Libros de Cátedra

Al infinito y más allá

Un primer encuentro con el análisis matemático

Félix Aloé - Lucila Calderón - Nicolás Kepes
Cecilia Sottile

FACULTAD DE
CIENCIAS EXACTAS

FACULTAD DE
INFORMÁTICA

exactas

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE LA PLATA

AL INFINITO Y MÁS ALLÁ

un primer encuentro con el Análisis Matemático

Félix Aloé
Lucila Calderón
Nicolás Kepes
Cecilia Sottile

Facultad de Ciencias Exactas
Facultad de Informática

EDUCACIÓN PÚBLICA Y GRATUITA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

edulp
EDITORIAL DE LA UNLP

El presente texto reúne los contenidos de Matemática 2, materia del segundo semestre para todas las carreras que se brindan en la Facultad de Informática de la Universidad Nacional de La Plata. Es el material de trabajo para el aula en los cursos habituales de esta asignatura, pero también puede convertirse en apoyo para todo aquel que desee introducirse en el conocimiento de rudimentos del Análisis Matemático.

Los contenidos de Matemática 2 se corresponden con los de la asignatura Análisis Matemático 1 que clásicamente se estudian en muchas carreras de informática y otras ciencias.

El libro presenta las funciones básicas del cálculo en una variable, y las herramientas de análisis matemático que se desarrollan a fin de el estudio de funciones más complejas. Se presenta la derivada de la función y sus aplicaciones en varios ejemplos. Asimismo se trabaja con el concepto de integral y sobre algunas de sus aplicaciones.

El texto contiene definiciones teóricas y numerosos ejemplos prácticos, acompañados con interpretaciones geométricas y figuras como apoyo para los razonamientos que se comparten.

El eje central que estructura el libro es el programa de la asignatura, pero además recoge gran parte de la cultura áulica que se construye a través de las conversaciones y el intercambio oral. Está presente, en los modos de escritura y desarrollo de los conceptos que son parte de este recorrido, la experiencia de les autores como docentes de esta y otras asignaturas. Es así que las maneras que se han elegido para presentar los conceptos condensa esa experiencia en la práctica de intercambio oral y reflexión conjunta con les estudiantes.

Agradecimientos

Nuestro agradecimiento va dirigido a les alumnes que nos han construido como docentes en tanto han sido elles quienes fueron aportando las preguntas y consultas que han terminado de modelar nuestra concepción del rol de docente.

A partir de la conversación, reflexión, intercambio oral y tiempo compartido les alumnes nos han mostrado el camino que nos llevó a este libro.

A elles, y a quienes el futuro haya reservado una cita para compartir el aula con nosotres, nuestro sincero e incondicional agradecimiento: **Hasta el infinito y más allá**.

Índice general

1. Funciones

A lo largo de Matemática 2 nos dedicaremos al desarrollo de herramientas que permiten estudiar funciones, lo cual resulta de gran utilidad en una amplia variedad de problemas provenientes de diferentes áreas. Estas herramientas de análisis son muy utilizadas tanto en problemas de la informática como de otras ciencias. En la informática el desarrollo de algoritmos está muy vinculado al lenguaje matemático, además de la posibilidad de incorporar diferentes funciones en las respuestas que esos algoritmos brindan.

Este capítulo introduce las ideas básicas relacionadas con las funciones, sus dominios, sus gráficas y las formas de transformarlas y combinarlas. Destacamos que una función se puede representar de diferentes maneras: mediante una fórmula, en una tabla, mediante un gráfico o con palabras. Aquí nos centraremos en aquellas funciones que se representan de manera algebraica a través de una fórmula explícita.

1.1. Hacia el concepto de función

Muchos fenómenos de la vida diaria se pueden representar como funciones, por ejemplo, podemos relacionar la longitud que posee una clave numérica con la cantidad total de claves posibles. En particular, si una clave tiene 4 números, habrá 10^4 claves posibles ya que existen 10 dígitos (del 0 al 9) para ubicar en cada una de las 4 posiciones, y además en cada posición de la clave puede ponerse cualquier dígito incluso repetir el anterior, de la misma forma si la clave tiene 5 números de longitud, habrá 10^5 claves posibles, y así siguiendo, podemos representar esta situación de la siguiente forma:

$$\text{clave de 4 números} \longrightarrow 10^4 \text{ claves posibles}$$

$$\text{clave de 5 números} \longrightarrow 10^5 \text{ claves posibles}$$

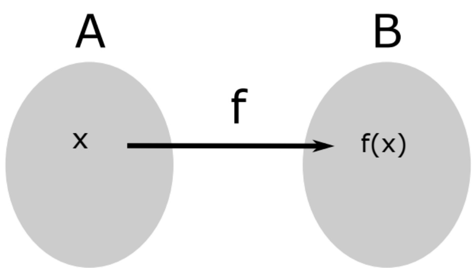
$$\text{clave de 6 números} \longrightarrow 10^6 \text{ claves posibles}$$
$$\vdots$$
$$\text{clave de } n \text{ números} \longrightarrow 10^n \text{ claves posibles}$$

En matemática es usual simbolizar a las funciones con letras. Así, la situación anterior podrá formalizarse llamando con la letra P a la función que asigna a una longitud de clave la cantidad total de claves posibles:

$$\begin{gathered} P(4) = 10^4 \\ P(5) = 10^5 \\ P(6) = 10^6 \\ \vdots \\ P(n) = 10^n \end{gathered}$$

Esta última expresión es la que representa más formalmente a la función, considerando a n como cualquier número natural. ■

Algunas funciones no se rigen a partir de expresiones matemáticas, por ejemplo podemos mencionar la asignación que existe entre cada persona y su número de documento, otro ejemplo está dado por la función que asigna a cada persona su altura.



En todos los casos podemos observar que **a cada elemento de un primer conjunto se le asigna un único elemento de un segundo conjunto**. En el ejemplo anterior tenemos un primer conjunto dado por las personas, luego a cada persona se le asigna un único elemento del conjunto de los números, de manera que a cada persona le corresponde el número de su altura. Vemos en este ejemplo, claramente, que cada persona tiene asignada una única altura.

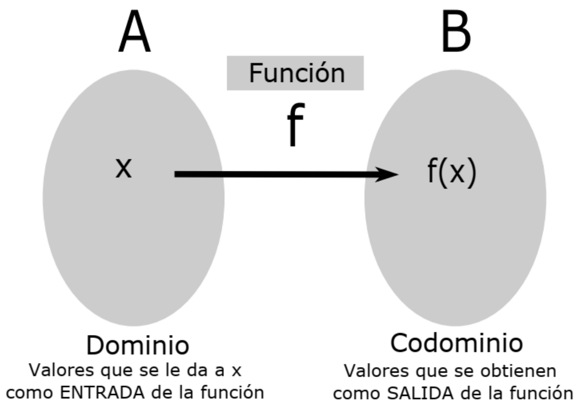
En la asignatura *Matemática 2* trabajaremos con funciones numéricas, es decir funciones que relacionan dos conjuntos de números, y especialmente aquellas determinadas por una "fórmula"; esto es, una expresión matemática.

Definición 1.1 **Definición de Función**
Una función es una relación especial entre dos conjuntos, donde a cada elemento del primer conjunto se le asigna un único elemento del segundo conjunto.
Simbólicamente denotaremos $f : A \to B$ y diremos que f asigna a cada elemento del conjunto A un único elemento del conjunto B, en particular se notará $f(x) = y$ para decir que al elemento x del conjunto A se le asigna el elemento y del conjunto B.

En la definición anterior podemos observar que hay una cantidad que depende de otra. Concretamente, la cantidad y tomará diferentes valores según el valor que tome la cantidad x, por esa razón llamamos a y **variable dependiente** y a x **variable independiente**.

Definición 1.2 Definición de Dominio
Dada una función $f : A \to B$, diremos que el conjunto A es el **Dominio** de la función f. Es decir que el dominio de una función es el conjunto de los elementos (números) a los que se les asignará, mediante la función, un valor (numérico) correspondiente en el segundo conjunto B.

Definición 1.3 Definición de Codominio e Imagen
Dada una función $f : A \to B$, cuando reemplazamos un valor $x = a$ en la expresión de $f(x)$; es decir, cuando "evaluamos"la función, diremos que estamos calculando la **imagen** de a, o también que $f(a)$ es la imagen de a por la función f.
El conjunto de todos los valores que se obtienen al evaluar la función en cada punto del dominio se llama **Imagen de f**, y la denotamos como $Im(f)$. Por su definición $Im(f) \subset B$.



Cuando definimos una función $y = f(x)$ mediante una expresión, y el dominio no se establece de forma explícita o se restringe por el contexto, se supondrá que el dominio será el mayor conjunto de números reales x en los que podemos evaluar la expresión y nos proporciona valores reales para y. A este dominio lo llamamos *dominio natural*.

Ejemplo 1.1 Si consideramos la función definida por $f(x) = x^2 + 1$, podemos observar que a cada elemento x se le asigna el elemento $x^2 + 1$. En particular veamos que $f(1) = 1^2 + 1 = 2$ y que $f(3) = 3^2 + 1 = 10$.
Dado que la expresión de la función no posee ningún tipo de restricción (pues a cualquier número real lo podemos elevar al cuadrado y luego, al valor que obtenemos, sumarle uno) diremos que el dominio de la función es el conjunto de todos los números reales, ya que a cualquier número real se lo puede elevar al cuadrado y luego sumarle uno.
En símbolos se escribe : $Dom(f) = \mathbb{R}$.
También podrá expresarse en notación de intervalos, es decir $Dom(f) = (-\infty; \infty)$.
■

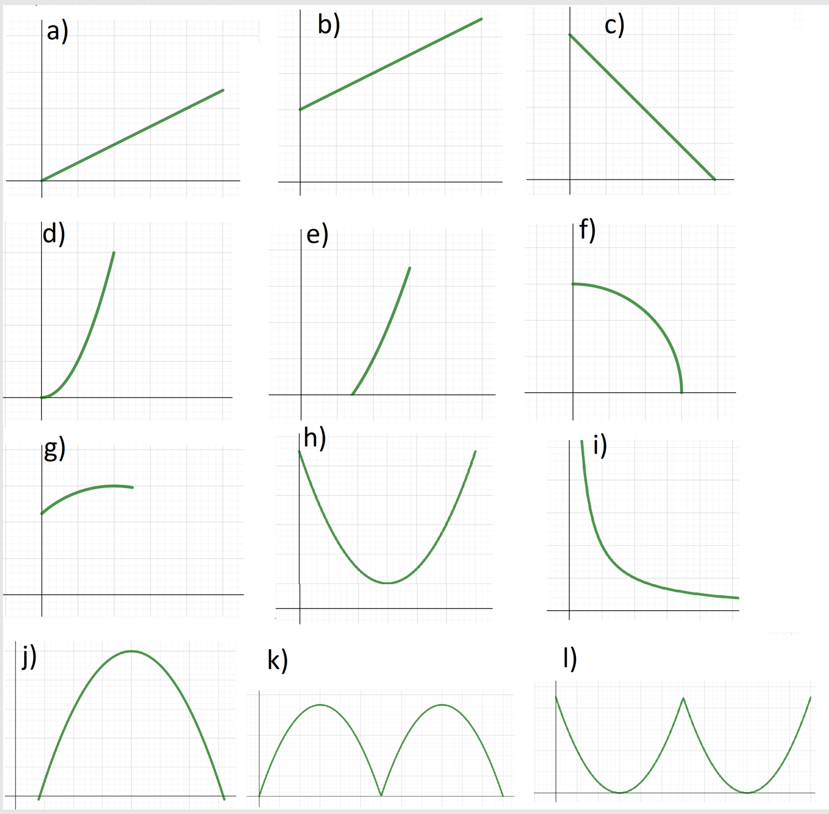
Ejemplo 1.2 Si consideramos la función definida por $g(x) = \dfrac{1}{x-3}$, podemos observar que la función está definida a partir de una división. Teniendo en cuenta que no se puede dividir por cero, debemos descartar los valores de x que hagan que el denominador se anule. Es decir que no podría ocurrir que $x-3=0$, luego $x=3$ no estará en el dominio de la función. Simbólicamente $Dom(g)=(-\infty;3)\bigcup(3;\infty)$.

■

Actividad 1.1

En este ejercicio te damos una serie de gráficos y algunas situaciones cotidianas. Debes tratar de relacionar cada situación con al menos un gráfico.

- Variación de la velocidad de una pelota cuando la picamos.
- Dependencia de la duración de una carrera con la longitud del recorrido.
- Dependencia del precio de una bolsa de papas con su peso.
- Variación del diámetro de una piñata cuando el aire comienza a salir.
- Variación de la velocidad que adquirimos cuando nos amacamos.
- Sonido que se produce en una cancha de futbol al gritar todxs juntxs un gol.
- Sonido que aumenta paulatinamente cuando un grupo de personas empieza a aplaudir de a 2, luego de a 4, 6, 8, y así hasta que todxs aplauden juntxs.
- Si la entrada al teatro es muy cara, no irá tanta gente. Si es muy barata, pierden dinero los organizadores. Con lo cual hay que proponer un precio intermedio.
- Los precios aumentan mucho más lento que en los últimos 5 años.
- Me gusta mucho el chocolate negro y bastante el blanco pero detesto comer los dos juntos.
- Cuántas más valijas pequeñas llevemos en el viaje más podremos cargar en la camioneta.



1.2. Conociendo algunas funciones

Nuestro objetivo es reconocer y, eventualmente, analizar diferentes características de las funciones. Comenzaremos familiarizándonos con algunas funciones particulares, de modo que nos interesa conocer, para cada una de las funciones que presentaremos a continuación, sus expresiones generales, sus dominios, sus gráficas. Así, lograremos crear una "biblioteca" de funciones que reconoceremos rápidamente y que aprenderemos a combinar entre sí para dar paso a nuevas funciones.

Antes de comenzar a presentar las funciones con las que trabajaremos, nos gustaría reflexionar sobre unas estrategias que podríamos usar para conocer la gráfica de ciertas funciones, basándonos en la gráfica de alguna otra función conocida.

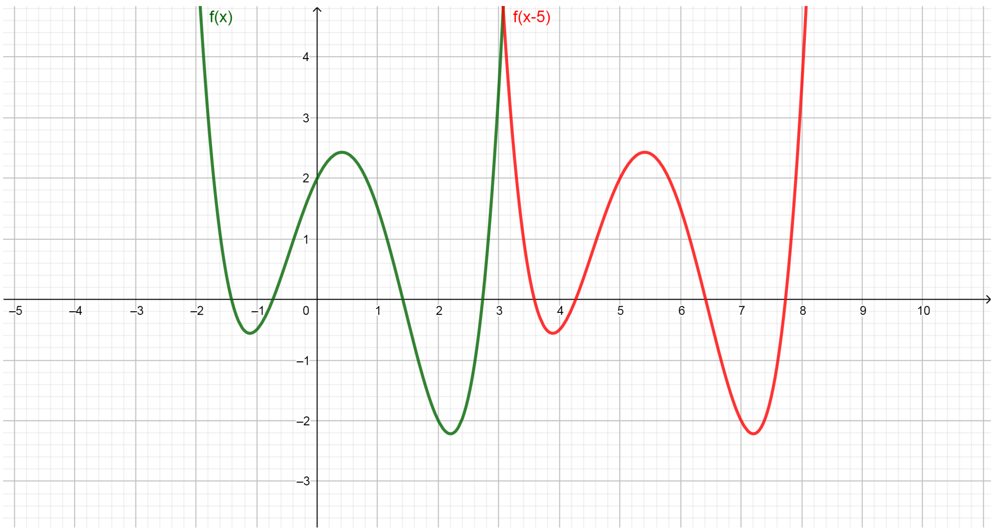
Traslaciones

Una vez que conozcamos la gráfica de una función, a partir de ella (que llamaremos función base) podremos obtener una nueva función mediante la suma de una constante de la siguiente manera:

Traslación horizontal: Si conocemos la gráfica de una función f, la gráfica de la función $y = f(x-k)$ se traslada:

- k unidades a la derecha, si $k > 0$.
- k unidades a la izquierda, si $k < 0$.

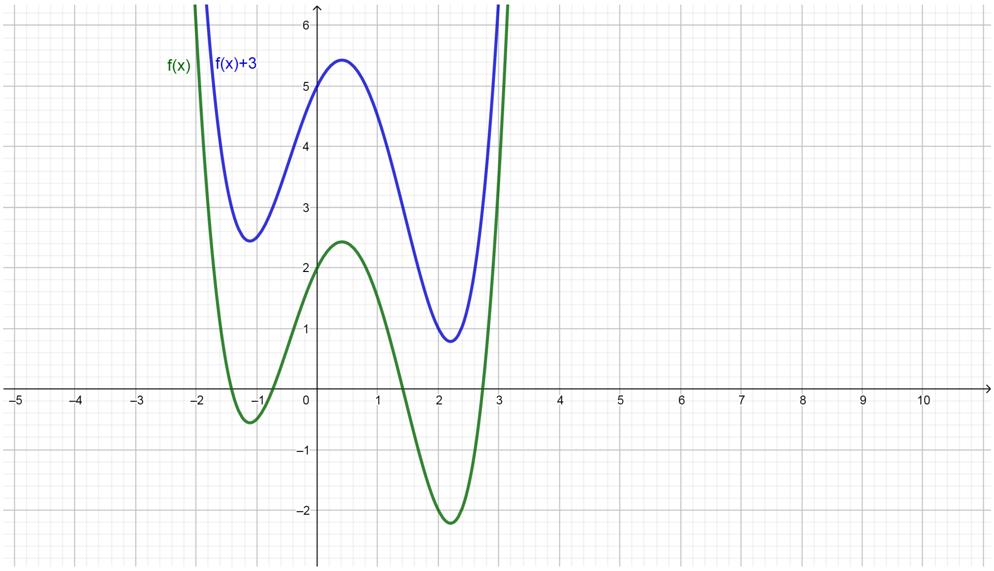
Podemos observar en el gráfico siguiente una función $f(x)$ en verde y su correspondiente traslación, $f(x-5)$, en 5 unidades hacia la derecha sobre el eje x en rojo.



Traslación vertical: Si conocemos la gráfica de la función f, y consideramos la función $y = f(x) + h$, su gráfica se traslada:

- h unidades hacia arriba, si $h > 0$
- h unidades hacia abajo, si $h < 0$.

Podemos observar en el gráfico siguiente una función $f(x)$ (en verde) y su correspondiente traslación (en azul) 3 lugares hacia arriba sobre el eje y , la cual es $f(x)+3$.



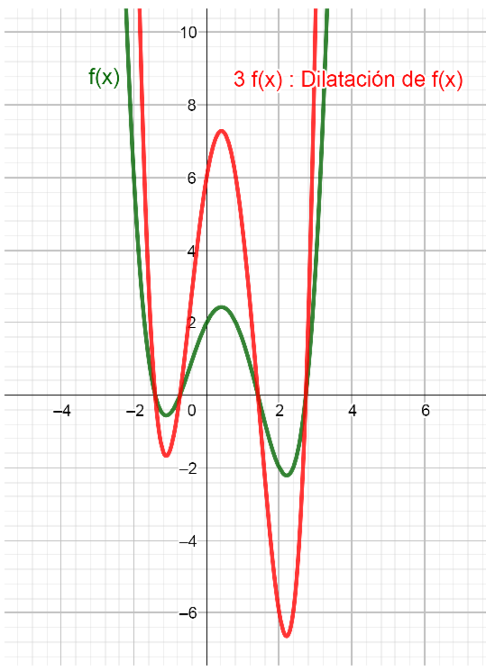
Dilataciones

Dilatar es cambiar el tamaño de la gráfica de una función $y = f(x)$, "estirarla"o "comprimirla" verticalmente.

Si consideramos una función f y la multiplicamos por una constante positiva c, obtenemos una nueva función que se comporta de dos formas distintas:

- si $c > 1$ la gráfica de f se "estira" verticalmente en un factor c,
- si $0 < c < 1$ la gráfica de f se "comprime" en relación al factor c.

Podemos observar en el gráfico siguiente una función $f(x)$ en verde y su correspondiente dilatación (en donde $c = 3$) en rojo. Vemos que, como mencionamos, la gráfica se estiró verticalmente.

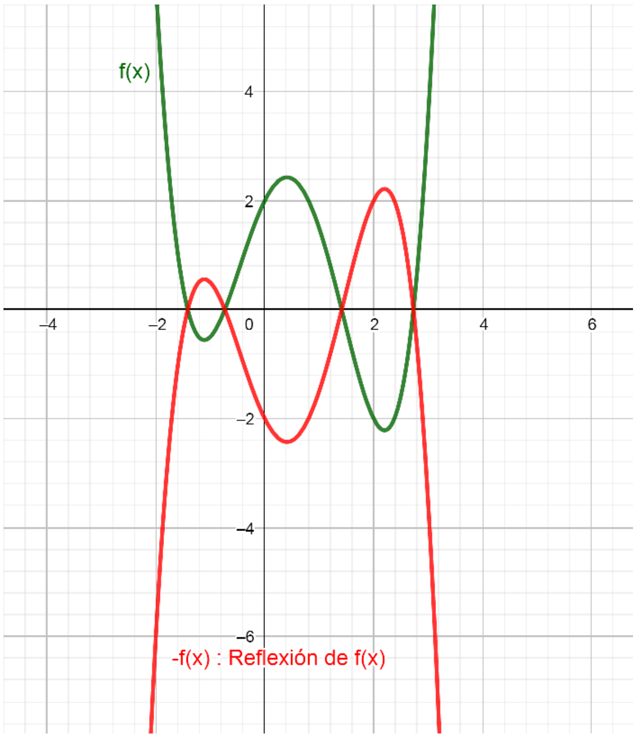


Reflexiones

Reflejar una función es invertir la posición de su gráfica respecto de una recta. En este curso nos centraremos en la reflexión respecto del eje x.

Si consideramos una función f y la multiplicamos por la constante -1, obtenemos una nueva función cuya gráfica está reflejada respecto del eje x.

Podemos observar en el gráfico siguiente una función $f(x)$ en verde y su correspondiente reflexión en rojo. Vemos que, como mencionamos, la gráfica se refleja con respecto al eje x de tal modo que en las zonas donde la función $f(x)$ es positiva su reflexión será negativa, y viceversa; mientras que los puntos en los que $f(x)$ se anula no se ven modificados por la reflexión.



En lo que sigue de este apartado nos dedicaremos a presentar las funciones polinómicas (en particular las funciones lineal, cuadrática y cúbica), las funciones de potencia racional, la función racional, la función valor absoluto, función exponencial, función logaritmo y las funciones trigonométricas. Cada una de éstas son funciones de variable real; quiere decir que la variable independiente será reemplazada por un número real cuando querramos conocer el valor de la función en ese punto del dominio.

Caracterizaremos a cada una de las funciones a partir de sus expresiones algebraicas; es decir, conociendo sus “fórmulas". También presentaremos sus gráficas y determinaremos sus dominios. De este modo buscamos generar una lista de funciones con las que estaremos familiarizados y de las cuales podremos reconocer rápidamente sus características.

1.2.1. Funciones polinómicas

Las funciones polinómicas quizá sean las funciones más nobles desde el punto de vista de las miradas matemáticas que desarrollaremos en este libro. Por ejemplo, su dominio es el menos complejo que podamos encontrar, pues las funciones polinómicas pueden ser evaluadas en todo número real.

Una función $f(x)$ se dice **polinómica** si su expresión tiene la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0,$$

donde n es un número entero positivo y $a_0, a_1, ..., a_n$ son constantes reales conocidas, con $a_n \neq 0$.

A la potencia entera (y positiva) de x en cada término se le llama *grado* del término. Y diremos que **la función polinómica es de grado n** si el término de mayor grado es $a_n x^n$.

El dominio de todas las funciones polinómicas es $(-\infty; \infty) = \mathbb{R}$.

A continuación veremos algunas funciones polinómicas más comunes.

Función Lineal

Las funciones lineales están presentes en nuestro cotidiano más de lo que podemos imaginar. Hemos visto muchos conceptos en nuestra formación en la escuela primaria y media que están íntimamente relacionados con la función lineal. Tanto cuando calculamos un porcentaje, o cuando aplicamos regla de tres simple, como cuando queremos conocer un promedio, entre otras tantas situaciones con las que estamos familiarizados.

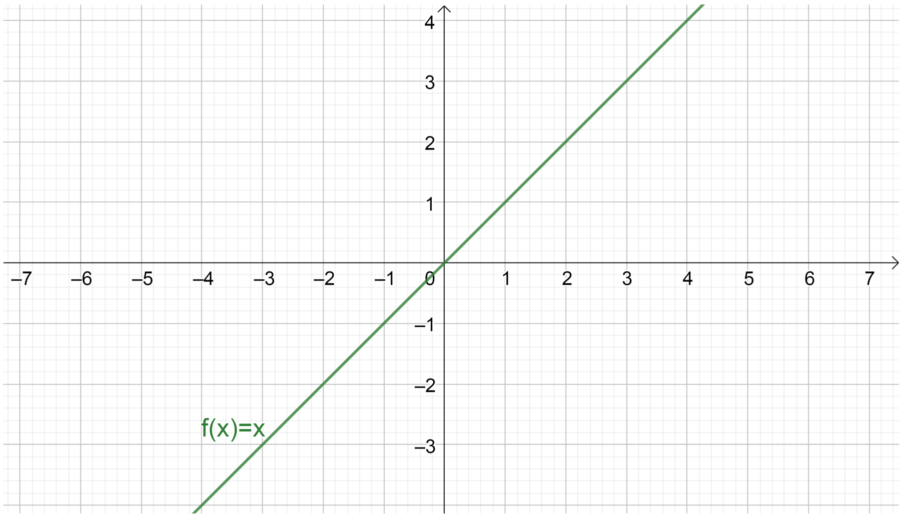
Actividad 1.2

1. Supongamos que vamos a la panadería. Sabemos que el precio del pan es $\$M$ por kg (puede reemplazar M por el precio al que ud. consiga el pan).
   a) ¿Cuánto deberá pagar si compra 6 kg de pan? ¿Y si compra 2 kg y 650 g?
   b) ¿Puede construir una expresión que sirva para calcular el costo de adquirir x kg de pan?
   c) ¿Cuál considera que será el dominio de la función hallada en el inciso anterior?
2. En cierta localidad el costo de la energía eléctrica se calcula de la siguiente manera: un cargo fijo de $\$950$ más $\$3,5$ por cada kwh consumido.
   a) ¿ Cuál será el monto de la boleta de luz si en determinado período se consumieron 640 kwh?¿Y si no hubo consumo?
   b) Escriba una expresión para calcular el monto a pagar para un consumo de x kwh. Determine el dominio de la función hallada.

Una **Función Lineal** es una función polinómica de grado 1. Es decir que su expresión es de la forma $f(x) = y = mx + b$. Su representación gráfica está dada por una recta donde m es la *pendiente* de la recta y b la *ordenada al origen* (es decir, la intersección con el eje y).

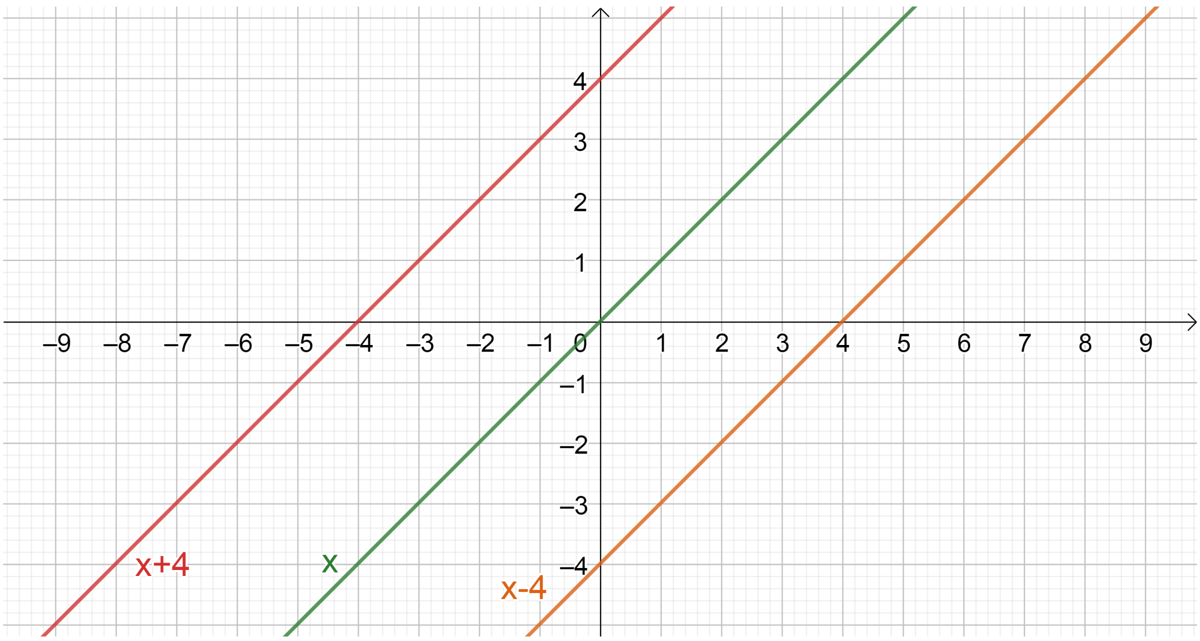
Las **funciones constantes** se pueden considerar un caso particular de las funciones lineales. Se presentan en el caso en que la pendiente es nula; es decir, cuando $m = 0$. Su gráfica es una recta horizontal.

Una función lineal muy especial es $f(x) = x$, llamada **función identidad**, donde $m = 1$ y $b = 0$. Su representación gráfica es una recta que pasa por el origen y divide en dos partes iguales a los cuadrantes primero y tercero:



Traslaciones de una función lineal

Por ejemplo, $f(x) = x$ y sus desplazamientos hacia ambos sentidos 4 lugares.



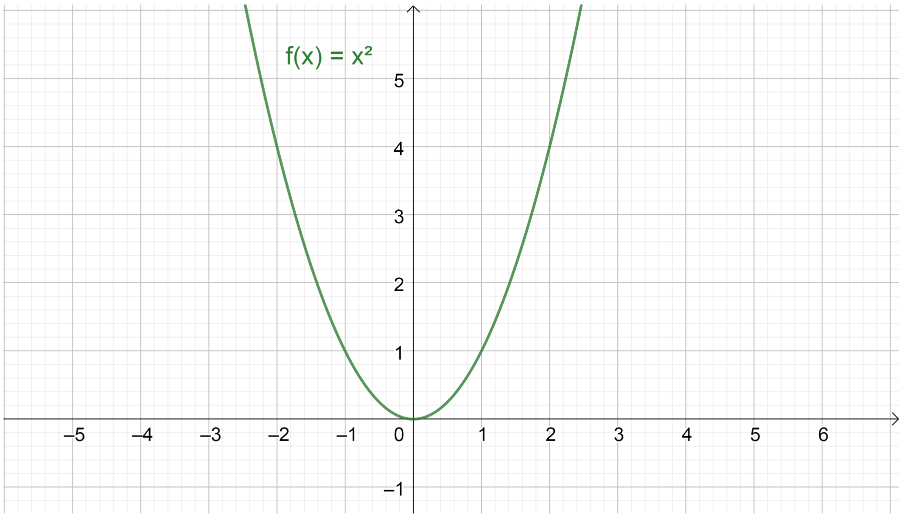
Este comportamiento lo podemos entender también como rectas con pendiente $m = 1$ y ordenadas al origen $b = 4$ y $b = -4$.

> **Actividad 1.3**
> Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base.
> 1. $a(x) = 2x + 1$
> 2. $b(x) = x - 6$

Función Cuadrática

La **función cuadrática** es un caso particular de función polinómica. Concretamente, es una función polinómica de grado 2.

Es decir que son de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$. Su representación gráfica está dada por una parábola.



Existe una amplia variedad de situaciones que pueden ser representadas a través de la función cuadrática. Uno de los fenómenos en los que está presente es en la trayectoria que describe un objeto lanzado de manera oblicua.

Por ejemplo, desde la invención de la catapulta (se estima que ocurrió alrededor del 400 a.C.) una cuestión que interesaba a reyes y emperadores era controlar el lanzamiento, a gran distancia, de un proyectil y tener la posibilidad de prever dónde impactaría.

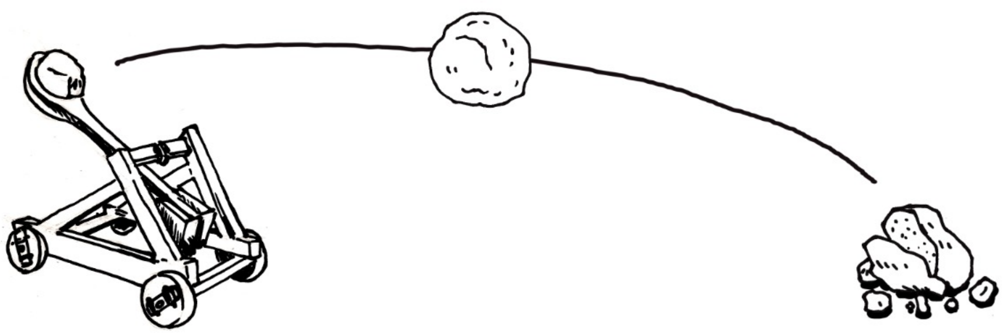


Ilustración: Leandro Sebastián Mosco

No fue hasta mucho tiempo después que se pudo determinar que al arrojar un objeto de manera oblicua su trayectoria describe una parábola [1], lo cual dio lugar a una amplia teoría al respecto.

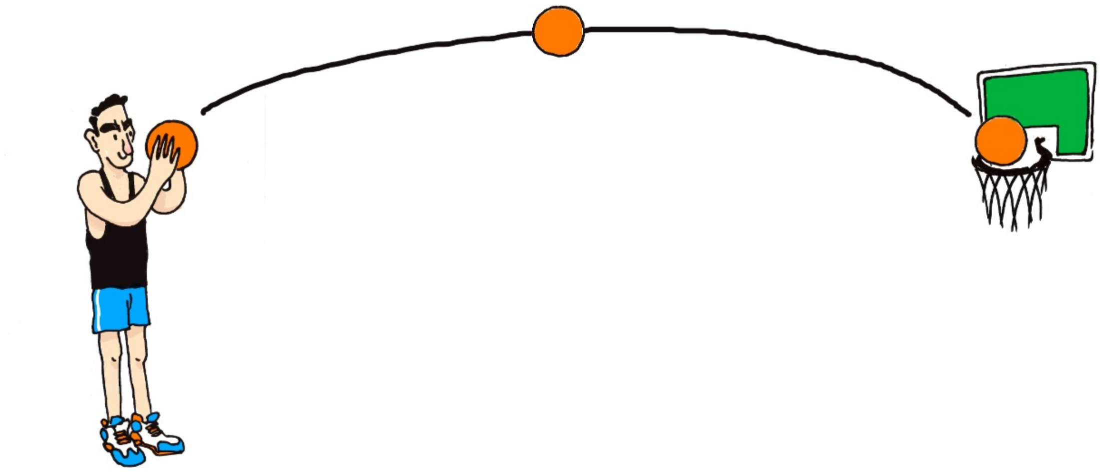


Ilustración: Leandro Sebastián Mosco

Quizás ya lo haya pensado, pero el lector no puede dejar de notar que la trayectoria de ese proyectil dependerá de la velocidad y también de la inclinación con el que es lanzado, lo cual involucra algo más que funciones de una variable, sin embargo la función cuadrática es importante en la base de la teoría que permite calcular la trayectoria del proyectil si se conoce la velocidad y la inclinación de lanzamiento.

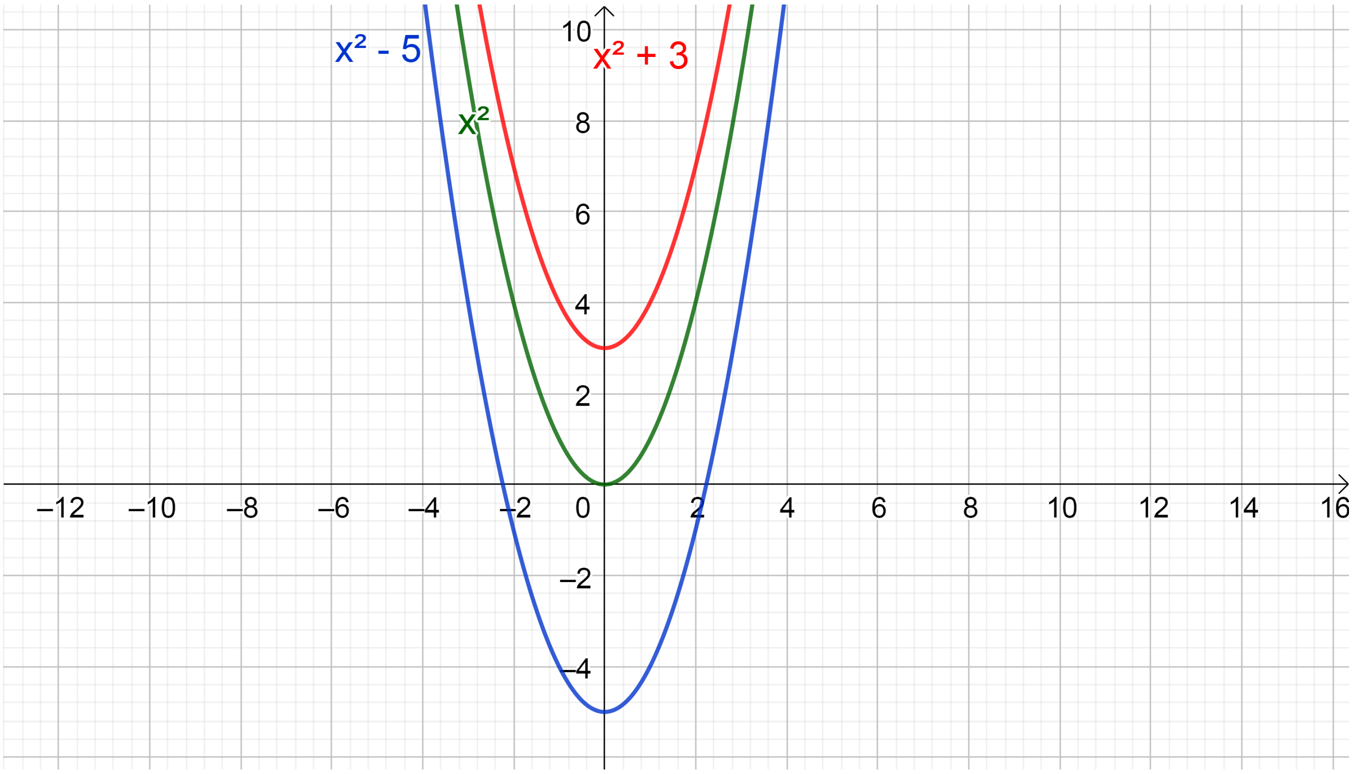
Sin ir más lejos, en cada videojuego en el que se arroja un proyectil hay un motor de cálculo, detrás de esa acción, que tiene en cuenta todas las variables para determinar la trayectoria que seguirá ese proyectil; y en ello, como se dijo, la función cuadrática tiene un rol central.

Veamos algunos ejemplos de traslaciones y dilataciones usando como *función base* a una cuadrática

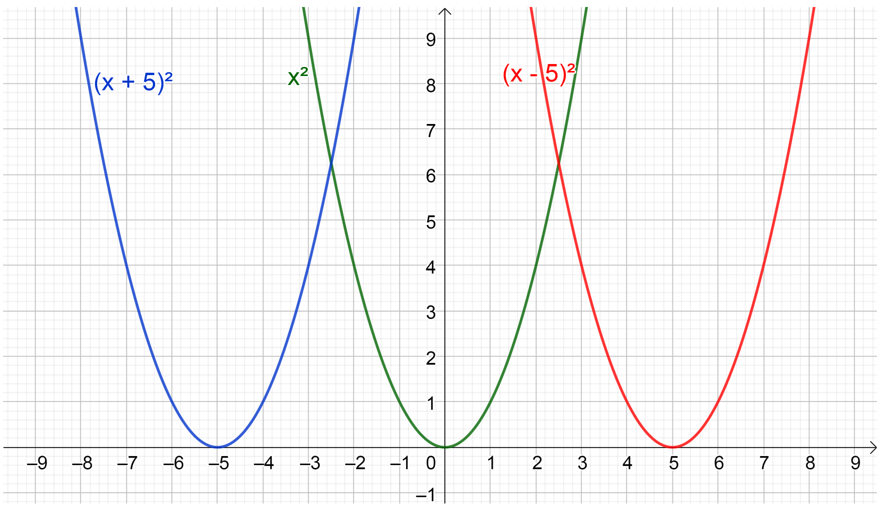
[1] para ser más precisos, parábola y trayectoria son muy aproximadas

Traslaciones de una función cuadrática

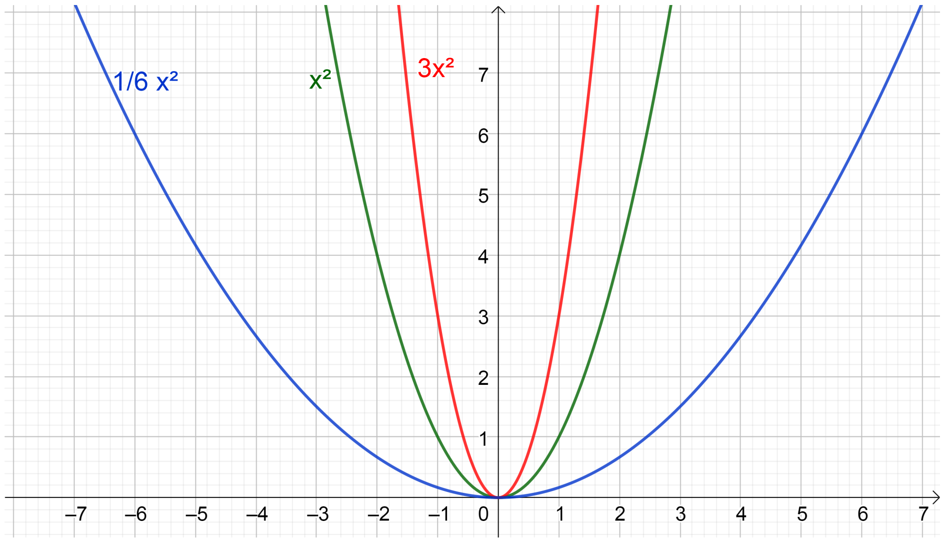
Si trasladamos 3 lugares sobre el eje y hacia arriba la parábola $y = x^2$ ó 5 lugares sobre el eje y hacia abajo, obtenemos lo siguiente:



Y si la traslación es sobre el eje x,



Dilataciones de la función cuadrática



Actividad 1.4

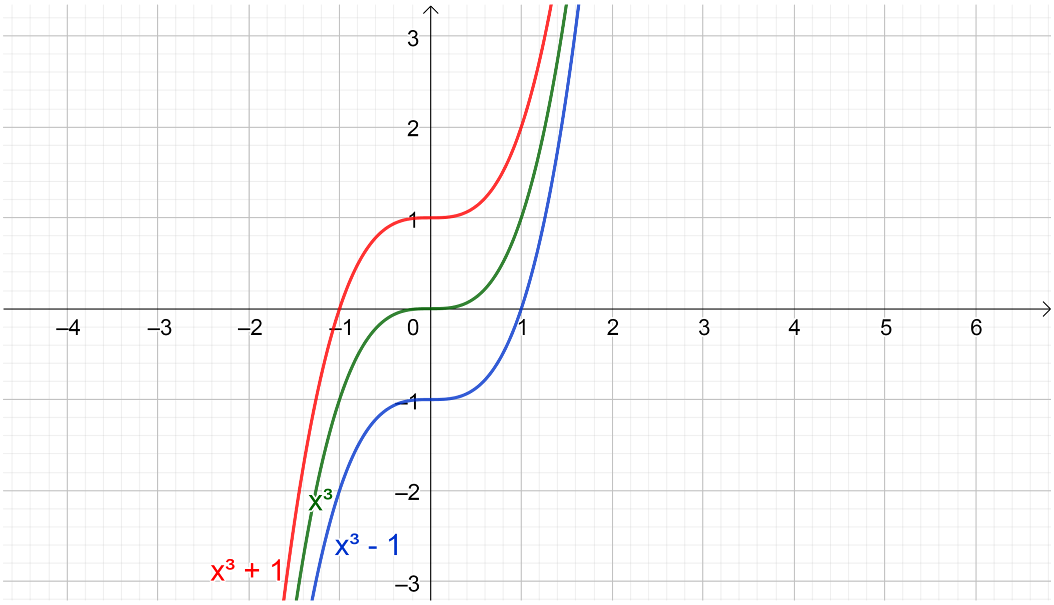
Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base.

