ISSN 0325 - 3163

OBSERVATORIO ASTRONOMICO DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
Director: Ing. PASTOR J. SIERRA
Serie Astronómica. Tomo XLI

LA FUERZA DE ATRACCION ENTRE DOS SISTEMAS ESFERICOS CUYA DENSIDAD SIGUE LA LEY DE SCHUSTER

(Una aplicación de las integrales elípticas)

por
JUAN C. MUZZIO y RUBEN E. MARTINEZ

La Plata
República Argentina
1982

LA FUERZA DE ATRACCION ENTRE DOS SISTEMAS ESFERICOS CUYA DENSIDAD SIGUE LA LEY DE SCHUSTER

(Una aplicación de las integrales elípticas)

Juan C. Muzzio* y Ruben E. Martínez

*: Miembro de la Carrera del Investigador Científico del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.

Resumen

Se halla la expresión matemática exacta de la fuerza de atracción entre dos sistemas esféricos cuya densidad sigue la ley de Schuster. A partir de ella se obtiene una expresión asintótica válida para grandes distancias entre centros.

Summary

We find the exact formula for the atractive force between two spherical systems whose density distridution follows Schuster's law. An asymptotic expression is derived for the special case of very large distances between centers.

Introducción

En las simulaciones numéricas del movimiento de cuerpos en presencia de campos gravitatorios de galaxias es frecuente representar a estos últimos con campos "ablandados" que, no sólo dan una representación más realista que el campo newtoniano, sino que tienen la ventaja adicional de evitar los problemas de la singularidad cuando la distancia mutua tiende a cero.

En el curso de investigaciones que, junto con el Dr. J. C. Forte, estamos realizando acerca de la acción de otras galaxias sobre los cúmulos globulares de una galaxia dada decidimos representar las galaxias con distribuciones de Schuster. La ley de Schuster se obtiene como solución politrópica, con n=5, para sistemas estelares con simetría esférica (ver, por ejemplo, Ogorodnikov, 1965). Siendo R la distancia al centro de simetría, G la constante de gravitación y A y B constantes arbitrarias positivas, la densidad de masa en un sistema que sigue la ley de Schuster es:

$$\delta(R) = \frac{3A}{4\pi G(1+BR^2)^{5/2}} \qquad A > 0 \qquad B > 0 \tag{1}$$

La densidad sólo se anula en el infinito y la masa contenida dentro de una esfera de radio R se puede obtener fácilmente como:

$$M(R)=\int_0^R \frac{4\pi R'^2 3A\, dR'}{(1+BR'^2)^{5/2} 4\pi G} = \frac{AR^3}{G(1+BR^2)^{3/2}} \qquad (2)$$

(usando la transformación $\sqrt{B}\,R' = \mathrm{Sh}\,x$)

En particular, para R tendiendo a infinito se obtiene la masa total del sistema:

$$M_T = \frac{A}{GB^{3/2}} \qquad (3)$$

La fuerza ejercida por el sistema sobre una masa puntual, m, a la distancia R del centro de simetría es pues:

$$\overline{F} = \frac{-A\overline{R}m}{(1+BR^2)^{3/2}} \qquad (4)$$

Como se ve, es una expresión muy cómoda para ser utilizada en problemas de N cuerpos, ya que $\overline{F}$ tiende a cero cuando R tiende a cero, no presentando singularidades. Los dos parámetros, A y B, permiten, por otra parte, una representación adecuada de los campos gravitatorios galácticos de sistemas esféricos. Nótese, además, que para R tendiendo a infinito la expresión asintótica tiende, como debe ser, a la ley de Newton para una masa central de masa igual a M_T.

El problema que nos interesa ahora es determinar la fuerza, no ya sobre una masa puntual, sino sobre una masa cuya distribución de densidad sea otra esfera de Schuster. Por ejemplo, en las investigaciones citadas, representamos las galaxias con esferas de Schuster y los cúmulos con masas puntuales; la fuerza ejercida sobre un cúmulo por las galaxias se obtiene fácilmente de (4) y lo que queremos hallar es, además, la fuerza que las galaxias ejercen entre sí. Evidentemente, como la ley de Schuster surge de considerar un sistema esférico autogravitante, tan pronto como se consideren dos o más galaxias interactuantes sus distribuciones se deformarán y no responderán ya a esa ley. Sería totalmente imposible tener en cuenta este efecto en un tratamiento analítico riguroso y nos limitaremos a suponer que las esferas de Schuster no se modifican por las interacciones mutuas. Este criterio coincide con el aplicado corrientemente, sin decirlo en forma explícita, por otros autores (por ejemplo, Aarseth, 1963, Toomre y Toomre, 1972) y permite, al menos, llegar a expresiones exactas que son coherentes con las fórmulas de partida.

Planteo general del problema

Si consideramos dos sistemas esféricos, 1 y 2, con las características antes mencionadas, cuyos centros están separados una distancia L (ver figura 1), el diferencial de la fuerza de atracción del sistema 2 sobre una masa elemental a distancia R del centro del sistema 1 está dado por:

$$d^2F = \frac{A_2(L-R\cos\theta)\ 3A_1\ 2\pi R^2 \operatorname{sen}\theta\ dR\ d\theta}{\left[1+B_2(R^2+L^2-2LR\cos\theta)\right]^{3/2}\ 4\pi G(1+B_1R^2)^{5/2}} \qquad (5)$$

