

OBSERVATORIO ASTRONOMICO DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

DIRECTOR INTERINO PROF. ING. SIMON GERSHANIK

SERIE ASTRONOMICA - Tomo XXXIII

SOLUCIONES CASI ASINTOTICAS
EN EL PROBLEMA DE LOS TRES CUERPOS

POR

REYNALDO P. CESCO



30 MAY 1968

LA PLATA

1966

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

PRESIDENTE

DR. SANTIAGO GOROSTIAGUE

VICEPRESIDENTE

DR. CÉSAR A. BUSTOS

SECRETARIO TÉCNICO

ABOGADO ALBERTO D. TETTAMANTI

SECRETARIO ADMINISTRATIVO

SR. ELIOSER CIRO ROSSOTTI

GUARDASELLOS

DR. HERBERTO PRIETO DÍAZ

SOLUCIONES CASI ASINTOTICAS EN EL PROBLEMA DE LOS TRES CUERPOS

Por

R. P. CESCO

Quasi Asymptotic Solutions in the Problem of Three Bodies, by R. P. Cesco. — It is the object of this paper to give a numerical *quasi asymptotic* solution of a particular case of the problem of three bodies, that is, the equations giving approximate positions of the bodies for unusually large values of the time.

We have chosen a hyperbolic-elliptic * type of this problem (according to the Chazy's classical classification) because in this case the osculating elements of the bodies tend to finite limits, as $t \rightarrow \infty$, more rapidly than in the parabolic-elliptic type. But our simple method of finding approximate values of those limits also applies to this case. In the hyperbolic, hyperbolic-parabolic and parabolic types it is expected that this method may be useful to find the *asymptotic* solutions. In the most important case, i.e., in the elliptic type this accurate model might shed some light on the general theory of the problem of three (or more) bodies. After performing some preliminary computations on results obtained by F. López García [5], a simpler numerical example was chosen and solved by approximate analytical continuations [6] by taking $N = 60$, $\lambda = 5$, $\kappa \leq 0.5$ and a tolerable error in the known integrals less than 10^{-12} .

Let (x_i, y_i) denote the planar heliocentric coordinates of the point masses $m_i = 0.001$ ($i = 1, 2$) with the "sun" $m_0 = 0.998$ as origin, and let

$$\begin{array}{cccc} x_1 = -1 & y_1 = 0 & x_2 = 1.5 & y_2 = 0 \\ \dot{x}_1 = 0 & \dot{y}_1 = -1.005 & \dot{x}_2 = 0 & \dot{y}_2 = 1.25 \end{array}$$

be the initial conditions, the unit of mass, time and distance being chosen such that the gravitational constant be equal to one.

The differential equations of motion can be written in the form (S), (see below), where the functions X , are related to the functions x_i, y_i and its derivatives \dot{x}_i, \dot{y}_i by means of the formulae (T). By means of the recursion formulae (U) the coefficients of the Taylor series solution of the system (S), can be found. The functions E_1 (from the energy integral), E_2 (from the angular momentum vector), E_3, E_4 and E_5 were used for testing the accuracy of the computations.

The numerical results were obtained on the IBM 1620 of the University of La Plata on the basis of a computer program (included in this work) prepared by Dr. J. Gordon. For each t_* of the interval $0(0.5) 100$, the four orbital elements $a_1, e_1, \bar{\omega}_1$ and $t_*^{(1)}$ of the point mass m_1 , moving for $t > t_*$, under the attraction of the "sun" m_0 alone, and the four orbital elements $a_2, e_2, \bar{\omega}_2$ and $t_*^{(2)}$ of m_2 , moving for $t > t_*$, under the attraction of the point mass $m_0 + m_1$ concentrated in the center of mass of m_0 and m_1 were computed by the standard formulae

* In the literature, this type of the problem of three bodies is attributed to K. Bohlin [1]. See R. Vernic [2, 11], [3, 63]. However, it was already considered by H. Poincaré [4, Ch. XXVI, 168].

of the problem of two bodies. The approximate radii of convergence of the Taylor series expansions of the functions $X_\nu(t)$, ($\nu = 1, 2, \dots, 7$) were also computed at each new approximate analytical continuation. By means of these radii an approximate localization of the imaginary singular points of the solution of the system (S), nearest to the real axis of the complex plane t , can be drawn. Obviously, these singular points approach, for large values of $\text{Re}t$, nearer and nearer to the Moultonian singular points which, as it is well known, represent the imaginary collisions between m_0 and m_1 in the limit problem of these two bodies. By means of the minima of the approximate radii, an approximate determination of the region where the solution of (S) is analytic, can also be drawn.

After performing forty approximate analytical continuations, approximate values of the limits of the osculating elements a_1 , e_1 , a_2 and e_2 were found to six decimal places.

Since the eccentricity e_1 was chosen very small, 15 or 20 new steps were needed to find approximate values of $\lim \bar{\omega}_1$ and $\lim t_\pi^{(1)}$ to the same accuracy.

Table I contains the osculating elements for each t_ν and in the last line the values adopted as limit values of them. These approximate values of the limit problem were finally tested by means of the functions E_1 and E_2 , by assuming the osculating elements to be constant for t large enough, in which case one obtains asymptotically,

$$\begin{aligned} 10^3 E_1 &= 0.4995 \bar{a}_2 - 0.4990 \bar{a}_1 + 0.3775\ 0085 \sim 2.10^{-7} \\ E_2 &= 0.998999 \sqrt{0.999 \bar{a}_1 (1 - \bar{e}_1^2)} + 0.999 \sqrt{\bar{a}_2 (\bar{e}_2^2 - 1)} \\ &\sim 2.8798\ 8750 \sim -10^{-5} \end{aligned}$$

where $\bar{\sigma}$ denotes the value adopted as $\lim \sigma(t) = \sigma$.

Fig. 2 shows the oscillations of the periods of m_1 (obtained to nine decimal places), up and down of its mean value $\bar{T}_1 = 6.38931\ 9545$. This mean value gives an approximate value of $\lim T_1(t) = T_1$ with an error less than 5.10^{-9} . Thus, both the mean anomaly and the eccentric anomaly can be computed for values of the time of the order of 1000 years—say $t_0 = 6400$ —with an error of the order of $1''$. If $t = 64000$, the error in the anomalies is of the order of $10''$, and so on.

In fact, since $n_1 T_1 = \bar{n}_1 \bar{T}_1 = 2\pi$ and

$$t_0 = 1001 T_1 + \tau_0 = 1001 \bar{T}_1 + \bar{\tau}_0 = 1001 T_1 + \bar{\tau}_0 \pm 5.005 \cdot 10^{-6},$$

we have

$$\begin{aligned} |M_1 - \bar{M}_1| &= |n_1(1001 T_1 + \tau_0 - t_\pi^{(1)}) - \bar{n}_1(1001 \bar{T}_1 + \bar{\tau}_0 - \bar{t}_\pi^{(1)})| \\ &= |n_1(\tau_0 - t_\pi^{(1)}) - \bar{n}_1(\bar{\tau}_0 - \bar{t}_\pi^{(1)})| \sim 5 \cdot \bar{n}_1 \cdot 10^{-6} + \bar{n}_1 |t_\pi - \bar{t}_\pi^{(1)}| \sim 1''. \end{aligned}$$

1. — Estimulado por recientes trabajos sobre perturbaciones de elementos hiperbólicos y por algunos cálculos preliminares realizados sobre resultados obtenidos por F. López García en [5], he creído de utilidad aplicar nuevamente el método de prolongaciones analíticas aproximadas [6] a un caso hiperbólico-elíptico del problema de los tres cuerpos—conforme a la clásica clasificación de Chazy—, con el objeto de determinar valores aproximados de los límites a los cuales tienden, obviamente, los elementos osculadores hiperbólicos y elípticos, para $t \rightarrow \infty$, y por tanto también la solución *casi asintótica*, es decir las ecuaciones mediante las cuales pueden obtenerse posiciones aproximadas de los cuerpos en movimiento para valores inusitadamente grandes del tiempo.

El sencillo método utilizado para hallar dichos valores aproximados se puede aplicar también al tipo parabólico-elíptico del problema de los tres cuerpos, si bien en este caso la convergencia del proceso límite es en

general menor, por ser más lento el alejamiento asintótico del cuerpo perturbador. En los tipos hiperbólico, hiperbólico-parabólico y parabólico cabe esperar que el método sea de utilidad para hallar las soluciones *asintóticas*. En el caso más importante, desde el punto de vista práctico, o sea en el caso elíptico, la aplicación de este modelo muy preciso podría acaso arrojar alguna luz sobre la teoría general del problema de tres o más cuerpos, tema sobre el cual desearíamos volver en un futuro trabajo.

