OBSERVATORIO ASTRONOMICO DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

SERIE ASTRONOMICA - Tomo XXXIV

SOBRE EL PROBLEMA RESTRINGIDO ELIPTICO DE LOS TRES CUERPOS

POR

REYNALDO P. CESCO y PEDRO C. RIU

LA PLATA

1967

SOBRE EL PROBLEMA RESTRINGIDO ELÍPTICO DE LOS TRES CUERPOS

Por

R. P. Cesco y Pedro C. Riú

Summary. *On the elliptic restricted problem of three bodies*, by R. P. Cesco and Pedro C. Riú. – One of the most celebrated conclusions obtained by G. W Hill by introducing his curves of zero velocity in the Eulerian model of the restricted problem of three bodies, is the stability of the Moon's motion. Hill proves in fact that, the eccentricity of the Earth being neglected, the distance between the Earth and the Moon, when only the perturbations of the Sun are taken into account, must remain bounded above for all time.

In spite of the importance of this qualitative result, only in the last few years a number of authors have systematically attacked the very difficult restricted problem of three bodies in the eccentric case * **, but it does not seem to have been demostrated that if the orbits of the primaries are eccentric, Hill's theorem, or some similar result, is still valid, no matter how small the eccentricity of the orbits of the primaries may be.

Our purpose here is to give a transformation (change of variables) by means of which we arrive to an identity (see (J_e)) similar to the useful Jacobi integral. In the last part of the paper we will show that *if the eccentricity of the primaries is sufficiently small, it is possible to determine a "forbidden" belt in whose interior moves one of the primaries, such that a satellite cannot escape across this belt, in any finite interval of time.*

We will start with the identity (I), satisfied by any solution of the system (S) of differential equations of the motion of a minor planet or a satellite referred to a sidereal Cartesian coordinate system, where α and β are arbitrary functions.

These functions can be determined in such a way that $U \equiv 0$ (see formulae (3)). After that we will give a transformation

$$x = x(\xi, \eta, t), \qquad y = y(\xi, \eta, t)$$

having a non-vanishing Jacobian determinant, such that

$$\dot{x} + \alpha = \dot{y} + \beta = 0 \quad \text{whenever} \quad \dot{\xi} = \dot{\eta} = 0$$

This condition is satisfied by the general solution of the nonlinear system of differential equations (4), that is by

$$x = A \cos (B + \omega), \qquad y = A \operatorname{sen} (B + \omega)$$

---

* The first author wishes to express his appreciation to Professor C. O. R. Jaschek for calling his attention, some time ago, to this problem.

** Historical notes and references to this problem may be found in the recent book: Victor Szebehely, "Theory of Orbits in the Restricted Problem of three Bodies", Academic Press, New York, 1967.

where

$$\omega = \kappa \int \frac{dt}{R} = \frac{E}{\sqrt{1-e^2}} \qquad (E\text{: eccentric anomaly})$$

and A and B have the values given by

$$A^2 = C - \mu(1-\mu)R^2$$

$$\cos(B + \omega - w) = \frac{1}{2AR}(D + (1-2\mu)R^2)$$

C and D being *arbitrary functions* of ξ and η.

By changing the variables in r_1 and r_2 we have

$$r_1^2 = A^2 + \mu^2R^2 + 2\mu AR\cos(B + \omega - w) = C + \mu D$$
$$r_2^2 = r_1^2 + (1-2\mu)^2R^2 - 2AR\cos(B + \omega - w) = C - (1-\mu)D$$

(w: true anomaly), so that the force function Ω becomes a conservative one, $\overline{\Omega}(\xi, \eta)$, that is $\partial\overline{\Omega}/\partial t = 0$.

By introducing an intermediate transformation u, v defined by

$$u = A\cos(B + \omega - w), \qquad v = A \operatorname{sen}(B + \omega - w)$$

we have

$$\begin{aligned} x &= u\cos w - v \operatorname{sen} w \\ y &= u \operatorname{sen} w + v\cos w \end{aligned} \qquad \text{(i)}$$

If we choose, as in the (circular) restricted problem of three bodies

$$C + \mu D = (\xi + \mu)^2 + \eta^2, \; C - (1-\mu)D = (\xi + \mu - 1)^2 + \eta^2$$

we obtain

$$A^2 = u^2 + v^2 = \xi^2 + \eta^2 + \mu(1-\mu)(1-R^2)$$

$$\cos(B + \omega - w) = \frac{1}{2AR}(2\xi - (1-2\mu)(1-R^2))$$

and

$$u = \frac{\xi}{R} - (1-2\mu)\frac{1-R^2}{2R}, \qquad v = \sqrt{A^2 - u^2}$$

From (i) it follows

$$\begin{aligned} u &= x\cos w + y \operatorname{sen} w \\ v &= -x \operatorname{sen} w + y\cos w \end{aligned}$$

By differentiation and elimination one has

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= \frac{\partial\Omega}{\partial u} + \dot{w}^2u + \ddot{w}v + 2\dot{w}\dot{v} \\ \ddot{v} &= \frac{\partial\Omega}{\partial v} - \ddot{w}u + \dot{w}^2v - 2\dot{w}\dot{u} \end{aligned} \qquad (S_\circ)$$

where

$$\Omega = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, \quad r_1^2 = (u+\mu R)^2 + v^2; \quad r_2^2 = (u-(1-\mu)R)^2 + v^2$$

Analogously we can obtain Eqs. (S_e^*).

Incidentally, we observe that in the problem of two bodies Id. (I) gives, after integration with $\alpha \equiv 0$ and $\beta \equiv 0$, the energy integral. If in the same problem we take $\alpha = y$ and $\beta = -x$ we obtain, by integrating (I), a linear combination of the energy integral and the angular momentum integral. In the circular restricted problem of three bodies, by putting $a = 1 \equiv R$, $n = k = 1$ we have $\omega = w = t$, so that

$$A^2 = u^2 + v^2 = x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2 \equiv \Xi^2 + \mathrm{H}^2$$

$$u = \Xi, \; v = \mathrm{H}, \quad \cos B = \frac{u}{A} = \frac{\Xi}{A}, \quad \operatorname{sen} B = \frac{v}{A} = \frac{\mathrm{H}}{A}$$

Eqs. (i) give us

$$\begin{aligned} x &= \Xi \cos t - \mathrm{H} \operatorname{sen} t \\ y &= \Xi \operatorname{sen} t + \mathrm{H} \cos t \end{aligned} \qquad \text{(ii)}$$

so that Ξ and H are now the synodic Cartesian coordinates of the minor planet or the satellite

By integrating (I) we now obtain

$$(\dot{x} + y)^2 + (\dot{y} - x)^2 = 2\Omega + x^2 + y^2 - K$$

and by using the formulae of transformation (ii) it follows

$$\dot{\Xi}^2 + \dot{\mathrm{H}}^2 = 2\Omega^*(\Xi, \mathrm{H}) - K$$

where

$$\Omega^* = \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{1}{2}(\Xi^2 + \mathrm{H}^2) \quad \begin{cases} \rho_1^2 = (\Xi + \mu)^2 + \mathrm{H}^2 \\ \rho_2^2 = (\Xi + \mu - 1)^2 + \mathrm{H}^2 \end{cases} \qquad \text{(iii)}$$

Both systems (S_e^*) and (S_e) reduce to the Euler-Jacobi-Hill system (S_0).