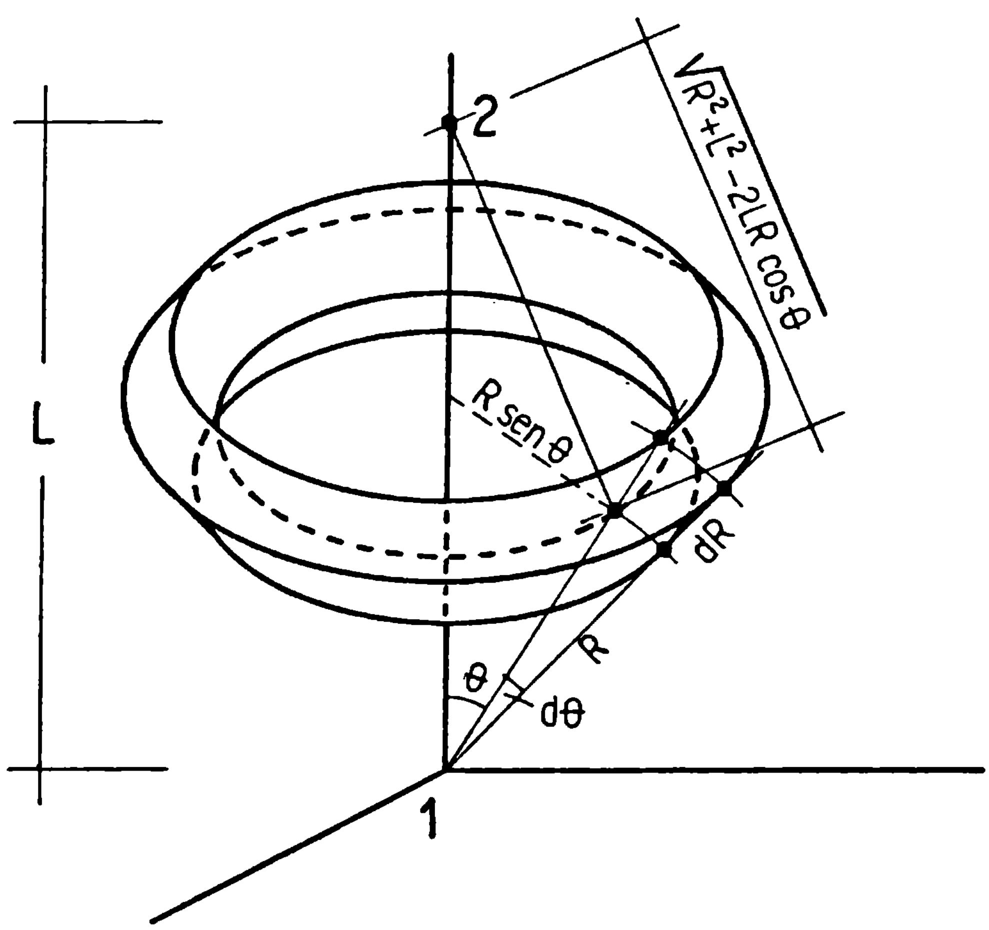


Figura 1

Integrando sobre toda la esfera se obtiene la expresión de la fuerza total entre ambos sistemas

$$F= \frac{3A_1A_2}{2G} \int_0^{\infty} \frac{R^2\, dR}{(1+B_1R^2)^{5/2}} \int_0^{\pi} \frac{(L-R\cos\theta)\, \operatorname{sen}\theta\, d\theta}{[1+B_2(R^2+L^2-2LR\cos\theta)]^{3/2}} \tag{6}$$

si tomamos la segunda integral a la que llamaremos I y efectuamos el cambio de variable $\cos\theta = x$, resulta

$$I=\int_{-1}^{1} \frac{(L-Rx)\quad dx}{[1+B_2(R^2+L^2-2LRx)]^{3/2}} = \frac{1}{2B_2L}\int_{-1}^{1} \frac{B_2L^2-B_2R^2-1+[1+B_2(R^2+L^2-2LRx)]\; dx}{[1+B_2(R^2+L^2-2LRx)]^{3/2}} =$$

$$= -\frac{1+B_2(R^2-L^2)}{2B_2L}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{[1+B_2(R^2+L^2)-2B_2LRx]^{3/2}} + \frac{1}{2B_2L}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{[1+B_2(R^2+L^2)-2B_2LRx]^{1/2}} \tag{7}$$

efectuando el cambio de variable $y=[1+B_2(R^2+L^2)-2B_2LRx]$ se facilita la integración resultando

$$I= \frac{-1}{R(B_2L)^2}\left[\frac{1+B_2R(R-L)}{\sqrt{1+B_2(R-L)^2}} - \frac{1+B_2(R+L)R}{\sqrt{1+B_2(R+L)^2}}\right] \tag{8}$$

reemplazando en (6) nos queda

$$F= \frac{3A_1A_2}{2G(B_2L)^2}\int_0^{\infty}\left[\frac{1+B_2(R+L)R}{\sqrt{1+B_2(R+L)^2}} - \frac{1+B_2(R-L)R}{\sqrt{1+B_2(R-L)^2}}\right]\frac{R\quad dR}{(1+B_1R^2)^{5/2}} \tag{9}$$

la integral la podemos expresar como la suma de dos integrales I_1 e I_2

$$I_1= \int_0^{\infty} \frac{1+B_2R(R+L)}{[1+B_2(R+L)^2]^{1/2}}\;\frac{R\quad dR}{(1+B_1R^2)^{5/2}} \tag{10}$$

$$I_2= -\int_0^{\infty} \frac{1+B_2R(R-L)}{[1+B_2(R-L)^2]^{1/2}}\;\frac{R\quad dR}{(1+B_1R^2)^{5/2}} \tag{11}$$

de forma que:

$$F=\frac{3A_1A_2}{2G(B_2L)^2}\quad(I_1+I_2) \tag{12}$$

las integrales I_1 e I_2 las resolveremos por partes tomando:

$$du=\frac{R\,dR}{(1+B_1R^2)^{5/2}} \qquad u=\frac{-1}{3B_1(1+B_1R^2)^{3/2}} \tag{13}$$

para ambas, con

$$v_1=\frac{1+B_2R(R+L)}{[1+B_2(R+L)^2]^{1/2}} \qquad \frac{dv_1}{dR}=\frac{B_2[R+B_2(R+L)^3]}{[1+B_2(R+L)^2]^{3/2}} \tag{14}$$

en I_1 y

$$v_2=\frac{1+B_2R(R-L)}{[1+B_2(R-L)^2]^{1/2}} \qquad \frac{dv_2}{dR}=\frac{B_2[R+B_2(R-L)^3]}{[1+B_2(R-L)^2]^{3/2}} \tag{15}$$