1. $a(x) = 3x^2 + 3$
2. $b(x) = (x-6)^2$

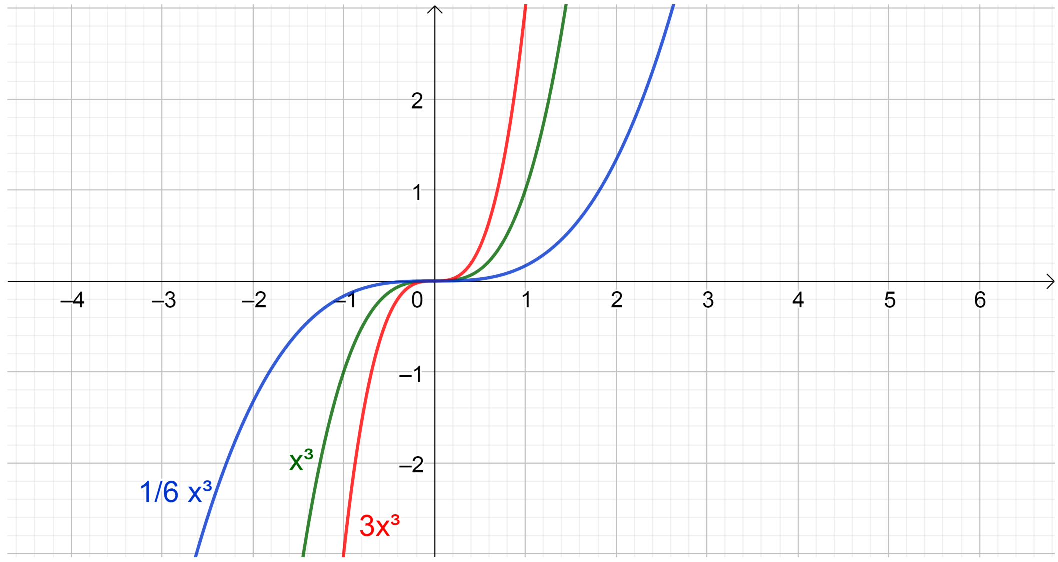
Función Cúbica

Las funciones cúbicas son de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a \neq 0$. Es decir que son funciones polinómicas de grado 3.

Traslaciones verticales de una función cúbica



Dilataciones de una función cúbica



Actividad 1.5

Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base.

1. $a(x) = x^3 + 1$
2. $b(x) = (x-2)^3$

1.2.2. Funciones Potencias Racionales

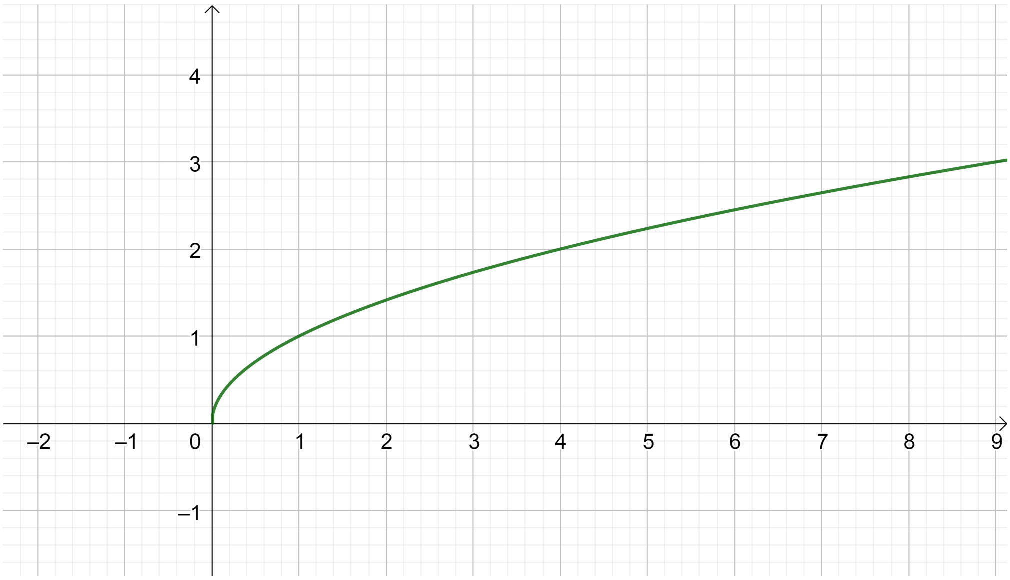
Una función $f(x) = x^a$, donde a es una constante fraccionaria, se denomina **función potencia**. No es sencillo determinar una manera general de reconocer sus gráficas, pero gran parte de la tarea que desarrollaremos en este libro nos permitirá conocer detalles de la función que serán fundamentales para poder reconstruir su gráfica, entre otras cosas.

Sin embargo, podemos conocer algunas funciones potencia racional para exponentes particulares. Por ejemplo, una de las funciones de este tipo más conocida es: **La función raíz cuadrada**.

$$y = x^{1/2} = \sqrt{x}$$

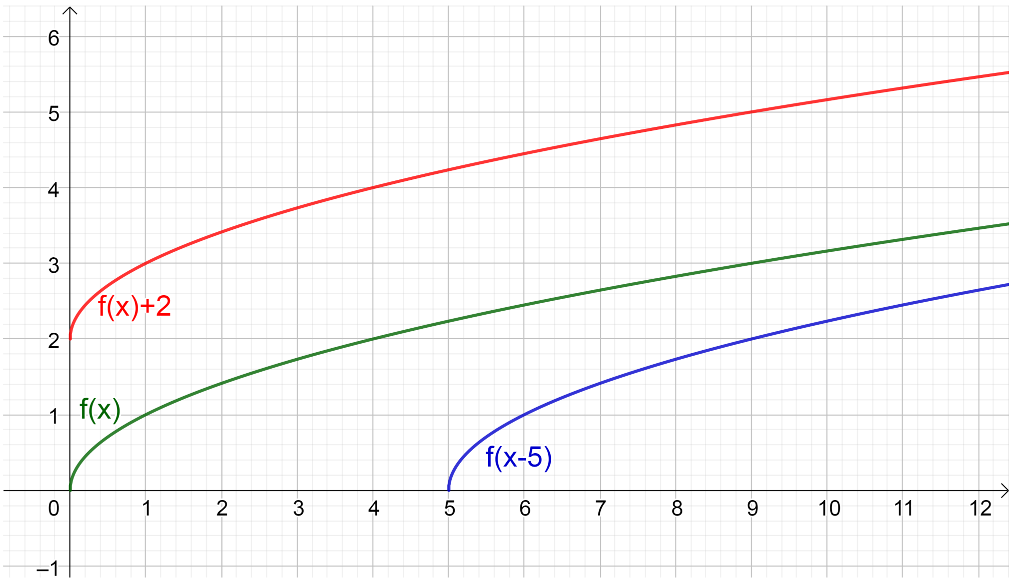
El dominio de la función raíz cuadrada es $[0, +\infty)$. Pues, si pensamos que el resultado de evaluar la función debe ser un número real, no es posible conocer la raíz cuadrada de números negativos.

La gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ tiene la siguiente forma:



Traslaciones de la función raíz cuadrada

En la siguiente gráfica observamos (en rojo) la traslación vertical en dos unidades de la función raíz cuadrada y también (en color azul) la traslación horizontal en cinco unidades hacia la derecha.



Actividad 1.6

Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base.

1. $a(x) = \sqrt{x} + 2$
2. $b(x) = \sqrt{x - 3}$

1.2.3. Funciones Racionales

Una **función racional** es un cociente entre dos funciones polinomiales. Concretamente, si $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas, se define la función racional como

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

El dominio de una función racional es el subconjunto de los números reales para los cuales $q(x)$ no se anula, pues no se puede dividir por cero. Esto es,

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} / q(x) \neq 0\}.$$

Ejemplo 1.3 Hallar el dominio de la función racional $f(x) = \dfrac{x^3}{2x^2 + 2x - 4}$.

Si queremos conocer el dominio de esta función, debemos tener en cuenta su definición, en este caso debemos conocer los valores que anulan la expresión polinómica del denominador y excluirlos del dominio.

Con lo cual podemos describir al dominio de esta función como:

$$Dom(f) = \left\{x \in \mathbb{R} / 2x^2 + 2x - 4 \neq 0\right\}.$$

Las soluciones de la ecuación $2x^2 + 2x - 4 = 0$ (resuélvala por favor) son $x = 1$ y $x = -2$. Con lo cual podemos describir mucho más claramente al dominio como:

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}/x \neq 1, x \neq -2\}.$$

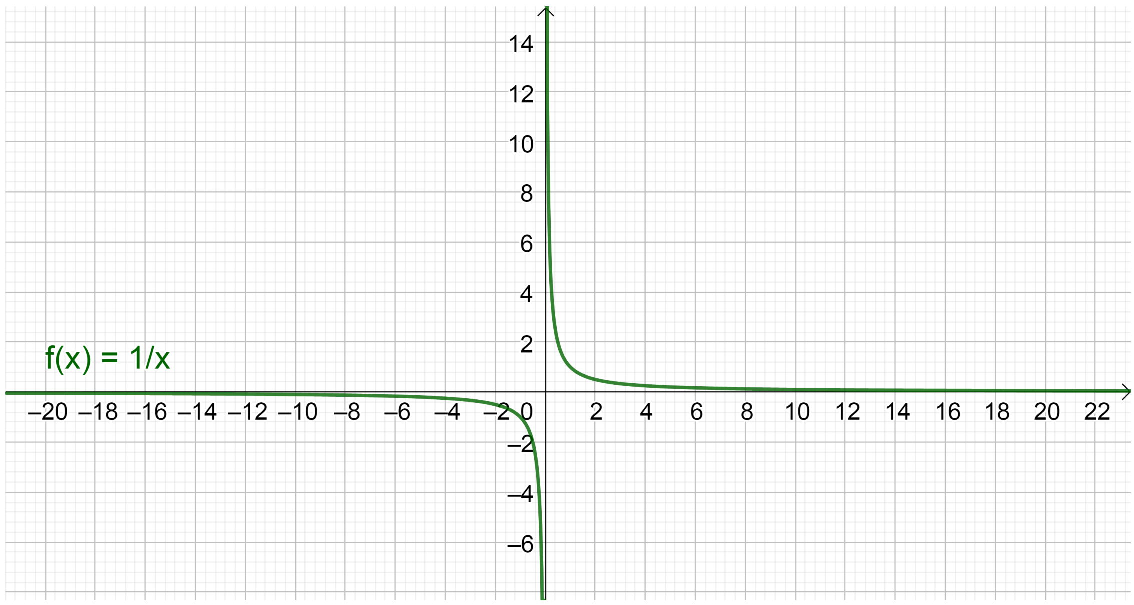
Que también puede escribirse en términos de intervalos de la forma:

$$Dom(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty).$$

■

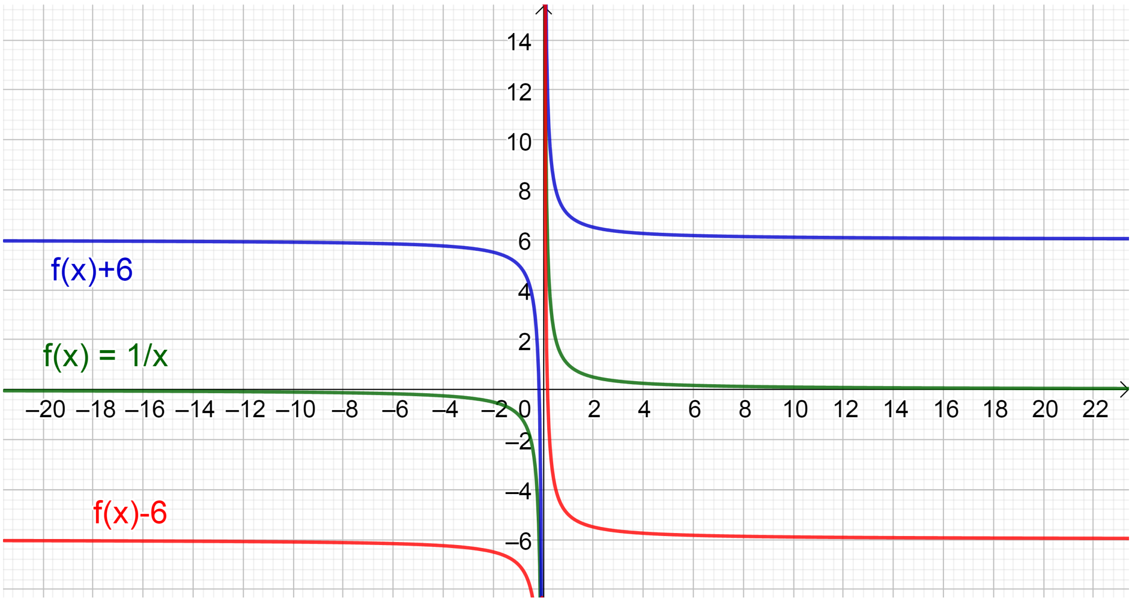
La **gráfica** de una función racional no es inmediata para el caso general. Sin embargo, podemos reconstruirla, a partir de una función base conocida, en el caso particular de cocientes de funciones lineales.

Concretamente, si tanto en el numerador como en el denominador de la función racional encontramos funciones lineales, su gráfica será la traslación, reflexión y/o dilatación de la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$.



Consideremos, como ejemplos, algunas de sus traslaciones verticales.

Traslaciones de $f(x) = \dfrac{1}{x}$



Notar que las funciones presentadas en la gráfica son:

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ Gráfica verde.

$g(x) = f(x) + 6 = \dfrac{1}{x} + 6 = \dfrac{1+6x}{x}$ Gráfica azul.

$h(x) = f(x) - 6 = \dfrac{1}{x} - 6 = \dfrac{1-6x}{x}$ Gráfica roja.

Ejemplo 1.4 Construir la gráfica de la función $g(x) = \dfrac{-3x+5}{x-2}$.

Sabemos que su gráfica se puede conseguir haciendo traslaciones, dilataciones o reflexiones de la función base $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Es decir que debemos trabajar en reescribir la expresión de $g(x)$ usando como base la función $f(x)$.

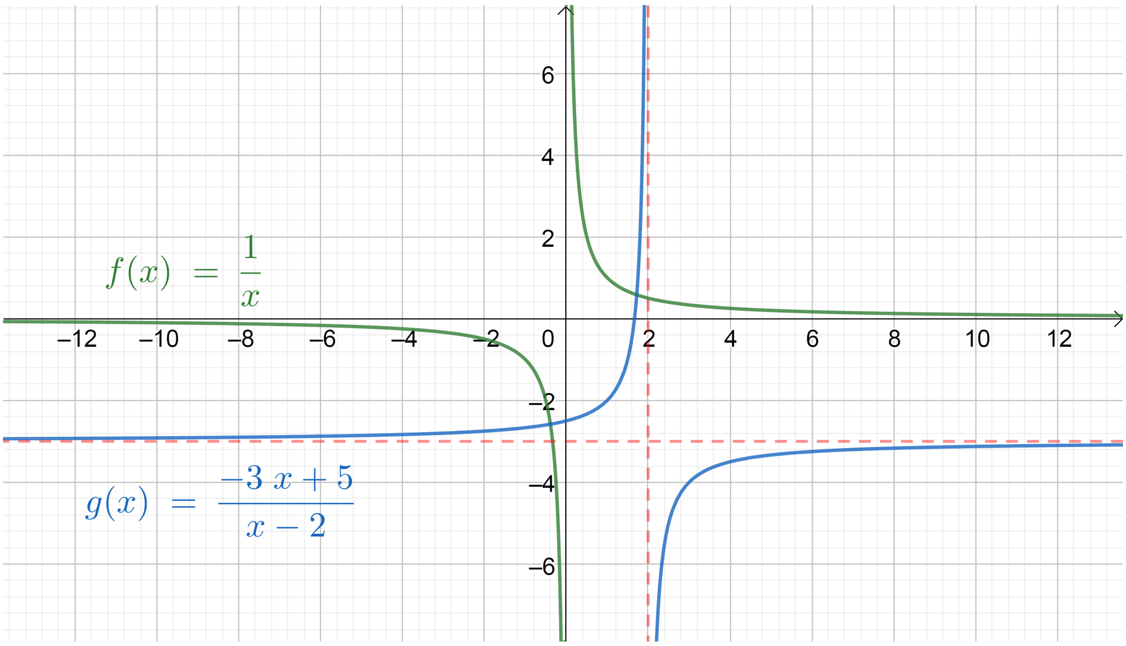
Para ello debemos comenzar con la expresión de la función $g(x)$ y manipularla algebraicamente. El objetivo es que el denominador $(x-2)$ termine afectando a un único término del numerador. Para ello debemos agregar constantes en el numerador con el fin de que sea posible factorizar en uno de los términos para luego cancelar con el denominador, mientras que en el otro término "sobrevivirá" el denominador y estaremos cerca de nuestro objetivo.

Concretamente: $g(x) = \dfrac{-3x+5}{x-2} = \dfrac{-3x+6-6+5}{x-2}$.

Observar que sumamos 6 porque así podremos sacar factor común -3 y esa porción del numerador quedará $-3(x-2)$, lo que nos permitirá cancelar con $x-2$ luego de que distribuyamos el denominador. Notar también que restamos 6 para que la expresión original no se vea modificada. Sólo estamos cambiando su apariencia para poder escribirla en términos de $f(x)$. Continuemos...

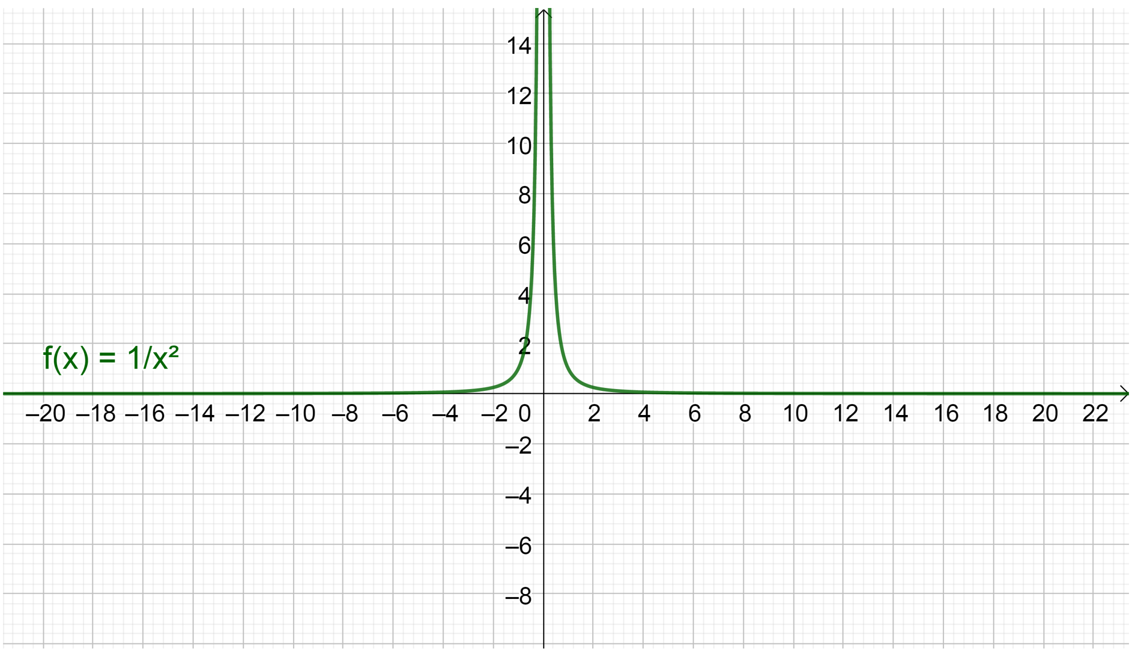
$$\frac{-3x+6}{x-2}+\frac{-6+5}{x-2}=\frac{-3(x-2)}{x-2}+\frac{-1}{x-2}=-3+\frac{-1}{x-2}=-3-f(x-2)$$

En definitiva $g(x)=-3-f(x-2)$. Es decir que la gráfica de $g(x)$ podemos obtenerla si reflejamos la gráfica de $f(x)$ y la trasladamos dos lugares a la derecha y tres lugares hacia abajo.



■

Otra gráfica de función racional muy característica es la de $f(x)=\frac{1}{x^2}$, que se presenta a continuación:



Claro que, como con todas las funciones, podemos usar esta gráfica como base para representar otras funciones a través de traslaciones, dilataciones y/o reflexiones.

Actividad 1.7

1. Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base, y hallar el dominio de cada una de ellas.
   a) $a(x) = \dfrac{1}{x} + 4$
   b) $b(x) = \dfrac{1}{x-8}$
2. Hallar el dominio de la siguiente función: $f(x) = \dfrac{x^3 + x - 3}{2x^2 - 10x + 12}$

1.2.4. Función Exponencial

La función exponencial es muy usada en varias aplicaciones que tienen que ver con fenómenos naturales, pero también es importante para describir una gran cantidad de situaciones de distintas áreas. Una cuestión que es interesante, y en la que está presente la idea de función exponencial, es que un papel no puede plegarse sobre sí mismo más de 8 veces. Aunque hay quienes aseguran haber podido doblarlo 10 veces, es llamativo que no se puede continuar ese juego de plegado luego de unas pocas repeticiones.

Por otra parte, para citar algo que tiene que ver con la informática, la función exponencial está presente en el modo en que van progresando las capacidades de almacenamiento en los dispositivos electrónicos. Habrán notado que las capacidades de las memorias (internas o externas) crecen multiplicándose por 2. Así, si es necesario mayor capacidad de almacenamiento que, por ejemplo, 128GB debe conseguirse una memoria de 256GB, mientras que la memoria que le sigue en capacidad es de 512GB, y así siguiendo. Observemos que esas cantidades son todas potencias de 2; vale decir que las capacidades de las memorias siempre tienen que ver con elevar 2 a una potencia determinada.

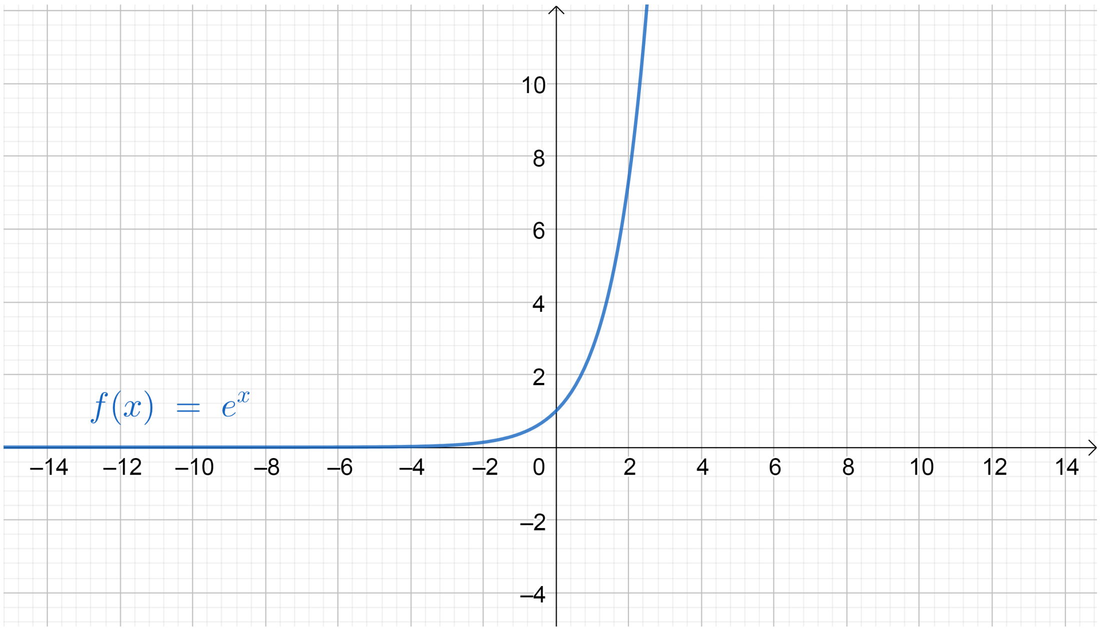
Lo que estamos introduciendo es la idea de una cantidad que varía dependiendo de una variable independiente que se encuentra en el exponente.

Las funciones de la forma $f(x) = a^x$, donde la base a es una constante positiva y tienen su variable en el exponente son llamadas, precisamente, **funciones exponenciales**.

El dominio de las funciones exponenciales es el conjunto $\mathbb{R}$.

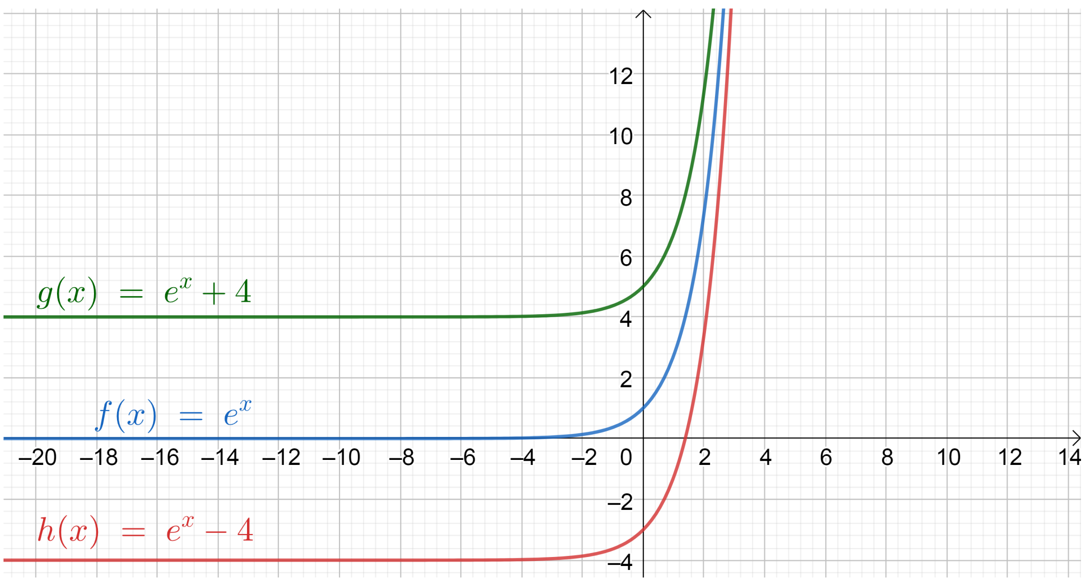
De todas ellas una muy particular e importante es la que tiene como base al número e, conocido como número de Euler ($e \approx 2{,}71828$). Es un número irracional de uso muy frecuente en el análisis matemático.

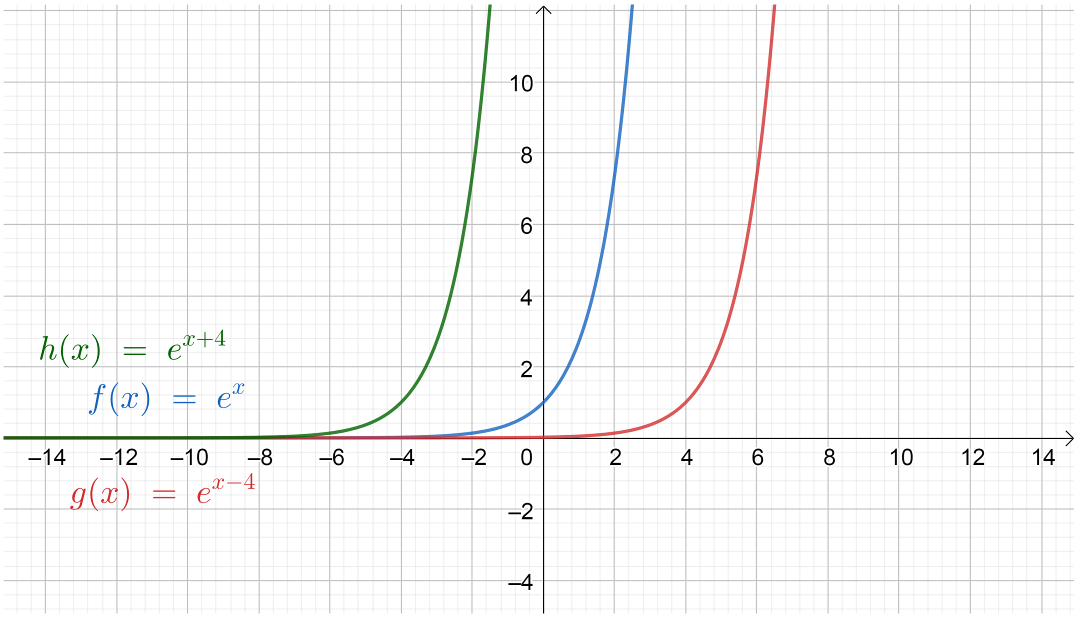
En la siguiente figura se muestra la gráfica de la función exponencial de base e.



Traslaciones de la función exponencial

A continuación presentamos algunos ejemplos de traslaciones, usando a la función exponencial $f(x) = e^x$ como función base:





Enunciaremos a continuación propiedades de la función exponencial. Muchas de esas propiedades pueden resultarle familiares a quienes ya manejan ciertas reglas de "potencias de igual base".

Teorema 1.2.1 Propiedades de la función exponencial

Dados a un número positivo y b, c y r números cualesquiera, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $a^0 = 1$
2. $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$
3. $\dfrac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$
4. $(a^b)^r = a^{b \cdot r}$

Actividad 1.8

Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base.

1. $a(x) = e^{x-5}$
2. $b(x) = e^x + 3$

1.2.5. Función Logarítmica

Es usual, en matemática, que cada vez que se crea o define una operación, una función o una acción, se estudia la posibilidad de definir una operación, función o acción, que "desarme" lo que se ha hecho. Pensemos en la suma y la resta, el producto y la división, elevar al cuadrado y la raíz cuadrada, etc.

Pues bien, la función logarítmica es aquella que "deshace" la acción que produce la función exponencial. Y se define de ese modo.

Entonces, las **funciones logarítmicas** $f(x) = log_a(x)$, donde la base a es una constante positiva, son las inversas de las funciones exponenciales.

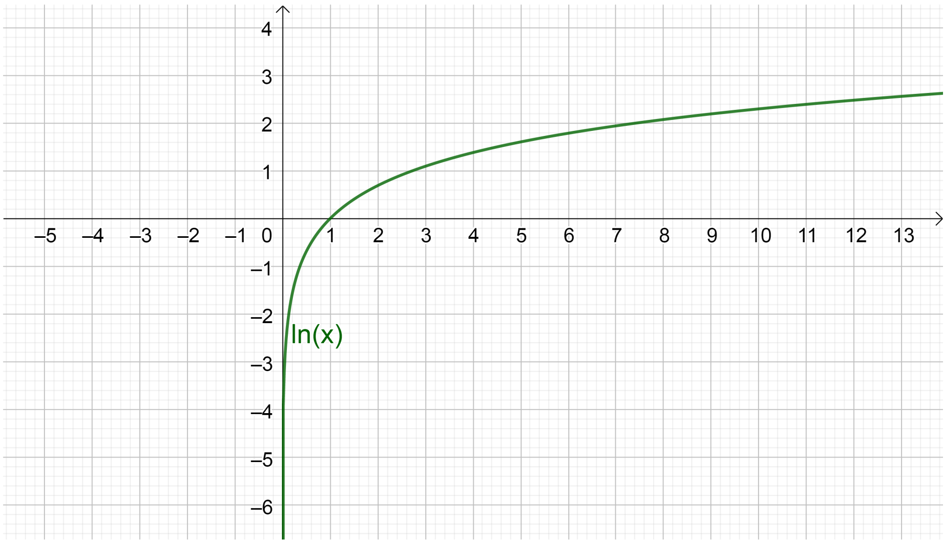
Teniendo en cuenta el comentario inicial, podemos pensar al resultado de la operación $log_a(x)$ como el valor de la potencia a la cual debemos elevar al número a para alcanzar el valor x. En símbolos: $log_a(x) = n$ si y sólo si $a^n = x$.

Esta última es la "regla de despeje" que usaremos cuando debamos trabajar con una ecuación que involucre una expresión exponencial o una logarítmica. Luego veremos un ejemplo.

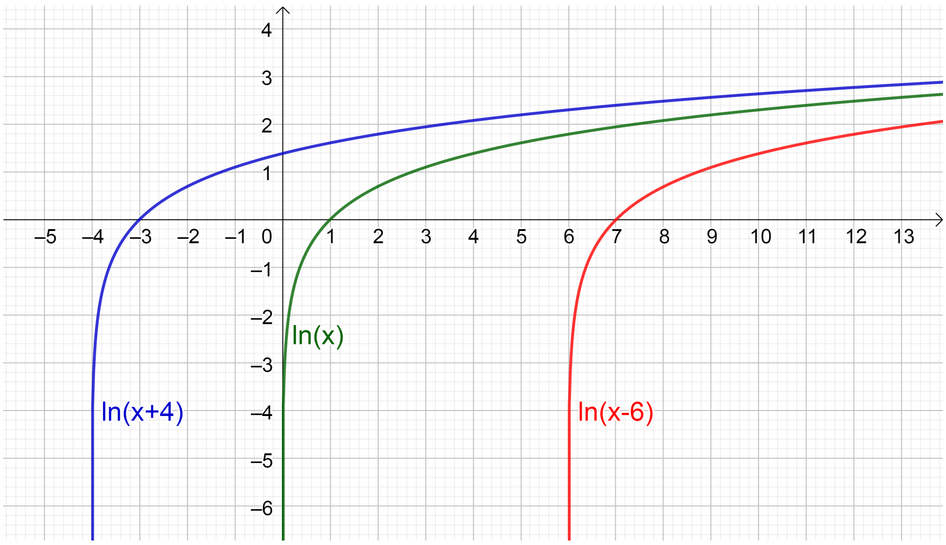
El dominio de las funciones logarítmicas es el conjunto $(0, +\infty)$.

Llamamos *logaritmo natural* al caso particular del logaritmo de base e y lo simbolizamos como $log_e(x) = ln(x)$.

En la siguiente figura se muestra la función logaritmo en base e, $f(x) = log_e(x) = ln(x)$.



Traslaciones de la función logaritmo natural



Ejemplo 1.5 Si queremos despejar la variable x en la siguiente ecuación:

$$3^{x^2-2} = 5$$

podemos usar la función logarítmica para nuestro propósito. En este caso usaremos el $log_3(x)$ pues la expresión exponencial involucrada en la ecuación es de base 3:

$$log_3(3^{x^2-2}) = log_3(5)$$

Notar que del lado izquierdo de la igualdad la función logarítmica y la función exponencial quedan expresadas de manera continuada, con lo que la primera "deshace" aquello que ha producido la segunda y resulta en una expresión que nos es más familiar y a la cual podemos continuar despejando sin mayor dificultad:

$$x^2 - 2 = log_3(5)$$

$$x^2 = log_3(5) + 2$$

$$|x| = \sqrt{log_3(5) + 2}$$

$$x = \pm\sqrt{log_3(5) + 2}$$

hallando así los valores de x que resuelven la ecuación. Valores que, aunque parezcan extraños, son números reales que pueden ser hallados a través de la calculadora de manera relativamente sencilla, como observaremos luego de enunciar las propiedades del logaritmo.

■

Teorema 1.2.2 Propiedades del Logaritmo

Dados a, b y c números positivos y r un número cualquiera, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $log_a(1) = 0$
2. $log_a(b \cdot c) = log_a(b) + log_a(c)$
3. $log_a(b/c) = log_a(b) - log_a(c)$
4. $log_a(b^r) = r \cdot log_a(b)$
5. $log_a(b) = \dfrac{log_c(b)}{log_c(a)}$

Observación: Usando el inciso 5 de las propiedades del logaritmo, podemos calcular los números que hallamos en el ejemplo anterior. Concretamente podemos conocer, con el uso de la calculadora, la cantidad $log_3(5) = \dfrac{ln(5)}{ln(3)}$ y con ello completar el cálculo.

Actividad 1.9

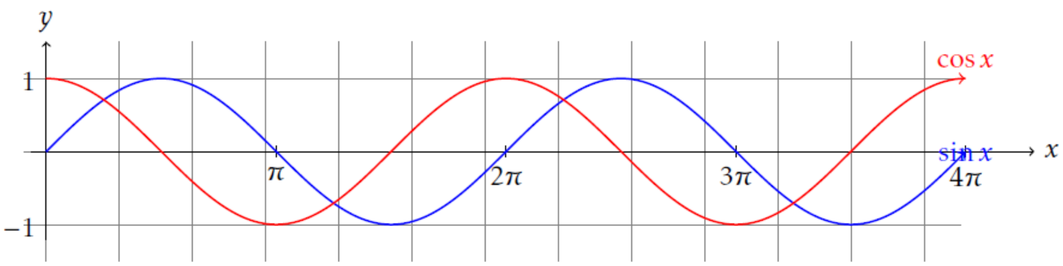
Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base.

1. $a(x) = ln(x + 2)$
2. $b(x) = ln(x) - 4$

1.2.6. Funciones Trigonométricas

La trigonometría es la rama de la matemática que estudia la relación entre lados y ángulos de un triángulo, a partir de la división de las medidas de los lados de un triángulo rectángulo surgen las razones trigonométricas *seno* , *coseno*, *tangente*, *secante*, *cosecante* y *cotangente*.

Si bien los ángulos pueden medirse de distintas formas, trabajaremos, salvo que se indique otra cosa, en radianes. Aún cuando para medir cualquier ángulo en el plano cartesiano alcanza con considerar ángulos de 0 a 2π, podemos pensar en extender a toda la recta real repitiendo los ángulos de manera periódica. De esta forma el dominio de la función $f(x) = sen(x)$ es el conjunto de todos los números reales, ya que el *seno* de un ángulo se puede calcular siempre, con lo cual la función es periódica, es decir que la gráfica que se representa observando entre 0 y 2π se repite infinitamente. Algo muy similar sucede con la función $g(x) = cos(x)$.



En el siguiente cuadro se tiene algunos valores exactos del seno y coseno para ciertos ángulos.

Radianes	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2	2π
Grados	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Seno	0	0.5	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
Coseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	0.5	0	-1	0	1

Para el análisis de las demás funciones trigonométricas nos ayudaremos con las identidades trigonométricas. Algunas de ellas son muy usuales, por ejemplo sabemos que $\dfrac{sen(x)}{cos(x)} = tg(x)$ siempre y cuando el $cos(x)$ no valga cero.

De esta forma si $f(x) = \cos(x)$ y $g(x) = sen(x)$ tenemos que $h(x) = tg(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{sen(x)}{\cos(x)}$ y su dominio será $Dom(h) = \{x \in \mathbb{R}/cos(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}/x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Actividad 1.10

Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base.

1. $a(x) = \cos(x) + 3$
2. $b(x) = sen(x) - 2$
3. Realizar la gráfica de la función $h(x) = tg(x)$ para $x \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

1.3. Funciones a trozos

En ocasiones es necesario recurrir a diferentes expresiones (cuadráticas, racionales, exponenciales, etc.) para representar una situación; de modo que la función que se construye se representa mediante el uso de fórmulas diferentes en distintas partes de su dominio.

Actividad 1.11

Para el cálculo del monto de la factura de luz, se considera el consumo del usuario y se le cobra de acuerdo al esquema que se describe a continuación.

Si el consumo está entre 0 y 150 kwh, se cobra un monto fijo de $\$95,85$, más un cargo variable de $\$3,41$ por cada kwh consumido. Si el consumo que se registra es mayor a 150 kwh y hasta 325 kwh, se cobra un monto fijo de $\$265,22$, más $\$3,17$ por cada kwh consumido. Si el usuario utilizó más de 325 kwh y hasta 400 kwh, se cobra un cargo fijo de $\$322,26$, más $\$3,20$ por cada kwh. Si el consumo es mayor a 400 kwh el cargo fijo es de $\$422$ y el cargo variable es de $\$3,50$ por kwh.

1. ¿Cuánto deberá pagar un usuario que ha consumido 270 kwh?¿Y si hubiera consumido 150 kwh? ¿Qué monto tendrá la factura de luz de otro usuario que gastó 450 kwh?
2. Construya las fórmulas que calculan el monto de la factura de luz para cada uno de los intervalos de consumo.
3. ¿De qué manera se podrían expresar las fórmulas anteriores en una única función?

1.3.1. Función Valor Absoluto

Un caso particular de función a trozos muy usado es la **función valor absoluto**. El valor absoluto de un número suele pensarse como el mismo número "sin signo". Sin embargo, para dar una instrucción precisa de cómo calcularlo se divide en dos casos: para los valores positivos se deja el mismo valor y para los valores negativos se cambia el signo.

La función valor absoluto tiene como $Dom(f) = (-\infty, +\infty)$, pues se puede calcular el valor absoluto de cualquier número real.

Si quisiéramos pensarlo como una función, debemos notar que tiene diferente expresión para distintas partes del dominio. Concretamente para valores $x \in (-\infty, 0)$, la función toma valores $-x$ y para valores $x \in [0, +\infty)$, la función toma valores x.

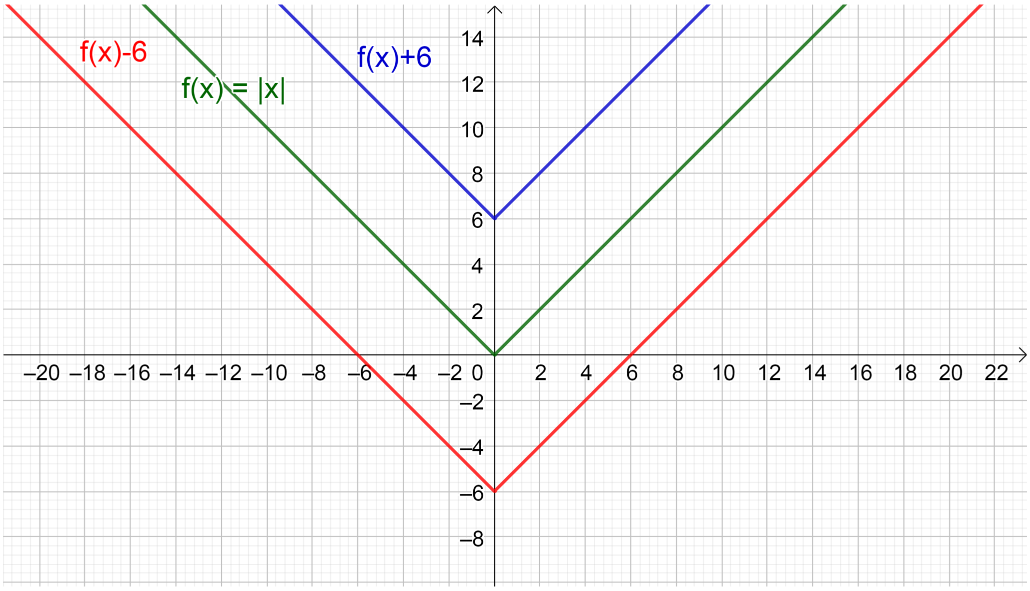
En este caso la función en cuestión se puede expresar de la siguiente manera:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

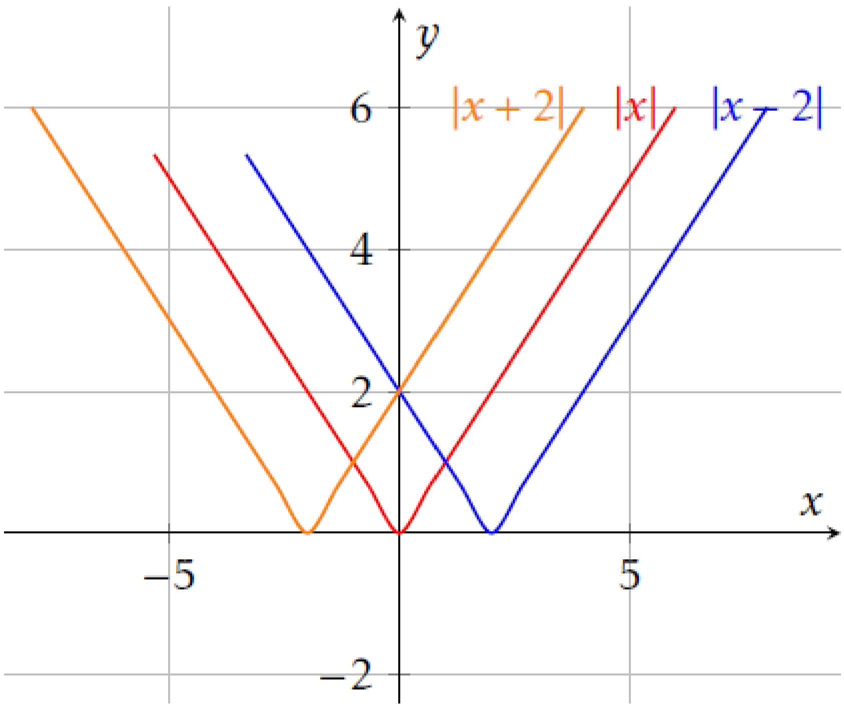
A continuación podemos observar una típica función valor absoluto. En las mismas gráficas se presentan algunos ejemplos de traslaciones horizontales y verticales.

