



# CIRCUITOS Y SISTEMAS LINEALES

## Elementos de Análisis y Síntesis

Juan C. Barbero  
Fernando Issouribehere  
Pablo E. Leibovich

# Circuitos y Sistemas Lineales

## Elementos de Análisis y Síntesis

Juan C. Barbero

Fernando Issouribehere

Pablo E. Leibovich

Instituto de Investigaciones Tecnológicas  
para Redes y Equipos Eléctricos  
Facultad de Ingeniería  
Universidad Nacional de La Plata

## Información de Catalogación

Juan Carlos Barbero  
Circuitos y sistemas lineales. Elementos de análisis y síntesis. 1ª ed.  
Juan Carlos Barbero, Fernando Issouribehere, Pablo Ezequiel Leibovich.  
Quilmes Oeste: Juan Carlos Barbero, 2024.  
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga  
ISBN 978-631-00-2245-1

1. Análisis de Redes. I. Issouribehere, Fernando. II. Leibovich, Pablo Ezequiel. III. Título.  
CDD 537

Editor Juan Carlos Barbero. Quilmes Oeste, Buenos Aires, Argentina. Febrero 2024.

ISBN 978-631-00-2245-1

Queda hecho el depósito que establece la Ley 11.723.

---

# Prólogo

---

Este libro fue elaborado para la materia Circuitos y Sistemas Lineales que, conforme al Plan de Estudios 2018, corresponde al sexto semestre de las carreras de Ingeniería Electrónica, Ingeniería en Energía Eléctrica e Ingeniería en Telecomunicaciones del Departamento de Electrotecnia de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata.

Una característica muy importante de la actualidad académica de la Facultad de Ingeniería, es la concurrencia simultánea de estudiantes originales del plan de estudios del año 2018 y de estudiantes que originalmente se inscribieron en el plan de estudios del año 2002 y que han optado por cambiar al nuevo plan 2018. Para estos últimos, la equivalencia con esta materia es particularmente crítica, debido la redistribución que han sufrido algunos temas entre materias del cuarto, quinto y sexto semestre del Plan 2018.

Por otra parte, si bien la lectura de la bibliografía clásica es muy importante en la formación de un ingeniero, al promover el desarrollo de la capacidad de investigación bibliográfica, la comprensión de diferentes enfoques, la interpretación de diferentes notaciones, etc., cuando una materia posee un contenido tan amplio, ciertamente tiene un valor enorme para las/los estudiantes contar con una única fuente que contenga la totalidad del programa; y al presente no existe un único libro que lo abarque con la profundidad adecuada.

Esto impuso la necesidad de elaborar un libro en el cual la totalidad del alumnado encuentre todo el material necesario para comprender todos los temas contenidos en el programa de la materia. A tal fin, se crearon Apéndices con algunos temas afectados por la redistribución debida al cambio de plan, y que son requeridos para la correcta comprensión del contenido de la materia, ya sea para nivelar conocimientos, o como referencia para algunos temas puntuales.

La premisa fue por un lado, presentar los temas del programa de la materia con los fundamentos teóricos adecuados al nivel de conocimientos de las/los estudiantes y, por otro lado, ejemplificar con todo detalle la aplicación a la resolución de problemas prácticos de cada tema desarrollado.

No se puede omitir que pese a las sucesivas revisiones realizadas, podrían aún encontrarse errores u omisiones. Por tal motivo, los autores recomiendan, sin deslindar responsabilidad, que se realice la lectura de esta obra con espíritu crítico, agradeciendo a los lectores que los eventuales errores encontrados sean comunicados para su corrección en futuras revisiones.

Finalmente, los autores desean expresar su gratitud al Instituto de Investigaciones Tecnológicas para Redes y Equipos Eléctricos (IITREE) de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata, donde desarrollan su actividad profesional. Permanentemente, el IITREE promueve e incentiva la actividad docente de sus integrantes, poniendo a disposición infraestructura y recursos, y brindado incondicional apoyo a la dedicación a los cursos de grado y de posgrado y a la preparación de material didáctico, entre cuyos resultados se encuentra esta obra.