en I_2. Integrando resulta

$$I_1=\frac{1}{3B_1}+\frac{B_2}{3B_1}\int_0^\infty \frac{R+B_2(R+L)^3}{[1+B_2(R+L)^2]^{3/2}}\;\frac{dR}{(1+B_1R^2)^{3/2}} \tag{16}$$

$$I_2=-\left[\frac{1}{3B_1}+\frac{B_2}{3B_1}\int_0^\infty \frac{R+B_2(R-L)^3}{[1+B_2(R-L)^2]^{3/2}}\;\frac{dR}{(1+B_1R^2)^{3/2}}\right] \tag{17}$$

la fuerza nos queda ahora:

$$F=\frac{A_1A_2}{2GB_1B_2L^2}\int_0^\infty \frac{dR}{(1+B_1R^2)^{3/2}}\left[\frac{R+B_2(R+L)^3}{[1+B_2(R+L)^2]^{3/2}}-\frac{R+B_2(R-L)^3}{[1+B_2(R-L)^2]^{3/2}}\right] \tag{18}$$

expresando la integral como la suma de:

$$I_a=\int_0^\infty \frac{R+B_2(R+L)^3}{[1+B_2(R+L)^2]^{3/2}}\;\frac{dR}{(1+B_1R^2)^{3/2}} \tag{19}$$

$$I_b = -\int_{0}^{\infty} \frac{R' + B_2(R'-L)^3}{[1+B_2(R'-L)^2]^{3/2}} \quad \frac{dR'}{(1+B_1R'^2)^{3/2}} \tag{20}$$

y efectuando en I_b el cambio de variable $R' = -R$ se llega a:

$$F = \frac{A_1A_2}{2GB_1B_2L^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R+B_2(R+L)^3}{[1+B_2(R+L)^2]^{3/2}} \quad \frac{dR}{(1+B_1R^2)^{3/2}} \tag{21}$$

Esta es en definitiva la integral a resolver que tiene la anariencia de una integral hiperelíptica. Sin embargo, si en el denominador descomponemos los factores elevados a la 3/2 en el producto de cada factor por su raíz cuadrada, vemos que en realidad se trata de una integral elíptica.

Reducción a integrales elípticas de primera y segunda especie

Podemos expresar la fuerza como

$$F = \frac{A_1A_2}{2GB_1B_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(R/L)+B_2L^2((R/L)+1)^3}{[1+B_1L^2(R/L)^2]^{3/2}} \quad \frac{d(R/L)}{[1+B_2L^2((R/L)+1)^2]^{3/2}} \tag{22}$$

que, definiendo $x = R/L$; $g_1 = B_1L^2$; $g_2 = B_2L^2$, se transforma en:

$$F = \frac{A_1A_2L^4}{2Gg_1g_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+g_2(x+1)^3}{[1+g_1x^2]^{3/2}} \quad \frac{dx}{[1+g_2(x+1)^2]^{3/2}} \tag{23}$$

podemos escribir

$$F = \frac{A_1A_2L^4}{2Gg_1g_2} I \quad (24) \text{ donde } I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+g_2(x+1)^3}{[1+g_1x^2]^{3/2}} \quad \frac{dx}{[1+g_2(x+1)^2]^{3/2}} \tag{25}$$

utilizamos ahora la transformación $x = \dfrac{p+qy}{1+y}$ (26) (Hancock,1917)

despejando y tendremos

$$y = \frac{p-x}{x-q} \qquad (27)$$

(p y q son, como se verá, las raîces de una ecuación de segundo grado, las elegiremos como $p<q$)

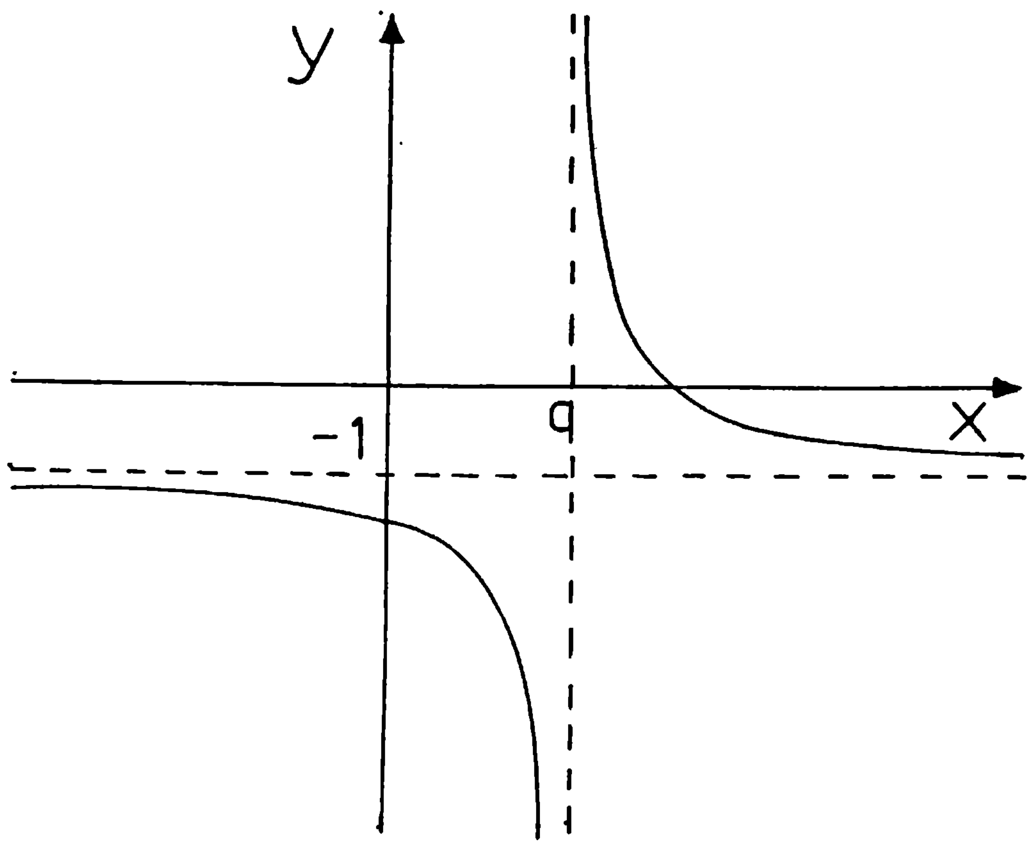


Figura 2

Analizando las expresiones (26) y (27) se ve que y no está definida para $x=q$ y x no lo está para $y=-1$, siendo la forma general de la transformación la de una hipérbola equilátera desplazada. Utilizando la figura 2 podemos entonces efectuar un correcto cambio de lîmites de integración. Para ello la ecuación (25) la generalizamos a