Traslaciones de la función valor absoluto

Los desplazamientos de 6 lugares sobre el eje y se presentan cuando sumamos o restamos 6 por fuera de las barras de valor absoluto. Se observan así:



Si los desplazamientos los hacemos horizontalmente, lo que debemos modificar es el interior de las barras de valor absoluto. Por ejemplo, veamos los siguientes desplazamientos 2 lugares sobre el eje x.



Actividad 1.12

Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base, la función valor absoluto.

1. $a(x) = |2x| + 1$
2. $b(x) = |x - 6|$

Ejemplo 1.6 Para $f(x)$ definida por

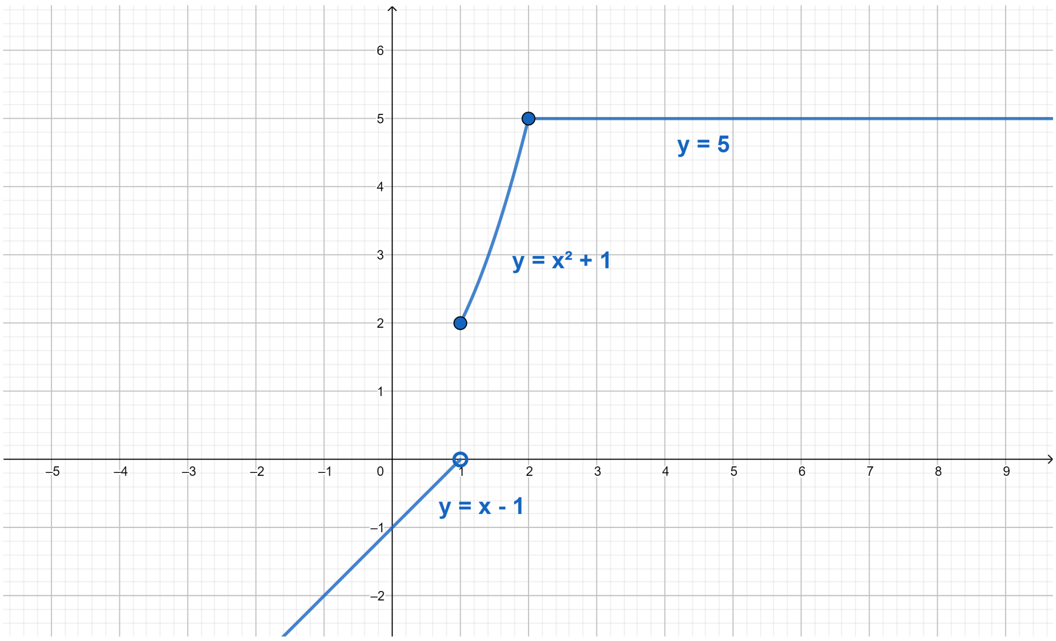
$$f(x) = \begin{cases} x-1 & si \quad x < 1 \\ x^2+1 & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 5 & si \quad x > 2 \end{cases}.$$

a) Hallar el dominio de $f(x)$.
b) Hallar $f(0)$, $f(1)$, $f(4)$.
c) Realice su gráfica.

a) Para determinar el dominio de $f(x)$, debemos considerar cada expresión que define a la función, teniendo en cuenta el intervalo que está siendo considerado en cada caso.
Para $x < 1$ la función es lineal y se puede calcular en todo x menor a 1. Un razonamiento similar ocurre para $1 \leq x \leq 2$, donde la función es cuadrática y en $x > 2$ donde $f(x)$ es constante. Con lo cual $Dom(f) = (-\infty, 1) \cup [1, 2] \cup (2, +\infty) = \mathbb{R}$.

b)
- Como $x = 0 \in (-\infty, 1)$, ($f(x)$ toma la forma de $(x-1)$)
  $\Rightarrow \quad f(0) = 0 - 1 = -1$.
- Como $x = 1 \in [1, 2]$, ($f(x)$ toma la expresión $(x^2 + 1)$)
  $\Rightarrow \quad f(1) = 1^2 + 1 = 2$.
- Como $x = 4 \in (2, +\infty)$, ($f(x)$ es constante)
  $\Rightarrow \quad f(4) = 5$.

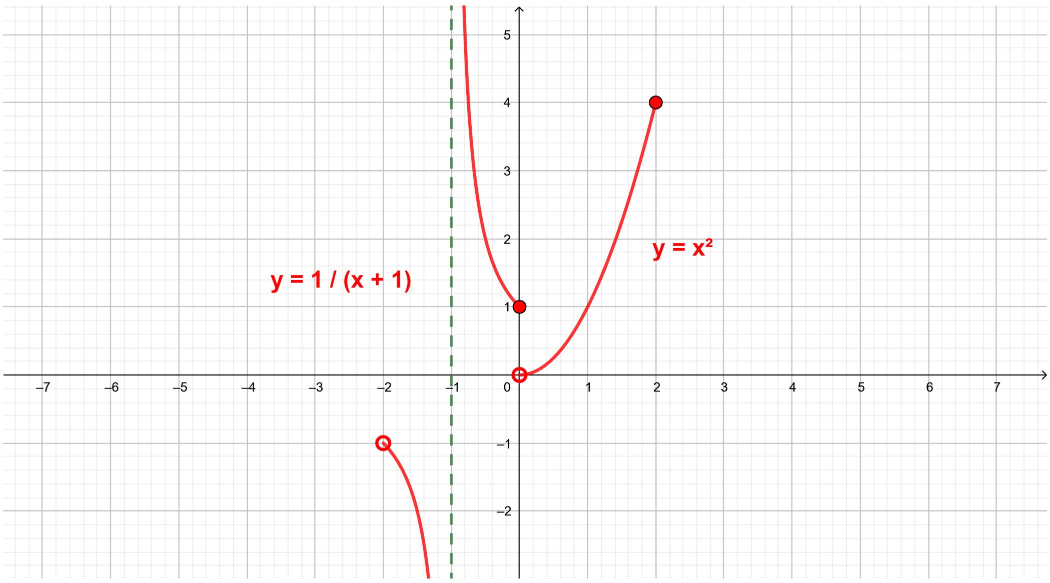
c) La gráfica de f es:



Ejemplo 1.7

Sea $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & si \quad -2 < x \leq 0 \\ & \\ x^2 & si \quad 0 < x \leq 2 \end{cases}$.

El dominio de la función es $Dom(g) = (-2,-1) \cup (-1,2]$, "sacamos" del dominio a $x = -1$, ya que el denominador de la función $\dfrac{1}{x+1}$ no puede ser cero, por lo tanto no está definido para ese valor de x.



■

Observemos que una función a trozos está definida por varias expresiones, cada una de las cuales corresponde a un intervalo distinto del dominio de la función. Además, para determinar el dominio de la función debemos pensar en qué valores puede calcularse cada expresión, en el intervalo que le corresponde, y luego considerar la unión de cada uno de los conjuntos calculados antes.

Actividad 1.13

Hallar el dominio de las siguientes funciones a trozos y graficar.

1. $f(x) = \begin{cases} -x & si \quad x \leq 0 \\ x^2 & si \quad 0 < x \leq 1 \\ 1 & si \quad x > 1 \end{cases}$.

2. $g(x)=\begin{cases} e^x & si \quad 0\leq x<2 \\ 5 & si \quad x=2 \\ \dfrac{2}{x-4} & si \quad 2<x<6 \end{cases}$.

Sugerencia: Para verificar si las gráficas son correctas utilizar GeoGebra. El comando **Si** permite definir funciones a trozos: Si[condición1,expresión1, condición2,expresión2,...]. Por ejemplo para definir la función $f(x)$ del ejemplo 1.6, debemos utilizar

$Si[x<1, x-1, 1<=x<=2, x^2+1, x>2, 5]$

1.4. Operaciones entre funciones

Otra forma de obtener funciones es a partir de hacer ciertas operaciones entre las funciones conocidas . A continuación definimos la suma, resta, producto, división y composición de funciones. Es preciso que tengamos cuidado a la hora de definir el dominio de las nuevas funciones.

1.4.1. Suma, resta, producto y cociente de funciones

Definición 1.4

Supongamos que f y g son funciones con dominios D_1 y D_2, respectivamente. **Las funciones** $f+g$, $f-g$ y $f\cdot g$ están definidas por:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$$

para todo $x\in D_1\cap D_2$ (es decir, para x que pertenezca a ambos dominios).

La función $\dfrac{f}{g}$ está definida por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

para $x\in D_1\cap D_2-\{x:g(x)=0\}$.

Las funciones también se pueden multiplicar por constantes: si c es un número real, entonces la función cf está definida para todo x en el dominio de f mediante

$$(cf)(x)=cf(x)$$

.

Ejemplo 1.8

Sean $f(x) = x - 3$ y $g(x) = \sqrt{x}$, cuyos dominios son:

$$Dom(f) = (-\infty, +\infty) \qquad \text{y} \qquad Dom(g) = [0, +\infty)$$

Los puntos comunes a tales dominios son $(-\infty, +\infty) \cap [0, +\infty) = [0, +\infty)$.

Las diferentes combinaciones algebraicas de las dos funciones son:

Función	Expresión	Dominio
$f+g$	$(f+g)(x) = x - 3 + \sqrt{x},$	$[0, +\infty)$
$f-g$	$(f-g)(x) = x - 3 - \sqrt{x},$	$[0, +\infty)$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = (x-3) \cdot \sqrt{x},$	$[0, +\infty)$
$\left(\frac{f}{g}\right)$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-3}{\sqrt{x}},$	$(0, +\infty)$ ('sacamos' $x = 0$)
$\left(\frac{g}{f}\right)$	$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{x}}{x-3},$	$[0, 3) \cup (3, +\infty)$ ('sacamos' $x = 3$)

■

1.4.2. Composición de funciones

Las operaciones definidas en el apartado anterior están relacionadas con operaciones que nos resultan más usuales: suma, resta, producto y cociente de funciones. Hay una operación que se realiza entre funciones que no se corresponde directamente con estas operaciones.

Definición 1.5

Si f y g son funciones, la **composición** de estas funciones se escribe como $f \circ g$ (se lee g compuesta con f), está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Notar que la operación consiste en "colocar" la función g en el "interior" de la función f.

Por ejemplo, pensemos en que $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = x^2 + 2$, y consideremos su composición: $(f \circ g)(x)$.

Si quisiéramos calcular $(f \circ g)(2) = f(g(2))$, una posibilidad es calcular $g(2) = 2^2 + 2 = 6$ y a continuación $f(6) = 2 \cdot 6 - 1 = 11$. Es decir que, $f(g(2)) = 11$. También podríamos calcular la expresión de $f(g(x)) = f(x^2 + 2) = 2(x^2 + 2) - 1$ y considerarla para evaluar en $x = 2$.

Observemos que, en este ejemplo, la expresión que resulta de la composición puede ser evaluada en cualquier número real. Ahora bien, para el caso general de dos funciones cualesquiera, ¿en qué valores podremos evaluar el resultado de esta operación? Es decir, ¿cuál será el dominio de $(f \circ g)(x)$? Pues, pensemos en el mecanismo de evaluación de esta función. En primera medida, para saber el valor que tendrá f en $g(x)$ debemos conocer dónde evaluar f. Es decir, que si x está en el dominio de la composición, en primera instancia debe ser un valor numérico donde pueda ser evaluada la función g para obtener $g(x)$; luego, para poder seguir con el cálculo, necesitamos que el valor que arroje $g(x)$ sea tal que pueda ser usado para evaluar f y de ese modo obtener $f(g(x))$.

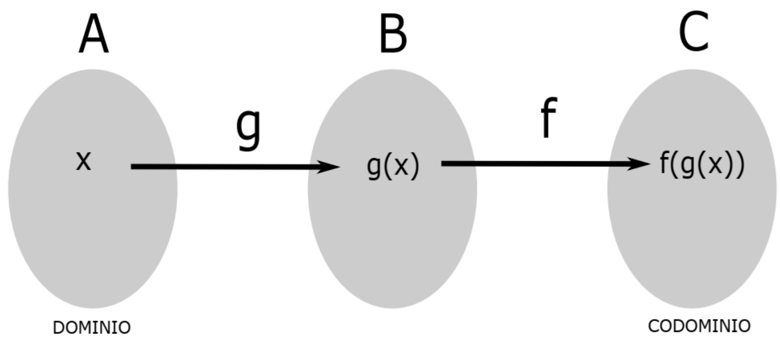
Así, el dominio de $f \circ g$ consiste de todos los números x en el dominio de g para los cuales $g(x)$ está en el dominio de f. Simbólicamente,

$$Dom(f \circ g) = \{x \in Dom(g) \quad / \quad g(x) \in Dom(f)\}.$$

Para evaluar la composición $g \circ f$ (cuando esté definida), invertimos el orden para encontrar primero $f(x)$ y después $g(f(x))$. El dominio de $g \circ f$ es el conjunto de números x en el dominio de f, tales que $f(x)$ esté en el dominio de g.

Por lo general, las funciones $(f \circ g)$ y $(g \circ f)$ son muy diferentes.

Observación
La composición de dos funciones es un proceso de dos pasos, como se indica en el siguiente esquema:



Importante: Para definir $f(g(x))$, primero se necesita definir $g(x)$, por lo que x debe estar en el dominio de g. A continuación, f debe definirse en el punto $g(x)$, de modo que el número $g(x)$ deba estar en el dominio de f. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.9 Para $f(x) = x^2+1$ y $g(x) = ln(x)$, determinar $(f \circ g)$, $(g \circ f)$ y $(f \circ f)$ e identificar el dominio de cada una.

Primero indentificamos el dominio de f y g: $Dom(f) = \mathbb{R}$ y $Dom(g) = (0, +\infty)$
Luego obtenemos la expresión de $f \circ g$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(ln(x)) = (ln(x))^2 + 1$$

Por último, el dominio de la composición resulta

$$\begin{aligned} Dom(f \circ g) &= \{x \in Dom(g) / g(x) \in Dom(f)\} = \\ &= \{x \in (0, +\infty) \,/\, ln(x) \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty) \end{aligned}$$

Ya que las imágenes de la función logaritmo son números reales.

Composición	Dominio
$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(ln(x)) = (ln(x))^2+1$	$(0,+\infty)$
$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = ln(x^2+1)$	$\mathbb{R}$
$(f\circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2+1) = (x^2+1)^2+1$	$\mathbb{R}$

Para ver que el $Dom(g\circ f) = \mathbb{R}$, observar que $f(x)$ está definida para cada valor de x en $\mathbb{R}$, $f(x) = x^2+1$ debe estar en el dominio de g, con lo cual $x^2+1 > 0$, y esto ocurre para cualquier valor de x (pues un número elevado al cuadrado es siempre positivo y si le sumo un número positivo, sigue quedando positivo), así que no "sacamos" ningún valor del dominio de f.

■

A menudo se necesitará reconocer que una función dada es una composición de funciones más simples.

Ejemplo 1.10 Identificar las funciones f y g de modo que la función dada se pueda escribir como $f\circ g$, a) $\sqrt{x^2+1}$, b) $\cos^2(x)$.

La función del inciso a) se puede pensar que x^2+1 está dentro de la raíz cuadrada. Así $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2+1$.

En el inciso b) podemos pensar $\cos(x)$ está dentro de x^2. Por lo tanto, $f(x) = x^2$ y $g(x) = \cos(x)$.

■

Ejemplo 1.11 La siguiente tabla de valores muestra algunos valores que toman las funciones f y g.

x	$f(x)$	$g(x)$
1	1	2
2	3	0
3	-2	-7

A partir de estos datos del cuadro, determinar: a) $f(g(1))$, b) $g(f(2))$.

a) Si vemos en el cuadro, sabemos que $g(1) = 2$, con lo cual, $f(g(1)) = f(2) = 3$.

b) $g(f(2)) = g(3) = -7$.

■

Observación Es posible componer más de dos funciones.

$$(f\circ g\circ h)(x) = [(f\circ g)\circ h](x) = [f\circ(g\circ h)](x) = f(g(h(x))).$$

1.5. Ejercicios de funciones

1. Hallar el dominio para que las siguientes expresiones sean funciones:

   a) $a(x) = x + 1$

   b) $b(x) = x^2 + 1$

   c) $c(x) = \dfrac{1}{x}$

   d) $d(x) = \dfrac{2}{x+3}$

   e) $e(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4}$

   f) $f(x) = \dfrac{5}{x^2 - 4x + 3}$

   g) $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - 4x + 3}$

   h) $h(x) = |x + 1|$

   i) $i(x) = 2^x$

   j) $j(x) = 2^{x-5}$

   k) $k(x) = \ln(x)$

   l) $l(x) = \ln(x + 4)$

2. Sean $f(x) = x + 1$, $g(x) = \sqrt{x-3}$, $h(x) = \dfrac{1}{x}$, $M(x) = sin(x)$ y $W(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

   A partir de estas funciones determinar:

   a) Dominio de cada una de las funciones

   b) Expresión y dominio de: i) $(g + W)$, ii) $(h \cdot M)$ y iii) $\left(\dfrac{g}{f}\right)$

   c) Expresión y dominio de las siguientes funciones compuestas: i) $(f \circ g)$, ii) $(h \circ f)$, iii) $(M \circ h)$

   d) Expresión de $(h \circ M \circ f)$

3. Identificar las funciones f y g de modo que las funciones dadas se puedan escribir como $(f \circ g)$. (Ver Ejemplo 1.10).

   a) $senx^3$

   b) $\sqrt{x^4 + 1}$

   c) $\dfrac{1}{x^2 + 1}$

4. Hallar el dominio de las siguientes funciones:

   a) $f_2(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & si \quad x \leq 1 \\ x^2 + 2x & si \quad x > 1 \end{cases}$

b) $f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad x < 0 \\ \\ ln(x) & si \quad x > 0 \end{cases}$

5. Dadas $f(x) = 2 - x$ y $g(x) = \begin{cases} -x & -2 \leq x < 0 \\ \\ x - 1 & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$ hallar:

   a) $f(g(0))$ y $g(f(0))$

   b) $f(f(2))$ y $g(g(-1))$

   c) $f(g(\frac{1}{2}))$ y $g(f(3))$

Pueden graficar las funciones pedidas utilizando el programa GeoGebra on line:

https://www.geogebra.org

En el siguiente link pueden aprender a usarlo:

https://www.geogebra.org/m/t59xh7fc

2. Límites

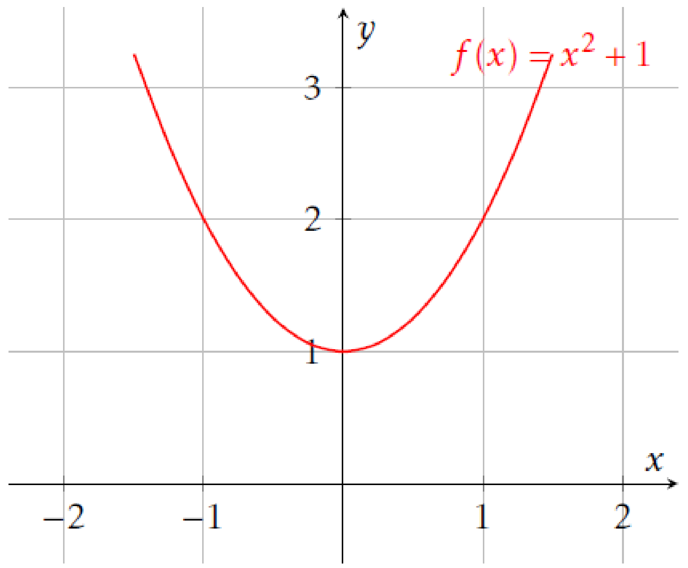
En este capítulo desarrollaremos el concepto de límite de una función, una de las nociones fundamentales del cálculo. A partir de esto, podremos analizar el comportamiento de una función tanto alrededor de un punto, como cuando los valores de x del dominio aumentan indefinidamente. Estas ideas nos permitirán conocer más detalles de la representación gráfica de una función. También la noción de límite nos será útil para definir los conceptos de continuidad, derivabilidad e integración que se verán más adelante.

Muchos de estos temas se utilizan, en informática, por ejemplo para calcular el orden de un algoritmo.

2.1. Hacia el concepto de límite

Comenzaremos con una idea intuitiva del estudio del comportamiento de una función alrededor de un punto.

Ejemplo 2.1 En el siguiente gráfico se muestra parte de la función $f(x) = x^2 + 1$



Luego, si calculamos algunos valores que toma la función para valores menores a 1 pero cada vez más cercanos a 1 , veremos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \quad 1 \\
f(0{,}5) &= \quad 1{,}25 \\
f(0{,}75) &= \quad 1{,}56 \\
f(0{,}80) &= \quad 1{,}64 \\
f(0{,}90) &= \quad 1{,}81 \\
f(0{,}95) &= \quad 1{,}90 \\
f(0{,}99) &= \quad 1{,}98 \\
f(0{,}999) &= \quad 1{,}998
\end{aligned}
$$

Lo que podemos observar aquí es, que si tomamos valores de x cada vez más cercanos a 1 pero menores a 1 , los resultados de sus imágenes son cada vez más cercanos a 2.

Esto puede entenderse como que mientras x se acerca al valor 1, por izquierda, los valores de $f(x)$ se acercan al valor 2, y puede simbolizarse de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to 1^-} x^2 + 1 = 2$$

Esto se lee : *el límite, cuando x tiende a* 1 *por izquierda, de* $x^2 + 1$ *es igual a 2.*

Este límite puede calcularse sencillamente, por ser una función polinómica , reemplazando directamente la variable en la expresión de la función [1], es decir:

$$\lim_{x \to 1^-} x^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2.$$

En muchos otros casos tendremos que modificar previamente la expresión antes de reemplazar la variable.

[1] Veremos más adelante por qué se puede hacer esto.

Sigamos adelante con el mismo ejemplo. Ahora, si calculamos algunos valores que toma la función para x mayores a 1, pero cada vez más cercanos a 1 , veremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(2) = &\quad 5 \\ f(1{,}5) = &\quad 3{,}25 \\ f(1{,}25) = &\quad 2{,}56 \\ f(1{,}2) = &\quad 2{,}44 \\ f(1{,}1) = &\quad 2{,}21 \\ f(1{,}05) = &\quad 2{,}10 \\ f(1{,}01) = &\quad 2{,}02 \\ f(1{,}001) = &\quad 2{,}002 \end{aligned}$$

Si tomamos valores de x mayores a 1 pero cada vez más cercanos a 1 , los resultados de sus imágenes son cada vez más cercanos a 2.

Esto puede entenderse como que mientras x se acerca al valor 1, por derecha, los valores de $f(x)$ se acercan al valor 2, y se simboliza de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to 1^+} x^2 + 1 = 2$$

Esto se lee: *el límite, cuando x tiende a* 1 *por derecha, de* $x^2 + 1$ *es igual a 2*.

Aquí, podemos hacer lo mismo que antes, reemplazar directamente en la expresión de la función, es decir

$$\lim_{x \to 1^+} x^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2.$$

En este caso en particular, tanto los límites por izquierda y por derecha coinciden en su resultado, pero esto no sucede en todos los casos.

A estos límites, tanto al límite por izquierda como al límite por derecha, los llamamos **límites laterales**.

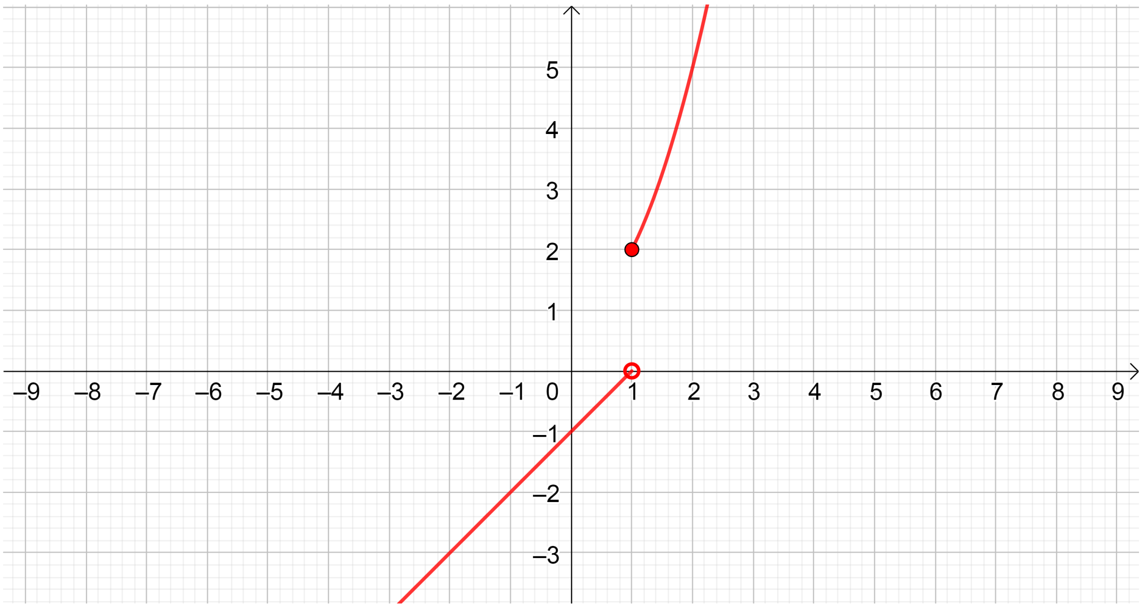
Queremos destacar que, como en esta situación, si ambos límites laterales existen y toman el mismo valor numérico diremos que **existe el límite de la función** cuando x tiende al valor estudiado.

En este ejemplo, podemos decir que el límite, cuando x tiende a 1, de $(x^2 + 1)$ es 2. Es decir que, si no se hace mención alguna a si el límite es por izquierda o por derecha, se entiende que ambos límites laterales coinciden. Puede simbolizarse así:

$$\lim_{x \to 1} x^2 + 1 = 2$$

Ejemplo 2.2 Veamos qué sucede ahora con el límite, cuando $x \to 1$, para la función $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & si \quad x < 1 \\ x^2 + 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases} .$$



En este caso la función está definida por partes, con fórmulas diferentes para los casos en que $x < 1$ o en que $x \geq 1$. Calculemos los límites laterales.

El límite de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow 1$ por izquierda:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x - 1$$

Al calcular el límite cuando $x \longrightarrow 1$ por izquierda, debemos tener en cuenta que estamos tomando valores de $x < 1$ por lo que la expresión de la función será $f(x) = x - 1$.

Este límite puede calcularse simplemente reemplazando la variable en la expresión que corresponde.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x - 1 = 1 - 1 = 0$$

Por otra parte, *el límite de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow 1$ por derecha:*

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 + 1$$

Al calcular el límite cuando $x \longrightarrow 1$ por derecha, debemos tener en cuenta que estamos tomando valores de $x > 1$ por lo que la función tomará la segunda expresión. Es decir, $f(x) = x^2 + 1$.

Este límite también puede calcularse con un simple reemplazo de la variable $x = 1$ en la expresión.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$$

Es oportuno decir que, si los límites laterales no coinciden en el mismo valor numérico diremos que **no existe el límite de la función** cuando x tiende al punto estudiado.

Concluimos que para la función con la que estamos trabajando, el límite de $f(x)$ cuando $x \to 1$ no existe, ya que los límites laterales no coinciden.

Ejemplo 2.3 Consideremos la función racional

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Observemos que **la función** g **no está definida para** $x = 1$ (es decir que no existe $g(1)$), pero sí para cualquier otro número real. Entonces nos podríamos preguntar cómo se comporta la función cuando x toma valores próximos a 1.

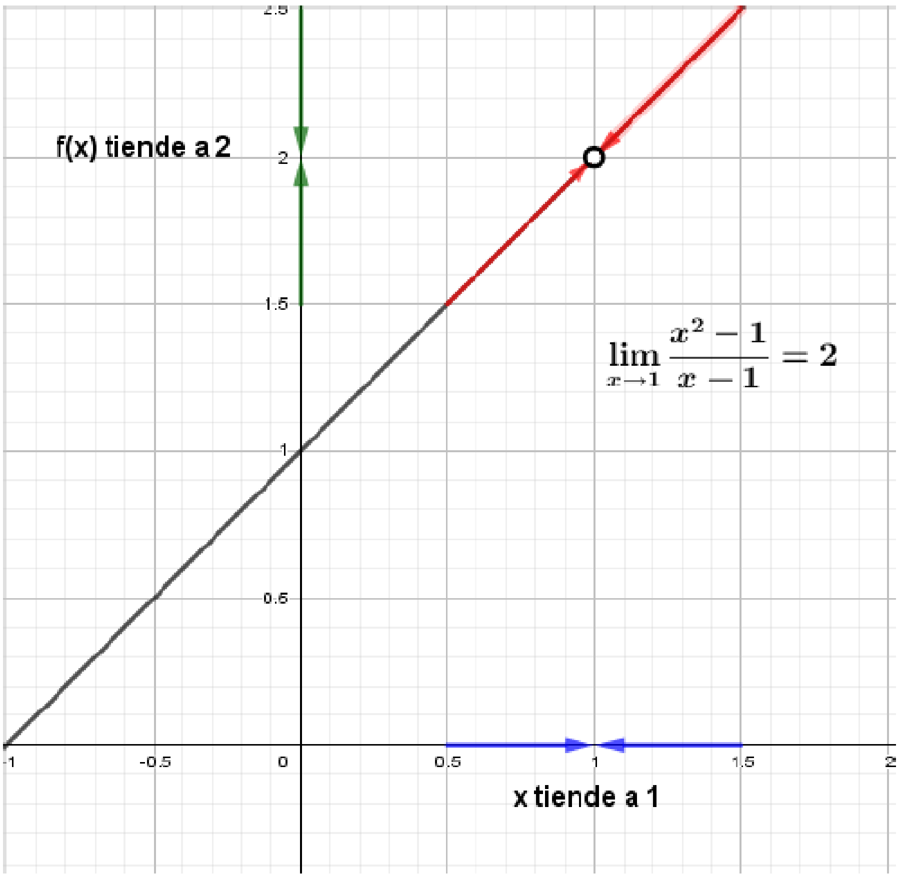
Para responder esta pregunta calculamos los valores de $g(x)$ para valores de x cercanos a 1.

$$\begin{aligned} g(0{,}75) &= \quad 1{,}75 \\ g(0{,}90) &= \quad 1{,}90 \\ g(0{,}99) &= \quad 1{,}99 \\ g(0{,}999) &= \quad 1{,}999 \\ g(1) & \quad\ \ \text{no existe} \\ g(1{,}001) &= \quad 2{,}001 \\ g(1{,}01) &= \quad 2{,}01 \\ g(1{,}1) &= \quad 2{,}1 \\ g(1{,}25) &= \quad 2{,}25 \end{aligned}$$

A partir de estos datos , no es difícil concluir que a medida que x toma valores cada vez más próximos a 1 (tanto por valores mayores como por menores), $g(x)$ toma valores cada vez más próximos a 2. Entonces,

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Observemos gráficamente la información que nos brinda el cálculo del límite anterior:



Observemos que aunque en este ejemplo la función no está definida en el punto $x = 1$, podemos concluir que el límite de $f(x)$ cuando $x \to 1$ existe y vale 2.

La noción de límite, tal como la describimos en los ejemplos, está destinada a comunicar el comportamiento de una función cerca de algún punto de interés, pero en realidad no en ese punto.

Ahora, vamos a formalizar los conceptos que vimos en los ejemplos anteriores.

2.2. Definiciones

En las siguientes definiciones consideramos x_0 y L números reales y $f(x)$ una función.

Definición 2.1

Se dice que el límite, cuando x tiende a x_0 por izquierda, de $f(x)$ es igual a L cuando los valores de $f(x)$ se aproximan a L, a medida que evaluamos la función en valores de x cada vez más cercanos a x_0 pero menores que x_0. En tal caso simbolizamos:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L,$$

Definición 2.2

Se dice que el límite, cuando x tiende a x_0 por derecha, de $f(x)$ es igual a L cuando los valores de $f(x)$ se aproximan a L, a medida que evaluamos la función en valores de x cada vez más cercanos a x_0 pero mayores que x_0. Y simbolizamos:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L,$$

Definición 2.3

Se dice que el límite, cuando x tiende a x_0, de $f(x)$ es igual a L cuando los límites laterales existen y coinciden. Lo anterior se simboliza:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \text{ si y solo si } \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$

En otras palabras, un límite existe si podemos acercar arbitrariamente (tanto como se desee) los valores de $f(x)$ a L escogiendo x lo suficientemente cercano a x_0 (tanto por valores mayores como por menores), pero no igual a x_0.

Ejemplo 2.4

a) Si f es la función identidad, entonces para cualquier valor de x_0

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x = x_0$$

(b) Si f es la función constante, (función con el valor constante c), entonces para cualquier valor de x_0,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} c = c$$

■

Hemos desarrollado algunas ideas para calcular límites de algunas funciones particulares. Extenderemos estas ideas en las secciones siguientes, para seguir pensando cómo calcular límites para una función cualquiera.

2.3. Límites por sustitución directa

Teorema 2.3.1 Propiedades Algebraicas de los límites

Para calcular límites de funciones, que son a su vez combinaciones aritméticas de funciones con límites conocidos, utilizamos varias reglas sencillas.

Sean L, M, k y x_0 números reales.

$$\text{Si } \lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = M$$

entonces,

1. Propiedad de la suma/diferencia entre funciones:
$\lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = L \pm M$

2. Propiedad del producto entre una constante y una función:
$\lim_{x\to x_0} k\, f(x) = k \lim_{x\to x_0} f(x) = k\, L$

3. Propiedad del producto de funciones:
$\lim_{x\to x_0} f(x).g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x). \lim_{x\to x_0} g(x) = L.M$

4. Propiedad del cociente entre funciones:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{L}{M}, \qquad \text{si} \quad M \neq 0$$

5. Propiedad de la potencia de una función:
$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^n = [\lim_{x\to x_0} f(x)]^n = [L]^n$, n entero positivo

6. Propiedad de la raíz de una función:
$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)} = \sqrt[n]{L} = [L]^{1/n}$, n entero positivo

Importante:

1. **Todas estas propiedades son válidas si los límites de las funciones existen; es decir, si tienden a un valor numérico.**
2. **La propiedad del cociente no se puede utilizar cuando el límite del denominador es 0. Veremos más adelante como resolver este tipo de límites.**

Ejemplo 2.5 Calcular los siguientes límites utilizando propiedades y el Ejemplo 2.4.

$$a)\ \lim_{x\longrightarrow 0}(2x^2-3x+4) \qquad b)\ \lim_{x\longrightarrow -2}\frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}.$$

$$\begin{aligned}
a)\ \lim_{x\to 0}(2x^2-3x+4) &= \lim_{x\to 0}(2x^2)-\lim_{x\to 0}(3x)+\lim_{x\to 0}(4) && \text{(prop. 1)}\\
&= 2\lim_{x\to 0}(x^2)-3\lim_{x\to 0}(x)+\lim_{x\to 0}(4) && \text{(prop. 2)}\\
&= 2(\lim_{x\to 0}x)^2-3\lim_{x\to 0}(x)+\lim_{x\to 0}(4) && \text{(prop.5)}\\
&= 2(0)^2-3(0)+4 && \text{(Ejemplo 2.4)}\\
&= 0-0+4=4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2-1}{5-3x} &= \frac{\lim_{x\to -2}(x^3+2x^2-1)}{\lim_{x\to -2}(5-3x)} && \text{(prop. 4)}\\
&= \frac{\lim_{x\to -2}x^3+2\lim_{x\to -2}x^2-\lim_{x\to -2}1}{\lim_{x\to -2}5-3\lim_{x\to -2}x} && \text{(prop. 1 y 2)}\\
&= \frac{(-2)^3+2(-2)^2-1}{5-3(-2)} && \text{(prop. 5)}\\
&= \frac{-8+8-1}{5+6}=-\frac{1}{11}
\end{aligned}$$

■

Importante: Propiedad de sustitución directa

Si f es una función polinómica, racional, exponencial, potencia racional, logarítmica o trigonométrica y además x_0 está en el dominio de f, entonces

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

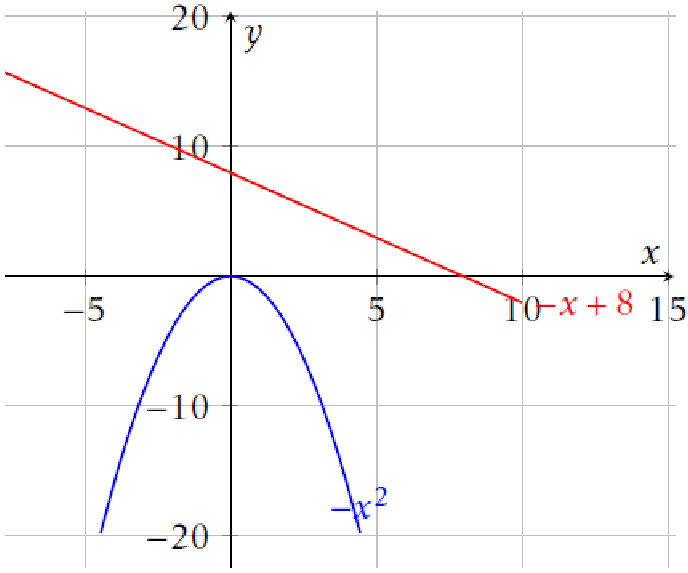
Es decir que en estos casos calcular un límite es tan sencillo como reemplazar el valor x_0 en la función.

Las funciones enumeradas no son las únicas con esta propiedad de sustitución directa. Aquellas funciones que cumplen esta propiedad se llaman continuas en x_0 y esas características se estudiarán en el próximo capítulo.

Ejemplo 2.6 Hallemos el límite indicado en cada uno de los casos.

(a) Sean $f(x) = -x+8$ y $g(x) = -x^2$, calcular $\lim\limits_{x\to -5} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$

Observemos sus gráficas:



Por sustitución directa podemos afirmar que: $\lim\limits_{x\to -5} f(x) = \lim\limits_{x\to -5} -x+8 = 13$ y $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2} -x^2 = -4$

(b) Para $f(x) = \begin{cases} x^3 & si \quad x \geq 2 \\ 8 & si \quad x < 2 \end{cases}$, hallar el $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, si existe.

Esta función está definida para todo $x \in \mathbb{R}$. En $x = 2$ la función cambia de expresión, con lo cual debemos analizar los límites laterales.
Por un lado, el límite por derecha es

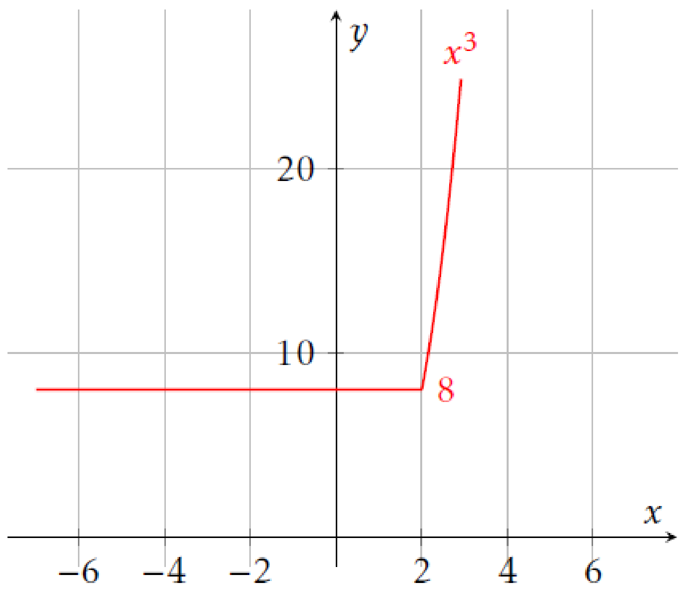
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x^3 = 8$$

Mientras que el límite por izquierda resulta

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 8 = 8$$

Como los límites laterales coinciden, concluimos que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 8$.

A continuación podemos observar la gráfica de f

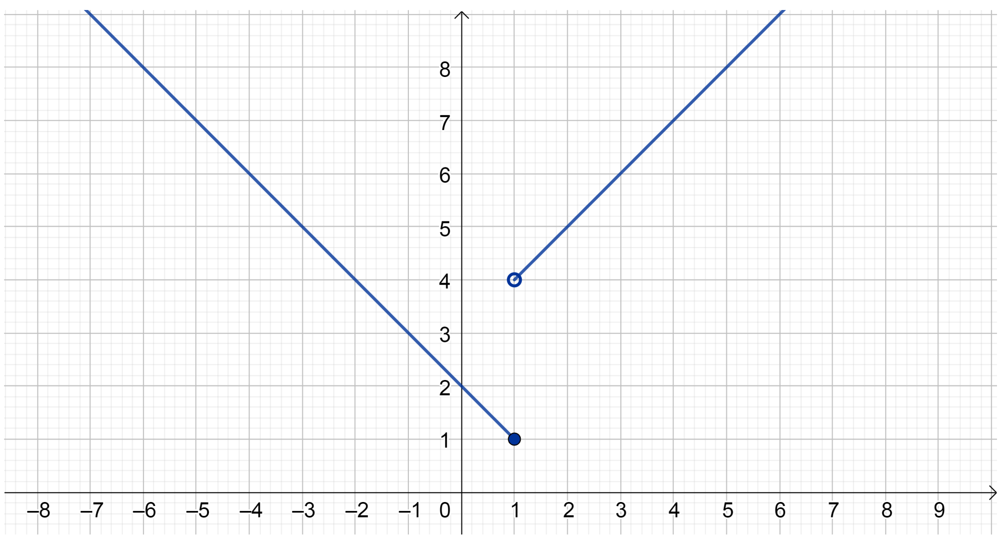


(c) Sea h dada por,

$$h(x) = \begin{cases} x+3 & si \quad x > 1 \\ -x+2 & si \quad x \leq 1 \end{cases}$$

Hallar $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$.

Como en el item b), se trata de una función a trozos. Gráficamente, podemos observar que $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$ no existe:



Ahora corroborémoslo analíticamente, es decir, haciendo las cuentas

$$\lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+} x+3 = 4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} -x+2 = 1$$

Como los límites laterales no coinciden, entonces $\lim_{x\to 1} h(x)$ no existe.

Actividad 2.1 1. Calcular los límites de las siguientes funciones, si existen.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x > 2 \\ 1 & si \quad x \leq 2 \end{cases}$ Calcular $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ y $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

b) Sea g la función valor absoluto, $g(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Calcular $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ y $\lim_{x\to 0^-} g(x)$. Qué puede concluir respecto al $\lim_{x\to 0} g(x)$?

2.4. Límites que no se pueden calcular por sustitución directa

No todos los límites se pueden evaluar sustituyendo directamente en la expresión de la función, pues no siempre se garantizan las condiciones para aplicar las propiedades. Algunos casos ocurren cuando la expresión en el límite incluye una división y el denominador tiende a 0.

