtención de las líneas de influencia mediante los desplazamientos extremos.

174. Generalidades. — Dadas las ordenadas  $v'$  y  $v''$  y las rotaciones  $\delta'$  y  $\delta''$  extremas de una línea de influencia, quedan determinadas las ordenadas  $v$  de la misma (o de la elástica que constituye), según hemos visto en (21) y (22). Con dichos desplazamientos extremos se puede, pues, ya sea calcular las ordenadas de la línea de influencia o ya integrar directamente esta última para las hipótesis de carga que interesen.

Las ordenadas extremas  $v'$  y  $v''$  (fig. 141) ( $w'$  y  $w''$  para cargas ho-

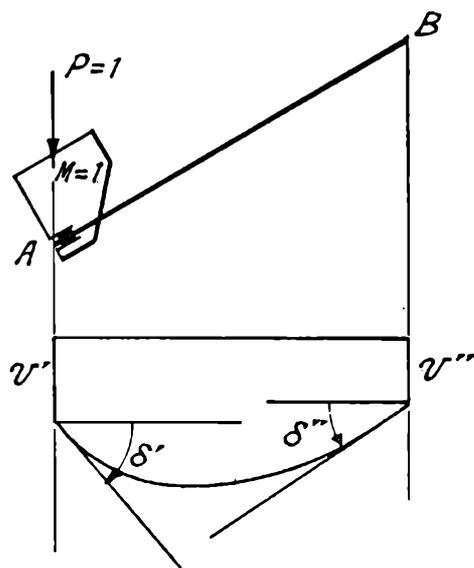


FIG. 141.

rizontales) son los valores de la incógnita  $X$  a que corresponde la línea de influencia, originados por cargas verticales (horizontales)  $P = 1$  aplicadas directamente en los extremos  $A$  y  $B$ .

Las rotaciones extremas  $\delta'$  y  $\delta''$  resultan de la siguiente consideración:

Sea  $X_A$  el valor de la incógnita  $X$  a que corresponde la línea de influencia, originado por un par  $M = 1$  aplicado en el extremo  $A$ . Si  $\delta'$  es la rotación extrema de la línea de influencia, se tiene, según (58),

$$X_A = M \delta',$$

o sea ( $M = 1$ ),

$$\delta' = X_A.$$

Análogamente, obtendríamos

$$\delta'' = X_B,$$

siendo  $X_B$  el valor de la incógnita originado por un par  $M = 1$  aplicado en el extremo  $B$ .

Es decir:

*La rotación extrema izquierda  $\delta'$  (derecha  $\delta''$ ) de la línea de influencia de la incógnita  $X$ , es el valor  $X_A$  ( $X_B$ ) de esta incógnita, originado por un par  $M = 1$  aplicado en el extremo  $A$  ( $B$ ).*

Quiere decir, pues, que si se trazan los diagramas de características originados por fuerzas  $P = 1$  y pares  $M = 1$  aplicados en cada uno de los extremos de la pieza, se obtienen los desplazamientos y rotaciones extremos correspondientes a las líneas de influencia de las características en cualquier sección (\*).

**175. Obtención de las ordenadas extremas de las líneas de influencia de características de las vigas elásticamente empotradas.** —

La fuerza  $P = 1$  aplicada en el extremo  $A$  de la viga elásticamente empotrada  $AB$  (fig. 142 a) origina en el mismo un esfuerzo cortante verti-

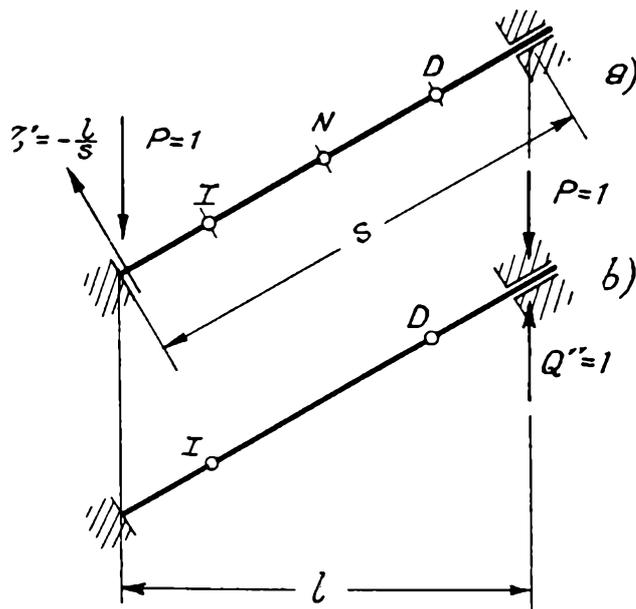


FIG. 142.

cal  $\mathcal{R}' = -1$ , que lo equilibra, y, por tanto, el momento flector en una sección cualquiera  $N$  (o lo que es equivalente, la ordenada extrema  $v'$  en  $A$  de su línea de influencia) es nulo.

Análogamente, la fuerza  $P = 1$  aplicada en el extremo  $B$  (fig. 132 b), origina también una fuerza vertical  $\mathcal{R}'' = -1$ , que también la equilibra.

Quiere decir, pues, como ya sabíamos, que:

*Las ordenadas extremas  $v'_N$  y  $v''_N$  de la línea de influencia del momento flector  $\mathcal{M}_N$ , en una sección cualquiera  $N$ , de una viga elásticamente empotrada, son nulas.*

(\*) Este procedimiento para la obtención de líneas de influencia, que resulta muy cómodo en su aplicación general a los sistemas constituidos por piezas rectilíneas, ha sido explicado por el autor, desde hace ocho años, en su curso de Teoría de la Elasticidad de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires. Es la primera vez que lo publica.

Debe observarse que cuando la línea de influencia del momento flector en una sección intermedia se refiere a ejes quebrados, como se requiere dar la rotación igual a 1 en la sección  $N$ , corresponde al extremo  $B$  la ordenada  $v''_N = v'_N l$ . Es decir: *Las ordenadas extremas de las líneas de influencia de los momentos flectores  $\mathcal{M}_N$  en las secciones intermedias  $N$  de las vigas elásticamente empotradas, referidas a ejes quebrados, son  $v'_N = 0$ ,  $v''_N = v'_N l$ .*

La fuerza  $\mathcal{R}' = -1$  originada por la  $P = 1$  aplicada en  $A$ , produce en este extremo un esfuerzo tangencial

$$\mathcal{T}' = -\frac{l}{s}.$$

Equilibrando la fuerza  $\mathcal{R}''$  a la  $P = 1$  aplicada en  $B$ , el esfuerzo tangencial que esta última origina en  $A$  es nulo. Es decir, como ya sabíamos:

*Las ordenadas extremas de la línea de influencia del esfuerzo tangencial  $\mathcal{T}'$  en  $A$ , para las vigas elásticamente empotradas, son*

$$v'_{T'} = -\frac{l}{s}, \quad v''_{T'} = 0.$$

**176. Rotaciones extremas de las líneas de influencia de los momentos flectores de las vigas elásticamente empotradas.** — La rotación  $\delta'$  en el extremo  $A$  de la línea de influencia del momento flector  $\mathcal{M}_N$  en la sección  $N$ , de la viga elásticamente empotrada  $AB$  (fig. 143), es, según acabamos de ver, el momento flector en  $N$  originado por el par  $M_i = 1$  aplicado en  $A$ .

Tracemos, pues, el diagrama de momentos flectores originado por el par  $M = 1$  en  $A$ , que dará con sus ordenadas las rotaciones  $\delta'$  para las líneas de influencia de los momentos flectores en las diversas secciones  $N$ .

El par  $M = 1$  en  $A$  origina, en la viga simplemente apoyada, el diagrama triangular  $A'A''B'$  (fig. 143) de momentos flectores positivos, con  $\mathcal{M}' = A'A'' = 1$ . Los momentos de Ritter son, según (88),

$$T^{(i)} = 1, \quad T^{(d)} = \delta^{(d)}_A = \bar{\epsilon}^{(i)}_A. \quad \bullet$$

Llevándolos en  $A'A''$  y  $B'B''$ , respectivamente, se obtienen los puntos  $A''$  y  $B''$  y, con ellos, las cruzadas de Ritter  $A''B'$  y  $B''A'$ . Bajando las verticales focales hasta cortarlas en  $I'$  y  $D'$ , se obtiene, uniendo con una recta estos puntos, la línea de cierre  $A_0B_0$ , y, con ella, el diagrama buscado de momentos flectores originado por el par  $M = 1$  en  $A$ , que es el rayado en la figura.

La ordenada  $\delta'_N$  correspondiente a la sección  $N$ , es la rotación en el extremo  $A$  de la línea de influencia del momento flector en la misma.

En igual forma, para hallar las rotaciones extremas  $\delta''$  se ha trazado el diagrama de momentos flectores originado por el par  $M = 1$  apli-

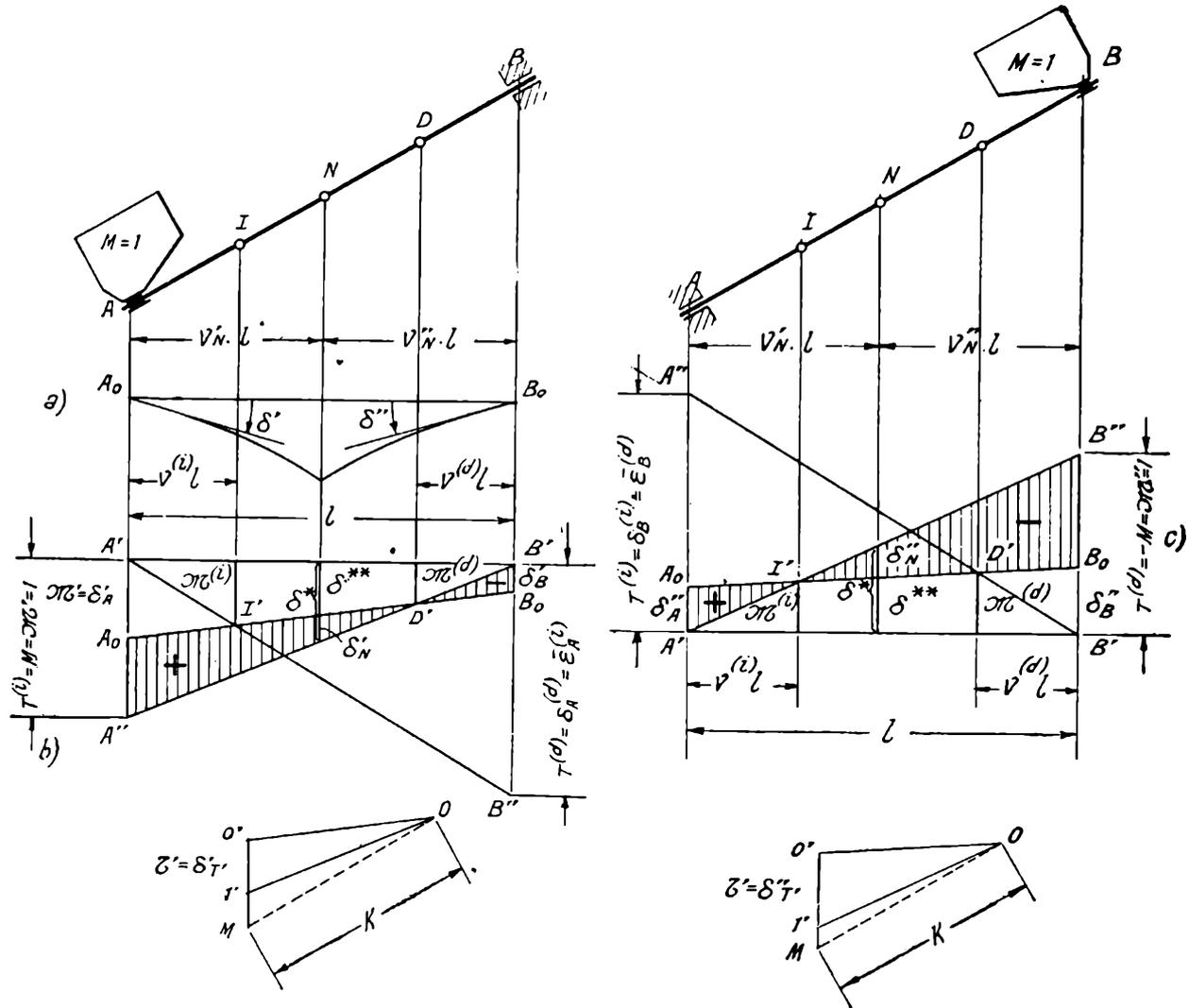


FIG. 143.

cado en  $B$ . El diagrama de momentos flectores negativos que este par origina en la viga simplemente apoyada, es el triangular  $A'B''B'$ , con  $\overline{B'B''} = -1$  (fig. 143 c). Los momentos de Ritter son (\*)

$$T^{(i)} = \delta^{(i)}_B = \overline{\epsilon}^{(d)}_B, \quad T^{(d)} = -1.$$

Con estos elementos se han trazado las cruzadas de Ritter  $A'B''$  y  $B'A''$ , la línea de cierre  $A_0B_0$  y el diagrama de momentos flectores de la viga elásticamente empotrada, rayado en la figura.

(\*) Recuérdese que si la viga es de momento de inercia constante, se tiene

$$\overline{\epsilon}^{(i)}_A = 2, \quad \overline{\epsilon}^{(d)}_B = -2$$

La ordenada correspondiente a la sección  $N$  es la rotación extrema derecha  $\delta''_N$  de la línea de influencia del momento flector  $\mathcal{M}_N$  en dicha sección.

177. — Calculemos numéricamente las rotaciones  $\delta'_N$  y  $\delta''_N$ . Se tiene (fig. 143 b)

$$[a] \quad \begin{cases} \mathcal{M}^{(i)} = -T^{(d)} v^{(i)} = -\bar{\varepsilon}^{(i)}_A v^{(i)}, \\ \mathcal{M}^{(d)} = -T^{(i)} v^{(d)} = -v^{(d)}, \end{cases}$$

y

$$[b] \quad \delta'_N = \delta^* + \delta^{**},$$

con

$$\delta^* = \frac{1}{l} v''_N l,$$

$$\delta^{**} = \mathcal{M}^{(d)} + \frac{\mathcal{M}^{(i)} - \mathcal{M}^{(d)}}{(1 - v^{(i)} - v^{(d)})} (v''_N - v^{(d)})$$

Sustituyendo en la [b] y simplificando, resulta

$$[1] \quad \delta'_N = (v''_N - v^{(d)}) \frac{1 - v^{(i)} - \varepsilon^{(i)}_A v^{(i)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}}$$

Análogamente se obtendría, para las rotaciones extremas derechas,

$$[2] \quad \delta''_N = - (v'_N - v^{(i)}) \frac{1 - v^{(d)} + \varepsilon^{(d)}_B v^{(d)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}}$$

178. Rotaciones extremas de las líneas de influencia de los momentos flectores extremos  $\mathcal{M}'$  y  $\mathcal{M}''$  de las vigas elásticamente empotradas. — Los momentos flectores en  $A$ , originados por los pares  $M=1$  aplicados en  $A$  y  $B$ , o lo que es lo mismo, las rotaciones  $\delta'_A$  y  $\delta''_A$  de la línea de influencia del momento flector  $\mathcal{M}'$  en  $A$ , son

$$\delta'_A = \overline{A_0 A'} \quad (\text{fig. 143 b}),$$

$$\delta''_A = \overline{A_0 A'} \quad (\text{fig. 143 c}).$$

Análogamente las rotaciones extremas  $\delta'_B$  y  $\delta''_B$  de la línea de influencia del momento flector  $\mathcal{M}''$  en  $B$ , están dadas por los segmentos  $\overline{B_0 B'}$ , de las figuras 143 b y c, respectivamente.

Las rotaciones  $\delta'_A$  y  $\delta'_B$  son negativas; las  $\delta''_A$  y  $\delta''_B$  son positivas.

179. — Obtengamos numéricamente las rotaciones anteriores.

Se tiene (fig. 143 b)

$$\delta'_A = \overline{A_0 A'} = \overline{A_0 A''} - \overline{A' A''},$$

con

$$\overline{A' A''} = 1$$

y

$$[a] \quad \overline{A_0 A''} = (\delta'_N)_{\nu''_N = 1};$$

además (fig. 143 c)

$$[b] \quad \delta''_A = \overline{A_0 A'} = (\delta''_N)_{\nu'_N = 0}.$$

Deduciendo los valores de [a] y [b] respectivamente de las [1] y [2] del número anterior, sustituyendo y simplificando, resulta

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta'_A = (1 - \nu^{(d)}) \frac{1 - \nu^{(i)} - \varepsilon^{(i)}_A \nu^{(i)}}{1 - \nu^{(i)} - \nu^{(d)}} - 1, \\ \delta''_A = \nu^{(i)} \frac{1 - \nu^{(d)} + \varepsilon^{(d)}_B \nu^{(d)}}{1 - \nu^{(i)} - \nu^{(d)}}. \end{array} \right.$$

Análogamente, se tiene (fig. 143 b)

$$\delta'_B = -\overline{B_0 B'} = (\delta'_N)_{\nu''_N = 0},$$

y (fig. 143 c)

$$\delta''_B = -\overline{B_0 B''} + \overline{B' B''},$$

con

$$-\overline{B_0 B''} = (\delta''_N)_{\nu'_N = 1},$$

$$\overline{B' B''} = 1.$$

Sustituyendo y teniendo en cuenta las [1] y [2] del número anterior, resulta

$$[2] \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta'_B = -\nu^{(d)} \frac{1 - \nu^{(i)} - \varepsilon^{(i)}_A \nu^{(i)}}{1 - \nu^{(i)} - \nu^{(d)}}, \\ \delta''_B = -(1 - \nu^{(i)}) \frac{1 - \nu^{(d)} + \varepsilon^{(d)}_B \nu^{(d)}}{1 - \nu^{(i)} - \nu^{(d)}} + 1. \end{array} \right.$$

180. Rotaciones extremas de la línea de influencia del esfuerzo tangencial  $\mathcal{T}'$  en el extremo  $A$  de las vigas elásticamente empotradas. — Llevando paralelamente a la pieza, en  $MO$ , la distancia polar  $k$  (fig.

143 b) y trazando por  $O$  las paralelas a la línea de cierre  $A_0B_0$  y a la recta  $B'A''$ , se tiene en  $\overline{O'1'}$  el esfuerzo tangencial  $\mathcal{C}'$  que el par  $M = 1$  origina en el extremo izquierdo  $A$ , ó sea, la rotación extrema  $\delta'_{T'}$ , de la línea de influencia de este esfuerzo tangencial. Es decir, resulta (fig. 143 b).

$$\delta'_{T'} = \overline{O'1'}$$

Procediendo en igual forma con el diagrama de momentos flectores originado por el par  $M = 1$  en  $B$  (fig. 143 c), se tiene en  $\overline{O''1''}$  el esfuerzo tangencial  $\mathcal{C}''$  en  $A$  originado por este par, ó sea, la rotación  $\delta''_{T''}$  en  $B$  de la línea de influencia de  $\mathcal{C}''$ . Es decir, resulta

$$\delta''_{T''} = \overline{O''1''}$$

181. — Calculemos numéricamente las rotaciones anteriores.

Siendo  $\delta'_{T'}$  el esfuerzo tangencial en  $A$  producido por el par  $M = 1$  en este extremo, se tiene

$$\delta'_{T'} = \frac{\mathcal{M}^{(i)} - \mathcal{M}^{(d)}}{(1 - \nu^{(i)} - \nu^{(d)})s} + \mathcal{C}'_0,$$

en la que

$$\mathcal{C}'_0 = \frac{1}{s}.$$

es el esfuerzo tangencial en  $A$  que origina el par  $M = 1$  en la viga simplemente apoyada.

Recordando las expresiones  $[a]$  de (177), sustituyendo y simplificando, se llega a

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta'_{T'} = \frac{1}{s} \bar{\delta}'_{T'}, \\ \bar{\delta}'_{T'} = \frac{\nu^{(d)} - \bar{\varepsilon}^{(i)}_A \nu^{(i)}}{1 - \nu^{(i)} - \nu^{(d)}} + 1. \end{array} \right.$$

Análogamente, para la rotación en el extremo  $B$  se obtendría

$$[2] \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta''_{T''} = \frac{1}{s} \bar{\delta}''_{T''}, \\ \bar{\delta}''_{T''} = \frac{\nu^{(i)} + \bar{\varepsilon}^{(d)}_B \nu^{(d)}}{1 - \nu^{(i)} - \nu^{(d)}} + 1. \end{array} \right.$$

182. **Obtención gráfica de las líneas de influencia.** — Calculados los desplazamientos extremos, los polígonos de las tercias de las líneas de influencia se hallan mediante las rectas de acción de las masas-tercia, en la forma que indica con suficiente claridad la figura 144.

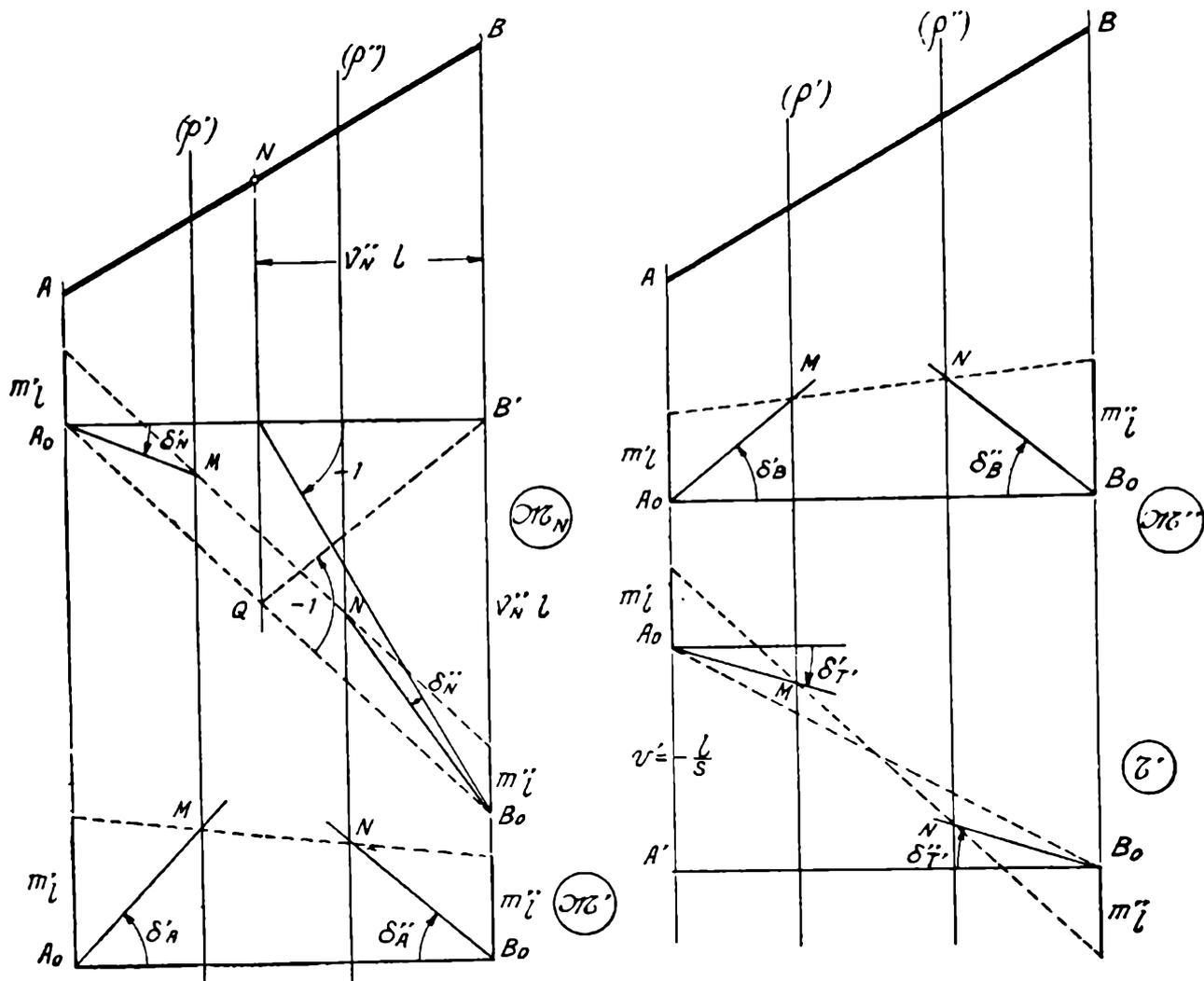


FIG. 144.

Con los polígonos de las tercias se obtienen los momentos reducidos  $m'_l$  y  $m''_l$ , y, con éstos, las ordenadas

$$v^* = m'_l \bar{\xi}^{(i)} + m''_l \bar{\xi}^{(d)}$$

de la línea de influencia, referidas a la recta de los extremos  $A_0B_0$ . Llevándolas, a partir de la misma, se trazan las curvas que constituyen las líneas de influencia (\*).

Si se quiere referir a un único eje la línea de influencia del momento flector  $\mathcal{M}_N$  en una sección intermedia, se llevan las ordenadas  $v^*$  a partir del eje  $A_0B_0$  para la parte izquierda de la sección  $N$  y a partir de la recta  $QB'$ , para la parte derecha.

(\*) Si la pieza es de momento de inercia constante, estas curvas se obtienen por puntos y tangentes en la forma conocida.

**183. Obtención numérica e integración de las líneas de influencia.**  
 — Si se desea calcular numéricamente las ordenadas de las líneas de influencia, se comienza por calcular las rotaciones extremas reducidas, es decir, respecto de la recta de los extremos,  $\delta^*$  y  $\delta^{**}$ , dadas según [1] de (22), por las expresiones

$$\delta^* = \delta'_t - \gamma, \quad \delta^{**} = \delta''_t - \gamma,$$

$$\gamma = \frac{v'' - v'}{l},$$

siendo  $\delta'_t$  y  $\delta''_t$  las rotaciones extremas, respecto del eje horizontal, de la curva referida a ejes quebrados ((53) y (55)).

Se tiene, según dichos números,

$$\delta'_t = \delta', \quad \delta''_t = \delta'',$$

para todas las líneas de influencia, salvo las de  $\mathcal{M}_N$ , para las que

$$\delta'_t = \delta'_N, \quad \delta''_t = \delta''_N + 1.$$

Resulta así, sustituyendo y recordando los valores de  $v'$  y  $v''$  dados en (175):

Para las líneas de influencia de los momentos flectores  $\mathcal{M}_N$  en las secciones intermedias

$$[1] \quad \delta^*_N = \delta'_N - v''_N, \quad \delta^{**}_N = \delta''_N - v''_N + 1;$$

para las líneas de influencia de los momentos flectores extremos  $\mathcal{M}'$  y  $\mathcal{M}''$ ,

$$[2] \quad \left\{ \begin{array}{ll} \delta^*_A = \delta'_A, & \delta^{**}_A = \delta''_A, \\ \delta^*_B = \delta'_B, & \delta^{**}_B = \delta''_B, \end{array} \right.$$

y para la línea de influencia del esfuerzo tangencial  $\mathcal{T}'$  en  $A$ ,

$$[3] \quad \delta^*_{T'} = \frac{1}{s} \bar{\delta}^*_{T'}, \quad \delta^{**}_{T'} = \frac{1}{s} \bar{\delta}^{**}_{T'},$$

con

$$[4] \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\delta}^*_{T'} = \bar{\delta}'_{T'} - 1 = \frac{v^{(d)} - \bar{\varepsilon}^{(i)}_A v^{(i)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}}, \\ \bar{\delta}^{**}_{T'} = \bar{\delta}''_{T'} - 1 = \frac{v^{(i)} + \bar{\varepsilon}^{(d)}_B v^{(d)}}{1 - v^{(i)} - v^{(d)}}. \end{array} \right.$$

Calculadas en esta forma las rotaciones reducidas, los momentos reducidos se obtienen, según (21), con las expresiones

$$[a] \quad \begin{cases} m'_l = l (A' \delta^* + B \delta^{**}), \\ m''_l = -l (B \delta^* + A'' \delta^{**}). \end{cases} /$$

Poniendo

$$m'_l = l \bar{m}'_l, \quad m''_l = l \bar{m}''_l,$$

para las líneas de influencia de momentos flectores, y

$$[5] \quad m'_{l,T'} = \frac{l}{s} \bar{m}'_{l,T'}, \quad m''_{l,T'} = \frac{l}{s} \bar{m}''_{l,T'},$$

para las de esfuerzos tangenciales, y sustituyendo los valores de las [1], [2], [3] y [a], se obtiene:

Para las líneas de influencia de los momentos flectores  $\mathcal{M}_N$  en las secciones intermedias  $N$ ,

$$[6] \quad \begin{cases} \bar{m}'_{l,N} = A' (\delta'_N - \nu''_N) + B (\delta''_N - \nu''_N + 1), \\ \bar{m}''_{l,N} = -[B (\delta'_N - \nu''_N) + A'' (\delta''_N - \nu''_N + 1)]; \end{cases}$$

para la línea de influencia del momento flector extremo  $\mathcal{M}'$ ,

$$[7] \quad \begin{cases} \bar{m}'_{l,A} = A' \delta'_A + B \delta''_A, \\ \bar{m}''_{l,A} = -(B \delta'_A + A'' \delta''_A); \end{cases}$$

para la línea de influencia del momento flector extremo  $\mathcal{M}''$ ,

$$[8] \quad \begin{cases} \bar{m}'_{l,B} = A' \delta'_B + B \delta''_B, \\ \bar{m}''_{l,B} = -(B \delta'_B + A'' \delta''_B), \end{cases}$$

y para la línea de influencia del esfuerzo tangencial  $\mathcal{T}'$  en  $A$ ,

$$[9] \quad \begin{aligned} m'_{l,T'} &= A' (\bar{\delta}'_{T'} - 1) + B (\bar{\delta}''_{T'} - 1) = A' \bar{\delta}^*_{T'} + B \bar{\delta}^{**}_{T'} \\ \bar{m}''_{l,T'} &= -[B (\bar{\delta}'_{T'} - 1) + A'' (\bar{\delta}''_{T'} - 1)] = -(B \bar{\delta}^*_{T'} + A'' \bar{\delta}^{**}_{T'}). \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores de  $\bar{m}'_i$  y  $\bar{m}''_i$  en las [1] de (159), [1] y [2] de (160) y [1] de (161), se calculan numéricamente las ordenadas de las líneas de influencia.

Reemplazando los mismos valores en las [1], [2] y [3] de (163), se integran dichas líneas de influencia para los estados de carga considerados en las tablas (\*).

**184. Ejemplo numérico.** — Resolvamos con el procedimiento anterior los mismos problemas de (162). La viga tiene

$$\begin{aligned} n &= 0,20, & \lambda &= 0,25, \\ s &= 8,00 \text{ m}, & l &= 7,00 \text{ m}, & v^{(i)} &= 0,342, & v^{(d)} &= 0,368. \end{aligned}$$

La tabla IV a da, para  $n = 0,20$  y  $\lambda = 0,25$ ,

$$\epsilon^{(i)}_A = 1,536, \quad \epsilon^{(d)}_B = -1,536.$$

A su vez, la tabla II a, para los mismos valores de entrada, da

$$A = 1,13, \quad B = 0,731.$$

Poniendo

$$\begin{aligned} d &= 1 - v^{(i)} - v^{(d)} = 1 - 0,342 - 0,368 = 0,290, \\ a^{(i)} &= 1 - v^{(i)} - \epsilon^{(i)}_A v^{(i)} = 1 - 0,342 - 0,525 = 0,133, \\ a^{(d)} &= 1 - v^{(d)} + \epsilon^{(d)}_B v^{(d)} = 1 - 0,368 - 0,565 = 0,067 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} A^{(i)} &= \frac{a^{(i)}}{d} = \frac{0,133}{0,290} = 0,458, \\ A^{(d)} &= \frac{a^{(d)}}{d} = \frac{0,067}{0,290} = 0,231, \end{aligned}$$

se tiene, según las [1] y [2] de (183), para la línea de influencia del momento flector  $\mathcal{M}_N$  en la sesión  $v'_N = v''_N = 0,5$ ,

$$\delta'_N = (v''_N - v^{(d)}) A^{(i)} = (0,5 - 0,368) 0,458 = 0,0605$$

$$\delta''_N = -(v'_N - v^{(i)}) A^{(d)} + 1 = -(0,5 - 0,342) 0,231 + 1 = 0,9634.$$

(\*) El cálculo anterior de las magnitudes  $\bar{m}'_i$  y  $\bar{m}''_i$  es más largo que el dado en (159), (160) y (161). Las ventajas del procedimiento de los desplazamientos extremos no residen en el cálculo de las líneas de influencia de la viga elásticamente empotrada simple, sino, como veremos, en el de las correspondientes a sistemas constituidos por piezas rectilíneas.