In the elliptic restricted problem of three bodies we obtain from Id. (I)

$$(\dot{x} + \alpha)^2 + (\dot{y} + \beta)^2 = 2\Omega - K + \alpha^2 + \beta^2 + 2 \int_{t_0}^{t} (\dot{\alpha}\dot{x} + \dot{\beta}\dot{y})dt \qquad (I_e)$$

where K is the constant of integration.

But, with ξ and η as new variables, we have

$$\dot{x} + \alpha = \frac{\partial x}{\partial \xi}\dot{\xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\dot{\eta}, \quad \dot{y} + \beta = \frac{\partial y}{\partial \xi}\dot{\xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\dot{\eta}$$

so that the left-hand member of (I_e) becomes

$$(\dot{x} + \alpha)^2 + (\dot{y} + \beta)^2 = S_{20}\dot{\xi}^2 + S_{02}\dot{\eta}^2 + 2S_{11}\dot{\xi}\dot{\eta}$$

where the functions

$$S_{ij} = S_{ij}(\xi, \eta, t; e)$$

can be evaluated by means of formulae (F).

Since

$$\alpha = -\frac{\partial x}{\partial t} = \alpha(\xi, \eta, t; e), \qquad \beta = -\frac{\partial y}{\partial t} = \beta(\xi, \eta, t; e)$$

the integrand $2\alpha\dot{x} + 2\beta\dot{y}$ of the integral in Id. (I_e) can be written in the form

$$-2\alpha\dot{x} - 2\beta\dot{y} = s_{00} + s_{10}\dot{\xi} + s_{01}\dot{\eta} + s_{20}\dot{\xi}^2 + s_{02}\dot{\eta}^2 + 2s_{11}\dot{\xi}\dot{\eta}$$

where the functions

$$s_{ij} = s_{ij}(\xi, \eta, t; e)$$

can be calculated by means of formulae (F_1). By substituting this integrand into (I_e) we obtain Id. (J_e).

Let K_0 be a large value of the Jacobi constant, and let λ_0 be the corresponding Hill closed curve of zero velocity surrounding the point $A_0(1-\mu, 0)$ referred to the synodic coordinate system (Ξ, H) with origin at the mass center of the primaries. The distance between A_0 and the primary of mass μ is obtained by

$$d(A_0, \mu) = (1 - \mu)\,(1 + R^2 - 2R\cos\mathcal{E})^{\frac{1}{2}}$$

where $\mathcal{E} = w - t$ is the equation of the centre of the primaries, if $t_\pi = 0$ (t_π: instant of perihelion passage).

Since

$$\max \mathcal{E} \to 0, \quad \text{as} \quad e \to 0$$

we can assume that

$$d(A_0, \mu) \leqq \min d(A_0, \lambda_0), \text{ for all } e \leqq \varepsilon_1$$

in which case the primary μ can never cross the closed curve λ_0.

Choosing a point (u_0, v_0), $(\neq A_e((1-\mu)(1-e), 0), e \leqq \varepsilon_1)$ inside the curve λ_0 as the initial position, with $t_0 = 0$, let $\dot{u}_0$, $\dot{v}_0$ denote the velocity components of the motion of a satellite, described by the system (S_e) of differential equations, such that

$$\dot{\Xi}_0^2 + \dot{\mathrm{H}}_0^2 = 2\Omega^*(\Xi_0, \mathrm{H}_0) - K_0$$

where

$$\Xi_0 = u_0; \quad \mathrm{H}_0 = v_0; \quad \dot{\Xi}_0 = \dot{u}_0; \quad \dot{\mathrm{H}}_0 = \dot{v}_0$$

These initial conditions determine the solution $\Xi(t)$, $\mathrm{H}(t)$ of the system (S_0) as well as the solution u, v of the system (S_e). This last solution may be expanded in power series of the small parameter e, according to Cauchy-Poincaré's method. We have

$$\begin{aligned} u &= u(t; e) = u(t; 0) + u_1(t)e + u_2(t)e^2 + \\ v &= v(t; e) = v(t; 0) + v_1(t)e + v_2(t)e^2 + \end{aligned} \tag{iv}$$

where

$$u(t; 0) = \Xi(t); \quad v(t; 0) = \mathrm{H}(t)$$

and $u_\nu(0) = v_\nu(0) = \dot{u}_\nu(0) = \dot{v}_\nu(0) = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots$

Let us suppose that the solution Ξ, H of the system (S_0) is such that

$$\rho_1(t) \geqq \theta, \; \rho_2(t) \geqq \theta \text{ for some } \theta > 0 \text{ and for all } t$$

Then according to the expansion theorem, the series in (iv) are convergent for all values of t of the closed interval $E: 0 \leqq t \leqq T$, if $e \leqq \varepsilon_2$ is small enough, since the right-hand members of Eqs. (S_e) may be expanded in power series of $u - \Xi$, $v - \mathrm{H}$, $\dot{u} - \dot{\Xi}$, $\dot{v} - \dot{\mathrm{H}}$ and e convergent in some range

$$|u - \Xi| \leqq \pi; \quad |v - \mathrm{H}| \leqq \pi; \quad |\dot{u} - \dot{\Xi}| \leqq \pi; \quad |\dot{v} - \dot{\mathrm{H}}| \leqq \pi; \quad e \leqq \varepsilon_2$$

and this for every $t \in E$.