Podemos distinguir dos casos que involucran esta situación. Uno cuando el numerador también tiende a cero y el otro donde el numerador tiende a una constante no nula. Nos ocuparemos inmediatamente de esta última situación.

2.4.1. Límites que dan infinito

Ahora nos ocupamos de aquellos límites donde la expresión incluye una división y solamente el denominador tiende a 0.

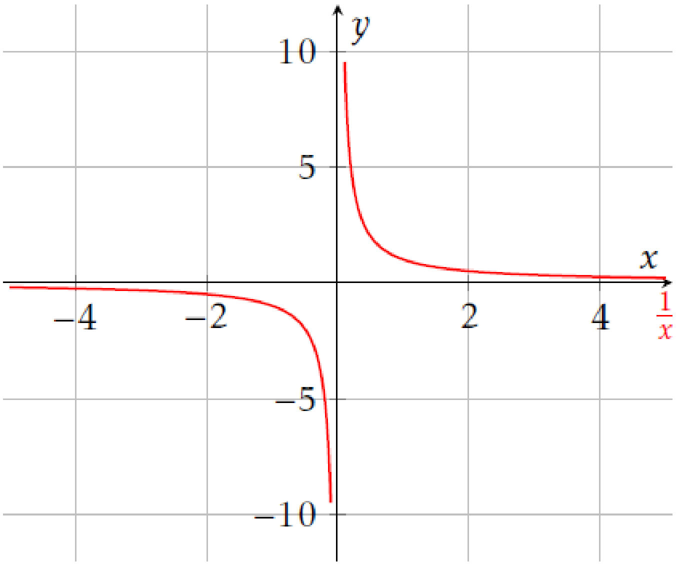
Ejemplo 2.7 Determinar el límite $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$.

Debido a que f es una función racional para la cual $x = 0$ no pertenece a su dominio, no podemos utilizar las propiedades algebraicas del límite para resolver nuestro problema.

Por lo que no tenemos otra alternativa (por ahora) que analizar en forma rudimentaria el comportamiento de $f(x)$ a medida que x se aproxima a 0

x	-0,1	-0,01	-0,001	$\longrightarrow$	0	$\longleftarrow$	0,001	0,01	0,1
$1/x$	-10	-100	-1000	$\longrightarrow$	¿ ?	$\longleftarrow$	1000	100	10

Si observamos la tabla, no es difícil concluir que conforme x se aproxima a 0 , los valores de $1/x$ se hacen cada vez más grandes. De hecho al ver la representación gráfica de la función confirmamos dicha conjetura.



Como los valores de $f(x) = 1/x$ no se aproximan a un número real cuando x tiende a cero por derecha ni cuando x tiende a cero por izquierda, la conclusión es que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ **no existe**.

Pero este comportamiento de los valores de $f(x) = 1/x$ cuando x tiende a 0, requiere nuestra atención y una notación especial.

Si se escoge x lo bastante cerca de 0 por derecha, podemos ver que los valores de $f(x) = 1/x$ aumentan indefinidamente, en este caso diremos que los valores tienden a *más infinito*, lo indicaremos de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Por otro lado si se escoge x lo bastante cerca de 0 por izquierda, podemos ver que los valores de $f(x) = 1/x$ disminuyen indefinidamente, en este caso diremos que los valores tienden a *menos infinito*, lo indicaremos de la siguiente forma:

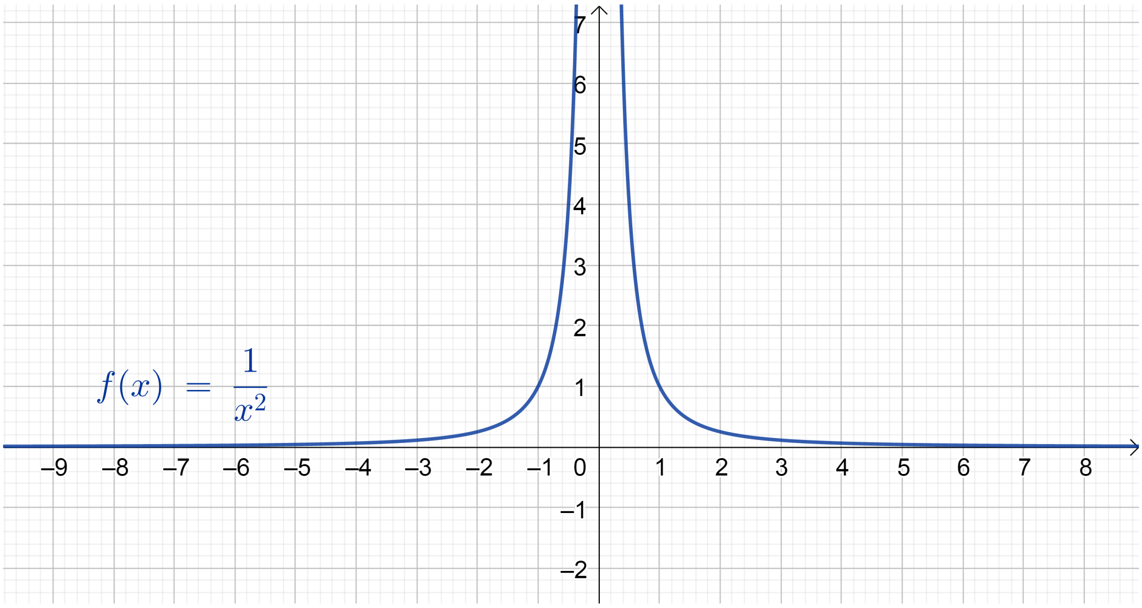
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Esta notación no significa que consideremos ∞ como un número, ni tampoco que exista el límite.

Geométricamente, esto dice que la gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$ se acerca a la línea vertical $x = 0$, cuando $x \to 0$. Cuando esto ocurre, decimos que la recta $x = 0$ es una *asíntota vertical*.

■

Ejemplo 2.8 Determinar el valor de $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$



Para pensar en este límite podemos usar un razonamiento similar al del ejemplo anterior. Como el numerador tiende a 1 y el denominador tiende a 0 y con cantidades positivas, el valor de la imagen de f tiende a $+\infty$. Esto es

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Aquí podemos ver que el límite no existe, pero también que hay una asíntota vertical en $x = 0$, donde $\frac{1}{x^2} \to +\infty$ cuando $x \to 0$ ya sea por izquierda o por derecha.

■

Definición 2.4

La recta $x = x_0$ se llama **asíntota vertical** de la curva $y = f(x)$ si por lo menos uno de los siguientes enunciados es verdadero:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

Ejemplo 2.9 Calcular $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{1}{(x-5)^3}$

Como $x \to 5$, el denominador se acerca a 0, mientras el numerador se acerca a 1. Específicamente,

$$\text{cuando}\, x \to 5^+, \quad (x-5)^3 \to 0 \quad \text{y} \quad (x-5)^3 > 0.$$

Indicamos a dónde tiende cada factor de la siguiente manera,

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{\overbrace{1}^{\to +1}}{\underbrace{(x-5)^3}_{\to 0^+}} = +\infty$$

.

Del mismo modo, cuando $x \to 5^-, \quad (x-5)^3 \to 0 \quad \text{y} \quad (x-5)^3 < 0,$

$$\lim_{x\to 5^-} \frac{\overbrace{1}^{\to +1}}{\underbrace{(x-5)^3}_{\to 0^-}} = -\infty$$

.

Observar que el razonamiento para concluir que la expresión tiende a $+\infty$ o a $-\infty$ puede separarse en dos pasos. Primero observamos que el numerador tiende a un número distinto de cero mientras el denominador tiende a cero; con lo cual podemos deducir que el resultado se hará arbitrariamente grande (tiende a $+\infty$ ó a $-\infty$). En segunda instancia estudiamos los signos del numerador y del denominador y, utilizando la regla de signos en el cociente, podemos concluir si el límite tiende a $+\infty$ o si tiende a $-\infty$.

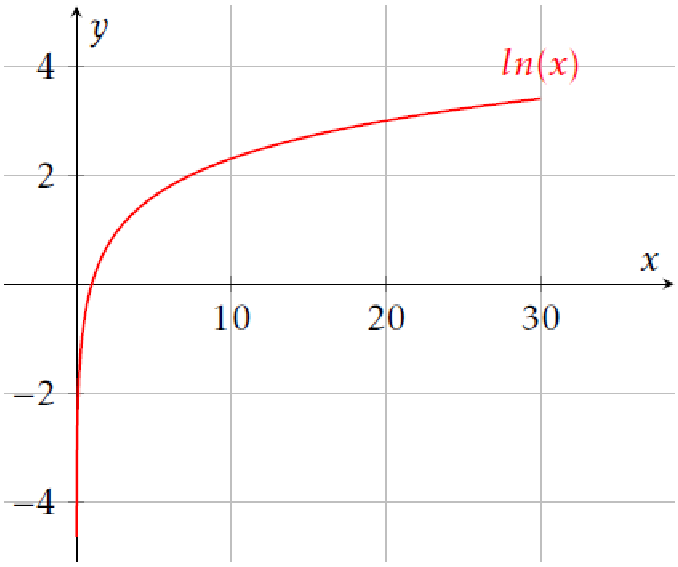
Finalmente, diremos que $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{1}{(x-5)^3}$ no existe, pero también diremos que existe una asíntota vertical en $x = 5$.

■

Ejemplo 2.10 Si $f(x) = ln(x)$ calculemos ahora $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

Tengamos presente que el dominio de la función logaritmo natural es el conjunto de los números reales positivos. En este caso no podemos hacer ningún tipo de simplificación así que estudiaremos el límite observando una tabla de valores.

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	0,0000001	0,00000001
$f(x)$	-2,3	-4,6	-6.9	-9,2	-11,5	-13,8	-16,11	-18,4



Si seguimos tomando valores de x lo suficientemente cercano a cero vemos que $f(x)$ disminuye indefinidamente, con lo cual podemos concluir que:

$$\lim_{x \to 0^+} ln(x) = -\infty$$

Además podemos decir que hay una asíntota vertical en $x = 0$.

2.4.2. Límites con x tendiendo al infinito

También nos interesa examinar el comportamiento de las funciones a medida que x aumenta indefinidamente (simbolizado como $x \to +\infty$) o cuando x disminuye indefinidamente (simbolizado como $x \to -\infty$). Veamos el comportamiento de las funciones conocidas:

1. Funciones constantes:
$$\lim_{x \to +\infty} k = k \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} k = k.$$
2. Función identidad:
$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} x = -\infty.$$
3. Función racional $f(x) = \dfrac{1}{x}$:

   Podemos ver que cuando tomamos valores muy grandes de x el resultado de la cuenta $\dfrac{1}{x}$ es muy chico, es decir que si $x \to +\infty$ entonces $\dfrac{1}{x} \to 0$. A este comportamiento lo escribiremos como,
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Similarmente,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Observemos que la gráfica de f (ver la figura del Ejemplo 2.7) parece acercarse a la línea horizontal $y = 0$, cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$. En este caso, decimos que en $y = 0$ hay una *asíntota horizontal*.

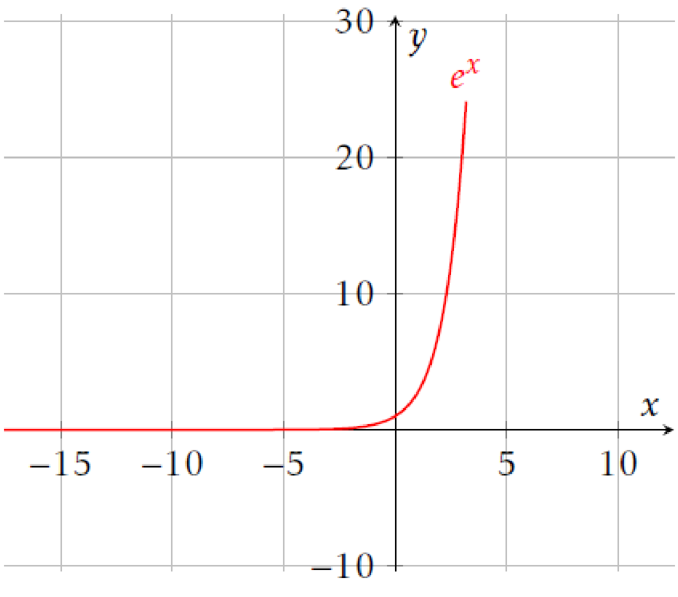
En general, si t es un número racional ($t > 0$)

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^t} = 0$$

4. Funciones exponenciales:

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

.



Hay una asíntota horizontal en $y = 0$ (solamente hacia $-\infty$)

5. Funciones logarítmicas:

$$\lim_{x \to +\infty} ln(x) = +\infty.$$

En este caso no tomamos $\lim\limits_{x \to -\infty} ln(x)$ porque la función no está definida para esos valores.

Definición 2.5

La recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$, si se verifica al menos una de las siguientes condiciones:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \text{ó} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Ejemplo 2.11 Calcular $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 5 + \frac{1}{x}$

Como los límites de ambos términos existen podemos aplicar suma de límites

$$\lim_{x \to +\infty} 5 + \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} 5 + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 5 + 0 = 5$$

■

2.4.3. Límites indeterminados

Hasta ahora hemos estudiado dos situaciones que involucran límites: El límite de una función cuando la variable tiende a un punto y el límite de la función cuando la variable se hace arbitrariamente grande (independientemente del signo).

En esas ideas que hemos recorrido nos hemos encontrado con casos en que la manera de decidir a dónde tiende un límite podía ser a través de evaluaciones directas (en los casos en que podíamos aplicar las propiedades), o a través de razonar el comportamiento de una expresión en las cercanías de un punto (en el caso de cocientes donde sólo el denominador tiende a 0), o con razonamientos acerca de cómo cambia la función a medida que la variable se hace grande (en los casos de límites con la variable tendiendo a $+\infty$ o a $-\infty$).

Sin embargo, a medida que vamos trabajando con esos límites, nos encontramos con situaciones que no resultan tan claras y sobre las cuales no se pueden tomar decisiones inmediatas acerca del comportamiento de la función o expresión que estamos estudiando.

Para ilustrar lo que estamos planteando, volvamos al ejemplo 2.3.

Ejemplo 2.12 Consideremos la función $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, en el ejemplo 2.3 se estudió de manera rudimentaria (evaluando la expresión en puntos cada vez más cercanos a $x = 1$) el valor de $\displaystyle\lim_{x \to 1} g(x)$.

Para poder resolverlo analíticamente (es decir a través de cálculos), lo primero que observamos es que $x = 1$ no está en el dominio de la función, sin embargo eso no es un problema, ya que el límite trabaja con lo que sucede alrededor de ese punto, es decir con valores muy cercanos a $x = 1$, que en este caso sí forman parte del dominio. Al calcular los límites del numerador y del denominador por separado vemos que:

$$\lim_{x \to 1} x^2 - 1 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1} x - 1 = 0$$

Así es que $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ no puede determinarse en forma directa.

Para ver la expresión de otra manera, podemos factorizar[2] la expresión del denominador y luego intentar simplificar o cancelar factores en común entre el denominador y el numerador.

$$g(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x+1 \quad \text{para} \;\; x \neq 1$$

Como al calcular los límites nos interesa el comportamiento de las imágenes de la función en las cercanías de $x = 1$, pero no precisamente en $x = 1$, y además las expresiones $\frac{x^2-1}{x-1}$ y $(x+1)$ son iguales, salvo en $x = 1$, sus imágenes en puntos cercanos a $x = 1$ coinciden. Luego podemos calcular el límite con la expresión simplificada:

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} = x+1 = 2$$

■

Como vemos en el ejemplo, aún cuando el numerador y denominador tienden a 0 el límite existe y no vale 0, sino que toma un valor que, a priori, nos resultaría insospechado.

Veamos otro ejemplo similar, en tanto se trata de un límite de un cociente en el que el numerador y el denominador tienden a cero.

Ejemplo 2.13 Consideremos la función $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

Notar que el dominio de la función es: $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$

Si quisiéramos saber el comportamiento de f en las cercanías del punto $x = 2$, debemos estudiar $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Observemos que tanto el numerador como el denominador tienden a cero

$$\lim_{x\to 2} x^2 - 2x = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2} x^2 - 4x + 4 = 0$$

Entonces, como no podemos usar las propiedades del límites sobre este cociente, trabajaremos similarmente a lo hecho en el ejercicio anterior

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4x-4} = \lim_{x\to 2} = \frac{x(x-2)}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2} \frac{x}{x-2}$$

Notemos que en este caso, luego de las simplificaciones que pudimos hacer después de haber factorizado las expresiones del numerador y del denominador, sobre la expresión que nos queda no puede calcularse el límite por evaluación directa dado que el denominador tiende a 0. Sin embargo el numerador tiende a una cantidad distinta de cero, con lo cual podemos concluir que el límite no existe pues tenderá a $+\infty$ o a $-\infty$ según lo que hemos estudiado antes en situaciones de este tipo.

No es el objetivo de este ejemplo, pero podría el lector concluir que la función en cuestión presenta una asíntota vertical en $x = 2$, e incluso podría estudiar los límites laterales para poder dar una respuesta más detallada del comportamiento de la función en las cercanías del punto $x = 2$. ■

[2]Recomendamos al lector repasar todos los casos de factoreo, serán de gran utilidad para realizar los cálculos involucrados en esta sección.

Si comparamos los dos ejemplos anteriores, notaremos que hay una similitud en ellos: el límite de la expresión del numerador es 0, así como también tiende a 0 el límite del denominador.

Sin embargo, en el primer ejemplo pudimos asegurar que el límite existe mientras que en el segundo ejemplo concluimos lo contrario. Vale decir que sobre estas expresiones no se pueden sacar conclusiones rápidas, no se puede *determinar* a priori si el límite existe o no, sino que debemos trabajar sobre la expresión antes de poder dar una respuesta.

A este tipo de límites se los llama **límites indeterminados**. Insistimos en aclarar que cuando el límite sea indeterminado no significa que el límite no exista ni tampoco hay certeza de que el límite exista, sino que debemos *hacer algo* para poder calcularlo y determinar si existe o no.

La idea para resolver esta clase de límites es modificar algebraicamente la expresión, sin modificar el resultado, para que luego pueda calcularse el límite. A este proceso en el cual modificamos la expresión para poder calcular un límite indeterminado le decimos usualmente *salvar la indeterminación*.

En ambos ejemplos, para poder dar una respuesta, lo que hicimos fue calcular el límite de una función sobre la cual no se pueden aplicar las propiedades, reemplazándola por otra expresión que es equivalente a la anterior sobre la que sí podemos sacar conclusiones. Aunque dimos un argumento de por qué se puede hacer este cálculo, enunciamos a continuación el teorema que sustenta ese método.

Teorema 2.4.1

Sean f y g dos funciones tales que $f(x) = g(x)$ para x cercanos a x_0 pero quizá no en $x = x_0$.

Entonces: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

Ejemplo 2.14 Determinar el límite $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$.

Si queremos determinar el límite utilizando las propiedades, nos encontramos con el problema que al evaluar la función en $x = 2$ tanto el numerador como el denominador dan 0 pero, a diferencia del ejemplo anterior, el numerador no es un polinomio.

La técnica para salvar esta indeterminación es multiplicar (al numerador y al denominador) por el conjugado de la expresión que tiene el radical

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\right) \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{2})^2}{(x-2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Hasta aquí hemos comentado acerca de indeterminaciones en límites para los que la variable tiende a un número. Sin embargo, también se presentan situaciones de indeterminación cuando trabajamos con límites en los que la variable tiende a $+\infty$ o a $-\infty$.

La primera de esas indeterminaciones que atenderemos se presenta cuando en la expresión de la función que estamos estudiando hay algún término que tiende a $+\infty$ mientras algún otro término tiende a $-\infty$.

Ejemplo 2.15 **Límite de funciones polinómicas**

Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 - 2x^2 + 3$

Observemos el comportamiento de cada término que está presente en la expresión

$$\lim_{x \to +\infty} \overbrace{x^3}^{\to +\infty} \overbrace{-2x^2}^{\to -\infty} +3$$

En este caso no se puede utilizar propiedades de los límites porque los límites involucrados no existen. Además no es tan claro decidir qué término se impone en esa "resta de infinitos" que vemos en el análisis del comportamiento de cada término. "Resta" que no puede resolverse automáticamente como si fuesen números. Se trata, entonces, de una indeterminación.

La idea para arreglar esta indeterminación es sacar factor común, considerando al término de grado mayor, en este caso x^3, es decir

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 - 2x^2 + 3 = \lim_{x \to +\infty} x^3 \left(\frac{x^3}{x^3} - \frac{2x^2}{x^3} + \frac{3}{x^3} \right) = \lim_{x \to +\infty} x^3 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^3} \right)$$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x^3} = 0$, se tiene que

$$\lim_{x \to +\infty} \overbrace{x^3}^{\to +\infty} \overbrace{\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^3} \right)}^{\to 1}$$

Observar, ahora, que hemos "convertido" la expresión de varios términos en dos factores.

El factor x^3 tiende a $+\infty$ cuando $x \to +\infty$.

Por otro lado, el segundo factor tiende a 1 a medida que $x \to +\infty$.

Con este razonamiento, intuitivo no formal, en el que observamos que un factor actúa para que la cantidad resultante se agrande cada vez más, mientras que el otro factor se aproxima a una constante no nula y positiva, podemos concluir que la función tiende a $+\infty$.

Es decir,

$$\lim_{x \to +\infty} \overbrace{x^3}^{\to +\infty} \overbrace{\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^3} \right)}^{\to 1} = +\infty$$

■

Otra situación de *indeterminación* que se puede presentar, cuando estudiamos límites con la variable tendiendo a $+\infty$ o a $-\infty$, es cuando estudiamos el comportamiento del cociente de funciones en el cual tanto el numerador como el denominador tienden a $+\infty$ o a $-\infty$. Veamos algunos ejemplos para introducir el modo en que trataremos esta situación.

Ejemplo 2.16 **Límites de cociente de polinomios**.

Calcular los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-7}{4x+3}$.

En este caso también hay indeterminación, porque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{5x-7}^{+\infty}}{\underbrace{4x+3}_{+\infty}}$

Para arreglar esta indeterminación se hace algo similar al ejemplo anterior: se saca como factor común el término de mayor grado en el numerador y también en el denominador, es decir

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-7}{4x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\frac{5x}{x}-\frac{7}{x}\right)}{x\left(\frac{4x}{x}+\frac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(5-\frac{7}{x}\right)}{x\left(4+\frac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{\left(5-\frac{7}{x}\right)}^{\to5}}{\underbrace{\left(4+\frac{3}{x}\right)}_{\to4}}=\frac{5}{4}$$

(Tener en cuenta que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{x}=0$ y $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$)

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^4+2x^2}{-x^2-6}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{5x^4+2x^2}^{+\infty}}{\underbrace{-x^2-6}_{\to-\infty}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\left(\frac{5x^4}{x^4}+\frac{2x^2}{x^4}\right)}{x^2\left(\frac{-x^2}{x^2}-\frac{6}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\left(5+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(-1-\frac{6}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{\overbrace{x^2}^{\to+\infty}\overbrace{\left(5+\frac{2}{x^2}\right)}^{\to5}}^{\to+\infty}}{\underbrace{\left(-1-\frac{6}{x^2}\right)}_{\to-1}}=-\infty$$

c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^3+4x-1}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^3+4x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(\frac{3x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(\frac{5x^3}{x^3}+\frac{4x}{x^3}-\frac{1}{x^3}\right)}=$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(5+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{\left(3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}^{\to 3}}{\underbrace{\underbrace{x}_{\to-\infty}\underbrace{\left(5+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}_{\to 5}}_{\to-\infty}} = 0$$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{4x-1}}$

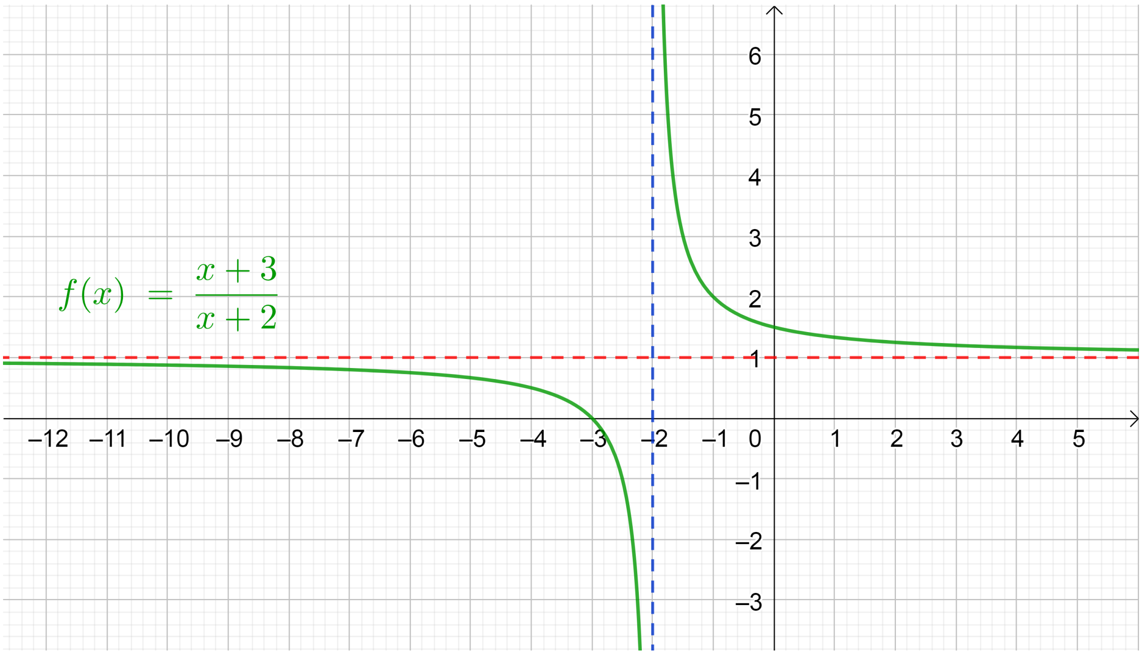
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-\sqrt{x}}{\sqrt{4x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\frac{3x}{x}-\frac{x^{1/2}}{x}\right)}{\sqrt{x\left(\frac{4x}{x}-\frac{1}{x}\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3-\frac{1}{x^{1/2}}\right)}{\sqrt{x\left(4-\frac{1}{x}\right)}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3-\frac{1}{x^{1/2}}\right)}{\sqrt{x}\sqrt{\left(4-\frac{1}{x}\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3-\frac{1}{x^{1/2}}\right)}{x^{1/2}\sqrt{\left(4-\frac{1}{x}\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{x^{1/2}}^{\to+\infty}\overbrace{\left(3-\frac{1}{x^{1/2}}\right)}^{\to 3}}{\underbrace{\sqrt{\left(4-\frac{1}{x}\right)}}_{\to\sqrt{4}}} = +\infty$$

■

Ejemplo 2.17 Determinar las asíntotas verticales y horizontales de $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$

Como podemos ver en el gráfico siguiente, la curva verde es la función en cuestión, la línea punteada roja es la asíntota horizontal $y = 1$, y la línea punteada azul es la asíntota vertical $x = -2$. Verifiquemos esto analíticamente luego del gráfico.



La función $f(x)$ tiene $Dom\,f = \mathbb{R} - \{-2\}$, con lo cual $x = -2$ es candidato a asíntota vertical. Para verificarlo, tomemos los límites por derecha y por izquierda a ese valor.

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{\overbrace{x+3}^{\to 1}}{\underbrace{x+2}_{\to 0^+}} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -2^-} \frac{\overbrace{x+3}^{\to 1}}{\underbrace{x+2}_{\to 0^-}} = -\infty$$

Como podemos observar en $x = -2$ hay una **Asíntota Vertical** ya que se cumple con la definición 2.4 . Recordemos que alcanza con que uno de los límites tienda a más o menos infinito para que haya una asíntota vertical.

Para analizar las asíntotas horizontales tomemos los límites a $+\infty$ y a $-\infty$ para saber si tienden a un valor $L \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+3}{x+2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x(1+3/x)}{x(1+2/x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\overbrace{1+3/x}^{\to 1}}{\underbrace{1+2/x}_{\to 1}} = 1$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x+3}{x+2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x(1+3/x)}{x(1+2/x)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\overbrace{1+3/x}^{\to 1}}{\underbrace{1+2/x}_{\to 1}} = 1$$

Como los límites cumplen con la Definición 2.5 entonces en $y = 1$ hay una **Asíntota Horizontal**. Recordemos que alcanza con que uno de los límites calculados tienda a un valor real para que haya una asíntota horizontal.

■

Actividad 2.2

1. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & si \quad x \neq 1 \\ 3 & si \quad x = 1 \end{cases}$$

   Calcular $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

2. Calcular, si existen, los siguientes límites

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

   b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}$

2.4.4. Límites especiales: Orden de magnitud

Hay algunas indeterminaciones que no pueden atenderse con las técnicas que hemos desarrollado en los apartados anteriores. En concreto, los siguientes límites

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{e^x}^{\to +\infty}}{\underbrace{x^\alpha}_{\to+\infty}}, \quad \text{si} \quad \alpha > 0 \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{ln(x)}^{\to +\infty}}{\underbrace{x^\alpha}_{\to+\infty}}, \quad \text{si} \quad \alpha > 0$$

Usaremos un concepto denominado *orden de magnitud* para estudiar el comportamiento en el infinito de un cociente de este tipo. No pretendemos hacer un análisis exhaustivo de las razones por las que podemos resolver estas indeterminaciones, pero aceptaremos algunas ideas que nos permitirán sacar conclusiones sobre otras indeterminaciones que involucren cocientes de expresiones que contengan funciones exponenciales, polinómicas y/o logarítmicas.

Sea $\alpha > 0$, se tiene que:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

  Esto nos dice que el crecimiento de una función exponencial es más rápido que el de cualquier potencia (positiva) de x, cuando $x \to +\infty$
  Lo indicamos de la siguiente manera: $e^x >> x^\alpha$
  Como consecuencia de este límite podemos obtener que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x} = 0$

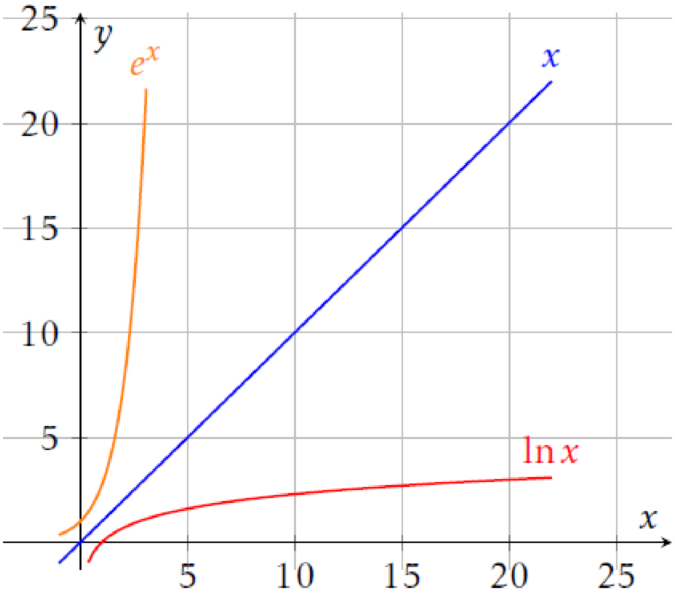
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{ln(x)} = +\infty$

  Aquí el crecimiento de la función potencia es más rápido que el de $ln(x)$ cuando $x \longrightarrow +\infty$
  Lo indicamos: $x^\alpha >> ln(x)$
  Entonces, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x)}{x^\alpha} = 0$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{ln(x)} = +\infty$

  El crecimiento de la función exponencial es más rápido que el de $ln(x)$ cuando $x \longrightarrow +\infty$
  Esto es: $e^x >> ln(x)$
  Así, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x)}{e^x} = 0$

En el siguiente gráfico podemos observar que la gráfica de e^x crece más rápido que la de la función identidad, mientras que ambas crecen más rápido que la gráfica de $ln(x)$



Ejemplo 2.18 Calculemos los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4}{e^x} = 0$, porque $e^x >> x^4$ cuando $x \to +\infty$ (orden de magnitud)

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2\left(\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2}\underbrace{\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}}_{\to 1} = +\infty$

porque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ por orden de magnitud.

c) Límite con cambio de variable: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\, ln(x)$

Si hacemos el cambio de variable $y = \dfrac{1}{x}$ podemos observar que cuando $x \to 0^+$ entonces $y \to +\infty$. Observemos que si $y = \dfrac{1}{x}$ entonces $x = \dfrac{1}{y}$

Reemplazando este cambio de variables en el límite que nos interesa calcular obtenemos:

$$\lim_{x\to 0^+} x^2\, ln(x) = \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{1}{y}\right)^2 ln\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to+\infty} \frac{ln(1/y)}{y^2}$$

Antes de seguir hagamos una observación. Recordemos, de las propiedades del logaritmo, que: $ln\left(\dfrac{1}{y}\right) = ln(1) - ln(y) = 0 - ln(y) = -ln(y)$

Entonces:

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{ln(1/y)}{y^2} = \lim_{y\to+\infty} \frac{-ln(y)}{y^2} = 0 \quad \text{pues } y^2 >> ln(y) \text{ (orden de magnitud)}$$

■

2.5. Cuadro Resumen

En el siguiente cuadro resumen usaremos una notación muy simplificada para los límites:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ lo escribiremos como $f \to 0$

$\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ lo escribiremos como $g \to +\infty$

Similarmente escribiremos $g \to -\infty$ cuando $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$

Si escribimos $g \to \infty$, nos referimos a que $g(x)$ puede tender a $+\infty$ o a $-\infty$ de manera indistinta.

Además consideraremos que k y m son constantes distintas de cero. Recuerde usar la regla de los signos tanto en la multiplicación como en la división, aún cuando se opere con un límite tendiendo a cero o a infinito.

CUADRO RESUMEN

Límites Determinados	Límites Indeterminados
$\dfrac{f \to k}{g \to 0} = \infty \qquad \dfrac{f \to 0}{g \to k} = 0$	
$\dfrac{f \to k}{g \to \infty} = 0 \qquad \dfrac{f \to \infty}{g \to k} = \infty$	$\dfrac{f \to 0}{g \to 0}$
$\dfrac{f \to \infty}{g \to 0} = \infty \qquad \dfrac{f \to 0}{g \to \infty} = 0$	$\dfrac{f \to \infty}{g \to \infty}$
$\dfrac{f \to k}{g \to m} = \dfrac{k}{m}$	
$(f \to k) \cdot (g \to m) = k \cdot m$	
$(f \to \infty) \cdot (g \to \infty) = \infty$	
$(f \to k) \cdot (g \to \infty) = \infty$	$(f \to \infty) \cdot (g \to 0)$
$(f \to k) + (g \to \infty) = \infty$	
$(f \to +\infty) + (g \to +\infty) = +\infty$	$(f \to +\infty) - (g \to +\infty)$
$(f \to -\infty) + (g \to -\infty) = -\infty$	$(f \to +\infty) + (g \to -\infty)$
$(f \to t)^{(g \to +\infty)} = +\infty$ con $t > 0$	$(f \to 0)^{(g \to +\infty)} \qquad (f \to 0)^{(g \to 0)}$
$(f \to t)^{(g \to -\infty)} = 0$ con $t > 0$	

2.6. Ejercicios de límites

1. Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+2}{x+3}$

   b) $\lim\limits_{x\to 1} x^3+5x^2+10$

   c) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$

   d) $\lim\limits_{x\to \pi} sen(x-\pi)$

   e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+2}}{x}$

   f) $\lim\limits_{x\to 1} ln\left(\dfrac{2}{x^3+1}\right)$

   g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(x+1)}{e^x}$

   h) $\lim\limits_{x\to 0} 3\,cos(x^2)(1+x)^4$

   i) $\lim\limits_{x\to 3} |x-3|$

   j) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{|x-3|}{x}$

   k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x^2+x}$

   l) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$

   m) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

   n) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

   ñ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x^2+x}$

   o) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{2-x}$

   p) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x}{x-3}$

   q) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x}{|x+2|}$

2. Calcular los siguientes límites al infinito:

   a) $\lim\limits_{x\to -\infty} x-3x^4$

   b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x}\right)$

   c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2+3x-1}$

   d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2+2x-16}{x^2-x-2}$

   e) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-2x-3}{x^3-x^2-6x-2}$

   f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4-2x^2}{\sqrt{x^4-6x}}$

3. Calcular los siguientes límites, si es que existen:

   a) Dada $h(x)=\begin{cases} \sqrt{x-4} & si \quad x>4 \\ 8-2x & si \quad x<4 \end{cases}$. Calcular $\lim\limits_{x\to 4} h(x)$.

   b) Sea $f_2(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{e^x} & si \quad x\le 0 \\ x^2 & si \quad x>0 \end{cases}$. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)$, y $\lim\limits_{x\to -1} f_2(x)$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln^2(x)}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 2x + 1}{e^x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0^+} x\, ln(x)$

4. Calcular las asíntotas verticales y horizontales, si existen, de las funciones dadas a continuación:

   a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

   b) $g(x) = \dfrac{4x^2 + 2x - 2}{3x - 1}$

   c) $h(x) = \dfrac{x-2}{x^2 - 4x + 4}$

   d) $k(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2 - 1} & si \quad x < 2 \\ 3x^3 - 2x & si \quad x \geq 2 \end{cases}$

5. Utilizar GeoGebra para verificar gráficamente el comportamiento de las funciones de los Ejemplos 11) y 15).

3. Continuidad de una función

En los capítulos anteriores hemos visto funciones como un modo en que se relacionan dos cantidades: el espacio recorrido por un objeto en una hora depende de la velocidad con la que se desplaza; o el monto a pagar en una panadería depende de la cantidad de pan que se solicite, el consumo de electricidad de una casa está en relación con el monto de la factura.

3.1. Hacia el concepto de continuidad

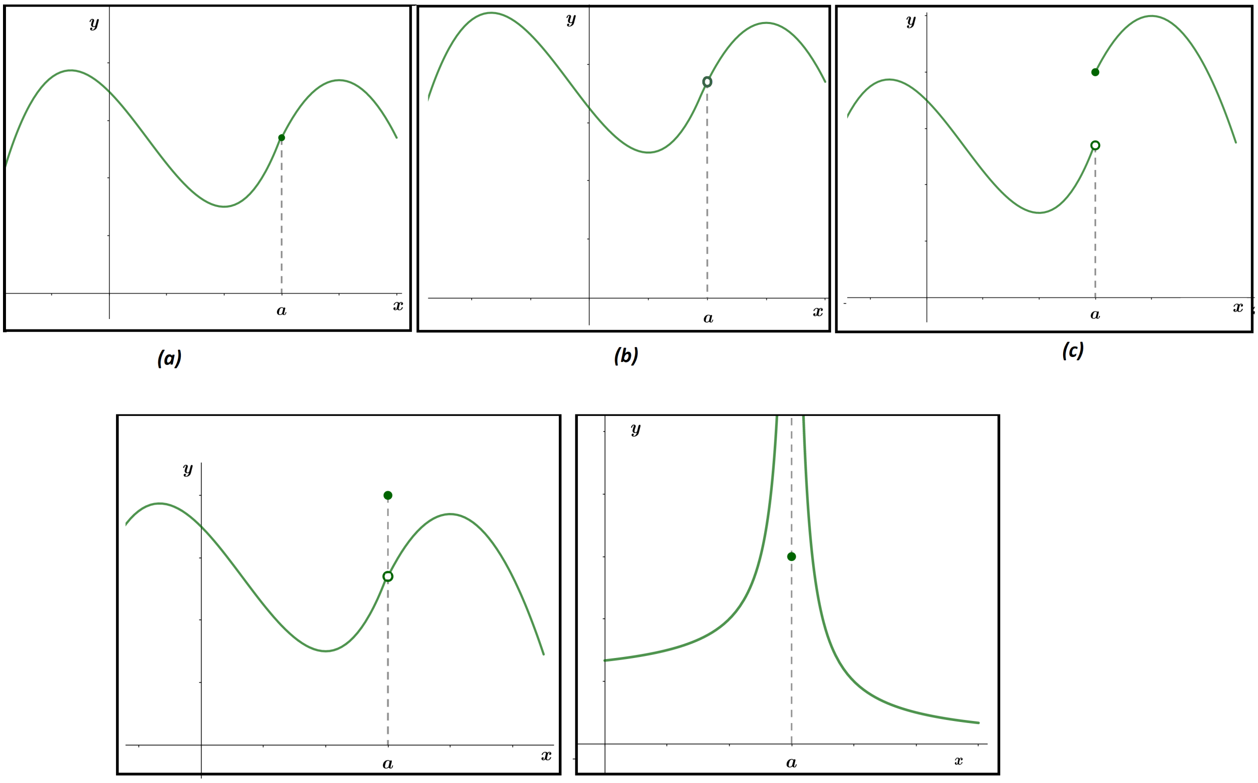
Algo sobre lo que nos interesa reflexionar ahora es que hay cantidades que no pueden cambiar abruptamente, sino que varían de modo incesante. Por ejemplo, cuando un recipiente de agua va mermando su contenido, más allá de la rapidez con la que lo haga, no podría pasar de tener un litro (por ejemplo) a estar vacío en un instante. También es intuitivamente claro que la posición que ocupa un objeto desplazándose no puede ser muy lejana a la que ocupaba una fracción de segundo antes, pues la teletransportación no se ha logrado aún. De igual manera podemos citar cantidades como: altura, temperatura, velocidad, entre otras; en las que los cambios se producen de manera paulatina, sin saltos abruptos, o (como solemos decir desde la matemática) en forma **continua**.

Cuando se logró formalizar la noción de límite[1] se abrió paso a lo que hoy conocemos como Análisis Matemático y también se alcanzó una herramienta donde anclaran conceptos que lograron robustecer la teoría matemática. Fue así, a partir del concepto de límite, que se alcanzaron las primeras formalizaciones del concepto de **continuidad de una función**.

Intuitivamente pensamos que una función f es continua en un punto si su gráfica no presenta “saltos” o “ agujeros”, o dicho de otro modo, si podemos trazarla sin levantar el lápiz del papel. El objetivo en esta sección es presentar la definición formal de continuidad y estudiar las principales propiedades de las funciones continuas.

[1] El concepto de límite, con el que hemos trabajado en el capítulo anterior, es una construcción teórica que llevó cerca de 2000 años.

Presentamos diferentes representaciones gráficas de funciones continuas y discontinuas en $x = a$, cada una de las cuales presenta características distintas:



(a) *(b)* *(c)*

(d) *(e)*

Observemos que la gráfica a) puede dibujarse sin levantar el lápiz al pasar por el punto de la gráfica donde $x = a$, es decir que es una función continua en ese punto y cumple con la siguiente definición.

Definición 3.1 **Continuidad de una función**

Una función se dice **continua en $x = a$**, cuando coinciden los siguientes tres valores:

1. $f(a)$
2. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$
3. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

Desde luego que si no coinciden los tres valores o alguno de ellos no existe, entonces se dice que la función f es **discontinua en $x = a$**.

En muchos libros encontraremos otras formas de definir la continuidad que son equivalentes con la definición anterior.

Definición alternativa 1:
Observemos que la definición de continuidad nos asegura que f es continua en $x = a$ cuando:

1. f debe estar definida en $x = a$, esto significa que existe $f(a)$ (es un número real)
2. Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ (es un número real). Es decir,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

3. El valor de la función en $x = a$ debe coincidir con el valor del límite, esto es,

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

Definición alternativa 2:
También podemos expresar esta definición de forma más reducida como

$$f \text{ es continua en } x = a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

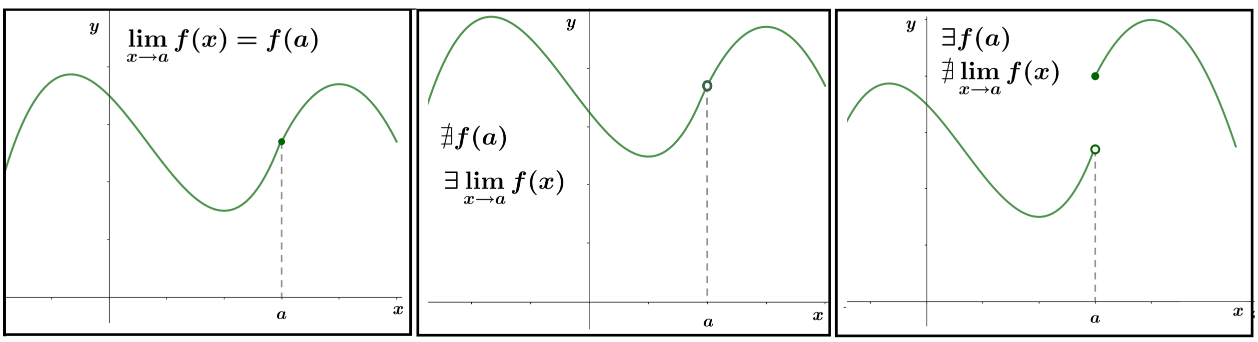
Ejemplo 3.1 Si observamos los gráficos anteriores vemos que las funciones b), c), d) y e) son discontinuas en $x = a$.