2. — Como ejemplo hemos tomado uno con masas perturbadoras pequeñas: $m_1 = m_2 = 0.001$ y un cuerpo central de masa preponderante $m_0 = 0.998$, eligiendo las condiciones iniciales

$$\begin{array}{cccc} x_1^0 = -1 & y_1^0 = 0 & x_2^0 = 1.5 & y_2^0 = 0 \\ \dot{x}_1^0 = 0 & \dot{y}_1^0 = -1.005 & \dot{x}_2^0 = 0 & \dot{y}_2^0 = 1.25 \end{array}$$

para $t = 0$, donde se indican con x_i e y_i las coordenadas heliocéntricas planas de m_i ($i = 1, 2$), con origen en el "sol" m_0 , constante gravitatoria igual a uno, de tal modo que la excentricidad osculadora de m_1 fuese del orden del centésimo.

Las ecuaciones diferenciales de movimiento pueden escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \ddot{X}_1 &= -0.999X_{11} + 0.001(X_{15} - X_{13}) \\ \ddot{X}_2 &= -0.999X_{12} + 0.001(X_{16} - X_{14}) \\ \ddot{X}_3 &= -0.999X_{13} - 0.001(X_{15} + X_{11}) \\ \ddot{X}_4 &= -0.999X_{14} - 0.001(X_{16} + X_{12}) \end{aligned} \quad (S)$$

donde

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 = x_1 & X_2 = y_1 & X_3 = x_2 & X_4 = y_2 & & & \\ X_5 = 1/r_1^3 & X_6 = 1/r_2^3 & X_7 = 1/\Delta^3 & & & & \\ X_8 = r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 & X_9 = r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 & X_{10} = \Delta^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 & & & & \\ X_{11} = X_1 X_5 & X_{12} = X_2 X_5 & X_{13} = X_3 X_6 & X_{14} = X_4 X_6 & & & \\ X_{15} = (X_3 - X_1) X_7 & X_{16} = (X_4 - X_2) X_7 & X_{17} = \dot{x}_1 & X_{18} = \dot{y}_1 & X_{19} = \dot{x}_2 & X_{20} = \dot{y}_2 & \end{array} \quad (T)$$

Los coeficientes de la solución del sistema (S)

$$X_\nu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(\nu)} t^{n-1} \quad (\nu = 1, 2, \dots, 20),$$

se calculan por el método de los coeficientes indeterminados de Newton-Cauchy, obteniéndose las siguientes fórmulas de recurrencia:

$$\begin{aligned} a_n^{(8)} &= \sum_{\mu=1}^n (a_\mu^{(1)} a_{n-\mu+1}^{(1)} + a_\mu^{(2)} a_{n-\mu+1}^{(2)}) \\ a_n^{(9)} &= \sum_{\mu=1}^n (a_\mu^{(3)} a_{n-\mu+1}^{(3)} + a_\mu^{(4)} a_{n-\mu+1}^{(4)}) \\ a_n^{(10)} &= \sum_{\mu=1}^n [(a_\mu^{(3)} - a_\mu^{(1)}) (a_{n-\mu+1}^{(3)} - a_{n-\mu+1}^{(1)}) + (a_\mu^{(4)} - a_\mu^{(2)}) (a_{n-\mu+1}^{(4)} - a_{n-\mu+1}^{(2)})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=1}^n [2\mu a_{\mu+1}^{(5)} a_{n-\mu+1}^{(8)} + 3(n-\mu+1) a_{\mu}^{(5)} a_{n-\mu+2}^{(8)}] &= 0 \\
\sum_{\mu=1}^n [2\mu a_{\mu+1}^{(6)} a_{n-\mu+1}^{(9)} + 3(n-\mu+1) a_{\mu}^{(6)} a_{n-\mu+2}^{(9)}] &= 0 \\
\sum_{\mu=1}^n [2\mu a_{\mu+1}^{(7)} a_{n-\mu+1}^{(10)} + 3(n-\mu+1) a_{\mu}^{(7)} a_{n-\mu+2}^{(10)}] &= 0 \\
a_n^{(11)} &= \sum_{\mu=1}^n a_{\mu}^{(1)} a_{n-\mu+1}^{(5)} \\
a_n^{(12)} &= \sum_{\mu=1}^n a_{\mu}^{(2)} a_{n-\mu+1}^{(5)} \\
a_n^{(13)} &= \sum_{\mu=1}^n a_{\mu}^{(3)} a_{n-\mu+1}^{(6)} \\
a_n^{(14)} &= \sum_{\mu=1}^n a_{\mu}^{(4)} a_{n-\mu+1}^{(6)} \\
a_n^{(15)} &= \sum_{\mu=1}^n (a_{\mu}^{(3)} - a_{\mu}^{(1)}) a_{n-\mu+1}^{(7)} \\
a_n^{(16)} &= \sum_{\mu=1}^n (a_{\mu}^{(4)} - a_{\mu}^{(2)}) a_{n-\mu+1}^{(7)} \\
a_n^{(17)} &= n a_{n+1}^{(1)} \\
a_n^{(18)} &= n a_{n+1}^{(2)} \\
a_n^{(19)} &= n a_{n+1}^{(3)} \\
a_n^{(20)} &= n a_{n+1}^{(4)} \\
n(n+1) a_{n+2}^{(1)} &= -0.999 a_n^{(11)} + 0.001 (a_n^{(15)} - a_n^{(13)}) \\
n(n+1) a_{n+2}^{(2)} &= -0.999 a_n^{(12)} + 0.001 (a_n^{(16)} - a_n^{(14)}) \\
n(n+1) a_{n+2}^{(3)} &= -0.999 a_n^{(13)} - 0.001 (a_n^{(15)} + a_n^{(11)}) \\
n(n+1) a_{n+2}^{(4)} &= -0.999 a_n^{(14)} - 0.001 (a_n^{(16)} + a_n^{(12)})
\end{aligned} \tag{U}$$

y la verificación de los cálculos mediante las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}
10^3 E_1 &= 0.4995(X_{17}^2 + X_{18}^2 + X_{19}^2 + X_{20}^2) - 10^{-3}(X_{17}X_{19} + X_{18}X_{20}) \\
&\quad - \frac{0.998}{\sqrt{X_8}} - \frac{0.998}{\sqrt{X_9}} - \frac{0.001}{\sqrt{X_{10}}} + 0.37750\ 08458\ 33333 \\
E_2 &= 0.999(X_1X_{18} - X_2X_{17} + X_3X_{20} - X_4X_{19}) \\
&\quad + 0.001(X_4X_{17} - X_1X_{20} + X_2X_{19} - X_3X_{18}) - 2.87987\ 75000 \\
E_3 &= X_5^2 X_8^3 - 1 \\
E_4 &= X_6^2 X_9^3 - 1 \\
E_5 &= X_7^2 X_{10}^3 - 1
\end{aligned}$$

Los elementos elípticos osculadores de m_1 atraído por m_0 , en el problema de estos dos cuerpos, se han calculado mediante las fórmulas:

$$1/a_1 = 2/r_1 - V_1^2/0.999 \quad (1)$$

a_1 : semi-eje mayor, donde

$$r_1 = \sqrt{X_8} \quad V_1^2 = X_{17}^2 + X_{18}^2$$

Excentricidad y anomalía excéntrica:

$$e_1 = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}, \quad u_1 = \text{arc tg } \beta_1/\alpha_1$$

donde

$$\alpha_1 = e_1 \cos u_1 = 1 - r_1/a_1; \quad \beta_1 = e_1 \sin u_1 = \sqrt{1/0.999 a_1} (X_1 X_{17} + X_2 X_{18})$$

Instante de pasaje por el perihelio:

$$t_{\pi}^{(1)} = t - \frac{u_1 - \beta_1}{n_1} \quad \text{siendo} \quad n_1 = \frac{1}{a_1} \sqrt{0.999/a_1}$$

Longitud del perihelio:

$$\tilde{\omega}_1 = \text{arc tg } X_2/X_1 - 2 \text{ arc tg } \theta_1$$

donde

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}} \frac{\beta_1}{e_1 + \alpha_1}$$

Los elementos osculadores de m_2 atraído por el punto masa $m_0 + m_1$ concentrado en el baricentro de m_0 y m_1 , se han calculado mediante las siguientes fórmulas:

Semi-eje (en valor absoluto)

$$1/a_2 = V_2^2 - 2/r_2^* \quad n_2 = 1/a_2 \sqrt{a_2} \quad (2)$$

donde

$$\begin{aligned} r_2^* &= \sqrt{X_{21}^2 + X_{22}^2} & V_2^2 &= X_{23}^2 + X_{24}^2 \\ X_{21} &= X_3 - X_1/999 & X_{22} &= X_4 - X_2/999 \\ X_{23} &= X_{19} - X_{17}/999 & X_{24} &= X_{20} - X_{18}/999 \end{aligned} \quad (3)$$

Excentricidad y anomalía excéntrica (en módulo)

$$e_2 = \sqrt{\alpha_2^2 - \beta_2^2}; \quad u_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha_2 + \beta_2}{\alpha_2 - \beta_2}$$

donde

$$\alpha_2 = e_2 \text{ ch } u_2 = 1 + r_2/a_2; \quad \beta_2 = e_2 \text{ sh } u_2 = \sqrt{1/a_2} (X_{21} X_{23} + X_{22} X_{24})$$

Instante de pasaje por el perihelio:

$$t_{\pi}^{(2)} = t - (\beta_2 - u_2)/n_2$$

Longitud del perihelio:

$$\tilde{\omega}_2 = \text{arc tg } X_{22}/X_{21} - 2 \text{ arc tg } \theta_2$$

siendo

$$\theta_2 = \sqrt{\frac{e_2 + 1}{e_2 - 1}} \frac{\exp u_2 - 1}{\exp u_2 + 1} \quad \exp u_2 = \sqrt{\frac{\alpha_2 + \beta_2}{\alpha_2 - \beta_2}}$$

3. — Los resultados numéricos han sido obtenidos con la computadora IBM 1620 de la Universidad de La Plata conforme a un programa realizado por mi estimado amigo el Prof. Dr. Jacobo Gordon, quien ha tenido la gentileza de agregarlo a este trabajo.

Con 60 prolongaciones analíticas aproximadas, tomando $N = 60$, $\lambda = 5$, $\kappa \leq 0.5$ y error menor que 10^{-12} en las integrales conocidas, se han calculado para cada t_v del intervalo $t = 0(0.5)100$, los elementos osculadores de m_1 y m_2 . En cada nueva prolongación se han calculado también los radios aproximados de convergencia de los desarrollos Taylorianos de las funciones $X_\nu(t)$, ($\nu = 1, 2, \dots, 7$) mediante los cuales puede lograrse una localización aproximada de los puntos singulares de la solución del sistema (S) más próximos al eje real del plano complejo t . Obviamente, estos puntos singulares se aproximan cada vez más, para valores grandes de $Re t$, a los puntos singulares Moultonianos correspondientes a las colisiones imaginarias de m_0 con m_1 en el problema límite de estos dos cuerpos (Fig. 1).

La Tabla I contiene, para cada t_v , los elementos osculadores de m_1 y m_2 y en la última línea los valores que hemos adoptado como valores límites de dichos elementos. Estos valores aproximados del problema límite han sido finalmente verificados por medio de las funciones E_1 y E_2 , suponiendo que para t suficientemente grande los elementos osculadores son constantes, en cuyo caso se obtiene asintóticamente,

$$10^3 E_1 = 0.4995/\bar{a}_2 - 0.4990/\bar{a}_1 + 0.37750085 \sim 2.10^{-7} \quad (4)$$

$$E_2 = 0.998999 \sqrt{0.999\bar{a}_1(1 - \bar{e}_1^2)} + 0.999 \sqrt{\bar{a}_2(\bar{e}_2^2 - 1)} - 2.87987750 \sim -10^{-5} \quad (5)$$

donde se indica con $\bar{\sigma}$ el valor que hemos adoptado como aproximación del $\lim \sigma(t) = \sigma$. En efecto, se tiene asintóticamente $1/\Delta \sim 1/r_2$ y suponiendo $\sigma(t) \equiv \bar{\sigma}$ para $t > \tau$ resulta, luego de reemplazar en E_1 y E_2 , X_{19} y X_{20} por sus valores obtenidos de (3); $X_{17}^2 + X_{18}^2$ por su valor (1) y $X_{23}^2 + X_{24}^2$ por su valor (2) y de simplificar,

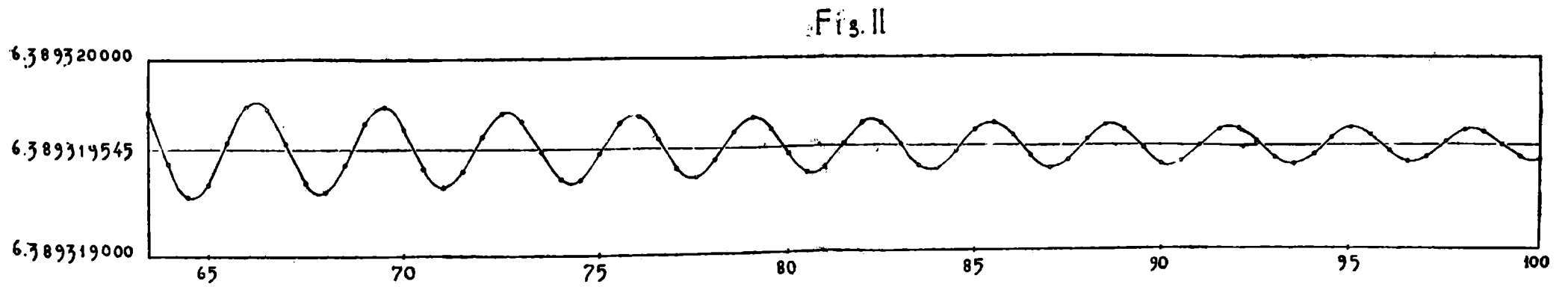
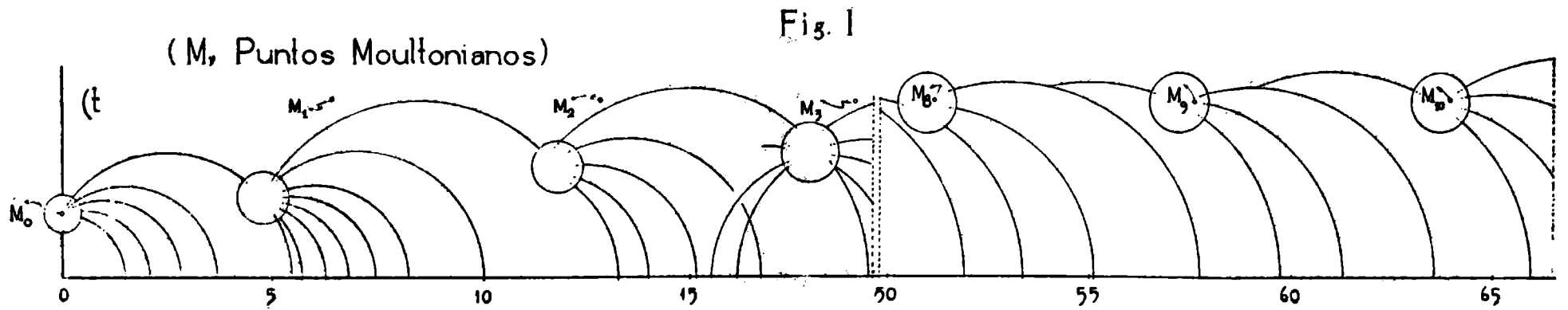
$$10^3 E_1 = 0.4995/\bar{a}_2 - (\frac{1}{2} - 10^{-3})/\bar{a}_1 + 0.37750085$$

es decir (4), y

$$E_2 = (0.999 - 10^{-6}/0.999) (X_1 X_{18} - X_2 X_{17}) + 0.999 (X_{21} X_{23} - X_{22} X_{24}) - 2.87987750,$$

o sea (5), ya que

$$X_1 X_{18} - X_2 X_{17} = \sqrt{0.999\bar{a}_1(1 - \bar{e}_1^2)} \quad \text{y} \quad X_{21} X_{23} - X_{22} X_{24} = \sqrt{\bar{a}_2(\bar{e}_2^2 - 1)}$$



En la Fig. 2 se han representado las oscilaciones de los períodos de m_1 , obtenidos directamente con 9 cifras decimales, por encima y por debajo del valor medio $\bar{T}_1 = 6.38931\ 9545$. Este valor medio puede tomarse como valor aproximado del $\lim T_1(t) = T_1$, con error menor que $5 \cdot 10^{-9}$. Es pues posible determinar la anomalía media $M_1 = n_1(t - t_\pi^{(1)})$ de m_1 , y por tanto también la anomalía excéntrica, para valores del tiempo del orden de 1000 años, digamos $t_0 = 6400$, con error del orden de $1''$. Si $t = 64000$, el error en las anomalías será del orden de $10''$, etc.