Let $U(t;e)$, $V(t;e)$ denote the coordinates of the point $P[u(t;e), v(t;e)]$ referred to the synodic system Ξ, H. We have

$$\begin{aligned} U &= u \cos \mathcal{E} - v \operatorname{sen} \mathcal{E} \\ V &= u \operatorname{sen} \mathcal{E} + v \cos \mathcal{E} \end{aligned} \tag{iv$_a$}$$

Substitution of the values of u and v gives

$$U - \Xi = -2 \operatorname{sen} \frac{\mathcal{E}}{2} \left(\Xi \operatorname{sen} \frac{\mathcal{E}}{2} + \mathrm{H} \cos \frac{\mathcal{E}}{2} \right) + e\,(u^I \cos \mathcal{E} - v^I \operatorname{sen} \mathcal{E})$$

$$V - \mathrm{H} = 2 \operatorname{sen} \frac{\mathcal{E}}{2} \left(\Xi \cos \frac{\mathcal{E}}{2} - \mathrm{H} \operatorname{sen} \frac{\mathcal{E}}{2} \right) + e\,(u^I \operatorname{sen} \mathcal{E} + v^I \cos \mathcal{E})$$

in virtue of (iv), where

$$u^I = u_1 + u_2 e + \qquad ; \qquad v^I = v_1 + v_2 e +$$

Since Ξ, H, u^I and v^I are bounded functions for all $t \in E$ and for all $e \leqq \varepsilon_2$, given an arbitrary (small) number $\sigma > 0$ we will have

$$|U - \Xi| \leqq \sigma/\sqrt{2}; \quad |V - \mathrm{H}| \leqq \sigma/\sqrt{2} \tag{v}$$

for all values of $t \in E$ and for all $e \leqq \varepsilon_3 \leqq \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Let λ_1 be the closed curve, exterior to λ_0 and such that $\min d(M, N) = \sigma$ for each $M \in \lambda_0$ and for all points $N \in \lambda_1$. From (v) it follows that the distance between $P(u, v)$ and $Q(\Xi, \mathrm{H})$ is

$$d(P, Q) \leqq \sigma \text{ for all } t \in E \text{ and for all } e \leqq \varepsilon_3$$

Since Q must be an interior point of λ_0 (perimeter included), P cannot cross the curve λ_1 at any time $t \in E$, if the eccentricity of the primaries is small enough, which is what we wished to prove.

(Added in proof). By choosing U and V (defined by (iv$_a$)) as new dependent variables, system (S_e) becomes

$$\ddot{U} - 2\dot{V} = \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial U}; \qquad \ddot{V} + 2\dot{U} = \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial V} \tag{$\overline{S}$}$$

where

$$\begin{aligned} \overline{\Omega} &= \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}(U^2 + V^2) \\ r_1^2 &= U^2 + V^2 + \mu^2 R^2 + 2\mu R(U \cos \mathcal{E} + V \operatorname{sen} \mathcal{E}) \\ r_2^2 &= U^2 + V^2 + (1-\mu)^2 R^2 - 2(1-\mu) R(U \cos \mathcal{E} + V \operatorname{sen} \mathcal{E}) \end{aligned}$$

From $(\bar{S})$ it follows

$$\dot{U}^2 + \dot{V}^2 = 2\bar{\Omega}(U, V, t; e) - K - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t}\, dt \qquad (Y)$$

This identity can be written in the form

$$\dot{U}^2 + \dot{V}^2 = 2\bar{\Omega}_0(U, V) - K + \bar{\Delta}(U, V, t; e)$$

where

$$\bar{\Omega}_0 = \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{1}{2}(U^2 + V^2)$$

$$\rho_1^2 = (U + \mu)^2 + V^2; \qquad \rho_2^2 = (U + \mu - 1)^2 + V^2$$

If ρ_1 and ρ_2 are bounded as before, we can obtain, for small e,

$$|\bar{\Delta}(U, V, t; e)| \leqq e(M + N|t - t_0|) \quad \text{with } M, N > 0$$

In view of this fact, we expect that our theorem and possible extensions of it could be proved without the use of Cauchy-Poincaré's theorem.

1. — Una de las más celebradas conclusiones de G. W. Hill, obtenida mediante la introducción de sus curvas de velocidad nula en el problema restringido de los tres cuerpos, es la que se refiere a la estabilidad del movimiento de la Luna. Hill ha demostrado en efecto, que si se desprecia la excentricidad de la órbita terrestre, la distancia entre la Tierra y la Luna, en el problema del movimiento de estos dos cuerpos respecto del Sol, permanece acotada superiormente para todo valor del tiempo.

No obstante la extraordinaria importancia de este resultado cualitativo, apenas en los últimos años varios autores han encarado sistemáticamente el difícil y enojoso problema restringido elíptico * ** de los tres cuerpos. Pero a pesar de haberse publicado varios trabajos sobre este tema y de haberse llegado a interesantes conclusiones, creemos que hasta ahora no se ha logrado ningún resultado, ni teórico ni numérico, que generalice de alguna manera el mencionado teorema de Hill, ni siquiera suponiendo muy pequeña la excentricidad de la Tierra.

En el presente trabajo damos a conocer un teorema que, si bien no resuelve definitivamente el problema de Hill en el caso restringido elíptico, abre al menos un camino aparentemente interesante para emprender variadísimas experiencias numéricas, algunas de las cuales serán iniciadas en seguida por uno de nosotros.

Apoyándonos en la identidad (I), verificada por cualquier solución del sistema (S) de ecuaciones diferenciales del movimiento de un satélite o asteroide referido a un sistema de coordenadas sidéreas, determinamos primero las funciones arbitrarias α y β que figuran en dicha identidad de tal modo que sea $U = 0$.

Hallamos después una transformación o cambio de variables $x = x(\xi, \eta, t)$, $y = y(\xi, \eta, t)$ tal que se tiene $\dot{x} + \alpha = \dot{y} + \beta = 0$ cada vez que $\dot{\xi} = \dot{\eta} = 0$. Mediante esta transformación la identidad (I) puede llevarse

---

* El primero de los autores desea expresar aquí su especial agradecimiento al Prof. Dr. C. O. R. Jaschek por haberle llamado la atención hace varios años acerca de este tema, facilitándole incluso material bibliográfico muy valioso.

** Para las referencias históricas y bibliográficas sobre este problema remitimos al lector al reciente tratado del Dr. Víctor Szebehely: "Theory of Orbits in the Restricted Problem of three Bodies", Academic Press, Nueva York, 1967.

a la forma (J_e). Finalmente demostramos que *si la excentricidad de los primarios es suficientemente pequeña, es posible determinar una banda vedada, en cuyo interior se mueve uno de los primarios, tal que un satélite no podrá superarla al cabo de un intervalo finito de tiempo.*

2. — Sean $1 - \mu$ y μ las masas de los primarios y (x_1, y_1) y (x_2, y_2) sus coordenadas sidéreas con origen en el baricentro de los mismos, respectivamente. Sean (x, y) las coordenadas del asteroide o satélite de masa m despreciable (nula).