En particular veamos que en la gráfica b), si bien los límites laterales existen y coinciden, la función no está definida en el punto donde $x = a$.

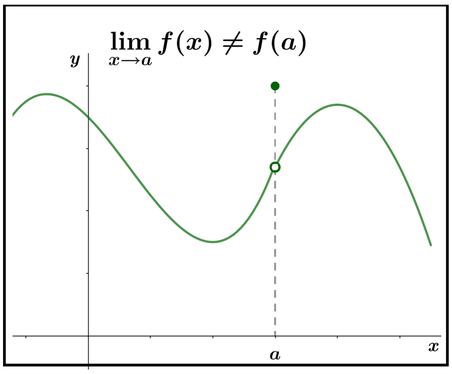
Mientras tanto en la gráfica c) vemos que los límites laterales no coinciden entre sí.

En la gráfica d), aunque los límites laterales existen y son iguales, no coinciden con el valor de la función en el punto donde $x = a$.

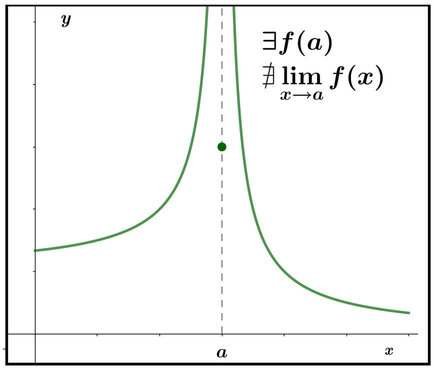
Por otro lado se observa que en la gráfica e) los límites laterales no existen (porque no dan un valor real).



(a) (b) (c)



(d)



(e)

3.2. Clasificación de discontinuidades

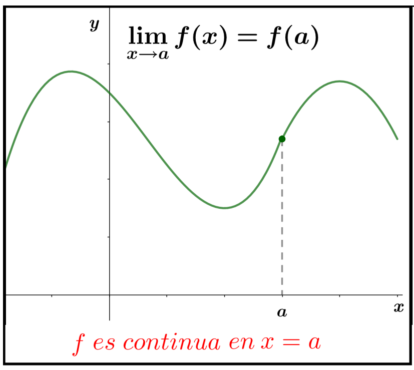
En los gráficos anteriores observamos que hay diferentes "formas de discontinuidades", una donde la gráfica presenta una asintótica vertical (gráfica e)), otra donde se observa un salto (gráfica c)) y otras con un agujero (gráficas b) y d)) . Para distinguir las distintas discontinuidades, las clasificaremos según la siguiente definición.

Definición 3.2
Una discontinuidad se dice evitable si existe el límite de la función en $x = a$, pero no coincide con $f(a)$; ya sea porque toma otro valor o porque no existe $f(a)$.

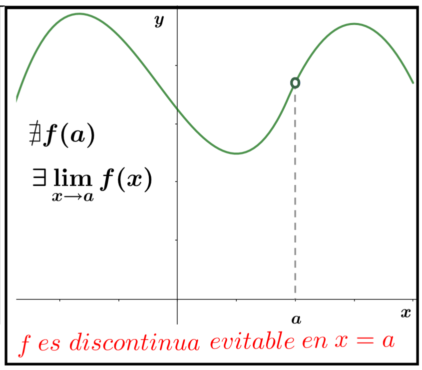
Este tipo de discontinuidades las podemos observar en el gráfico b) y d).

Definición 3.3
Una discontinuidad se dice inevitable si no existe el límite de la función en $x = a$.

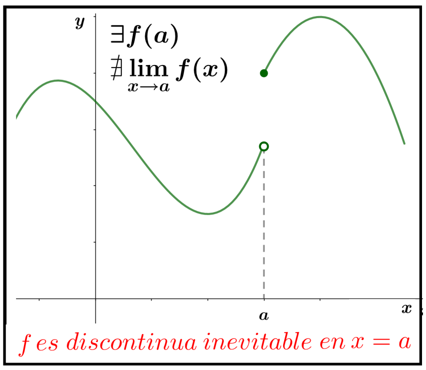
Este tipo de discontinuidades las podemos observar en el gráfico c) y e).



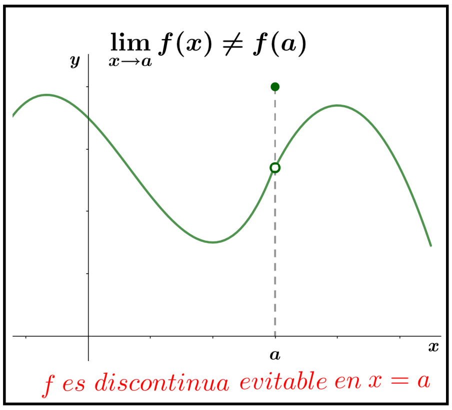
(a)



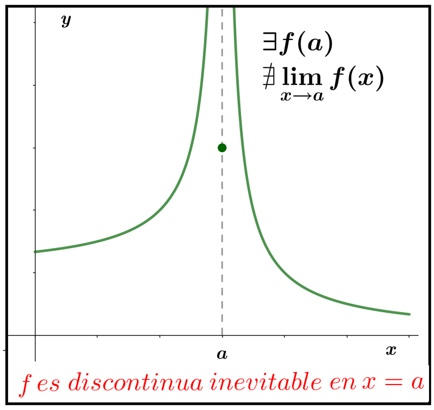
(b)



(c)



(d)



(e)

Ejemplo 3.2 Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & si \quad -1 \leq x < 1 \\ 2x - 4 & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 5 - x^2 & si \quad 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

Analizar la continuidad de la función en $a = 1$ y $a = 2$. En caso de haber alguna discontinuidad, clasificarla.

En $a = 1$, veamos si se cumplen las condiciones de la definición.

1. $f(1) = -2$ (pues para $x = 1$, f está definida en el segundo renglón)

2. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2x - 4 = -2$ y $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 - 3 = -2$

   Como los límites laterales coinciden, existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -2$

3. Además $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = -2$

Como se cumplen las 3 condiciones podemos afirmar que f es continua en $a = 1$.

Ahora analicemos en $a = 2$.

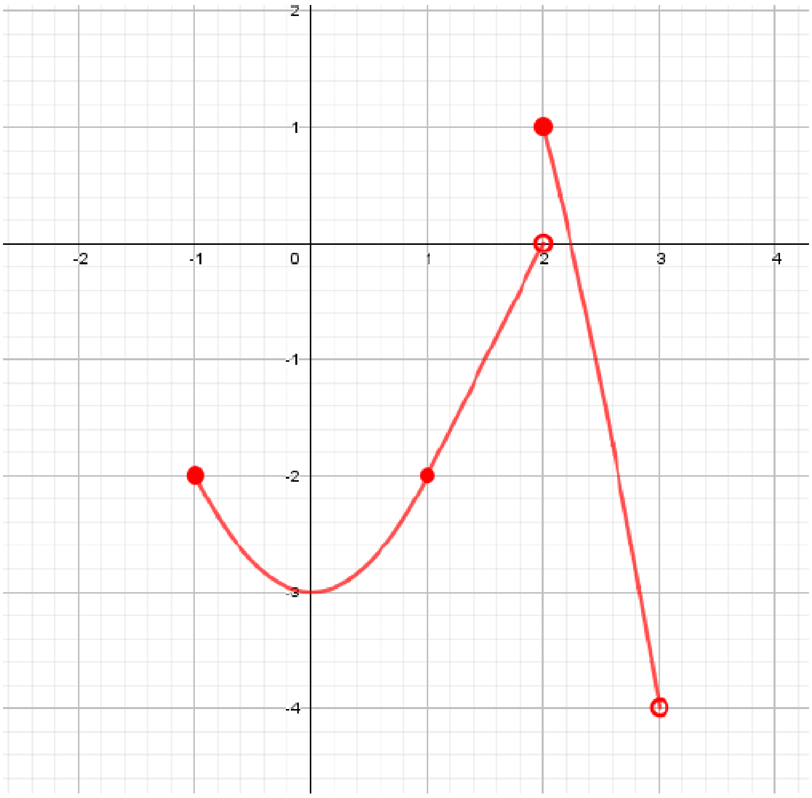
1. Aquí $f(2) = 1$ (pues para evaluar a f en $x = 2$, la expresión que corresponde usar es $f(x) = 5 - x^2$)
2. Para estudiar la existencia del límite en $a = 2$, estudiamos los límites laterales:
   $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} 5 - x^2 = 1$ y $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} 2x - 4 = 0$

Como los límites laterales son distintos, no coinciden, entonces el $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe.

Por lo tanto, f no es continua en $a = 2$.

Como la discontinuidad se debe a que no existe el límite, podemos afirmar que esa discontinuidad es inevitable.

Podemos verificar nuestro análisis observando la representación gráfica de la función.



■

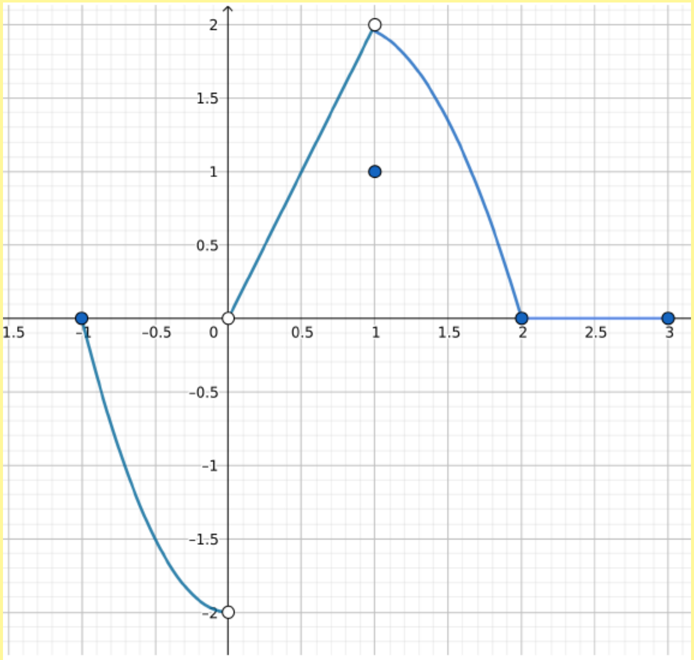
3.2.1. Ejercicios

1. Determinar si las siguientes funciones son continuas en los valores indicados. Clasificar las discontinuidades, si las hay. Representar gráficamente cada función y verificar la conclusión obtenida.
   a) $f(x) = |x-2| + 3$ en $a = 2$.

   b) $g(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$ en $a = 5$.

   c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$ en $a = 0$

2. A partir de la siguiente gráfica de $f(x)$:



Responder:

a) ¿Existe $f(-1)$?

b) ¿Existe $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$?

c) ¿$f(-1) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$?

d) ¿Existe $f(0)$?

e) ¿Existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

f) ¿f es continua en $a = 0$?

g) ¿Existe $f(1)$?

h) ¿Existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$?

i) f es continua en $a = 1$?

j) ¿f es continua en $a = 2$?

k) ¿f es continua en $a = 3$?

3. Dada la siguiente función decidir si es continua en $x = -1$ y en $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si} \quad x \le -1 \\ 1 & \text{si} \quad -1 < x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

3.2.2. Propiedades de las funciones continuas

A continuación enunciaremos algunas propiedades algebraicas de funciones continuas en un número real, que nos permitirán justificar la continuidad de funciones más complejas.

Teorema 3.2.1 Propiedades de las funciones continuas

Sean f y g funciones continuas en $a = x_0$ y k un número real, entonces se cumplen las siguientes propiedades

1. $k\,f(x)$ es una función continua en x_0
2. $f(x) \pm g(x)$ son funciones continuas en x_0
3. $f(x) \cdot g(x)$ es una función continua en x_0
4. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es una función continua en x_0, siempre que $g(x_0) \neq 0$
5. $(f(x))^n$ es continua en x_0, donde n es un entero positivo.
6. $\sqrt[n]{f(x)}$ es continua en x_0, siempre que esté definida en un intervalo que contenga a x_0, donde n es un entero positivo.
7. Si además h es una función continua en el valor $f(x_0)$, la función composición $(h \circ f)(x) = h(f(x))$ es continua en x_0

3.3. Funciones continuas en un intervalo

Hasta aquí, hemos definido la continuidad de una función en un punto dado $a = x_0$. Esto es, hemos definido la continuidad de manera puntual. Queremos, en este apartado, extender la definición de continuidad a todo un conjunto de puntos.

Definición 3.4

1. **Continuidad en un intervalo abierto**
   Una función es continua en un intervalo (a, b) si y sólo si es continua en cada punto del intervalo.

2. **Continuidad en un intervalo cerrado**
   $f(x)$ es continua en $[a, b]$ si se cumplen los siguientes items:
   - f es continua en todos los puntos interiores, o sea en (a,b)
   - f es continua por la derecha en a. Es decir $f(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$
   - f es continua por la izquierda en b. Es decir $f(b) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$

Observaciones:

1. Si el intervalo es cerrado sólo en uno de los extremos, tenemos que estudiar el límite por izquierda o por derecha según corresponda.
2. Cuando una función f es continua en cada punto de su dominio, solemos decir simplemente que f **es una función continua**.

Importante
Recordemos del capítulo anterior que en muchas situaciones los límites podían calcularse por evaluación directa. Notemos que en esos casos se trata de funciones continuas, con lo cual podemos asegurar que:

- La función identidad $f(x) = x$ y las funciones constantes son continuas para todo número real.
- Toda función polinómica es continua en $\mathbb{R}$.
- Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, entonces la función racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es continua en todo su dominio, es decir siempre que $Q(x) \neq 0$.
- Las funciones trigonométricas son continuas en su dominio.
- Las funciones exponenciales y logarítmicas también son continuas en sus dominios.

Ejemplo 3.3 Dar el mayor conjunto de continuidad de la función $f(x) = \sqrt{x^2+2}$

Vemos que f es composición de dos funciones, una de ellas es la raíz cuadrada y la otra polinómica, ambas funciones son continuas. Además notemos que el dominio de esta función compuesta es el conjunto de todos los números reales.

Con lo cual f es continua en $\mathbb{R}$, por ser composición de funciones continuas.

■

Ejemplo 3.4 Hallar el conjunto donde la función $g(x) = \dfrac{ln(3x+1)}{e^x}$ es continua.

Antes de ver el dominio de continuidad de g, observemos que la función $ln(3x+1)$ tiene como dominio los $x \in \left(-\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$, y la función exponencial del denominador tiene como dominio $\mathbb{R}$ y además e^x nunca se hace 0, con lo cual el dominio de $g(x)$ es $\left(-\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$

En este dominio $g(x)$ es continua porque es composición y cociente de funciones continuas.

■

Ejemplo 3.5 Hallar el valor de a para que la función resulte continua en $\mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \quad x > 3 \\ 2ax & si \quad x \leq 3 \end{cases}$$

Primero observemos que $Dom(h) = \mathbb{R}$. O sea que se quiere ver la continuidad en todo el dominio de la función.

Como es una función a trozos primero nos preguntaremos qué ocurre con la continuidad de la función para valores de $x < 3$ y valores de $x > 3$:

- Para $x < 3$, h es continua por ser una función polinómica.
- Para $x > 3$, h es continua por ser también una función polinómica.

O sea que para cualquier valor de $x \neq 3$, h es continua independientemente del valor de a.

Como se quiere hallar el valor de a para que h resulte continua en todo su dominio, debemos imponer la condición de continuidad en el punto de "pegado" $x = 3$.

Detallemos las condiciones de continuidad en el punto $x = 3$:

1. $h(3) = 6a$ (pues para $x = 3, h(x) = 2ax$).
2. $\lim\limits_{x \to 3^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} x^2 - 1 = 8$
3. $\lim\limits_{x \to 3^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} 2ax = 6a$

Para que la función sea continua en $x = 3$, las tres condiciones anteriores tienen que ser iguales, entonces se tiene que cumplir lo siguiente:

$$8 = 6a \text{ con lo cual } \quad a = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

.

Así, si $a = \frac{4}{3}$, $h(x)$ resulta continua en $x = 3$.

Como habíamos observado, la continuidad en los puntos $x \neq 3$ no depende del valor de a. Además probamos que si $a = \frac{4}{3}$, h es continua también en $x = 3$. Por lo tanto $h(x)$ resulta continua en <u>todo su dominio</u> si $a = \frac{4}{3}$

■

3.3.1. Ejercicios

1. Decidir en qué conjuntos son continuas las siguientes funciones. Puede usar como guía los ejemplos 3.3 y 3.4.

   a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2} - 3x$

   b) $g(x) = 2\,e^{2x+1}$

   c) $h(x) = \dfrac{cos(x)}{x+3}$

2. Para qué valor de k, $g(x)$ resulta continua en $\mathbb{R}$.

$$g(x) = \begin{cases} -x & si \quad x > -2 \\ \\ k\,x^2 & si \quad x \leq -2 \end{cases}$$

3. Decidir si la siguiente función es continua en $[-2, 5]$.

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x \geq 3 \\ \\ \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

4. Derivadas

En este capítulo desarrollaremos uno de los conceptos más importantes del cálculo: la derivada de una función, que puede interpretarse como la tasa de crecimiento de una función. Además veremos propiedades y aplicaciones de la derivada.

4.1. Hacia el concepto de derivada

En muchas ocasiones nos interesa conocer cómo cambia una función. ¿Qué tipo de conclusiones se pueden sacar según sea la cantidad que cambia la imagen en un intervalo que nos interese estudiar?

Una de las dimensiones posibles para estudiar es cuánto se ha modificado la función en dos momentos distintos del dominio. Por ejemplo, si pensamos en la situación de un auto que viaja por la ruta y que pasa a las 12:00 hs. por el km 215 y a las 14:00 hs. por el kilómetro 383 de la ruta, podríamos decir que recorrió 168 km. Si queremos usar funciones para describir esta situación, consideremos la función f que nos indica la posición en la ruta en cada instante. Usando nuestra función de posición f, cuando el vehículo pasa por el kilómetro 215 podríamos escribir $f(12) = 215$ y $f(14) = 383$ cuando pasa por el kilómetro 383. Con esa idea podríamos decir que entre los instantes $x = 12$ y $x = 14$ ambas posiciones del vehículo distan $383 - 215 = 168$ kilómetros. Otra vez, en el lenguaje de funciones podríamos escribir $f(14) - f(12)$, a lo que llamaremos **variación total** de la posición del vehículo en el intervalo que va de 12 a 14.

Definamos este concepto en general, es decir para cualquier función f y un intervalo en su dominio $[a,b]$.

Definición 4.1 Variación total

Dada una función definida en un intervalo $[a,b]$ la **variación total de f entre a y b** se define como la diferencia entre las imágenes de b y de a respectivamente.

Es decir $f(b)-f(a)$ (denotado como Δf).

En el ejemplo anterior, podríamos considerar que el vehículo se desplazó a 84 km/h en promedio. Pues recorrió un total de 168 km en 2 hs. con lo cual podríamos calcular su velocidad promedio. Si reflexionamos acerca del cálculo que hicimos para conocer ese promedio podríamos observar que se puede expresar así:

$$\frac{f(14)-f(12)}{14-12}=\frac{383-215}{2}=84$$

Definamos ahora ese concepto para cualquier función f en un intervalo $[a,b]$

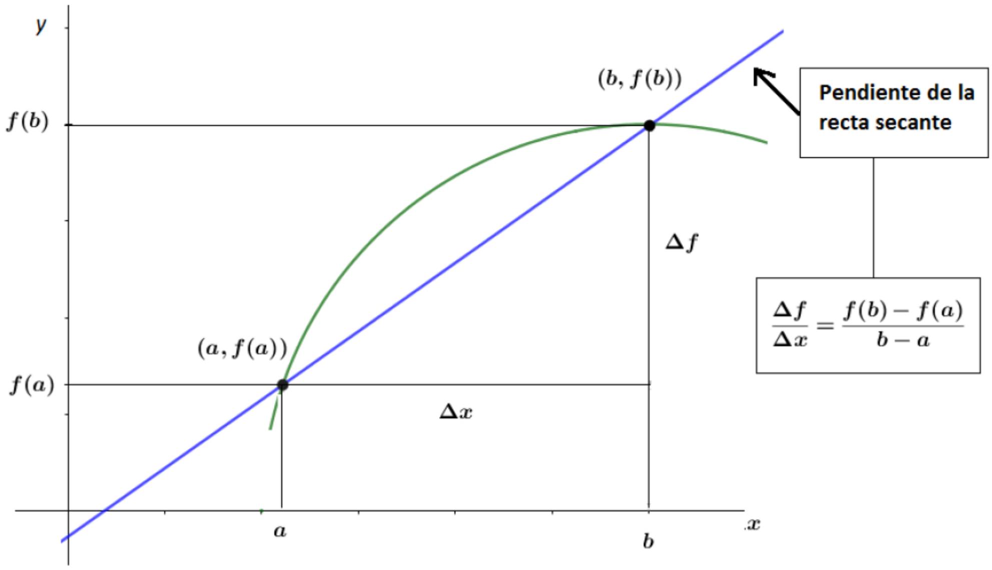
Definición 4.2 Variación promedio (o variación media)

Si f es una función definida en un intervalo $[a,b]$ la **variación promedio de f entre a y b** se define como el cociente entre la variación total de f y la longitud del intervalo considerado.

Anotamos $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Cuando la variable independiente se mueve en cierto intervalo $[a,b]$, la variación total describe cuánto cambia f entre a y b, mientras que la variación promedio representa **la tasa promedio o razón de cambio promedio** de la función f en ese intervalo.

Si recordamos el modo en que se calcula la pendiente de una recta que pasa por dos puntos dados, podemos interpretar geométricamente que la variación promedio de f entre a y b representa *la pendiente de la recta secante* a la gráfica de f que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



Ejemplo 4.1 Si se quiere saber cuánto varia en promedio una función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-1, 5]$, se debe calcular la variación media:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(-1)}{5 - (-1)} = \frac{24}{6} = 4.$$

En lo que sigue nos interesa preguntarnos cómo usar esta idea de variación promedio con el objetivo de conocer a qué velocidad está cambiando f cuando $x = 1$. Es decir que estamos interesados en conocer la **velocidad instantánea** de cambio de la función f en el punto $x = 1$.

Hasta ahora, lo que sabemos calcular son variaciones medias y para eso necesitamos intervalos. Así que la idea será armar intervalos cada vez más pequeños (sí, usaremos el concepto de límite) que contienen a $x = 1$ y calcular la variación media en cada caso.

Consideremos un número h cualquiera (que pensamos pequeño) y, si $h > 0$, armamos el intervalo $[1, 1+h]$ (también podríamos suponer $[1+h, 1]$, en el caso de que $h < 0$), entonces la variación media es:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h}$$

Notemos que no es posible evaluar en $h = 0$, sin embargo podemos tomar h tan pequeño como deseamos, a esto lo expresamos matemáticamente como

$$\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h}$$

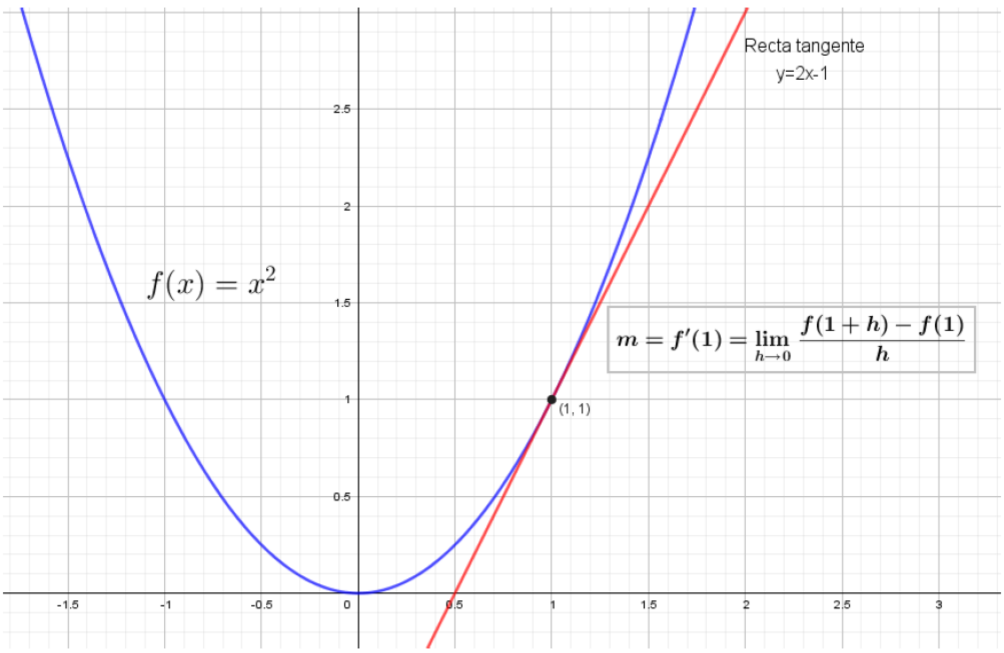
que es un límite indeterminado, el cual puede resolverse usando las técnicas que hemos desarrollado en el capítulo anterior

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h\to 0} 2+h = 2$$

Así obtenemos la variación instantánea de $f(x)$ en $x=1$ y esta variación es 2.

Gráficamente, la variación instantánea de f en $x=1$ es la pendiente de una recta que pasa por el punto $(1,1)$. Esta recta es, en algún sentido, el límite de las rectas secantes a la gráfica de f. Utilizando la ecuación punto pendiente de la recta, la ecuación de esta recta es:

$$y-1 = 2(x-1)$$
$$y = 2x-1$$



La variación instantánea de una función f en un punto x_0 es la derivada de f en x_0.

4.2. Definición formal de derivada

Definición 4.3
Dada f una función definida en un intervalo abierto decimos que existe la derivada en x_0 (perteneciente a ese intervalo) si existe el siguiente límite:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

En tal caso se dice que f es *derivable* en x_0.

Aclaraciones:

- Como la derivada es un límite, éste existirá si los límites laterales existen y son iguales.
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad y \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
.
Estos límites se denominan **derivadas laterales**.
- La expresión $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ se llama *cociente incremental* (ó cociente de Newton).
- Hay otras notaciones para la derivada de una función.
Si escribimos $y = f(x)$ las siguientes son alternativas para la notación.
$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f$$

Definición 4.4
Sea f una función definida sobre un intervalo abierto (a,b).
Diremos que f es derivable en (a,b) si es derivable en cada punto del intervalo (a,b)

Ejemplo 4.2 Realizar la derivada por definición de $f(x) = x^2 + 2x + 1$ en $x = 1$.

Tenemos que calcular $f'(1) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2+2(1+h)+1-4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1+h^2+2h+2+2h-3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+4h}{h}$$

Si sacamos factor común h y simplificamos los factores iguales en el numerador y el denominador, obtenemos el valor de la derivada de $f(x)$ en $x = 1$ de la siguiente manera:

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2+4h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h+4)}{h} = \lim_{h\to 0} h+4 = 4$$

■

Ejemplo 4.3 Obtener la derivada por definición de la función constante $f(x) = c$, para todo valor de x.

Tenemos que calcular $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para cualquier x.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Por lo tanto la derivada de una función constante es 0 para todo valor de x.

Ejemplo 4.4 Obtener la derivada por definición de la función $f(x) = x^2$, para un valor x cualquiera.

Tenemos que calcular $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para cualquier x.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.$$

Por lo tanto la derivada de la función $f(x) = x^2$ es $2x$ para cualquier valor de x.

Aclaración: En los últimos dos ejemplos, hemos calculado la derivada de una función para cualquier x del dominio, lo que nos hace pensar que la derivada también es una función que depende de x. Esta función derivada indica, para punto del dominio de f, la derivada de la función en ese valor. Así, el dominio de la función derivada es igual o más pequeño que el dominio de la función f.

Actividad 4.1

1. Realizar la derivada por definición de $f(x) = x^3 + 1$ en $x = 0$.
2. Obtener la derivada por definición de la función $f(x) = 2x$, para todo valor de x.
3. Hallar la derivada de $f(x)$ en $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \leq 0 \\ -x^2 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

4.3. Funciones no derivables

Hemos visto que para que una función sea derivable en un punto x_0 del dominio debe existir el límite, cuando h tiende a 0, del cociente incremental de f en x_0. A su vez, como hemos aprendido en capítulos previos, para que ese límite exista deben existir ambos límites laterales y coincidir. En este capítulo hemos llamado *derivadas laterales* a los límites laterales del cociente incremental.

Entonces, para que una función resulte derivable en un x_0, lo que debemos chequear es que las derivadas laterales coincidan.

Veamos un caso en el que no ocurre que las derivadas laterales coincidan, es decir una función para la cual la derivada no existe en un cierto punto.

Ejemplo 4.5 Sea $f(x) = |x|$

Como sabemos, su dominio es el conjunto de todos los números reales.
Queremos hallar la derivada en $x_0 = 0$.

Notemos que la función f es una función a trozos (que todes ya conocemos)

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Lo que debemos analizar es el límite del cociente incremental en $x_0 = 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

Como $x = 0$ es el punto de "pegado" en el dominio de la función, debemos analizar los límites laterales:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad (\text{pues } h > 0)$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \quad (\text{pues } h < 0)$$

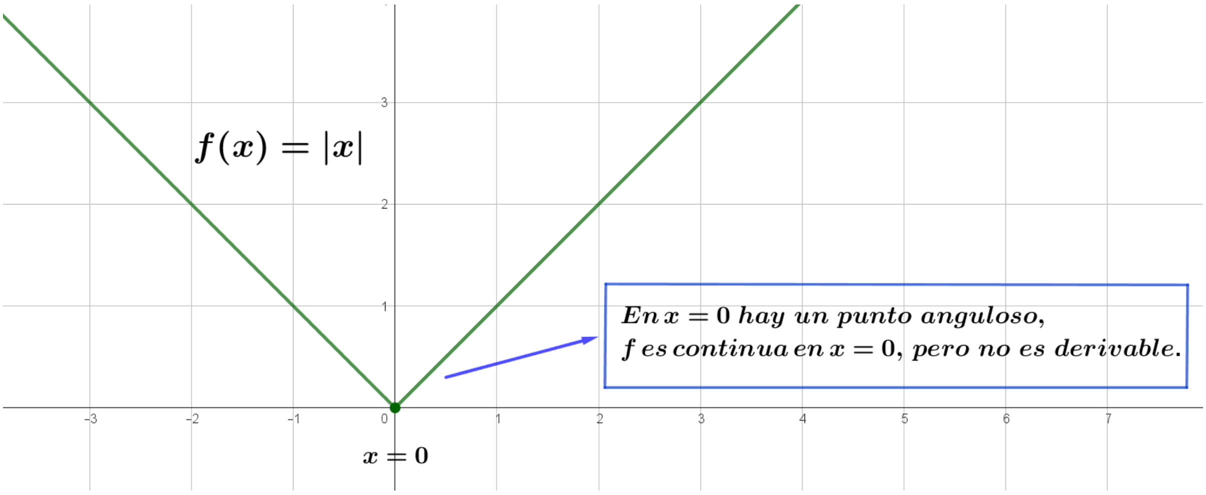
Lo que observamos, entonces, es que los límites laterales son distintos y, por lo tanto, no existe $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$.

Podemos concluir que la función no es derivable en $x_0 = 0$. Con lo cual tampoco existe recta tangente en $x_0 = 0$

■

4.4. Derivabilidad y continuidad

Si bien acabamos de probar que la función del ejemplo 4.5 no es derivable en $x_0 = 0$, en capítulos anteriores hemos mostrado que sí es una función continua en $x_0 = 0$. A este tipo de puntos donde la función en continua, pero no derivable se le suele llamar 'puntos angulosos'.



Este ejemplo nos permite concluir que la continuidad de una función en x_0 no alcanza para garantizar la derivabilidad de la función en x_0.
En un lenguaje algo más formal decimos que *la continuidad no es condición suficiente para establecer la derivabilidad de una función.*
Sin embargo lo contrario sí es válido.

El siguiente teorema establece que la derivabilidad de una función en x_0 es una *condición suficiente* para asegurar la continuidad de esa función en el valor x_0.

Teorema 4.4.1
Si una función f es derivable en x_0 entonces f es continua en x_0.

4.5. Reglas de derivación

En esta sección se presentan reglas para hallar derivadas sin tener que usar directamente la definición. Estas reglas de derivación fueron desarrolladas a través de la aplicación de la definición en cada uno de los casos, aunque no nos detendremos en esos desarrollos.

Las reglas de derivación nos permitirán calcular con relativa facilidad las derivadas de polinomios, funciones racionales, funciones algebraicas, funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

Para iniciar vamos a presentar algunas derivadas "elementales".

Teorema 4.5.1

i. Derivada de una función constante $f(x) = c$ — $f'(x) = 0.$

ii. Derivada de una función potencia $(n \in \mathbb{R})$ $f(x) = x^n$ — $f'(x) = n\,x^{n-1}$

iii. Derivada de una función exponencial $f(x) = e^x$ — $f'(x) = e^x$

iv. Derivada de una función logarítmica $f(x) = ln(x)$ — $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

v. Derivada de una función seno $f(x) = sen(x)$ — $f'(x) = cos(x)$

vi. Derivada de una función coseno $f(x) = cos(x)$ — $f'(x) = -sen(x)$

Las siguientes **propiedades de la derivada** pueden servir como reglas para combinar con las antes dadas y amplían aún más el universo de derivadas que podemos calcular sin recurrir a la definición.

Teorema 4.5.2
Si f y g son funciones derivables en x y c una constante, valen las siguientes reglas

1. Derivada de una función por una cte. c — $(c\,f(x))' = c\,f'(x)$

2. Derivada de una suma/resta: — $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g(x)'$

3. Derivada de un producto: — $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

4. Derivada de un cociente: — $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

5. Derivada de una composición: — $(f \circ g)'(x) = (f(g(x))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

Ejemplo 4.6 Utilizando reglas derivar las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^2 + 6x - \sqrt{x}.$

$$\begin{aligned} f'(x) = &\ (3x^2)' + (6x)' - (\sqrt{x})' && \text{(regla 2)} \\ = &\ 3(x^2)' + 6(x)' - (x^{\frac{1}{2}})' && \text{(regla 1)} \\ = &\ 6x + 6 - \frac{1}{2}(x^{-\frac{1}{2}}) && \text{(regla ii)} \end{aligned}$$

b) $f(x) = (2x^3 - x)\cos(x).$

$$\begin{aligned} f'(x) = &\ (2x^3 - x)'\cos(x) + (2x^3 - x)(\cos(x))' && \text{(regla 3)} \\ = &\ (2(x^3)' - (x)')(\cos(x)) + (2x^3 - x)(\cos(x))' && \text{(reglas 1 y 2)} \\ = &\ (6x^2 - 1)(\cos(x)) + (2x^3 - x)(-\operatorname{sen}(x)) && \text{(reglas ii y vi)} \end{aligned}$$

c) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-5}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(\ln(x))'(x-5)-(\ln(x))(x-5)'}{(x-5)^2} && \text{(regla 4)}\\
&= \frac{\frac{1}{x}(x-5)-(\ln(x))1}{(x-5)^2} && \text{(regla 2 y iv)}
\end{aligned}
$$

d) $f(x)=e^{2x-1}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= e^{2x-1}\,(2x-1)' && \text{(reglas 5 y iii)}\\
&= e^{2x-1}\,2 && \text{(regla ii)}
\end{aligned}
$$

e) $f(x)=\dfrac{1}{(x^3+2x)^2}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{1}{(x^3+2x)^2}\right)' = \left((x^3+2x)^{-2}\right)'\\
&= -2(x^3+2x)^{-3}(3x^2+2) && \text{(regla ii y 5)}
\end{aligned}
$$

■

Actividad 4.2 Derivar las siguientes funciones utilizando reglas.

a) $f(x)=5x^3+2x+8$ b) $f(x)=x^{1/3}+5x^8-\sqrt{x}$ c) $f(x)=\dfrac{\pi x^{\frac{2}{3}}}{x+1}$

d) $f(x)=\dfrac{2x}{4x+1}$ e) $f(x)=(x^2-2)(x+4)$ g) $f(x)=\ln(x-4)+1$

h) f(x)= $e^{x^2+1}-x$ I) $f(x)=\sqrt{(x^4+2x)}$ j)$f(x)=\cos(x+1)-x^2$

k) $f(x)=\dfrac{sen(x)}{e^x}$ l) $f(x)=\tan(x)$ m) $f(x)=\ln(3-x)\cos(x^3)$

(Ayuda: Pueden utilizar el comando ‘Derivada(poner la Función aquí)’ de Geogebra para verificar sus cálculos.)

4.6. Recta tangente a la gráfica de f en x_0

Anteriormente vimos que la derivada de una función en un punto x_0 es la variación instantánea de f en x_0. Geométricamente, $f'(x_0)$ **es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto** $(x_0, f(x_0))$. La ecuación de la recta tangente será

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

Ejemplo 4.7 Determinar la recta tangente de $f(x)=\dfrac{1}{x}$ en $x=1$.

Primero debemos analizar su derivada en $x=1$ para averiguar la pendiente de la recta tangente en ese valor.

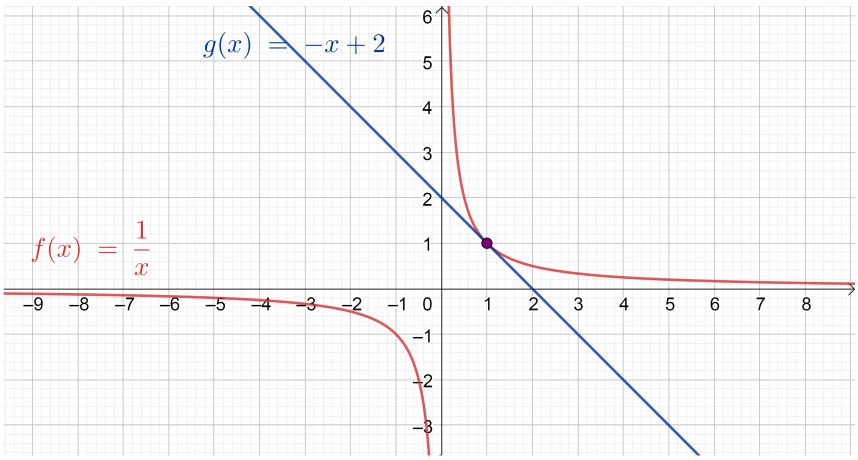
$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

Con lo cual $m=f'(1)=-\dfrac{1}{1^2}=-1$

Ahora con el punto $(1,1)$ y la pendiente $m=-1$ armemos la recta tangente:

$$y-1=-1(x-1) \quad \rightarrow \quad y=-1x+1+1 \quad \rightarrow \quad y=-x+2$$

Observemos en el siguiente gráfico la función y su recta tangente en $(1,1)$.



■

Ejemplo 4.8 Dada una función y una pendiente podemos determinar el punto y la recta tangente a esa función en ese punto.

Determinar la recta tangente a la función $f(x)=ln(x-1)$ cuya pendiente es $m=1$.

Lo que debemos hacer es averiguar la derivada de la función y analizar en qué punto se cumple que la misma sea igual a 1, ya que la pendiente de la recta tangente debe ser igual a ese valor.

Dado que la derivada de f es $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$ y que debemos resolver la ecuación $f'(x)=1$, tenemos que hallar qué valor (o valores) de x cumplen que $\dfrac{1}{x-1}=1$:

$$\frac{1}{x-1}=1$$

$$1=x-1$$

$$2=x$$

Con lo cual concluimos que la recta tangente tiene pendiente $m=1$ en el punto $x=2$.

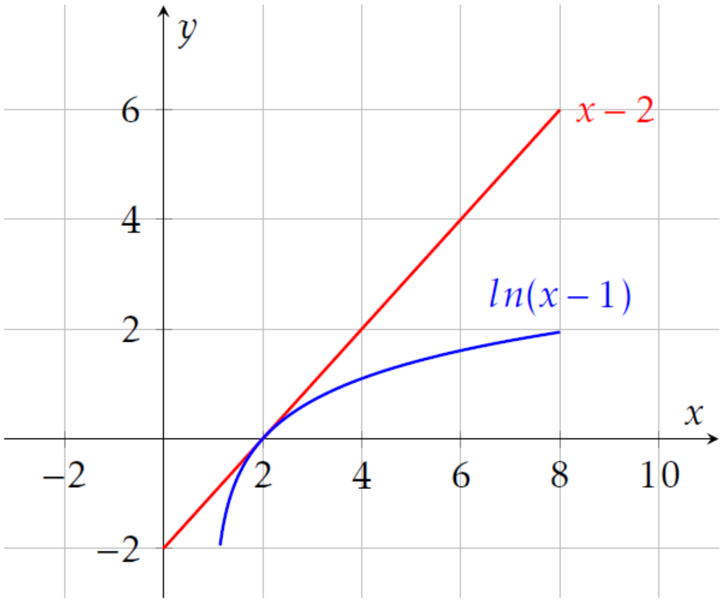
Reemplazando ese valor en la función obtenemos el punto $(2, ln(2-1))=(2,0)$.

Con esto hemos conseguido la pendiente $m=1$ de la recta tangente y el punto de tangencia $P=(2,0)$.

Con estos datos podemos construir la ecuación de la recta tangente:

$y-0=1(x-2)$ que, despejando, resulta ser $y=x-2$. La cual es la recta tangente a $f(x)$ en el punto P.

Observemos en el siguiente gráfico la función y su recta tangente en $(2,0)$.



Actividad 4.3

1. Encontrar la recta tangente a $f(x) = x^2 + 1$ en el punto $(2,5)$.
2. Encontrar la recta tangente a $h(x) = ln(x-3)$ en el punto $(5, ln(2))$.
3. Determinen el o los puntos y la o las rectas tangentes con pendiente $m = 5$ de la función $f(x) = x^3 + 2x + 1$.
4. Determinen el punto y la recta tangente con pendiente $m = 1$ de la función $f(x) = e^x + 2$.

4.7. Derivadas de orden superior

Una consecuencia de tener la función derivada es que podemos calcular la derivada de una derivada. Resulta que tales derivadas de orden superior tienen aplicaciones importantes. Supongamos que comenzamos con una función f y calculamos su derivada f'. Luego podemos calcular la derivada de f', llamada la segunda derivada de f y escrita como f''. Entonces podemos calcular la derivada de f'', llamada la tercera derivada de f, escrita f''', y así sucesivamente podríamos definir la derivada de cualquier orden.

Actividad 4.4

1. Hallar $f''(x)$ de las funciones a), b), d) g) y l) de la Actividad 4.2.

2. Hallar las derivadas de todos los ordenes de $f(x) = x^5 - 3x^3 - 3x - 2$.

4.8. Aplicaciones de la derivada

La interpretación de la derivada como la pendiente de la recta tangente proporciona información acerca del comportamiento de las funciones y de sus gráficas. Como se dijo en la primera parte, la derivada puede entenderse como la tasa de crecimiento de una función, con lo cual con su información podemos saber si una función crece o decrece. Es interesante observar que si estamos estudiando un problema en particular, o modelando cierto sistema, podemos saber el aumento o la disminución de ciertos parámetros gracias a la derivada de la función que modela el problema en cuestión, saber en dónde se producen los extremos máximos o mínimos, estudiar su concavidad, etc.

Así, el objetivo de esta sección es estudiar cómo el conocimiento de la derivada y la derivada segunda de una función nos brinda información acerca de la función misma.