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x) = \int_{-\infty}^{q} dx\ f(x) + \int_{q}^{\infty} dx\ f(x) \qquad (28)$$

con el cambio de variables obtendremos

$$I=\int_{-1}^{-\infty} dy\ g(y) \quad + \int_{\infty}^{-1} dy\ g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} - dy\ g(y) \tag{29}$$

Efectuando el cambio de variables ahora sí en (25)

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{q-p}{(1+y)^2}\ \frac{\left[\frac{p+qy}{1+y} + g_2\left(\frac{p+qy}{1+y}+1\right)^3\right] dy}{\left\{\left[1+g_1\left(\frac{p+qy}{1+y}\right)^2\right]\left[1+g_2\left(\frac{p+qy}{1+y}+1\right)^2\right]\right\}^{3/2}} \tag{30}$$

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(q-p)\ \left[(p+qy)(1+y)^3+g_2(1+y)(p+qy+1+y)^3\right]\ dy}{\left[(1+y)^2+g_1(p+qy)^2\right]^{3/2}\ \left[(1+y)^2+g_2(p+qy+1+y)^2\right]^{3/2}} \tag{31}$$

imponiendo las condiciones

$$\begin{array}{ll} 1+g_1pq=0 & 1+g_2(p+1)(q+1)=0 \\ 1+g_1p^2=m^2 & 1+g_1q^2=n^2 \\ 1+g_2(p+1)^2=h^2 & 1+g_2(q+1)^2=l^2 \end{array} \tag{32}$$

el numerador lo podemos escribir como $(q-p)\left\{(1+y)\left[(p+qy+1+y)(1+y)^2-(1+y)^3+\right.\right.$ $\left.\left.+g_2(p+qy+1+y)^3\right]\right\}$ dy, efectuando los reemplazos correspondientes a las relaciones anteriores y operando se verifica que los productos cruzados de los cuadrados se anulan y la integral puede escribirse como

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(q-p)\ \left\{(1+y)\left[(p+1)+(q+1)y\right](h^2+l^2y^2)-(1+y)^4\right\}dy}{\left[m^2+n^2y^2\right]^{3/2}\ \left[h^2+l^2y^2\right]^{3/2}} \tag{33}$$

Las integrales de los términos con potencias impares de y son nulas, por lo que quedan sólo las pares:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(q-p)\ \left\{\left[(p+1)+(q+1)y^2\right](h^2+l^2y^2)-(1+6y^2+y^4)\right\}\ dy}{\left[m^2+n^2y^2\right]^{3/2}\ \left[h^2+l^2y^2\right]^{3/2}} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(q-p)\ \left\{[h^2(p+1)-1]+[h^2(q+1)+l^2(p+1)-6]y^2+[l^2(q+1)-1]y^4\right\}\ dy}{[m^2+n^2y^2]^{3/2}\ \ [h^2+l^2y^2]^{3/2}} =$$

$$= \frac{q-p}{m^3h^3}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{[h^2(p+1)-1]-6y^2+[l^2(q+1)-1]y^4\ \ dy}{\left[1+\left(\frac{ny}{m}\right)^2\right]^{3/2}\ \left[1+\left(\frac{ly}{h}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{34}$$

se puede demostrar que si $q>p$ es $l^2m^2>n^2h^2$ (recordar que $g_1>0$ y $g_2>0$)

Definimos $C^2= \frac{h^2n^2}{l^2m^2}$ y $t= \frac{ly}{h}$

$$I= \frac{q-p}{m^3h^3l}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h\left\{[h^2(p+1)-1]-6(h^2/l^2)t^2+[l^2(q+1)-1](h^4/l^4)t^4\right\}\ dt}{[1+C^2t^2]^{3/2}\ [1+t^2]^{3/2}} \tag{35}$$

efectuando el cambio de variable $t= tg\phi$ $dt= \frac{d\phi}{\cos^2\phi}$ y definiendo $k^2=1-C^2$

$$I= \frac{q-p}{m^3h^2l}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{[h^2(p+1)-1]\cos^4\phi-6(h^2/l^2)\mathrm{sen}^2\phi\ \cos^2\phi+[l^2(q+1)-1](h^4/l^4)\mathrm{sen}^4\phi\ \ d\phi}{[\cos^2\phi+(1-k^2)\mathrm{sen}^2\phi]^{3/2}} \tag{36}$$

reemplazando $\cos^2\phi=1-\mathrm{sen}^2\phi$, $\cos^4\phi=1-2\mathrm{sen}^2\phi+\mathrm{sen}^4\phi$ y agrupando podemos escribir

$$I= \int_0^{\pi/2} \frac{(a+b\ \mathrm{sen}^2\phi\ +\ c\ \mathrm{sen}^4\phi)\ d\phi}{[1-k^2\ \mathrm{sen}^2\phi]^{3/2}} \tag{37}$$

donde

$$a= \frac{2(q-p)}{m^3h^2l}\left\{h^2(p+1)-1\right\}$$

$$b= \frac{2(q-p)}{m^3h^2l}\left\{-2[h^2(p+1)-1]-\ 6(h^2/l^2)\right\} \tag{38}$$

$$c= \frac{2(q-p)}{m^3h^2l}\left\{[h^2(p+1)-1]+6(h^2/l^2)+[l^2(q+1)-1](h^4/l^4)\right\}$$