Si indicamos con R y w el radio vector y la anomalía verdadera del movimiento elíptico de μ alrededor de $1 - \mu$, y con X e Y sus coordenadas heliocéntricas, se tiene

$$X = x_2 - x_1 = R \cos w; \qquad Y = y_2 - y_1 = R \operatorname{sen} w$$

Pero por ser 0 el baricentro de μ y $1 - \mu$ se tiene

$$(1 - \mu)x_1 + \mu x_2 = 0, \qquad (1 - \mu)y_1 + \mu y_2 = 0$$

De aquí se obtiene

$$\begin{aligned} x_1 &= -\mu X & \qquad x_2 &= (1 - \mu)X \\ y_1 &= -\mu Y & \qquad y_2 &= (1 - \mu)Y \end{aligned}$$

Las ecuaciones diferenciales del movimiento (plano) del punto de masa nula son

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{\partial\Omega}{\partial x} \\ \ddot{y} &= \frac{\partial\Omega}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad \text{donde} \quad \Omega = \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \tag{S}$$

siendo r_1 y r_2 las distancias de m a los primarios, o sea

$$r_1^2 = (x + \mu X)^2 + (y + \mu Y)^2; \qquad r_2^2 = (x - (1 - \mu)X)^2 + (y - (1 - \mu)Y)^2$$

(constante de Gauss $k^2 = 1$).

Si con α y β designamos dos funciones derivables cualesquiera de x, y y t, se tiene idénticamente

$$\frac{d}{dt}\left[(\dot{x} + \alpha)^2 + (\dot{y} + \beta)^2\right] = 2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} + 2\alpha\dot{\alpha} + 2\beta\dot{\beta} + 2\alpha\ddot{x} + 2\beta\ddot{y} + 2\dot{\alpha}\dot{x} + 2\dot{\beta}\dot{y}$$

En particular, si $x = x(t)$ e $y = y(t)$ es cualquier solución del sistema (S) se tendrá también, idénticamente

$$\frac{d}{dt}\left[(\dot{x} + \alpha)^2 + (\dot{y} + \beta)^2\right] = \frac{d}{dt}(2\Omega + \alpha^2 + \beta^2) + U + V \tag{I}$$

siendo

$$U = 2\alpha\frac{\partial\Omega}{\partial x} + 2\beta\frac{\partial\Omega}{\partial y} - 2\frac{\partial\Omega}{\partial t} \quad \text{y} \quad V = 2\dot{\alpha}\dot{x} + 2\dot{\beta}\dot{y}$$

Determinemos ahora las funciones α y β de tal modo que sea $U \equiv 0$. Se tiene, derivando la función Ω:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = -\frac{1-\mu}{r_1^3}M - \frac{\mu}{r_2^3}(M - X)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial y} = -\frac{1-\mu}{r_1^3}N - \frac{\mu}{r_2^3}(N - Y)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = -\frac{\mu(1-\mu)}{r_1^3}(M\dot{X} + N\dot{Y}) - \frac{\mu(1-\mu)}{r_2^3}[(M-X)\dot{X} + (N-Y)\dot{Y}]$$

donde hemos puesto

$$M = x + \mu X, \quad N = y + \mu Y$$

Para que sea $U \equiv 0$ se deberá tener, pues

$$M\alpha + N\beta = L_1 \tag{1}$$
$$X\alpha + Y\beta = L_2$$

siendo

$$L_1 = \mu(M\dot{X} + N\dot{Y})$$
$$L_2 = L_1 + (1-\mu)(M\dot{X} + N\dot{Y} - X\dot{X} - Y\dot{Y})$$

Del sistema (1) sigue

$$\alpha = \frac{L_1 Y - L_2 N}{MY - NX} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{L_2 M - L_1 X}{MY - NX} \quad \text{con } MY - NX \neq 0 \tag{2}$$

Recordando que en virtud de las fórmulas del problema de los dos cuerpos puede escribirse

$$R^2\frac{dw}{dt} = c, \qquad R = \frac{p}{1 + e\cos w}$$

donde, con $a = 1$, $n = k = 1$:

$$c = \sqrt{1-e^2}; \quad p = 1 - e^2$$

se obtiene sin dificultad

$$\dot{X} = -\varkappa\frac{Y}{R}; \quad \dot{Y} = \varkappa e + \varkappa\frac{X}{R}; \quad R\dot{R} = \varkappa eY, \ \varkappa = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$$

Es pues

$$L_1 = -\frac{\varkappa\mu}{R}(xY - yX) + \varkappa e\mu(y + \mu Y)$$

$$L_2 = \frac{1}{\mu}L_1 - \varkappa e(1-\mu)Y$$

Reemplazando ahora en (2) sigue

$$\alpha = \varkappa \frac{y}{R} - \varkappa e \frac{(y + \mu Y)(y - (1-\mu)Y)}{xY - yX}$$
$$\beta = - \varkappa \frac{x}{R} - \varkappa e(1-\mu) + \varkappa e \frac{(y + \mu Y)(x - (1-\mu)X)}{xY - yX} \tag{3}$$

Trataremos de hallar a continuación una transformación o cambio de variables definida por un par de funciones

$$x = x(\xi, \eta, t), \qquad y = y(\xi, \eta, t)$$

cuyo Jacobiano sea distinto de cero, tal que se cumpla la condición

$$\dot{x} + \alpha = \dot{y} + \beta = 0 \quad \text{cuando} \quad \dot{\xi} = \dot{\eta} = 0$$

con los valores de α y β recién determinados.

Resolvamos pues el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha, \qquad \frac{dy}{dt} = -\beta \tag{4}$$

Para ello integremos primero el sistema siguiente

$$\frac{dx}{dt} = -\varkappa \frac{y}{R} \qquad \frac{dy}{dt} = \varkappa \frac{x}{R} \tag{5}$$

Se tiene

$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0 \quad \text{y por tanto} \quad x^2 + y^2 = A^2$$

de donde resulta, despejando y y reemplazando en la primera de las ecuaciones (5):

$$-\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \varkappa \frac{dt}{R} \quad \text{y de aquí} \quad x = A \cos (B + \omega)$$

siendo

$$\omega = \varkappa \int \frac{dt}{R} = \frac{E}{\sqrt{1 - e^2}}, \quad (E\text{: anomalía excéntrica})$$

La solución del sistema (5) es pues

$$x = A \cos (B + \omega), \qquad y = A \operatorname{sen} (B + \omega) \tag{6}$$

Para resolver el sistema (4) aplicaremos ahora el método de variación de las constantes arbitrarias de Lagrange: Si en (6) suponemos A y B funciones de t, se obtiene derivando y reemplazando en (4):

$$\frac{x}{A} \dot{A} - y\left(\dot{B} + \frac{\varkappa}{R}\right) = -\varkappa \frac{y}{R} + \varkappa e \frac{(y + \mu Y)(y - (1-\mu)Y)}{xY - yX}$$

$$\frac{y}{A}\dot{A} + x\left(\dot{B} + \frac{\varkappa}{R}\right) = \varkappa\frac{x}{R} + \varkappa e(1-\mu) - \varkappa e\frac{(y+\mu Y)(x-(1-\mu)X)}{xY - yX}$$