En efecto, puesto que se tiene

$$n_1 T_1 = \bar{n}_1 \bar{T}_1 = 2\pi$$

y

$$t_0 = 1001 T_1 + \tau_0 = 1001 \bar{T}_1 + \bar{\tau}_0 = 1001 T_1 + \bar{\tau}_0 \pm 5.005 \cdot 10^{-6},$$

resulta

$$\begin{aligned} |M_1 - \bar{M}_1| &= |n_1(1001 T_1 + \tau_0 - t_\pi^{(1)}) - \bar{n}_1(1001 \bar{T}_1 + \bar{\tau}_0 - \bar{t}_\pi^{(1)})| \\ &= |n_1(\tau_0 - t_\pi^{(1)}) - \bar{n}_1(\bar{\tau}_0 - \bar{t}_\pi^{(1)})| \sim 5 \cdot \bar{n}_1 \cdot 10^{-6} + \bar{n}_1 |t_\pi^{(1)} - \bar{t}_\pi^{(1)}| \sim 1''. \end{aligned}$$

Observatorio Astronómico de La Plata, Marzo 26 de 1966.

REFERENCIAS

1. — BOHLIN, K.: *Über ein zeckmässiges Beispiel der Bewegung im allgemeinen Dreikörperproblem*. Astr. Jakttagels. Unders. Stockholms Observ. 10, 1923, N° 11.
2. — VERNIĆ, R.: *Diskussion der Sundmanschen Lösung des Dreikörperproblems*, Südslavische Ak. der Wissenschaften und Künste, Zagreb, 1954, 63.
3. — — *Periodische und symmetrische Lösungen des Mehrkörperproblems*, *ibid.*, 1961, 11.
4. — POINCARÉ, H.: *Les Méth. Nouv. de la Mécanique Céleste*, Vol. III, Chap. XXVI, 168.
5. — LÓPEZ GARCÍA, F.: *Extensión de la tabla de Zunkley por prolongaciones analíticas aproximadas*, Comisión de Investigación Científica de la Provincia de Buenos Aires, 1966.
6. — CESCO, R.P.: *Solución del problema de los tres cuerpos por prolongaciones analíticas aproximadas*, Obs. Astronómico de La Plata, Serie Astronómica, XXXI, 1965.

PROGRAMACION DE COMPUTOS

Por

JACOBO GORDON

En vista del considerable tiempo de máquina que debía insumir la realización del trabajo, hemos concebido su programación de tal modo que su ejecución fuera posible en etapas de una o de varias prolongaciones, según lo aconsejaban las circunstancias.

En la sentencia *Dimensión* hemos reservado en la matriz A(20,61) las posiciones de memoria necesarias para calcular todos los coeficientes Taylorianos $a_n^{(v)}$, los cuales nos permitirán tabular después las funciones $X_v(t)$, solución del sistema (S).

Mediante las instrucciones *Read 1* y *Read 2* hemos leído un coeficiente *Cap*, el instante inicial y las condiciones iniciales: posición y velocidad. El coeficiente *Cap* se ha mantenido constante durante todo el trabajo; pero se dejó abierta la posibilidad de modificarlo si se hubiese deseado.

Después de calcular los primeros coeficientes de los desarrollos de las funciones hemos procedido a calcular, en el rango que abarca el *DO 100*, mediante las fórmulas de recurrencia (U), todos los coeficientes $a_n^{(v)}$, manteniendo en lo posible la notación del autor. A continuación hemos hecho calcular valores aproximados de los radios de convergencia de los desarrollos de las funciones $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ y X_7 , haciéndolos imprimir. Al menor de estos números, multiplicado por *CAP*, lo hemos indicado con *T1*.

El propósito del trabajo era el de tabular las coordenadas y los elementos osculadores con un paso tabular $H = 0.5$, en el caso en que $T1 \geq 0.5$, y de calcular solamente las coordenadas en los puntos intermedios, con paso tabular $H = 0.1$, si $T1 < 0.5$; de ahí las instrucciones de previsión 114 y 115.

Con las sentencias *DO 89* y *DO 88* se tabulan las funciones X_v con cuyos valores se calculan después las funciones E_v que se han usado para verificar todo el proceso. De dichas funciones se han hecho imprimir X_1, X_2, X_3 y X_4 , las cuales dan las posiciones de los cuerpos en el instante considerado, mediante el *Print 76*.

A continuación se calculan los elementos osculadores de los dos cuerpos mediante las fórmulas dadas, haciéndolos imprimir mediante las instrucciones *Print 500* y *Print 501*.

Cumplida una prolongación, mediante la llave de lógica N° 1 hacemos perforar las nuevas condiciones iniciales, si el programa debe sacarse de la computadora, instrucción 67, o bien, mediante la instrucción 65 tomamos las nuevas condiciones iniciales y reiteramos el proceso mediante el *GO TO 4*, entrando de nuevo en el *DO 100*.

Si alguna de las funciones E_v supera la tolerancia prefijada, las condiciones iniciales que deben tomarse son las que corresponden al instante inmediatamente anterior al calculado. Esta posibilidad se logra mediante el *DO 80* como puede verse observando el *DO 59*, instrucción N° 78 y el *DO 77*. En este caso también, con la llave de lógica N° 2 podemos hacer perforar las condiciones iniciales en el caso de interrumpirse el programa, instrucción 81, o bien efectuar otras prolongaciones comenzando en la instrucción N° 4.

*1504

```

C  PROGRAMA A 149
   DIMENSION A(20,61), X(11), E(5), P(4), V(4)
   READ 1, CAP, TI
  1  FORMAT (F5.2, F10.2)
     READ2, A(1,1), A(2,1)
     READ2, A(3,1), A(4,1)
     READ2, A(17,1), A(18,1)
     READ2, A(19,1), A(20,1)
  2  FORMAT (2E21.15)
  4  A(1,2) = A(17,1)
     A(2,2) = A(18,1)
     A(3,2) = A(19,1)
     A(4,2) = A(20,1)
     A(8,1) = A(1,1)*A(1,1) + A(2,1)*A(2,1)
     A(9,1) = A(3,1)*A(3,1) + A(4,1)*A(4,1)
     A(10,1) = (A(3,1) - A(1,1))*(A(3,1) - A(1,1)) + (A(4,1) - A(2,1))*(A(4,1) - A(2,1))
     A(5,1) = 1./(A(8,1)**1.5)
     A(6,1) = 1./(A(9,1)**1.5)
     A(7,1) = 1./(A(10,1)**1.5)
     A(11,1) = A(1,1)*A(5,1)
     A(12,1) = A(2,1)*A(5,1)
     A(13,1) = A(3,1)*A(6,1)
     A(14,1) = A(4,1)*A(6,1)
     A(15,1) = (A(3,1) - A(1,1))*A(7,1)
     A(16,1) = (A(4,1) - A(2,1))*A(7,1)
     A(8,2) = 2.*A(1,1)*A(1,2) + 2.*A(2,1)*A(2,2)
     A(9,2) = 2.*A(3,1)*A(3,2) + 2.*A(4,1)*A(4,2)
     A(10,2) = 2.*(A(3,1) - A(1,1))*(A(3,2) - A(1,2)) + 2.*(A(4,1) - A(2,1))*(A(1,2) - A(2,2))
     A(5,2) = - 1.5*A(5,1)*A(8,2)/A(8,1)
     A(6,2) = - 1.5*A(6,1)*A(9,2)/A(9,1)
     A(7,2) = - 1.5*A(7,1)*A(10,2)/A(10,1)
     DO100N = 3,61
     N3 = N + 1
     K = N - 2
     N1 = N - 1
     C1 = N1
     C = K*N1
     C = 1./C
     A(1,N) = (-0.999*A(11,K) + 0.001*(A(15,K) - A(13,K))) * C
     A(2,N) = (-0.999*A(12,K) + 0.001*(A(16,K) - A(14,K))) * C
     A(3,N) = (-0.999*A(13,K) - 0.001*(A(15,K) + A(11,K))) * C
     A(4,N) = (-0.999*A(14,K) - 0.001*(A(16,K) + A(12,K))) * C
     DO101M = 17,20
     M1 = M - 16
  101 A(M,N1) = C1*A(M1,N)
     DO102M = 5,10
  102 A(M,N) = 0
     DO99J = 1,N
     N2 = N3 - J
     A(8,N) = A(8,N) + A(1,J)*A(1,N2) + A(2,J)*A(2,N2)
     A(9,N) = A(9,N) + A(3,J)*A(3,N2) + A(4,J)*A(4,N2)
  99  A(10,N) = A(10,N) + (A(3,J) - A(1,J))*(A(3,N2) - A(1,N2)) + (A(4,J) - A(2,J))*(A(4,N2) - A(2,N2))
     DO98M = 5,7
     M1 = M + 3
     DO98J = 1,N1
     C = N - J
     N2 = N3 - J
  98  A(M,N) = A(M,N) + C*A(M,J)*A(M1,N2)
     DO103M = 5,7
  103 A(M,N) = - 1.5*A(M,N)