---

# Contenido

---

<b>Capítulo 1</b>	<b>Cuadripolos o Redes de dos Puertas</b>	<b>10</b>
<b>1.1.</b>	<b>Introducción</b>	<b>10</b>
<b>1.2.</b>	<b>Matrices características de cuadripolos</b>	<b>11</b>
1.2.1.	Simetría	12
1.2.2.	Cuadripolos balanceados o equilibrados	12
1.2.3.	Cuadripolos simétricos	13
1.2.4.	Cuadripolos asimétricos	13
1.2.5.	Cuadripolos antisimétricos	13
1.2.6.	Cuadripolos recíprocos o bilaterales	14
<b>1.3.</b>	<b>Matriz <math>Y</math> de admitancias en cortocircuito</b>	<b>14</b>
1.3.1.	Determinación analítica o experimental de los parámetros $y$	14
1.3.2.	Modelo circuital del cuadripolo empleando los parámetros $y$	15
<b>1.4.</b>	<b>Matriz <math>Z</math> de impedancias en circuito abierto</b>	<b>16</b>
1.4.1.	Determinación analítica o experimental de los parámetros $z$	16
1.4.2.	Modelo circuital del cuadripolo empleando los parámetros $z$	17
<b>1.5.</b>	<b>Relación entre los parámetros de las matrices <math>Z</math> e <math>Y</math></b>	<b>17</b>
<b>1.6.</b>	<b>Uso y aplicaciones de las matrices <math>Z</math> e <math>Y</math></b>	<b>18</b>
1.6.1.	Celdas $T$ y $\pi$	18
1.6.2.	Transformación $T - \pi$ ó estrella-triángulo	19
1.6.3.	Celda lattice o celosía	20
1.6.4.	Transformación de redes balanceadas a desbalanceadas	21
1.6.5.	Transformación de redes desbalanceadas a balanceadas	23
	<i>Teorema de Bartlett</i>	24
	<i>Aplicación del teorema de Bartlett para la transformación de redes desbalanceadas a balanceadas</i>	24
<b>1.7.</b>	<b>Matrices <math>H</math> y <math>G</math> o híbridas directa e inversa</b>	<b>26</b>
1.7.1.	Circuitos equivalentes de matrices híbridas con fuentes controladas	27
<b>1.8.</b>	<b>Matriz <math>T</math> de transmisión</b>	<b>29</b>
<b>1.9.</b>	<b>Uso y aplicaciones de la matriz de transmisión <math>T</math></b>	<b>32</b>
1.9.1.	Impedancia de entrada	32
	<i>Impedancia de entrada en vacío y en cortocircuito</i>	33