Es pues

$$A\dot{A} = -\varkappa e\mu(1-\mu)Y$$

de donde

$$A^2 = C - \mu(1-\mu)R^2 \tag{7}$$

y eliminando la derivada $\dot{A}$ resulta

$$\dot{B} = \frac{\varkappa e}{xY - yX}\left[\frac{1-\mu}{A^2}(x^2Y - xyY) - y - \mu Y + \frac{1-\mu}{A^2}(xyX + y^2Y + \mu xXY + \mu yY^2)\right]$$

de donde

$$\dot{B} = -\frac{\varkappa ey}{xY - yX} + \frac{\varkappa e}{xY - yX}\left[(1-\mu)Y - \mu Y + \frac{\mu(1-\mu)Y}{A^2}(xX + yY)\right]$$

$$= \frac{\varkappa e}{R^2}\left(X - \frac{xX + yY}{xY - yX}Y\right) + \frac{\varkappa eY}{xY - yX}\left[1 - 2\mu + \frac{\mu(1-\mu)}{A^2}(xX + yY)\right]$$

Pero por ser

$$\frac{\varkappa e}{R^2}X = \frac{\varkappa p}{R^2} - \frac{\varkappa}{R} = \dot{w} - \dot{\omega}$$

$$xX + yY = AR\cos\Gamma \tag{8}$$

$$xY - yX = AR\,\text{sen}\,\Gamma \quad \text{donde} \quad \Gamma = B + \omega - w$$

nos queda, reemplazando en $\dot{B}$:

$$-\,\text{sen}\,\Gamma\,\dot{\Gamma} = -\frac{\varkappa eY}{AR^3}\left[-(1-2\mu)R^2 + AR\cos\Gamma - \mu(1-\mu)\frac{R^3}{A}\cos\Gamma\right]$$

y poniendo

$$\cos\Gamma = \frac{1}{2AR}q$$

se obtiene finalmente

$$\dot{q} = 2(1-2\mu)R\dot{R} \quad \text{de donde} \quad q = D + (1-2\mu)R^2$$

y por tanto

$$\cos(B + \omega - w) = \frac{1}{2AR}(D + (1-2\mu)R^2) \tag{9}$$

Las funciones

$$x = A\cos(B+\omega), \quad y = A\,\mathrm{sen}\,(B+\omega) \tag{10}$$

con A y B definidas por (7) y (9), en cuyas expresiones supondremos que C y D son *funciones arbitrarias* de ξ y η satisfacen obviamente la condición impuesta antes, ya que se tiene

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \xi}\dot{\xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\dot{\eta} = -\alpha \quad \text{cuando} \quad \dot{\xi} = \dot{\eta} = 0$$

y análogamente en el caso de $\dot{y}$.

Si reemplazamos ahora en r_1 y r_2, x, y, X e Y por sus valores se obtiene

$$\begin{aligned} r_1^2 &= x^2 + y^2 + \mu^2(X^2+Y^2) + 2\mu(xX+yY) \\ &= A^2 + \mu^2R^2 + 2\mu AR\cos\Gamma = C + \mu D \end{aligned} \tag{11}$$

en virtud de (7), (8), (9) y (10); y análogamente

$$\begin{aligned} r_2^2 &= r_1^2 + (1-2\mu)R^2 - 2(xX+yY) \\ &= r_1^2 + (1-2\mu)R^2 - 2AR\cos\Gamma = C - (1-\mu)D \end{aligned} \tag{12}$$

Si las funciones arbitrarias $C(\xi, \eta)$ y $D(\xi, \eta)$ satisfacen las condiciones

$$C + \mu D > 0 \qquad C - (1-\mu)D > 0$$

y el Jacobiano de C y D respecto de ξ y η es distinto de cero, existe la transformación inversa

$$\xi = \xi(x, y, t), \qquad \eta = \eta(x, y, t)$$

pudiéndose obtener de aquí, por derivaciones y eliminaciones, el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= f(t, \xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}; e) \\ \ddot{\eta} &= g(t, \xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}; e) \end{aligned} \tag{S_e^*}$$

equivalente al sistema (S) en las nuevas variables ξ y η. Tal ocurre, en particular, si se eligen las funciones C y D de tal modo que sea, como en el problema restringido circular

$$C + \mu D = (\xi+\mu)^2 + \eta^2, \quad C - (1-\mu)D = (\xi+\mu-1)^2 + \eta^2$$

de donde

$$C = \xi^2 + \eta^2 + \mu(1-\mu), \quad D = 2\xi + 2\mu - 1 \tag{13}$$

Con estos valores de C y D las fórmulas (7) y (9) pueden escribirse así

$$A^2 = \xi^2 + \eta^2 + \mu(1-\mu)(1-R^2)$$

$$\cos\Gamma = \frac{1}{2AR}\left(2\xi - (1-2\mu)(1-R^2)\right)$$

Pero más vale usar una transformación intermedia entre las variables x, y y ξ, η, introduciendo el siguiente par de funciones:

$$\begin{aligned} u &= A\cos\Gamma \\ v &= A\,\mathrm{sen}\,\Gamma \end{aligned}$$

mediante las cuales las ecuaciones (10) pueden escribirse del siguiente modo

$$x = u \cos w - v \operatorname{sen} w \qquad (14)$$
$$y = u \operatorname{sen} w + v \cos w$$

Se tiene entonces

$$u = \frac{\xi}{R} - \frac{1}{2}(1-2\mu)\frac{1-R^2}{R}\,; \qquad v = \sqrt{A^2 - u^2}$$

como asimismo

$$u = x \cos w + y \operatorname{sen} w$$
$$v = -x \operatorname{sen} w + y \cos w$$

De aquí sigue, derivando dos veces, eliminando $\dot{x}$ e $\dot{y}$ y utilizando el sistema (S):