En la integral I podemos descomponer en fracciones simples a

$$\frac{a+b\ sen^2\phi + c\ sen^4\phi}{1-k^2\ sen^2\phi} \tag{39}$$

resultando

$$\frac{A'}{1-k^2\ sen^2\phi} + \frac{B'(1-k^2\ sen^2\phi)}{1-k^2\ sen^2\phi} + \frac{C'(1-k^2\ sen^2\phi)^2}{1-k^2\ sen^2\phi} \tag{40}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} a &= A' + B' + C' \\ b &= -k^2B' - 2k^2C' \\ c &= k^4C' \end{aligned} \tag{41}$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} C' &= \frac{c}{k^4} \\ B' &= -\frac{b}{k^2} - \frac{2c}{k^4} \\ A' &= a + \frac{b}{k^2} + \frac{c}{k^4} \end{aligned} \tag{42}$$

la integral I nos queda expresada como una combinación lineal de los coeficientes A', B' y C' con las integrales elípticas de tercera, primera y segunda especie respectivamente

$$I = A'\,\Pi(-k^2,k) + B'\,K(k) + C'\,E(k) \tag{43}$$

se puede demostrar que a $\Pi(-k^2,k)$ la podemos escribir como $E(k)/(1-k^2)$ (ver: Gröbner y Hofreiter, 1966); reemplazando en I nos queda

$$I=\left[\frac{A'}{1-k^2}+C'\right]E(k)+B'K(k) \qquad (44)$$

Nuestro paso siguiente será encontrar A', B' y C' en función de cantidades conocidas.

De las condiciones (32) podemos deducir:

$$g_1=-\frac{1}{pq} \qquad m^2=1-\frac{p}{q}=\frac{q-p}{q}$$

$$g_2=-\frac{1}{(p+1)(q+1)} \qquad n^2=1-\frac{q}{p}=-\frac{q-p}{p}$$

$$p=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{g_1}-\frac{1}{g_2}-1-\sqrt{\left(\frac{1}{g_1}-\frac{1}{g_2}-1\right)^2+\frac{4}{g_1}}\right\} \qquad h^2=1-\frac{p+1}{q+1}=\frac{q-p}{q+1} \qquad (45)$$

$$q=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{g_1}-\frac{1}{g_2}-1+\sqrt{\left(\frac{1}{g_1}-\frac{1}{g_2}-1\right)^2+\frac{4}{g_1}}\right\} \qquad l^2=1-\frac{q+1}{p+1}=-\frac{q-p}{p+1}$$

además

$$k^2=\frac{l^2m^2-h^2n^2}{l^2m^2}=\frac{-(q-p)}{p(q+1)} \qquad (46) \qquad\qquad 1-k^2=\frac{q(p+1)}{p(q+1)} \qquad (47)$$

con estas relaciones podemos calcular a, b y c en función de p y q

$$a=\frac{2q\sqrt{-q(p+1)}}{(q-p)^2}\left[(q-p)p-(p+1)\right] \qquad (48)$$

$$b=\frac{2q\sqrt{-q(p+1)}}{(q-p)^2}\left[8(p+1)-2p(q-p)\right] \qquad (49)$$

$$c = -\frac{2q\sqrt{-q(p+1)}}{(q-p)^2}\left[\frac{(q-p)^2+8(p+1)(q+1)}{q+1}\right] \tag{50}$$

a partir de las relaciones (42) encontramos que

$$C' = \frac{-2p^2q(q+1)\sqrt{-q(p+1)}}{(q-p)^4}\left[(q-p)^2+8(p+1)(q+1)\right] \tag{51}$$

$$B' = -\frac{b}{k^2} - \frac{2c}{k^4} = \frac{2\sqrt{-q(p+1)}}{(q-p)^2}\frac{p(q+1)q}{q-p}\left[8(p+1)-2p(q-p)\right] - \frac{4p^2q(q+1)\sqrt{-q(q+1)}}{(q-p)^4}\left[(q-p)^2+\right.$$

$$\left.+\,8(p+1)(q+1)\right] = \frac{16qp(q+1)(p+1)\sqrt{-q(p+1)}}{(q-p)^4}\left[q+2pq+p\right] \tag{52}$$

$$\frac{A'}{1-k^2} + C' = \frac{1}{1-k^2}\left[a + \frac{b}{k^2} + \frac{c}{k^4}\right] + \frac{c}{k^4} =$$

$$= \frac{-2(pq+p)\sqrt{-qp-p}}{(q-p)^2}\left\{1 + \frac{16pq(q+1)(p+1)}{(q-p)^2}\right\} \tag{53}$$

Utilizando las relaciones (45) se puede expresar los coeficientes de I en función de g_1 y g_2

$$\frac{A'}{1-k^2} + C' = \frac{\sqrt{2}\,g_1g_2\sqrt{g_1+g_2+g_1g_2+\sqrt{(g_2-g_1)^2+g_1g_2(g_1g_2+2g_1+2g_2)}}}{\left[(g_2-g_1)^2+g_1g_2(g_1g_2+2g_1+2g_2)\right]^2}\ x$$

$$x\ \left[(g_2-g_1)^2+g_1g_2(16+g_1g_2+2g_1+2g_2)\right] \tag{54}$$

$$B' = \frac{-8g_1g_2(g_1+g_2+g_1g_2)\sqrt{2\left[g_1g_2+g_1+g_2-\sqrt{(g_2-g_1)^2+g_1g_2(g_1g_2+2g_1+2g_2)}\right]g_1g_2}}{\left[(g_2-g_1)^2+g_1g_2(g_1g_2+2g_1+2g_2)\right]^2} \tag{55}$$

$$k^2 = \frac{2\sqrt{(g_1-g_2)^2+g_1g_2(g_1g_2+2g_1+2g_2)}}{g_1g_2+g_1+g_2+\sqrt{(g_1-g_2)^2+g_1g_2(g_1g_2+2g_1+2g_2)}} \qquad (56)$$

Nótese la perfecta simetría respecto de g_1 y g_2, requerida por el principio de acción y reacción, pero que no era evidente en las expresiones de los pasos intermedios.