4.8.1. Valores extremos de una función

Definición 4.5

Se dice que el punto $(x_0, f(x_0))$ es un ***máximo absoluto*** de f cuando

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ para todo } x \text{ en el dominio de } f.$$

Definición 4.6

Se dice que el punto $(x_0, f(x_0))$ es un ***máximo relativo o local*** de f cuando

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ para todo } x \text{ cerca de } x_0.$$

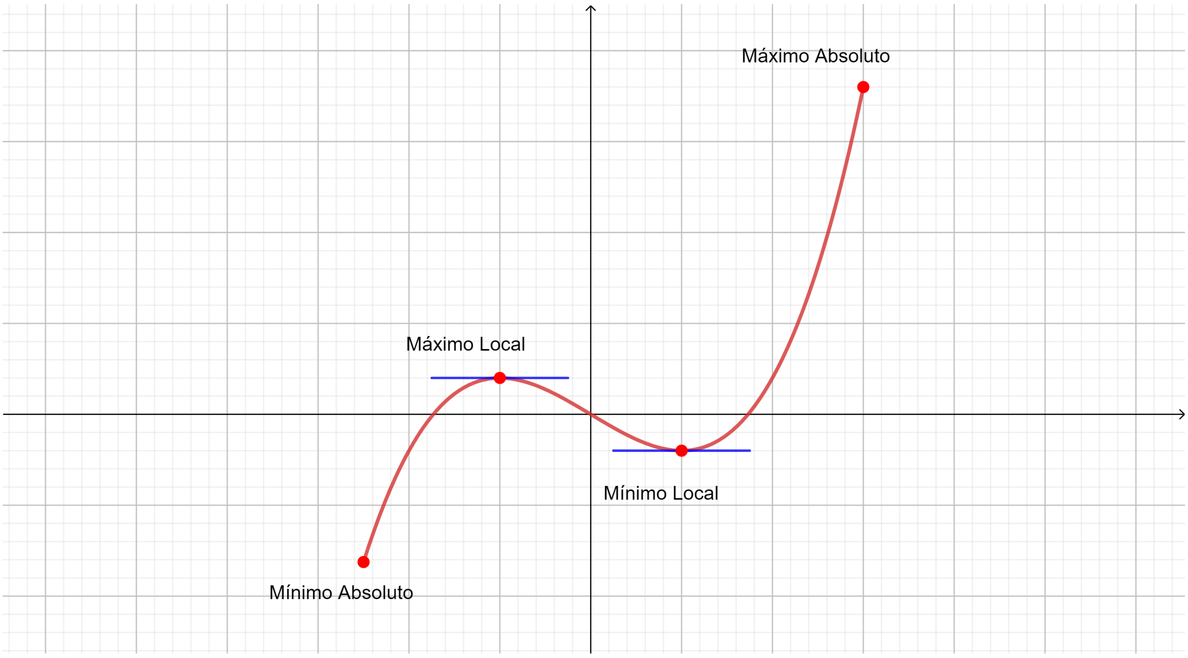
Definición 4.7

Se dice que el punto $(x_0, f(x_0))$ es un ***mínimo absoluto*** de f si $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x en el dominio de f.

Definición 4.8

Se dice que el punto $(x_0, f(x_0))$ es un ***mínimo relativo o local*** de f si $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x cerca de x_0.

Dada una función, sus valores máximo y mínimo (relativo o absoluto) se denominan *valores extremos* (relativos o absolutos, respectivamente) de la función.



Definición 4.9

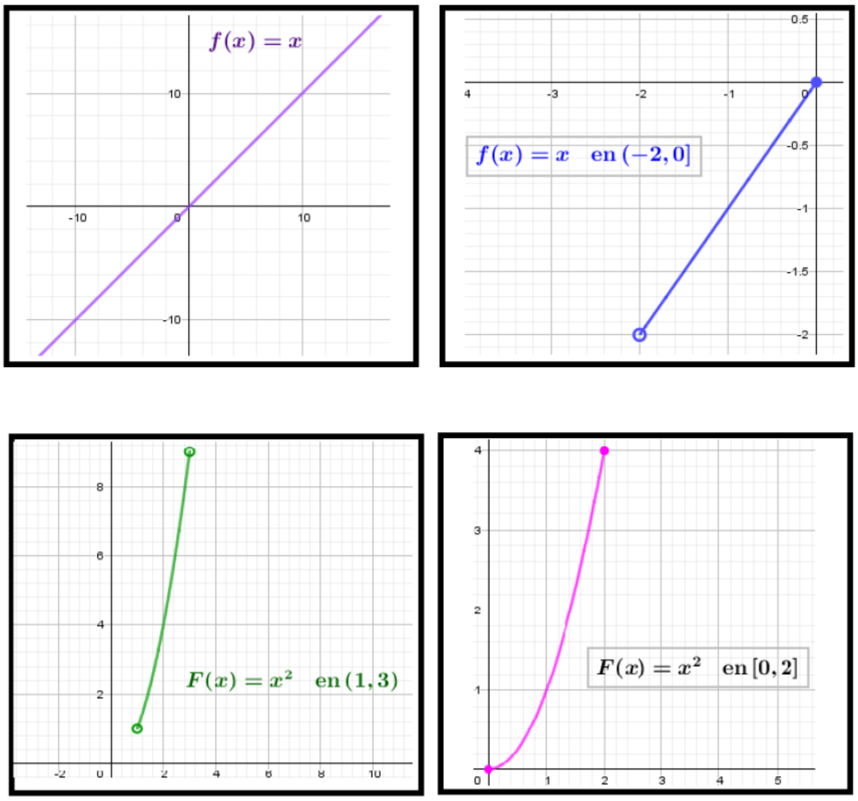
Se dice que x_0 es **punto crítico** de f si $f'(x_0) = 0$ ó si $f'(x_0)$ no existe.

Aún cuando dos funciones estén definidas a través de la misma expresión podrían tener diferentes extremos (valores máximo o mínimo) dependiendo del dominio. Veremos esto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.9

- $F(x) = x$, que tiene dominio $\mathbb{R}$ no tiene ni máximos ni mínimos (ni relativos ni absolutos).
- $F(x) = x$, restringiendo su dominio al intervalo $(-2,0]$ tiene un máximo absoluto en $(0;0)$ y no tiene mínimos (ni relativos ni absolutos).
- $F(x) = x^2$, que tiene dominio $\mathbb{R}$ no tiene máximos pero sí tiene un mínimo absoluto en $(0;0)$.
- $F(x) = x^2$, restringiendo su dominio al intervalo $(1,3)$ no tiene ni máximos ni mínimos absolutos.
- $F(x) = x^2$, restringiendo su dominio al intervalo $[0,2]$ tiene máximo absoluto en $(2;4)$ y tiene un mínimo absoluto en $(0;0)$.

Los extremos absolutos de las funciones en sus dominios se observan en la siguiente figura:



Teorema 4.8.1 Condición necesaria para extremos locales
Si f tiene un valor máximo local o un mínimo local en un punto interior $x = c$ de su dominio entonces f tiene un punto crítico en $x = c$.
Es decir que en este caso $f'(c) = 0$ ó $f'(c)$ no existe.

El teorema anterior establece que la primera derivada de una función siempre es cero en un punto interior donde la función tiene un valor extremo local y la derivada está definida. Por ello, los únicos lugares donde la función f posiblemente tiene un valor extremo (local o global) son los puntos críticos de f.

Aclaración: Los únicos puntos del dominio donde la función puede tener máximos o mínimos son los puntos críticos y los puntos extremos del intervalo. Sin embargo, hay que tener cuidado de no malinterpretar lo que se dice aquí. **Una función puede tener un punto crítico en x = c sin tener un valor extremo local ahí**. Por ejemplo, la función $y = x^3$ tiene punto crítico en $x = 0$ en donde se hace cero la derivada, sin embargo la función es creciente en todo su dominio. Por lo tanto no tiene extremo local en $x = 0$.

4.8.2. Máximos y mínimos en un intervalo cerrado.

En el ejemplo 4.9 vimos casos de funciones que no tienen valores máximos o mínimos. Es decir que la existencia de extremos no está garantizada en general. El siguiente teorema afirma que cuando buscamos los extremos de una función continua en un intervalo cerrado siempre vamos a hallarlos, porque los extremos del intervalo también se tienen en cuenta.

Teorema 4.8.2 Teorema de máximos y mínimos absolutos (Weierstrass)

Una función f continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ alcanzará un valor máximo absoluto (M) y un valor mínimo absoluto (m) en puntos del intervalo $[a,b]$.

Por definición de máximos y mínimos absolutos en $[a,b]$ se tiene que cumplir que

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{para todo } x \in [a,b].$$

El teorema de Weierstrass garantiza que, bajo esas hipótesis, hay valores $x_1, x_2 \in [a,b]$ tal que $f(x_1) = m$ y $f(x_2) = M$.

4.8.3. ¿Cómo hallar extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado?

A partir de lo que hemos observado respecto de la condición necesaria para extremos de una función y el teorema de Weierstrass, podemos plantear la estrategia de búsqueda de extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado a través de los siguientes pasos:

1. Obtener todos los puntos críticos que pertenezcan al interior del intervalo.
2. Evaluar a f en todos los puntos críticos y en los puntos extremos del intervalo cerrado.
3. Tomar la mayor y la menor de las imágenes halladas en el punto anterior.

Ejemplo 4.10 Determinar los valores máximos y mínimos absolutos de $f(x) = 2x^3 - 1$ en $[-1,3]$.

- Veamos si f tiene puntos críticos en el intervalo. Para ello, calculamos la derivada y la igualamos a 0:
  $f'(x) = 6x^2 = 0$, la solución de ésta ecuación es $x = 0$. Así, como $x = 0$ está en el interior del intervalo $[-1,3]$, tenemos que $x = 0$ es punto crítico de f. Lo consideramos como candidato a máximo absoluto o mínimo absoluto.
- Ahora evaluamos a f en los extremos del intervalo y en el punto crítico hallado:

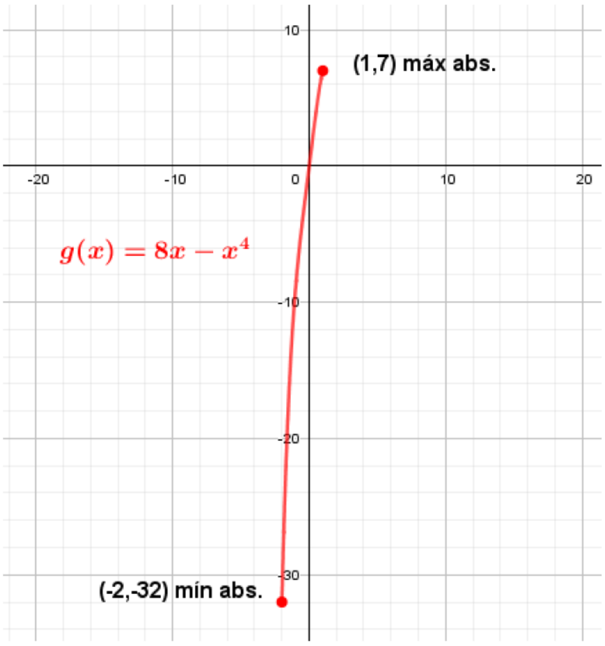
$$\boxed{\begin{array}{ll} f(-1) = 2(-1)^3 - 1 = -3 & \longrightarrow \text{en } (-1,-3) \text{ hay un mínimo absoluto.} \\ f(0) = 2(0)^3 - 1 = -1 & \\ f(3) = 2(3)^2 - 1 = 53 & \longrightarrow \text{en } (3,53) \text{ hay un máximo absoluto.} \end{array}}$$

■

Ejemplo 4.11 Determinar los valores máximos y mínimos absolutos de $g(x) = 8x - x^4$ en $[-2,1]$.

- Usando reglas de derivación obtenemos que $g'(x) = 8 - 4x^3$.
  $g'(x) = 0 \longrightarrow 8 - 4x^3 = 0 \Longleftrightarrow 4x^3 = 8 \Longleftrightarrow x^3 = \dfrac{8}{4} = 2 \longrightarrow x = \sqrt[3]{2} > 1$. Como no está en el interior del intervalo no lo vamos a considerar.

- Por lo tanto, el máximo y el mínimo absolutos de la función se presentan en los puntos extremos del intervalo, $g(-2) = -32$ y $g(1) = 7$.
  En el punto $(-2, -32)$ hay un mínimo absoluto.
  En el punto $(1, 7)$ hay un máximo absoluto.



■

Actividad 4.5

1. Determinar todos los puntos críticos para cada función.
   a) $f(x) = 6x^2 - x^3$.
   b) $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$.
   c) $f(x) = -\dfrac{x^2}{x-2}$.
   d) $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$.

2. Determinar los valores máximo y mínimo absolutos de cada función en el intervalo indicado. Luego grafique la función e identifique los puntos de la gráfica donde se alcanzan los extremos absolutos.
   a) $f(x) = -x - 4$ en $[-4, 1]$.
   b) $f(x) = 4 - x^2$ en $[-3, 1]$
   c) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ en $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$.
   d) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ en $[-2, 1]$.

4.8.4. Funciones crecientes/ decrecientes y criterio de la derivada primera

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo $I = [a, b]$ y x_1, x_2 dos puntos cualesquiera de I:

Definición 4.10
Se dice que una función f es **creciente** en I si $x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Definición 4.11
Se dice que una función f es **decreciente** en I si $x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

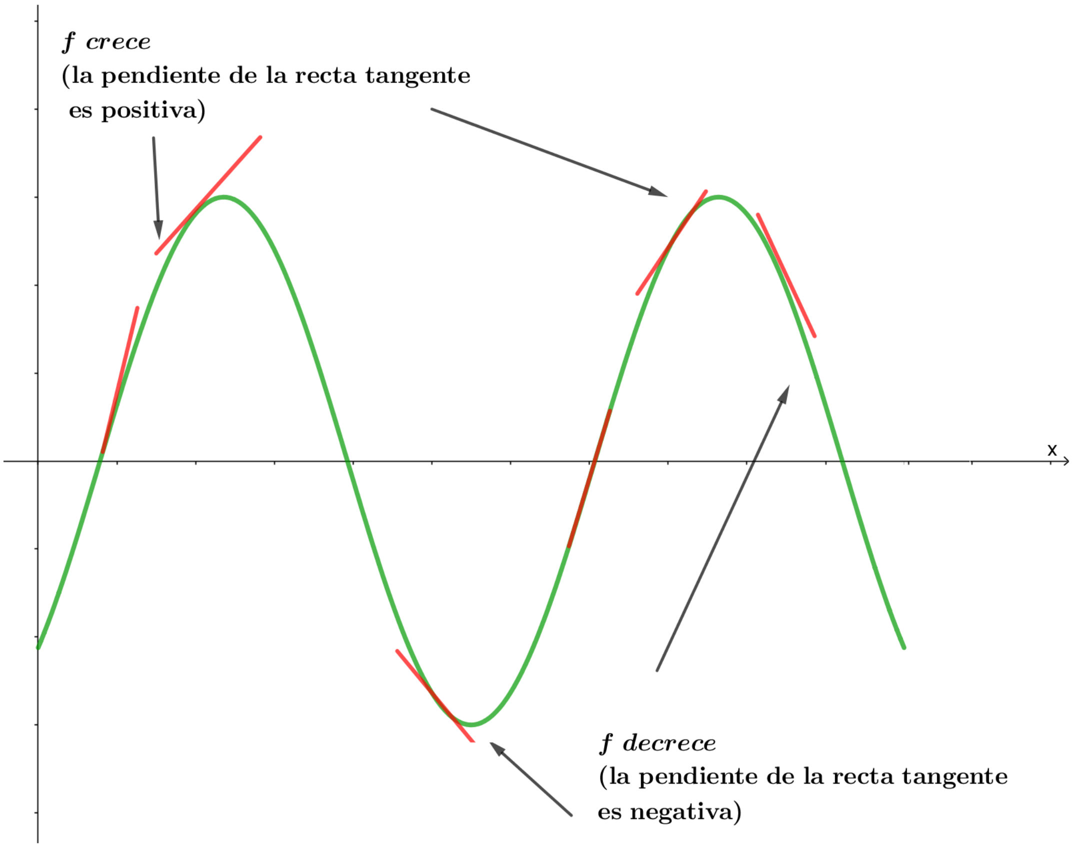
El siguiente teorema afirma que las funciones con derivada positiva son crecientes y las funciones con derivada negativa son funciones decrecientes.

Teorema 4.8.3 Crecimiento y decrecimiento de una función

Suponga que f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces:

- Si $f'(x) > 0$ en cada punto $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en $[a, b]$.
- Si $f'(x) < 0$ en cada punto $x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en $[a, b]$.

Consideremos el siguiente gráfico en el que se han trazado algunas rectas tangentes en diferentes puntos de la gráfica.



Puede observarse que, efectivamente, en aquellos puntos en los que la gráfica de la función es creciente se tiene que las rectas tangentes a la gráfica tienen pendiente positiva. Mientras que en los intervalos donde la gráfica es decreciente las respectivas pendientes de las rectas tangentes son negativas.

4.8.5. ¿Cómo determinar los intervalos donde una función es creciente o decreciente?

Según lo visto, para poder determinar el crecimiento o decrecimiento de una función, debemos estudiar el signo de su derivada.

En general, si queremos estudiar el signo de una función será bueno conocer los puntos donde la misma se anula y los puntos donde es discontinua. Pues si las imágenes de esa función cambian de signo en $x = a$; es decir si $f(x)$ tiene un signo para $x < a$ y tiene el signo opuesto en $x > a$, sólo hay dos posibilidades:

- f debe anularse en $x = a$ (si f es continua allí)
  ó
- f experimenta un salto en $x = a$ (en cuyo caso f será discontinua en ese punto).

Entonces, si 'salteamos' esos puntos quedarán determinados intervalos donde la función tendrá siempre el mismo signo. Con lo cual alcanzará con conocer el signo de la función <u>en un valor</u> cualquiera de ese intervalo para saber qué signo tendrá la función <u>en todo</u> el intervalo.

Como lo que queremos estudiar es el signo de la derivada, podemos utilizar la idea anterior sobre la función $f'(x)$. Así, lo que nos interesan como puntos importantes (los que usaremos para construir los intervalos para estudiar el signo) son los puntos de continuidad de $f(x)$ que anulan su derivada o aquellos donde no existe $f'(x)$. Es decir, los *puntos críticos* de $f(x)$.

Una vez que conocemos los puntos críticos, consideramos el dominio de $f(x)$ y lo 'separamos' usando estos valores como puntos de referencia para esa partición. Así, los puntos críticos serán extremos de los intervalos que separan o parten al dominio de la derivada.

Luego, elegimos un valor cualquiera en cada intervalo y evaluamos la derivada allí. Pues, como dijimos, alcanza con saber el valor de la derivada en un punto cualquiera del interior de cada uno de los intervalos construidos, para conocer el signo de la derivada en cada intervalo.

Una vez estudiado el signo de la derivada en cada intervalo, aplicamos el teorema 4.8.3 sobre cada uno de estos intervalos y determinamos si la función f es creciente o decreciente en cada uno de ellos.

Entonces, podríamos resumir la estrategia para estudiar el crecimiento y decrecimiento de una función a través de los siguientes pasos:

1. Determinar todos los puntos críticos de f .
2. Armar los intervalos teniendo en cuenta el domino de la función, y los puntos críticos de f.

3. Evaluar la derivada en un valor p (cualquiera) de cada intervalo.
4. Si $f'(p) > 0$ entonces $f'(x) > 0$ en todo el intervalo al cual pertenece p.
   Si $f'(p) < 0$ entonces $f'(x) < 0$ en todo el intervalo al cual pertenece p.
5. En los intervalos donde $f'(x) > 0$ concluimos que $f(x)$ es creciente.
   En los intervalos donde $f'(x) < 0$ concluimos que $f(x)$ es decreciente.

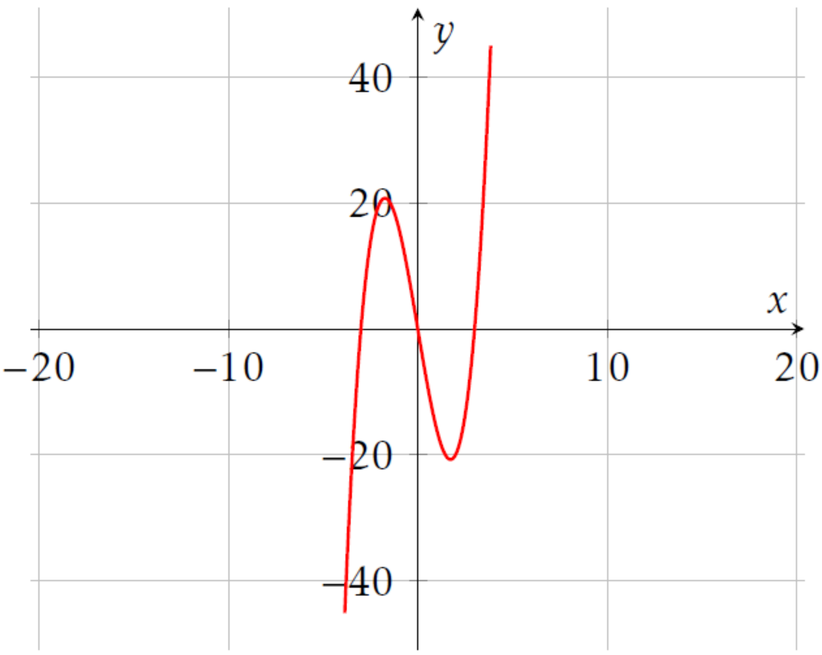
Ejemplo 4.12 Determinar los puntos críticos de $f(x) = 2x^3 - 18x$ e identificar los intervalos en los que f es creciente y en los que f es decreciente.

- Hallamos puntos críticos de f. Como f es derivable en todo su dominio, sólo debemos calcular la derivada e igualarla a 0:
  $f'(x) = 6x^2 - 18 = 6(x^2 - 3) = 0 \longrightarrow x^2 = 3, \quad$ con lo cual $\quad x = +\sqrt{3} \quad$ y $\quad x = -\sqrt{3}$.
- Armamos los intervalos: $Dom(f) = \mathbb{R} = Dom(f')$. Si lo partimos en los puntos críticos hallados, resultan los intervalos: $(-\infty, -\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ y $(\sqrt{3}, +\infty)$.
- Luego tomamos valores de prueba (VP) en cada intervalo y evaluamos en la derivada:

Intervalo	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
VP	-2	0	2
Signo de $f'(x)$	$f'(-2) = 6 > 0$	$f'(0) = -18 < 0$	$f(2) = 6 > 0$
$f(x)$	crece	decrece	crece

- Por lo tanto f es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$; y es decreciente en el intervalo $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Podemos observar este resultado en el gráfico de la función:



4.8.6. Criterio de la primera derivada para extremos locales o relativos

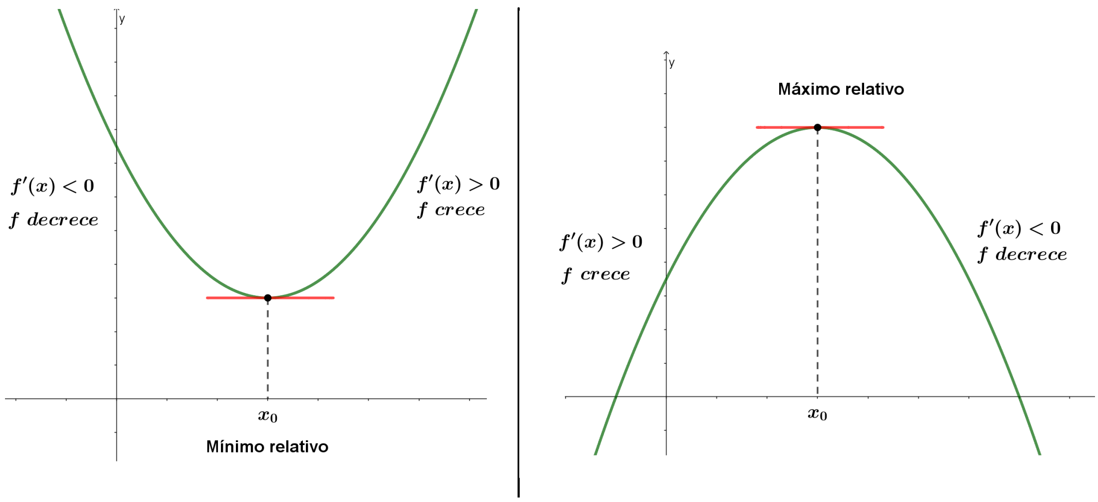
Hemos observado que los extremos relativos de una función continua se alcanzan en los puntos críticos de la función (donde la derivada se anula o bien donde no existe la derivada). Esto indica que los puntos críticos son los "valores candidatos" para hallar los extremos de la función.

Además, recordemos que la noción de continuidad de una función se vincula con dibujar su gráfica sin interrumpir el trazo. Con esta idea intuitiva, podemos imaginar que al dibujar una gráfica continua que crece y luego decrece se determina una altura máxima en su trazo[1]. Del mismo modo podemos pensar que se alcanzará un mínimo si el comportamiento de la función pasa de decreciente a creciente. Enunciaremos a continuación un criterio que nos permita formalizar esta idea y será herramienta para poder clasificar extremos locales de una función.

Teorema 4.8.4 Criterio de la derivada primera para clasificar extremos locales

Supongamos que c es un punto crítico de una función continua f , y que f es derivable en todo punto de algún intervalo que contiene a c (excepto posiblemente en c mismo). Al moverse de izquierda a derecha en este intervalo:

1. si f' cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un mínimo local en c
2. si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo local en c
3. si f' no cambia de signo en c (esto es, f' es positiva en ambos lados de c ó es negativa en ambos lados de c), entonces f no tiene un extremo local en c.



Ejemplo 4.13 Si retomamos lo hecho en el ejemplo 4.12 podemos determinar máximos y mínimos locales de la función f utilizando este criterio:

- En $x = -\sqrt{3}$ hay un máximo relativo pues $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en $-\sqrt{3}$.

[1]Tome usted mismo un lápiz y realice el trazo de una gráfica cualquiera con las características que se detallan en el texto.

- En $x = \sqrt{3}$ hay un mínimo relativo pues $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en $\sqrt{3}$.

■

Actividad 4.6 Para las siguientes funciones determinar:

i) Los intervalos de crecimiento /decrecimiento.

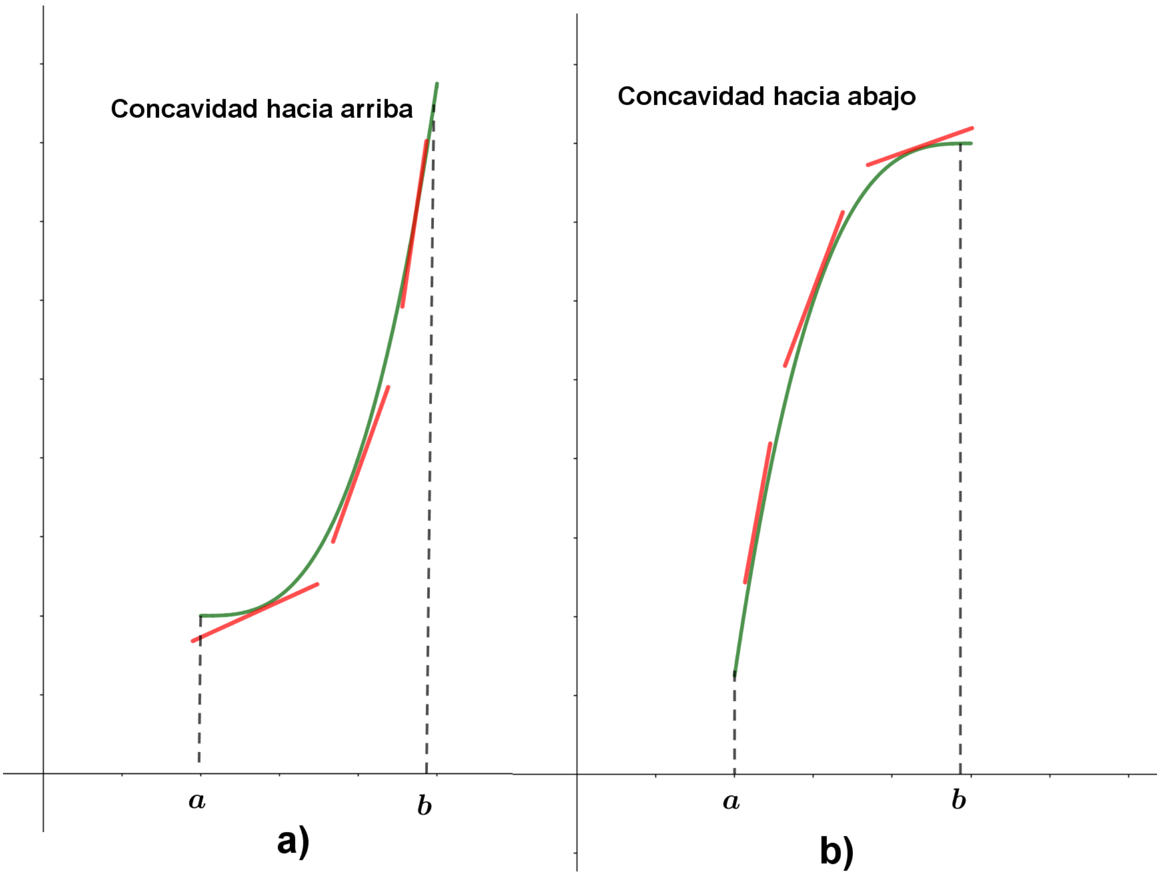
ii) Puntos máximos y mínimos relativos.

1. $h(x) = -x^3 + 2x^2$
2. $g(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$
3. $f(x) = \dfrac{x^3}{3x^2 + 1}$

4.8.7. Concavidad y criterio de la segunda derivada

En esta sección veremos que la segunda derivada nos brinda información acerca de cómo la gráfica de una función derivable se curva hacia arriba o hacia abajo.

Consideremos la siguiente figura los gráficos de dos funciones crecientes.



Observemos en la figura que se han trazado algunas rectas tangentes en diferentes puntos de cada una de las gráficas. Si bien todas las rectas tangentes tienen pendiente positiva[2], en la gráfica a) podemos observar que, considerándolas de izquierda a derecha, las pendientes de las rectas tangentes aumentan. Por su parte, en la gráfica b) esas pendientes decrecen.

A gráficas como la de la Figura a) las llamamos **cóncavas hacia arriba** y a las gráficas como en la Figura b) **cóncava hacia abajo.**

Actividad 4.7

1. Trace dos gráficas de funciones continuas y decrecientes. Una de ellas que sea *cóncava hacia arriba* y y la otra *cóncava hacia abajo*.
2. En cada una de las gráficas dibuje algunas rectas tangentes, como se hizo en la figura anterior.
3. Reflexione, en forma similar a la que se hizo para las gráficas crecientes, respecto del crecimiento o decrecimiento del valor de las pendientes de esas rectas tangentes, tanto en el caso de la gráfica cóncava hacia arriba como en aquella que sea cóncava hacia abajo.

Teorema 4.8.5

Sea f una función cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto (a,b).

Decimos que:

1. Si $f''(x) > 0$ en (a,b) entonces $f(x)$ es cóncava hacia arriba en ese intervalo.
2. Si $f''(x) < 0$ en (a,b) entonces $f(x)$ es cóncava hacia abajo en ese intervalo.

4.8.8. ¿Cómo determinar los intervalos de concavidad de una función?

Para pensar en un método que nos permita conocer el signo de la derivada segunda de la función en diferentes intervalos de su dominio, procederemos de manera similar a lo que se ha hecho para estudiar el signo de la primera derivada.

El método para estudiar el signo de una función es el mismo para cualquier función. Así que para construir los intervalos y estudiar el signo de $f''(x)$, debemos tener en cuenta aquellos valores del dominio de f que anulan la segunda derivada o donde ésta no existe.

A continuación, consideraremos valores de prueba en cada intervalo para determinar el signo de la derivada segunda en cada uno de ellos, y así podremos concluir acerca de la concavidad de f en cada uno de los intervalos.

En resumen, para determinar las concavidades de la función podríamos proceder de la siguiente manera:

1. Hallar todos los puntos $c \in Dom(f)$ en los que $f''(c) = 0$ o bien $f''(c)$ no existe.
2. Armar los intervalos teniendo en cuenta el dominio de la función y los puntos hallados en 1.

[2]Observe la inclinación de las rectas y piense además en que ambas curvas son crecientes

3. Evaluar la segunda derivada en un punto p (cualquiera) de cada intervalo.
4. Si $f''(p) > 0$ entonces $f''(x) > 0$ en todo el intervalo en el que está p.
   Si $f''(p) < 0$ entonces $f''(x) < 0$ en todo el intervalo al que pertenece p.
5. En los intervalos donde $f''(x) > 0$ concluimos que f es cóncava hacia arriba.
   En los intervalos donde $f''(x) < 0$ concluimos que f es cóncava hacia abajo.

Definición 4.12
Dada f una función continua en $x_0 \in Dom(f)$, diremos que x_0 es **punto de inflexión** de f si hay un cambio de concavidad de la función en ese punto.

Ejemplo 4.14 Determinar los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad para la función $f(x) = x^3 + 3x^2$

Observemos que el dominio de f es todo $\mathbb{R}$.

Si derivamos la función tenemos que $f'(x) = 3x^2+6x$, mientras que la segunda derivada es $f''(x) = 6x + 6$.

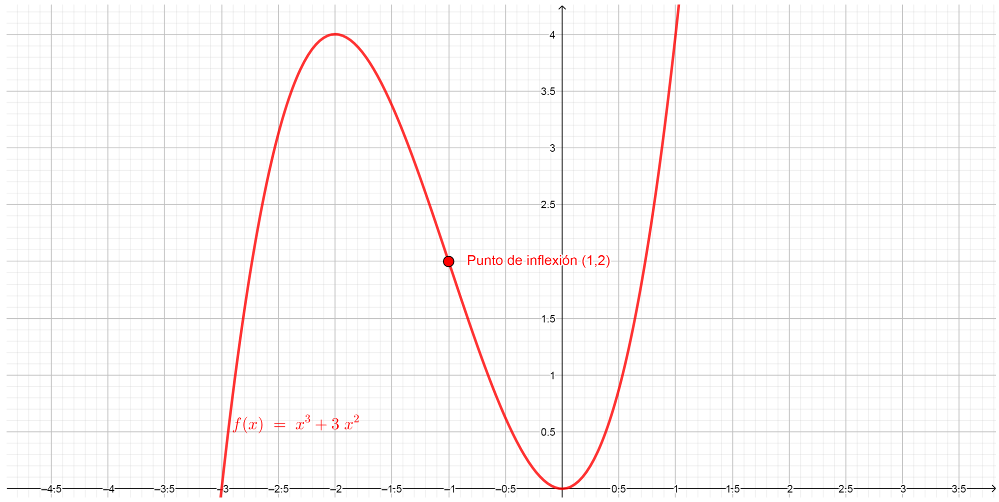
Como $f''(x)$ es una función lineal, no hay puntos en los que no esté definida. Si igualamos la segunda derivada a cero podemos concluir que el candidato a punto de inflexión es $x = -1$. Para ver si realmente es un punto de inflexión, es necesario analizar las concavidades de f antes y después del punto $x = -1$.

Los intervalos que nos quedan para analizar son: $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Pues f'' es una función continua en su dominio y se anula únicamente en $x = -1$.

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
VP	-2	0
$f''(VP)$	$f''(-2) = -6$	$f''(0) = 6$
Signo de $f''(x)$	-	+
$f(x)$	cóncava hacia abajo	cóncava hacia arriba

Como comprobamos que hay un cambio de concavidad, y $x = -1$ es un punto de continuidad de f, decimos que en $x = -1$ hay un punto de inflexión.

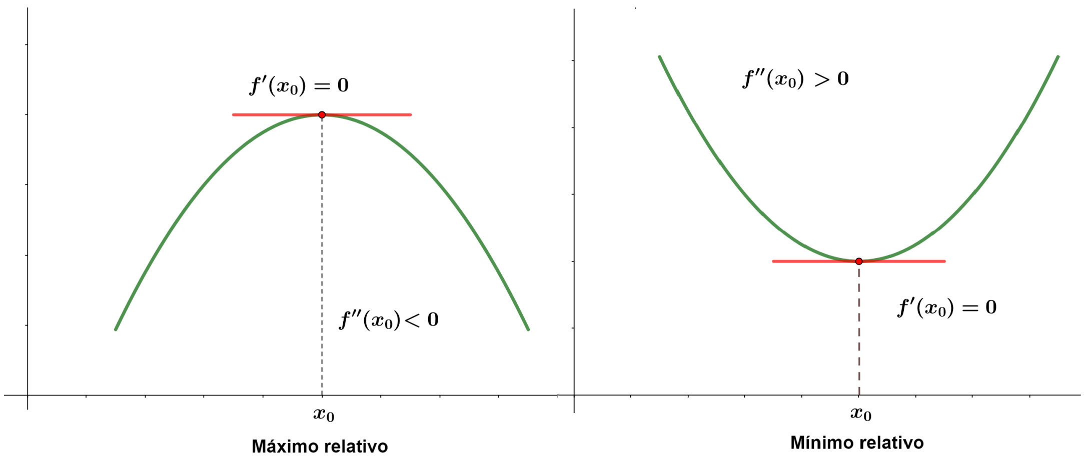
Lo cual podemos observar en su gráfica:



Teorema 4.8.6 Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos relativos

Dado x_0 un punto crítico de una función f con derivada segunda continua en x_0

1. Si $f''(x_0) < 0$ entonces f tiene un valor máximo relativo en x_0.
2. Si $f''(x_0) > 0$ entonces f tiene un valor mínimo relativo en x_0.



Aclaración: si ocurriera que $f''(x_0) = 0$, este criterio no nos sirve como herramienta para concluir acerca de los extremos relativos de la función. En ese caso, tenemos que analizar el signo de la primera derivada antes y después de x_0, y concluir usando el criterio de la primera derivada.

Ejemplo 4.15

- Si analizamos la función $f(x) = x^2$ tiene un punto crítico en $x = 0$ pues su derivada se hace cero allí. Y si observamos la segunda derivada $f''(x) = 2$, con lo cual es positiva, y según el criterio de la segunda derivada hay un mínimo en $x_0 = 0$, además la función es cóncava hacia arriba siempre porque la segunda derivada es positiva para todo valor en su dominio.

- Si analizamos la función del ejemplo 4.14, $f(x) = x^3 + 3x^2$ tiene dos puntos críticos en los que f' se anula, en $x = -2$, y en $x = 0$. Si observamos su segunda derivada $f''(x) = 6x + 6$ y analizamos su signo en esos valores, usando el criterio de la segunda derivada concluimos que en $x = -2$ hay un máximo relativo y en $x = 0$ un mínimo relativo. ■

Actividad 4.8 1. Determinar todos los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad para cada función.
   a) $f(x) = 3x^3 + 2x$.
   b) $f(x) = 2x^4 + 3x^3$
   c) $f(x) = sin(x)$ en $[-2\pi, 2\pi]$
   d) $f(x) = ln(x)$

2. En caso de que se pueda, usar el criterio de la segunda derivada para corroborar la clasificación de extremos de las funciones de la actividad 4.6.

4.8.9. Análisis completo de una función y gráfica

En esta sección aplicaremos todos los conceptos desarrollados anteriormente.

Dada una función podemos estudiarla de modo que conoceremos su dominio, puntos de continuidad, clasificación de sus discontinuidades; así como el comportamiento de la función a través de los límites, y en consecuencia podremos sacar conclusiones acerca de la existencia o no de asíntotas horizontales o verticales; podremos estudiar la derivada y saber dónde la función crece o decrece y con ello concluir si posee máximos o mínimos; al estudiar la derivada segunda de la función podremos conocer cuál es su concavidad en distintos intervalos y así sabremos si tiene o no puntos de inflexión. Luego de todo ese análisis podremos reconstruir la gráfica de la función y realizar un esbozo de la misma con suficiente precisión.

Resumimos a continuación toda la información que consideramos importante al realizar el estudio completo de funciones:

a) Determinar el dominio de la función.
b) Determinar el conjunto donde la función es continua. Donde sea discontinua, clasificar sus discontinuidades.
c) Determinar las asíntotas verticales y horizontales.
d) Calcular la primera derivada y determinar los puntos críticos de la función.
e) Determinar los intervalos de crecimiento / decrecimiento de la función.
f) Determinar los valores máximos y mínimos relativos.
g) Calcular la segunda derivada y determinar los puntos donde $f''(x) = 0$ o donde f'' no existe.
h) Determinar los intervalos de concavidad.
i) Determinar si la función presenta puntos de inflexión.
j) Realizar la representación gráfica de la función, utilizando los datos obtenidos en el análisis desarrollado en los puntos anteriores.

Ejemplo 4.16 Realizar el análisis completo de $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 + 2x + 1}$

Luego graficar la función en base al análisis desarrollado.

Debemos estudiar la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2x+1} = \dfrac{x-1}{(x+1)^2}$

a) Notemos[3] que su dominio es $\mathbb{R} - \{-1\}$

b) La función f es una función racional, por tanto es una función continua en su dominio.
El único punto de discontinuidad es $x = -1$, pues no existe $f(-1)$. Para saber qué tipo de discontinuidad presenta debemos estudiar el siguiente límite

$$\lim_{x\to -1} \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

Podemos observar que el numerador tiende a -2 mientras que el denominador tiende a 0, con lo cual el límite no existe. Puede ser que tienda a $+\infty$ o a $-\infty$, pero en cualquier caso estamos en condiciones de afirmar que la función f tiene discontinuidad inevitable en $x = -1$.

c) Por la clasificación de la discontinuidad hecha en el inciso anterior, podemos concluir que f presenta una *asíntota vertical* de ecuación $x = -1$.
Dentro del estudio completo nos interesa también saber detalles del comportamiento de la función a medida que estamos cada vez más cerca de $x = -1$. Por eso, estudiaremos los límites laterales

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\overbrace{x-1}^{\to -2}}{\underbrace{(x+1)^2}_{\to 0^+}} = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to -1^-} \frac{\overbrace{x-1}^{\to -2}}{\underbrace{(x+1)^2}_{\to 0^+}} = -\infty$$

Esta información será importante a la hora de graficar la función.

Además debemos estudiar la existencia de *asíntotas horizontales*. Para hacer este análisis debemos tomar los límites a $\pm\infty$ de la función y observar si al menos uno de ellos tiende a un número real L:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x-1}{(x^2+2x+1)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\overbrace{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}^{\to 0}}{\underbrace{\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}_{\to 1}} = 0$$

[3] piense el lector en las razones por las cuales este es el dominio de f

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{(x^2+2x+1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}^{\to 0}}{\underbrace{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}_{\to 1}}=0$$

.

Con lo cual f tiene Asíntota Horizontal de ecuación $y=0$, tanto cuando x tiende a $+\infty$ como cuando x tiende a $-\infty$.

d) *Derivada*: Si calculamos la derivada utilizando la regla de la derivada de un cociente, luego sacamos factor común y simplificamos, nos queda :

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)^2-(x-1)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{(x+1)(-x+3)}{(x+1)^4}=\frac{(3-x)}{(x+1)^3}$$

Con lo que $Dom f'(x)=\mathbb{R}-\{-1\}$.