1.9.2.	Impedancia de salida.....	33
	<i>Impedancia de salida en vacío y en cortocircuito.....</i>	<i>34</i>
1.9.3.	Impedancias imagen .....	34
1.9.4.	Impedancia característica .....	35
1.9.5.	Transferencias de tensiones y corrientes .....	36
	<i>Cuadripolo pasivo y simétrico cargado con la impedancia característica .....</i>	<i>38</i>
1.9.6.	Equivalente de Thevenin a partir de la matriz de transmisión .....	39
<b>1.10.</b>	<b>Interconexión de cuadripolos.....</b>	<b>39</b>
1.10.1.	Conexión de cuadripolos en paralelo.....	40
	<i>Prueba de Brune .....</i>	<i>41</i>
1.10.2.	Conexión de cuadripolos en serie .....	45
	<i>Prueba de Brune .....</i>	<i>45</i>
1.10.3.	Conexión de cuadripolos en serie-paralelo.....	47
1.10.4.	Conexión de cuadripolos en paralelo-serie.....	48
1.10.5.	Cuadripolos en cascada.....	48
<b>1.11.</b>	<b>Redes iterativas .....</b>	<b>49</b>
<b>1.12.</b>	<b>Bibliografía .....</b>	<b>50</b>
<b>Capítulo 2</b>	<b>Redes Multipuerta .....</b>	<b>52</b>
<b>2.1.</b>	<b>Introducción .....</b>	<b>52</b>
<b>2.2.</b>	<b>Matriz de admitancias indefinida.....</b>	<b>53</b>
<b>2.3.</b>	<b>Relación entre la MAI y la matriz de admitancias en cortocircuito .....</b>	<b>55</b>
<b>2.4.</b>	<b>Operaciones con matrices de admitancias indefinidas .....</b>	<b>56</b>
2.4.1.	Unión de dos terminales .....	56
2.4.2.	Supresión de terminales .....	56
2.4.3.	Redes en paralelo.....	56
<b>2.5.</b>	<b>Bibliografía .....</b>	<b>56</b>
<b>Capítulo 3</b>	<b>Transferencia de Potencia.....</b>	<b>58</b>
<b>3.1.</b>	<b>Introducción .....</b>	<b>58</b>
<b>3.2.</b>	<b>Potencia instantánea y potencia media .....</b>	<b>58</b>
<b>3.3.</b>	<b>Potencia compleja.....</b>	<b>60</b>
<b>3.4.</b>	<b>Transferencia de potencia. Aspectos relacionados a su optimización.....</b>	<b>61</b>
3.4.1.	Corrección del factor de potencia.....	61
3.4.2.	Máxima transferencia de potencia .....	62
3.4.3.	Máxima eficiencia en la transferencia de potencia .....	64
<b>3.5.</b>	<b>Flujo de potencia .....</b>	<b>65</b>
3.5.1.	Potencia reflejada .....	65
3.5.2.	Coeficiente de reflexión .....	65
3.5.3.	Pérdida de inserción.....	66
<b>3.6.</b>	<b>Adaptación de impedancias .....</b>	<b>67</b>

3.6.1.	Adaptación con dos elementos en L .....	68
	<i>Consideraciones para el diseño</i> .....	68
3.6.2.	Adaptación con tres elementos en T y en $\Pi$ .....	72
<b>3.7.</b>	<b>Bibliografía</b> .....	<b>76</b>
<b>Capítulo 4 Síntesis de Dipolos LC.....</b>		<b>78</b>
4.1.	Introducción .....	78
4.2.	Realizabilidad de inmitancias <i>RLC</i> .....	78
4.3.	Propiedades de las inmitancias <i>RLC</i> de punto impulsor.....	79
4.4.	Realizabilidad de inmitancias terminales <i>LC</i> .....	81
4.5.	Propiedades de dipolos <i>LC</i> : funciones racionales reales positivas impares.....	82
4.6.	Teorema de Foster .....	82
4.7.	Síntesis de dipolos en las formas canónicas de Foster .....	83
4.8.	Remociones de polos de inmitancias de punto impulsor.....	85
4.8.1.	Remoción de un polo en el origen .....	85
4.8.2.	Remoción de un polo en infinito.....	86
4.8.3.	Remoción de un polo finito en el eje $j\omega$ . .....	87
4.9.	Desarrollo de Cauer. Formas canónicas tercera y cuarta .....	88
4.10.	Ejemplos de síntesis por el método de Cauer .....	91
4.10.1.	Síntesis por Cauer I.....	91
4.10.2.	Síntesis por Cauer II.....	93
4.11.	Bibliografía .....	96
<b>Capítulo 5 Síntesis de Cuadripolos LC Descargados .....</b>		<b>98</b>
5.1.	Introducción .....	98
5.2.	Matrices reales positivas.....	98
5.3.	Extensión del desarrollo de Foster a las redes <i>LC</i> de dos puertas .....	100
5.4.	Síntesis en cadena de una inmitancia terminal de un cuadripolo .....	101
5.5.	Propiedades de las inmitancias de transferencia de los cuadripolos <i>LC</i> .....	103
5.6.	Interpretación física de los polos y ceros de las inmitancias de transferencia .....	103
5.7.	Bases para un procedimiento de síntesis de la matriz especificada .....	104
5.8.	Cambio de nivel de admitancia e impedancia en los cuadripolos .....	105
5.9.	Síntesis de Redes <i>LC</i> en cadena .....	106
5.10.	Redes <i>LC</i> en cadena, con todos los ceros de $y_{21}$ en el infinito .....	107
5.11.	Redes <i>LC</i> en cadena, con todos los ceros de $y_{21}$ en el origen.....	111
5.12.	Redes <i>LC</i> en cadena, con ceros de $y_{21}$ en el origen y en el infinito .....	113
5.13.	Orden de realización de los ceros de $y_{21}$ en el origen e infinito. Redes asintóticas ...	116
5.14.	Cuadripolos con ceros de $y_{21}$ finitos sobre el eje $j\omega$ . Remociones parciales. ....	118