Análogamente, según las [1] y [2] de (178) y de (179), se tiene, para las rotaciones extremas de las otras líneas de influencia,

$$\delta'_A = (1 - \nu^{(d)}) A^{(i)} - 1 = (1 - 0,368) 0,458 - 1 = -0,710,$$

$$\delta''_A = \nu^{(i)} A^{(d)} = 0,342 \times 0,231 = 0,0790,$$

$$\delta'_B = -\nu^{(d)} A^{(i)} = -0,368 \times 0,458 = -0,169,$$

$$\delta''_B = -(1 - \nu^{(i)}) A^{(d)} + 1 = -(1 - 0,342) 0,231 + 1 = 0,848,$$

$$\bar{\delta}'_{T'} = \frac{\nu^{(d)} - \epsilon^{(i)}_A \nu^{(i)}}{d} + 1 = \frac{0,368 - 0,525}{0,290} + 1 = 0,460,$$

$$\bar{\delta}''_{T'} = \frac{\nu^{(i)} + \epsilon^{(d)}_B \nu^{(d)}}{d} + 1 = \frac{0,342 - 0,565}{0,290} + 1 = 0,335.$$

Resulta, por consiguiente:

Para la línea de influencia de  $\mathcal{M}_N$  ([6] del número anterior),

$$\begin{aligned} \bar{m}'_{l,N} &= A (\delta'_N - \nu'_N) + B (\delta''_N - \nu''_N) = \\ &= 1,13 (0,0605 - 0,5) + 0,731 (0,9634 - 0,5) = 0,156, \\ \bar{m}''_{l,N} &= -[B (\delta'_N - \nu'_N) + A (\delta''_N - \nu''_N)] = \\ &= -[0,731 (0,0605 - 0,5) + 1,13 (0,9634 - 0,5)] = -0,200; \end{aligned}$$

para la de  $\mathcal{M}'$  ([7] del número anterior),

$$\bar{m}'_{l,A} = A \delta'_A + B \delta''_A = 1,13 (-0,710) + 0,731 \times 0,0790 = -0,744,$$

$$\bar{m}''_{l,A} = -(B \delta'_A + A \delta''_A) = -(-0,520 + 0,089) = 0,431;$$

para la de  $\mathcal{M}''$  ([8] del número anterior),

$$\bar{m}'_{l,B} = A \delta'_B + B \delta''_B = -1,13 \times 0,169 + 0,731 \times 0,848 = 0,429,$$

$$\bar{m}''_{l,B} = -(B \delta'_B + A \delta''_B) = -[0,731 (-0,169) + 1,13 \times 0,848] = -0,836,$$

y para la del esfuerzo tangencial  $\mathcal{G}'$  ([9] del número anterior),

$$\bar{m}'_{l,T'} = A (\bar{\delta}'_{T'} - 1) + B (\bar{\delta}''_{T'} - 1) = 1,13 (0,460 - 1) + 0,731 (0,335 - 1) = -1,10,$$

$$\bar{m}''_{l,T'} = -[B (\bar{\delta}'_{T'} - 1) + A (\bar{\delta}''_{T'} - 1)] = -[0,731 (0,460 - 1) + 1,13 (0,335 - 1)] = 1,15.$$

Estos valores de  $\bar{m}'_l$  y  $\bar{m}''_l$  son iguales a los encontrados en el ejercicio de (162). Conducen, por consiguiente, a los mismos valores de las características obtenidas en el ejercicio de (164) para la carga uniformemente repartida  $p = 3 \text{ tm}^{-1}$ , extendida en toda la longitud de la viga.

**185. Cálculo de la influencia de las cargas permanentes mediante las rotaciones extremas.** — En lugar de obtener las líneas de cierre de los diagramas de momentos flectores, originados por cargas permanentes, tratados en § 2, mediante los momentos de Ritter o los momentos focales, se puede recurrir al cálculo directo de los momentos extremos  $\mathcal{M}'$  y  $\mathcal{M}''$ , en la forma siguiente:

Se calculan

$$\delta'_A, \delta''_A, \delta'_B \text{ y } \delta''_B$$

con las [1] y [2] de (179).

Se obtienen, luego,

$$\bar{m}'_{l,A}, \bar{m}''_{l,A}, \bar{m}'_{l,B} \text{ y } \bar{m}''_{l,B}$$

con las [7] y [8] de (183).

Estas últimas magnitudes sirven para cualquier estado de carga. Para cada uno de estos últimos se busca en las tablas VII las magnitudes  $\bar{X}^{(i)}$  y  $\bar{X}^{(d)}$  y se tiene

$$\mathcal{M}' = Pl (\bar{m}'_{l,A} \bar{X}^{(i)} + \bar{m}''_{l,A} \bar{X}^{(d)}),$$

$$\mathcal{M}'' = Pl (\bar{m}'_{l,B} \bar{X}^{(i)} + \bar{m}''_{l,B} \bar{X}^{(d)}),$$

si se trata de cargas concentradas, y

$$\mathcal{M}' = pl^2 (m'_{l,A} \bar{X}^{(i)} + m''_{l,A} \bar{X}^{(d)}),$$

$$\mathcal{M}'' = pl^2 (\bar{m}'_{l,B} \bar{X}^{(i)} + \bar{m}''_{l,B} \bar{X}^{(d)}),$$

si las cargas son continuas.

**186. Ejemplos numéricos.** — Consideremos la viga tratada en (145), que tiene

$$l = 7,00 \text{ m},$$

$$n = 0,20, \quad \lambda = 0,25,$$

$$v^{(i)} = 0,342, \quad v^{(d)} = 0,368.$$

Los momentos reducidos de las líneas de influencia de  $\mathcal{M}'$  y  $\mathcal{M}''$  ya han sido calculados en (184), obteniéndose

$$\bar{m}'_{l,A} = -0,744, \quad \bar{m}''_{l,A} = 0,431,$$

y

$$\bar{m}'_{l,B} = 0,429, \quad \bar{m}''_{l,B} = -0,836.$$

Para el estado de cargas concentradas considerado en (145), en éste número se encontró

$$\bar{X}^{(i)} = 0,852, \quad \bar{X}^{(d)} = 0,868,$$

y, teniéndose

$$Pl = 3 \text{ t} \times 7 \text{ m} = 21 \text{ tm},$$

resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{M}' &= Pl (\bar{m}'_{l,A} \bar{X}^{(i)} + \bar{m}''_{l,A} \bar{X}^{(d)}) = 21 \text{ tm} (-0,744 \times 0,852 + 0,431 \times 0,868) = \\ &= 21 \text{ tm} (-0,632 + 0,374) = -5,40 \text{ tm}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}'' &= Pl (\bar{m}'_{l,B} \bar{X}^{(i)} + \bar{m}''_{l,B} \bar{X}^{(d)}) = 21 \text{ tm} (0,429 \times 0,852 - 0,836 \times 0,868) = \\ &= 21 \text{ tm} (0,365 - 0,723) = -7,7 \text{ tm} \end{aligned}$$

Con estos momentos extremos se obtendría la línea de cierre  $A_0 B_0$  de la figura 116.

187. — Consideremos que sobre la viga actúa el estado de carga representado en la figura 119. Como este estado no corresponde a los de las tablas, calcularemos los momentos extremos  $\mathcal{M}'$  y  $\mathcal{M}''$ , mediante sus líneas de influencia, que ya han sido obtenidas en (162) y representadas en la figura 132.

Las ordenadas medias de estas líneas de influencia, para las partes correspondientes a las cargas uniformes  $p_5$  y  $p_6$ , obtenidas con un planímetro, son

$$v^{(A)}_5 \text{ (cm)} = 3,6, \quad v^{(A)}_6 \text{ (cm)} = 2,25,$$

$$v^{(B)}_5 \text{ (cm)} = 1,9, \quad v^{(B)}_6 \text{ (cm)} = 4,90.$$

Las cargas totales correspondientes a dichas cargas uniformes, calculadas en (158), son

$$P_5 = 6 \text{ t}, \quad P_6 = 12 \text{ t}.$$

La integración de las líneas de influencia de  $\mathcal{M}'$  y  $\mathcal{M}''$  para el estado de carga considerado, se efectúa a continuación:

$j$	$P_j$ (t)	$v^A_j$ (cm)	$v^B_j$ (cm)	$P_j v^A_j$ (tcm)	$P_j v^B_j$ (tcm)
1	3	4,8	2,5	14,40	7,50
2	5	4,8	4,7	24,00	23,50
3	4	3,1	6,0	12,40	24,00
4	8	1,1	4,1	8,80	32,80
5	6	3,6	1,9	21,60	11,40
6	12	2,25	4,9	27,00	32,40
				108,20	131,60

Resulta

$$\mathcal{M}' = 108,7 \frac{0,2 \text{ m}}{\text{cm}} = 21,74 \text{ tm}$$

$$\mathcal{M}'' = 131,60 \frac{0,2 \text{ m}}{\text{cm}} = 26,32 \text{ tm.}$$

Con estos momentos extremos se trazaría la línea de cierre.

### § 7. — Cargas móviles uniformes. Diagramas de características máximas y mínimas.

**188. Generalidades.** — Si la viga elásticamente empotrada está sujeta a una carga móvil uniformemente repartida de intensidad  $p$ , es posible, como veremos, hallar con comodidad los diagramas que dan las características máximas y mínimas (máximas negativas) que a cada sección corresponden de acuerdo con la hipótesis de carga más desfavorable.

Estos diagramas son las curvas envolventes de los sucesivos diagramas de características correspondientes a las hipótesis de carga que dan el máximo o mínimo en cada sección. Resulta, pues, que:

*La tangente en la sección  $N$  al diagrama de máximos (o mínimos) de una característica, coincide con la tangente en la misma sección al diagrama de dicha característica correspondiente a la hipótesis de carga que da el máximo (o mínimo) en ella.*

Como elemento de referencia útil, se comienza por construir los diagramas de momentos flectores y esfuerzos tangenciales correspondientes a la carga permanente uniformemente repartida  $g$ . Están dados en la figura 145, que no requiere explicaciones.

**189. Diagramas de momentos flectores máximos y mínimos.** — Comencemos por los momentos flectores mínimos  $\mathcal{M}_{min}$  (máximos negativos), refiriéndolos al eje  $A'B'$  (fig. 146 *a*).

Las líneas de influencia de los momentos flectores, en las secciones  $N$  comprendidas entre las verticales focales, tienen todas sus ordenadas positivas, como hemos visto en (154) (fig. 123). Por consiguiente, la carga móvil no origina momentos flectores negativos en dichas secciones. Es decir, el diagrama de momentos mínimos entre  $I'$  y  $D'$  coincide con el eje.

Las líneas de influencia de los momentos flectores extremos  $\mathcal{M}'$  y  $\mathcal{M}''$  en  $A$  y  $B$ , tienen todas sus ordenadas negativas, como se ha visto en (154) (fig. 121 y 122). Para obtener los máximos negativos se debe cargar, pues, toda la viga con la carga  $p$ . Como es inmediato, estos momentos máximos negativos en los extremos son

$$\mathcal{M}'_{min} = \mathcal{M}'_g \frac{p}{g}, \quad \mathcal{M}''_{min} = \mathcal{M}''_g \frac{p}{g},$$

siendo  $M'_g$  y  $M''_g$ , los momentos extremos originados por la carga permanente. En la figura se han representado en  $A'A_0$  y  $B'B_0$ .

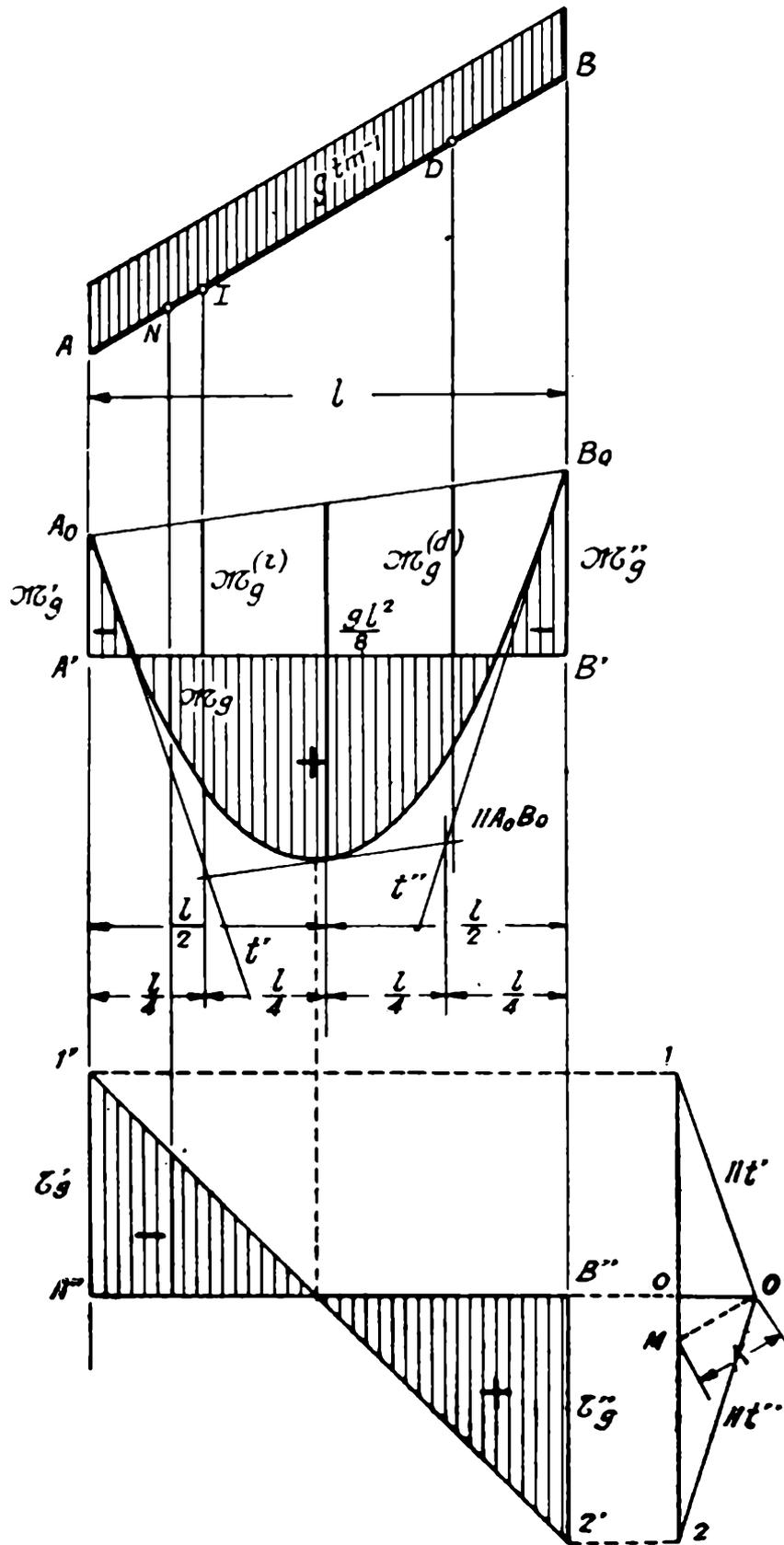


FIG. 145.

Las tangentes al diagrama de mínimos, en los puntos  $A_0$  y  $B_0$ , son las tangentes al diagrama de momentos flectores que da los máximos negativos en dichos extremos  $A$  y  $B$ , es decir, al diagrama correspondiente a la

carga uniforme  $p$  extendida en toda la pieza. O sea, son las tangentes  $t'$   $t''$  a la parábola de momentos, con flecha

$$f = \frac{pl^2}{8},$$

que pasa por  $A_0$  y  $B_0$ .

Las tangentes al diagrama de máximos negativos en  $I'$  y  $D'$ , coinciden con el eje  $A'B'$ , pues los momentos mínimos en dichas secciones (nulos) se

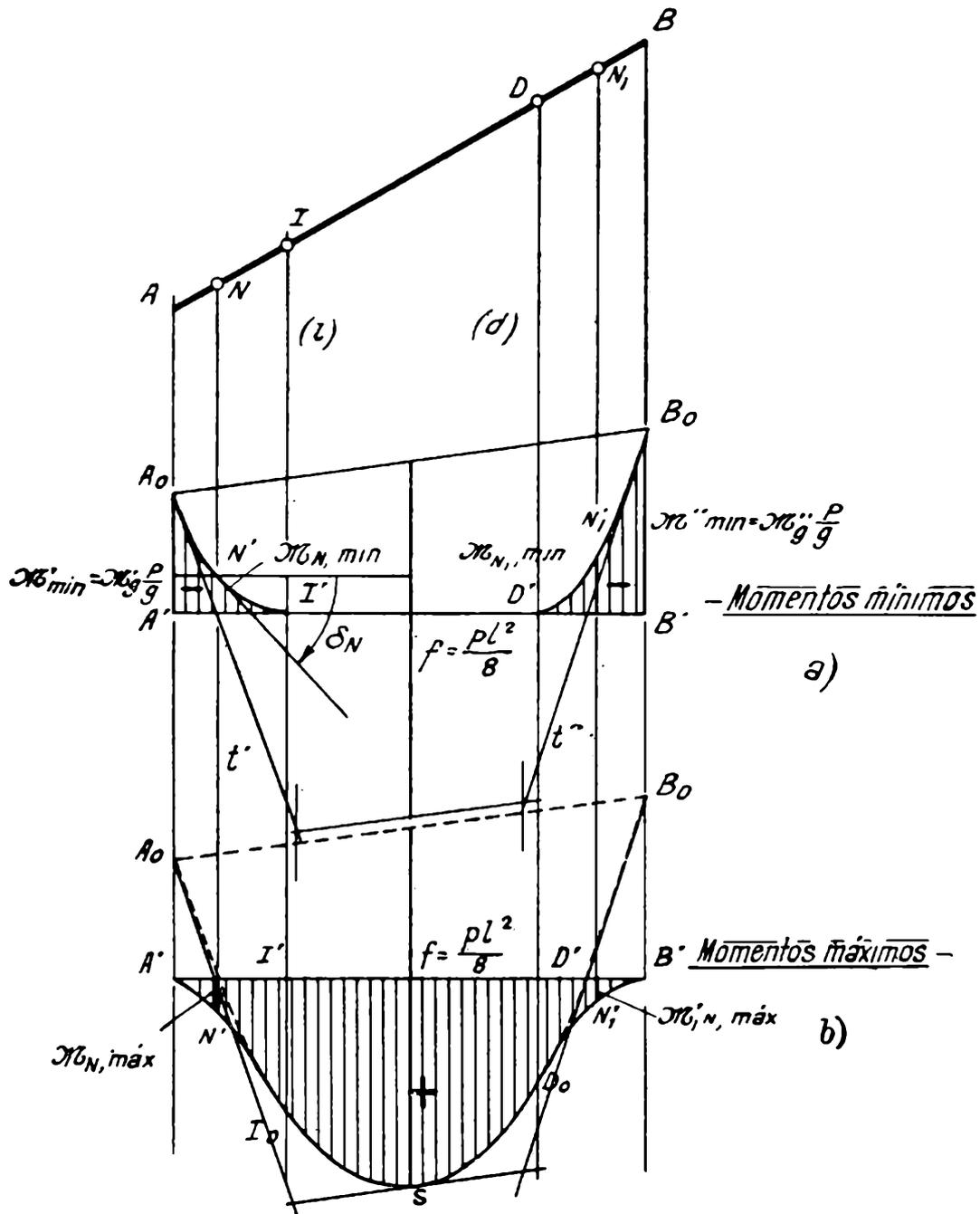


FIG. 146.

obtienen descargando toda la viga, hipótesis de carga para la que el diagrama de momentos coincide con el eje  $A'B'$ .

La línea de influencia del momento flector, en la sección  $N(N_1)$ , comprendida entre el extremo izquierdo y el foco  $I$  (derecho y el foco  $D$ );

tiene, según (154), la forma representada en la figura 147 *a* (147 *a'*). Posee una parte positiva y una negativa. El máximo negativo en dicha sección  $N(N_1)$  se obtiene cargando la zona negativa  $HB_0(A_0H_1)$ . Mediante los momentos focales  $\mathcal{M}^{(i)}$  y  $\mathcal{M}^{(d)}$  para dicha carga, se obtiene la línea de cierre  $A_0B_0$  (fig. 147 *b* y *b'*). Con la ordenada

$$f_0 = P_t f_0^- \quad (f_0^- \text{ tabla XI } a),$$

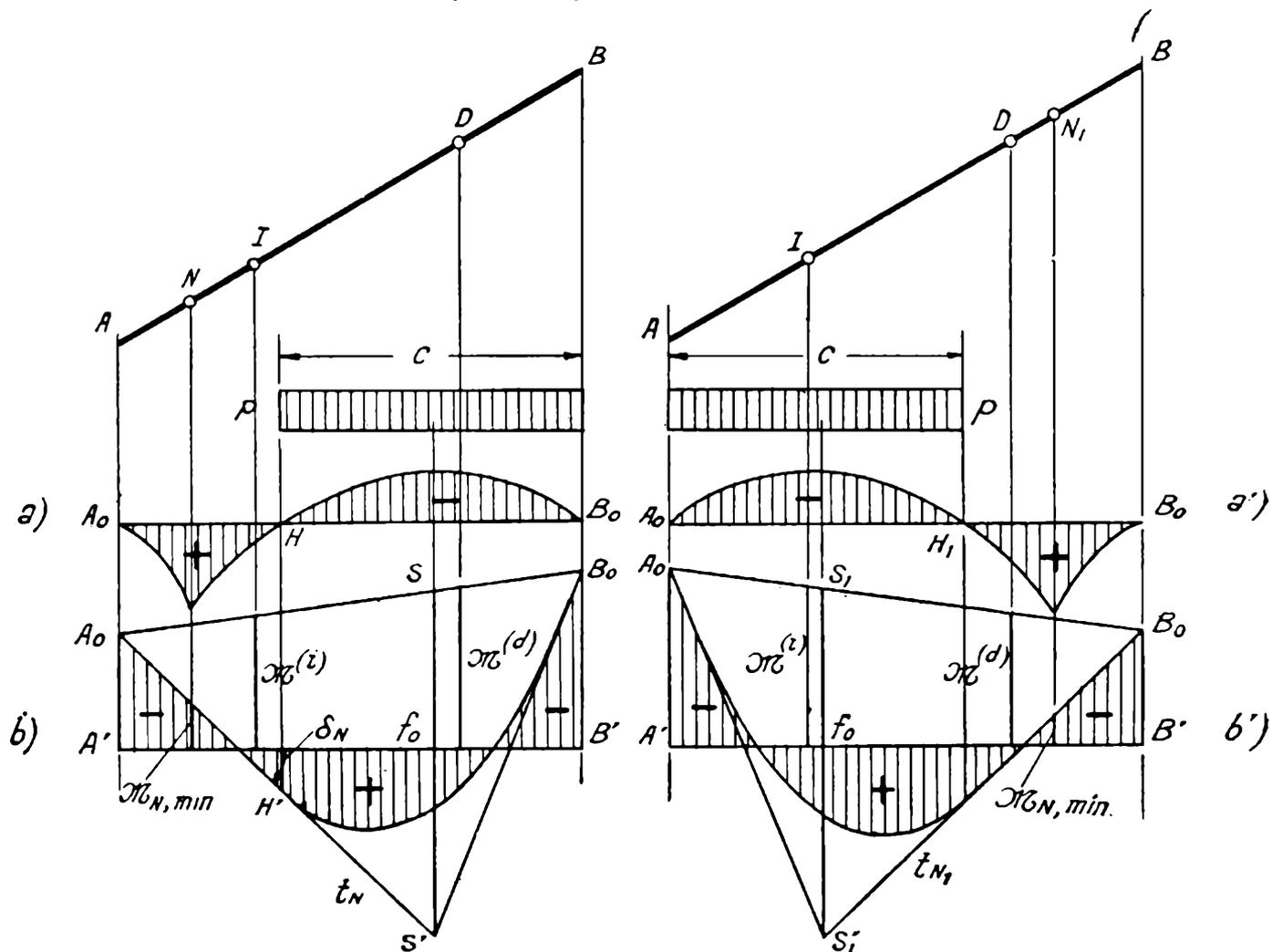


FIG. 147.

correspondiente a la carga concentrada

$$P_t = p c,$$

se obtiene el diagrama de momentos flectores correspondientes a dicha hipótesis de carga, y del mismo se deduce  $\mathcal{M}_{N,min}$  ( $\mathcal{M}_{N_1,min}$ ) y la dirección de la tangente en  $N'(N'_1)$  (fig. 146 *a*), igual a la de las rectas  $t_N \equiv A_0S'$  ( $t_{N_1} \equiv B_0S'_1$ ). No es necesario trazar todo el diagrama de momentos flectores, basta con estas últimas rectas.

Este cálculo es largo, pues requiere la determinación previa del punto  $H(H_1)$  (fig. 147), para lo que hay que calcular las ordenadas de la línea

de influencia de  $\mathcal{M}_N$  ( $\mathcal{M}_{N_1}$ ) en las proximidades del punto  $H$  ( $H_1$ ), en que cambia de signo.

En general, no sé requiere determinar más que un solo punto intermedio  $N'$  ( $N'_1$ ) (fig. 146 a). Más aún; como la curva  $A_0I'$  ( $B_0D'$ ) tiene una curvatura muy pequeña, basta, por lo común, trazarla a sentimiento, en base a los puntos extremos  $A_0$  e  $I'$  ( $B_0$  y  $D'$ ) y sus respectivas tangentes  $t'$  y  $A'B'$  ( $t''$  y  $A'B'$ ).

Obtenidas así estas curvas, resulta el diagrama de momentos flectores mínimos rayado en la figura.

190. — Determinemos, ahora, el diagrama de momentos flectores máximos (positivos). Como las líneas de influencia de los momentos flectores en las secciones comprendidas entre los focos tienen todas sus ordenadas positivas, para obtener el máximo en ellas se requiere cargar toda la viga. El diagrama de momentos flectores máximos entre los focos  $I$  y  $D$  (fig. 146 b) es, pues, la parábola de momentos originada por la carga  $p$  total, de flecha

$$f = \frac{pl^2}{8}$$

y que pasa por los puntos  $A_0$  y  $B_0$  (fig. 146 b), tales que

$$A'A_0 = \mathcal{M}'_g \frac{p}{g}, \quad B'B_0 = \mathcal{M}''_g \frac{p}{g},$$

o sea, la  $I_0SD_0$  representada con trazo lleno en la figura.

Como las líneas de influencia de los momentos flectores en los extremos tienen todas sus ordenadas negativas, los máximos momentos flectores son nulos en  $A$  y  $B$ , es decir, la gráfica buscada pasa por  $A'$  y  $B'$ .

La tangente en el punto  $A'$  ( $B'$ ) es  $A'B'$  y la tangente en  $I_0$  ( $D_0$ ) la correspondiente a la parábola  $A_0SB_0$  en dicho punto, como es inmediato.

Para las secciones  $N$  y  $N_1$ , comprendidas entre los extremos y los focos, se presenta la misma dificultad encontrada en el diagrama de momentos mínimos. Si se ha calculado alguna ordenada intermedia  $\mathcal{M}_{N,min}$  de este último, se tiene

$$\mathcal{M}_{N,max} + \mathcal{M}_{N,min} = \mathcal{M}_{N,g} \frac{p}{g},$$

siendo  $\mathcal{M}_{N,g}$  el momento que la carga permanente  $g$  origina en la sección  $N$ . Las hipótesis que dan en una sección el máximo y el mínimo, son, en efecto, complementarias, es decir, en conjunto cargan toda la viga. Resulta, por consiguiente,

$$\mathcal{M}_{N,max} = \mathcal{M}_{N,g} \frac{p}{g} - \mathcal{M}_{N,min}.$$

Este cálculo conviene hacerlo para algunas ordenadas de la curva  $A'N'I_0$  ( $B'N'_1D_0$ ) (fig. 146 b) aun cuando la rama  $A_0N'I'$  ( $B_0N'_1D'$ ) del diagrama de momentos mínimos (fig. 146 a), se haya trazado a sentimiento. Esta última se obtiene, en efecto, con mucha más aproximación que la primera, por tener, en general, curvatura mucho menor.

**191. Diagramas de momentos flectores máximos y mínimos totales.** — Si sobre la viga actúa, además de la carga móvil  $p$ , una carga uniformemente repartida permanente  $g$ , para obtener los momentos máximos y mínimos totales debidos a ambas cargas, a las ordenadas de los diagra-

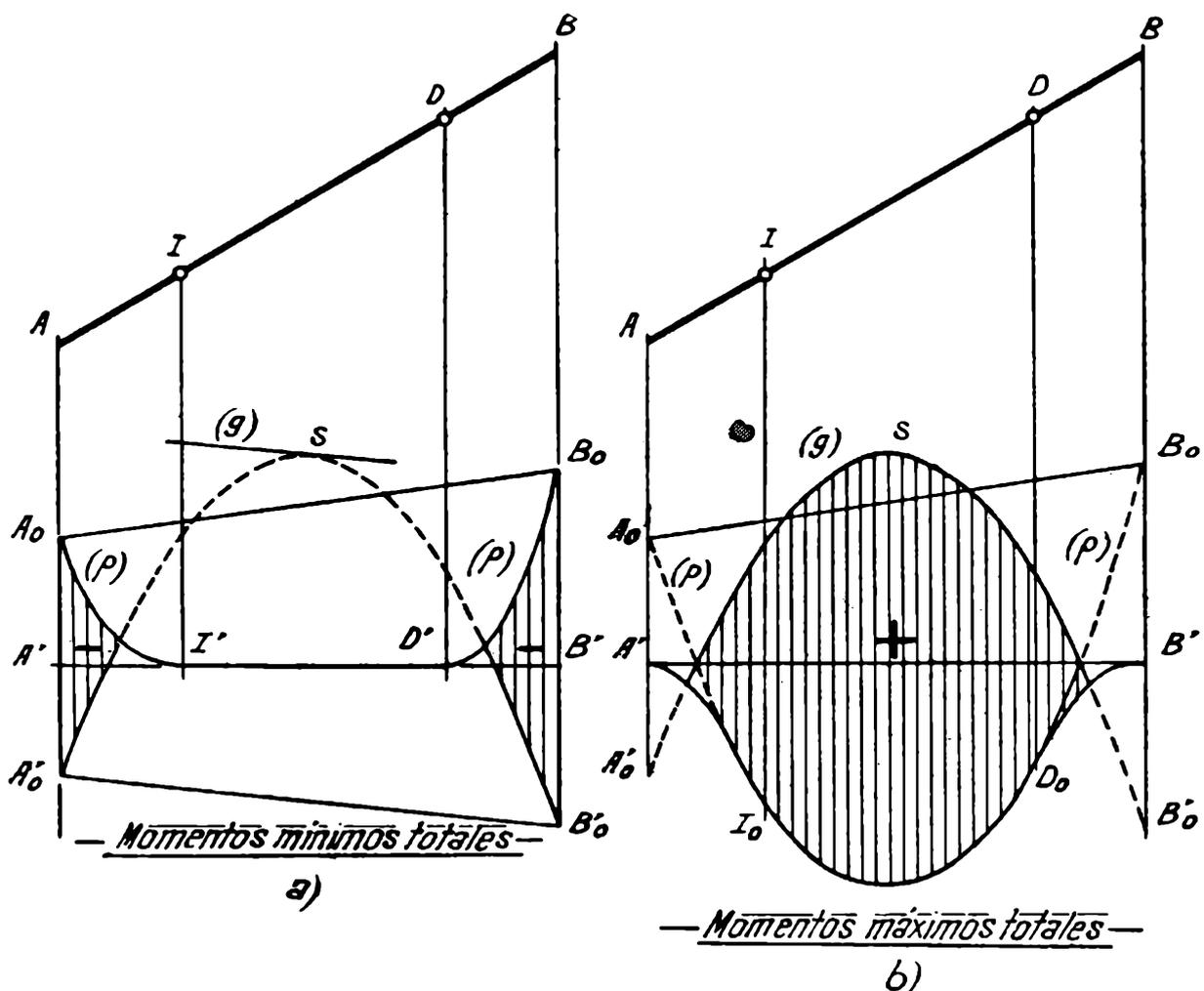


FIG. 148.

mas de momentos flectores máximos y mínimos anteriores, habrá que agregar las del diagrama de momentos originado por la carga permanente.

En la figura 148 se han trazado, referidos a los ejes  $A'B'$  los diagramas de momentos máximos y mínimos originados por la carga móvil  $p$ . Se ha trazado además, invertido para superponer, el diagrama de momentos  $A'_0SB'_0$ , originado por la carga permanente y obtenido en la figura 145.

Resultan así los diagramas rayados que son los de momentos flectores máximos y mínimos totales.

192. Diagramas de esfuerzos tangenciales máximos y mínimos.— Comencemos por el diagrama de esfuerzos tangenciales máximos, refiriéndolo al eje  $A'B'$  (fig. 149).

La línea de influencia del esfuerzo tangencial en  $A$  posee, según (155), todas sus ordenadas negativas. El diagrama buscado tiene, por tanto, ordenada nula en  $A'$ . Como este esfuerzo se produce en la viga descar-

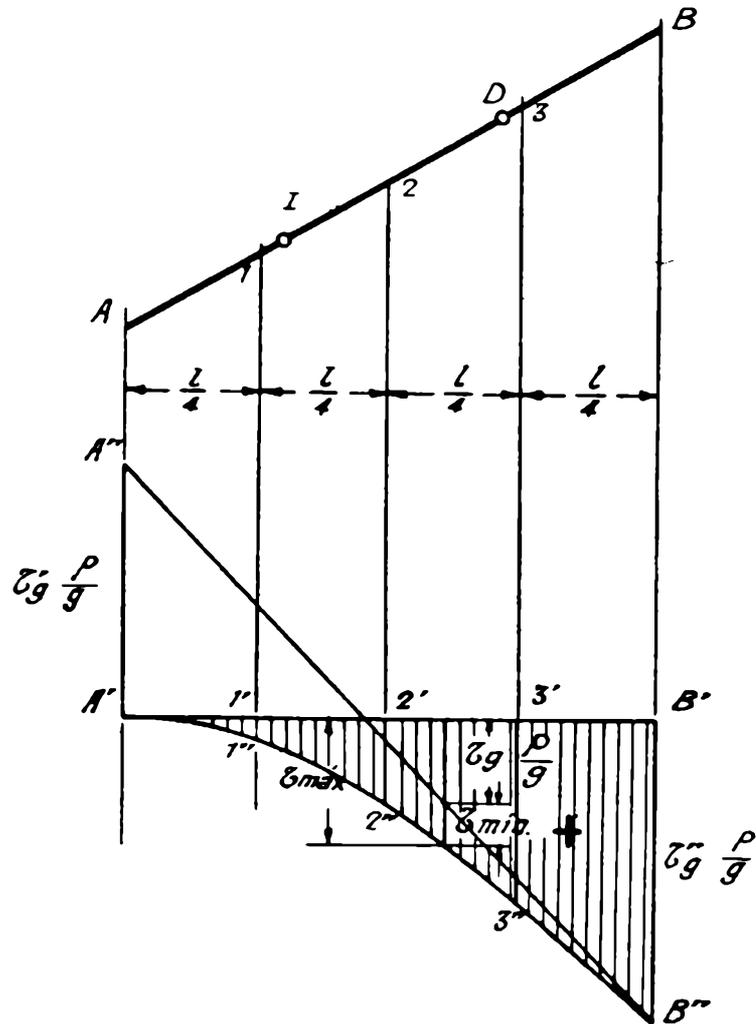


FIG. 149.

gada, cuyo diagrama de esfuerzos tangenciales coincide con el eje  $A'B'$ , el de máximos buscado es tangente a esta recta en  $A'$ .