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= \frac{\partial\Omega}{\partial u} + \dot{w}^2 u + \ddot{w} v + 2\dot{w}\dot{v} \\ \ddot{v} &= \frac{\partial\Omega}{\partial v} - \ddot{w} u + \dot{w}^2 v - 2\dot{w}\dot{u} \end{aligned} \qquad (S_e)$$

donde debe suponerse que se ha reemplazado en Ω, r_1 y r_2 por sus valores obtenidos de (11) y (12), o sea

$$r_1^2 = (u + \mu R)^2 + v^2; \qquad r_2^2 = (u - (1-\mu)R)^2 + v^2$$

3. — Incidentalmente observemos que en el problema de los dos cuerpos integrando la identidad (I) con $\alpha \equiv \beta \equiv 0$, resulta la integral de la energía. Si en este mismo problema, tomamos $\alpha \equiv y$ y $\beta \equiv -x$ se obtiene, por integración, una combinación lineal de la integral de la energía y de la del momento angular. En el problema restringido circular de los tres cuerpos, tomando $a = 1 \equiv R$, $n = k = 1$ resulta

$$\omega = w = t; \qquad \alpha = y; \qquad \beta = -x; \qquad \Gamma = B$$

siendo ahora, con $\xi \equiv \Xi$ y $\eta \equiv \mathrm{H}$:

$$A^2 = u^2 + v^2 = x^2 + y^2 = \Xi^2 + \mathrm{H}^2;$$

$$u = \Xi; \quad v = \mathrm{H}; \qquad \cos B = \frac{u}{A} = \frac{\Xi}{A}\,; \quad \operatorname{sen} B = \frac{\mathrm{H}}{A}$$

Reemplazando en (14) sigue

$$x = \Xi \cos t - \mathrm{H} \operatorname{sen} t \qquad (15)$$
$$y = \Xi \operatorname{sen} t + \mathrm{H} \cos t$$

vale decir que en este caso Ξ y H son las coordenadas sinódicas del asteroide o satélite.

Sustituyendo en la identidad (I) e integrando se obtiene

$$(\dot{x} + y)^2 + (\dot{y} - x)^2 = 2\Omega + x^2 + y^2 - K$$

y usando las fórmulas de transformación (15) queda

$$\dot{\Xi}^2 + \dot{\mathrm{H}}^2 = 2\Omega^*(\Xi, \mathrm{H}) - K$$

donde K es la constante de integración y

$$\Omega^* = \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{1}{2}(\Xi^2 + \mathrm{H}^2) \qquad \text{con} \left\{ \begin{array}{l} \rho_1^2 = (\Xi + \mu)^2 + \mathrm{H}^2 \\ \rho_2^2 = (\Xi + \mu - 1)^2 + \mathrm{H}^2 \end{array} \right.$$

es decir, la integral de Jacobi, reduciéndose ambos sistemas $(S_e^*) \equiv (S_e)$, en este caso, al sistema de Euler-Jacobi-Hill:

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{\Xi} - 2\dot{\mathrm{H}} = \dfrac{\partial \Omega^*}{\partial \Xi} \\[2ex] \ddot{\mathrm{H}} + 2\dot{\Xi} = \dfrac{\partial \Omega^*}{\partial \mathrm{H}} \end{array} \right. \qquad (S_0)$$

4. — Volvamos al caso restringido elíptico, suponiendo muy pequeña la excentricidad de los primarios; y con las mismas funciones C y D definidas por (13) procedamos a calcular las expresiones que figuran en la identidad (I). Se tiene

$$\dot{x} + \alpha = \frac{\partial x}{\partial \xi}\dot{\xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\dot{\eta}; \qquad \dot{y} + \beta = \frac{\partial y}{\partial \xi}\dot{\xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\dot{\eta}$$

Pero de (10) resulta en seguida

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{x}{A}\frac{\partial A}{\partial \xi} - y\frac{\partial B}{\partial \xi} \qquad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{y}{A}\frac{\partial A}{\partial \xi} + x\frac{\partial B}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{x}{A}\frac{\partial A}{\partial \eta} - y\frac{\partial B}{\partial \eta} \qquad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{y}{A}\frac{\partial A}{\partial \eta} + x\frac{\partial B}{\partial \eta}$$

Es pues

$$(\dot{x} + \alpha)^2 + (\dot{y} + \beta)^2 = S_{20}\dot{\xi}^2 + S_{02}\dot{\eta}^2 + 2S_{11}\dot{\xi}\dot{\eta}$$

donde

$$\left. \begin{array}{l} S_{20} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial A}{\partial \xi}\right)^2 + A^2\left(\dfrac{\partial B}{\partial \xi}\right)^2 \\[2ex] S_{02} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial A}{\partial \eta}\right)^2 + A^2\left(\dfrac{\partial B}{\partial \eta}\right)^2 \\[2ex] S_{11} = \dfrac{\partial x}{\partial \xi}\dfrac{\partial x}{\partial \eta} + \dfrac{\partial y}{\partial \xi}\dfrac{\partial y}{\partial \eta} = \dfrac{\partial A}{\partial \xi}\dfrac{\partial A}{\partial \eta} + A^2\dfrac{\partial B}{\partial \xi}\dfrac{\partial B}{\partial \eta} \end{array} \right. \qquad (F)$$

siendo además, en virtud de (7), (9) y (13):

$$\frac{\partial A}{\partial \xi} = \frac{1}{2A}\frac{\partial C}{\partial \xi}; \qquad \operatorname{sen}\Gamma\frac{\partial B}{\partial \xi} = \frac{1}{2AR}\left(\frac{R}{A}\cos\Gamma\frac{\partial C}{\partial \xi} - \frac{\partial D}{\partial \xi}\right)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \eta} = \frac{1}{2A}\frac{\partial C}{\partial \eta}; \qquad \operatorname{sen}\Gamma\frac{\partial B}{\partial \eta} = \frac{1}{2AR}\left(\frac{R}{A}\cos\Gamma\frac{\partial C}{\partial \eta} - \frac{\partial D}{\partial \eta}\right)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \xi} = 2\xi; \qquad \frac{\partial C}{\partial \eta} = 2\eta; \qquad \frac{\partial D}{\partial \xi} = 2; \qquad \frac{\partial D}{\partial \eta} = 0$$

Calculemos ahora V, último término de la identidad (I). Se tiene

$$\alpha = -\frac{\partial x}{\partial t} = \alpha(\xi, \eta, t; e); \qquad \beta = -\frac{\partial y}{\partial t} = \beta(\xi, \eta, t; e)$$

luego

$$\dot\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial \xi}\dot\xi + \frac{\partial \alpha}{\partial \eta}\dot\eta = -\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 x}{\partial \xi\,\partial t}\dot\xi - \frac{\partial^2 x}{\partial \eta\,\partial t}\dot\eta$$

$$\dot\beta = \frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial \beta}{\partial \xi}\dot\xi + \frac{\partial \beta}{\partial \eta}\dot\eta = -\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial \xi\,\partial t}\dot\xi - \frac{\partial^2 y}{\partial \eta\,\partial t}\dot\eta$$

$$\dot x = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \xi}\dot\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}\dot\eta; \qquad \dot y = \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\dot\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}\dot\eta$$