Expresión asintótica

Buscaremos ahora una expresión aproximada válida para grandes distancias entre centros. Veremos que resulta una expresión para la fuerza mucho más simple que las fórmulas (54), (55) y (56) y que resulta muy conveniente para utilizarla en experimentos numéricos como los indicados en la Introducción.

Podemos expresar las ecuaciones (54) y (55) en función de k:

$$\frac{A'}{1-k^2} + C' = \frac{2}{k^2} \frac{\sqrt{-q(p+1)}}{q-p} \left[1 - \frac{16}{k^2} + \frac{16}{k^4}\right] \qquad (57)$$

$$B' = \frac{2}{k^2} \frac{\sqrt{-q(p+1)}}{q-p} \left[-8 + \frac{24}{k^2} - \frac{16}{k^4}\right] \qquad (58)$$

Si en la expresión (56) para k^2 dividimos numerador y denominador por g_1g_2 y tenemos en cuenta que al ser L muy grande son:

$$g_1 = B_1L^2 \gg 1 \qquad\qquad g_2 = B_2L^2 \gg 1 \qquad (59)$$

efectuando desarrollos en serie hasta el segundo orden se llega a

$$k^2 = \frac{2\left[1 + \dfrac{1}{g_1} + \dfrac{1}{g_2} - \dfrac{2}{g_1 g_2}\right]}{2\left(1 + \dfrac{1}{g_1} + \dfrac{1}{g_2}\right) - \dfrac{2}{g_1 g_2}} \simeq 1 - \frac{1}{g_1 g_2} \tag{60}$$

$$B' = \frac{-8 g_1^2 g_2^2 \left(\dfrac{1}{g_1} + \dfrac{1}{g_2} + 1\right) \sqrt{2 g_1^2 g_2^2 \left[1 + \dfrac{1}{g_1} + \dfrac{1}{g_2} - \sqrt{\left(\dfrac{1}{g_1} - \dfrac{1}{g_2}\right)^2 + 1 + \dfrac{2}{g_1} + \dfrac{2}{g_2}}\,\right]}}{g_1^4 g_2^4 \left[\left(\dfrac{1}{g_1} - \dfrac{1}{g_2}\right)^2 + 1 + \dfrac{2}{g_1} + \dfrac{2}{g_2}\right]^2} \tag{61}$$

realizando nuevamente desarrollos en serie obtendremos

$$B' \simeq \frac{-8\left(1 + \dfrac{1}{g_1} + \dfrac{1}{g_2}\right) \sqrt{2\left[1 + \dfrac{1}{g_1} + \dfrac{1}{g_2} - 1 - \dfrac{1}{g_1} - \dfrac{1}{g_2} + \dfrac{2}{g_1 g_2}\right]}}{g_1 g_2 \left[1 + \dfrac{4}{g_1} + \dfrac{4}{g_2} + \dfrac{6}{g_1^2} + \dfrac{6}{g_2^2} + \dfrac{4}{g_1 g_2}\right]} \simeq \frac{-16}{(g_1 g_2)^{3/2}} \tag{62}$$

en Abramowitz y Stegun (1965) se puede encontrar que

$$\lim_{k \to 1} K = \lim_{k \to 1} \frac{1}{2} \ln \frac{16}{1-k^2} = \lim_{g_1 g_2 \to \infty} \frac{\ln(16 g_1 g_2)}{2} \tag{63}$$

de lo que resulta

$$\lim_{k \to 1} B' . K(k) = 0 \left[1/(g_1 g_2)^{3/2}\right] \tag{64}$$

$$\frac{A'}{1-k^2} + C' = \frac{\sqrt{2}\,(g_1g_2)^{3/2}\sqrt{\frac{1}{g_1}+\frac{1}{g_2}+1+\sqrt{\left(\frac{1}{g_1}-\frac{1}{g_2}\right)^2+1+\frac{2}{g_1}+\frac{2}{g_2}}}}{(g_1g_2)^4\left[\left(\frac{1}{g_1}-\frac{1}{g_2}\right)^2+1+\frac{2}{g_1}+\frac{2}{g_2}\right]^2}$$

$$g_1^{\,2}g_2^{\,2}\left[\left(\frac{1}{g_1}-\frac{1}{g_2}\right)^2+\frac{16}{g_1g_2}+1+\frac{2}{g_1}+\frac{2}{g_2}\right] \approx$$

$$\approx \frac{2}{\sqrt{g_1g_2}}\;\frac{\sqrt{1+\frac{1}{g_1}+\frac{1}{g_2}-\frac{1}{g_1g_2}}}{\left[1+\frac{4}{g_1}+\frac{4}{g_2}+\frac{4}{g_1g_2}+\frac{6}{g_1^{\,2}}+\frac{6}{g_2^{\,2}}\right]}\left[1+\frac{2}{g_1}+\frac{2}{g_2}+\frac{14}{g_1g_2}+\frac{1}{g_1^{\,2}}+\frac{1}{g_2^{\,2}}\right] \approx$$

$$\approx \frac{2}{\sqrt{g_1g_2}}\;\frac{\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{g_1}+\frac{1}{g_2}\right)-\frac{3}{4}\,\frac{1}{g_1g_2}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{g_1^{\,2}}+\frac{1}{g_2^{\,2}}\right)\right]}{\left[1+\frac{4}{g_1}+\frac{4}{g_2}+\frac{4}{g_1g_2}+\frac{6}{g_1^{\,2}}+\frac{6}{g_2^{\,2}}\right]}$$

$$\left[1+\frac{2}{g_1}+\frac{2}{g_2}+\frac{14}{g_1g_2}+\frac{1}{g_1^{\,2}}+\frac{1}{g_2^{\,2}}\right] \approx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{g_1 g_2}} \frac{\left[1 + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2}\right) + \frac{61}{4}\frac{1}{g_1 g_2} + \frac{15}{8}\left(\frac{1}{g_1^2} + \frac{1}{g_2^2}\right)\right]}{\left[1 + \frac{4}{g_1} + \frac{4}{g_2} + \frac{4}{g_1 g_2} + \frac{6}{g_1^2} + \frac{6}{g_2^2}\right]} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{g_1 g_2}} \frac{1}{\left[1 + \frac{3}{2}\frac{1}{g_1} + \frac{3}{2}\frac{1}{g_2}\right]} = \frac{2}{\sqrt{g_1 g_2}\left(1 + \frac{1}{g_1}\right)^{3/2}\left(1 + \frac{1}{g_2}\right)^{3/2}} \tag{65}$$