La línea de influencia del esfuerzo tangencial  $\mathcal{T}''$  en el extremo derecho  $B$  tiene, según (156), todas sus ordenadas positivas. Para obtener el máximo valor de  $\mathcal{T}''$  se requiere, pues, cargar toda la viga con la carga móvil  $p$ . El diagrama de esfuerzos tangenciales, para esta hipótesis de carga, está dado por la recta  $A''B''$ , obtenida multiplicando por  $\frac{p}{g}$  las ordenadas del diagrama de esfuerzos tangenciales de la figura 145, originado por la carga permanente  $g$ . El diagrama buscado es, además, tangente en  $B''$  a  $A''B''$  (fig. 149).

Busquemos, ahora, la ordenada correspondiente a una sección intermedia.

La línea de influencia del esfuerzo tangencial en la sección  $j$  tiene, según (153), la forma representada en la figura 150. Para obtener el

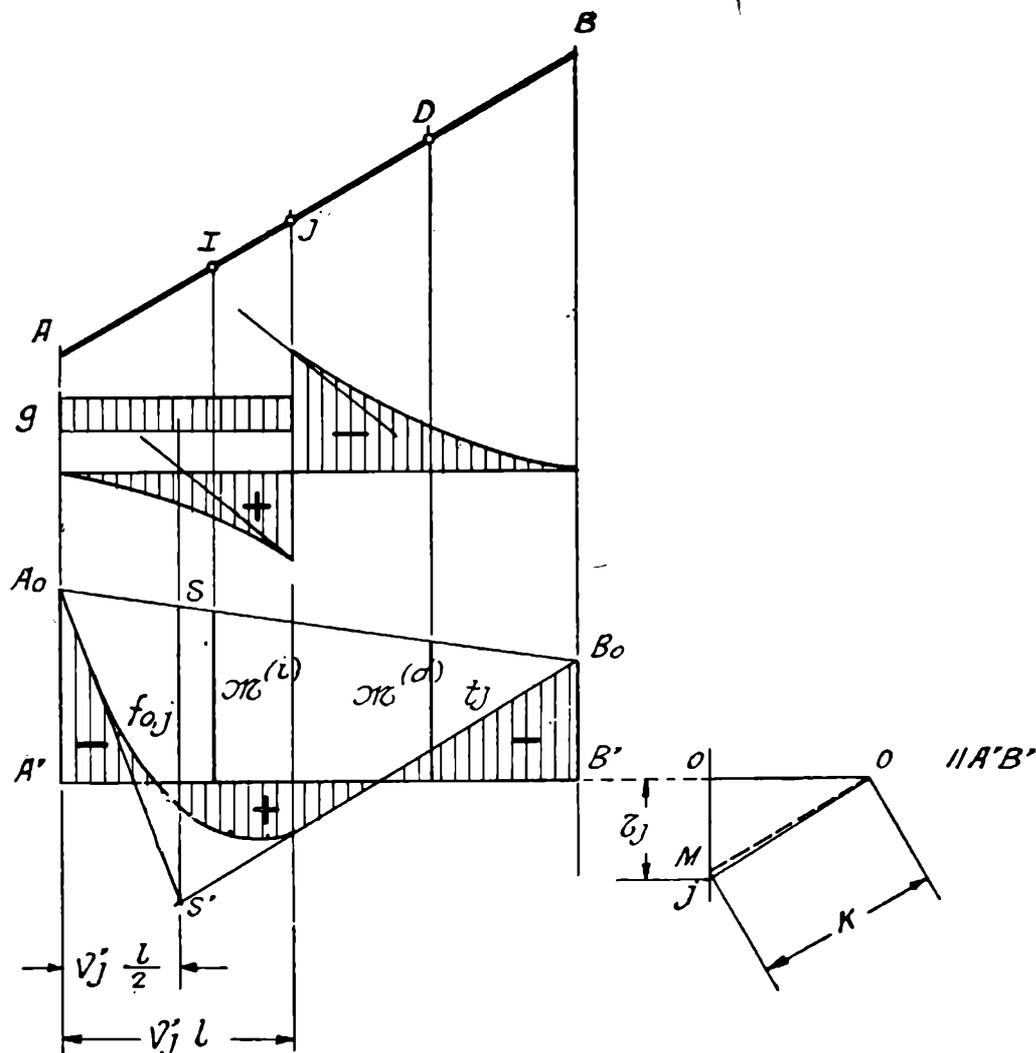


FIG. 150.

máximo  $\mathcal{T}$  en  $j$  debe cargarse desde el extremo  $A$  hasta dicha sección. Calculando los momentos focales para la carga extendida en la longitud  $v'_j l$ , y llevándolos hacia arriba, a partir del eje  $A'B'$ , se obtiene la línea de cierre  $A_0B_0$ . Considerando la carga concentrada

$$P_t = p l v'_j,$$

aplicada a la distancia  $\frac{v'_j l}{2}$  del extremo izquierdo, se calcula el momento flector máximo respectivo  $f_{0,j}$ , y llevándolo a partir de  $A_0B_0$ , se obtiene el diagrama triangular  $A_0S'B_0$  correspondiente a la misma. El resto del diagrama de momentos se completaría como indica la figura, aunque no es necesario para los fines propuestos.

Trazando por el polo  $O$  las paralelas a  $A'B'$  y a  $B_0S' \equiv t_j$ , se obtiene en  $\overline{Oj}$ , el esfuerzo tangencial máximo en la sección  $j$ , es decir, la ordenada respectiva del diagrama de máximos. Procediendo en igual forma para un número conveniente de secciones, se obtienen los puntos necesarios para completar el trazado de este último.

Prácticamente, basta con el cálculo de pocas ordenadas, las correspondientes a las secciones intermedias que dividen la luz en cuatro partes iguales, por ejemplo, es decir, a las secciones  $j = 1, 2$  y  $3$ , con  $v'_1 = 0,25$ ,  $v'_2 = 0,5$  y  $v'_3 = 0,75$ . Se procede en la forma siguiente:

Mediante los valores  $\bar{X}^{(i)}$  y  $\bar{X}^{(d)}$  de las tablas VIIb, se calculan los momentos focales para cargas uniformes que se extienden desde el apoyo  $A$  hasta las secciones  $v'_j$ , dados por las expresiones

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(i)}_j &= -T^{(d)}_j v^{(i)} = -pl^2 X^{(i)}_j v^{(i)}, \\ \mathcal{M}^{(d)}_j &= -T^{(i)}_j v^{(d)} = -pl^2 X^{(d)}_j v^{(d)}, \end{aligned} \quad (j = 1, 2, 3)$$

y, con ellos, se trazan las líneas de cierre  $A_jB_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) (fig. 151).

Se calculan los momentos flectores  $f_{0,j}$  de las cargas concentradas

$$P_{t,j} = pl v'_j \quad (j = 1, 2, 3),$$

aplicadas a las distancias  $\frac{v'_j l}{2}$  del extremo  $A$ , momentos dados por las expresiones

$$f_{0,j} = P_{t,j} \bar{f}_{0,j},$$

con  $\bar{f}_{0,j}$  tomados de la tabla XIa.

Se llevan estos valores  $f_{0,j}$  en las rectas de acción de las  $P_{t,j}$  y a partir de la respectiva línea de cierre  $A_jB_j$ , obteniendo los puntos  $S_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Las rectas  $S_1B_1 = t_1$ ,  $S_2B_2 = t_2$  y  $S_3B_3 = t_3$ , dan las tangentes en las secciones 1, 2 y 3, de los diagramas de momentos flectores para las hipótesis de cargas que producen los máximos esfuerzos tangenciales en las mismas. La paralela a  $A'B'$  por el polo  $O$  da el punto  $0$ ; las paralelas por el mismo polo  $O$  a las tangentes  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ , dan los puntos 1, 2 y 3. Los segmentos  $\overline{01}$ ,  $\overline{02}$  y  $\overline{03}$  dan las ordenadas del diagrama de esfuerzos tangenciales máximos correspondientes a las secciones consideradas. Llevándolas en  $\overline{1'1''}$ ,  $\overline{2'2''}$  y  $\overline{3'3''}$  (fig. 149), el diagrama se obtiene trazando la curva que pasa por  $1''$ ,  $2''$  y  $3''$  y que, además, es tangente a  $A'$  a  $A'B'$  y en  $B''$  a  $A''B''$ . Resulta así la gráfica rayada en la figura.

Como las hipótesis de carga que dan, en una sección, los esfuerzos tangenciales máximo y mínimo, son complementarias, la suma de estos últimos da el esfuerzo tangencial originado por la carga extendida en toda la viga, es decir, se tiene

$$\tau_{max} + \tau_{min} = \tau_0 \frac{p}{g},$$

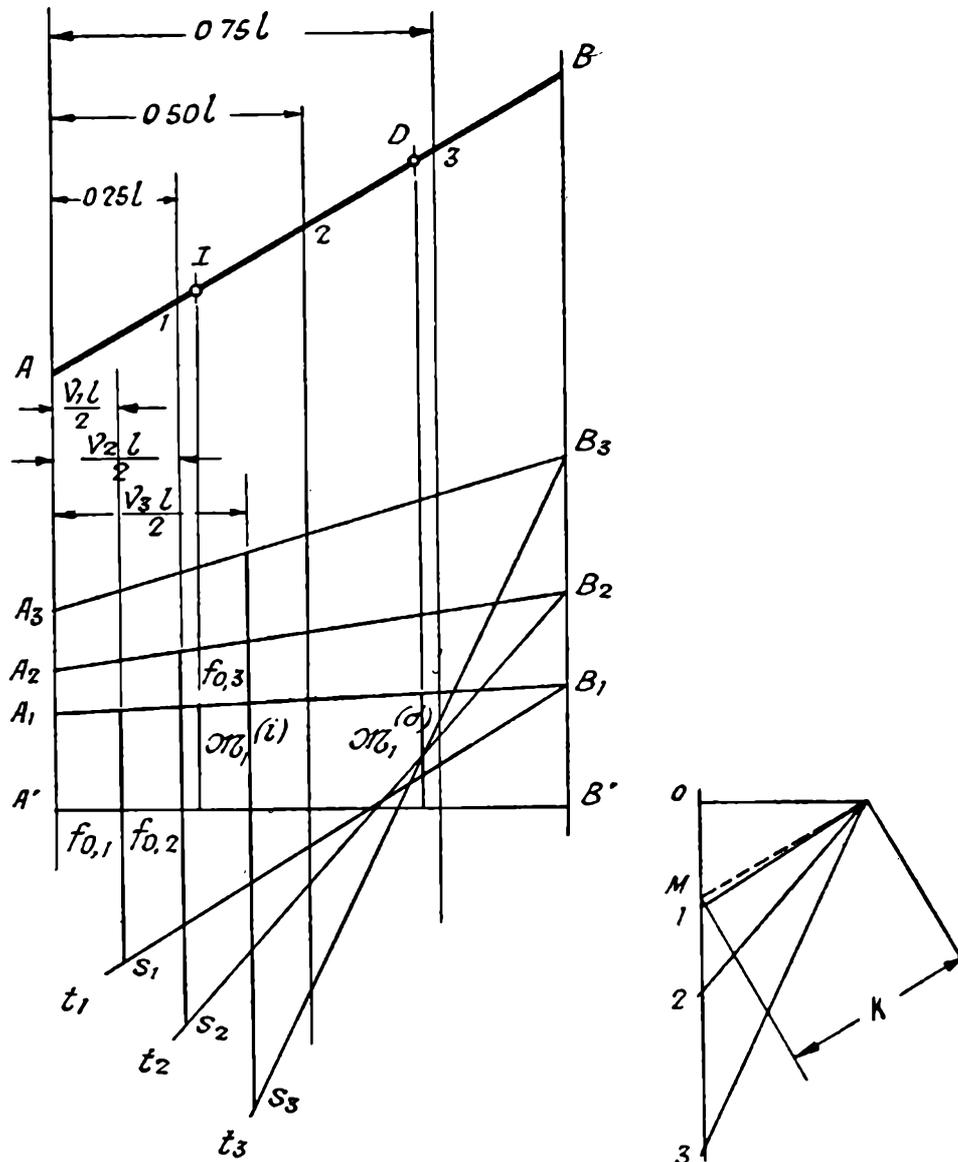


FIG. 151.

siendo  $\tau_0 \frac{p}{g}$  las ordenadas de la recta  $A''B''$  referida a la  $A'B'$ . Por consiguiente, como resulta claramente de la figura, el diagrama de esfuerzos tangenciales mínimos es la misma curva  $A'3''B''$ , referida al eje  $A''B''$ .

**193. Diagrama de esfuerzos tangenciales máximos y mínimos totales.** — Si sobre la viga actúan las cargas uniformes permanente  $g$  y móvil  $p$ , para obtener los diagramas de máximos y mínimos totales, se requerirá sumar a los diagramas anteriores, los originados por la carga permanente.

Llevando, con signo contrario, a los efectos de efectuar directamente la superposición, en  $A''B''$  (fig. 152) el diagrama de esfuerzos tangenciales

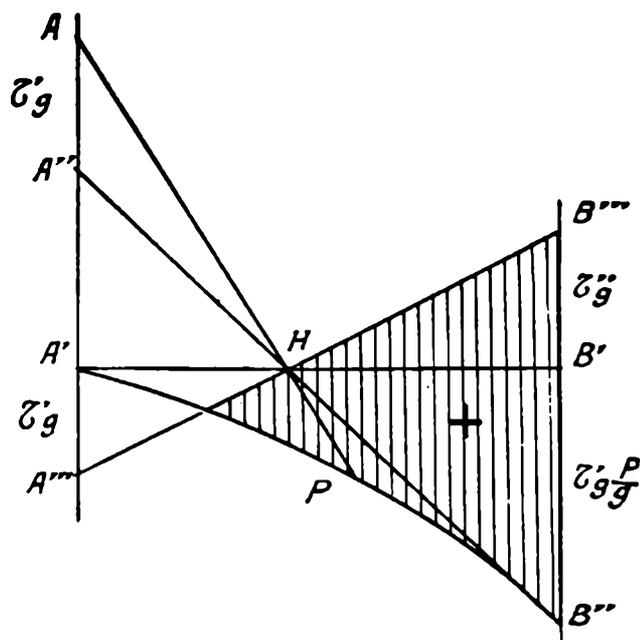


FIG. 152.

debidos a la carga permanente, los tangenciales máximos totales están dados por el diagrama rayado en la figura.

Análogamente, llevando en  $A''A$  el esfuerzo tangencial  $\mathcal{T}'_0$  de la carga permanente en el extremo  $A$  y trazando la recta  $AH$ ,  $A'PA$  es el diagrama de esfuerzos tangenciales mínimos totales.

### § 8. -- Vigas empotradas.

**194. Generalidades.** — Se llama *viga empotrada* la que tiene empotramientos rígidos en sus dos extremos  $A$  y  $B$  (fig. 153). Sus focos  $I$  y  $D$  coinciden con los puntos de aplicación de las tercias, es decir, se tiene

$$[1] \quad v^{(i)} = v'_0, \quad v^{(d)} = v''_0.$$

Salvo esta particularidad, a las vigas empotradas les es aplicable, sin ninguna variación, todo lo que se ha expuesto para las vigas elásticamente empotradas.

**195. Cálculo numérico de las líneas de influencia.** — Las líneas de influencia de los momentos flectores  $\mathcal{M}_N$  en las secciones  $N$ , están dadas

por las [1] de (159), con valores de  $\bar{m}'_{l,N}$  y  $\bar{m}''_{l,N}$  obtenidos haciendo en las mismas  $\nu^{(i)} = \nu'_0$  y  $\nu^{(d)} = \nu''_0$ ; es decir, con

$$\bar{m}'_{l,N} = - \frac{1 - \nu'_N - \nu''_0}{1 - \nu'_0 - \nu''_0} \nu'_0,$$

$$\bar{m}''_{l,N} = - \frac{\nu'_N - \nu'_0}{1 - \nu'_0 - \nu''_0} \nu''_0,$$

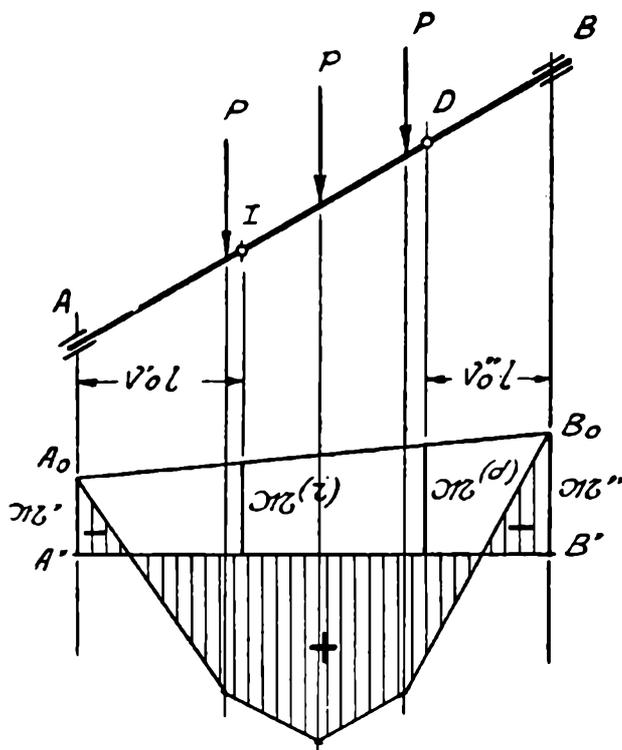


FIG. 153.

o, escribiendo en otra forma,

$$[1] \quad \begin{cases} \bar{m}'_{l,N} = -A' + \nu'_N C', \\ \bar{m}''_{l,N} = B - \nu'_N C'', \end{cases}$$

con

$$[2] \quad \begin{cases} A' = \frac{\nu'_0 (1 - \nu''_0)}{1 - \nu'_0 - \nu''_0}, & B = \frac{\nu'_0 \nu''_0}{1 - \nu'_0 - \nu''_0}, \\ C' = \frac{\nu'_0}{1 - \nu'_0 - \nu''_0}, & C'' = \frac{\nu''_0}{1 - \nu'_0 - \nu''_0}. \end{cases}$$

Para la línea de influencia del momento flector  $\mathcal{M}'$  en  $A$ , se tiene, análogamente ([1] de (160)),

$$[3] \quad \begin{cases} \bar{m}'_{l,A} = -A', \\ \bar{m}''_{l,A} = B, \end{cases}$$

y para la del momento  $\mathcal{M}''$  en el extremo derecho  $B$  ([2] de (160))

$$[4] \quad \begin{cases} \bar{m}'_{l,B} = B, \\ \bar{m}''_{l,B} = -A'', \end{cases}$$

con

$$[5] \quad A'' = \frac{v''_0 (1 - v'_0)}{1 - v'_0 - v''_0}.$$

Finalmente, para la línea de influencia del esfuerzo tangencial  $\mathcal{T}'$  en el extremo  $A$ , se tiene ([1] de (161)).

$$\bar{m}'_{l,T'} = -C',$$

$$\bar{m}''_{l,T'} = C''$$

Las magnitudes  $A'$ ,  $A''$  y  $B$  ya han sido consideradas en (21), y sus valores están dados, para las piezas con empates, por la tabla II. La misma tabla da también las magnitudes  $C'$  y  $C''$ .

**196. Momentos de empotramiento y sus líneas de influencia.** — Según las [1] y [2] de (160), las líneas de influencia de los momentos flectores extremos  $\mathcal{M}'$  y  $\mathcal{M}''$  (o de empotramiento, como también se dice), son, respectivamente,

$$\begin{cases} v^A = l (\bar{m}'_{l,A} \bar{\xi}^{(i)} + \bar{m}''_{l,A} \bar{\xi}^{(d)}) \\ v^B = l (\bar{m}'_{l,B} \bar{\xi}^{(i)} + \bar{m}''_{l,B} \bar{\xi}^{(d)}) \end{cases}$$

o, en base a las [3] y [4] del número anterior,

$$[1] \quad v^A = -l \bar{v}^A, \quad v^B = -l \bar{v}^B,$$

con

$$[2] \quad \begin{cases} \bar{v}^A = A' \bar{\xi}^{(i)} - B \bar{\xi}^{(d)} \\ \bar{v}^B = -B \bar{\xi}^{(i)} + A'' \bar{\xi}^{(d)}. \end{cases}$$

Las tablas XIV dan calculadas las ordenadas numéricas  $\bar{v}^A$  y  $\bar{v}^B$  para las piezas con empates.

197. — La integración de las líneas de influencia anteriores da, para los estados de carga considerados en las tablas,

$$[1] \quad \mathcal{M}' = -Pl \overline{\mathcal{M}}', \quad \mathcal{M}'' = -Pl \overline{\mathcal{M}}'',$$

para cargas concentradas, y

$$[2] \quad \mathcal{M}' = -pl^2 \overline{\mathcal{M}}', \quad \mathcal{M}'' = -pl^2 \overline{\mathcal{M}}''$$

para las continuas, con

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}' &= A' \overline{X}^{(i)} - B \overline{X}^{(d)}, \\ \overline{\mathcal{M}}'' &= -B \overline{X}^{(i)} + A'' \overline{X}^{(d)}. \end{aligned}$$

Las tablas XV dan calculadas los coeficientes  $\overline{\mathcal{M}}'$  y  $\overline{\mathcal{M}}''$  para las piezas con empates (incluyendo  $J = \text{const.}$ ), correspondientes a las principales hipótesis de carga que se presentan en las aplicaciones.

198. Momentos de empotramiento y sus líneas de influencia para vigas de momento de inercia constante. — Siendo, para las piezas de momento de inercia constante,

$$\begin{aligned} \overline{\xi}^{(i)} &= 2 v' - 3 v'^2 + v'^3 \\ \overline{\xi}^{(d)} &= v' - v'^3 \end{aligned}$$

y, además,

$$v'_0 = v''_0 = \frac{1}{3},$$

se tiene

$$A' = A'' = \frac{2}{3}, \quad B = \frac{1}{3},$$

y las [1] y [2] de (196) dan

$$\begin{aligned} v^A &= \frac{1}{3} l [-2 (2 v' - 3 v'^2 + v'^3) + v' - v'^3], \\ v^B &= \frac{1}{3} l [2 v' - 3 v'^2 + v'^3 - 2 (v' - v'^3)], \end{aligned}$$

o sea, simplificando,

$$[1] \quad \begin{cases} v^A = -l (v' - 2 v'^2 - v'^3), \\ v^B = -l (v'^2 - v'^3). \end{cases}$$

Se tiene, por consiguiente,

$$A = -l, \quad A_0 = 0, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = -2, \quad A_3 = -1,$$

para la primera, y

$$A = -l, \quad A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 1, \quad A_3 = -1$$

para la segunda.

Sustituyendo estos valores en las fórmulas I, se obtienen las expresiones analíticas que dan los momentos flectores extremos  $\mathcal{M}'$  y  $\mathcal{M}''$  para los principales estados de carga que se presentan en las aplicaciones, expresiones que se agrupan en las fórmulas IV.

**199. Ejemplo numérico.** — Sea la viga empotrada simétrica, con empates rectos, de la figura 154, que tiene

$$s = 10,50 \text{ m}, \quad l = 9,00 \text{ m}, \quad a = 4,20 \text{ m}, \\ J = 0,005 \text{ m}^4, \quad J' = 0,05 \text{ m}^4,$$

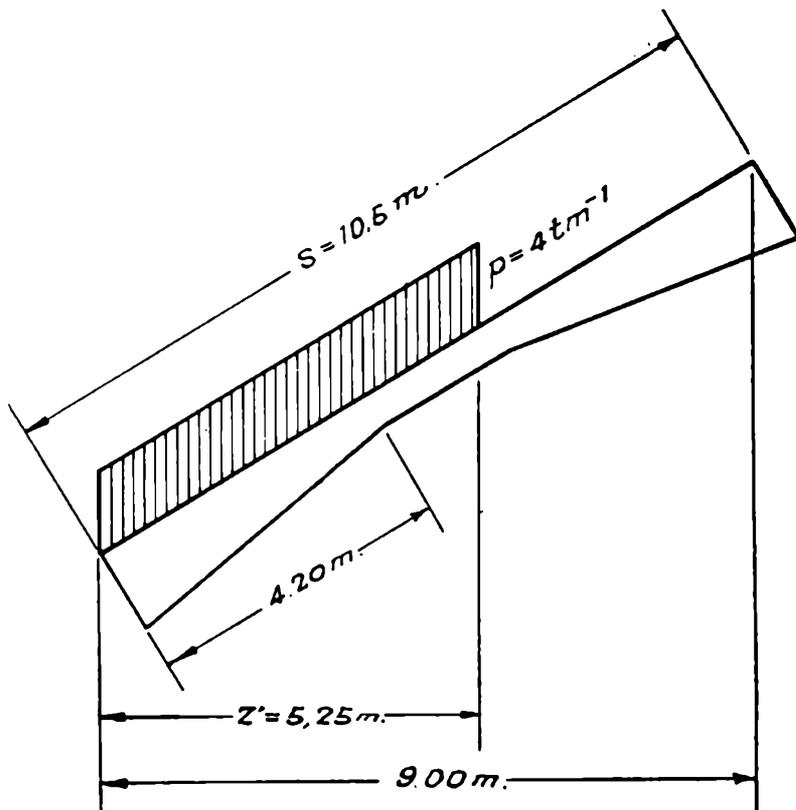


FIG. 154.

y para la que, por consiguiente,

$$n = \frac{J}{J'} = \frac{0,005 \text{ m}^4}{0,05 \text{ m}^4} = 0,10, \quad \lambda = \frac{a}{s} = \frac{4,20 \text{ m}}{10,50 \text{ m}} = 0,40.$$

Se pide los momentos de empotramiento  $\mathcal{M}'$  y  $\mathcal{M}''$  originados por la carga uniforme parcial  $p = 4 \text{ tm}^{-1}$  representada en la figura.

La abscisa numérica de la longitud cargada es

$$v' = \frac{z'}{l} = \frac{5,25 \text{ m}}{9,00 \text{ m}} = 0,58.$$

La tabla XV<sup>12a</sup> para  $n = 0,10$  ,  $\lambda = 0,40$  y  $v' = 0,58$ , da

$$\overline{\mathcal{M}}' = 0,0881, \quad \overline{\mathcal{M}}'' = 0,0453,$$

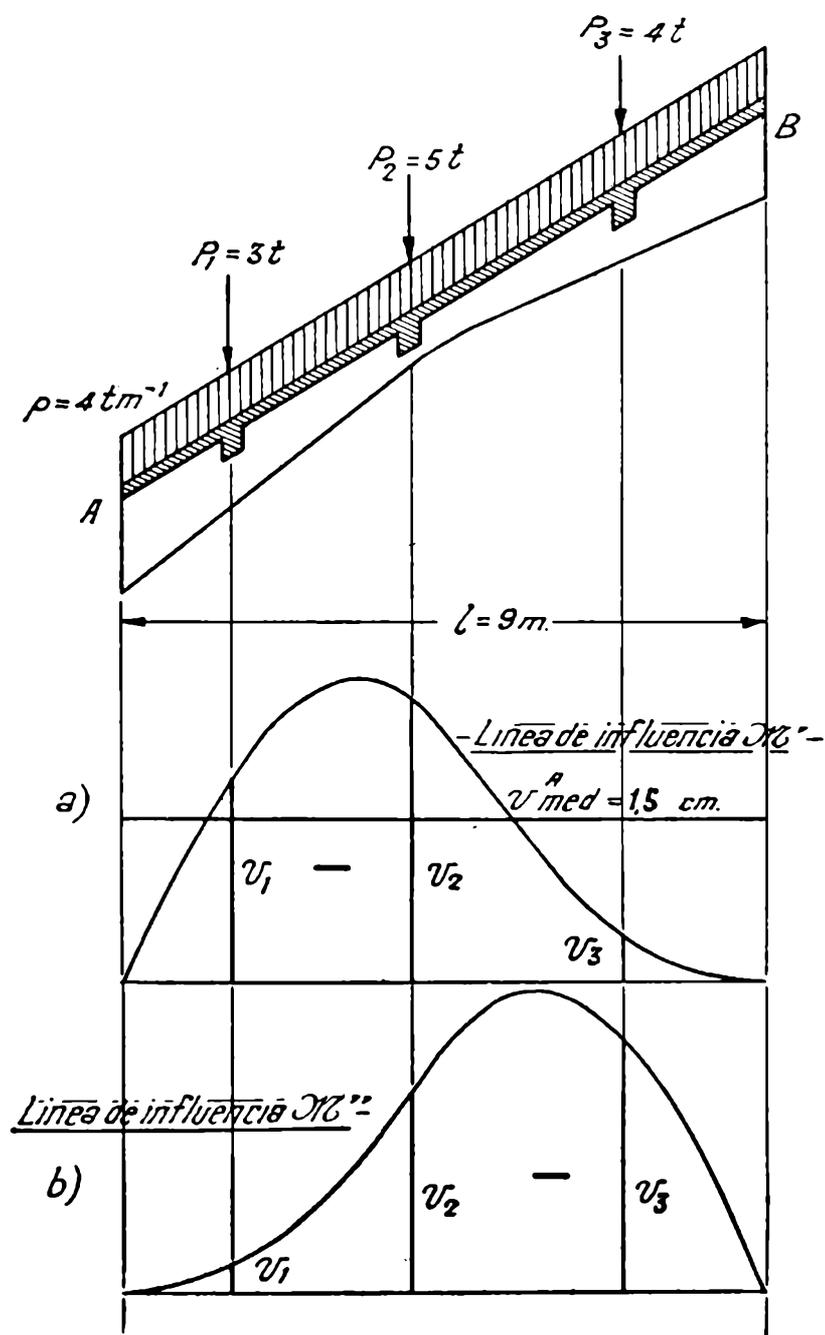


FIG. 155.

y, por consiguiente, resulta

$$\mathcal{M}' = -pl^2 \overline{\mathcal{M}}' = -4 \text{ tm}^{-1} \times 9^2 \text{ m}^2 \times 0,0881 = -28,54 \text{ tm},$$

$$\mathcal{M}'' = -pl^2 \overline{\mathcal{M}}'' = -4 \text{ tm}^{-1} \times 9^2 \text{ m}^2 \times 0,0453 = -14,68 \text{ tm}.$$

200.— Sobre la viga anterior actúa el estado de cargas representado en la figura 155; se piden también los momentos de empotramiento. No correspondiendo el estado de cargas a los que consignan las tablas, recurrimos a las líneas de influencia de  $\mathcal{M}'$  y  $\mathcal{M}''$

A partir del eje  $A'B'$  se han llevado ordenadas  $-\bar{v}_A$  de la tabla XIVa, correspondientes a  $n = 0,10$  y  $\lambda = 0,40$ , en la escala

$$\frac{1}{1,35 \text{ cm}}$$

Se ha obtenido así la gráfica de la figura, que da la línea de influencia de  $\mathcal{M}'$ , en la escala

$$l \frac{1}{2 \text{ cm}} = 9 \text{ m} \frac{1}{1,35 \text{ cm}} = \frac{7,4 \text{ m}}{\text{cm}}$$

La línea de influencia de  $\mathcal{M}''$  se ha obtenido por simetría.

La ordenada media de ambas curvas, expresada en centímetros, calculada mediante un planímetro, es

$$v_{med}^A (\text{cm}) = v_{med}^B (\text{cm}) = -1,5 \text{ cm}.$$

El cálculo de  $\mathcal{M}'$  y  $\mathcal{M}''$ , observando que la carga total equivalente a la uniformemente repartida es

$$P_4 = p_4 l = 4 \text{ tm}^{-1} 9 \text{ m} = 36 \text{ t},$$

se efectúa a continuación:

$j$	$P_j$ (t)	$v_j^A$ (cm)	$v_j^B$ (cm)	$P_j v_j^A$ (tcm)	$P_j v_j^B$ (tcm)
1	3	-1,9	-0,3	- 5,70	- 0,90
2	5	-2,65	-1,9	- 14,60	- 9,50
3	4	-0,4	-2,4	- 1,60	- 9,60
4	36	-1,5	-1,5	- 54,00	- 54,00
				$\sum P_j v_j^A = - 74,90 \text{ tcm}$	$\sum P_j v_j^B = - 74,00 \text{ tcm}$

Resulta

$$\mathcal{M}' = \sum P_j v_j^A (\text{tcm}) \frac{7,4 \text{ m}}{\text{cm}} = - 74,90 \text{ tcm} \frac{7,4 \text{ m}}{\text{cm}} = - 55,10 \text{ tm},$$

$$\mathcal{M}'' = \sum P_j v_j^B (\text{tcm}) \frac{7,4 \text{ m}}{\text{cm}} = - 74,00 \text{ tcm} \frac{7,4 \text{ m}}{\text{cm}} = - 54,80 \text{ tm}.$$

§ 9. — Vigas empotrado - articuladas.