Puntos Críticos: Para hallarlos, recordemos que debemos buscar puntos donde la derivada no existe o bien donde la derivada se anula. Éstos serán nuestros candidatos a máximos o mínimos.
Como $f'(x)$ es racional, existe en todo punto del dominio de f, por lo que sólo encontraremos puntos críticos buscando los ceros de la derivada

$$f'(x)=0$$

$$\frac{(3-x)}{(x+1)^3}=0$$

$$(3-x)=0$$

$$x=3$$

Entonces, $x=3$ es el único punto crítico de la función.

e) *Intervalos de Crecimiento y decrecimiento*:
Para ello tenemos que dividir el dominio de f teniendo en cuenta el punto crítico y evaluar la derivada en un valor de cada intervalo para analizar su signo allí.
Dividimos el dominio de esta manera: $(-\infty,-1)\cup(-1,3)\cup(3,+\infty)$.
- En $(-\infty,-1)$ evaluamos $f'(-2)=-5$. Como la derivada es negativa, entonces la función *decrece* en ese intervalo.
- En $(-1,3)$ evaluamos $f'(0)=3$. Dado que la derivada es positiva, entonces la función *crece* en ese intervalo.
- En $(3,+\infty)$ evaluamos $f'(4)=-\frac{1}{125}$. Como la derivada es negativa, la función *decrece* en ese intervalo.

f) *Máximos y/o mínimos relativos*:
A partir del análisis de crecimiento y decrecimiento de la función, viendo que antes del punto crítico la función crece y luego decrece, podemos concluir que en $x=3$ hay un *máximo local*. El cual se sitúa en el punto de coordenadas $P=(3,f(3))=(3,1/8)$.

g) *Segunda derivada*:
De similar manera que con f', hacemos la derivada segunda por regla del cociente

$$f''(x) = \frac{(-1)\cdot(x+1)^3 - (3-x)\cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{(x+1)^2(2x-10)}{(x+1)^6} = \frac{(2x-10)}{(x+1)^4}$$

De donde $Dom f''(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$

Candidatos a Puntos de inflexión:
Para esto recordemos que debemos buscar valores del dominio de f en los que la segunda derivada no existe o bien en los que ésta se anula. Como f es racional, su derivada segunda existe en todo punto del $Dom(f)$. Luego sólo nos queda buscar puntos en los que la derivada segunda se hace cero:

$$f''(x) = \frac{(2x-10)}{(x+1)^4} = 0 \text{ si } x = 5$$

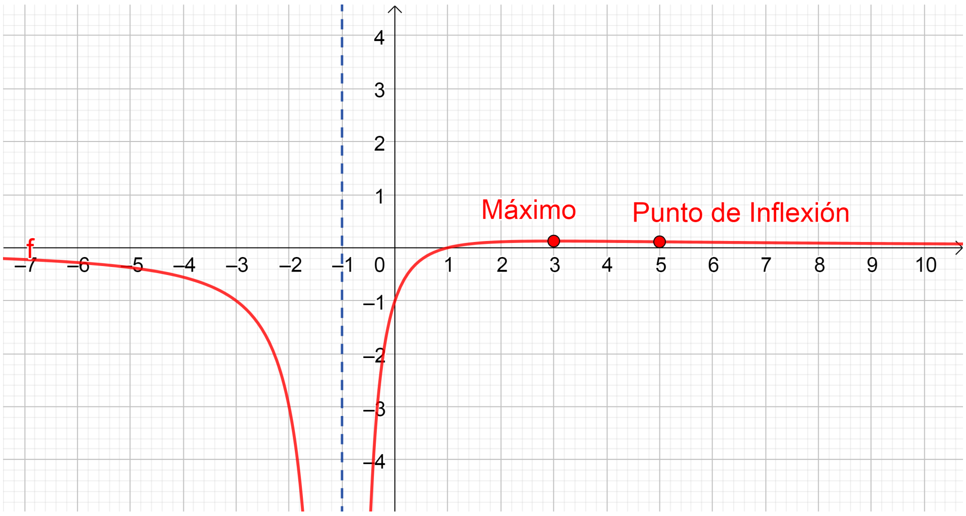
h) *Intervalos de concavidad*:
Para ello tenemos que dividir el dominio de f teniendo en cuenta el punto encontrado en el inciso anterior y evaluar la segunda derivada en valores de prueba de cada intervalo para analizar su signo.
Dividimos el dominio de esta manera: $(-\infty,-1)\cup(-1,5)\cup(5,+\infty)$.
- En $(-\infty,-1)$ evaluamos $f''(-2) = -14$. Como la segunda derivada es negativa, entonces la función es *cóncava hacia abajo* en ese intervalo.
- En $(-1,5)$ evaluamos $f''(0) = -10$. Ya que la segunda derivada es negativa, entonces la función es *cóncava hacia abajo* en ese intervalo.
- En $(5,+\infty)$ evaluamos $f''(6) = \frac{2}{2401} \approx 0{,}0008$. Como la segunda derivada es positiva, entonces la función es *cóncava hacia arriba* en ese intervalo.

i) *Puntos de inflexión:*
Según lo hecho en el inciso anterior, en el punto $x = 5$ la concavidad de la función cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba. Como además f es continua en $x = 5$, concluimos que se trata de un punto de inflexión.

A continuación presentamos un cuadro que recopila toda la información hallada en los incisos e) y h):

Intervalo	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,5)$	$(5,+\infty)$
VP	-2	0	4	6
Signo de $f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$-$
Crec. / Decrec. de f(x)	decrece	crece	decrece	decrece
Signo de $f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$
Concavidades de $f(x)$	Cóncava h/ abajo	Cóncava h/ abajo	Cóncava h/ abajo	Cóncava h/ arriba

j) *Gráfica:*
Con todo el estudio anterior, estamos en condiciones de dibujar la gráfica de la función



Es interesante resaltar que si contáramos únicamente con la gráfica de la función no resulta tan sencillo observar dónde está el punto máximo local ni dónde está el punto de inflexión. Sin embargo a partir del análisis completo de la función que desarrollamos, esas particularidades de la gráfica quedaron de manifiesto.

4.9. Ejercicios

Realizar, paso a paso como en el ejemplo anterior, el análisis completo de las funciones siguientes . Luego graficar en base al análisis realizado.

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$

b) $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

d) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

4.10. Problemas de Optimización

Un problema de optimización consiste en obtener máximos y/o mínimos de una función que modela algún problema de la vida real. Por ejemplo, una persona de negocios quiere minimizar los costos y maximizar las utilidades o saber cuántos artículos deben fabricarse para que la producción sea lo más rentable posible.

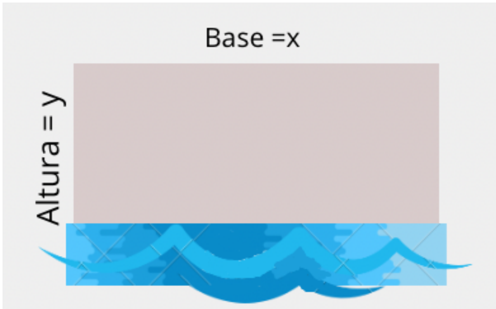
En la solución de esos problemas el desafío más grande suele ser convertir el problema expresado en un lenguaje coloquial a un problema matemático de optimización, es decir, establecer la función que debe maximizarse o minimizarse.

Pasos para la resolución de problemas de optimización

1. Comprender el problema. Leer el problema con cuidado hasta que lo comprenda. ¿Qué datos se dan? ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son las cantidades dadas?
2. Elaborar un dibujo o diagrama. Identificar en él las cantidades dadas y requeridas.
3. Introducir notación. Asigne un nombre a la cantidad que se va a maximizar o minimizar. Asimismo, seleccione nombres/símbolos para las otras cantidades desconocidas y marque el diagrama con estos símbolos sugerentes; por ejemplo, A para el área, b para base o t para el tiempo.
4. Expresar la fórmula para la cantidad desconocida. Exprese la incógnita como una función de una sola variable, según sea el caso puede que deba sustituir variables con la ayuda de ecuaciones que nos brinda el problema. En este paso se obtiene la función a optimizar. Escribir su dominio teniendo en cuenta el contexto del problema.
5. Derivar y hallar los puntos críticos. Aplique los métodos para hallar el valor máximo o el mínimo de su función aprendidos en las aplicaciones de las derivadas. En particular si el dominio de la función es un intervalo cerrado tenga en cuenta el teorema de Weierstrass.

Ejemplo 4.17 Se tienen 1200 metros de alambrado y desea cercar un campo rectangular que limita con un río recto. (No necesita cercar a lo largo del río.) ¿Cuáles son las dimensiones del campo que tiene el área más grande?

Para comenzar a resolver el ejercicio debemos tener cuenta los datos que se tienen y luego hagamos un dibujo de la situación. Tenemos un campo rectangular y 1200 metros de alambrado. LLamaremos "x: base del rectángulo en metros" e "y : altura del rectángulo en metros", como ve en el siguiente dibujo:



Como debemos cercar el campo con 1200 m de alambre, podemos considerar que eso es el perímetro del rectángulo $P(x,y) = x + 2y = 1200$.

Como tenemos que encontrar área más grande, debemos hallar máximo de la función área $A(x,y) = xy$. Notemos que esta función depende de dos variables y solo sabemos trabajar con funciones de una variable, con lo cual combinando:

$$\begin{cases} x + 2y = 1200 \\ A(x,y) = xy, \end{cases}$$

despejamos x de la primera ecuación, $x = 1200 - 2y$ y luego reemplazamos en la expresión de área, teniendo así $A(y) = (1200 - 2y)y$ que solo depende de la variable y. Tengamos en cuenta que esta expresión tiene sentido para $y > 0$. Además $x = 1200 - 2y > 0$ (pues x e y son medidas), entonces $y < 600$. Por lo tanto, podemos tomar como dominio de A el intervalo $(0,600)$.

Resumiendo, tenemos que hallar máximo de la función

$$A(y) = (1200 - 2y)y = 1200y - 2y^2, \quad \text{con} \quad Dom\,A = (0,600).$$

Primero hallamos puntos críticos: $A'(y) = 0$.

$$A'(y) = 1200 - 4y = 0$$
$$1200 = 4y$$
$$y = 300$$

Ahora, analizando crecimiento/decrecimiento de la función A podemos determinar si el punto crítico que hallamos es máximo o mínimo.

Intervalo	$(0,300)$	300	$(300,600)$
VP	1		400
Signo de $A'(y)$	$+$	0	$-$
Crec. / Decrec. de $A(y)$	crece	Máx	decrece

Con la información dada en el cuadro anterior podemos observar que en $y = 300$ se halla el máximo de la función área. Con lo cual el corral tendrá altura $y = 300$ y su base se calculará como $x = 1200 - 2 \cdot 300 = 600$.

4.11. Ejercicios de Optimización

Resolver los siguientes problemas.

1. Se dispone de 240 metros de alambre para construir un corral rectángular. ¿Cuáles son las dimensiones del corral de área máxima que puede construirse con todo el alambre disponible?.
2. Entre todos los rectángulos de área 9. ¿ Cuál es el de menor perímetro?
3. Entre todos los rectángulos de perímetro 12. ¿ Cuál es el de área máxima?
4. Se va a construir un corral doble que forma dos rectángulos idénticos adyacentes. Si se dispone de 120 metros de alambre, ¿qué dimensiones harán que el área del corral sea máxima?.
5. ¿Existirán dos números positivos tal que su suma es 4 y la suma del cuadrado del primero y del cubo del segundo sea lo mas pequeños posible?
6. La suma de tres números positivos es 30. El primero más el doble del segundo, más el triple del tercero suman 60. Elegir los números de modo que el producto de los tres sea el mayor posible.
7. Encuentren el punto sobre la recta $y = 2x - 3$ más próximos al origen.

5. Integrales

Desde hace miles de años el cálculo de áreas ha sido un tema de gran interés, sin embargo los avances del último siglo son revolucionarios. Sabemos que el área de un rectángulo es el producto de la base por la altura y el área de un triángulo es la mitad del producto de las longitudes de la base y la altura. Sin embargo, ¿cómo se define el área de una región en un plano si dicha región está acotada por una curva?. La respuesta a esta pregunta está relacionada al concepto de integral.

La integral es de importancia fundamental en estadística, ciencias e ingeniería. La utilizamos para calcular cantidades que van desde probabilidades y promedios, hasta el consumo de energía o las fuerzas ejercidas por el agua contra los muros de una represa.

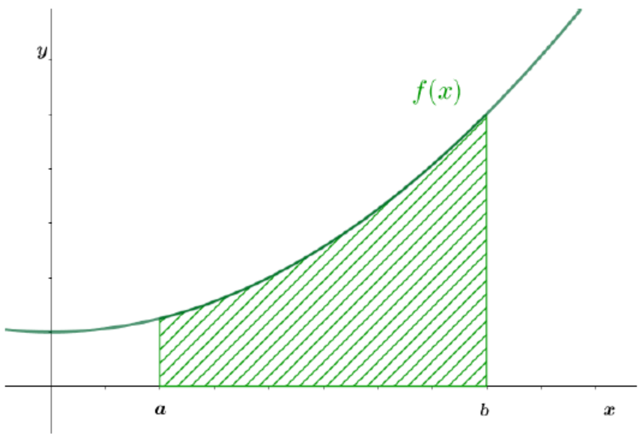
En este capítulo nos centraremos en el concepto de la integral, en algunos métodos de integración y en su uso para el cálculo de áreas de varias regiones que se forman con curvas.

5.1. Hacia el Concepto de Integral Definida

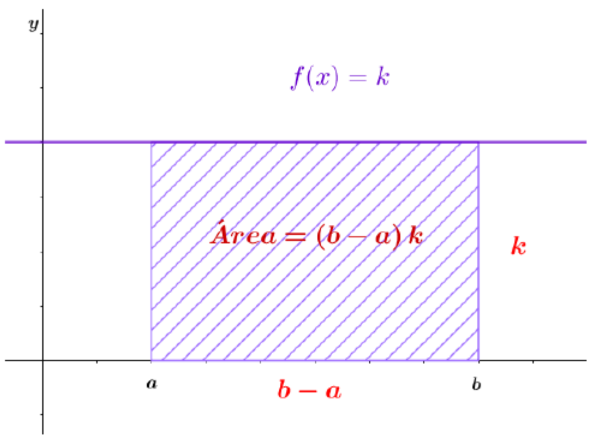
La integral definida es la herramienta clave en cálculo para definir y calcular importantes cantidades en matemáticas y ciencias, tales como áreas, volúmenes, longitudes de trayectorias curvas, probabilidades y pesos de diversos objetos, por sólo mencionar algunas. La idea detrás de la integral es que es posible calcular dichas cantidades si las dividimos en pequeñas partes y sumamos las contribuciones de cada una.

Uno de los problemas que dio origen al concepto de integral definida fue:

Hallar el área de una región plana limitada por la gráfica de una función $f(x)$ positiva y continua, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.



Ejemplo 5.1 Comencemos con un ejemplo sencillo. Calcular el área bajo la gráfica de una función constante $f(x) = k$ en el intervalo $[a, b]$, como se muestra en la siguiente figura:

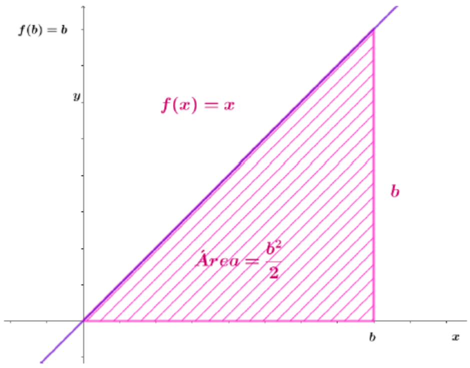


Es fácil ver que se trata del área de un rectángulo de lados $b - a$ y k. Por lo tanto el área bajo la curva es

$$A = (b - a)k$$

■

Ejemplo 5.2 Ahora consideremos el caso de la función lineal $f(x) = x$ en el intervalo $[0, b]$.



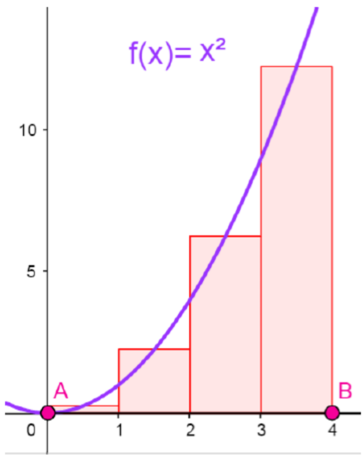
Este ejemplo también es un área conocida, ya que se trata de un triángulo de base b y altura $f(b) = b$. Así el área bajo la gráfica de una función lineal es

$$A = \frac{b^2}{2}.$$

Ahora nos preguntamos ¿cómo calculamos el área debajo de la gráfica de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 4]$?

Una respuesta geométrica al problema es aproximar el valor del área con la suma de las áreas de un número finito de rectángulos.

Para hacer esto procedamos de la siguiente manera: dividamos el intervalo $[0, 4]$ en subintervalos de longitud 1. Sumemos las áreas de los rectángulos que tienen base en cada uno de esos subintervalos y altura igual al valor de la función en el punto medio del subintervalo.



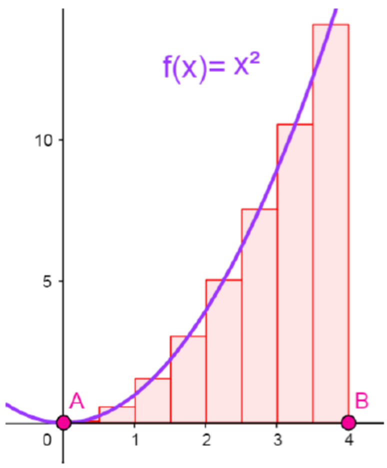
$$\text{Área} \approx f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{3}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{5}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{7}{2}\right)\cdot 1 = \sum_{k=1}^{4} f(x_k^*)\Delta x =$$

Donde Δx es el medida de la base del rectángulo y x_k^* es el punto medio del subintervalo. Lo anterior queda:

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot 1 + \left(\frac{5}{2}\right)^2\cdot 1 + \left(\frac{7}{2}\right)^2\cdot 1 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \frac{25}{4} + \frac{49}{4} = \frac{84}{4} = 21$$

Puede observarse en la gráfica que el valor que encontramos no representa el valor exacto del área debajo de la gráfica de la función. Sin embargo es una primera aproximación.

Si quisiéramos ser más exactos, podríamos subdividir el intervalo en mayor cantidad de partes. Pues, hagámoslo, dividamos el intervalo $[0,4]$ en subintervalos de longitud $\frac{1}{2}$. Sumemos las áreas de los rectángulos que tienen base en cada uno de esos subintervalos y altura igual al valor de la función en el punto medio del subintervalo.



$$\text{Área} \approx f\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} + f\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} + f\left(\frac{5}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} + f\left(\frac{7}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} + f\left(\frac{9}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} + f\left(\frac{11}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} + f\left(\frac{13}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} + f\left(\frac{15}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{8} f(x_k^*)\Delta x.$$

Notar que, en esta subdivisión que hicimos, el valor de Δx es más pequeño pues el intervalo $[0,4]$ fue dividido en mayor cantidad de partes que en el caso anterior.

Por último, podrá el lector chequear que la suma anterior resulta:

$$\sum_{k=1}^{8} f(x_k^*)\Delta x = 21{,}25$$

Comparando el valor obtenido en el primer paso con este valor podemos intuir que este último es más aproximado al área debajo de la gráfica de f.

Si quisiéramos mejorar aún más la aproximación, podemos aumentar la cantidad de subintervalos, de modo que la longitud de la base de cada uno de los rectángulos será cada vez menor. Pero entonces, ¿cuál es el valor exacto del área que buscamos?

Si procedemos de esta manera, dividiendo el intervalo $[0,4]$ en subintervalos cada vez más pequeños, estaremos ajustando nuestro cálculo cada vez más al valor exacto del área buscada. Ya hemos desarrollado una herramienta que nos permite pensar en estos sucesivos cálculos en el que hay una cantidad que está cambiando. Sí, el concepto de límite será nuestro apoyo para poder dar respuesta a nuestra pregunta.

■

Lo que decimos es que con la idea de límite podemos estudiar cómo progresan las sucesivas aproximaciones del área que nos interesa conocer. Es decir que podremos considerar la suma de las áreas de rectángulos con base cada vez más pequeña, cuya longitud tiende a cero, y luego calcular el límite de esa expresión para poder conseguir el área exacta de la región que estamos considerando:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x = \text{Área}.$$

5.2. Integral definida

Definición 5.1

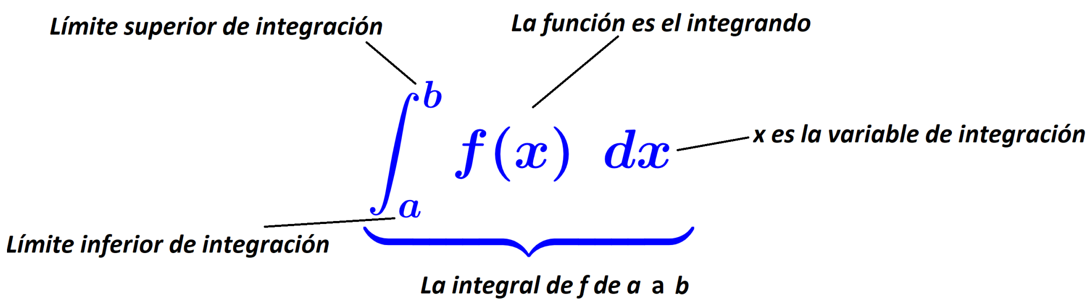
En general si se tiene una función f, continua y definida en un intervalo $[a,b]$. Si se divide el intervalo en subintervalos de igual longitud Δx, luego se toman los puntos medios de esos intervalos, $x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*$. Entonces **la integral definida de f, desde a hasta b** es,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x$$

Si este límite existe decimos que su valor es **la integral de f entre a y b**, en cuyo caso solemos decir que f es **integrable**.

Observaciones:

- Leibniz introdujo el símbolo $\int$ y se llama signo de integral. Se parece a una S alargada y se eligió debido a que una integral es un límite de sumas.
- La suma $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x$ se llama **suma de Riemann**.
- Sabemos, por el ejemplo introductorio, que si f es positiva, entonces la suma de Riemann puede interpretarse como una suma de áreas de los rectángulos.



Teorema 5.2.1

Si f es continua en $[a, b]$, o si f tiene una cantidad finita (no infinita) de discontinuidades, entonces f es integrable en $[a, b]$. Es decir, la integral definida existe.

Veamos algunas propiedades básicas de las integrales que ayudarán a evaluarlas con mayor facilidad.

5.2.1. Propiedades de la integral definida

Teorema 5.2.2

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones integrables en $[a, b]$ y sea k una constante, entonces:

1. Intervalo de ancho cero: $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. Orden de integración: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
3. Linealidad: $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$
4. Aditividad en el intervalo : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$
5. Comparación : Si para todo $x \in [a, b]$ $\quad f(x) \leq g(x),$ $\quad$ entonces
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$
6. Acotamiento: Si $M = \text{máx}[f]$ en $[a, b]$ y $m = \text{mín}[f]$ en $[a, b]$ entonces
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Ejemplo 5.3 Supongamos que $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 5, \qquad \int_{1}^{4} f(x)\,dx = -2 \quad \text{y} \quad \int_{-1}^{1} h(x)\,dx = 7.$

Calcular las siguientes integrales definidas utilizando propiedades:

1. $\int_{4}^{1} f(x)\,dx$
2. $\int_{-1}^{1} (3\,h(x) + 2\,f(x))\,dx$
3. $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$

Para el inciso 1. podemos usar la propiedad 2 : $\int_{4}^{1} f(x)\,dx = -\int_{1}^{4} f(x)\,dx = 2$.

2. En este caso usaremos las propiedades de linealidad de la integral:

$$\int_{-1}^{1} (3\,h(x) + 2\,f(x))\,dx = \int_{-1}^{1} 3\,h(x)\,dx + \int_{-1}^{1} 2\,f(x)\,dx =$$
$$= 3\int_{-1}^{1} h(x)\,dx + 2\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 3(7) + 2(5) = 31$$

3. Usando la propiedad 4. (aditividad en el intervalo) podemos 'repartir' la integral en dos intervalos:

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{4} f(x)\,dx = 5 + (-2) = 3$$

■

Actividad 5.1 Calcular las siguientes integrales definidas utilizando propiedades:

1. Si $\int_{0}^{9} f(x)\,dx = 37$, $\int_{0}^{9} g(x)\,dx = 16$ encontrar el valor de $\int_{0}^{9} \left[2\,f(x) - \frac{1}{4}g(x)\right] dx$
2. Si $\int_{-2}^{3} h(x)\,dx = 12$ y $\int_{0}^{3} h(x)\,dx = 3$, hallar el valor de $\int_{-2}^{0} h(x)\,dx$
3. Si $\int_{-1}^{3} f(t)\,dt = 3$ y $\int_{-1}^{4} f(t)\,dt = 7$, determinar el valor de a) $\int_{3}^{4} f(t)\,dt$ y b) $\int_{-1}^{4} f(z)\,dz$

5.3. ¿Cómo se calculan las integrales?

Nos preguntamos ahora, si cada vez que tengamos que calcular una integral definida deberemos calcular el límite de las sumas de Riemann. La respuesta es que *no siempre*. Para obtener un modo de calcular las integrales definidas de manera más directa, vamos a utilizar el **Teorema Fundamental del Cálculo**, que relaciona la integración y la derivación, y nos permite calcular la integral definida de f mediante otra función F cuya derivada sea f.

Definición 5.2
Si f es una función integrable en el intervalo $[a,b]$, sea $g(x)$ una nueva función que a cada $x \in [a,b]$ le asigna la integral de f desde a hasta x, es decir

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a,b]$$

A ésta función g la llamamos **función integral de** f en $[a,b]$

En el siguiente teorema podremos definir la derivada de $g(x)$ y ello nos conducirá a resolver el problema del cálculo de la integral definida.

Teorema 5.3.1 Teorema fundamental del cálculo

Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$, entonces la función g definida por $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y

$$g'(x) = f(x), \quad \text{para todo} \quad x \in (a,b).$$

Definición 5.3
Una función F se llama **primitiva** de una función f en $[a,b]$, si

$$F'(x) = f(x) \quad \text{para todo valor} \quad x \in [a,b].$$

También suele nombrarse a la primitiva como *antiderivada* de la función f, ya que el razonamiento involucrado en la búsqueda de una primitiva involucra el cálculo de una derivada.

La definición de función integral y el teorema fundamental del cálculo explican esta sencilla forma de calcular una integral, mediante la antiderivada.

Ejemplo 5.4 Si quisiéramos conocer la primitiva de la función $f(x) = 2x$, quizá nos resulte sencillo reconocer que se trata de $F(x) = x^2$, ya que la derivada de F es f.

■

En forma similar podemos pensar otras primitivas que no sean tan inmediatas, si recuperamos el razonamiento de las reglas de derivación e intentamos revertir su procedimiento.

Ejemplo 5.5 Si consideramos la función $g(x) = x^2$, podemos reconocer que se trata de una función polinómica de grado 2. Recordemos que cuando derivamos funciones polinómicas procedemos a bajar el exponente como factor y restar 1 en el exponente. Así, la derivada de una expresión polinómica es otra expresión polinómica con un grado menos. En forma inversa, la primitiva de una expresión polinómica es también polinómica y de un grado mayor. Podríamos entonces arriesgar una primitiva de $g(x) = x^2$ teniendo en cuenta que debe ser una expresión cúbica. Concretamente, si pensamos en $G(x) = x^3$, notemos que $G'(x) = 3 \cdot x^2$. Sin embargo, aunque $G'(x)$ tiene el mismo grado que $g(x)$, no es igual a la función g pues hay un factor 3 multiplicando. ¿Cómo podríamos proceder para ajustar nuestra elección de primitiva de g?

■

En cambio, chequear que una función dada es primitiva de otra es tan sencillo como derivar la primitiva.

Ejemplo 5.6 $F(x) = x$ es una primitiva de $f(x) = 1$, ya que $F'(x) = f(x)$.

■

Ejemplo 5.7 La función $F(x) = \operatorname{sen}(x)$ es una primitiva de $f(x) = \cos(x)$. Mientras que la función $H(x) = -\cos(x)$ es la primitiva de $F(x)$.

■

5.3.1. Regla de Barrow

El siguiente procedimiento describe cómo calcular integrales definidas una vez que se haya calculado su primitiva. Se evalúa la primitiva hallada en los límites de integración superior e inferior, para finalmente calcular una diferencia.

> **Definición 5.4 Regla de Barrow**
> Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y F es una primitiva de f , entonces
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Ejemplo 5.8 Calcular las siguientes integrales definidas utilizando la regla de Barrow.

- $\displaystyle\int_{-1}^{3} 1\,dx = x\Big|_{-1}^{3} = (3) - (-1) = 3 + 1 = 4$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)\,dx = sen(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = sen(\frac{\pi}{2}) - sen(0) = 1 - 0 = 1.$

■

5.4. Integral indefinida

En esta sección se presenta una notación para la primitiva, algunas expresiones de primitivas conocidas y un ejemplo en las que éstas se usan para evaluar luego integrales definidas.

Definición 5.5

Se denomina **integral indefinida** a

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

y significa que $F'(x) = f(x)$.

Debemos observar que el resultado de la integral indefinida es una primitiva de la función. Pero no es la única, pues si a ella le sumamos una constante obtenemos una nueva primitiva.

En efecto, como $F'(x) = f(x)$, es inmediato observar que $(F(x)+c)' = f(x)$, ya que la derivada de una constante es cero. Así, $F(x)+c$ también es una primitiva de $f(x)$. Es decir que la integral indefinida no es una única función, sino una familia de funciones.

Por lo anterior, solemos escribir:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c$$

donde c es llamada **constante de integración**

Presentamos ahora una lista de integrales de funciones elementales que serán útiles para el cálculo de integrales de funciones más complejas.

Teorema 5.4.1

Sea c una constante cualquiera:

- $\displaystyle\int 1\,dx = x+c.$
- $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c$, con $n\in\mathbb{R}$ y $n\neq -1$.
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = ln(|x|)+c.$
- $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x+c.$
- $\displaystyle\int sen(x)\,dx = -\cos(x)+c.$
- $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = sen(x)+c.$

Importante Las propiedades de linealidad enunciadas para la integrales definidas en el teorema 5.2.2 (inciso 3) también valen para las integrales indefinidas.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 5.9 Calcular las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int (\sqrt{x} + x^{2/3})\,dx$. Usando linealidad de la integral, tenemos:

$$\int (\sqrt{x} + x^{2/3})\,dx = \int x^{1/2}\,dx + \int x^{2/3}\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{5/3}}{5/3} + c = \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{3}{5}x^{5/3} + c.$$

b) $\int (x^2 + 2\,e^x)\,dx$. También usaremos linealidad en este caso, lo cual nos permite realizar el cálculo de la primitiva del siguiente modo:

$$\int (x^2 + 2\,e^x)\,dx = \int x^2\,dx + 2\int e^x\,dx = \frac{x^3}{3} + 2\,e^x + c$$

c)

$$\int \left(\pi\, sen(x) - \frac{5}{x}\right) dx = \pi \int sen(x)\,dx - 5\int \frac{1}{x}\,dx =$$
$$= -\pi\cos(x) - 5\ln(|x|) + c$$

Donde también usamos la propiedad de linealidad de la integral.

■

Ejemplo 5.10 Calcular las primitivas que sean necesarias para evaluar las siguientes integrales definidas usando regla de Barrow:

a)

$$\int_0^3 (x^3 - 6\,x)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} - 6\,\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 = \left(\frac{3^4}{4} - 3\,(3)^2\right) - \left(\frac{0^4}{4} - 3\,(0)^2\right) =$$
$$= \left(\frac{81}{4} - 27\right) - (0 - 0) = \frac{-27}{4}$$

b)

$$\int_{-\pi}^0 (e^x - \cos(x))\,dx = (e^x - sen(x))\Bigg|_{-\pi}^0 = \left(e^0 - sen(0)\right) - (e^{-\pi} - sen(-\pi)) =$$
$$= (1 - 0) - (e^{-\pi} - 0) = 1 - e^{-\pi}$$

■

5.5. Técnicas de Integración

A continuación estudiaremos algunas técnicas de integración que nos permitirán encontrar las primitivas de una amplia gama de funciones.

Todas las técnicas tienen como objetivo reducir la integral buscada a una integral ya conocida, inmediata, o más sencilla.

5.5.1. Integración por partes

Recordemos que la idea de integral indefinida es encontrar una función primitiva. Hemos dicho que en muchas ocasiones hallar una primitiva requiere pensar el mecanismo de derivar de manera inversa. De ese modo, podemos entender la búsqueda de primitiva como el proceso inverso, o proceso que desarma, a la derivación.

Como hemos visto en el capítulo anterior, al derivar un producto de funciones $f(x) \cdot g(x)$, obtenemos:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Si ahora, en cada lado de la igualdad, tomamos la integral:

$$\begin{aligned}\int (f(x) \cdot g(x))' \, dx &= \int (f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)) \, dx = \\ &= \int f'(x) \cdot g(x) \, dx + \int f(x) \cdot g'(x) \, dx\end{aligned}$$

y si recuperamos la idea de que la integral y la derivada son procesos inversos:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= \int f'(x) \cdot g(x) \, dx + \int f(x) \cdot g'(x) \, dx \\ f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \, dx &= \int f'(x) \cdot g(x) \, dx \end{aligned}$$

Enunciaremos un método que recoge lo anterior y nos permitirá resolver integrales de funciones que pueden expresarse como un producto de una función por la derivada de otra.

Teorema 5.5.1 Método de Integración por partes

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones derivables, entonces

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) \; - \; \int f'(x) \cdot g(x) \, dx$$

Si llamamos $u = f(x)$, $v = g(x)$, de donde $du = f'(x)dx$, y $dv = g'(x)dx$:
podemos escribir el método de integración por partes en términos de u y v

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Para hallar el valor de una integral definida usando el método de integración por partes, la expresión anterior se adapta de la siguiente manera:

$$\int_a^b u \cdot dv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$$

Recordemos que siempre que se quiera calcular una integral indefinida debemos obtener una función que sea primitiva, con lo cual tendremos que sumar una constante c para dar como resultado las infinitas soluciones.

Ejemplo 5.11 Calcular $\int x \cdot e^x dx$

si elegimos de esta forma:

$$u = x \quad dv = e^x dx$$

y luego derivamos u e integramos dv obtenemos:

$$du = 1dx \quad v = \int e^x dx = e^x$$

Luego aplicando la fórmula nos queda:

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x + c$$

■

Ejemplo 5.12 Calcular $\int x \cdot ln(x) dx$

Observemos la elección de u y dv ya que si elegimos al revés el método no resuelve la integral.

si elegimos de esta forma:

$$u = ln(x) \quad dv = xdx$$

y luego derivamos u e integramos dv obtenemos:

$$du = \frac{1}{x} dx \quad v = \int x dx = \frac{x^2}{2}$$

Aplicando la fórmula tenemos que:

$$\int x \cdot ln(x) dx = ln(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = ln(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{2} dx =$$
$$= ln(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \int x dx = ln(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c$$

■

5.5.2. Integración por sustitución

Así como en el método anterior, pensaremos en el proceso inverso a la derivación, pero en este caso partiendo de la derivación de una función compuesta, es decir la regla de la cadena.

Sabemos que si tenemos dos funciones F y g derivables podemos calcular la derivada de la composición de funciones con la regla de la cadena:

$$[F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Si aplicamos integral a cada lado de la igualdad tenemos que

$$\int [F(g(x))]' dx = \int F'(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

Luego recordando que la integral y la derivada son procesos inversos obtenemos lo siguiente

$$F(g(x)) = \int F'(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

Suponiedo que F es una primitiva de f, $F'(x) = f(x)$ con lo cual

$$F(g(x)) = \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

Veremos entonces un método para calcular la integral del producto de una función compuesta por la derivada de su argumento.

Teorema 5.5.2 Método de integración por sustitución

Si $F(x)$ es la primitiva de $f(x)$ y $g(x)$ es una función derivable entonces

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + c$$

Como indica su nombre, este método de integración consiste en la aplicación de un cambio de variable para simplificar la expresión a integrar.

Lo importante del método es escoger un cambio útil, ya que, en caso contrario, la integral resultante puede ser de mayor dificultad.

Si sabemos que $F(x)$ es la primitiva de $f(x)$ y tenemos que calcular $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$, debemos identificar a la función $g(x)$ y su derivada para hacer un cambio de variables.

La sustitución elegida será $u = g(x)$.

Sabemos que calcular el diferencial de una función es igual al producto de su derivada por el diferencial de la variable, es decir que $du = g'(x) dx$ con lo cual la integral original podrá escribirse de una forma más simple

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du$$

Además será una expresión mucho más sencilla de integrar recordando que la primitiva de f es F

$$\int f(u) du = F(u) + c$$

Con lo que la integral ya estará resuelta, pero quedará expresada en la variable u que es nuestra variable de sustitución. Para obtener el resultado final volveremos a reemplazar la variable u por $g(x)$ con lo cual obtendremos

$$F(u) + c = F(g(x)) + c$$

Ejemplo 5.13 Calcular $\int (x^4 + x^2)^4 \cdot (4x^3 + 2x)dx$.

Si elegimos correctamente $u = x^4 + x^2$ veremos que $du = (4x^3 + 2x)\,dx$. Con lo cual la sustitución nos lleva a una integral de una expresión mucho más sencilla

$$\int (x^4 + x^2)^4 \cdot (4x^3 + 2x)dx = \int u^4 du$$

Que puede calcularse más fácilmente

$$\int u^4 du = \frac{u^5}{5} + c$$

Si luego volvemos a reemplazar la variable u por su expresión original obtenemos el resultado final

$$\frac{u^5}{5} + c = \frac{(x^4 + x^2)^5}{5} + c$$

■

Ejemplo 5.14 Si en cambio tenemos que calcular una integral por sustitución definida en un intervalo, lo mejor es proceder como el ejemplo anterior y en el último paso calculamos el valor de la integral aplicando la regla de Barrow.

Calcular $\displaystyle\int_2^5 e^{2x^2+x} \cdot (4x + 1)\,dx$.

Elegimos a $u = (2x^2+x)$ y luego vemos que $du = (4x+1)dx$. Entonces podemos reescribir la integral anterior en términos de la nueva variable:

$$\int e^{2x^2+x} \cdot (4x + 1)dx = \int e^u du$$

La integral obtenida es sencilla de calcular

$$\int e^u du = e^u + c$$

Si luego volvemos a reemplazar u por su expresión original obtenemos el resultado de la primitiva

$$e^u + c = e^{2x^2+x} + c$$

Finalmente como estamos calculando una integral definida aplicamos la regla de Barrow con la primitiva hallada

$$\int_2^5 e^{2x^2+x} \cdot (4x+1)\, dx = (e^{2x^2+x} + c)\Big|_2^5 = (e^{2(5)^2+(5)} + c) - (e^{2(2)^2+(2)} + c) =$$
$$= e^{55} + c - e^{10} - c = e^{55} - e^{10}.$$

■

Notemos que al usar la regla de Barrow se cancela la constante de integración de la primitiva hallada anteriormente. En adelante cuando calculemos una integral definida no añadiremos la constante de integración.

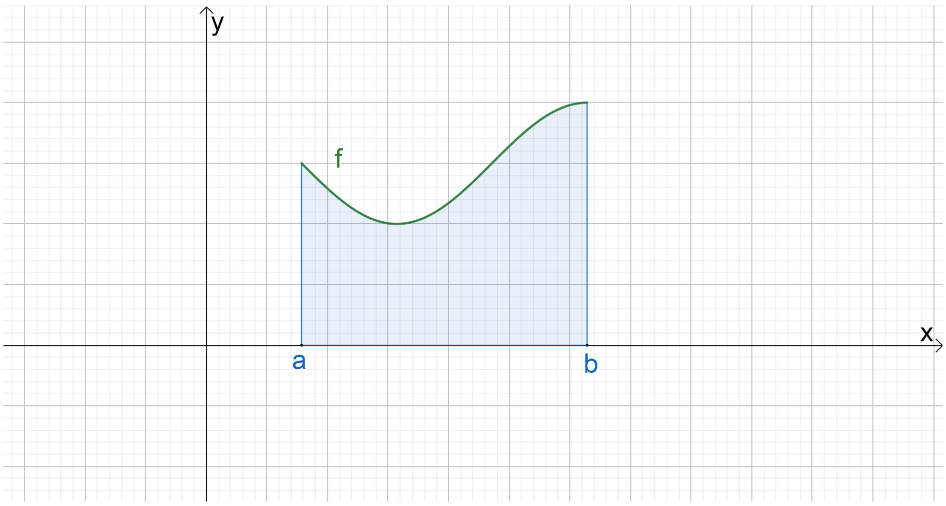
5.6. Aplicaciones de las integrales: Área entre curvas

Una de las aplicaciones del cálculo de integrales definidas, como fue mencionado, es el cálculo de áreas de regiones plano delimitadas por gráficos de funciones.

5.6.1. Área entre el gráfico de una función y el eje x

Si la función está por encima del eje x:

Nos interesa calcular el área comprendida entre el gráfico de una función f y el eje x que además está acotada por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, sabiendo que f es integrable en $[a; b]$



Tal como vimos al inicio de este capítulo, en este caso donde la función es positiva[1], podemos decir que calcular el área que buscamos es hallar el valor de la integral definida entre a y b de la función f.

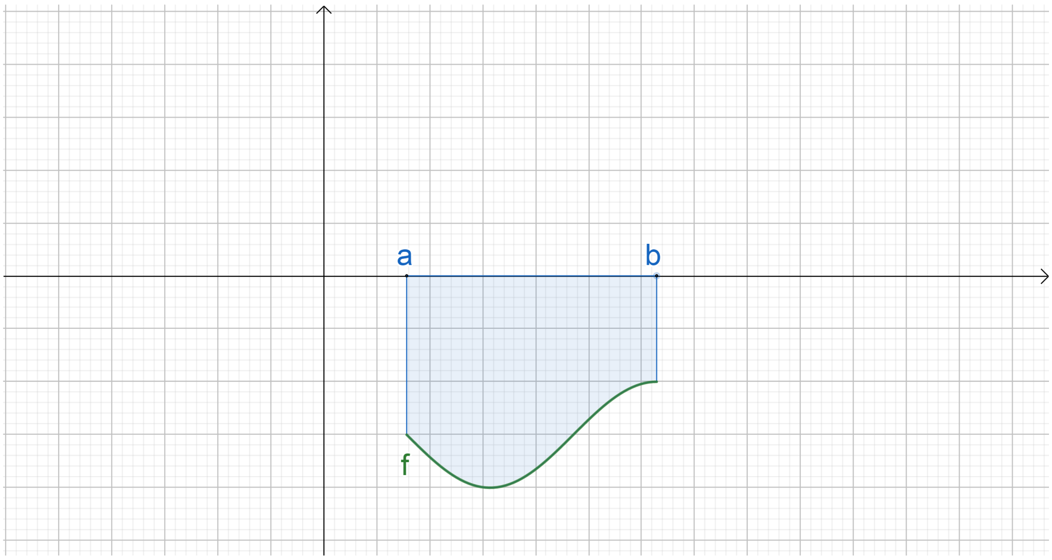
[1] Decimos que la función es positiva cuando sus imágenes son todas positivas, vemos en el gráfico que la curva está por encima del eje x

Definición 5.6

Si la función f es positiva o cero en el intervalo $[a, b]$, el área comprendida entre el eje x y el gráfico de la función f, que además está acotada por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es :

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Si la función está por debajo del eje x:



En esta situación decimos que la función es negativa[2]. Recordemos que al comienzo del capítulo la integral se definió como el límite de una suma grande de áreas de rectángulos. Esos rectángulos tienen una altura determinada por la imagen de un punto en cada intervalo. En el caso que estamos considerando, todas las imágenes son negativas, con lo cual el resultado final de la integral será un valor negativo.

Es decir que en este caso la integral definida nos dará el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función f en el intervalo $[a, b]$, pero con el signo negativo. Por lo tanto, para calcular el área debemos cambiar el signo de la integral.