De la relación de Legendre (Abramowitz y Stegun, 1965):

$$E(k)\ K(\sqrt{1-k^2}) + E(\sqrt{1-k^2})\ K(k) - K(k)\ K(\sqrt{1-k^2}) = \frac{\pi}{2} \tag{66}$$

y utilizando los desarrollos en series de potencias de $E(k)$ y $K(k)$ (Hancock, 1917) se obtiene:

$$\left[- 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1x3}{2x4}\right)^2 \frac{4}{3} k^4 - \right] K(\sqrt{1-k^2}) +$$

$$+ E(\sqrt{1-k^2}) \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1x3}{2x4}\right)^2 k^4 + \right] = 1 \tag{67}$$

y en términos de g_1 y g_2, hasta segundo orden:

$$E\left(\sqrt{1 - \frac{1}{g_1 g_2}}\right) = 1 - \frac{1}{4}\frac{1}{g_1 g_2} + \frac{1}{2}\frac{1}{g_1 g_2} K\left(\sqrt{1 - \frac{1}{g_1 g_2}}\right) \tag{68}$$

y ahora de (62), (65) y (68) queda, teniendo en cuenta (64):

$$I=\frac{1}{\sqrt{g_1 g_2}}\left\{\frac{2}{\left(1+\dfrac{1}{g_1}\right)^{3/2}\left(1+\dfrac{1}{g_2}\right)^{3/2}}+O\left[\frac{1}{g_1 g_2},\frac{1}{g_1^{2}},\frac{1}{g_2^{2}}\right]\right\} \qquad (69)$$

De modo que la expresión asintótica de la fuerza, válida para grandes distancias es, finalmente:

$$F=\frac{A_1 A_2 L^4}{G\,(1+B_1L^2)^{3/2}\,(1+B_2L^2)^{3/2}} \qquad (70)$$

Esta expresión es mucho más simple que la expresión exacta y permite un enorme ahorro de tiempo en los cómputos relacionados con la solución numérica del problema de N cuerpos.

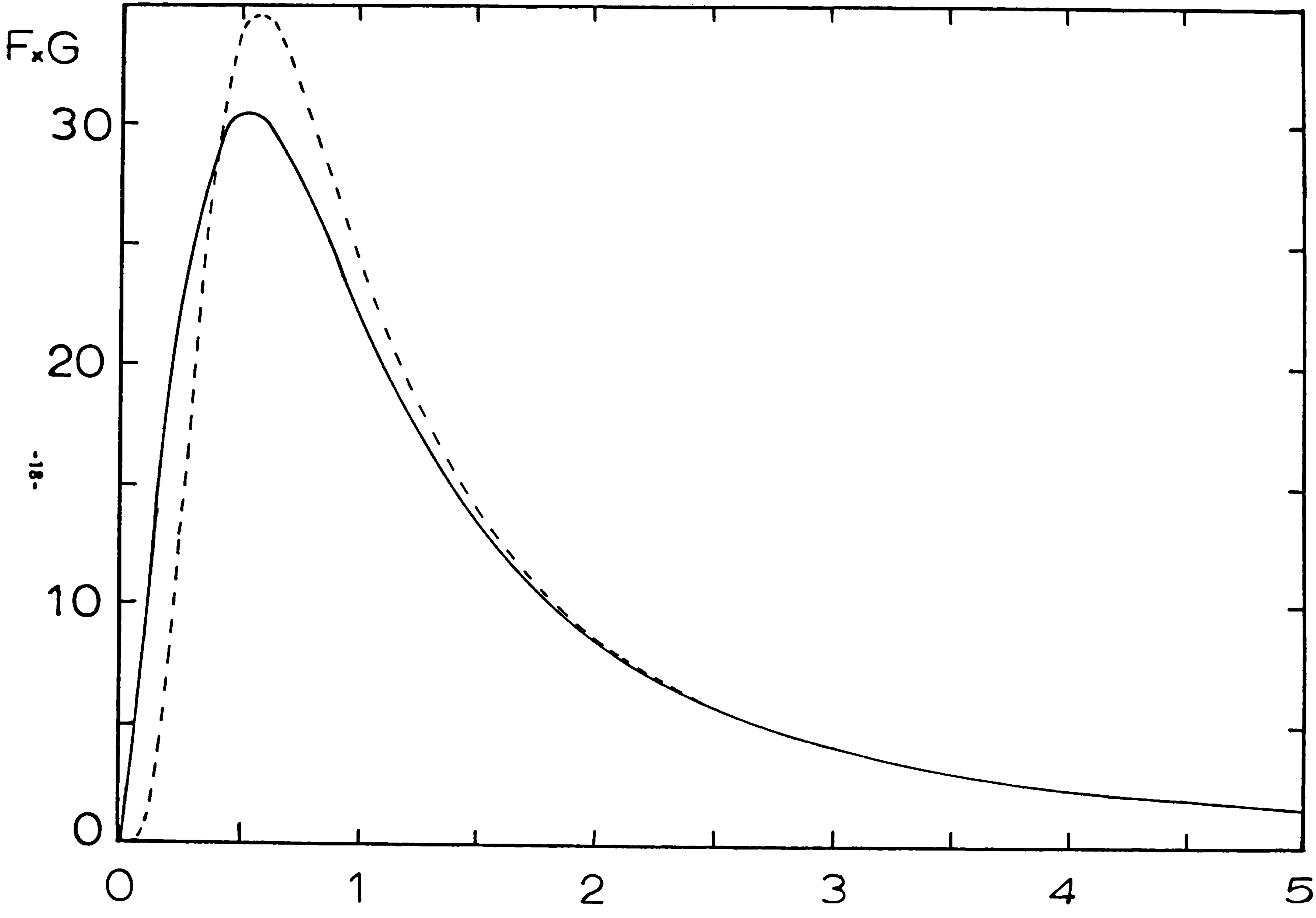
En la figura 3 se ha graficado la fuerza (multiplicada por la constante gravitatoria, G) en función de la distancia para $A_1=A_2=100$, $B_1=4$ y $B_2=10$. En trazo lleno se ha representado el resultado obtenido con la expresión exacta en base a integrales elípticas y con línea de trazos el resultado de la expresión (70). Puede apreciarse el perfecto ajuste de la expresión asintótica en su zona de validez. Más aún, si tomamos como "mucho mayor" un factor 8 vemos que, para la expresión (70), el límite de L es aproximadamente 1.4 para B_1 y 0.9 para B_2, pudiendo apreciarse la excelente concordancia de la expresión aproximada con el resultado exacto a partir del mayor de estos valores; o sea, hay acuerdo aceptable para