201. Generalidades. — Se llama viga *empotrado-articulada* la que tiene un empotramiento rígido en un extremo  $A$  ( $B$ ) y una articulación en el otro  $B$  ( $A$ ) (fig. 156).

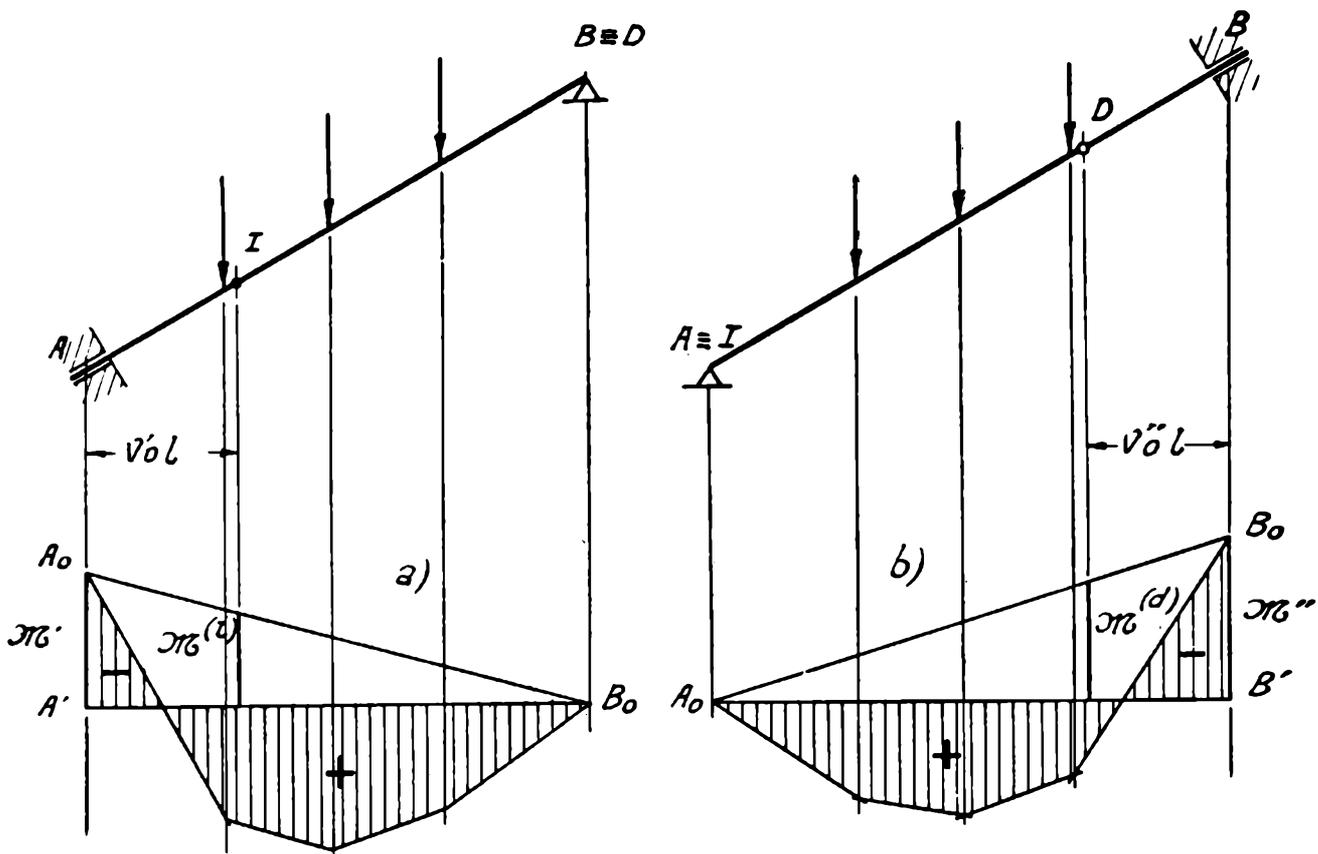


FIG. 156.

Si el empotramiento está en el extremo izquierdo (derecho), el foco izquierdo ( $I$ ) (derecho  $D$ ) coincide con el punto de aplicación de la tercia izquierda (derecha) y el derecho  $D$  (izquierdo  $I$ ) con la articulación  $B$  ( $A$ ). Además, el momento flector en la articulación es nulo. Se tiene, por consiguiente,

$$[1] \quad v^{(i)} = v'_0, \quad v^{(d)} = 0, \quad \mathcal{M}'' = 0,$$

cuando el empotramiento está en el extremo izquierdo, y

$$[2] \quad v^{(i)} = 0, \quad v^{(d)} = v''_0, \quad \mathcal{M}' = 0,$$

cuando está en el derecho.

Salvo esta particularidad, a las vigas empotrado-articuladas les es aplicable, sin ninguna variación, todo lo que se ha expuesto para las vigas elásticamente empotradas.

**202. Cálculo numérico de las líneas de influencia de características.**— Busquemos para las vigas empotrado-articuladas, las expresiones de las magnitudes  $\bar{m}'_l$  y  $\bar{m}''_l$  de (159), (160) y (161) que aparecen en las ecuaciones de las líneas de influencia de características. Para ello, recordemos que ([2] y [4] de (33),

$$[a] \quad \frac{1}{\bar{\varepsilon}^{(i)}_A} = \frac{v'_0}{1 - v'_0}, \quad \frac{1}{\bar{\varepsilon}^{(d)}_B} = -\frac{v''_0}{1 - v''_0}.$$

Cuando el empotramiento está en el extremo izquierdo  $A$  ( $v^{(i)} = v'_0$ ,  $v^{(d)} = 0$ ,  $\mathcal{M}'' = 0$ ), se tiene que:

$$[1] \quad \bar{m}''_{l,N} = \bar{m}''_{l,A} = \bar{m}''_{l,T'} = 0$$

y

$$[2] \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{m}'_{l,N} = -\frac{1}{\bar{\varepsilon}^{(i)}_A} (1 - v'_N) = -\frac{1}{\bar{\varepsilon}^{(i)}_A} v''_N, \\ \bar{m}'_{l,A} = -\frac{1}{\bar{\varepsilon}^{(i)}_A}, \\ \bar{m}'_{l,T'} = -\frac{1}{\bar{\varepsilon}^{(i)}_A}, \end{array} \right.$$

y, cuando el empotramiento está en el extremo derecho ( $v^{(i)} = 0$ ,  $v^{(d)} = v''_0$ ,  $\mathcal{M}' = 0$ ) se tiene

$$[3] \quad \bar{m}'_{l,N} = \bar{m}'_{l,B} = \bar{m}'_{l,T'} = 0$$

y

$$[4] \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{m}''_{l,N} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}^{(d)}_B} v'_N, \\ \bar{m}''_{l,B} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}^{(d)}_B}, \\ \bar{m}''_{l,T'} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}^{(d)}_B}. \end{array} \right.$$

**203. Momento de empotramiento y su línea de influencia.**— La línea de influencia del momento flector extremo  $\mathcal{M}'$  ( $\mathcal{M}''$ ), para la viga empotrada en el extremo izquierdo (derecho), según las [1] y [2] de

(160) y teniendo en cuenta las expresiones de  $\bar{m}'_{l,A}$ ,  $\bar{m}''_{l,A}$ ,  $\bar{m}'_{l,B}$  y  $\bar{m}''_{l,B}$  obtenidas en el número anterior, se escribe

$$[1] \quad v^A = -l \bar{v}^A, \quad (v^B = -l \bar{v}^B)$$

con

$$[2] \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{v}^A = \frac{\bar{\xi}^{(i)}}{\bar{\varepsilon}^{(i)}_A} \\ \left( \bar{v}^B = -\frac{\bar{\xi}^{(d)}}{\bar{\varepsilon}^{(d)}_B} \right) \end{array} \right.$$

Las tablas XVI dan calculadas las ordenadas numéricas  $\bar{v}^A$  y  $\bar{v}^B$  para las piezas con empates.

204. — La integración de las líneas de influencia anteriores da, para los estados de carga considerados en las tablas,

$$[1] \quad \mathcal{M}' = -Pl \bar{\mathcal{M}}', \quad (\mathcal{M}'' = -Pl \bar{\mathcal{M}}''),$$

para cargas concentradas, y

$$[2] \quad \mathcal{M}' = -pl^2 \bar{\mathcal{M}}', \quad (\mathcal{M}'' = -pl^2 \bar{\mathcal{M}}''),$$

para las continuas, con

$$[3] \quad \mathcal{M}' = \frac{\bar{X}^{(i)}}{\bar{\varepsilon}^{(i)}_A}, \quad \left( \mathcal{M}'' = -\frac{\bar{X}^{(d)}}{\bar{\varepsilon}^{(d)}_B} \right).$$

Las tablas XVII dan calculadas, para las piezas con empates, los coeficientes  $\bar{\mathcal{M}}'$  ( $\bar{\mathcal{M}}''$ ) correspondientes a las principales hipótesis de carga que se presentan en las aplicaciones.

205. Momentos de empotramiento y sus líneas de influencia para las piezas de momento de inercia constante. — Para las piezas de momento de inercia constante se tiene

$$\begin{aligned} \bar{\xi}^{(i)} &= 2 v' - 3 v'^2 + v'^3, \\ \bar{\xi}^{(d)} &= v' - v'^3, \\ \bar{\varepsilon}^{(i)}_A &= 2, \quad \bar{\varepsilon}^{(d)}_B = -2 \end{aligned}$$

y, por tanto, las [1] y [2] de (203) se escriben

$$[1] \quad \begin{cases} v^A = -\frac{l}{2} (2 v' - 3 v'^2 + \tau'^3) \\ v^B = -\frac{l}{2} (v' - v'^3) . \end{cases}$$

Comparando estas expresiones con las [1] de (82) que dan las líneas de influencia de los momentos de Ritter, se tiene

$$[2] \quad v^A = -\frac{1}{2} v^{(d)} , \quad v^B = -\frac{1}{2} v^{(i)} .$$

Integrando estas ecuaciones se obtendría

$$[3] \quad \mathcal{M}' = -\frac{1}{2} T^{(d)} , \quad \mathcal{M}'' = -\frac{1}{2} T^{(i)}$$

Las expresiones que dan  $T^{(d)}$  y  $T^{(i)}$ , para las principales hipótesis de carga, están agrupadas en las fórmulas III.



## **CAPITULO V**

### **SISTEMAS RADIALES**





## CAPÍTULO V

### SISTEMAS RADIALES

#### § 1. — Primer método. Resolución mediante la determinación directa de los focos.

206. Generalidades. — Llamaremos *sistema radial* al constituido por  $n$  piezas rectilíneas  $A_0A_j$  (fig. 157), rígidamente unidas entre sí en el extremo común  $A_0$  y elásticamente empotradas en los otros extremos  $A_j$ .

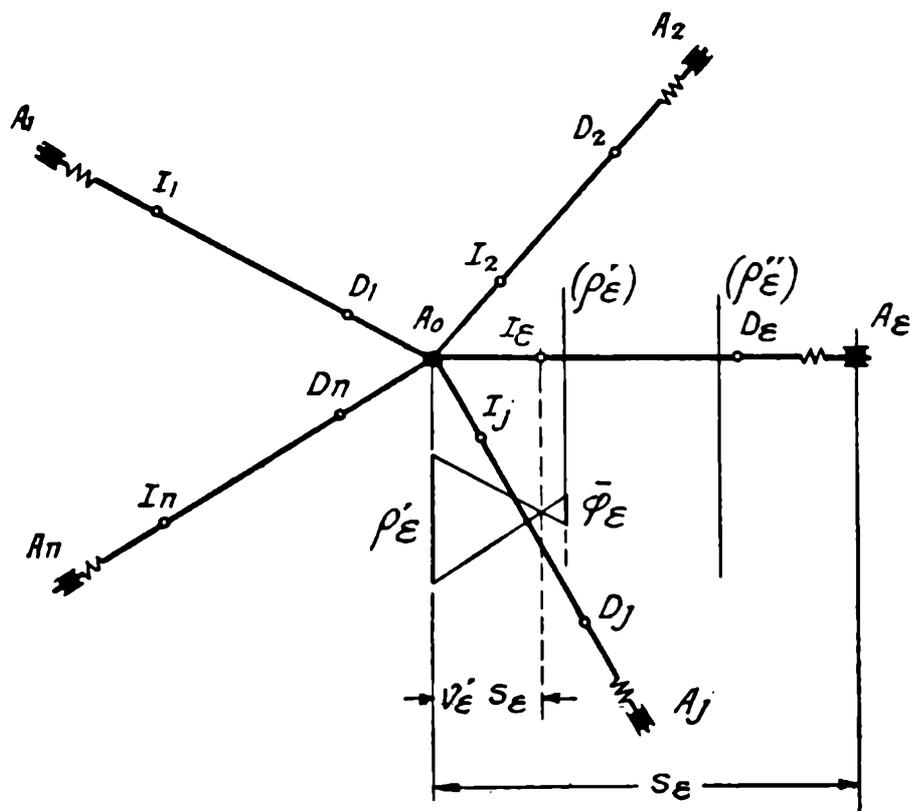


FIG. 157.

Cuando no haya lugar a confusión, designaremos las magnitudes de la pieza genérica  $j$  ( $A_0A_j$ ) con el subíndice  $j$ . Así,  $s_j, \rho'_j, \rho''_j$ , etc., representan la longitud, las masas-tercia izquierda y derecha, etc., de la pieza  $j$ . Para la resolución del sistema tendremos que utilizar, como veremos, las constantes elásticas angulares del extremo  $A_0$  de las diversas piezas; pon-

dremos  $\beta_j, \mu_j, \alpha_{j0}$  (o simplemente  $\alpha_j$ ), respectivamente para la rotación específica, rigidez angular y coeficiente de influencia correspondientes al extremo  $A_0$  de la pieza  $j$ , elásticamente empotrada en  $A_j$ . Para los momentos flectores en los extremos  $A_0$  y  $A_j$  de la pieza  $j$  pondremos, respectivamente,  $\mathcal{M}_{0j}$  y  $\mathcal{M}_{j0}$ .

**207. Determinación de los focos.** — Cada una de las piezas de un sistema radial es una viga elásticamente empotrada; su cálculo se efectuará siguiendo lo establecido en el capítulo anterior, si se determinan sus focos.

Los focos adyacentes a los extremos  $A_j$  resultan de los datos que definen los respectivos empotramientos elásticos. Sólo debemos ocuparnos, pues, de los adyacentes al extremo  $A_0$ .

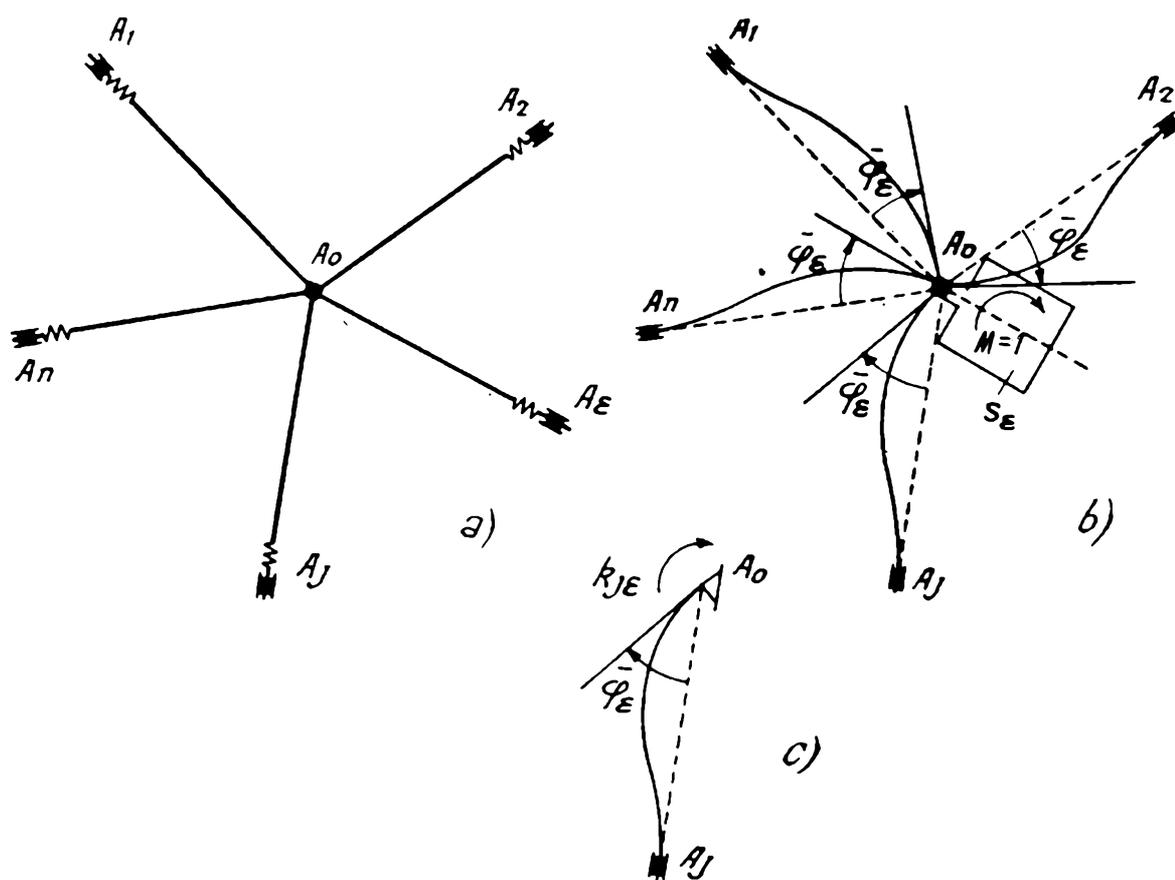


FIG. 158.

Determinemos el foco izquierdo  $I_\epsilon$  de la pieza  $\epsilon$ . Para ello bastará calcular, según (111), la rotación específica  $\bar{\varphi}_\epsilon$  del empotramiento elástico  $A_0$  de la viga  $A_0A_\epsilon$ . Suprimamos la pieza  $\epsilon$  (fig. 158 b) y en una chapa  $S_\epsilon$ , ligada rígidamente al nudo  $A_0$ , del sistema sin esta pieza, hagamos actuar un par  $M = 1$ . La rotación específica  $\varphi_\epsilon$  será la rotación de este nudo (de la chapa  $S_\epsilon$ ) bajo la acción de dicho par. La deformación del sistema está representada en la figura; todas las tangentes del extremo  $A_0$  giran

del ángulo  $\bar{\varphi}_\varepsilon$ . El par  $M$  trasmite al extremo  $A_0$  de cada pieza  $A_0A_j$ , un par que designaremos  $k_{j,\varepsilon}$ , y se tendrá (fig. 158 c)

$$\bar{\varphi}_\varepsilon = k_{j,\varepsilon} \beta_j ,$$

siendo  $\beta_j$  la rotación específica (106) del extremo  $A_0$  de la pieza  $A_0A_j$ , elásticamente empotrada en  $A_j$ . La anterior se escribe

$$\bar{\varphi}_\varepsilon = \frac{k_{j,\varepsilon}}{\mu_j} \quad (j = 1, 2, \dots, \varepsilon - 1, \varepsilon + 1, \dots, n) ,$$

siendo  $\mu_j$  la rigidez angular del extremo  $A_0$  de la pieza  $j$ . Se tiene, pues,

$$\bar{\varphi}_\varepsilon = \frac{k_{1\varepsilon}}{\mu_1} = \frac{k_{2\varepsilon}}{\mu_2} = \dots = \frac{k_{\varepsilon-1,\varepsilon}}{\mu_{\varepsilon-1}} = \frac{k_{\varepsilon+1,\varepsilon}}{\mu_{\varepsilon+1}} = \dots = \frac{k_{j\varepsilon}}{\mu_j} = \dots = \frac{k_{n\varepsilon}}{\mu_n}$$

$$\bar{\varphi}_\varepsilon = \frac{k_{j\varepsilon}}{\mu_j} = \frac{\sum_{j=1}^n k_{j,\varepsilon}}{\sum_{j=1}^n \mu_j - \mu_\varepsilon} \quad (*) .$$

Por otra parte, la suma de los pares  $k_{j\varepsilon}$  es igual al par  $M = 1$  que los origina, es decir, se tiene

$$\sum k_{j\varepsilon} = 1 .$$

Sustituyendo en la anterior, resulta

$$[1] \quad \bar{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \mu_j - \mu_\varepsilon}$$

y, además,

$$[2] \quad k_{j,\varepsilon} = \mu_j \bar{\varphi}_\varepsilon \quad (j = 1, 2, \dots, \varepsilon - 1, \varepsilon + 1, \varepsilon + 2, \dots, n) .$$

Estas últimas magnitudes que son los pares que en los extremos  $A_0$  de las piezas  $A_0A_j$ , produce un par  $M = 1$  que actúa en  $A_0$  en el sistema sin la pieza  $\varepsilon$ , se llaman *coeficientes de distribución interna* del par  $M$  proveniente de la pieza  $\varepsilon$ .

(\*) En el denominador se resta  $\mu_\varepsilon$  porque la sumatoria se extiende a todas las piezas  $j$  menos la suprimida  $\varepsilon$

Calculado con la [1] la rotación específica  $\bar{\varphi}_\epsilon$  del extremo  $A_0$  de cada una de las piezas  $A_0A_\epsilon$ , los focos adyacentes a dicho extremo se determinan en la forma conocida (103) (fig. 157).

Además, el par  $k_{j\epsilon}$  origina en el extremo  $A_j$  (fig. 158 c) un par

$$[3] \quad \overline{M}_{j0} = \alpha_{j0} k_{j\epsilon} ,$$

siendo  $\alpha_{j0}$  el coeficiente de influencia angular del par en  $A_0$  sobre el par  $A_j$  (110).

**208. Influencia de las cargas permanentes.** — Supongamos que una sola de las piezas del sistema radial esté sometida a cargas, la  $A_0A_3$  (fig. 159), por ejemplo. Hallemos el diagrama de momentos flectores correspondiente.

Siendo  $A_0A_3$  una viga elásticamente empotrada, el diagrama de momentos flectores para la misma, se halla en la forma conocida, en base a los momentos focales  $\mathcal{M}^{(i)}$  y  $\mathcal{M}^{(d)}$  (fig. 159 b).

Obtenido el momento  $\mathcal{M}_{03}$  en  $A_0$ , se obtiene el par extremo

$$M_{03} = \pm \mathcal{M}_{03} ;$$

en el caso de la figura, siendo  $A_0$  el extremo izquierdo de la pieza  $A_0A_3$ , corresponde el signo positivo.

En el nudo  $A_0$  del sistema sin la pieza  $A_0A_3$ , actúa un par opuesto  $-M_{03}$ . Este par  $-M_{03}$  trasmite a los extremos  $A_0$  de las restantes piezas, pares

$$M_{0j} = -k_{j3} M_{03} \quad (j = 1, 2, 4, 5) ,$$

siendo  $k_{j3}$  los coeficientes de distribución del par proveniente de la pieza 3, calculados en (207).

Con los pares  $M_{0j}$  se calculan los momentos flectores

$$\mathcal{M}_{0j} = \pm M_{0j} \quad (j = 1, 2, 4, 5) ,$$

con el signo positivo cuando  $A_0$  es el extremo izquierdo de la pieza.

Los diagramas de momentos flectores en las piezas 1, 2, 4 y 5 son lineales, desde que sobre ellas no actúan cargas, y quedan determinados en base a los momentos  $\mathcal{M}_{0j}$ , por tener ordenadas nulas en correspondencia a los focos adyacentes a los extremos  $A_j$  ( $j = 1, 2, 4, 5$ ). En efecto; la elástica que el diagrama lineal de momentos origina en la pieza  $A_0A_1$ , por ejemplo, tiene ordenadas extremas nulas, es decir,  $A'_1A'_0$  (fig. 159 a) es la recta de los extremos. El eje extremo izquierdo coincide con el eje

de la elástica  $A'_1A'_0$ , puesto que la sección de arranque extrema no se desplaza. El foco izquierdo de la elástica es, por consiguiente, el  $I'_1$ . Pasando por este punto el lado intermedio del polígono de las tercias, corta en el mismo a la recta de los extremos  $A'_1A'_0$ , y, por tanto, el momento flector es nulo en  $I'_1$ .

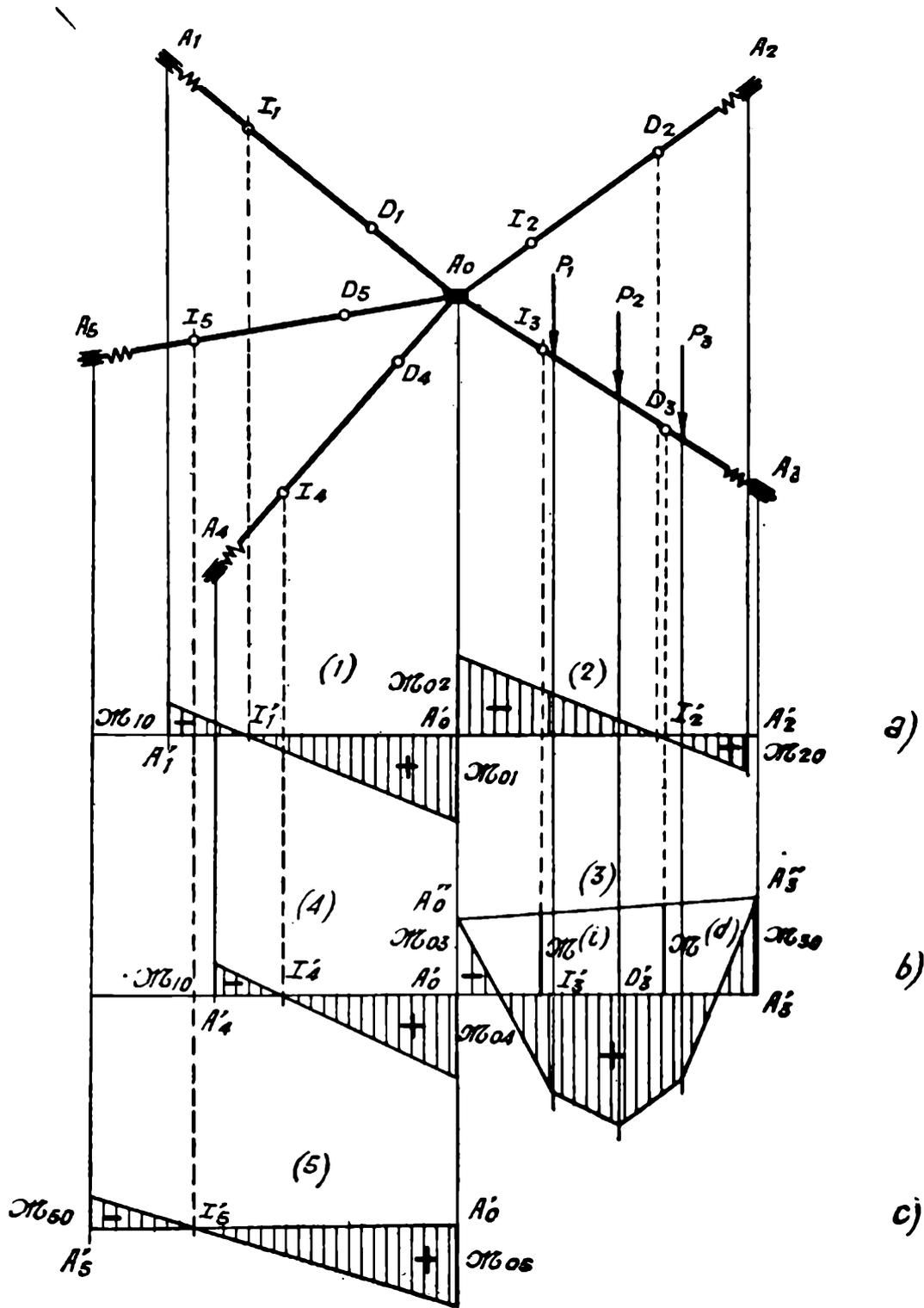


FIG. 159.

Por otra parte, los momentos flectores  $M_{0j}$ , en los extremos  $A_j$  ( $j = 1, 2, 4, 5$ ), están dados numéricamente, como es inmediato, por la expresión

$$[1] \quad M_{j0} = -\alpha_{j0} M_{0j},$$

siendo  $\alpha_{j0}$  los coeficientes de influencia angular de los pares en  $A_j$  originados por los que actúan en  $A_0$ .

Puede ser conveniente, a veces, dibujar el diagrama de momentos flectores con ordenadas normales a cada una de las piezas, referidas a los ejes de las mismas, como indica la figura 160.

209. — Si en el sistema actúan cargas sobre varias de las piezas, se comienza por calcular, en la forma indicada en el número anterior, los diagramas de momentos de las cargas que actúan en cada pieza, supo-

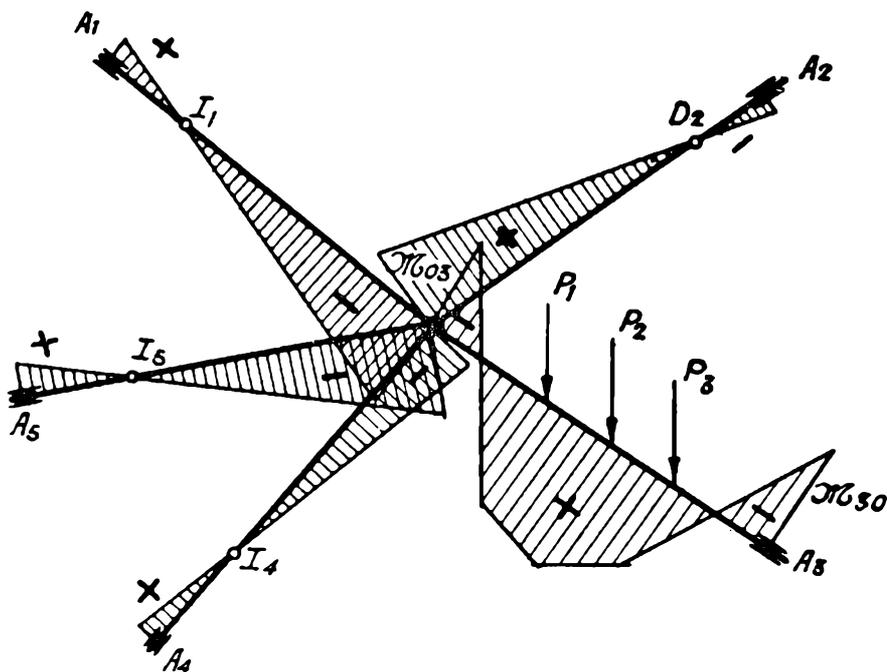


FIG. 160.

niendo descargadas las restantes. Superponiendo los diagramas así obtenidos, resulta el diagrama de momentos flectores total.

De este último se deduce el de esfuerzos tangenciales por una derivación gráfica, en la forma conocida.

210. Líneas de influencia. — La obtención de líneas de influencia de características es inmediata. Si se trata, por ejemplo, de la línea de influencia del momento flector en la sección  $N$  de la pieza 3 (fig. 161) (u otra característica de una cualquiera de las piezas), se comienza por hallar el polígono de las tercias  $A'_0M_3N_3A''_3$  (fig. 161 b) de la línea de influencia del momento flector en la sección  $N$  de la viga elásticamente empotrada  $A_0A_3$ , de acuerdo con lo expuesto en (152),

La rotación  $\delta_0$  de la tangente extrema  $t'_3$ , es común para los polígonos de las tercias de la línea de influencia buscada correspondientes a los otros extremos. Se la representa en correspondencia a  $A_0$  (fig. 161 b y c); los focos de la elástica, adyacentes a los extremos  $A_j$  se encuentran sobre el eje, desde que las secciones extremas  $A_j$  no se desplazan; los la-

dos intermedios de los polígonos de las tercias correspondientes a las

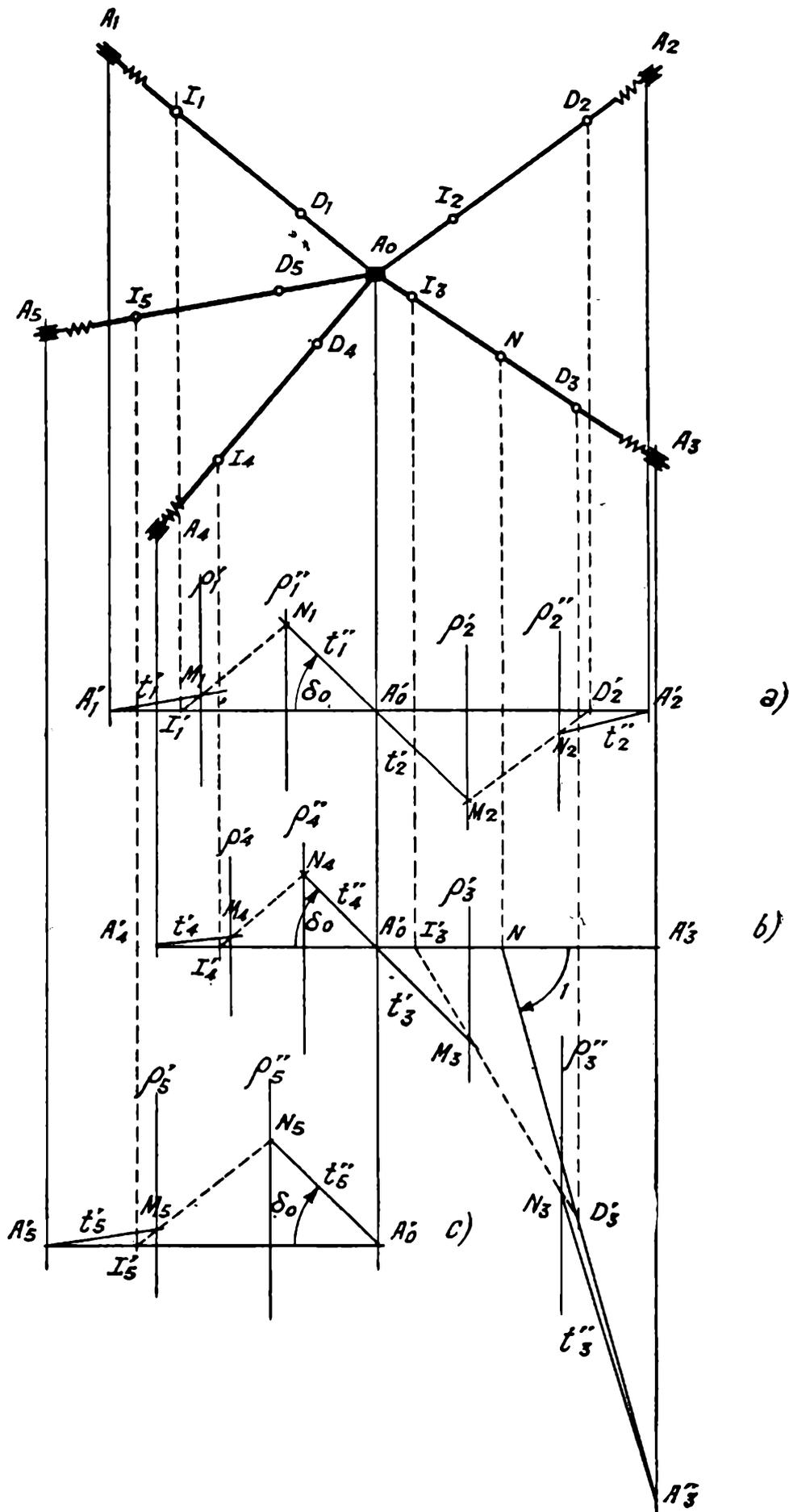


FIG. 161.

piezas  $A_0A_j$  ( $j = 1, 2, 4, 5$ ) pasan por estos focos. Con estas indicaciones,

la obtención de dichos polígonos de las tercias es inmediata, como se ve en la figura.