Definición 5.7

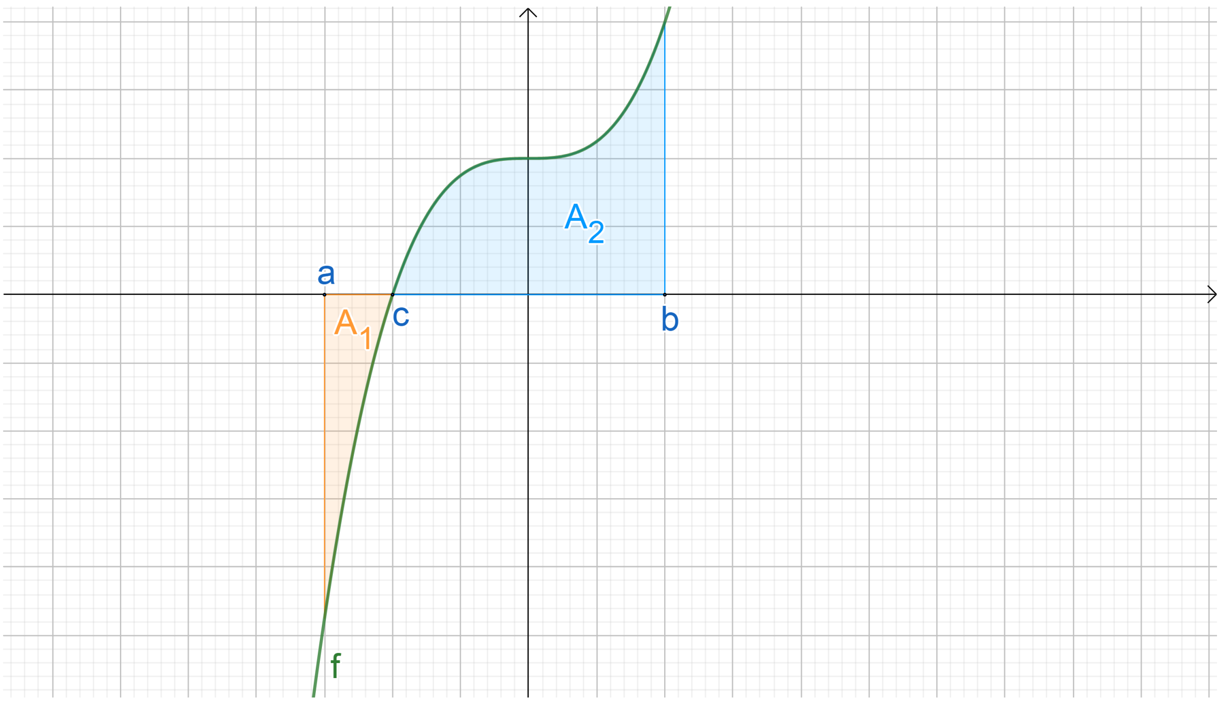
Si la función f es negativa o cero en el intervalo $[a, b]$, el área comprendida entre el eje x y el gráfico de la función f, que además está acotada por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es:

$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

Si la función está en parte por encima del eje x y en parte por debajo del eje x:

[2] es decir que todas las imágenes que estamos considerando son negativas, podemos ver esto en el gráfico ya que la curva está enteramente por debajo del eje x

En esta situación se combinan las dos situaciones anteriores, se deben estudiar los cambios de signo de la función en el intervalo considerado. Debemos descomponer la región en dos áreas que ya sabemos calcular.
El procedimiento es sencillo, en primer lugar debemos identificar los ceros de la función. A modo de ejemplo, en el siguiente gráfico observamos que c es el punto del intervalo $[a;b]$ donde la función vale 0, además en la región A_1 sombreada en color naranja la función es negativa, es decir que $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,c]$, y en la región A_2 sombreada en color azul la función es positiva con lo que decimos que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [c,b]$.

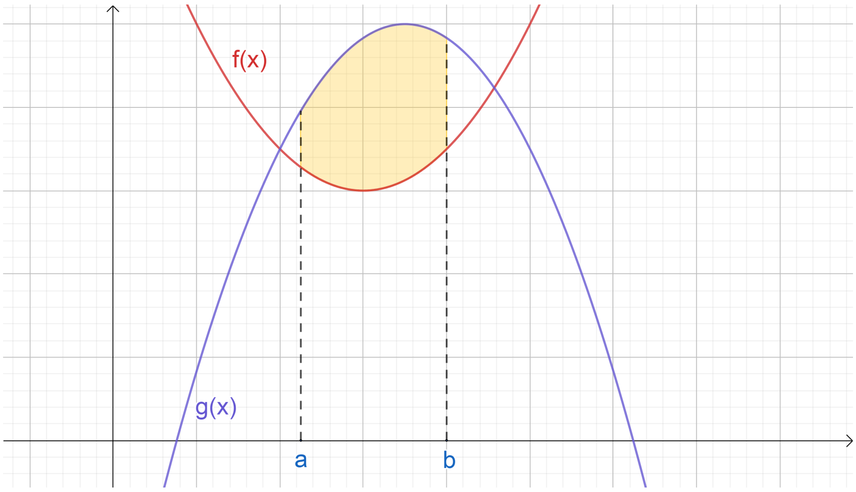


Definición 5.8
Si la función f es negativa en $[a,c]$ y positiva en $[c,b]$, el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función f que además está acotada por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es la suma de las áreas A_1 y A_2:

$$A = A_1 + A_2 = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

5.6.2. Área entre los gráficos de dos funciones

Nos interesa ahora calcular el área de una región comprendida entre los gráficos de dos funciones integrables f y g con $x \in [a, b]$.



El área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función f que además está acotada por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ puede calcularse con la integral $\int_a^b f(x)\, dx$. Similarmente el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función g que además está acotada por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ puede calcularse con la integral $\int_a^b g(x)\, dx$.

Pero dado que nos interesa hallar el valor del área comprendida entre ambas funciones, podemos pensarla como la diferencia entre las áreas que se calcularon en el párrafo anterior.

Definición 5.9

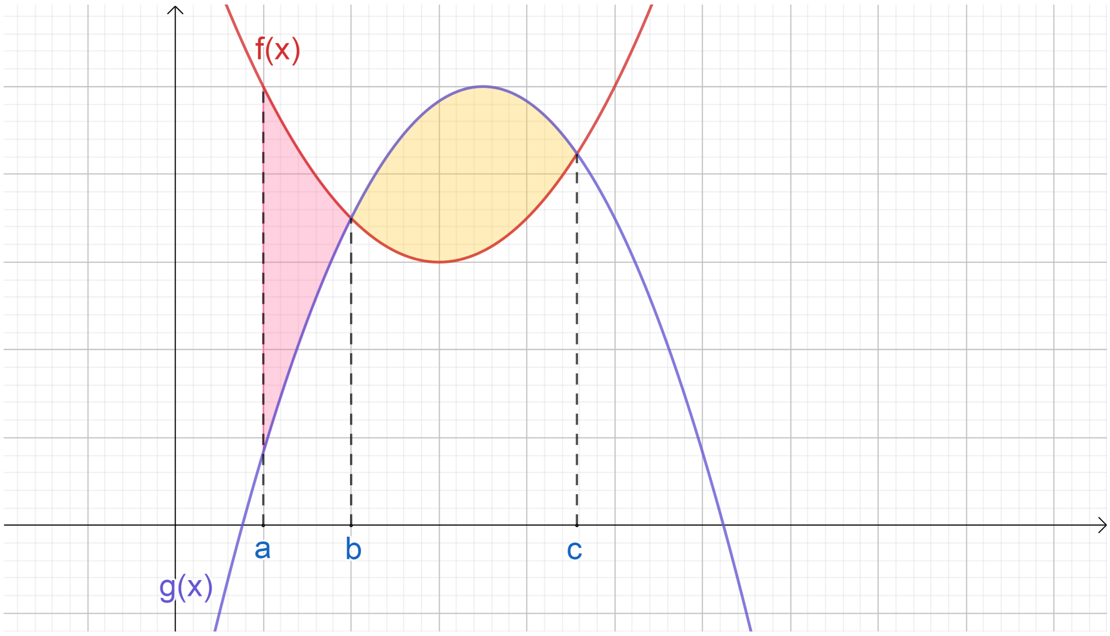
Si las funciones f y g cumplen que $g(x) \geq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, el área de la región comprendida entre los gráficos es:

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$$

En la práctica nos permitimos identificar coloquialmente a las funciones involucradas en este cálculo de área. Llamaremos *Techo* a la función que se encuentra arriba y *Piso* a la que se encuentra debajo. Por lo tanto lo que debemos hacer es identificar en cada intervalo cuál es la función techo y cuál la función piso para calcular:

$$A = \int_a^b (TECHO - PISO)\, dx$$

Si en el intervalo que debemos calcular el área entre los gráficos de dos funciones, éstas se intersecan, tenemos que partir el intervalo tantas veces como intersecciones haya entre las funciones.



Definición 5.10
Si las funciones f y g cumplen que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [b,c]$ el área de la región comprendida entre f y g en $[a,c]$ es:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx + \int_b^c (g(x) - f(x))dx$$

Ejemplo 5.15 Calcular el área de la región encerrada entre los gráficos de $f(x) = 3x^2 - 2$ y $g(x) = 2x - 1$.

Lo que debemos hacer en primer lugar es identificar el intervalo en el cual se requiere calcular el área. Para esto hallamos el los puntos de intersección entre las gráficas de las funciones, es decir que buscamos los valores de x en los que $f(x) = g(x)$.

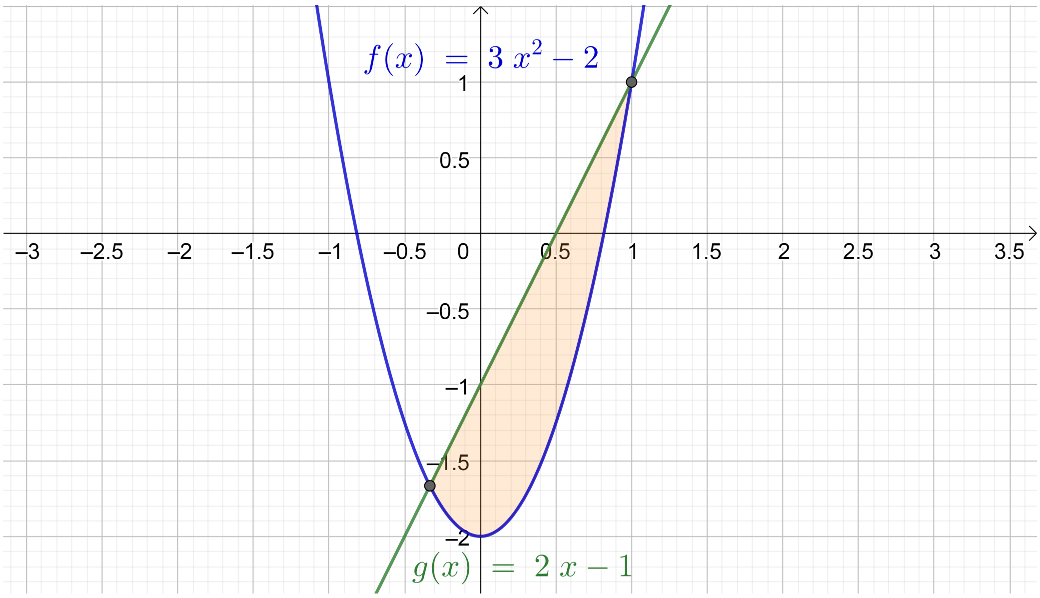
$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 3x^2 - 2 &= 2x - 1 \\ 3x^2 - 2x - 1 &= 0 \\ x &= -\frac{1}{3} \text{ ó } x = 1 \end{aligned}$$

Con lo cual debemos calcular el área en el intervalo $[-\frac{1}{3}, 1]$.

Ahora bien, ¿qué función debemos considerar como techo y cuál como piso en ese intervalo?. Para eso tomamos un valor de prueba (VP) del intervalo y vemos qué función está por encima para identificar el techo y el piso.

$$VP : x = 0$$
$$f(0) = -2$$
$$g(0) = -1$$

Con lo cual, la función *Techo* es $g(x)$ y la función *Piso* es $f(x)$.



Con esto ya podemos calcular el valor del área en el intervalo $[-\frac{1}{3}, 1]$

$$A = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} [TECHO - PISO]\, dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} [g(x) - f(x)]\, dx =$$
$$= \int_{-\frac{1}{3}}^{1} [(2x-1) - (3x^2 - 2)] dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} [2x - 1 - 3x^2 + 2] dx =$$
$$= \int_{-\frac{1}{3}}^{1} [-3x^2 + 2x + 1] dx = \left(-3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{-\frac{1}{3}}^{1} =$$
$$= \left(-x^3 + x^2 + x\right)\Bigg|_{-\frac{1}{3}}^{1} = \left(-1^3 + 1^2 + 1\right) - \left(-\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{32}{27}$$

Con lo cual el área de la región es $A = \frac{32}{27}$.

Ejemplo 5.16 Calcular el área de la región encerrada entre los gráficos de $f(x) = 4x^3$ y $g(x) = 4x$.

Para iniciar, igualamos las funciones para encontrar el o los intervalos de integración:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= g(x)\\
4x^3 &= 4x\\
4x^3 - 4x &= 0\\
4x(x^2-1) &= 0\\
x = 0 &\text{ ó } x^2 = 1\\
x = 0 &\text{ ó } x = -1 \text{ ó } x = 1
\end{aligned}
$$

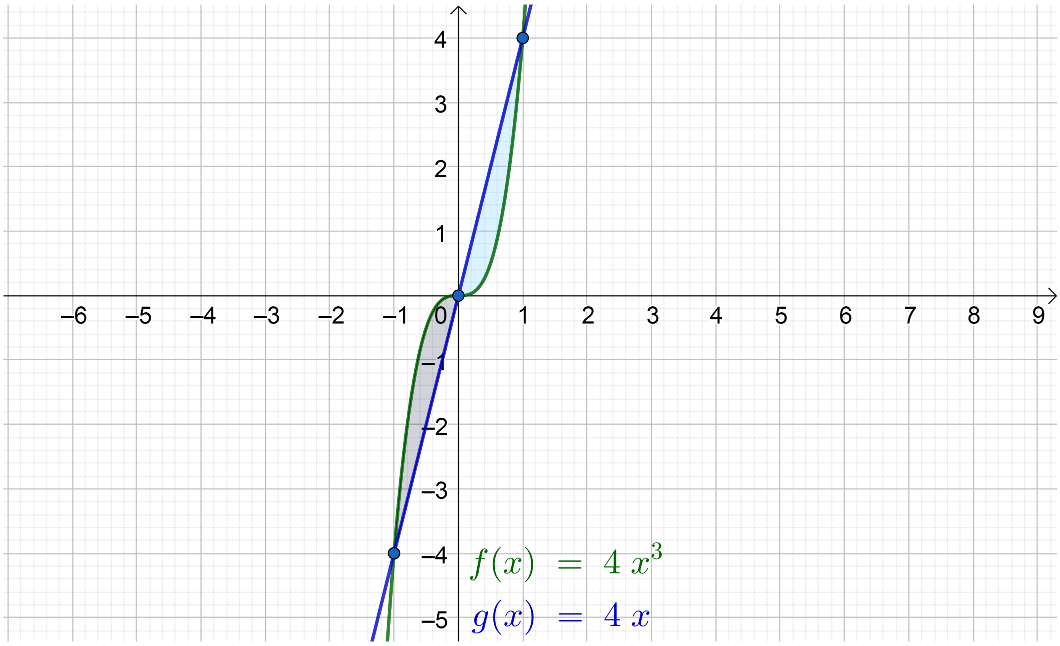
Con lo cual los intervalos en los que debemos integrar son $[-1,0]$ y $[0,1]$.

Seleccionamos un valor de prueba (VP) en cada uno de los intervalos para identificar las funciones techo y piso.

	$[-1,0]$	$[0,1]$
VP	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
f(VP)	$-\frac{1}{2}$	-2
g(VP)	-2	2

Con lo que concluimos que en el intervalo $[-1,0]$ la función techo es $f(x)$ y la función $g(x)$ es el piso. Mientras que en el intervalo $[0,1]$ la función $g(x)$ es el techo y $f(x)$ es la función piso.

Observemos lo analizado en la siguiente figura.



Para finalizar, calculamos el valor del área como la suma de las integrales correspondientes en cada uno de los intervalos.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{0} (TECHO - PISO)\, dx + \int_{0}^{1} (TECHO - PISO)\, dx = \\
&= \int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))\, dx + \int_{0}^{1} (g(x) - f(x)) dx = \\
&= \int_{-1}^{0} (4x^3 - 4x)\, dx + \int_{0}^{1} (4x - 4x^3) dx = \\
&= (x^4 - 2x^2)\Big|_{-1}^{0} + (2x^2 - x^4)\Big|_{0}^{1} = \\
&= -((-1)^4 - 2(-1)^2) + (2(1)^2 - (1)^4) = 2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el área de la región encerrada por las funciones $f(x)$ y $g(x)$ es $A = A_1 + A_2 = 2$.

5.7. Aplicaciones de las integrales: Resolución de ecuaciones diferenciales

En capítulos anteriores hemos estudiado cómo determinar la derivada de una función. Sin embargo, muchos problemas requieren que recuperemos una función a partir del conocimiento de su derivada. Es decir, queremos conocer una función $F(x)$ a partir de su derivada $F'(x)$.

Por ejemplo, supongamos que conocemos la función velocidad de un objeto $v(x) = 2x$, donde x es el tiempo, y además sabiendo que su posición al iniciar el trayecto es $p(0) = 5$ como condición inicial. Si queremos hallar su función de posición $p(x)$ para cualquier x, necesitamos encontrar $p(x)$ teniendo en cuenta que la derivada de la función de posición es la función de velocidad, es decir que $p'(x) = v(x)$, luego tenemos la ecuación:

$$p'(x) = 2x$$

y la condición inicial:

$$p(0) = 5$$

Ésta se denomina ecuación diferencial, ya que es una igualdad cuya incógnita es una función desconocida, y además se tiene información sobre la derivada de la función a hallar.

Para resolver la ecuación es necesario hallar la función $p(x)$ que satisfaga la igualdad. Tal función se encuentra integrando $p'(x)$, es decir

$$p(x) = \int 2x\,dx = x^2 + c$$

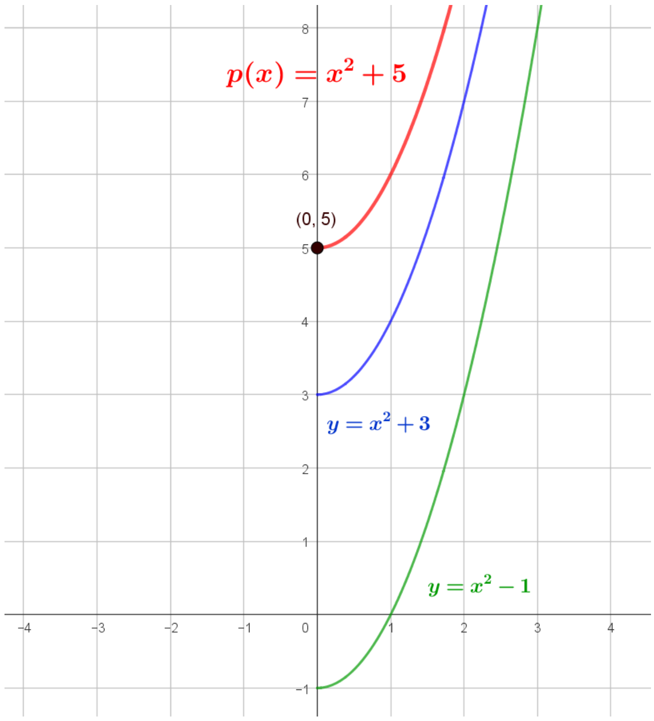
Como existen muchas funciones cuya derivada es $2x$, debemos quedarnos con aquella función que cumpla $p(0) = 5$, es decir que la gráfica de la función pase por $(0, 5)$:

$$p(0) = (0)^2 + c = 5$$

$$c = 5$$

Por lo tanto, la función de posición del objeto, cuya la función velocidad es $v(x) = 2x$, con condición inicial $p(0) = 5$ es $p(x) = x^2 + 5$.

En el siguiente gráfico se pueden ver algunas funciones que son solución de la ecuación diferencial y además aquella que satisface la condición inicial.



5.8. Ejercicios de Integrales

1. Calcular las siguientes integrales utilizando las propiedades y en caso de ser posible usando la regla de Barrow.

   a) $\int_{-2}^{3} 2x-1\ dx$

   b) $\int x^2+2x+8\ dx$

   c) $\int_{0}^{2\pi} \sin(x)+x\ dx$

   d) $\int_{0}^{4} 2e^x+3x^4\ dx$

   e) $\int 3\frac{1}{x}+2e^x\ dx$

   f) $\int \cos(x)+\operatorname{sen}(x)+2x^{\frac{3}{5}}\ dx$

   g) $\int_{-5}^{1} x^2+2x+8\ dx$

   h) $\int x-x^{\frac{2}{5}}+3e^x-cos(x)\ dx$

2. Calcular las siguientes integrales utilizando los métodos vistos.

   a) $\int (3x^4+5x^2+8)^4\cdot(12x^3+10x)dx$

   b) $\int x\cdot cos(x)dx$

   c) $\int x^3\cdot ln(x)dx$

   d) $\int cos(5x)\cdot 5dx$

   e) $\int \frac{2+e^x}{e^x+2x}dx$

   f) $\int x\cdot\sqrt{x-1}dx$

   g) $\int_0^8 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$

   h) $\int_0^{2\pi} x\cdot sen(x)dx$

3. Hallar el área comprendida entre las gráficas de las siguientes pares de funciones:

   a) $f(x)=x^2$ y $g(x)=-x^2+4$.

   b) $f(x)=x^4$ y $g(x)=x$.

   c) $f(x)=x^3+\frac{1}{4}x$ y $g(x)=\frac{1}{2}x$.

4. Calcular el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función $f(x)=-x^2-1$ para $-2\le x\le 1$.

5. Calcular el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función $f(x)=x^2+2x-3$ para $-1\le x\le 2$.

6. Calcular el área de la región comprendida entre los gráficos de $f(x)=x^2+1$ y $g(x)=2x^2$ para $0\le x\le 2$.

7. Hallar $f(x)$ sabiendo que $f'(x)=x+\frac{1}{x^2}$ y $f(1)=1$

8. Sabiendo que $f'(x)=3x^2-8x+2$ y además que $f(3)=-4$, hallar la función $f(x)$.

9. Hallar todas la funciones cuya derivada es $g'(x) = x^2\, cos(x)$.

10. Sea $g''(x) = 2x^3 - 4x^7$, $g'(1) = -2$ y $g(0) = 0$ hallar la función $g(x)$.

6. Ejercicios de repaso

1. Para cada una de las siguientes funciones:
   a) Determinar el dominio de la función.
   b) Estudiar la continuidad: indicar el conjunto donde la función es continua, señalar y clasificar sus discontinuidades si las hay.
   c) Estudiar la existencia de asíntotas verticales y horizontales.
   d) Determinar el conjunto donde es derivable.

   i) $f(x) = 4x^3 + 1$

   ii) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

   iii) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

   iv) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 3x + 2}$

   v) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & \text{si } x \geq -1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x < -1 \end{cases}$

   vi) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x} & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

2. Calcular los siguientes limites

   i) $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

   ii) $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{4x - x^2}{2 - \sqrt{x}}$

   iii) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1 - x^4}{3x^3}$

   iv) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$

   v) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x}$

   vi) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2 + x + 1}{2x^2 - x}$

   vii) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^6 + 1}{2x^4 - x^2}$

3. Calcular las derivadas de las siguientes funciones utilizando reglas de derivación.

i) $f(x) = \tan(2\pi x)$

ii) $b(x) = e^{x^2+1}$

iii) $c(x) = \dfrac{3x}{2x+10}$

iv) $d(x) = \ln(x^2+1)$

v) $e(x) = \cos(2x)\ \mathrm{sen}(x)$

vi) $h(x) = \sqrt{1+x^4} - 1$

vii) $g(x) = \dfrac{e^{2x}}{x-1}$

viii) $j(x) = \dfrac{\ln(x+2)}{\mathrm{sen}(x)}$

4. Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes de las siguientes funciones en los puntos indicados.

i) $f(x) = e^x + 1$ en $x = 0$

ii) $g(x) = -x^4 + 2x + 1$ en $x = 2$

iii) $h(x) = 2\ \ln(x^2+2)$ en $x = 1$

iv) $i(x) = \mathrm{sen}(2x)$ en $x = \pi$

v) $j(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x}$ en $x = 1$

5. Graficar las siguientes funciones a trozos. Para qué valores de x las funciones <u>no</u> son derivables?

i) $a(x) = |x|$

ii) $c(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \le 2 \\ 3x-3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

iii) $e(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 0 \\ x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

iv) $d(x) = \begin{cases} e^x+1 & \text{si } x \le -1 \\ \dfrac{1}{x+2} & \text{si } x > -1 \end{cases}$

6. Realizar el estudio de las siguientes funciones y graficar.

i) $f(x) = x^3 - 3x$

ii) $h(x) = \dfrac{x^2+x}{x-1}$

iii) $g(x) = x^2 + ln(x)$

iv) $j(x) = x\,e^x$

7. En cada caso, realice el gráfico de una función $f(x)$ que cumpla con los siguientes requisitos:

i)
- Dominio de $f(x): (-\infty,-3) \cup (-3,+\infty)$.
- Continuidad: $(-\infty,-3) \cup (-3,2) \cup (2,+\infty)$.
- Discontinuidad inevitable en $x = 2$.
- $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$.

- $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$.
- $f'(x) < 0$ en $(-3, -1)$.
- $f''(x) > 0$ en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (2, +\infty)$.
- $f''(x) < 0$ en $(0, 2)$.
- Mínimo local en $x = -1$.

ii)
- Dominio de $f(x) : [-2, 8]$ y continua en ese dominio.
- Creciente en $(-2, 4) \cup (6, 8)$ y decreciente en el intervalo $(4, 6)$.
- $f''(x) > 0$ en $(-2, 2) \cup (5, 8)$ y $f''(x) < 0$ en $(2, 5)$.

La función que dibujaste en el inciso ii) ¿tiene máximo absoluto?

Integrales definidas e indefinidas: Técnicas de Integración- Área entre curvas

8. Calcular las siguientes integrales indefinidas

i) $\displaystyle\int \frac{\pi}{2} cos(x)\, dx$

ii) $\displaystyle\int 2x^8 - \frac{1}{x}\, dx$

iii) $\displaystyle\int cos(3x)\, dx$

iv) $\displaystyle\int x sen(x)\, dx$

v) $\displaystyle\int x^2 e^x\, dx$

vi) $\displaystyle\int x^2(1 + x^3)\, dx$

vii) $\displaystyle\int (e^x - 3x^3)^5 \cdot (e^x - 9x^2)\, dx$

viii) $\displaystyle\int sen(x) cos(x)\, dx$

ix) $\displaystyle\int \frac{x}{x+1}\, dx$

x) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx$

xi) $\displaystyle\int \frac{4}{(ln\, x)^3\, x}\, dx$

9. Calcular las siguientes integrales definidas.

i) $\displaystyle\int_1^3 (2x+3)^2\, dx$

ii) $\displaystyle\int_0^\pi sen(x)\, dx$

iii) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^{1/3}\, dx$

iv) $\displaystyle\int_0^\pi \left[cos(x) + 3x^4\right] dx$

v) $\displaystyle\int_1^e \frac{2x}{x^2+1}\, dx$

vi) $\displaystyle\int_0^4 e^x x^3\, dx$

vii) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{2x+3}\, dx$

viii) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

10. Graficar las curvas y hallar el área de la región encerrada entre las gráficas de esas curvas.

i) $y = x^2$ y $y = 2x$.

ii) $y = 2x^3$ y $y = 2x$.

iii) $y = -\frac{x^2}{2} + 2$ y $y = 0$.

iv) $y = 2x^3 - x$ y $y = x^3$

6.1. Respuestas de Ejercicios de repaso

Ejercicio 1

i) $Domf = \mathbb{R}$. Continuidad=$\mathbb{R}$. No tiene AV ni AH.

ii) $Domf = \mathbb{R} - \{1\}$. Continuidad=$\mathbb{R} - \{1\}$. En $x = 1$ hay discontinuidad evitable. No tiene AV ni AH.

iii) $Domf = \mathbb{R} - \{0\}$. Continuidad=$\mathbb{R} - \{0\}$. En $x = 0$ hay discontinuidad inevitable. No tiene AV ni AH.

iv) $Domf = \mathbb{R}$. Continuidad=$\mathbb{R} - \{-1\}$. En $x = -1$ hay discontinuidad inevitable. No tiene AV , tiene AH en $y = 0$.

v) $Domf = \mathbb{R} - \{1, 2\}$. Continuidad=$\mathbb{R} - \{1, 2\}$. En $x = 1$ hay discontinuidad evitable, en $x = 2$ discontinuidad inevitable. Tiene AV en $x = 2$ y AH en $y = 0$.

vi) $Domf = \mathbb{R}$. Continuidad=$\mathbb{R}$. No tiene AV, tiene AH en $y = 0$.

Ejercicio 2 i)$\to 5$, ii)$\to 0$, iii) $\to 4$, iv)$\to -\infty$, v) $\to 0$, vi) $\to 0$ vii) $\to \frac{5}{2}$, viii) $\to +\infty$

Ejercicio 3

i) Recordar $\tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$. $f'(x) = \frac{2\pi}{\cos^2(2\pi x)}$.

ii) (Regla de composición), $b'(x) = e^{x^2+1}(2x)$.

iii) (Regla del cociente), $c'(x) = \frac{3(2x+10) - 6x}{(2x+10)^2}$.

iv) (Regla de composición), $d'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

v) (Regla de producto y composición), $e'(x) = (-2\,\text{sen}(2x))(sen(x)) + (cos(2x))(\cos(x))$.

vi) (Regla de suma y composición), $h'(x) = \frac{1}{2}(1 + x^4)^{-1/2}(4x^3)$.

vii) (Regla del cociente y composición), $g'(x) = \frac{e^{2x}\,2(x-1) - e^{2x}}{(x-1)^2}$.

viii) (Regla del cociente y composición), $j'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x+2}\right)\text{sen}(x) - ln(x+2)(\cos(x))}{(\text{sen}(x))^2}$.

Ejercicio 4 Recordar que la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = a$ es

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

i) $f'(0) = 1$, $f(0) = 2$.

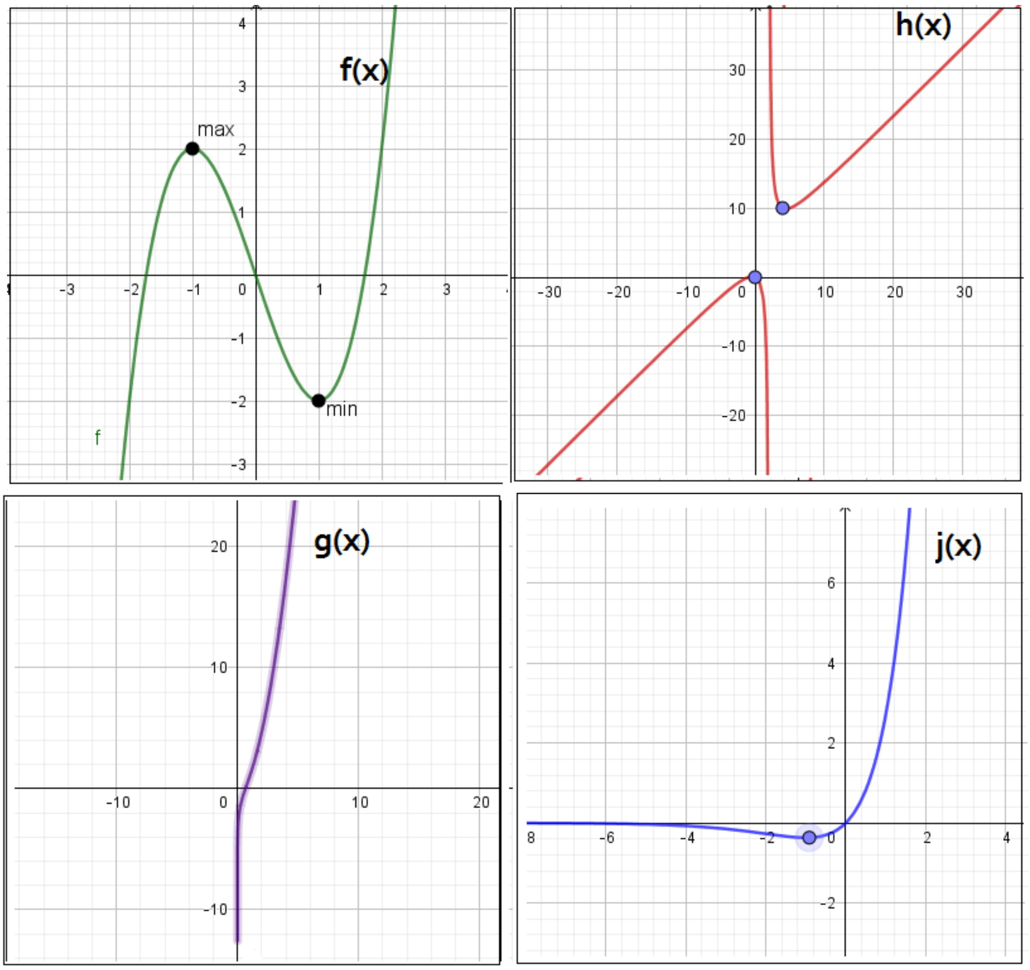
ii) $g'(2) = -27$, $g(2) = -11$.

iii) $h'(1) = \frac{4}{3}$, $h(1) = 2\ln(3)$.

iv) $i'(\pi) = 2$, $i(\pi) = 0$.

v) $j'(1) = 3$, $j(1) = 0$.

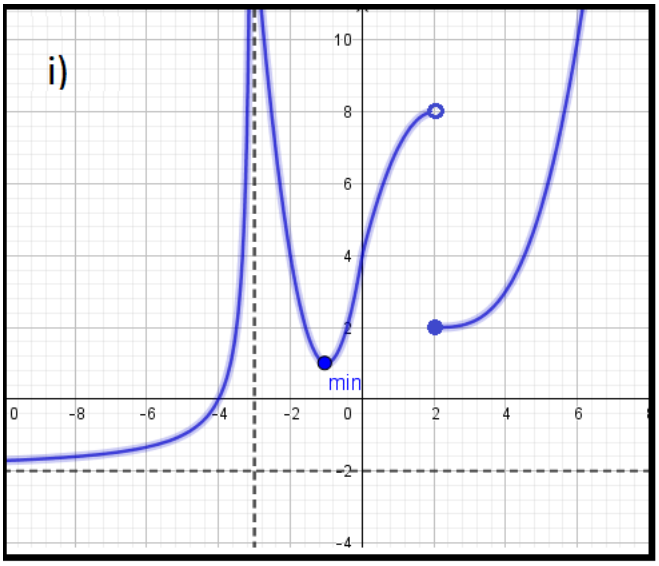
Ejercicio 6



Ejercicio 7 Para trazar una gráfica del inciso i), hacemos un resumen en el siguiente cuadro:

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
f'	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$
f''	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$

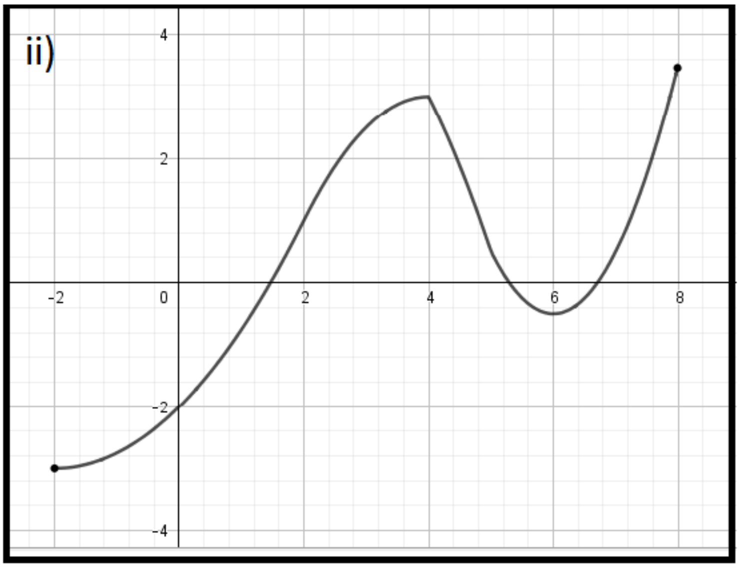
Teniendo en cuenta las demás condiciones que debe cumplir la función, un posible gráfico (no es el único) podría ser:



Para la gráfica del inciso ii), resumimos la información en el siguiente cuadro.

	$(-2,2)$	$(2,4)$	$(4,5)$	$(5,6)$	$(6,8)$
f'	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
f''	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$

Y a continuación un posible gráfico para f:



Ejercicio 8

i) Rta $= \dfrac{\pi}{2}\sin(x) + c$ (Directo)

ii) Rta $= \dfrac{2}{9}x^9 - \ln(x) + c$ (Directo)

iii) Rta $= \dfrac{\sin(3x)}{3} + c$ (Sustitución o directo)

iv) Rta $= -x\cos(x) + \sin(x) + c$ (Partes)

v) Rta $= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$ (2 veces partes)

vi) Rta $= \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^6}{6} + c$ (Directo)

vii) Rta $= \dfrac{(e^x - 3x^3)^6}{6} + c$ (Sustitución)

viii) Rta $= \dfrac{(\sin(x))^2}{2} + c$ (Sustitución)

ix) Rta $= (x+1) - \ln(x+1) + c$ (Sustitución)

x) Rta $= \ln(x^2 + x + 1) + c$ (Sustitución)

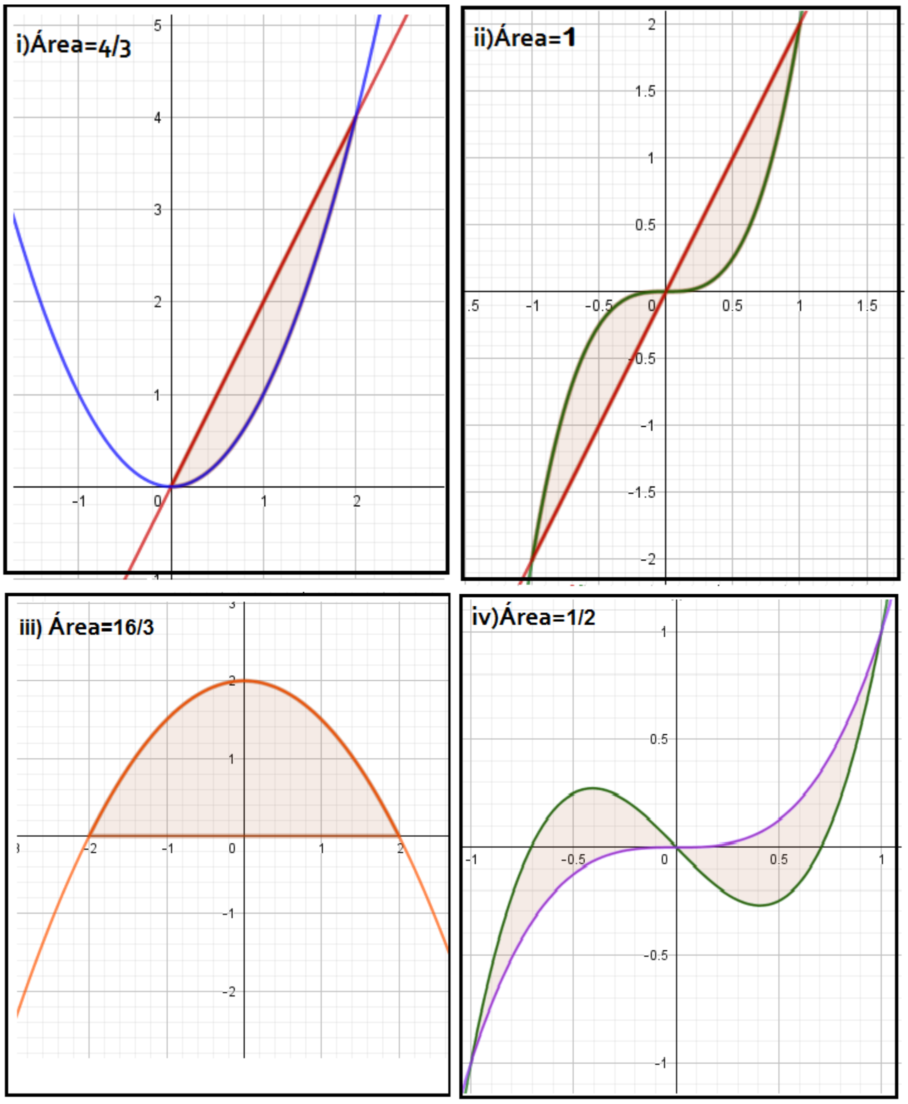
xi) Rta$= \dfrac{-2}{(\ln(x))^2} + c$ (Sustitución)

Ejercicio 9 i) Rta $= 100{,}66$. ii) Rta $= 2$. iii) Rta $= 0$. iv) Rta $= \dfrac{3}{5}\pi^5$.

v) Rta $= \ln(e^2+1) - \ln(2)$ (Sustitución). vi)Rta $= 34e^4 + 6$ (3 veces partes).

vii) Rta $= 8{,}44$. viii) Rta $= 2\sqrt{3} - 2$.

Ejercicio 10



7. Bibliografía

- **Carlino, Paula** (2005). Escribir, leer, y aprender en la universidad. Una introducción a la alfabetización académica. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.
- **Lang, Serge** (1990). Cálculo. Versión en español de Manuel López Mateos. Addison-Wesley Iberoamericana.
- **Smith, Robert and Minton, Roland** (2012). Calculus, fourth edition, McGraw-Hill. 2012
- **Stewart, James** (2013). Cálculo de una variable, Trascendentes tempranas. 8va edición. Cengage Learning.
- **Thomas, George** (2010). Cálculo una variable (decimosegunda edición), Pearson Educación.
- The Language of Functions and Graphs. (1985) University of Nottingham, Inglaterra: Shell Centre for Mathematical Education.

8. Les autores

Aloé, Félix Alejandro es Licenciado en Matemática por la Facultad de Ciencias Exactas UNLP y Especialista en Docencia Universitaria por la UNLP. Trabaja como profesor en las facultades de Ciencias Exactas, Ingeniería y Económicas de la UNLP. Desde hace 20 años es docente en diferentes asignaturas, relacionadas con la matemática, de las carreras que se estudian en estas facultades. Asimismo, forma parte de un grupo de investigación que indaga sobre afiliación universitaria e inclusión.

Calderón, Lucila Daniela es Doctora de la Facultad de Ciencias Exactas Área Matemática UNLP. Desde 2015, trabaja como Jefa de trabajos prácticos y ayudante diplomada en las facultades de Ciencias Exactas, Ingeniería, Informática y Ciencias Económicas de la UNLP, en materias de los primeros años relacionadas a Análisis Matemático I y II y Álgebra.

Kepes, Nicolás es Licenciado en Matemática por la Universidad Nacional de San Juan pero se desempeña como profesor en la Facultad de Informática de la UNLP donde además coordina la cátedra de Matemática 2. Si bien fue becario doctoral de CONICET y estudiante de la especialización en docencia universitaria, se dice que su formación actoral es lo destacable en sus clases.

Sottile, Cecilia Analía es Licenciada en Matemática por la Facultad de Ciencias Exactas y desarrolla sus tareas docentes en la UNLP en las facultades de Ciencias Exactas, Ingeniería, Informática y Ciencias Económicas. Desde hace más de 10 años y hasta el día de la fecha trabaja como docente universitaria desenvolviéndose como Ayudante Alumna, luego Diplomada, Jefa de trabajos prácticos y profesora de materias que se llevan a cabo en carreras de dichas facultades tales como, Análisis Matemático I, Álgebra y Geometría Analítica, Matemática A, Matemática I y Matemática II.

Libros de Cátedra

Al infinito y más allá : un primer encuentro con el análisis matemático / Félix Alejandro Aloé ... [et al.] ; contribuciones de Leandro Sebastián Mosco. - 1a ed. - La Plata : Universidad Nacional de La Plata ; EDULP, 2023.
Libro digital, PDF - (Libros de cátedra)

Archivo Digital: descarga
ISBN 978-950-34-2338-7

1. Análisis Matemático. 2. Cálculo. 3. Matemática. I. Aloé, Félix Alejandro. II. Mosco, Leandro Sebastián, colab.
CDD 515.2

Diseño de tapa: Dirección de Comunicación Visual de la UNLP

Universidad Nacional de La Plata – Editorial de la Universidad de La Plata
48 N.º 551-599 / La Plata B1900AMX / Buenos Aires, Argentina
+54 221 644 7150
edulp.editorial@gmail.com
www.editorial.unlp.edu.ar

Edulp integra la Red de Editoriales Universitarias Nacionales (REUN)

Primera edición, 2023
ISBN 978-950-34-2338-7

e
exactas

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE LA PLATA