```

```

DO97M = 5,7
X(M) = 0
M1 = M + 3
DO97 J = 1,K
N4 = J + 1
N2 = N - J
C = J
97 X(M) = X(M) + C*A(M,N4)*A(M1,N2)
A(11,61) = 1./(C1*A(8,1))
A(12,61) = 1./(C1*A(9,1))
A(13,61) = 1./(C1*A(10,1))
DO104M = 5,7
M3 = M + 6
104 A(M,N) = (A(M,N) - X(M))*A(M3,61)
DO1020M = 11,16
1020 A(M,N1) = 0
DO96J = 1,N1
N2 = N - J
A(11,N1) = A(11,N1) + A(1,J)*A(5,N2)
A(12,N1) = A(12,N1) + A(2,J)*A(5,N2)
A(13,N1) = A(13,N1) + A(3,J)*A(6,N2)
A(14,N1) = A(14,N1) + A(4,J)*A(6,N2)
A(15,N1) = A(15,N1) + (A(3,J) - A(1,J))*A(7,N2)
96 A(16,N1) = A(16,N1) + (A(4,J) - A(2,J))*A(7,N2)
100 CONTINUE
N3 = 0
L = 57
K = 7
J = 1
N2 = 61
38 DO107I = J,K
NB = L
GRAN = ABS(A(I,L))
M = I + N3
DO109N = 58,N2
IF(GRAN - ABS(A(I,N)))10, 10, 109
10 GRAN = ABS(A(I,N))
NB = N
109 CONTINUE
C = NB - 1
R = LOG(GRAN)/C
X(M) = EXP(R)
R = 1./X(M)
107 PRINT111,I,R
111 FORMAT(2HR(13,2H) = E14.8)
IF(J - 1)13, 199, 13
199 J = 17
K = 20
N2 = 60
N3 = - 9
GO TO 38
13 GRAN = X(1)
DO113M = 2,11
IF(GRAN - X(M))23, 113, 113
23 GRAN = X(M)
113 CONTINUE
T1 = 1./GRAN
T1 = T1*CAP
IF(T1 - 0.5)114, 115, 115
114 H = 0.1
GO TO 91
115 H = 0.5
91 T = H
701 DO90I = 1,11
90 X(I) = 0
DO89J = 1,10

```



```

DO89I = 1,61
M = 62 - I
89 X(J) = -X(J)*T + A(J,M)
DO88J = 17,20
A(J,61) = 0
DO88I = 1,60
M = 61 - I
88 A(J,61) = A(J,61)*T + A(J,M)
C = A(17,61)*A(17,61) + A(18,61)*A(18,61) + A(19,61)*A(19,61) + A(20,61)*A(20,61)
C1 = (A(17,61)*A(19,61) + A(18,61)*A(20,61))*0.001
R = 0.998/SQRT(X(8)) - 0.998/SQRT(X(9)) - 0.001/SQRT(X(10)) + 0.377500845 83333333333
E(1) = (0.4995*C - C1 + R)*0.001
C = X(1)*A(18,61) - X(2)*A(17,61) + X(3)*A(20,61) - X(4)*A(19,61)
C1 = X(4)*A(17,61) - X(1)*A(20,61) + X(2)*A(19,61) - X(3)*A(18,61)
E(2) = 0.999*C + 0.001*C1 - 2.8798775
E(3) = X(5)*X(5)*X(8)*X(8)*X(8) - 1
E(4) = X(6)*X(6)*X(9)*X(9)*X(9) - 1
E(5) = X(7)*X(7)*X(10)*X(10)*X(10) - 1
DO80I = 1,5
IF(ABS(E(I)) - 10.E - 11)80, 80, 78
80 CONTINUE
DO77I = 1,4
P(I) = X(I)
77 V(I) = A(I + 16,61)
TR = T + TI
PRINT76,TR,X(1),X(2),X(3),X(4)
76 FORMAT(F9.2,4(2XE16.10))
PRINT43,E(1),E(2),E(3),E(4),E(5)
43 FORMAT(5(3XE13.7))
IF(T1 - 0.5)33, 333, 333
33 T = T + H
GO TO 141
333 R1 = SQRT(X(8))
V1 = A(17,61)*A(17,61) + A(18,61)*A(18,61)
VA = 2./R1 - V1/0.999
S1 = VA*SQRT(0.999*VA)
A1 = 1./VA
AL1 = 1. - R1*VA
BE1 = (X(1)*A(17,61) + X(2)*A(18,61))*VA*VA/S1
E1 = SQRT(AL1*AL1 + BE1*BE1)
TU1 = BE1/AL1
SU1 = BE1/E1
CU1 = AL1/E1
IF(SU1)15, 16, 16
16 IF(CU1)17, 18, 18
18 U1 = ATAN(TU1)
GO TO 27
15 IF(CU1)17, 19, 19
17 U1 = 3.141592653589793 + ATAN(TU1)
GO TO 27
19 U1 = 6.283185307179586 + ATAN(TU1)
27 TP = TR - (U1 - BE1)/S1
VC = SQRT((1. + E1)/(1. - E1))*SU1/(1. + CU1)
W1 = ATAN(X(2)/X(1)) - 2.*ATAN(VC)
AM1 = 6.283185307179586/S1
PRINT500,A1,S1,E1,TP,W1,AM1
500 FORMAT(4(2XE16.10)/3(2XE16.10))
X21 = X(3) - X(1)/999
X22 = X(4) - X(2)/999
X23 = A(19,61) - A(17,61)/999
X24 = A(20,61) - A(18,61)/999
R1 = SQRT(X21*X21 + X22*X22)
V1 = X23*X23 + X24*X24
VA = V1 - 2./R1
A1 = 1./VA
S1 = VA*SQRT(VA)
AL1 = 1. + R1*VA

```

```

BE1 = (X21*X23 + X22*X24)/SQRT(A1)
E1 = SQRT(AL1*AL1 - BE1*BE1)
U1 = 0.5*LOG((AL1 + BE1)/(AL1 - BE1))
TP = TR - (BE1 - U1)/S1
EC = SQRT((AL1 + BE1)/(AL1 - BE1))
VC = SQRT((E1 + 1.)/(E1 - 1.))*(EC - 1.)/(EC + 1.)
Q1 = ATAN(X22/X21) - 2.*ATAN(VC)
PRINT501,A1,S1,E1,TP,Q1
501 FORMAT(3(2XE16.10)/3(2XE16.10))
T = T + H
141 IF(T - T1)701, 68, 68
68 TI = TI + T - H
IF(SENSE SWITCH1)67,65
67 PUNCH66, CAP, TI
PUNCH64, X(1), X(2)
PUNCH64, X(3), X(4)
PUNCH64, A(17,61), A(18,61)
PUNCH64, A(19,61), A(20,61)
66 FORMAT(F5.2, F10.2)
64 FORMAT(2E21.15)
PAUSE
65 DO60I = 1,4
A(I,1) = X(I)
M = 16 + I
60 A(M,I) = A(M,61)
GO TO 4
78 DO59I = 1,4
M = I + 16
A(I,1) = P(I)
59 A(M,1) = V(I)
PRINT43,E(1), E(2), E(3), E(4), E(5)
TI = TI + T - H
IF(SENSE SWITCH2)81,4
81 PUNCH66, CAP, TI
PUNCH64, A(1,1), A(2,1)
PUNCH64, A(3,1), A(4,1)
PUNCH64, A(17,1), A(18,1)
PUNCH64, A(19,1), A(20,1)
PAUSE
END