De los polígonos de las tercias se deducen los momentos reducidos  $m'_i$  y  $m''_i$  para cada pieza, y con ellos se calculan, con la expresión

$$v^* = m'_i \bar{\xi}^{(i)} + m''_i \bar{\xi}^{(d)},$$

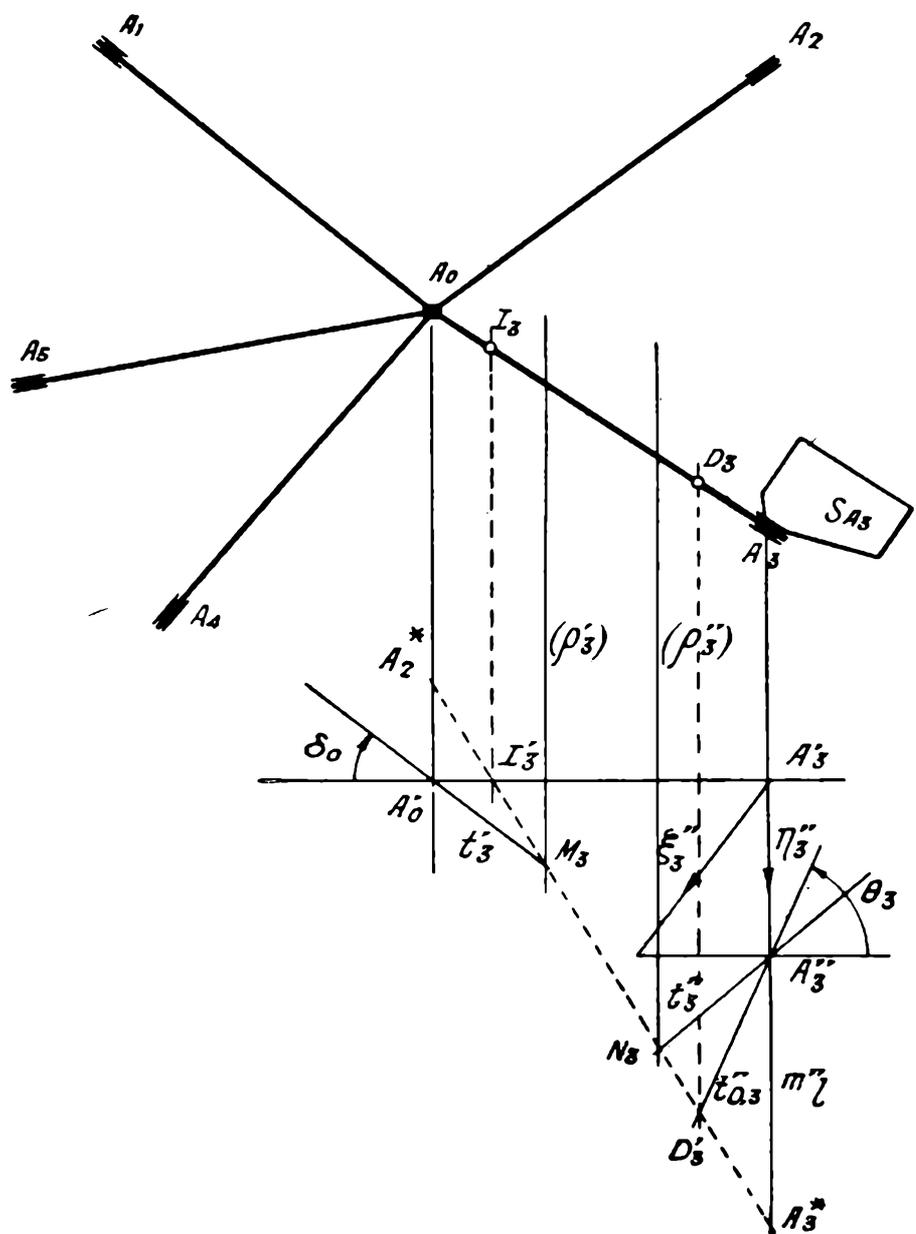


FIG. 162.

las ordenadas  $v^*$  de las líneas de influencia, referidas, para cada pieza, a la respectiva recta de los extremos.

Si la pieza es de momento de inercia constante, las curvas se obtienen por puntos y tangentes en la forma conocida.

Lo anterior da las indicaciones suficientes para hallar la línea de influencia de cualquier otra característica.

**211. Influencia de desplazamientos accidentales de las secciones extremas  $A_j$ .** — Consideremos primero el caso en que experimente desplazamientos uno solo de los extremos, el  $A_3$ , por ejemplo (fig. 162). Supongamos que la sección extrema  $A_3$  (chapa extrema  $S_{A_3}$  experimente una rotación  $\theta_3$  y una traslación  $\xi''_3$  normal a la pieza.

Se traza, en la forma expuesta en (108), que se deduce claramente de la figura, el polígono de las tercias vertical  $A'_0M_3N_3A''_3$  correspondiente a estos desplazamientos de la chapa  $S_{A_3}$ . La rotación  $\delta_0$  de la sección  $A_0$  es común para todas las piezas; se puede trazar los polígonos de las tercias para las otras piezas en la forma expuesta, al tratar las líneas de influencia.

De estos polígonos de las tercias se deducen los momentos reducidos  $m'_i$  y  $m''_i$  para cada pieza, y de ellos los momentos flectores extremos  $\mathcal{M}'$  y  $\mathcal{M}''$ , que determinan los diagramas lineales de momentos para las mismas.

Si experimentan desplazamientos varios extremos, se calcula independientemente la influencia del correspondiente a cada uno, y luego se superponen.

**212.** — Se puede proceder también, en la forma siguiente:

Se traza sólo el polígono de las tercias para la pieza 3 cuyo extremo experimenta desplazamientos. Con los momentos reducidos  $m'_i$  y  $m''_i$  del mismo (fig. 162) se calculan los momentos flectores  $\mathcal{M}_{03}$  y  $\mathcal{M}_{30}$  de dicha pieza.

El par  $M_{03}$  que la pieza 3 trasmite al nudo  $A_0$  es

$$M_{03} = \pm \mathcal{M}_{03}.$$

En base a este par se calculan numéricamente los pares extremos  $M_{0j}$  y  $M_{j0}$  (y los respectivos momentos flectores extremos) en la forma expuesta en (208), al tratar la influencia de cargas permanentes.

## § 2. — Segundo método. Resolución mediante la rotación específica del nudo.

**213. Rotación y características originadas por un par unitario aplicado en el nudo.** — El par  $M = 1$  aplicado en una chapa ligada rígidamente al nudo  $A_0$  (fig. 163), origina en la misma una rotación  $\beta_0$ , que llamaremos *rotación específica del nudo*. Trasmitirá, además, a los extremos  $A_0$  de las piezas  $A_0A_j$  ( $j = 1, 2 \dots n$ ) pares  $k_j$ , que llamaremos *coeficientes de distribución externa* (indicando con esta calificación que provienen del par  $M$  exterior al sistema).

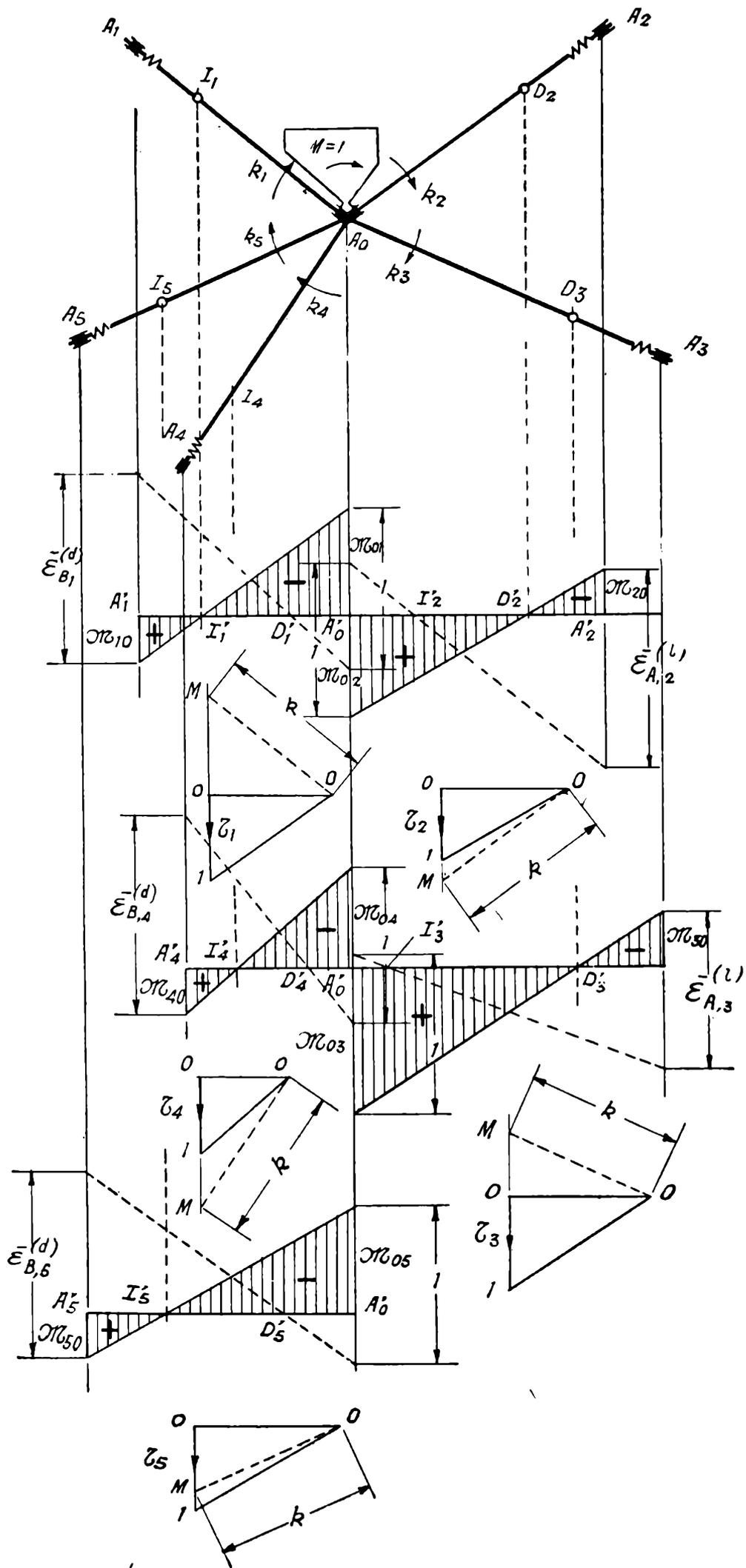


FIG. 163.

El cálculo de estas magnitudes se efectúa en la forma expuesta en (207) para  $\bar{\varphi}$  y  $k_{j,\epsilon}$ , con la sola diferencia de que el par actúa en el sistema que conserva la pieza  $\epsilon$ ; es decir, en la [1] de dicho número sistema que conserva la pieza  $\epsilon$ , es decir en la [1] de dicho número

deberá ponerse  $\sum_{j=1}^n \mu_j$  en lugar de  $\sum_{j=1}^n \mu_j - \mu_\epsilon$ . Se tiene así

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \mu_j}, \\ k_j = \mu_j \beta_0. \end{array} \right.$$

Los momentos flectores que el par  $M = 1$  origina en los extremos  $A_0$  de las piezas son

$$\mathcal{M}_{0j} = \pm k_j ;$$

con el signo positivo cuando  $A_0$  sea el extremo izquierdo de la pieza y negativo cuando sea el derecho.

Los diagramas de momentos flectores de las piezas son lineales, y se obtienen, en base a los  $\mathcal{M}_{0j}$ , recordando que el momento es nulo en correspondencia al foco adyacente al extremo  $A_j$  de la pieza; resultan así los representados en la figura 163.

Si se desea calcular numéricamente los momentos flectores  $\mathcal{M}_{j0}$  en los extremos  $A_j$ , se tiene

$$\mathcal{M}_{j0} = -\alpha_{j0} \mathcal{M}_{0j} ,$$

siendo  $\alpha_{j0}$  el coeficiente de influencia angular sobre el par en  $A_j$ , del aplicado en el extremo  $A_0$  supuesto articulado.

En la figura se han obtenido gráficamente los esfuerzos tangenciales constantes en cada pieza.

**214. Coeficientes de distribución interna.** — Llamaremos *coeficientes de distribución interna* correspondientes a la pieza  $\epsilon$  a los pares  $k_{j,\epsilon}$ , que en los extremos  $A_0$  de las piezas  $j$ , origina un par  $M = 1$  aplicado en el nudo  $A_0$  y proveniente de cargas que actúan en la pieza  $\epsilon$ .

Si en el sistema con un par  $M = 1$  en el nudo, suprimimos la pieza  $\epsilon$ , se requerirá aplicar al mismo un par igual a  $-k_\epsilon$ , opuesto al  $k_\epsilon$  que actúa en el extremo de la pieza suprimida (fig. 164). Queda así el sistema sin la pieza  $\epsilon$  y con un par  $M = 1 - k_\epsilon$  en el nudo, que origina en los extremos  $A_0$  de las restantes piezas  $j$ , pares  $k_j$ .

Los  $k_{j\epsilon}$  se obtendrán, por consiguiente, dividiendo estos últimos por  $1 - k_\epsilon$ , es decir,

$$[1] \quad k_{j\epsilon} = \frac{k_j}{1 - k_\epsilon} \quad (j = 1, 2, \dots, \epsilon - 1, \epsilon + 1, \dots, n).$$

**215. Obtención de los focos adyacentes al nudo.** — Conocidos los coeficientes de distribución interna, si se determinan, además, los focos adyacentes al nudo, se tienen todos los elementos para calcular el sistema (diagrama de características para carga permanente, líneas de influencia, etc.) en la forma expuesta en el § 1 del presente capítulo.

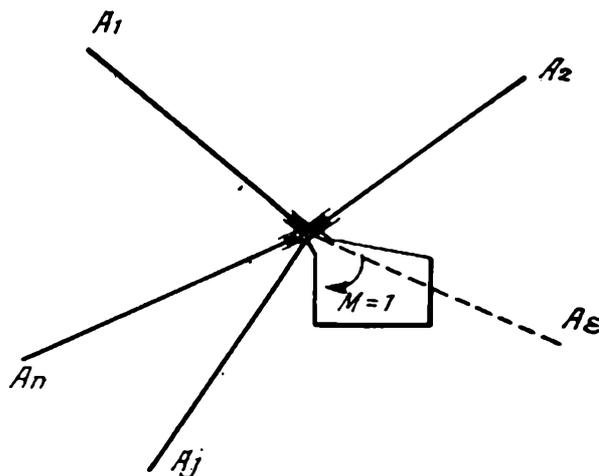


FIG. 164.

Véamos, pues, de qué manera se hallan dichos focos. Recordemos, para ello, cómo se determina el diagrama de momentos flectores originado por el par  $M = 1$  que actúa en el extremo izquierdo  $A_0$  de la viga elásticamente empotrada  $A_0A_j$  que constituye la pieza  $j$ , supuestos conocidos sus focos  $I_j$  y  $D_j$ . (fig. 165). Como vimos en (176), se traza primero el diagrama  $A'_0A''_0A'''_j$  que el par  $M$  origina en la pieza supuesta simplemente apoyada. Se llevan, luego, los momentos de Ritter

$$T^{(i)} = 1 = \overline{A'_0A''_0}, \quad T^{(d)} = \bar{\epsilon}_A^{(i)} = \overline{A'_jA'''_j};$$

se trazan las cruzadas de Ritter  $A'_0A'''_j$ ,  $A'_jA'''_0$ , se bajan las verticales focales hasta cortarlas en  $I'_j$  y  $D'_j$  y estos puntos determinan la línea de cierre  $A''_0A''_j$ , que da el diagrama de momentos rayado en la figura.

En el caso que nos ocupa, se trata del problema inverso. Se posee el diagrama de momentos originado por el par  $M = 1$  en  $A_0$ , diagrama rayado (fig. 165 b), que es el obtenido en (213), (fig. 163), y se pide el foco  $I_j$ .

Como es inmediato, se procede en la forma siguiente:  
Se lleva

$$A'''_0 A'_0 = 1 ,$$

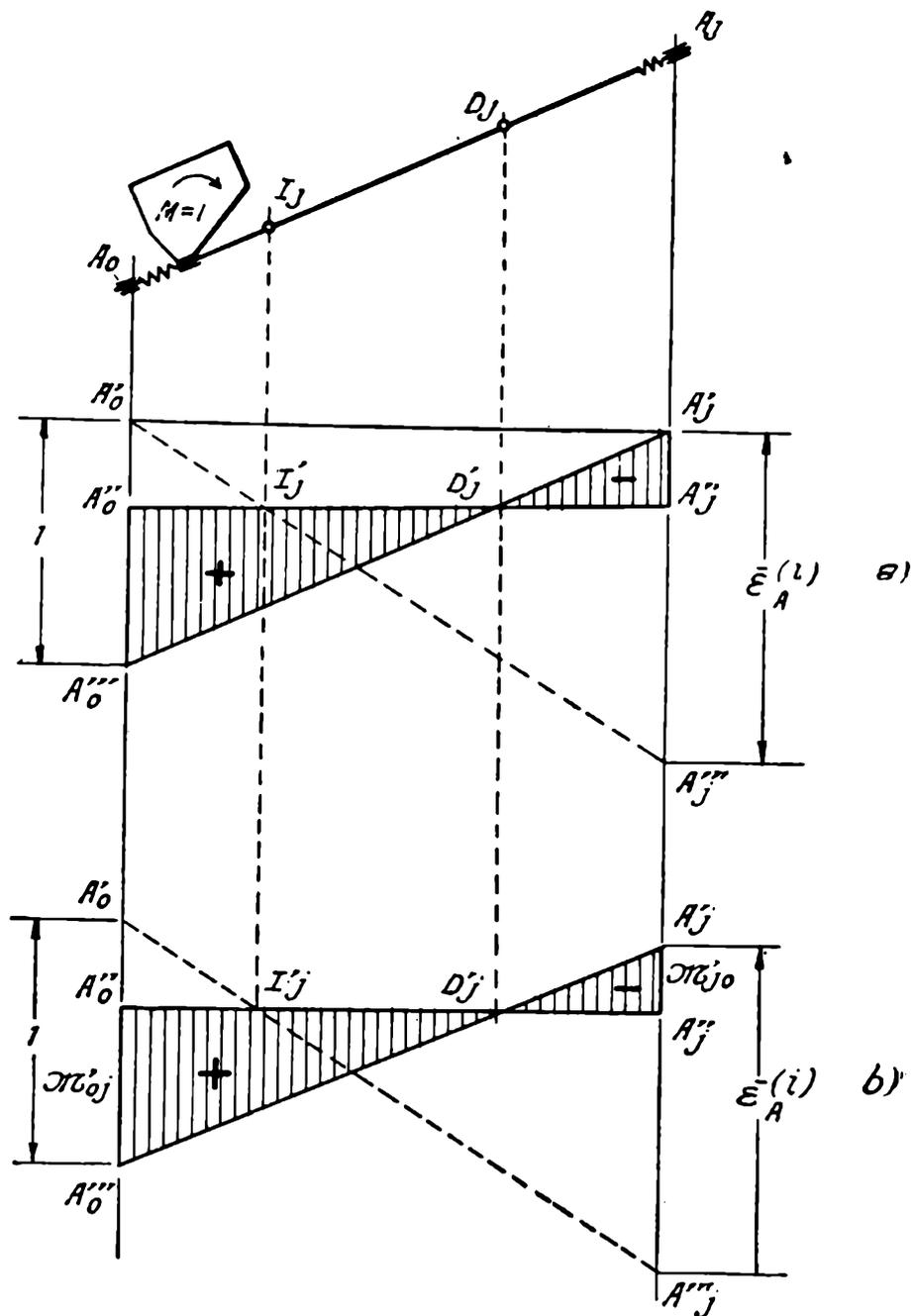


FIG. 165.

hacia arriba y

$$A'_j A'''_j = \frac{-\epsilon_A^{(i)}}{\epsilon_A} ,$$

hacia abajo. Se traza la recta  $A'_0 A'''_j$  y su intersección  $I'$ , con el eje  $A''_0 A''_j$  pertenece a la vertical focal izquierda.

Si se trata de determinar el foco derecho, por ser  $A_0$  extremo derecho de la pieza  $A_0 A_j$ , se procede en la forma indicada en la figura 166, que no requiere mayores explicaciones.

En la figura 163 se han obtenido, en esta forma, los focos de todas las piezas del sistema.

§ 3. — Tercer método. Resolución numérica en dos pasos.

216. Generalidades. — El método que pasamos a exponer se utiliza en algunos procedimientos para la resolución de sistemas generales formados por piezas rectilíneas, aplicándolo a los sistemas radiales componentes, constituidos por las piezas que concurren a cada uno de los nudos.

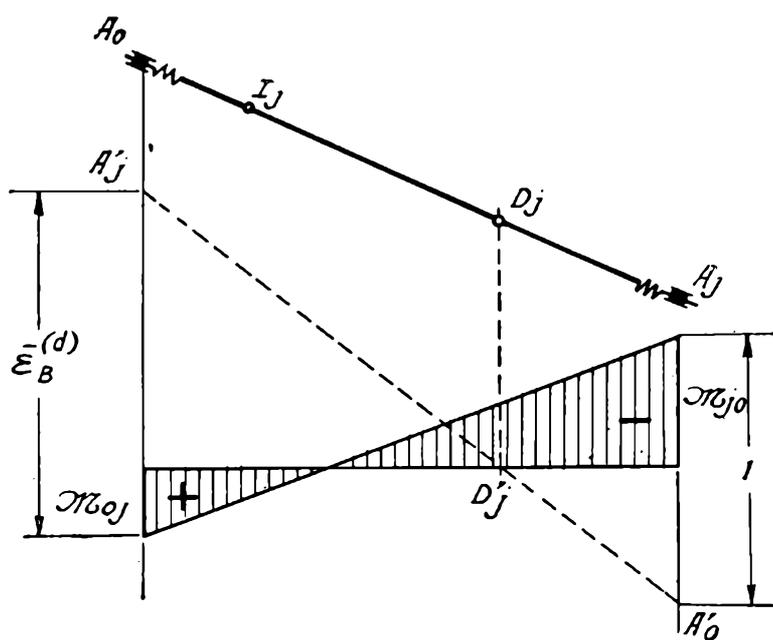


FIG. 166.

217. Cálculo de los momentos flectores extremos originados por cargas permanentes. — Se comienza por calcular los coeficientes de distribución externa  $k_j$ , en la forma expuesta en (213).

En un primer paso se supone que el nudo  $A_0$  no gire. Cada pieza  $A_0A_j$  se comportará así como empotrada en  $A_0$  y elásticamente empotrada en  $A_j$ .

Para cada una de ellas se calcula, en la forma conocida, los momentos flectores extremos, que designaremos

$$\mathcal{M}'_{0j} \text{ y } \mathcal{M}'_{j0},$$

y los pares extremos correspondientes

$$M'_{0j} = \pm \mathcal{M}'_{0j}, \quad M'_{j0} = \pm \mathcal{M}'_{j0}.$$

Si el nudo  $A_0$  hubiera podido girar, la suma de los pares en el mismo hubiera sido nula por razones de equilibrio. Ello no sucederá en general con los  $M'_{0j}$ ; al girar el nudo se originarán, por lo tanto, nuevos pares  $M''_{0j}$ , cuya suma  $M$  debe ser tal que

$$M + \sum_{j=1}^n M'_{0j} = 0 ,$$

o sea,

$$[1] \quad M = - \sum_{j=1}^n M'_{0j} .$$

Al soltar el nudo, pues, girará bajo la acción de este par  $M$ , que transmitirá a los extremos de las piezas los nuevos pares  $M''_{0j}$ , dados, como es inmediato, por las expresiones

$$[2] \quad M''_{0j} = M k_j .$$

Estos pares originarán, a su vez, en los extremos  $A_j$ , los

$$[3] \quad M''_{j0} = \alpha_{0j} M''_{0j} ,$$

siendo  $\alpha_{j0}$ , como siempre, los coeficientes de influencia angulares.

En definitiva, pues, los pares resultantes, que el estado de cargas que actúa sobre el sistema origina en los extremos de las piezas, son

$$[4] \quad \begin{cases} M_{0j} = M'_{0j} + M''_{0j} , \\ M_{j0} = M'_{j0} + M''_{j0} , \end{cases}$$

Conocidos estos pares resultantes, se obtienen los momentos flectores extremos

$$\mathcal{M}_{0j} = \pm M_{0j} , \quad \mathcal{M}_{j0} = \pm M_{j0} ,$$

y, con ellos, la línea de cierre y los diagramas de momentos para cada pieza.

#### § 4. — Sistemas radiales constructivos.

**218. Generalidades.** — El estudio de los sistemas radiales ha sido hecho a los efectos de su aplicación al cálculo de sistemas generales constituidos por piezas rectilíneas; en algunos métodos de cálculo se consideran, en efecto, los sistemas radiales parciales formados por piezas concurrentes a sus diversos nudos.

Sin embargo, pueden presentarse en las construcciones sistemas radiales constituídos por dos y tres piezas, como las de la figura 167. Estos

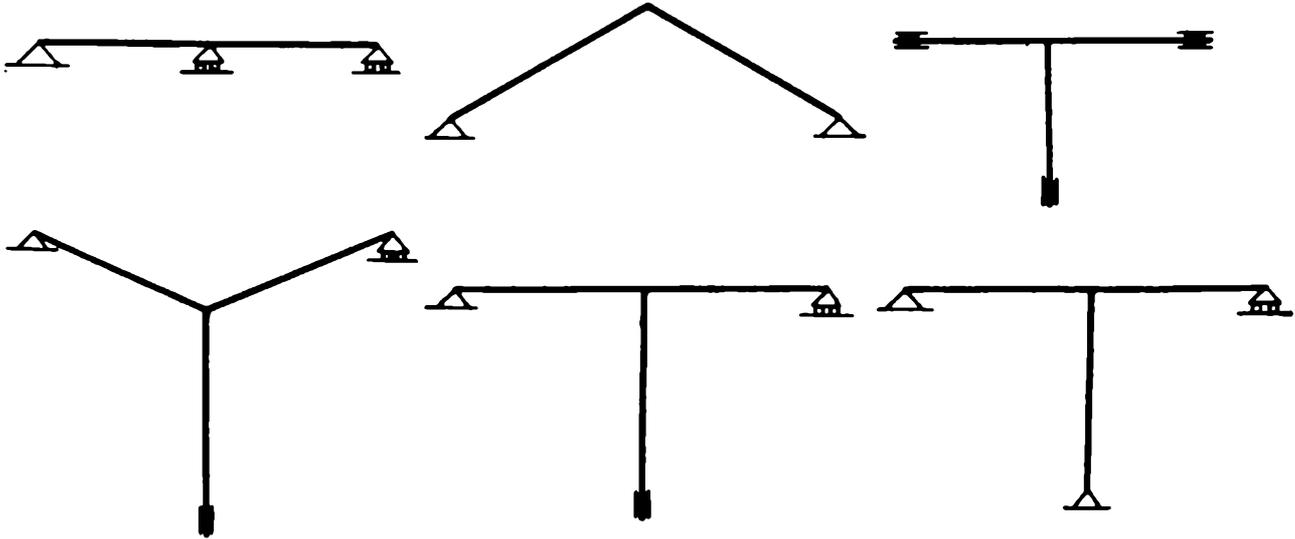


FIG. 167.

sistemas son casos particulares de las vigas continuas y pórticos múltiples, que estudiaremos en el tomo segundo. Esto no obstante, desarrollamos a continuación, mediante un ejercicio numérico, el cálculo completo de uno de estos sistemas radiales constructivos, a fin de hacer una aplicación de conjunto de lo estudiado en el presente volumen.

**219. Aplicación numérica. Datos.**— Consideremos a este efecto el sistema representado en la figura 168. Las vigas 1 ( $A_0A_1$ ) y 2 ( $A_0A_2$ ) tienen

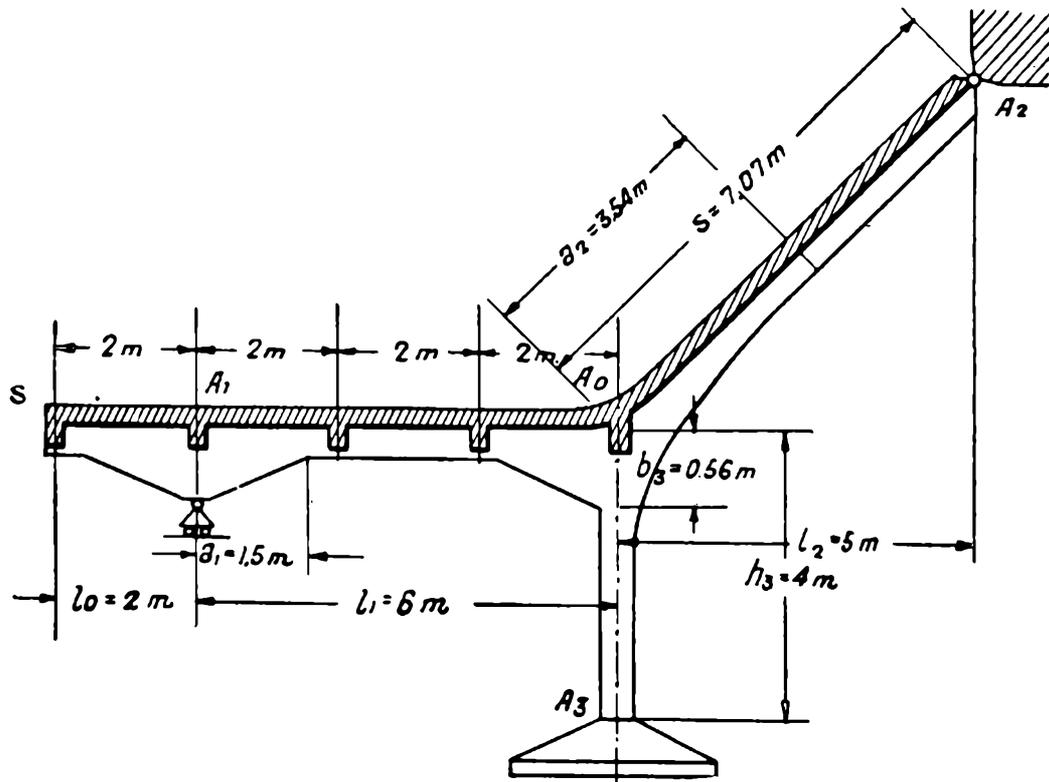


FIG. 168.

$$s_1 = l_1 = 6,00 \text{ m}, \quad a_1 = 1,50 \text{ m}, \quad J_1 = 0,0040 \text{ m}^4, \quad J'_1 = 0,02 \text{ m}^4,$$

$$s_2 = 7,07 \text{ m}, \quad l_2 = h_2 = 5,00 \text{ m}, \quad a_2 = 3,54 \text{ m}, \quad J_2 = 0,00213 \text{ m}^4, \quad J'_2 = 0,0213 \text{ m}^4;$$

resulta, por consiguiente,

$$n_1 = \frac{J_1}{J'_1} = \frac{0,004 \text{ m}^4}{0,02 \text{ m}^4} = 0,20,$$

$$\lambda_1 = \frac{a_1}{s_1} = \frac{1,50 \text{ m}}{6,00 \text{ m}} = 0,25,$$

$$n_2 = \frac{J_2}{J'_2} = \frac{0,015 \text{ m}^4}{0,015 \text{ m}^4} = 0,10,$$

$$\lambda_2 = \frac{a_2}{s_2} = \frac{3,54 \text{ m}}{7,07 \text{ m}} = 0,50.$$

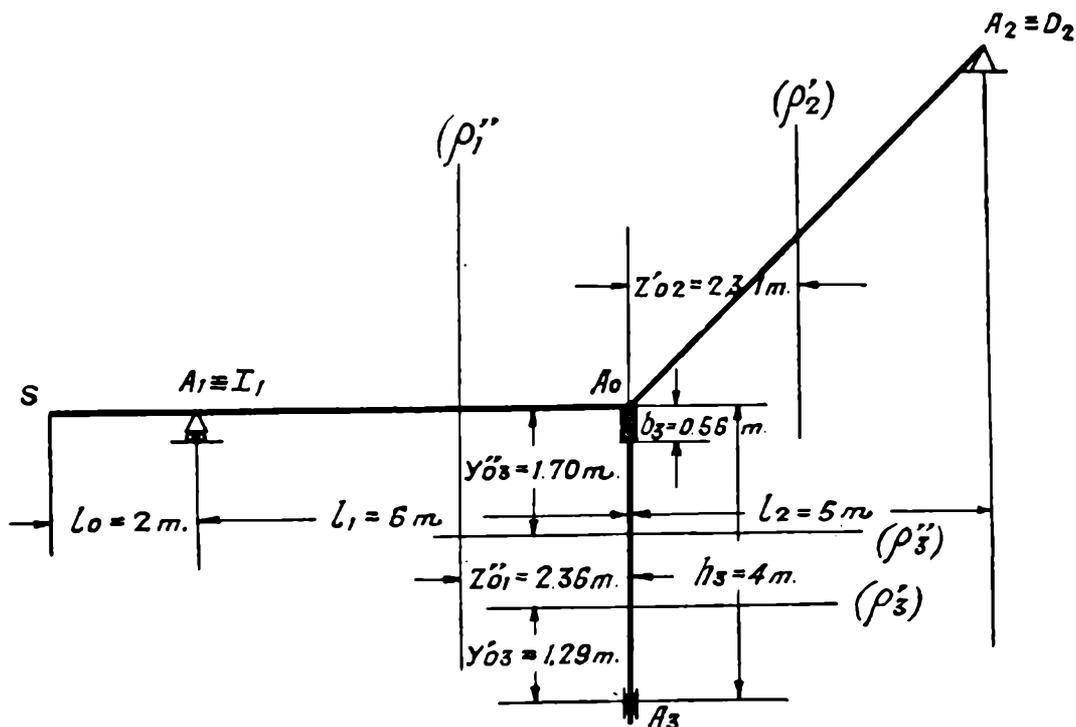


FIG. 169.