$$B_1L^2 > 8 \quad y \quad B_2L^2 > 8 \qquad (71)$$

Como de (4) se deduce fácilmente que la velocidad circular es:

$$V=\frac{\sqrt{A}\,R}{(1+BR^2)^{3/4}} \qquad (72)$$

alcanzando su máximo en:


F x G
30
20
10
0
0
1
2
3
4
5

$$B\,R_{max}^2 = 2 \tag{73}$$

podemos concluir que la expresión (70) brinda un excelente ajuste para distancias superiores al doble de la distancia donde se produce la máxima velocidad circular. La expresión citada resulta, pues, una aproximación harto satisfactoria ya que para distancias menores a esas es indudable que, en galaxias reales, habría grandes deformaciones a causa de la interacción mutua y, al respecto, nos remitiremos a lo indicado en la Introducción. La figura 3 muestra, además, que aún para pequeñas distancias, la expresión (70) reproduce razonablemente bien el comportamiento cualitativo de la expresión exacta.

Dada la enorme ventaja de la expresión (70) sobre la expresión exacta en lo que a tiempo de cómputo se refiere, concluímos que en simulaciones numéricas del problema de N cuerpos que incluyen objetos extensos (galaxias) y puntuales (cúmulos), y donde se represente la interacción de los objetos extensos con los puntuales mediante la expresión (4), es aconsejable emplear la expresión (70) para representar las interacciones entre los objetos extensos.

Agradecimientos

Deseamos expresar nuestra gratitud a la Sra. M. C. Fanjul de Correbo y al Sr. A. J. Mateo por la realización de los dibujos y a la Calc. Cient. G. Ginestet y al Sr. R. C. Leonardi por su asistencia en el uso del equipo de computación HP 1000. Agradecemos, además, el apoyo brindado mediante subsidios de la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires y de la Subsecretaría de Estado de Ciencia y Tecnología.

Bibliografía

Abramowitz, M. y Stegun, I. A. 1965, Handbook of Mathematical Functions (Dover Publications, Inc.).

Aarseth, S. J. 1963, Mon.Not. Royal Astron. Soc. 126,223.

Gröbner, W. y Hofreiter, N. 1966, Integraltafel, Zweiter Teil, Bestimmte Integrale (Springer-Verlag).

Hancock, H. 1917, Elliptic Integrals (edición de Dover Publications, Inc. de 1958).

Ogorodnikov, K. F. 1965, Dynamics of Stellar Systems (Pergamon Press).

Toomre, A. y Toomre, J. 1972, Astrophys. J. 178, 623.

THE ATTRACTIVE FORCE BETWEEN TWO SPHERICAL SYSTEMS WHOSE DENSITY DISTRIBUTION FOLLOWS SCHUSTER'S LAW

Juan C. Muzzio and Ruben E. Martinez

Summary

In order to investigate the swapping of globular clusters among the galaxies of a cluster of galaxies (e.g., Forte, J.C., Martinez, R.E. and Muzzio, J.C., Astron.J. Nov. 1982 issue, in press) we are performing numerical experiments where the globulars are represented with massless points and the density distribution of the galaxies follows Schuster s law (formula 1, where R is the distance to the galactic center, G is the gravitational constant and A and B are constants). The total galactic mass is then given by (3) and the force on a point mass, m, is given by (4). Our problem is to derive the attractive force between two galaxies that obey Schuster s law and the exact result we derived is given by formulae (24), (44), (54), (55) and (56) which give that force in terms of the complete elliptical integrals of the first and the second kind (g=BLL, where L is the distance between the centers of the two galaxies).

That exact result is rather inadecuate for use in numerical experiments because it involves lengthy computations. Since our analysis ignores the strong departures from Schuster's law which may occur when both galaxies are close together, it seems more convenient to obtain a simpler asymptotic formula that agrees with the exact one when the distance between the galactic centers is large. Our asymptotic result for the force between the two galaxies is given by formula (70). Figure 3 shows the excellent agreement between the exact formula (full line) and the asymptotic expression (dashed line) for distances that satisfy (71); since the maximum circular velocity in Schuster's potential is obtained for Rmax given by (73) we conclude that it is enough to consider distances larger than two times Rmax to have an adecuate representation of the force just with the asymptotic expression. Moreover, Figure 3 shows that even for small distances between the galactic centers the qualitative behavior of both the exact and the asymptotic formulae is very similar.

In conclusion, we advocate the use of formula (70) to represent the galaxy-galaxy interaction in combination with the acceleration derived from formula (4) for a massless point to represent the galaxy-globular cluster interaction.