```

TABLA I

t_v	a_1	e_1	$\bar{\omega}_1$	$l_{\pi}^{(1)}$	T_1	a_2	e_2	$\bar{\omega}_2$	$l_{\pi}^{(2)}$
0	1.0111 592	0.0110 360	3.1415 927	0.0000 000	6.39184 7779	4.2995 981	1.3491 026	0.0000 000	0.0000 000
0.5	1.0111 444	0.0110 557	3.1292 205	0.0123 012	6.39170 7137	4.3002 821	1.3490 552	0.0001 997	0.0002 334
1.0	1.0110 991	0.0110 976	3.1192 030	0.0222 175	6.39127 8079	4.3012 151	1.3489 967	0.0003 391	0.0003 727
1.5	1.0110 298	0.0111 443	3.1112 806	0.0299 996	6.39062 0671	4.3017 513	1.3489 701	0.0004 232	0.0004 379
2.0	1.0109 529	0.0111 944	3.1051 212	0.0359 871	6.38989 1754	4.3017 993	1.3489 793	0.0004 753	0.0004 756
2.5	1.0108 874	0.0112 423	3.1010 683	0.0398 693	6.38927 1050	4.3015 667	1.3490 064	0.0005 075	0.0005 085
3.0	1.0108 488	0.0112 743	3.0989 636	0.0418 689	6.38890 4956	4.3012 728	1.3490 335	0.0005 235	0.0005 394
3.5	1.0108 450	0.0112 796	3.0976 323	0.0432 352	6.38886 8872	4.3010 796	1.3490 478	0.0005 245	0.0005 606
4.0	1.0108 709	0.0112 623	3.0957 615	0.0452 995	6.38911 4163	4.3010 706	1.3490 442	0.0005 143	0.0005 619
4.5	1.0109 037	0.0112 398	3.0935 129	0.0477 795	6.38942 4941	4.3012 177	1.3490 285	0.0005 017	0.0005 405
5.0	1.0109 160	0.0112 221	3.0924 199	0.0489 432	6.38954 1858	4.3013 886	1.3490 143	0.0004 961	0.0005 100
5.5	1.0109 052	0.0112 058	3.0927 323	0.0485 153	6.38944 0032	4.3014 727	1.3490 101	0.0004 986	0.0004 903
6.0	1.0108 904	0.0111 921	3.0932 742	0.0478 310	6.38929 9123	4.3014 750	1.3490 123	0.0005 031	0.0004 867
6.5	1.0108 841	0.0111 862	3.0935 682	0.0474 786	6.38923 9395	4.3014 514	1.3490 149	0.0005 053	0.0004 915
7.0	1.0108 863	0.0111 873	3.0938 545	0.0472 147	6.38926 0312	4.3014 381	1.3490 155	0.0005 049	0.0004 961
7.5	1.0108 918	0.0111 906	3.0942 406	0.0468 817	6.38931 2348	4.3014 426	1.3490 143	0.0005 033	0.0004 962
8.0	1.0108 959	0.0111 933	3.0945 673	0.0465 932	6.38935 1541	4.3014 578	1.3490 126	0.0005 019	0.0004 922
8.5	1.0108 966	0.0111 957	3.0946 999	0.0464 615	6.38935 8296	4.3014 733	1.3490 114	0.0005 014	0.0004 865
9.0	1.0108 944	0.0111 987	3.0946 860	0.0464 421	6.38933 6843	4.3014 821	1.3490 111	0.0005 018	0.0004 819
9.5	1.0108 912	0.0112 020	3.0946 488	0.0464 346	6.38930 6452	4.3014 826	1.3490 116	0.0005 027	0.0004 804
10.0	1.0108 893	0.0112 039	3.0946 141	0.0464 452	6.38928 9304	4.3014 782	1.3490 122	0.0005 032	0.0004 817
10.5	1.0108 902	0.0112 039	3.0944 982	0.0465 779	6.38929 7322	4.3014 746	1.3490 124	0.0005 031	0.0004 839
11.0	1.0108 929	0.0112 029	3.0942 784	0.0468 440	6.38932 2575	4.3014 762	1.3490 118	0.0005 024	0.0004 843
11.5	1.0108 949	0.0112 017	3.0940 865	0.0470 702	6.38934 1654	4.3014 823	1.3490 110	0.0005 018	0.0004 817
12.0	1.0108 945	0.0112 002	3.0940 296	0.0471 185	6.38933 8251	4.3014 882	1.3490 107	0.0005 017	0.0004 780
12.5	1.0108 926	0.0111 981	3.0940 473	0.0470 640	6.38932 0074	4.3014 903	1.3490 108	0.0005 021	0.0004 757
13.0	1.0108 911	0.0111 967	3.0940 667	0.0470 173	6.38930 6387	4.3014 891	1.3490 111	0.0005 024	0.0004 758
13.5	1.0108 912	0.0111 964	3.0941 099	0.0469 752	6.38930 6766	4.3014 875	1.3490 113	0.0005 025	0.0004 770
14.0	1.0108 923	0.0111 970	3.0941 970	0.0469 087	6.38931 6861	4.3014 874	1.3490 111	0.0005 022	0.0004 776
14.5	1.0108 933	0.0111 974	3.0942 871	0.0468 384	6.38932 6786	4.3014 890	1.3490 108	0.0005 019	0.0004 770
15.0	1.0108 936	0.0111 979	3.0943 347	0.0467 949	6.38932 9490	4.3014 912	1.3490 106	0.0005 018	0.0004 753
15.5	1.0108 930	0.0111 987	3.0943 433	0.0467 726	6.38932 4270	4.3014 927	1.3490 106	0.0005 019	0.0004 737
16.0	1.0108 922	0.0111 996	3.0943 432	0.0467 516	6.38931 5894	4.3014 929	1.3490 107	0.0005 021	0.0004 730
16.5	1.0108 916	0.0112 001	3.0943 391	0.0467 437	6.38931 0988	4.3014 922	1.3490 109	0.0005 022	0.0004 733
17.0	1.0108 919	0.0112 002	3.0943 053	0.0467 849	6.38931 3384	4.3014 916	1.3490 109	0.0005 022	0.0004 741
17.5	1.0108 927	0.0111 999	3.0942 380	0.0468 736	6.38932 0849	4.3014 918	1.3490 107	0.0005 020	0.0004 744
18.0	1.0108 933	0.0111 997	3.0941 781	0.0469 494	6.38932 6493	4.3014 929	1.3490 105	0.0005 019	0.0004 735
18.5	1.0108 931	0.0111 992	3.0941 564	0.0469 670	6.38932 5326	4.3014 942	1.3490 105	0.0005 018	0.0004 722
19.0	1.0108 925	0.0111 985	3.0941 559	0.0469 494	6.38931 9348	4.3014 946	1.3490 105	0.0005 019	0.0004 713
19.5	1.0108 920	0.0111 980	3.0941 581	0.0469 333	6.38931 4666	4.3014 944	1.3490 106	0.0005 020	0.0004 713
20.0	1.0108 920	0.0111 979	3.0941 735	0.0469 187	6.38931 4919	4.3014 940	1.3490 107	0.0005 021	0.0004 717
20.5	1.0108 925	0.0111 981	3.0942 088	0.0469 305	6.38931 8862	4.3014 940	1.3490 106	0.0005 020	0.0004 720
21.0	1.0108 929	0.0111 982	3.0942 456	0.0468 704	6.38932 2729	4.3014 944	1.3490 105	0.0005 019	0.0004 718
21.5	1.0108 930	0.0111 984	3.0942 652	0.0468 527	6.38932 3598	4.3014 950	1.3490 104	0.0005 018	0.0004 710
22.0	1.0108 927	0.0111 988	3.0942 701	0.0468 390	6.38932 1183	4.3014 955	1.3490 105	0.0005 019	0.0004 703
22.5	1.0108 923	0.0111 991	3.0942 722	0.0468 243	6.38931 7616	4.3014 955	1.3490 105	0.0005 019	0.0004 699
23.0	1.0108 921	0.0111 994	3.0942 707	0.0468 196	6.38931 5795	4.3014 953	1.3490 106	0.0005 020	0.0004 701
23.5	1.0108 923	0.0111 994	3.0942 539	0.0468 420	6.38931 7199	4.3014 951	1.3490 105	0.0005 020	0.0004 705
24.0	1.0108 926	0.0111 993	3.0942 231	0.0468 858	6.38932 0557	4.3014 952	1.3490 105	0.0005 019	0.0004 706
24.5	1.0108 929	0.0111 992	3.0941 976	0.0469 197	6.38932 2780	4.3014 956	1.3490 104	0.0005 016	0.0004 701
25.0	1.0108 928	0.0111 989	3.0941 885	0.0469 252	6.38932 1908	4.3014 960	1.3490 104	0.0005 018	0.0004 695
25.5	1.0108 925	0.0111 986	3.0941 869	0.0469 153	6.38931 9068	4.3014 961	1.3490 104	0.0005 019	0.0004 690
26.0	1.0108 923	0.0111 984	3.0941 871	0.0469 071	6.38931 7055	4.3014 960	1.3490 105	0.0005 019	0.0004 691
26.5	1.0108 923	0.0111 984	3.0941 957	0.0469 002	6.38931 7448	4.3014 959	1.3490 105	0.0005 019	0.0004 693
27.0	1.0108 925	0.0111 984	3.0942 144	0.0468 899	6.38931 9520	4.3014 959	1.3490 105	0.0005 019	0.0004 695
27.5	1.0108 927	0.0111 985	3.0942 328	0.0468 789	6.38932 1365	4.3014 961	1.3490 104	0.0005 018	0.0004 693
28.0	1.0108 927	0.0111 986	3.0942 421	0.0468 700	6.38932 1566	4.3014 963	1.3490 104	0.0005 018	0.0004 688
28.5	1.0108 926	0.0111 988	3.0942 448	0.0468 606	6.38932 0122	4.3014 965	1.3490 104	0.0005 019	0.0004 684
29.0	1.0108 924	0.0111 990	3.0942 465	0.0468 505	6.38931 8279	4.3014 965	1.3490 104	0.0005 019	0.0004 683
29.5	1.0108 923	0.0111 991	3.0942 452	0.0468 487	6.38931 7554	4.3014 964	1.3490 105	0.0005 019	0.0004 684
30.0	1.0108 924	0.0111 991	3.0942 347	0.0468 641	6.38931 8548	4.3014 963	1.3490 104	0.0005 019	0.0004 686
30.5	1.0108 926	0.0111 990	3.0942 177	0.0468 900	6.38932 0368	4.3014 964	1.3490 104	0.0005 019	0.0004 686