El pilar 3 ( $A_0A_3$ ) es una pieza de momento de inercia constante, con el extremo superior rígido. Tiene

$$s_3 = h_3 = 4,00 \text{ m}, \quad b_3 = 0,56 \text{ m}, \quad J_3' = 0,0070 \text{ m}^4,$$

y resulta

$$\chi = \frac{b_3}{h_3} = \frac{0,56 \text{ m}}{4,00 \text{ m}} = 0,14.$$

220. Cálculo de las tercias.— Para las vigas 1 y 2 interesan solamente la posición de las tercias adyacentes al nudo  $A_0$  (fig. 169); no aparecen las otras tercias, debido a que las cargas que actúan sobre el sistema radial originan momentos nulos en los apoyos  $A_1$  y  $A_2$  y, por consiguiente, son nulas las rotaciones adyacentes. Para el pilar interesan ambas tercias y sus correspondientes masas elásticas.

La tabla I a, da para la viga 1 ( $n_1 = 0,20$ ,  $\lambda_1 = 0,25$ ),

$$\begin{aligned} v'_{0,1} &= 0,394, & \bar{\rho}''_1 &= 0,366, \\ \bar{m}_1 &= 0,144, \end{aligned}$$

y la I e, para la viga 2 ( $n_2 = 0,10$ ,  $\lambda_2 = 0,50$ ),

$$\begin{aligned} v'_{0,2} &= 0,462, & \bar{\rho}''_2 &= 0,296, \\ \bar{m}_2 &= 0,137 \end{aligned}$$

Se tiene, además,

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{s_1}{E J_1} = \frac{6,00 \text{ m}}{2.000.000 \text{ tm}^{-2} \times 0,004 \text{ m}^4} = 0,75 \cdot 10^{-3} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1}, \\ k_2 &= \frac{s_2}{E J_2} = \frac{7,07 \text{ m}}{2.000.000 \text{ tm}^{-2} \times 0,00213 \text{ m}^4} = 1,66 \cdot 10^{-3} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1}, \\ k_3 &= \frac{s_3}{E J_3} = \frac{4,00 \text{ m}}{2.000.000 \text{ tm}^{-2} \times 0,007 \text{ m}^4} = 0,285 \cdot 10^{-3} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1}, \end{aligned}$$

y resulta, por consiguiente,

$$\begin{aligned} z'_{0,1} &= v'_{0,1} l_1 = 0,394 \times 6,00 \text{ m} = 2,36 \text{ m}, \\ z'_{0,2} &= v'_{0,2} l = 0,462 \times 5,00 \text{ m} = 2,31 \text{ m}, \\ m_1 &= k_1 s_1 \bar{m}_1 = 0,75 \cdot 10^{-3} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} \times 6,00 \text{ m} \times 0,144 = 0,648 \cdot 10^{-3} \text{ t}^{-1}, \\ m_{l,2} &= k_2 l_2 \bar{m}_2 = 1,66 \cdot 10^{-3} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} \times 5,00 \text{ m} \times 0,137 = 1,137 \cdot 10^{-3} \text{ t}^{-1}. \end{aligned}$$

La tabla VI f da, para pieza simétrica con un extremo rígido ( $\chi = 0,14$ ,  $n = 1$ ),

$$\begin{aligned} S_1 &= 0,98 & S_1 &= 0,74 \\ S_3 &= 0,649, & S_4 &= 0,106, & S_5 &= 0,86; \end{aligned}$$

además,  $\bar{\rho}^* \frac{1}{2}$

por ser la parte elástica de momento de inercia constante.

Se tiene, por consiguiente, para el pilar, según las [3] de (45),

$$\begin{aligned} v'_{0,3} &= (S_3 v_0^* + S_4) = 0,649 \times 0,333 + 0,106 = 0,322, \\ v''_{0,3} &= (S_5 v_0^* + \chi) = 0,86 \times 0,333 + 0,14 = 0,426, \\ \rho'_{0,3} &= S_1 \bar{\rho}^* k_3 = 0,98 \times \frac{1}{2} \times 0,285 \cdot 10^{-3} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} = 0,14 \cdot 10^{-3} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1}, \\ \rho''_{0,3} &= S_2 \bar{\rho}^* k_3 = 0,74 \times \frac{1}{2} \times 0,285 \cdot 10^{-3} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} = 0,105 \cdot 10^{-3} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1}, \\ m_3 &= \rho'_{0,3} v'_{0,3} h_3 = 0,14 \cdot 10^{-3} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} \times 0,322 \times 4,00 \text{ m} = 0,18 \cdot 10^{-3} \text{ t}^{-1}. \end{aligned}$$

Resulta

$$\begin{aligned} y'_{0,3} &= v'_{0,3} h_3 = 0,022 \times 4,00 \text{ m} = 1,29 \text{ m}, \\ y''_{0,3} &= v''_{0,3} h_3 = 0,427 \times 4,00 \text{ m} = 1,70 \text{ m}. \end{aligned}$$

**221. Constantes elásticas angulares.** — La tabla XIIIa da, para la rigidez angular del extremo  $A_0$  de la viga 1 ( $n_1 = 0,20$ ,  $\lambda_1 = 0,25$ )

$$\bar{\mu}_1 = 4,50 ,$$

y resulta

$$\mu_1 = \frac{1}{k_1} \bar{\mu}_1 = \frac{4,50}{0,75 \cdot 10^{-3} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1}} = 0,600 \cdot 10^4 \text{ tm.}$$

Análogamente para la rigidez angular del extremo  $A_0$  de la viga 2, la tabla XIIIe da ( $n_2 = 0,10$ ,  $\lambda_2 = 0,50$ )

$$\bar{\mu}_2 = 8,47$$

y resulta

$$\mu_2 = \frac{1}{k_2} \bar{\mu}_2 = \frac{8,47}{1,66 \cdot 10^{-3} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1}} = 0,51 \cdot 10^4 \text{ tm.}$$

La rotación específica del extremo  $A_0$  del pilar 3 es ([1] de (110))

$$\begin{aligned} \beta''_3 &= k_3 \bar{\beta}''_3 = \rho''_3 \frac{1 - \nu'_{0,3} - \nu''_{0,3}}{1 - \nu'_{0,3}} = \\ &= 0,105 \cdot 10^{-3} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} \frac{1 - 0,322 - 0,426}{1 - 0,322} = 0,0389 \cdot 10^{-3} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1}, \end{aligned}$$

y, por consiguiente, para la rigidez angular se tiene

$$\mu_3 = \frac{1}{\beta_3} = \frac{1}{0,0389 \cdot 10^{-3} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1}} = 2,57 \cdot 10^4 \text{ tm.}$$

El coeficiente de influencia  $\alpha_{30}$  es ([2] de (110))

$$\alpha_{30} = \frac{\nu'_{0,3}}{1 - \nu'_{0,3}} = \frac{0,322}{1 - 0,322} = 0,475.$$

**222. Influencia del par  $M = 1$  aplicado en el nudo  $A_0$ .** — La rotación específica del nudo  $A_0$  es ([1] de (213))

$$\beta_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^3 \mu_j} = \frac{1}{(0,600 + 0,51 + 2,57) \cdot 10^4 \text{ tm}} = 0,272 \cdot 10^{-4} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1}$$

y los coeficientes de distribución interna son ([1] de (213))

$$k_1 = \beta_0 \mu_1 = 0,272 \cdot 10^{-4} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} \times 0,6 \cdot 10^4 \text{ tm} = 0,163 ,$$

$$k_2 = \beta_0 \mu_2 = 0,272 \cdot 10^{-4} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} \times 0,51 \cdot 10^4 \text{ tm} = 0,139 ,$$

$$k_3 = \beta_0 \mu_3 = 0,272 \cdot 10^{-4} \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} \times 2,57 \cdot 10^4 \text{ tm} = 0,699 .$$

A los extremos  $A_0$  de las piezas corresponden por consiguiente los momentos flectores

$$\mathcal{M}_{01} = -k_1 = -0,163 ,$$

$$\mathcal{M}_{02} = k_2 = 0,139 ,$$

$$\mathcal{M}_{03} = -k_3 = -0,699 .$$

Con estos elementos se ha trazado (fig. 170), en la escala

$$\frac{1}{6,6 \text{ cm}} ,$$

el diagrama de momentos flectores originado por el par  $M = 1$  en  $A_0$ , sabiendo que es lineal para cada pieza y que pasa por los focos adyacentes a los extremos  $A_j$ .

223. — Para los esfuerzos tangenciales se ha adoptado la escala

$$\frac{1 \text{ m}^{-1}}{26,4 \text{ cm}} ,$$

resultando la distancia polar

$$k = \frac{\frac{1}{6,6 \text{ cm}}}{\frac{1 \text{ m}^{-1}}{26,4 \text{ cm}}} = 4 \text{ m} .$$

En la figura se ha calculado, por derivación gráfica, los esfuerzos tangenciales, constantes para cada pieza, obteniéndose

$$\mathcal{T}_1 = 0,708 \text{ cm} \frac{1 \text{ m}^{-1}}{26,4 \text{ cm}} = 0,0269 \text{ m}^{-1} ,$$

$$\mathcal{T}_2 = 0,54 \text{ cm} \frac{1 \text{ m}^{-1}}{26,4 \text{ cm}} = 0,0206 \text{ m}^{-1} ,$$

$$\mathcal{T}_3 = 8 \text{ cm} \frac{1 \text{ m}^{-1}}{26,4 \text{ cm}} = 0,296 \text{ m}^{-1} .$$

La reacción en  $A_0$  es

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{T}_1 = 0,0269 \text{ m}^{-1} .$$

La componente horizontal de la reacción en  $A_3$  es

$$\mathcal{H}_3 = \mathcal{T}_3 = 0,296 \text{ m}^{-1} .$$

La componente horizontal de la reacción en  $A_2$  es (fig. 171)

$$\mathcal{H}_2 = -\mathcal{H}_3 = -\mathcal{T}_3 = -0,296 \text{ m}^{-1} .$$

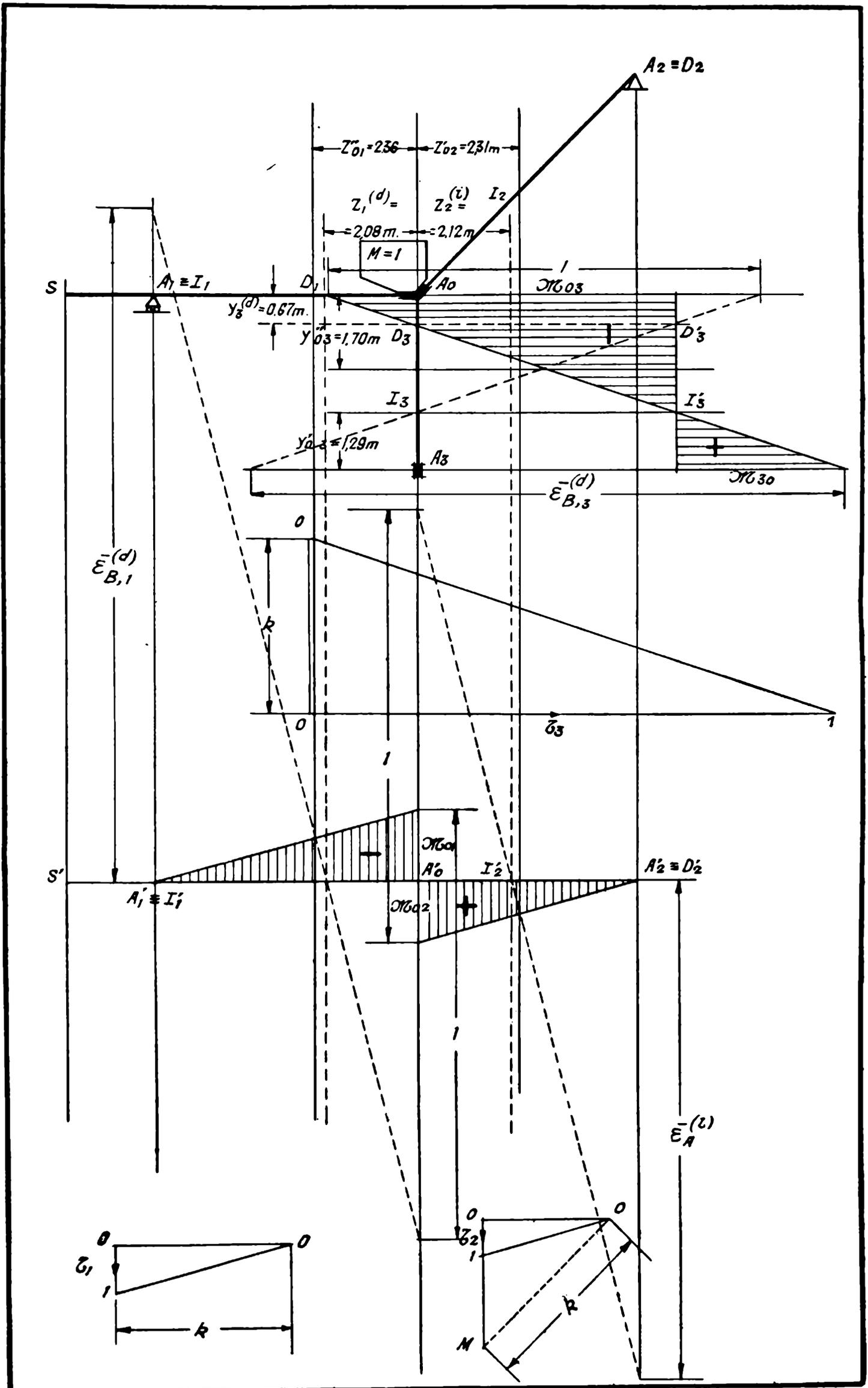


FIG. 170.

Para la componente vertical  $\mathcal{V}_2$  de la reacción en  $A_2$ , se tiene (fig. 172)

$$\mathcal{M}_{02} = -(\mathcal{V}_2 l_2 + \mathcal{H}_2 h_2),$$

$$\mathcal{V}_2 = \frac{\mathcal{H}_2 h_2 - \mathcal{M}_{0,2}}{l_2} = \frac{-0,296 \text{ m}^{-1} \times 5 \text{ m} - 0,139}{5 \text{ m}} = -0,323 \text{ m}^{-1}.$$

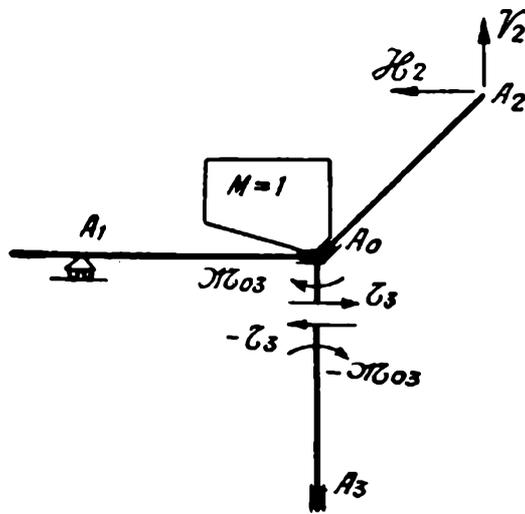


FIG. 171.

Para la componente vertical  $\mathcal{V}_3$  de la reacción en  $A_3$ , se tiene (fig. 173)

$$\mathcal{V}_3 = -(\mathcal{T}_1 + \mathcal{V}_2) = -(0,0269 - 0,323) \text{ m}^{-1} = 0,296 \text{ m}^{-1}.$$

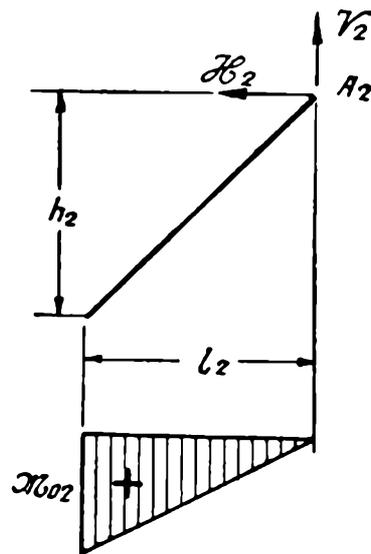


FIG. 172.

El esfuerzo normal en la viga 1 es nulo. El  $\mathcal{N}_3$  en el pilar 3 es

$$\mathcal{N}_3 = \mathcal{V}_3 = 0,296 \text{ m}^{-1}.$$

Las fuerzas  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{V}_2$  originan en la viga 2 esfuerzos normales

$$\frac{l_2}{s_2} \mathcal{H}_2$$

y

$$-\frac{h_2}{s_2} \mathcal{V}_2.$$

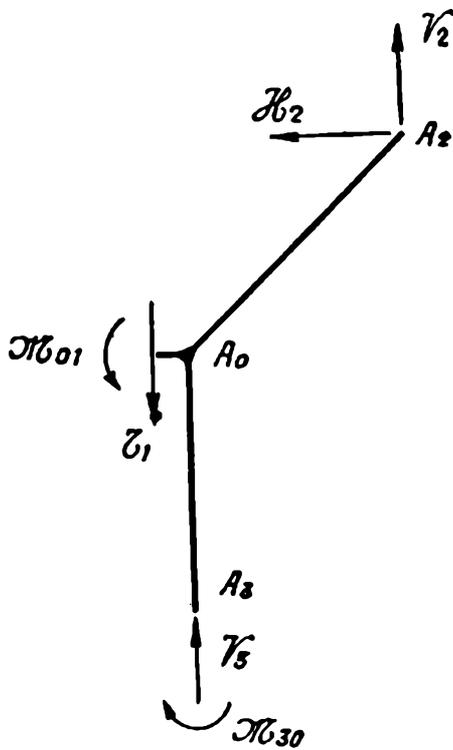


FIG. 173.

El esfuerzo normal  $\mathcal{N}_2$  en dicha viga es, por consiguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_2 &= \frac{1}{s_2} (l_2 \mathcal{H}_2 - h_2 \mathcal{V}_2) = \\ &= \frac{1}{7,07 \text{ m}} [5 \text{ m} (-0,296 \text{ m}^{-1}) - 5 \text{ m} (-0,323 \text{ m}^{-1})] = 0,0198 \text{ m}^{-1}. \end{aligned}$$

224. Determinación de los focos. — Para la viga 1 la tabla IVa da (valor de  $\bar{\epsilon}^{(d)}$  para  $\nu' = 1$  correspondiente a  $n_1 = 0,20$  y  $\lambda_1 = 0,25$ )

$$\bar{\epsilon}^{(d)}_{B,1} = -1,536,$$

y, análogamente, para la viga 2 la tabla IVe da (valor de  $\bar{\epsilon}^{(i)}_A$  para  $\nu' = 0$  correspondiente a  $n_2 = 0,10$  y  $\lambda_2 = 0,50$ )

$$\bar{\epsilon}^{(i)}_{A,2} = 1,164.$$

Para el pilar 3 se tiene, según la [4] de (33),

$$\bar{\epsilon}^{(d)}_{B,3} = - \frac{1 - \nu''_{0,3}}{\nu''_{0,3}} = - \frac{1 - 0,427}{0,427} = -1,35.$$

Con estos elementos se han determinado en la figura 170, de acuerdo con (215), los focos  $D_1$ ,  $I_2$  y  $D_3$  adyacentes al nudo  $A_0$ . De la figura se deduce

$$\nu^{(d)}_1 = \frac{2,08 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = 0,347, \quad \nu^{(i)}_2 = \frac{2,12 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 0,425,$$

$$\nu^{(d)}_3 = \frac{0,67 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = 0,167$$

**225. Diagrama de características originados por una carga permanente.** — Se piden los diagramas de características correspondientes al estado de carga representado en la figura 174.

Comencemos por calcular los coeficientes de distribución interna. Se tiene ([1] de (214))

$$k_{21} = \frac{k_2}{1 - k_1} = \frac{0,139}{1 - 0,163} = 0,166,$$

$$k_{31} = \frac{k_3}{1 - k_1} = \frac{0,699}{1 - 0,163} = 0,835,$$

$$k_{12} = \frac{k_1}{1 - k_2} = \frac{0,163}{1 - 0,139} = 0,189,$$

$$k_{32} = \frac{k_3}{1 - k_2} = \frac{0,699}{1 - 0,139} = 0,812,$$

$$k_{13} = \frac{k_1}{1 - k_3} = \frac{0,163}{1 - 0,699} = 0,541,$$

$$k_{23} = \frac{k_2}{1 - k_3} = \frac{0,139}{1 - 0,699} = 0,461.$$

Calculemos los coeficientes  $k^*_{ij}$  de distribución de los momentos flectores, iguales salvo signo, a los coeficientes de distribución interna  $k_{ij}$  anteriores.

Un momento flector  $\mathcal{M}'_1 = 1$  en el extremo  $A_0$  de la pieza 1, trasmite al nudo  $A_0$  un par  $M = 1$  y, por lo tanto, pares  $k_{21}$  y  $k_{31}$  a los extremos  $A_0$  de las piezas 2 y 3, a los que corresponden momentos flectores

$$k^*_{21} = k_{21} = 0,166,$$

$$k^*_{31} = -k_{31} = -0,835.$$

Un momento flector  $\mathcal{M}'_2 = 1$  en el extremo  $A_0$  de la pieza 2, trasmite al nudo  $A_0$  un par  $M = -1$  y por lo tanto pares  $-k_{12}$  y  $-k_{32}$  a los extremos  $A_0$  de las piezas 1 y 3, a los que corresponden momentos flectores

$$k^*_{12} = -(-k_{12}) = k_{12} = 0,189,$$

$$k^*_{32} = -(-k_{32}) = k_{32} = 0,812.$$

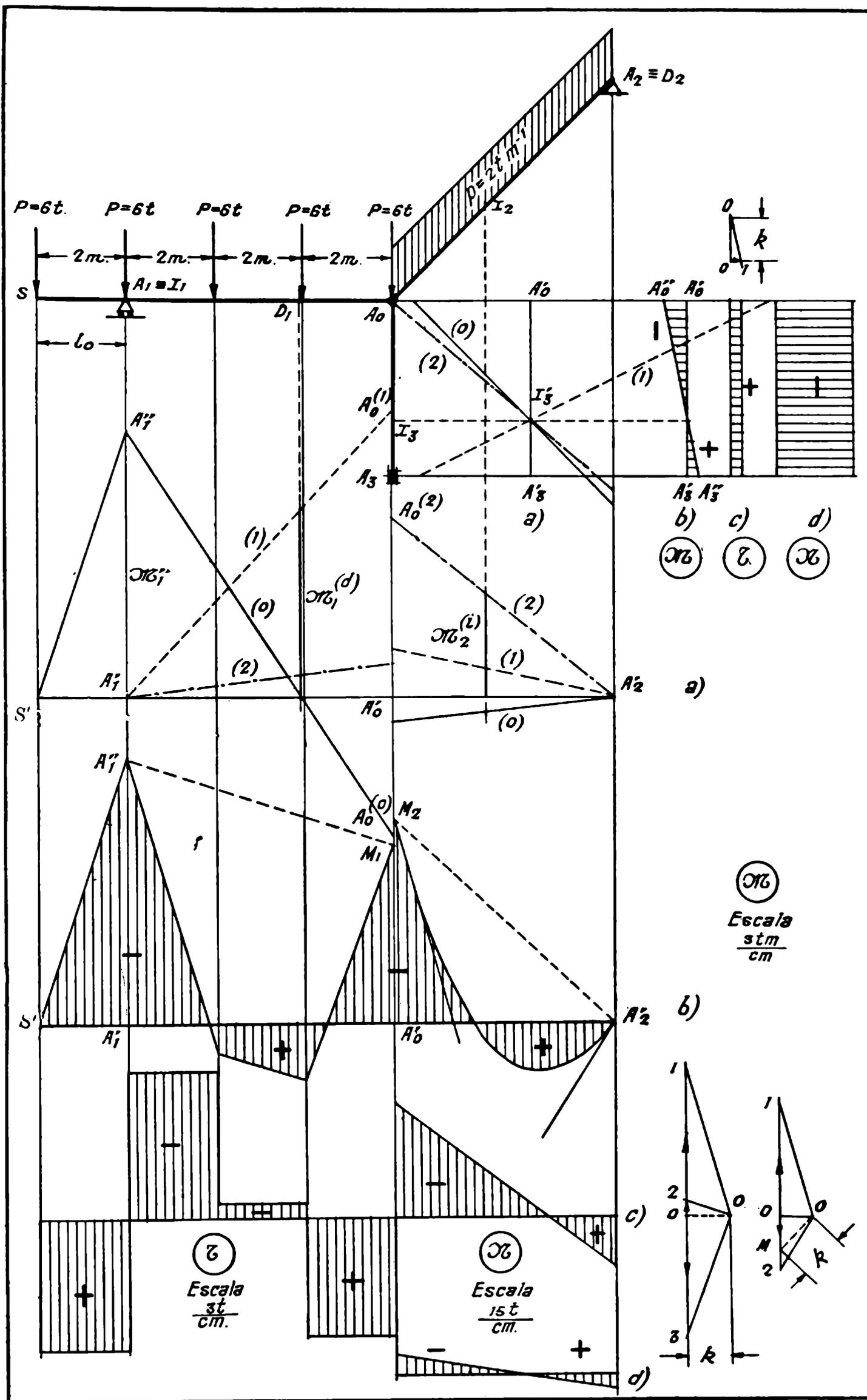


FIG. 174.

Finalmente, un momento flector  $\mathcal{M}''_3 = 1$  en el extremo  $A_0$  de la pieza 3 transmite al nudo  $A_0$  un par  $M = 1$  y, por tanto, en los extremos  $A_0$  de las piezas 1 y 2, pares iguales a  $k_{13}$  y  $k_{23}$ , a los que corresponden momentos flectores

$$k^*_{13} = -k_{13} = -0,541 ,$$

$$k^*_{23} = k_{23} = 0,461 .$$

226. — El estado de cargas que actúa sobre la pieza en voladizo  $A_1S$ , origina en  $A_1$  un momento flector

$$\mathcal{M}'_1 = P l_0 = -6 \text{ t} \times 2 \text{ m} = -12 \text{ tm} .$$

El diagrama de momentos en dicha pieza es, en la escala

$$\frac{3 \text{ tm}}{\text{cm}} ,$$

el  $SA''_1$ . El momento  $\mathcal{M}'_1$  origina en la viga 1 el diagrama lineal  $A''A_0^{(0)}$  que pasa por el foco  $D'_1$  y que da en  $A_0$  el momento

$$\mathcal{M}''_1 = 2,13 \text{ cm} \frac{3 \text{ tm}}{\text{cm}} = 6,4 \text{ tm} .$$

Este último origina, a su vez, en los extremos  $A_0$  de las piezas 2 y 3 los momentos

$$\mathcal{M}'_2 = k^*_{21} \mathcal{M}''_1 = 0,166 \times 6,4 \text{ tm} = 1,06 \text{ tm} ,$$

$$\mathcal{M}''_3 = k^*_{31} \mathcal{M}''_1 = -0,835 \times 6,4 \text{ tm} = -5,34 \text{ tm} .$$

Con estos elementos se ha trazado, en la figura 174 a, los diagramas de momentos  $(0)$  originados por la carga que actúa en el tramo en voladizo.

La tabla VII<sup>1-11a</sup> da, para el estado de carga que actúa sobre la pieza 1 ( $n=0,20$ ,  $\lambda = 0,25$ ),

$$\bar{X}^{(d)} = 0,680 ,$$

y para el momento focal derecho se tiene, por consiguiente,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1^{(d)} &= -\bar{T}^{(d)} v_1^{(d)} = -Pl \bar{X}^{(d)} v_1^{(d)} = \\ &= -6 \text{ t} \times 6 \text{ m} \times 0,68 \times 0,347 = -8,47 \text{ tm} . \end{aligned}$$

Con este momento se ha trazado, en la escala anterior, la línea de cierre  $A'_1A_0^{(1)}$ . El momento en el extremo  $A_0$  resulta

$$\mathcal{M}''_1 = -4,35 \text{ cm} \frac{3 \text{ tm}}{\text{cm}} = -13,04 \text{ tm} ,$$

y origina en los extremos  $A_0$  de las piezas 2 y 3, los momentos

$$\mathcal{M}'_2 = k^*_{21} \mathcal{M}''_1 = 0,166 (-13,04 \text{ tm}) = -2,17 \text{ tm} ,$$

$$\mathcal{M}''_3 = k^*_{31} \mathcal{M}''_1 = -0,835 (-13,04 \text{ tm}) = 10,90 \text{ tm} .$$

Con estos elementos se ha completado en la figura 174 a la línea de cierre (1) (punteada), para las cargas que actúan sobre la viga 1.

La tabla VII<sup>12e</sup> da, para el estado de cargas que actúa sobre la viga 2 ( $n = 0,10$ ,  $\lambda = 0,50$ ),

$$\bar{X}^{(i)} = 0,220 ,$$

y el momento focal  $\mathcal{M}^{(i)}_2$  es, por consiguiente,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(i)}_2 &= - T^{(d)} v^{(i)}_2 = - pl^2 \bar{X}^{(i)} v^{(i)}_2 = \\ &= - 2 \text{ tm}^{-1} \times 5^2 \text{ m}^2 \times 0,220 \times 0,425 = - 4,68 \text{ tm} . \end{aligned}$$

Con este momento se ha trazado en la figura la línea de cierre (2) para la viga 2 (de puntos y rayas). El momento flector en el extremo  $A_0$  de la viga 2 es

$$\mathcal{M}'_2 = - 2,705 \text{ cm} \frac{3 \text{ tm}}{\text{cm}} = - 8,12 \text{ tm},$$

y origina en los extremos  $A_0$  de las piezas 1 y 3, los momentos

$$\mathcal{M}''_1 = k^*_{12} \mathcal{M}'_2 = 0,189 (- 8,12 \text{ tm}) = - 1,53 \text{ tm} ,$$

$$\mathcal{M}''_3 = k^*_{32} \mathcal{M}'_2 = 0,812 (- 8,12 \text{ tm}) = - 6,59 \text{ tm} .$$

Con estos elementos se ha completado en la figura la línea de cierre (2) para las cargas que actúan sobre la viga 2.

Sumando estas líneas de cierre (0), (1) y (2) se ha obtenido (fig. 174 b) la línea de cierre total  $S'A''_1$ ,  $A''_1M_1$ ,  $M_2A'_2$ ,  $A''_0A''_3$ .

Construyendo los diagramas de momentos de las vigas simplemente apoyadas, referidos a las rectas  $A''_1M_1$  y  $M_2A'_2$  han resultado los diagramas definitivos de momentos flectores de las vigas 1 y 2. Para el tramo en voladizo  $SA_1$  y para el pilar 3 los diagramas definitivos son respectivamente  $S'A''_1$  y  $A''_0A''_3$  (fig. 174 b), referidos a los ejes  $S'A''_1$  y  $A''_0A''_3$ .

Los diagramas de momentos flectores así resultantes han sido rayados en la figura.