Es pues

$$-V = -2\dot\alpha\dot x - 2\dot\beta\dot y = s_{00} + s_{10}\dot\xi + s_{01}\dot\eta + s_{20}\dot\xi^2 + s_{02}\dot\eta^2 + s_{11}\dot\xi\dot\eta$$

donde

$$s_{00} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right] = \frac{\partial}{\partial t}(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$s_{10} = 2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)$$

$$s_{01} = 2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) \qquad (F_1)$$

$$s_{20} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2\right] = \frac{\partial S_{20}}{\partial t}$$

$$s_{02} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\right] = \frac{\partial S_{02}}{\partial t}$$

$$s_{11} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial S_{11}}{\partial t}$$

y en virtud de (10):

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{x}{A}\frac{\partial A}{\partial t} - y\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\varkappa}{R}y; \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{y}{A}\frac{\partial A}{\partial t} + x\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\varkappa}{R}x$$

Reemplazando en la identidad (I) e integrando queda entonces:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \xi}\dot{\xi} + \frac{\partial A}{\partial \eta}\dot{\eta}\right)^2 + A^2\left(\frac{\partial B}{\partial \xi}\dot{\xi} + \frac{\partial B}{\partial \eta}\dot{\eta}\right)^2 = 2\Omega^*(\xi, \eta) - K + \Delta(\xi, \eta, t; e) \qquad (J_e)$$

siendo K la constante de integración;

$$\Omega^*(\xi, \eta) = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) \qquad \begin{cases} r_1^2 = (\xi + \mu)^2 + \eta^2 \\ r_2^2 = (\xi + \mu - 1)^2 + \eta^2 \end{cases}$$

$$\Delta(\xi, \eta, t; e) = \alpha^2 + \beta^2 - \alpha_0^2 - \beta_0^2 - \int_{t_0}^{t}(s_{00} + s_{10}\dot{\xi} + s_{01}\dot{\eta} + s_{20}\dot{\xi}^2 + s_{02}\dot{\eta}^2 + 2s_{11}\dot{\xi}\dot{\eta})dt$$

donde con α_0 y β_0 indicamos los valores de α y β para $e = 0$.

Puesto que el primer miembro tiende a $\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2$ para $e \to 0$, la función $\Delta(\xi, \eta, t; e) \to 0$ también, para $e \to 0$.

Dejando para otra oportunidad el cálculo efectivo de las funciones que aparecen en esta identidad, como asimismo sus posibles simplificaciones, nos ocuparemos finalmente de la anunciada extensión del teorema de Hill.

5. — Sea K_0 un valor grande de la constante de Jacobi, correspondiente a un valor dado de μ y sea λ_0 la respectiva curva cerrada de velocidad nula de Hill, referida al sistema sinódico de coordenadas Ξ, H, en cuyo interior supondremos contenido no solamente el punto $A_0(1-\mu, 0)$ sino también, y para todo valor de t, el primario de masa μ, cuya distancia a A_0 está dada por

$$d^2 = d^2(A_0, \mu) = (1-\mu)^2\,(1 + R^2 - 2R\cos \mathcal{E}),$$

siendo $\mathcal{E} = w - M = w - t$ la ecuación del centro (M: anomalía media; $t_\pi = 0$: instante de pasaje por el perihelio).

Puesto que el máximo de dicha ecuación del centro es del orden de la excentricidad, bastará tomar ésta suficientemente pequeña, $e \leqq \varepsilon_1$, para que $d(A_0,\mu)$ sea menor que el mínimo de la distancia de A_0 a λ_0.

Para todo punto $(\Xi, \mathrm{H}) \in \lambda_0$ se tendrá entonces $2\Omega^*(\Xi, \mathrm{H}) = K_0$.

Sea $P(u_0, v_0)$ un punto interior a λ_0 la posición inicial para $t_0 = 0$ y sean $\dot{u}_0$, $\dot{v}_0$ las componentes de la velocidad inicial del movimiento de un satélite de μ regido por el sistema de ecuaciones diferenciales (S_e), tales que sea

$$\dot{\Xi}_0^2 + \dot{\mathrm{H}}_0^2 = 2\Omega^*(\Xi_0, \mathrm{H}_0) - K_0$$

siendo

$$\Xi_0 = u_0; \quad \mathrm{H}_0 = v_0; \quad \dot{\Xi}_0 = \dot{u}_0; \quad \dot{\mathrm{H}}_0 = \dot{v}_0$$

Con estas condiciones iniciales queda determinada la solución $\Xi(t)$, $H(t)$ del sistema (S_0) y por tanto también las funciones $\rho_1(t)$ y $\rho_2(t)$, valiendo además para todo t, la integral de Jacobi

$$\dot{\Xi}^2 + \dot{H}^2 = 2\Omega^*(\Xi, H) - K_0$$

merced a la cual se deduce que el punto $Q(\Xi(t), H(t))$ no puede ser exterior a λ_0 para ningún valor de t (Teorema de Hill).

Supongamos que exista un número positivo $\theta > 0$ tal que sea

$$\rho_1(t) \geqq \theta, \qquad \rho_2(t) \geqq \theta, \text{ para todo valor de } t.$$

En tal caso es posible resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (S_e), aplicando el teorema de Cauchy-Poincaré, en series convergentes del pequeño parámetro positivo e. La solución podrá escribirse en la forma

$$\begin{aligned} u &= u(t;e) = u(t;0) + u_1(t)e + u_2(t)e^2 + \\ v &= v(t;e) = v(t;0) + v_1(t)e + v_2(t)e^2 + \end{aligned} \tag{16}$$

donde

$$u(t;0) = \Xi(t); \qquad v(t;0) = H(t)$$

es la solución mencionada del sistema (S_0), al cual se reduce el (S_e) para $e = 0$, siendo además $u_\nu(0) = v_\nu(0) = \dot{u}_\nu(0) = \dot{v}_\nu(0) = 0$.

Las series (16) son convergentes para todo valor de t de un intervalo arbitrario $E{:}0 \leqq t \leqq T$, siempre que la excentricidad de los primarios sea suficientemente pequeña, $e \leqq \varepsilon_2$, ya que los segundos miembros del sistema (S_e) de ecuaciones diferenciales pueden desarrollarse en series múltiples de potencias de $u - \Xi$, $v - H$, $\dot{u} - \dot{\Xi}$, $\dot{v} - \dot{H}$ y e convergentes en cierto dominio

$$|u - \Xi| \leqq \pi; \quad |v - H| \leqq \pi; \quad |\dot{u} - \dot{\Xi}| \leqq \pi; \quad |\dot{v} - \dot{H}| \leqq \pi; \quad e \leqq \varepsilon_2$$

y esto para todo valor de t del mencionado intervalo.