(Continuación)

t_v	a_1	e_1	$\bar{\omega}_1$	$t_{\pi}^{(1)}$	T_1	a_2	e_2	$\bar{\omega}_2$	$t_{\pi}^{(2)}$
31.0	1.0108 927	0.0111 990	3.0942 050	0.0469 073	6.38932 1343	4.3014 966	1.3490 104	0.0005 018	0.0004 684
31.5	1.0108 926	0.0111 989	3.0942 007	0.0469 080	6.38932 0626	4.3014 967	1.3490 104	0.0005 018	0.0004 680
32.0	1.0108 925	0.0111 987	3.0941 994	0.0469 012	6.38931 9025	4.3014 968	1.3490 104	0.0005 019	0.0004 678
32.5	1.0108 924	0.0111 986	3.0941 996	0.0468 963	6.38931 8070	4.3014 967	1.3490 104	0.0005 019	0.0004 678
33.0	1.0108 924	0.0111 986	3.0942 055	0.0468 926	6.38931 8492	4.3014 966	1.3490 104	0.0005 019	0.0004 680
33.5	1.0108 926	0.0111 986	3.0942 169	0.0468 875	6.38931 9750	4.3014 967	1.3490 104	0.0005 019	0.0004 680
34.0	1.0108 927	0.0111 986	3.0942 272	0.0468 821	6.38932 0719	4.3014 968	1.3490 104	0.0005 018	0.0004 679
34.5	1.0108 927	0.0111 987	3.0942 320	0.0468 766	6.38932 0655	4.3014 969	1.3490 104	0.0005 018	0.0004 676
35.0	1.0108 926	0.0111 988	3.0942 336	0.0468 696	6.38931 9687	4.3014 969	1.3490 104	0.0005 018	0.0004 674
35.5	1.0108 924	0.0111 989	3.0942 348	0.0468 626	6.38931 8638	4.3014 969	1.3490 104	0.0005 019	0.0004 673
36.0	1.0108 924	0.0111 990	3.0942 333	0.0468 627	6.38931 8382	4.3014 969	1.3490 104	0.0005 019	0.0004 674
36.5	1.0108 925	0.0111 990	3.0942 260	0.0468 746	6.38931 9132	4.3014 969	1.3490 104	0.0005 019	0.0004 675
37.0	1.0108 926	0.0111 989	3.0942 156	0.0468 912	6.38932 0214	4.3014 969	1.3490 104	0.0005 018	0.0004 675
37.5	1.0108 927	0.0111 989	3.0942 088	0.0469 005	6.38932 0636	4.3014 970	1.3490 104	0.0005 018	0.0004 673
38.0	1.0108 926	0.0111 988	3.0942 065	0.0468 992	6.38932 0045	4.3014 971	1.3490 104	0.0005 018	0.0004 670
38.5	1.0108 925	0.0111 987	3.0942 056	0.0468 942	6.38931 9061	4.3014 971	1.3490 104	0.0005 019	0.0004 669
39.0	1.0108 924	0.0111 987	3.0942 060	0.0468 911	6.38931 8601	4.3014 971	1.3490 104	0.0005 019	0.0004 670
39.5	0.0108 925	0.0111 987	3.0942 105	0.0468 890	6.38931 9002	4.3014 970	1.3490 104	0.0005 019	0.0004 671
40.0	1.0108 926	0.0011 987	3.0942 180	0.0468 864	6.38931 9824	4.3014 970	1.3490 104	0.0005 018	0.0004 671
40.5	1.0108 926	0.0111 987	3.0942 241	0.0468 835	6.38932 0350	4.3014 971	1.3490 104	0.0005 018	0.0004 670
41.0	1.0108 926	0.0111 988	3.0942 268	0.0468 796	6.38932 0181	4.3014 972	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 668
41.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 279	0.0468 740	6.38931 9494	4.3014 972	1.3490 104	0.0005 018	0.0004 666
42.0	1.0108 925	0.0111 989	3.0942 286	0.0468 691	6.38931 8870	4.3014 972	1.3490 104	0.0005 019	0.0004 666
42.5	1.0108 925	0.0111 989	3.0942 270	0.0468 705	6.38931 8834	4.3014 972	1.3490 104	0.0005 019	0.0004 667
43.0	1.0108 925	0.0111 989	3.0942 216	0.0468 800	6.38931 9413	4.3014 971	1.3490 104	0.0005 018	0.0004 668
43.5	1.0108 926	0.0111 989	3.0942 149	0.0468 913	6.38932 0086	4.3014 972	1.3490 104	0.0005 018	0.0004 667
44.0	1.0108 926	0.0111 989	3.0942 110	0.0468 962	6.38932 0237	4.3014 972	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 666
44.5	1.0108 926	0.0111 988	3.0942 097	0.0468 940	6.38931 9752	4.3014 973	1.3490 104	0.0005 018	0.0004 664
45.0	1.0108 925	0.0111 987	3.0942 090	0.0468 903	6.38931 9120	4.3014 973	1.3490 104	0.0005 018	0.0004 664
45.5	1.0108 925	0.0111 987	3.0942 096	0.0468 883	6.38931 8918	4.3014 972	1.3490 104	0.0005 018	0.0004 664
46.0	1.0108 925	0.0111 987	3.0942 132	0.0468 872	6.38931 9275	4.3014 972	1.3490 104	0.0005 018	0.0004 665
46.5	1.0108 926	0.0111 987	3.0942 185	0.0468 859	6.38931 9833	4.3014 973	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 665
47.0	1.0108 926	0.0111 987	3.0942 222	0.0468 841	6.38932 0114	4.3014 973	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 664
47.5	1.0108 926	0.0111 988	3.0942 238	0.0468 809	6.38931 9908	4.3014 973	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 662
48.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 246	0.0468 764	6.38931 9408	4.3014 973	1.3490 104	0.0005 018	0.0004 662
48.5	1.0108 925	0.0111 989	3.0942 250	0.0468 731	6.38931 9034	4.3014 973	1.3490 104	0.0005 018	0.0004 662
49.0	1.0108 925	0.0111 989	3.0942 234	0.0468 753	6.38931 9104	4.3014 973	1.3490 104	0.0005 018	0.0004 662
49.5	1.0108 925	0.0111 989	3.0942 192	0.0468 831	6.38931 9555	4.3014 973	1.3490 104	0.0005 018	0.0004 663
50.0	1.0108 926	0.0111 989	3.0942 148	0.0468 908	6.38931 9979	4.3014 973	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 662
50.5	1.0108 926	0.0111 988	3.0942 126	0.0468 932	6.38931 9990	4.3014 974	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 661
51.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 117	0.0468 908	6.38931 9596	4.3014 974	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 660
51.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 112	0.0468 880	6.38931 9184	4.3014 974	1.3490 104	0.0005 018	0.0004 660
52.0	1.0108 925	0.0111 987	3.0942 120	0.0468 867	6.38931 9122	4.3014 974	1.3490 104	0.0005 018	0.0004 660
52.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 149	0.0468 863	6.38931 9431	4.3014 974	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 661
53.0	1.0108 926	0.0111 988	3.0942 186	0.0468 857	6.38931 9816	4.3014 974	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 660
53.5	1.0108 926	0.0111 988	3.0942 210	0.0468 843	6.38931 9952	4.3014 974	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 660
54.0	1.0108 926	0.0111 988	3.0942 219	0.0468 815	6.38931 9743	4.3014 974	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 658
54.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 225	0.0468 778	6.38931 9374	4.3014 974	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 658
55.0	1.0108 925	0.0111 989	3.0942 227	0.0468 758	6.38931 9157	4.3014 974	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 658
55.5	1.0108 925	0.0111 989	3.0942 211	0.0468 785	6.38931 9277	4.3014 974	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 659
56.0	1.0108 925	0.0111 989	3.0942 178	0.0468 849	6.38931 9627	4.3014 974	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 659
56.5	1.0108 926	0.0111 989	3.0942 149	0.0468 902	6.38931 9891	4.3014 974	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 658
57.0	1.0108 926	0.0111 988	3.0942 135	0.0468 910	6.38931 9828	4.3014 974	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 657
57.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 129	0.0468 886	6.38931 9511	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 657
58.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 126	0.0468 866	6.38931 9245	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 657
58.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 136	0.0468 859	6.38931 9262	4.3014 974	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 657
59.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 159	0.0468 858	6.38931 9523	4.3014 974	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 657
59.5	1.0108 926	0.0111 988	3.0942 186	0.0468 856	6.38931 9787	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 657
60.0	0.0108 926	0.0111 988	3.0942 201	0.0468 844	6.38931 9836	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 656
60.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 207	0.0468 819	6.38931 9638	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 656
61.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 212	0.0468 788	6.38931 9367	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 655
61.5	1.0108 925	0.0111 989	3.0942 211	0.0468 778	6.38931 9251	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 655