227. — Adoptando

$$\frac{3 \text{ t}}{\text{cm}}$$

como escala de esfuerzos tangenciales, resulta la distancia polar

$$k = \frac{\frac{3 \text{ tm}}{\text{cm}}}{\frac{3 \text{ t}}{\text{cm}}} = 1 \text{ m} .$$

Por derivación gráfica se ha obtenido para las vigas los diagramas de esfuerzos tangenciales representados en la figura 174 c. El esfuerzo tangencial constante en el pilar es

$$\mathcal{T}_3 = 0,16 \text{ cm} \frac{3 \text{ t}}{\text{cm}} = 0,48 \text{ t} .$$

La reacción en  $A_1$  es

$$R_1 = \mathcal{T}'_1 - \mathcal{T}_0 - P = -4,2 \text{ cm} \frac{3 \text{ t}}{\text{cm}} - 6 \text{ t} = -18,6 \text{ t}.$$

La componente horizontal  $\mathcal{H}_2$  de la reacción en  $A_2$  es (fig. 175)

$$\mathcal{H}_2 = -\mathcal{H}_3 = -\mathcal{T}_3 = -0,48 \text{ t}.$$

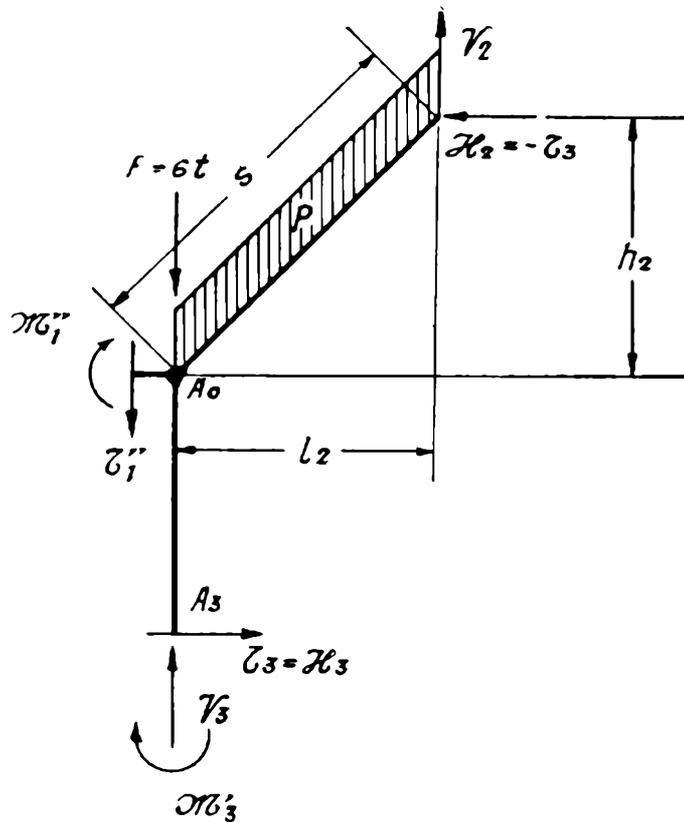


FIG. 175.

Para la componente vertical  $\mathcal{V}_2$  de la reacción en  $A_2$  se tiene

$$\mathcal{M}'_2 = -\left(\mathcal{V}_2 l_2 + \mathcal{H}_2 h_2 + \frac{pl_2}{2}\right) = -9,14 \text{ tm}.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_2 &= \frac{-\mathcal{H}_2 h_2 - \frac{pl_2}{2} - \mathcal{M}'_2}{l_2} = \\ &= \frac{0,48 \text{ t} \times 5 \text{ m} - \frac{2 \text{ tm}^{-1} 5^2 \text{ m}^2}{2} + 9,14 \text{ tm}}{5 \text{ m}} = -2,69 \text{ t}. \end{aligned}$$

La componente  $\mathcal{V}_3$  de la reacción en  $A_3$  es (fig. 175)

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_3 &= -(\mathcal{T}''_1 + P + \mathcal{V}_2 + pl_2) = \\ &= -(5,32 \text{ t} + 6 \text{ t} - 2,69 + 2 \text{ tm}^{-1} \times 5 \text{ m}) = -18,63 \text{ t}. \end{aligned}$$

Los esfuerzos normales en  $SA_1$  y  $A_1A_0$  son nulos.

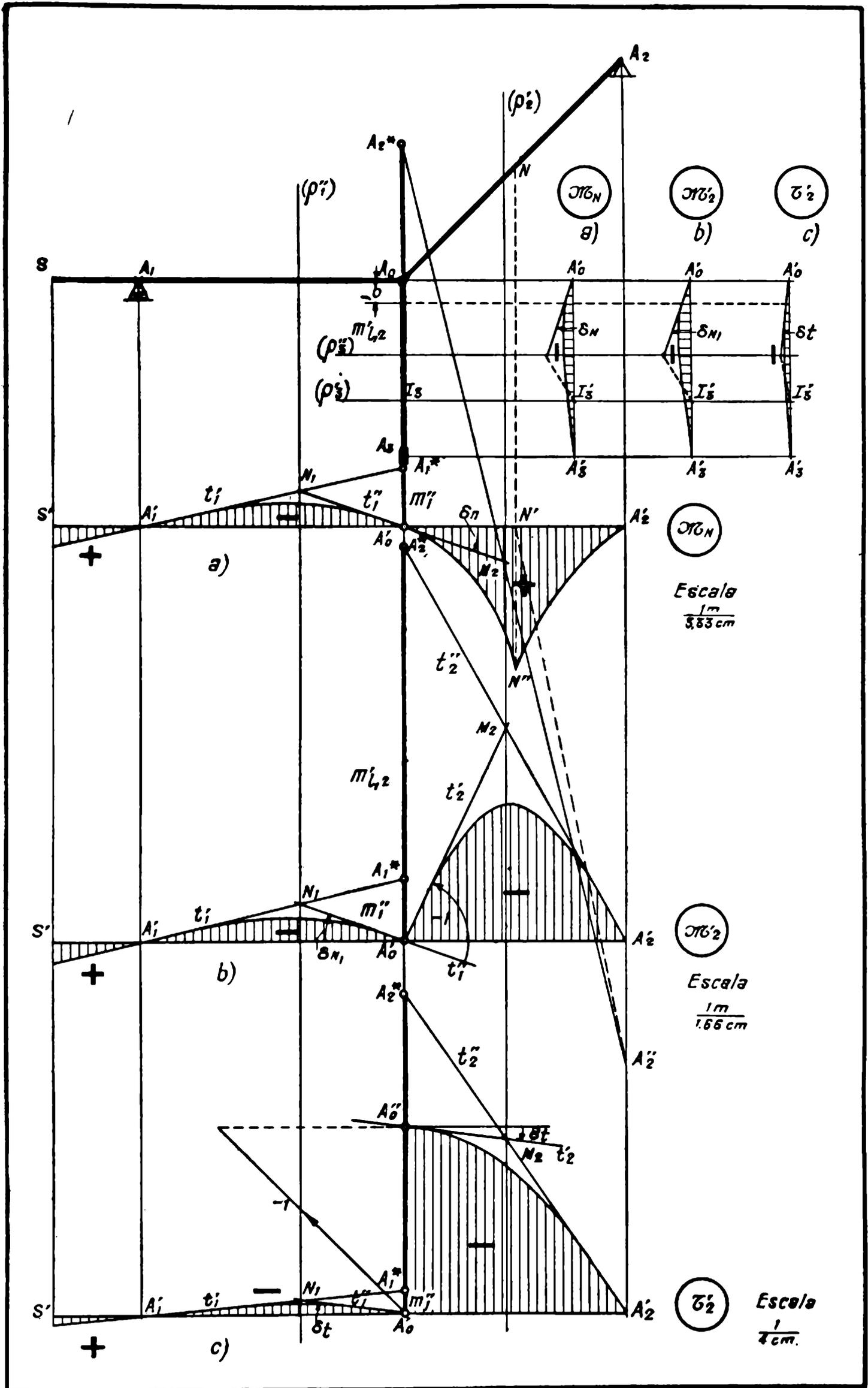


FIG. 176.

El esfuerzo normal en el pilar 3 es constante e igual á

$$\mathcal{N}_3 = \mathcal{V}_3 = -18,63 \text{ t.}$$

Las fuerzas  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{V}_2$  originan en  $A_2$  esfuerzos normales

$$\frac{l_2}{s_2} \mathcal{H}_2 \quad \text{y} \quad -\frac{h_2}{s_2} \mathcal{V}_2 = -\frac{l_2}{s_2} \mathcal{V}_2.$$

El esfuerzo normal en  $A_2$  es, por consiguiente,

$$\mathcal{N}''_2 = \frac{l_2}{s_2} (\mathcal{H}_2 - \mathcal{V}_2) = \frac{5 \text{ m}}{7,07 \text{ m}} (0,48 \text{ t} + 2,69 \text{ t}) = 2,24 \text{ t}.$$

El esfuerzo normal en el extremo  $A_0$  de la pieza 2 es

$$\mathcal{N}'_2 = \mathcal{N}''_2 - pl_2 \frac{l_2}{s_2} = 2,24 \text{ t} - \left( 2 \text{ tm}^{-1} \times 5 \text{ m} \frac{5 \text{ m}}{7,07 \text{ m}} \right) = 4,86 \text{ t}.$$

El diagrama de esfuerzos normales en la pieza 2 ha sido trazado en la figura 174 d, en base a  $\mathcal{N}'_2$  y  $\mathcal{N}''_2$  y sabiendo que es lineal.

**228. Líneas de influencia.** — En la figura 176 se han trazado las líneas de influencia del momento flector  $\mathcal{M}_N$  en la sección intermedia  $N$  de la viga 2 ( $v'_N = 0,5 l_2$ ), del momento flector  $\mathcal{M}'_2$  y del esfuerzo tangencial  $\mathcal{T}'_2$  en el extremo izquierdo de la misma.

En la figura 177 se han trazado las líneas de influencia de la reacción  $\mathcal{R}_1$  en  $A_1$  y de las componentes vertical  $\mathcal{V}_2$  y horizontal  $\mathcal{H}_2$  de la reacción en  $A_2$ .

En la figura 178 se han trazado, finalmente, las líneas de influencia del momento de empotramiento  $\mathcal{M}'_3$  y de las componentes vertical  $\mathcal{V}_3$  y horizontal  $\mathcal{H}_3$  de la reacción en  $A_3$ .

Para trazar estas líneas de influencia se ha recurrido al procedimiento de los desplazamientos extremos. Estando las piezas articuladas o rígidamente empotradas en su extremos  $A_j$ , bastan las rotaciones en los extremos  $A_0$  para obtener los polígonos de las tercias, como indican las figuras. Dichas rotaciones están dadas por las características originadas por el par  $M = 1$  en  $A_0$  y calculadas en (222) (fig. 170).

Nos limitaremos a exponer a continuación algunas particularidades de la obtención de estos polígonos de las tercias.

*Polígonos de las tercias para  $\mathcal{M}_N$ .* — La rotación  $\delta_N$  en el extremo  $A_0$  es el momento en  $N$  ( $v'_N = 0,5$ ) originado por el par  $M = 1$  en  $A_0$ . De la figura 170 se deduce

$$\delta_N = 0,46 \text{ cm} \frac{1}{6,6 \text{ cm}} = 0,07.$$

Con esta rotación se obtienen los polígonos de las tercias trazados en la figura 176 a.

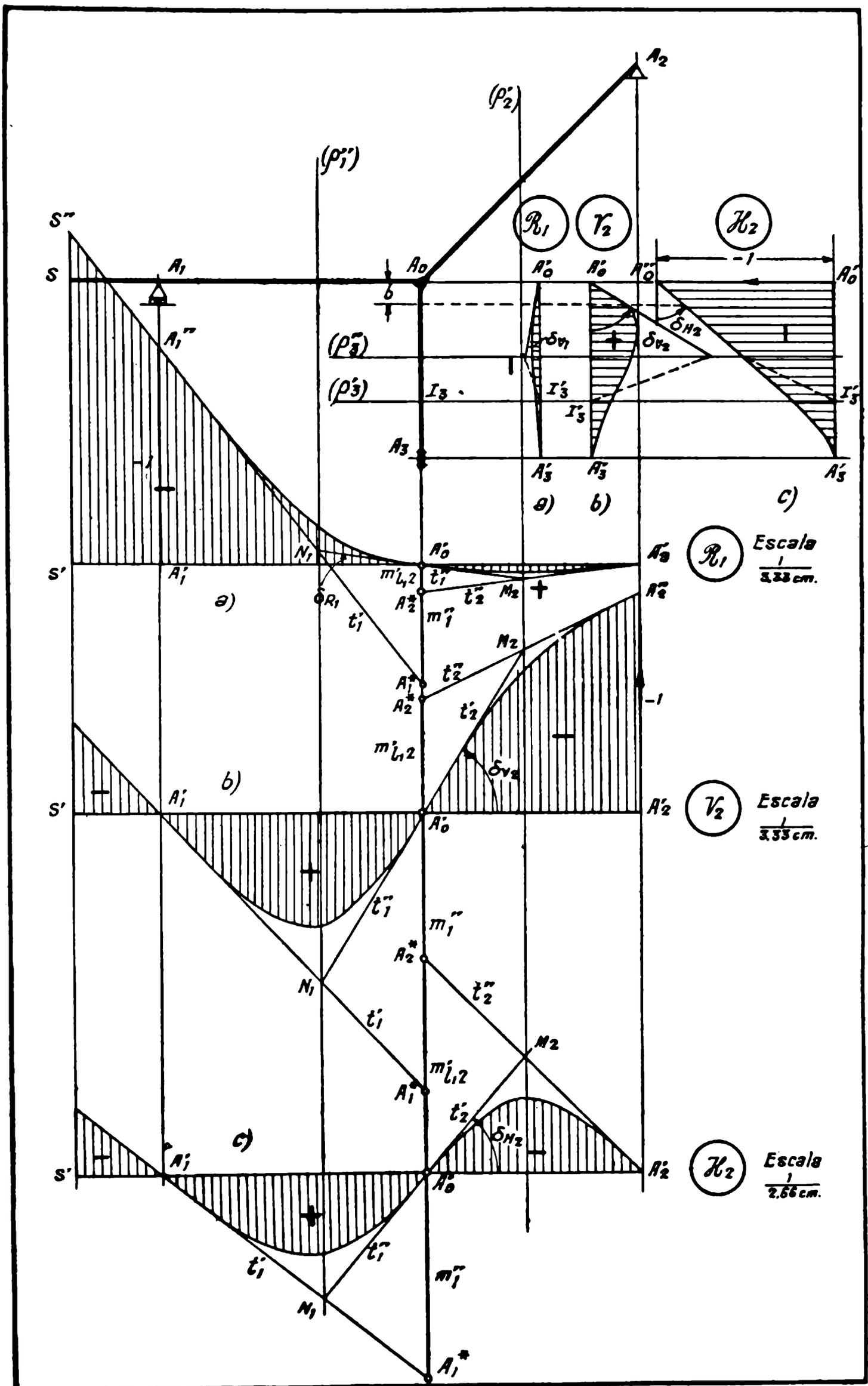


FIG. 177.

*Polígonos de las tercias para  $\mathcal{M}'_2$ .* — La rotación  $\delta_N$  en los extremos  $A_0$  de las piezas 1 y 3 correspondiente al momento flector  $\mathcal{M}'_2$  en el extremo izquierdo de la viga 2, es el momento en este extremo originado por el par  $M = 1$  en  $A_2$ , es decir el  $\mathcal{M}_{02}$  calculado en (222). Se tiene

$$\delta_N = \mathcal{M}_{02} = 0,93 \text{ cm} \frac{1}{6,6 \text{ cm}} = 0,14 .$$

La tangente en el extremo izquierdo de la viga 2 debe formar un ángulo igual a  $-1$  con las tangentes en los extremos  $A_0$  de las otras piezas, tal como se le ha trazado en la figura 176 b, en la que se han construido los polígonos de las tercias, en base a los elementos anteriores.

*Polígonos de las tercias para  $\mathcal{T}'_2$ .* — La rotación  $\delta_{T'_2}$  en  $A_0$  es, para las tres piezas, el esfuerzo tangencial en la pieza 2 originado por el par  $M = 1$  en  $A_0$ , es decir, el  $\mathcal{T}_2$  calculado en (223). Se tiene, pues

$$\delta_{T'_2} = \mathcal{T}_2 = 0,53 \text{ cm} \frac{1 \text{ m}^{-1}}{26,4 \text{ cm}} = 0,02 \text{ m}^{-1} .$$

El desplazamiento  $\eta'_2$  del extremo izquierdo de la pieza 2 es

$$\eta'_2 = - \frac{l_2}{s_2} = - \frac{5,00 \text{ m}}{7,07 \text{ m}} = 0,707 .$$

Con estos elementos se han trazado los polígonos de las tercias de la figura 176 c.

*Polígonos de las tercias para  $\mathcal{R}_1$ .* — La rotación  $\delta_{R_1}$  en los extremos  $A_0$  es igual a la reacción en  $A_1$  originada por el par  $M = 1$  en  $A_2$ . Según (223) se tiene

$$\delta_{R_1} = 0,73 \text{ cm} \frac{1 \text{ m}^{-1}}{26,4 \text{ cm}} = 0,0275 \text{ m}^{-1} .$$

La ordenada vertical en  $A_1$  es igual a  $-1$  (fig. 177 a).

*Polígonos de las tercias para  $\mathcal{V}_2$ .* — La rotación  $\delta_{V_2}$  en  $A_0$  es la componente vertical de la reacción en  $A_2$  originada por el par  $M = 1$  en  $A_0$ . Según (223) se tiene

$$\delta_{V_2} = -0,323 \text{ m}^{-1}$$

La ordenada vertical en  $A_2$  es igual a  $-1$  (fig. 177 b).

*Polígonos de las tercias para  $\mathcal{H}_2$ .* — La rotación  $\delta_{H_2}$  en  $A_0$  es la componente horizontal de la reacción en  $A_2$  originada por el par  $M = 1$  en  $A_0$ . Según (223) se tiene

$$\delta_{H_2} = -0,296 \text{ m}^{-1} .$$

El desplazamiento horizontal en el extremo  $A_0$  del pilar 3 es igual a  $-1$ . En efecto; si en  $A_0$  se aplica una fuerza horizontal  $P = 1$ , se descompone según las rectas  $A_0A_2$  y  $A_0A_3$ ; la primera dirección resulta de que la reacción en  $A_2$  debe pasar

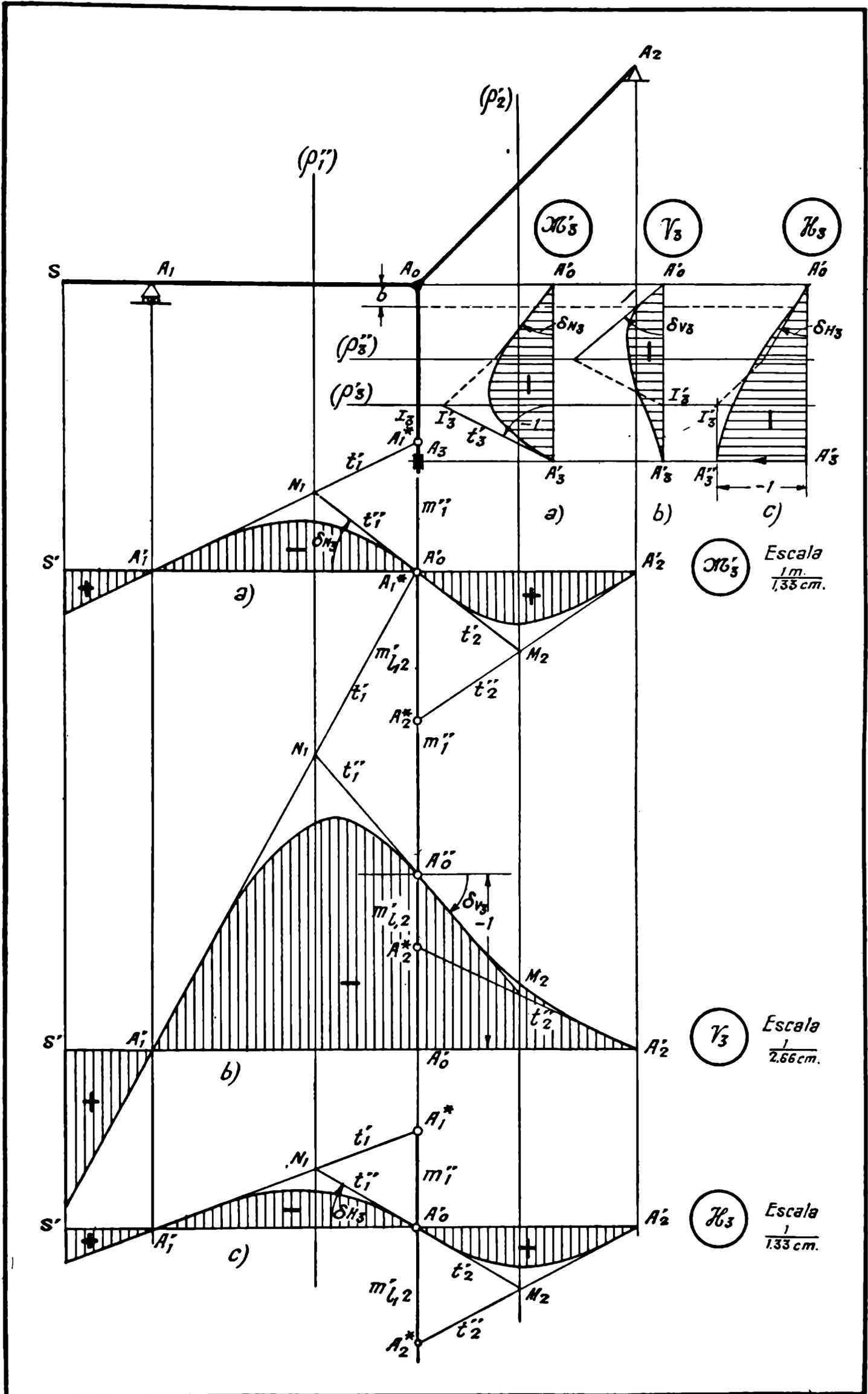


FIG. 178.

por este punto y la segunda de que la reacción en  $A_3$  debé pasar por el foco  $I_3$ , desde que el momento en este último es nulo. La componente horizontal de la reacción en  $A_3$  es igual a cero, por consiguiente. La fuerza  $P = 1$  debe equilibrarse, por tanto, con la componente horizontal de la reacción en  $A_2$ ; o sea, esta última es igual a  $-1$ , como se quería demostrar.

Con este desplazamiento horizontal de  $A_0$  y la rotación  $\delta_{H_2}$  se tienen los elementos necesarios para trazar los polígonos de las tercias, como se ha hecho en la figura 177 c.

*Polígonos de las tercias para el momento de empotramiento  $\mathcal{M}'_3$ .* — La rotación  $\delta_{N_3}$  en los extremos  $A_0$  es el momento en  $A_3$  originado por el par  $M = 1$  en  $A_0$ , es decir, el  $\mathcal{M}_{30}$  calculado en (223). Se tiene

$$\delta_{N_3} = 2,54 \text{ cm} \frac{1}{6,6 \text{ cm}} = 0,385.$$

La rotación en el extremo  $A_3$  del pilar 3 es igual a  $-1$  (fig. 178 a).

*Polígonos de las tercias para  $\mathcal{H}_3$ .* — La rotación  $\delta_{H_3}$  en los extremos  $A_0$  es la componente horizontal de la reacción en  $A_3$  originada por el par  $M = 1$  en  $A_0$ . Según 223) se tiene

$$\delta_{H_3} = 0,296 \text{ m}^{-1}.$$

El desplazamiento horizontal del extremo  $A_3$  es igual a  $-1$  (fig. 178 b).

*Polígonos de las tercias para  $\mathcal{V}_3$ .* — La rotación  $\delta_{V_3}$  de los extremos  $A_0$  es la componente vertical de la reacción en  $A_3$  originada por el par  $M = 1$  en  $A_0$ . Según (223 se tiene

$$\delta_{V_3} = 0,296 \text{ m}^{-1}.$$

El desplazamiento vertical del punto  $A_0$  es igual a  $-1$  (fig. 178 c).

*Cálculo de las ordenadas de las líneas de influencia.* — Los segmentos que en centímetros, en las escalas adoptadas, representan las ordenadas referidas a las rectas de los extremos, para una línea de influencia cualquiera, correspondientes a la viga 1, son ( $m'_1 = 0$ ),

$$v^*_1 = m''_1 (\text{cm}) \bar{\xi}^{(d)}_1$$

y para la viga 2 ( $m'_{1,2} = 0$ ),

$$v^*_2 = m'_{1,2} (\text{cm}) \bar{\xi}^{(i)}_2.$$

Las magnitudes  $m''_1$  (cm) y  $m'_{1,2}$  (cm) se obtienen directamente de las figuras 176, 177 y 178 y se consignan en el cuadro siguiente:

	$\mathcal{M}_N$	$\mathcal{M}'_2$	$\mathcal{T}'_2$	$\mathcal{R}_1$	$\mathcal{V}_2$	$\mathcal{H}_2$	$\mathcal{M}'_3$	$\mathcal{V}_3$	$\mathcal{H}_3$
$m''_1$ (cm)	-0,90	-0,95	-0,35	+1,80	+4,30	+3,20	-2,00	-4,60	-1,50
$m'_{1,2}$ (cm)	-5,80	-6,00	-2,00	+0,40	-1,80	-3,30	+2,25	+1,10	+1,75

Las tablas III a y III o (para  $n = 0,20$ ,  $\lambda = 0,25$  y  $n = 0,10$ ,  $\lambda = 0,50$ ) dan los números  $\bar{\xi}^{(d)}_1$  y  $\bar{\xi}^{(i)}_2$  del cuadro siguiente. En el mismo se calculan las ordenadas  $v^*_1$  (cm) y  $v^*_2$  (cm).

Incógn.	$v^*$ (cm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	$\bar{\xi}^{(d)}_1$	0,083	0,165	0,242	0,308	0,358	0,388	0,394	0,372	0,318	0,231	0,123
	$\bar{\xi}^{(i)}_2$	0,094	0,180	0,254	0,309	0,342	0,348	0,329	0,288	0,231	0,161	0,083
$\mathcal{M}_N$	$v^*_1$ (cm) = $m''_1$ (cm) $\bar{\xi}^{(d)}_1$	-0,075	-0,148	-0,218	-0,278	-0,322	-0,349	-0,355	-0,335	-0,286	-0,208	-0,111
	$v^*_2$ (cm) = $m'_{l,2}$ (cm) $\bar{\xi}^{(i)}_2$	-0,545	-0,104	-1,48	-1,79	-1,98	-2,02	-1,90	-1,67	-1,34	-0,935	-0,480
$\mathcal{M}'_2$	$v^*_1$ (cm) = $m''_1$ (cm) $\bar{\xi}^{(d)}_1$	-0,079	-0,157	-0,230	-0,293	-0,340	-0,369	-0,375	-0,354	-0,303	-0,220	-0,117
	$v^*_2$ (cm) = $m'_{l,2}$ (cm) $\bar{\xi}^{(i)}_2$	-0,562	-1,08	-1,52	-1,85	-2,05	-2,09	-1,97	-1,73	-1,39	-0,965	-0,497
$\mathcal{T}'_2$	$v^*_1$ (cm) = $m''_1$ (cm) $\bar{\xi}^{(d)}_1$	-0,0291	-0,0578	-0,0846	-0,108	-0,125	-0,136	-0,138	-0,130	-0,112	-0,081	-0,043
	$v^*_2$ (cm) = $m'_{l,2}$ (cm) $\bar{\xi}^{(i)}_2$	-0,188	-0,360	-0,508	-0,618	-0,684	-0,696	-0,658	-0,576	-0,462	-0,322	-0,166
$\mathcal{R}_1$	$v^*_1$ (cm) = $m''_1$ (cm) $\bar{\xi}^{(d)}_1$	0,150	0,297	0,435	0,555	0,645	0,699	0,709	0,670	0,572	0,416	0,221
	$v^*_2$ (cm) = $m'_{l,2}$ (cm) $\bar{\xi}^{(i)}_2$	0,0376	0,072	0,102	0,124	0,137	0,139	0,132	0,116	0,093	0,0645	0,0332
$\mathcal{U}_2$	$v^*_1$ (cm) = $m''_1$ (cm) $\bar{\xi}^{(d)}_1$	0,356	0,710	1,04	1,33	1,54	1,67	1,70	1,60	1,37	0,995	0,530
	$v^*_2$ (cm) = $m'_{l,2}$ (cm) $\bar{\xi}^{(i)}_2$	-0,169	-0,325	-0,456	-0,555	-0,615	-0,627	-0,590	-0,520	-0,416	-0,290	-0,149
$\mathcal{H}_2$	$v^*_1$ (cm) = $m''_1$ (cm) $\bar{\xi}^{(d)}_1$	0,265	0,528	0,775	1,02	1,14	1,24	1,26	1,19	1,02	0,740	0,394
	$v^*_2$ (cm) = $m'_{l,2}$ (cm) $\bar{\xi}^{(i)}_2$	-0,310	-0,592	-0,836	-1,02	-1,13	-1,15	-1,08	-0,950	-0,762	-0,530	-0,273
$\mathcal{M}'_3$	$v^*_1$ (cm) = $m''_1$ (cm) $\bar{\xi}^{(d)}_1$	-0,166	-0,330	-0,484	-0,616	-0,716	-0,776	-0,788	-0,744	-0,636	-0,462	-0,246
	$v^*_2$ (cm) = $m'_{l,2}$ (cm) $\bar{\xi}^{(i)}_2$	0,211	0,405	0,570	0,695	0,770	0,785	0,740	0,650	0,520	0,363	0,187
$\mathcal{U}_3$	$v^*_1$ (cm) = $m''_1$ (cm) $\bar{\xi}^{(d)}_1$	-0,381	-0,760	-1,12	-1,42	-1,65	-1,78	-1,81	-1,71	-1,46	-1,06	-0,365
	$v^*_2$ (cm) = $m'_{l,2}$ (cm) $\bar{\xi}^{(i)}_2$	0,104	0,198	0,280	0,340	0,376	0,383	0,362	0,317	0,254	0,177	0,091
$\mathcal{H}_3$	$v^*_1$ (cm) = $m''_1$ (cm) $\bar{\xi}^{(d)}_1$	-0,124	-0,247	-0,363	-0,461	-0,538	-0,580	-0,590	-0,558	-0,477	-0,346	-0,184
	$v^*_2$ (cm) = $m'_{l,2}$ (cm) $\bar{\xi}^{(i)}_2$	0,164	0,315	0,445	0,540	0,600	0,610	0,575	0,505	0,405	0,282	0,146

Con las ordenadas del cuadro anterior se han trazado en las figuras 176, 177 y 178 las curvas que constituyen las líneas de influencia verticales.

Las curvas correspondientes a las líneas de influencia horizontales del pilar se han obtenido por puntos y tangentes, utilizando el diagrama de momentos flectores representado en la figura 170. En el extremo superior rígido las líneas de influencia son rectilíneas.

**229. Cálculo de la influencia de la carga permanente mediante las rotaciones extremas.** — Calculemos el diagrama de momentos flectores originado por el estado de cargas de la figura 174, obteniendo las líneas de cierre directamente mediante los momentos extremos.

Basta calcular los momentos  $\mathcal{M}''_1$  y  $\mathcal{M}'_2$  en los extremos  $A_0$  de las vigas 1 y 2 y el

$$\mathcal{M}'_1 = P l_0 = -12 \text{ tm.}$$

en  $A_1$ .