Para demostrarlo, basta considerar el desarrollo de una cualquiera de las inversas de las distancias r_1 y r_2. Sea por ejemplo la función $1/r_2$. Se tiene

$$\frac{1}{r_2} = [(u - (1-\mu)R)^2 + v^2]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\rho_2}\left(1 + \frac{\lambda}{\rho_2^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

donde hemos puesto

$$\lambda = W^2 + Z^2 + 2(\Xi - (1-\mu)R)W + 2HZ + 2(1-\mu)(1-R)(\Xi + \mu - 1) + (1-\mu)^2(1-R)^2$$
$$W = u - \Xi; \qquad Z = v - H$$

Se tiene

$$|1 - R| \leqq e; \ |\Xi - (1-\mu)R| \leqq |\Xi + \mu - 1| + (1-\mu)e; \ |\Xi + \mu - 1| \leqq \rho_2; \ |H| \leqq \rho_2; \ \frac{1}{\rho_2} \leqq \frac{1}{\theta}$$

Luego será

$$\frac{|\lambda|}{\rho_2^2} \leqq \left(\frac{|W|}{\theta}\right)^2 + \left(\frac{|Z|}{\theta}\right)^2 + 2\left(1 + (1-\mu)\frac{e}{\theta}\right)\frac{|W|}{\theta} + \frac{2|Z|}{\theta} + 2(1-\mu)\,\frac{e}{\theta} + (1-\mu)^2\left(\frac{e}{\theta}\right)^2 << 1$$

siempre que los valores de $|W|$, $|Z|$ y e sean suficientemente pequeños, en cuyo caso la serie

$$\frac{1}{r_2} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{i} \frac{\lambda^i}{\rho_2^{2i+1}} = \sum_{(i,j,k)=0}^{\infty} a_{ijk}(t) W^i Z^j e^k$$

será absolutamente convergente, como se quería demostrar.

Indiquemos ahora con $U(t; e)$, $V(t; e)$ las coordenadas del punto $P[u(t, e)\ v(t; e)]$ referidas al sistema sinódico Ξ, H, esto es

$$\begin{aligned} U &= u \cos \varepsilon - v \operatorname{sen} \varepsilon \\ V &= u \operatorname{sen} \varepsilon + v \cos \varepsilon \end{aligned} \tag{16 a}$$

Reemplazando u y v por sus expresiones (16) se obtiene

$$\begin{aligned} U &= (\Xi + eu^I) \cos \varepsilon - (\mathrm{H} + ev^I) \operatorname{sen} \varepsilon \\ V &= (\Xi + eu^I) \operatorname{sen} \varepsilon + (\mathrm{H} + ev^I) \cos \varepsilon \end{aligned}$$

donde

$$u^I = u_1 + u_2 e + \qquad v^I = v_1 + v_2 e +$$

De aquí resulta

$$U - \Xi = -2 \operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{2} \left(\Xi \operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{2} + \mathrm{H} \cos \frac{\varepsilon}{2} \right) + e(u^I \cos \varepsilon - v^I \operatorname{sen} \varepsilon)$$

$$V - \mathrm{H} = 2 \operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{2} \left(\Xi \cos \frac{\varepsilon}{2} - \mathrm{H} \operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{2} \right) + e(u^I \operatorname{sen} \varepsilon + v^I \cos \varepsilon)$$

Puesto que el max $\varepsilon \rightarrow 0$ para $e \rightarrow 0$; que Ξ y H están acotadas para todo valor de t y que las funciones u^I y v^I están definidas por series convergentes para todo $t \in E$ y todo $e \leqq \varepsilon_2$, tendremos

$$|U - \Xi| \leqq \sigma/\sqrt{2}\ ; \quad |V - \mathrm{H}| \leqq \sigma/\sqrt{2} \tag{17}$$

siendo $\sigma > 0$ un número pequeño arbitrariamente prefijado, para todo $t \in E$ y todo $e \leqq \varepsilon_3 \leqq \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Indiquemos ahora con λ_1 la curva cerrada, exterior y paralela a λ_0 y sea σ el ancho de la banda Λ limitada por λ_0 y λ_1. Para cada punto $M \in \lambda_0$ se tendrá, por definición,

$$\min d(M, N) = \sigma, \text{ para todo punto } N \in \lambda_1$$

Pero por (17) sigue que la distancia de P a Q, es

$$d(P, Q) \leqq \sigma \text{ para todo } t \in E \text{ y todo } e \leqq \varepsilon_3$$

y puesto que Q no puede ser exterior a λ_0, el punto P no puede superar la banda Λ, como se quería demostrar, si la excentricidad de los primarios es suficientemente pequeña.

(Agregado el 21 de marzo de 1968). Si se eligen las funciones U y V definidas por las (16_a) como nuevas variables dependientes, el sistema (S_e) toma la sencilla forma

$$\ddot{U} - 2\dot{V} = \frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial U}\,; \quad \ddot{V} + 2\dot{U} = \frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial V} \tag{$\overline{S}$}$$

siendo

$$\overline{\Omega} = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}(U^2 + V^2)$$

$$r_1^2 = U^2 + V^2 + \mu^2 R^2 + 2\mu R(U \cos \mathcal{E} + V \operatorname{sen} \mathcal{E})$$

$$r_2^2 = U^2 + V^2 + (1-\mu)^2 R^2 - 2(1-\mu) R(U \cos \mathcal{E} + V \operatorname{sen} \mathcal{E})$$

La solución del sistema ($\overline{S}$) satisface entonces la identidad

$$\dot{U}^2 + \dot{V}^2 = 2\overline{\Omega}(U, V, t; e) - K - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial t}\, dt \tag{Y}$$

la cual puede escribirse en la forma

$$\dot{U}^2 + \dot{V}^2 = 2\overline{\Omega}_0(U, V) - K + \overline{\Delta}(U, V, t; e)$$

donde

$$\overline{\Omega}_0 = \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{1}{2}(U^2 + V^2)$$

$$\rho_1^2 = (U + \mu)^2 + V^2; \quad \rho_2^2 = (U + \mu - 1)^2 + V^2$$

Si las funciones ρ_1 y ρ_2 están acotadas inferiormente como antes, se tendrá

$$|\overline{\Delta}(U, V, t; e)| \leqq e(M + N|t - t_0|) \quad \text{con } M, N > 0$$

para valores pequeños de e, lo cual sugiere la posibilidad de obtener la demostración de nuestro teorema y de sus posibles generalizaciones sin recurrir al teorema de Cauchy-Poincaré.

Observatorio Astronómico de La Plata, Diciembre de 1967.

ESTE LIBRO SE TERMINÓ
DE IMPRIMIR EL DÍA 17
DE MAYO DEL AÑO 1968
EN LA IMPRENTA LÓPEZ,
PERÚ 666, BUENOS AIRES,
REPÚBLICA ARGENTINA