(Continuación)

t_v	a_1	e_1	$\bar{\omega}_1$	$t_{\pi}^{(1)}$	T_1	a_2	e_2	$\bar{\omega}_2$	$t_{\pi}^{(\pi)}$
62.0	1.0108 925	0.0111 989	3.0942 196	0.0468 807	6.38931 9390	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 656
62.5	1.0108 925	0.0111 989	3.0942 171	0.0468 859	6.38931 9661	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 656
63.0	1.0108 926	0.0111 988	3.0942 150	0.0468 894	6.38931 9816	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 655
63.5	1.0108 926	0.0111 988	3.0942 142	0.0468 892	6.38931 9718	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 655
64.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 138	0.0468 872	6.38931 9467	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 654
64.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 137	0.0468 857	6.38931 9300	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 654
65.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 146	0.0468 853	6.38931 9359	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 755
65.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 166	0.0468 856	6.38931 9576	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 655
66.0	1.0108 926	0.0111 988	3.0942 184	0.0468 854	6.38931 9755	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 655
66.5	1.0108 926	0.0111 988	3.0942 194	0.0468 843	6.38931 9749	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 654
67.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 199	0.0468 820	6.38931 9572	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 653
67.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 202	0.0468 796	6.38931 9375	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 653
68.0	1.0108 925	0.0111 989	3.0942 200	0.0468 793	6.38931 9325	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 653
68.5	1.0108 925	0.0111 989	3.0942 186	0.0468 822	6.38931 9466	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 654
69.0	1.0108 925	0.0111 989	3.0942 166	0.0468 865	6.38931 9672	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 654
69.5	1.0108 926	0.0111 988	3.0942 153	0.0468 887	6.38931 9755	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 653
70.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 147	0.0468 880	6.38931 9642	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 653
70.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 144	0.0468 861	6.38931 9446	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 652
71.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 144	0.0468 851	6.38931 9348	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 652
71.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 154	0.0468 850	6.38931 9429	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 653
72.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 170	0.0468 854	6.38931 9606	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 653
72.5	1.0108 926	0.0111 988	3.0942 184	0.0468 853	6.38931 9722	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 652
73.0	1.0108 926	0.0111 988	3.0942 190	0.0468 841	6.38931 9684	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 652
73.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 193	0.0468 820	6.38931 9530	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 652
74.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 196	0.0468 802	6.38931 9390	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 652
74.5	1.0108 925	0.0111 989	3.0942 192	0.0468 805	6.38931 9384	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 652
75.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 179	0.0468 834	6.38931 9518	4.3014 975	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 652
75.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 164	0.0468 867	6.38931 9671	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 652
76.0	1.0108 926	0.0111 988	3.0942 155	0.0468 880	6.38931 9703	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 651
76.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 151	0.0468 870	6.38931 9590	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 651
77.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 149	0.0468 854	6.38931 9439	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 651
77.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 150	0.0468 847	6.38931 9391	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 651
78.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 159	0.0468 849	6.38931 9480	4.3014 969	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 651
78.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 172	0.0468 853	6.38931 9621	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 651
79.0	1.0108 926	0.0111 988	3.0942 182	0.0468 851	6.38931 9691	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 651
79.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 187	0.0468 840	6.38931 9635	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 650
80.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 189	0.0468 821	6.38931 9504	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 650
80.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 190	0.0468 807	6.38931 9409	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 650
81.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 186	0.0468 815	6.38931 9431	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 650
81.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 175	0.0468 842	6.38931 9552	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 651
82.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 163	0.0468 867	6.38931 9662	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 650
82.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 157	0.0468 873	6.38931 9661	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 650
83.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 154	0.0468 862	6.38931 9553	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 650
83.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 153	0.0468 849	6.38931 9442	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 650
84.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 155	0.0468 845	6.38931 9427	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 650
84.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 163	0.0468 848	6.38931 9516	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 650
85.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 174	0.0468 852	6.38931 9626	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 650
85.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 181	0.0468 849	6.38931 9662	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 650
86.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 184	0.0468 838	6.38931 9598	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 649
86.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 186	0.0468 821	6.38931 9489	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 649
87.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 186	0.0468 812	6.38931 9429	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 649
87.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 181	0.0468 823	6.38931 9469	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 649
88.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 172	0.0468 847	6.38931 9574	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 649
88.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 163	0.0468 866	6.38931 9649	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 649
89.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 159	0.0468 867	6.38931 9626	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 649
89.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 157	0.0468 856	6.38931 9529	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 649
90.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 156	0.0468 846	6.38931 9449	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 649
90.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 158	0.0468 844	6.38931 9458	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 649
91.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 166	0.0468 848	6.38931 9542	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 649
91.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 175	0.0468 851	6.38931 9625	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 649
92.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 180	0.0468 848	6.38931 9637	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 648
92.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 182	0.0468 836	6.38931 9570	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 648

(Conclusión)

t_v	a_1	e_1	$\tilde{\omega}_1$	$t_{\pi}^{(1)}$	T_1	a_2	e_2	$\tilde{\omega}_2$	$t_{\pi}^{(2)}$
93.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 183	0.0468 821	6.38931 9482	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 648
93.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 183	0.0468 817	6.38931 9448	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 648
94.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 178	0.0468 829	6.38931 9498	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 648
94.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 170	0.0468 851	6.38931 9587	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 648
95.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 163	0.0468 865	6.38931 9634	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 648
95.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 160	0.0468 862	6.38931 9598	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 648
96.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 159	0.0468 851	6.38931 9513	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 648
96.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 158	0.0468 843	6.38931 9460	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 648
97.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 161	0.0468 844	6.38931 9483	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 648
97.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 169	0.0468 848	6.38931 9559	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 648
98.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 175	0.0468 850	6.38931 9620	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 648
98.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 179	0.0468 850	6.38931 9614	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 648
99.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 180	0.0468 834	6.38931 9549	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 647
99.5	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 182	0.0468 822	6.38931 9481	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 647
100.0	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 181	0.0468 821	6.38931 9467	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 647
t_{∞}	1.0108 925	0.0111 988	3.0942 171	0.0468 843	6.38931 9545	4.3014 976	1.3490 103	0.0005 018	0.0004 640

SE TERMINÓ DE IMPRIMIR
EL DÍA 12 DE JUNIO
DEL AÑO MIL NOVECIE-
TOS SESENTA Y SIETE,
EN LA IMPRENTA LÓPEZ,
PERÚ 666, BUENOS AIRES,
REPÚBLICA ARGENTINA.