El momento  $\mathcal{M}''_3$  en el extremo superior del pilar 3 se obtiene, en base a los anteriores, observando que los pares que se transmiten al nudo  $A_0$  son los representados en la figura 179 y que, por consiguiente, la condición de equilibrio da

$$\mathcal{M}''_1 - \mathcal{M}'_2 - \mathcal{M}''_3 = 0,$$

$$\mathcal{M}''_3 = \mathcal{M}'_2 - \mathcal{M}''_1.$$

Estando descargado el pilar, el momento flector en  $A_3$  es

$$\mathcal{M}'_3 = \alpha_{30} \mathcal{M}''_3;$$

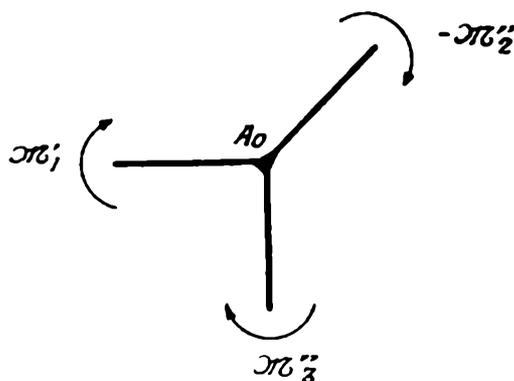


FIG. 179.

en (221) hemos obtenido

$$\alpha_{30} = 0,475.$$

Comencemos por calcular  $\mathcal{M}''_1$ . La rotación izquierda extrema  $\delta^{(1)'}_2$  de la viga 2, correspondiente a la línea de influencia  $\mathcal{M}''_1$ , es el momento en dicho extremo originado por el par  $M = 1$  aplicado en  $A_0$ . Según (222) se tiene

$$\delta^{(1)'}_2 = -1,08 \text{ cm} \frac{1}{6,6 \text{ cm}} = -0,163.$$

La rotación extrema derecha  $\delta^{(1)''}_1$  de la viga 1 se deduce observando que la tangente  $t'_{0,2}$  debe formar con la  $t''_{0,1}$  (fig. 180) un ángulo igual a  $-1$ . Es decir, se tiene

$$\delta^{(1)'}_2 = \delta^{(1)''}_1 - 1$$

$$\delta^{(1)''}_1 = \delta^{(1)'}_2 + 1 = -0,163 + 1 = 0,837.$$

La rotación izquierda  $\delta^{(1)'}_1$  de la viga 1 se calcula en la forma siguiente:  
Poniendo, en general,

$$\delta'_1 = \bar{\delta}'_1 \delta''_1,$$

$\bar{\delta}^{(1)'}_1$  es la rotación en  $A_1$  originada por una rotación  $\delta^{(1)''}_1 = 1$  en  $A_0$ . Se tiene (fig. 181)

$$\bar{\delta}'_1 = -\frac{MN}{(1 - v''_0) l_1} = -\frac{v''_{0,1}}{1 - v''_{0,1}},$$

o, recordando la [4] de (33),

$$\bar{\delta}'_1 = \frac{1}{\bar{\varepsilon}^{(d)}_B} \cdot$$

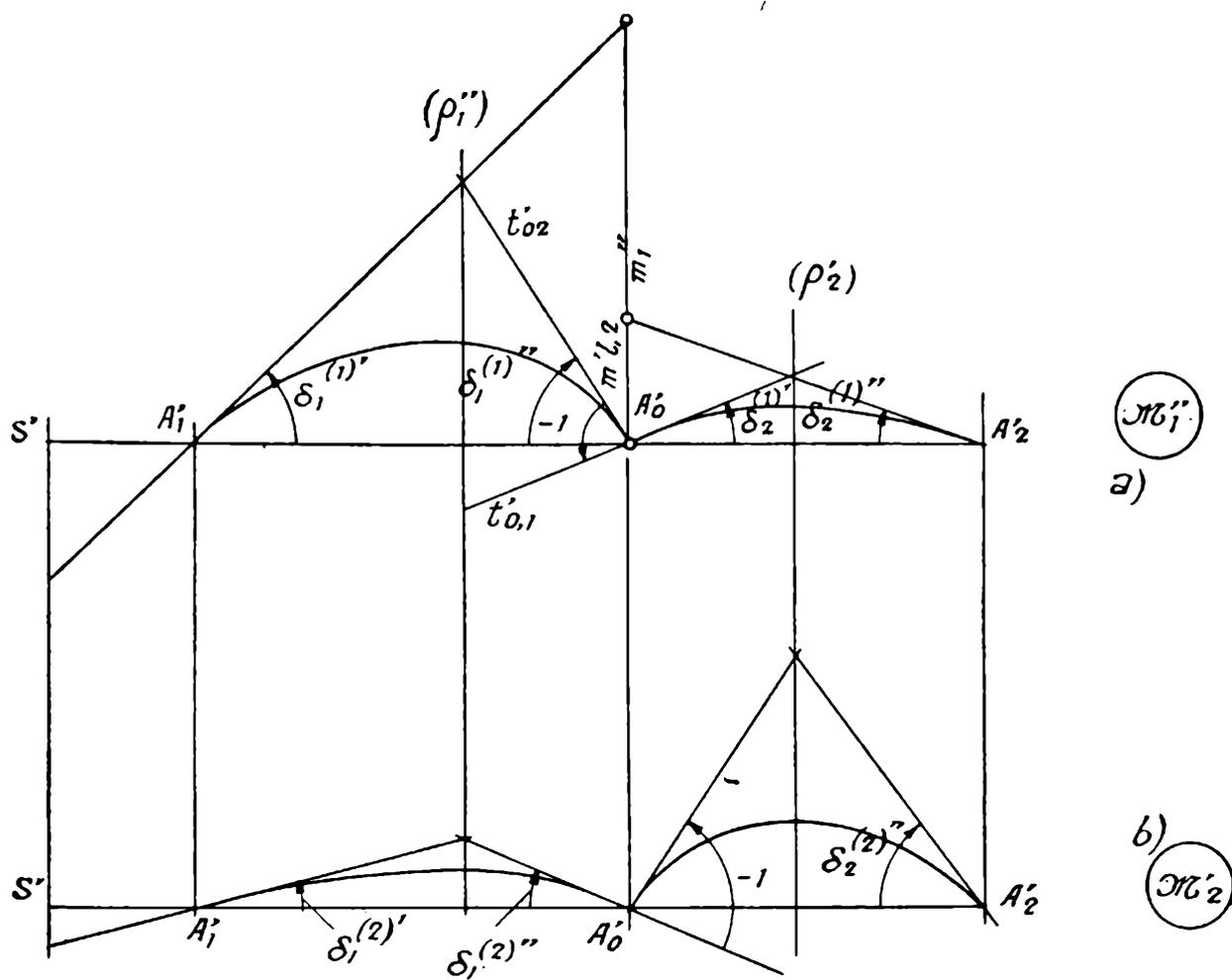


FIG. 180.

Análogamente, poniendo

$$\delta''_2 = \bar{\delta}''_2 \delta'_2,$$

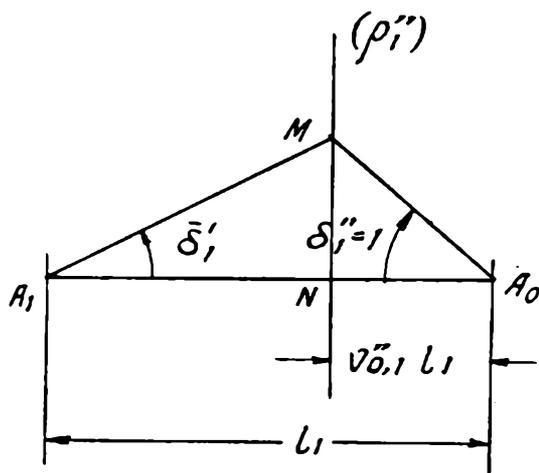


FIG. 181.

se obtendría

$$\bar{\delta}''_2 = - \frac{1}{\bar{\varepsilon}^{(i)}_A} \cdot$$

En (224) hemos encontrado

$$\bar{\epsilon}^{(d)}_B = -1,536, \quad \epsilon^{(i)}_A = 1,164,$$

y resulta, por consiguiente,

$$\bar{\delta}'_1 = \frac{1}{\bar{\epsilon}^{(d)}_B} = \frac{1}{-1,536} = -0,65,$$

$$\bar{\delta}''_2 = -\frac{1}{\bar{\epsilon}^{(i)}_A} = -\frac{1}{1,164} = -0,856.$$

Las rotaciones en  $A_1$  y  $A_2$  de la línea de influencia  $\mathcal{M}''_1$  son, por consiguiente,

$$\delta^{(1)'}_1 = \bar{\delta}'_1 \delta^{(1)''}_1 = -0,65 \times 0,837 = -0,544,$$

$$\delta^{(1)''}_2 = \bar{\delta}''_2 \delta^{(1)'}_2 = -0,163 (-0,856) = 0,140.$$

En resumen, se tiene

$$\delta^{(1)'}_1 = -0,544; \quad \delta^{(1)''}_1 = 0,837, \quad \delta^{(1)'}_2 = -0,163; \quad \delta^{(1)''}_2 = 0,140.$$

La tabla II a da para la viga 1 ( $n = 0,20$ ,  $\lambda = 0,25$ )

$$A_1 = 1,13, \quad B_1 = 0,731,$$

y la II e para la viga 2 ( $n = 0,10$ ,  $\lambda = 0,50$ ),

$$A'_2 = 1,35, \quad B_2 = 0,568.$$

Resulta ([4] de (21)) ( $m'_1 = 0$ ,  $m''_{l,2} = 0$ )

$$m''_1 = -l_1 (B_1 \delta^{(1)'}_1 + A_1 \delta^{(1)''}_1) = -6 \text{ m} (0,731 (-0,544) + 1,13 \times 0,837) = -3,20 \text{ m}.$$

$$m'_{l,2} = l_2 (A'_2 \delta^{(1)'}_2 + B_2 \delta^{(1)''}_2) = 5 \text{ m} (1,35 (-0,163) + 0,568 \times 0,140) = -0,705 \text{ m}.$$

Las tablas VII<sup>1-11a</sup> y VII<sup>12e</sup> dan ( $n = 0,20$ ,  $\lambda = 0,25$  y  $n = 0,10$ ,  $\lambda = 0,50$ ) para los estados de carga que actúan sobre las vigas 1 y 2, según vimos en (226).

$$\bar{X}^{(d)}_1 = 0,680, \quad \bar{X}^{(i)}_2 = 0,220.$$

Los momentos flectores  $\mathcal{M}^{(0)'}_1$ ,  $\mathcal{M}^{(1)''}_1$  y  $\mathcal{M}^{(2)''}_1$ , que en el extremo derecho de la viga 1, originan respectivamente las cargas que actúan sobre el tramo en voladizo y en las vigas 1 y 2, son

$$\mathcal{M}^{(0)''}_1 = \mathcal{M}'_1 \delta^{(1)'}_1 = -12 \text{ tm} (-0,544) = 6,53 \text{ tm},$$

$$\mathcal{M}^{(1)''}_1 = P m''_1 \bar{X}^{(d)}_1 = 6 \text{ t} (-3,20 \text{ m}) 0,680 = -13,07 \text{ tm},$$

$$\mathcal{M}^{(2)''}_1 = pl_2 m'_{l,2} \bar{X}^{(i)}_2 = 2 \text{ tm}^{-1} 5 \text{ m} (-0,705 \text{ m}) 0,220 = -1,55 \text{ tm}$$

El momento  $\mathcal{M}''_1$  es, por consiguiente,

$$\mathcal{M}''_1 = \mathcal{M}^{(0)''}_1 + \mathcal{M}^{(1)''}_1 + \mathcal{M}^{(2)''}_1 = 6,53 - 13,07 - 1,55 = -8,09 \text{ tm.}$$

Calculemos, ahora, el momento  $\mathcal{M}'_2$ . La rotación  $\delta_1$  en el extremo derecho de la viga 1 es el momento en dicho extremo originado por el par  $M = 1$  aplicado en  $A_0$ , y, según (228), tiene el valor

$$\delta^{(2)''}_1 = 0,14.$$

Se tiene, además,

$$\delta^{(2)'}_2 = \delta''^{(2)}_1 - 1 = 0,14 - 1 = -0,86,$$

$$\delta^{(2)'}_1 = \bar{\delta}'_1 \delta^{(2)''}_1 = -0,65 (-0,14) = -0,091,$$

$$\delta^{(2)''}_2 = \bar{\delta}''_2 \delta^{(2)'}_1 = -0,856 (-0,86) = 0,736,$$

$$\begin{aligned} m''_1 &= -l_1 (B_1 \delta'^{(2)}_1 + A_1 \delta''^{(2)}_1) = \\ &= -6 \text{ m} (0,731 (-0,091) + 1,13 \times 0,14) = -0,549 \text{ m}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m'_{l,2} &= l_2 (A'_2 \delta'^{(1)}_2 + B_2 \delta''^{(2)}_2) = \\ &= 5 \text{ m} (1,35 (-0,86) + 0,568 \times 0,736) = -3,71 \text{ m} (*), \end{aligned}$$

$$\mathcal{M}^{(0)'}_1 = \mathcal{M}'_1 \delta'^{(2)}_1 = -12 \text{ tm} (-0,091) = 1,09 \text{ tm},$$

$$\mathcal{M}^{(1)'}_2 = P m''_1 \bar{X}^{(d)}_1 = 6 \text{ t} \times 0,68 (-0,549 \text{ m}) = -2,24 \text{ tm},$$

$$\mathcal{M}^{(2)'}_2 = pl_2 m'_{l,2} \bar{X}^{(s)}_2 = 2 \text{ tm}^{-1} \times 5 \text{ m} \times 0,220 (-3,71 \text{ m}) = -8,16 \text{ tm}$$

y

$$\mathcal{M}'_2 = \mathcal{M}^{(0)'}_2 + \mathcal{M}^{(1)'}_2 + \mathcal{M}^{(2)'}_2 = (1,09 - 2,24 - 8,16 \text{ tm}) = -9,30 \text{ tm.}$$

El momento en el extremo superior del pilar es

$$\mathcal{M}''_3 = (\mathcal{M}'_2 - \mathcal{M}''_1) = (-9,30 \text{ tm} + 8,09 \text{ tm}) = -1,21 \text{ tm},$$

(\*) Estando las vigas 1 y 2 articuladas en  $A_1$  y  $A_2$  es más cómodo calcular los momentos reducidos observando que, en general, se tiene (fig. 180 a)

$$m''_1 = \delta'_1 l_1$$

$$m'_{l,2} = -\delta''_2 l_2.$$

Se tiene así, para el momento  $\mathcal{M}''_1$

$$m''_1 = \delta^{(1)'}_1 l_1 = -0,544 \times 6 \text{ m} = -3,26 \text{ m},$$

$$m'_{l,2} = -\delta^{(1)''}_2 l_2 = -(0,140 \times 5 \text{ m}) = -0,700 \text{ m},$$

y para el  $\mathcal{M}_2$

$$m''_1 = \delta^{(2)'}_1 l_1 = -0,091 \times 6 \text{ m} = -0,546 \text{ m},$$

$$m'_{l,2} = -\delta^{(2)''}_2 l_2 = -(0,736 \times 5 \text{ m}) = -3,68 \text{ m.}$$

valores que coinciden con los calculados en el texto.

y en el extremo inferior

$$\mathcal{M}'_3 = -\alpha_{30} \mathcal{M}''_3 = -0,475 \times (-1,21 \text{ tm}) = 0,575 \text{ tm}.$$

Con estos momentos flectores se trazarian directamente las líneas de cierre totales de la figura 174.

**230. Cálculo numérico en dos pasos de la influencia de la carga permanente (tercer procedimiento).** — Consideremos el estado de carga tratado en (225).

Para la viga articulada en  $A_1$  y empotrada en  $A_0$ , la tabla XVI<sup>1-11a</sup> da, en correspondencia al estado de cargas que actúan en 1,

$$\overline{\mathcal{M}}'' = 0,442$$

y la XVI<sup>12e</sup> para la viga empotrada en  $A_0$  y articulada en  $A_2$  y el estado de cargas que actúa sobre 2,

$$\overline{\mathcal{M}}' = 0,189.$$

No girando el nudo  $A_0$ , los momentos en los extremos  $A_0$  son, por lo tanto,

$$\mathcal{M}'' = -Pl_1 \overline{\mathcal{M}}'' = -6 \text{ t} \times 6 \text{ m} \times 0,442 = -15,9 \text{ tm},$$

$$\mathcal{M}' = -pl^2_2 \overline{\mathcal{M}}' = 2 \text{ tm}^{-1} \times 5^2 \text{ m}^2 \times 0,189 = -9,45 \text{ tm}$$

a los que corresponden pares

$$M'_{01} = -\mathcal{M}'' = +15,9 \text{ tm}$$

$$M'_{02} = \mathcal{M}' = -9,45 \text{ tm}.$$

La suma de estos pares, cambiada de signo, es

$$M = -(M'_{01} + M'_{02}) = -(15,9 - 9,45) \text{ tm} = -6,45 \text{ tm}.$$

Este par aplicado en el nudo, distribuye en los extremos de las piezas los nuevos pares

$$M''_{0,1} = k_1 M = 0,163 (-6,45 \text{ tm}) = -1,05 \text{ tm},$$

$$M''_{0,2} = k_2 M = 0,139 (-6,45 \text{ tm}) = -0,897 \text{ tm},$$

$$M''_{0,3} = k_3 M = 0,699 (-6,45 \text{ tm}) = -4,51 \text{ tm}.$$

Los pares resultantes son

$$M_{01} = M'_{01} + M''_{01} = (15,9 - 1,05) \text{ tm} = 14,85 \text{ tm},$$

$$M_{02} = M'_{02} + M''_{02} = (-9,45 - 0,897) \text{ tm} = -10,35 \text{ tm},$$

$$M_{03} = M''_{03} = -4,51 \text{ tm}.$$

Este último origina en  $A_3$  un nuevo par

$$M_{30} = \alpha_{30} M_{03} = 0,475 \times (-4,51 \text{ tm}) = -2,14 \text{ tm}.$$

A estos pares corresponden los siguientes momentos flectores

$$\mathcal{M}''_1 = -M_{01} = -14,85 \text{ tm},$$

$$\mathcal{M}'_2 = M_{02} = -10,35 \text{ tm},$$

$$\mathcal{M}''_3 = -M_{03} = 4,51 \text{ tm},$$

$$\mathcal{M}'_3 = M_{30} = -2,14 \text{ tm}.$$

Se requiere agregar a estos momentos flectores los originados por la carga  $P$  que actúa en el tramo en voladizo; éstos han sido calculados en (226), obteniéndose

$$\mathcal{M}'_1 = -12 \text{ tm}, \quad \mathcal{M}''_1 = 6,8 \text{ tm}, \quad \mathcal{M}'_2 = 1,13 \text{ tm}, \quad \mathcal{M}''_3 = -5,67 \text{ tm},$$

$$\mathcal{M}'_3 = -\alpha_{3,0} \quad \mathcal{M}''_3 = -0,475 (-5,67 \text{ tm}) = 2,70 \text{ tm}.$$

Los momentos flectores resultantes son, por consiguiente,

$$\mathcal{M}'_1 = -12 \text{ tm},$$

$$\mathcal{M}''_1 = (-14,85 + 6,8) \text{ tm} = -8,05 \text{ tm},$$

$$\mathcal{M}'_2 = (-10,35 + 1,13) \text{ tm} = -9,22 \text{ tm},$$

$$\mathcal{M}'_3 = (4,51 - 5,67) \text{ tm} = -1,16 \text{ tm},$$

$$\mathcal{M}'_3 = (-2,14 + 2,70) \text{ tm} = 0,56 \text{ tm}.$$

Con estos momentos flectores se obtendrían las líneas de cierre totales de la figura 174.

**231. Influencia de una variación uniforme de temperatura.** — Supongamos que el sistema experimente un aumento de temperatura

$$t = 20^\circ,$$

y calculemos las características y reacciones que origina.

Suprimiendo los apoyos  $A_1$  y  $A_2$ , queda el sistema isostático punteado (fig. 182) empotrado en  $A_3$  y libre en dichos apoyos. La variación de temperatura lo transforma en el sistema de trazos llenos, en el cual, siendo

$$\epsilon_t = 10 \cdot 10^{-6}$$

el coeficiente de dilatación lineal, los puntos  $A_1$  y  $A_2$  experimentan los siguientes desplazamientos, fuera de las condiciones de vínculo del sistema dado,

$$\eta'_1 = -h_2 t \epsilon_t = -4,00 \text{ m} \times 20^\circ \frac{10 \cdot 10^{-6}}{^\circ\text{C}} = -800 \cdot 10^{-6} \text{ m},$$

$$\eta''_2 = -(h_2 + h_3) t \epsilon_t = -(5,00 + 4,00) 20^\circ \frac{10 \cdot 10^{-6}}{^\circ\text{C}} = -1800 \cdot 10^{-6} \text{ m},$$

$$\zeta''_3 = h_3 t \epsilon_t = 5,00 \text{ m} \times 20^\circ \frac{10 \cdot 10^{-6}}{^\circ\text{C}} = 1000 \cdot 10^{-6} \text{ m}.$$

Si hubieran subsistido los apoyos  $A_1$  y  $A_2$  estos desplazamientos no se hubieran producido. La influencia de la variación de temperatura será, por consiguiente, igual a la que origina desplazamientos  $-\eta'_1$ ,  $-\eta''_2$  y  $-\zeta''_2$ , opuestos a los anteriores. Calculemos el diagrama de momentos flectores originado por estos últimos. Para ello consideraremos sucesivamente la influencia de cada uno de ellos.

En la figura 183 a se ha llevado, en la escala

$$\frac{1000 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}},$$

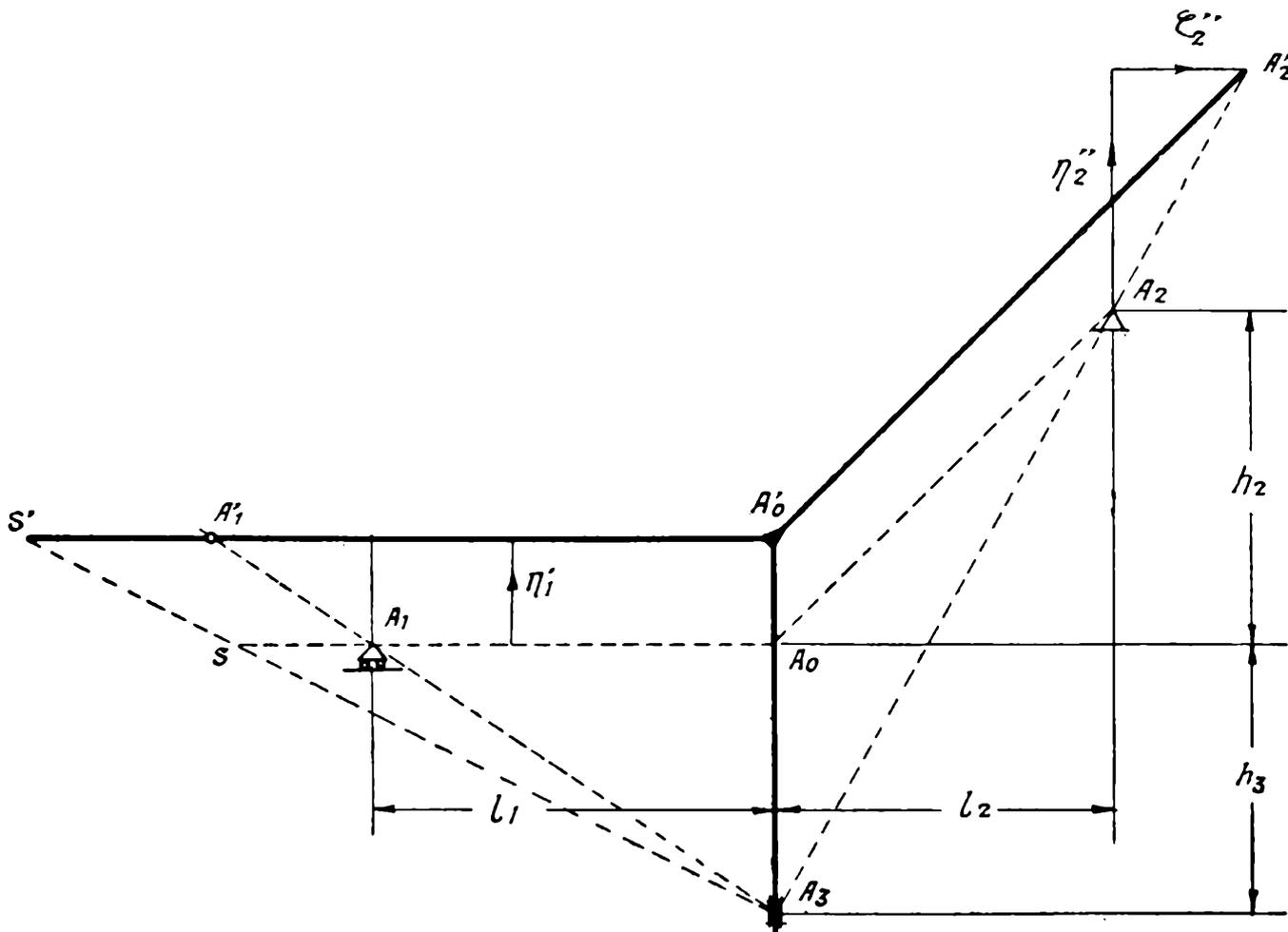


FIG. 182.

el desplazamiento

$$A'_1 A''_1 = -\eta'_1 = 800 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

y construido el polígono de las tercias  $A''_1 M_1 A'_0$ , de la viga 1. Se tiene

$$m^{(1)''_1} = -0,35 \text{ cm} \frac{1000 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}} = -350 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

y, por tanto (con los momentos-tercia calculados en (220)),

$$\mathcal{M}^{(1)''_1} = \frac{m^{(1)''_1}}{m_1} = \frac{-350 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{648 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1}} = -0,54 \text{ tm.}$$

Este momento origina en los extremos de las otras piezas los

$$\mathcal{M}^{(1)'}_2 = k^*_{21} \mathcal{M}^{(1)''}_1 = 0,166 (-0,54 \text{ tm}) = -0,0898 \text{ tm},$$

$$\mathcal{M}^{(1)''}_3 = k^*_{31} \mathcal{M}^{(1)''}_1 = -0,835 (-0,54 \text{ tm}) = 0,450 \text{ tm},$$

$$\mathcal{M}^{(1)'}_3 = \alpha_{3,0} \mathcal{M}^{(1)''}_3 = 0,475 \times 0,439 \text{ tm} = 0,208 \text{ tm}.$$

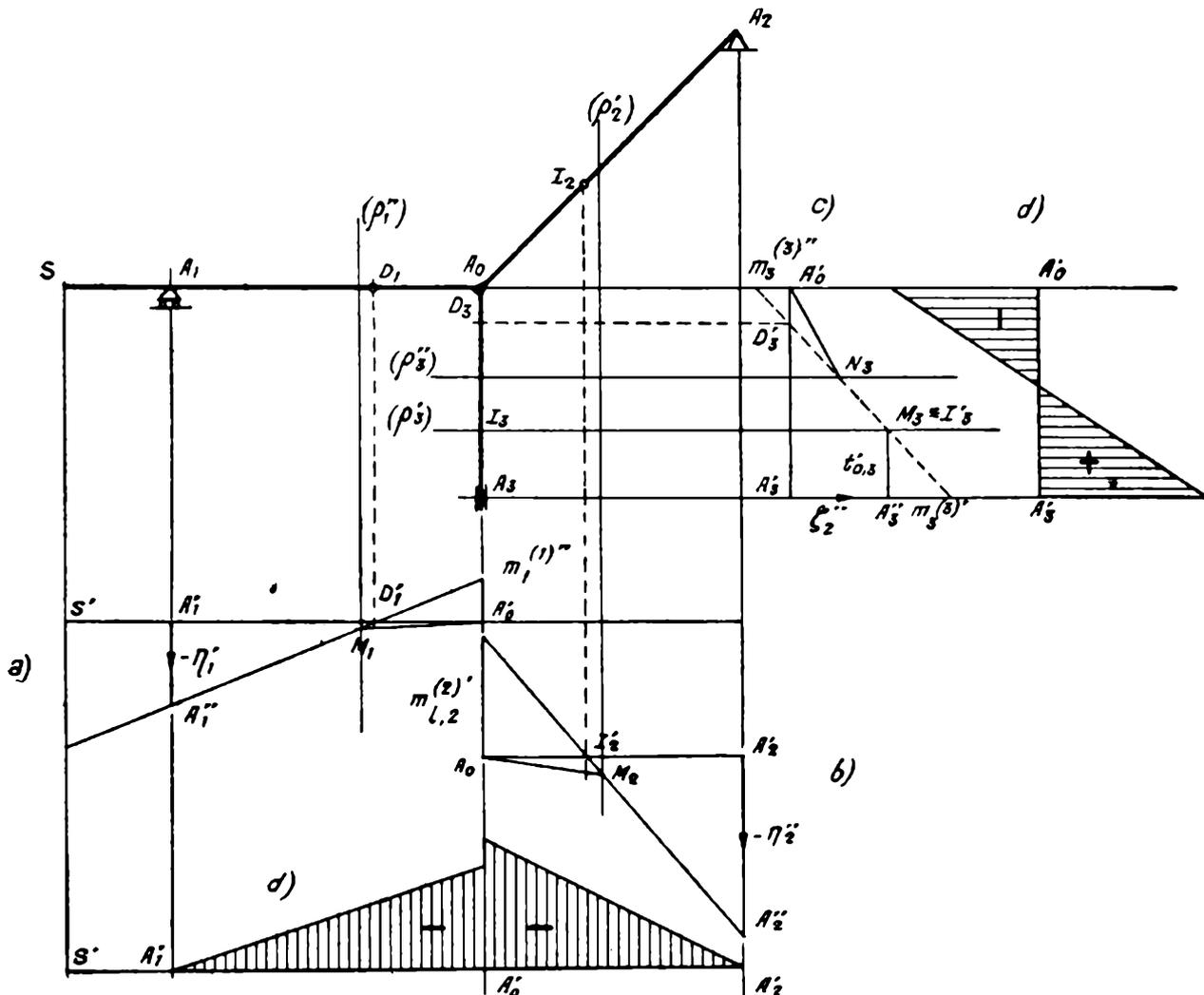


FIG. 183.

En la figura 183 b se ha llevado, en la misma escala, el desplazamiento

$$\overline{A'_2 A''_2} = -\eta'_2$$

y trazado el polígono de las tercias para la viga 2.

Se tiene

$$m^{(2)'}_{l,2} = -1,175 \text{ cm} \frac{1000 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}} = -1175 \cdot 10^{-6} \text{ m},$$

$$\mathcal{M}^{(2)'}_2 = \frac{m^{(2)'}_{l,2}}{m_{l,2}} = \frac{-1175 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{1135 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1}} = -1,38 \text{ tm},$$

$$\mathcal{M}^{(2)''}_1 = k^*_{12} \mathcal{M}^{(2)'}_2 = 0,189 (-1,38 \text{ tm}) = -0,261 \text{ tm},$$

$$\mathcal{M}^{(2)''}_3 = k^*_{32} \mathcal{M}^{(2)'}_2 = 0,812 (-1,38 \text{ tm}) = -1,12 \text{ tm},$$

$$\mathcal{M}^{(2)'}_3 = \alpha_{30} \mathcal{M}^{(2)''}_3 = 0,475 (-0,842 \text{ tm}) = -0,400 \text{ tm}.$$

Dar al punto  $A_2$  el desplazamiento horizontal —  $\zeta''_2$  equivale a dar al extremo  $A_3$  el  $\zeta''_2$  sin que gire su primer tangente. En la figura 183 c se ha llevado, en la misma escala, el desplazamiento

$$\overline{A'_3 A''_3} = \zeta''_2 = 950 \cdot 10^{-6} \text{ m.}$$

y construido el polígono de las tercias para el pilar.

Se tiene

$$m^{(3)'}_3 = 0,625 \text{ cm} \frac{1000 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}} = 625 \cdot 10^{-6} \text{ m},$$

$$m^{(3)''}_3 = -0,4 \text{ cm} \frac{1000 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{\text{cm}} = -400 \cdot 10^{-6} \text{ m},$$

$$\mathcal{M}^{(3)'}_3 = \frac{m^{(3)'}_3}{m_3} = \frac{625 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{180 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1}} = 3,47 \text{ tm},$$

$$\mathcal{M}^{(3)''}_3 = \frac{m^{(3)''}_3}{m_3} = \frac{-400 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{180 \cdot 10^{-6} \text{ t}^{-1}} = -2,22 \text{ tm},$$

$$\mathcal{M}^{(3)''}_1 = k^*_{13} \mathcal{M}^{(3)''}_3 = -0,541 (-2,22 \text{ tm}) = 1,20 \text{ tm},$$

$$\mathcal{M}^{(3)'}_2 = k^*_{23} \mathcal{M}^{(3)'}_3 = 0,461 (3,47 \text{ tm}) = 1,60 \text{ tm}.$$

Los momentos flectores extremos resultantes son

$$\mathcal{M}''_1 = \mathcal{M}^{(1)''}_1 + \mathcal{M}^{(2)''}_1 + \mathcal{M}^{(3)''}_1 = (-0,54 - 0,261 - 1,20) \text{ tm} = -2,00 \text{ tm},$$

$$\mathcal{M}'_2 = \mathcal{M}^{(1)'}_2 + \mathcal{M}^{(2)'}_2 + \mathcal{M}^{(3)'}_2 = (-0,0915 - 1,38 - 1,02) \text{ tm} = -2,49 \text{ tm},$$

$$\mathcal{M}''_3 = \mathcal{M}^{(1)''}_3 + \mathcal{M}^{(2)''}_3 + \mathcal{M}^{(3)''}_3 = (0,450 - 1,12 - 2,22) \text{ tm} = -2,89 \text{ tm},$$

$$\mathcal{M}'_3 = \mathcal{M}^{(1)'}_3 + \mathcal{M}^{(2)'}_3 + \mathcal{M}^{(3)'}_3 = (0,208 - 0,400 + 3,47) \text{ tm} = 3,27 \text{ tm}.$$

Con ellos se ha construido en la figura 183 d, el diagrama de momentos originado por la variación dada de temperatura.

232.°— Los esfuerzos tangenciales, constantes en cada pieza, son

$$\mathcal{T}_1 = \frac{\mathcal{M}'_1 - \mathcal{M}''_1}{l_1} = -\frac{\mathcal{M}''_1}{l_1} = -\frac{-2,00 \text{ tm}}{6 \text{ m}} = 0,333 \text{ t},$$

$$\mathcal{T}_2 = \frac{\mathcal{M}'_2 - \mathcal{M}''_2}{s_2} = \frac{\mathcal{M}'_2}{s_2} = \frac{-2,49 \text{ tm}}{7,07 \text{ m}} = -0,353 \text{ t},$$

$$\mathcal{T}_3 = \frac{\mathcal{M}'_3 - \mathcal{M}''_3}{h_3} = \frac{(3,27 + 2,89)}{4 \text{ m}} = 1,54 \text{ t}.$$

La reacción en  $A_1$  y las componentes de las reacciones en  $A_2$  y  $A_3$  son

$$R_1 = T_1 = 0,333 \text{ t},$$

$$H_3 = T_3 = 1,54 \text{ t},$$

$$H_2 = -H_3 = -1,54 \text{ t}.$$

$$V_2 = \frac{H_2 h_2 - M'_2}{l_2} = \frac{(-1,54 \text{ t} \times 5 \text{ m}) + 2,49 \text{ tm}}{5 \text{ m}} = -1,06 \text{ t}$$

$$V_3 = -(T_2 + V_2) = -(-0,353 - 1,06) \text{ t} = 1,413 \text{ t}.$$

Los esfuerzos normales, constantes en cada pieza, son

$$N_1 = 0$$

$$N_2 = \frac{1}{s_2} (l_2 H_2 - h_2 V_2) = \frac{1}{7,07 \text{ m}} (5 \text{ m} (-1,54 \text{ t}) - 5 \text{ m} (-1,06 \text{ t})) = -3,4 \text{ t},$$

$$N_3 = V_3 = 1,413 \text{ t}.$$



---

**Se terminó de imprimir el 13 de febrero de 1942, en los  
Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-25 - (21) 1733 - Bs. Aires**

---

---

Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO"  
LA MADRID 321-325 - 21-1733 - BUENOS AIRES

---