5.14.1.	Remoción parcial de un polo en el origen .....	118
5.14.2.	Remoción parcial de un polo en infinito .....	119
5.14.3.	Remoción parcial de un polo finito en el eje $j\omega$ .....	120
5.14.4.	Realización de ceros de transmisión finitos en el eje $j\omega$ .....	121
<b>5.15.</b>	<b>Síntesis de transferencias.....</b>	<b>128</b>
<b>5.16.</b>	<b>Bibliografía .....</b>	<b>130</b>
<b>Capítulo 6</b>	<b>Síntesis de Cuadripolos Cargados.....</b>	<b>132</b>
<b>6.1.</b>	<b>Introducción .....</b>	<b>132</b>
<b>6.2.</b>	<b>Diseño de cuadripolos cargados alimentados por un generador ideal.....</b>	<b>132</b>
<b>6.3.</b>	<b>Diseño de cuadripolos cargados alimentados por un generador real .....</b>	<b>138</b>
6.3.1.	Análisis de realizabilidad .....	140
6.3.2.	Procedimiento de síntesis .....	141
<b>6.4.</b>	<b>Bibliografía .....</b>	<b>145</b>
<b>Capítulo 7</b>	<b>Filtros. Normalizaciones y Aproximaciones.....</b>	<b>146</b>
<b>7.1.</b>	<b>Introducción .....</b>	<b>146</b>
<b>7.2.</b>	<b>Normalización de funciones de red .....</b>	<b>146</b>
7.2.1.	Normalización y desnormalización del nivel de impedancia .....	146
7.2.2.	Normalización y desnormalización de frecuencia .....	147
<b>7.3.</b>	<b>Características de amplitud de un filtro pasa bajos ideal.....</b>	<b>147</b>
<b>7.4.</b>	<b>Especificación de Filtros Pasa Bajos Reales.....</b>	<b>149</b>
7.4.1.	Especificación de la respuesta en frecuencia en términos de ganancia.....	150
7.4.2.	Especificación de la respuesta en frecuencia en términos de atenuación .....	151
<b>7.5.</b>	<b>Métodos de aproximación a las características de amplitud .....</b>	<b>152</b>
<b>7.6.</b>	<b>Aproximación de Butterworth .....</b>	<b>152</b>
7.6.1.	Aproximación de Butterworth a la característica de amplitud.....	153
7.6.2.	Patrón o plantilla de especificaciones.....	155
7.6.3.	Determinación de los parámetros de diseño.....	155
7.6.4.	Polinomios de Butterworth normalizados .....	157
7.6.5.	Comportamiento asintótico de la aproximación de Butterworth .....	159
<b>7.7.</b>	<b>Aproximación de Chebyshev .....</b>	<b>160</b>
7.7.1.	Aproximación de Chebyshev a la característica de amplitud .....	162
7.7.2.	Patrón o plantilla de especificaciones.....	165
7.7.3.	Determinación de los parámetros de diseño.....	166
7.7.4.	Polinomios de Chebyshev normalizados.....	166
7.7.5.	Comportamiento asintótico de la aproximación de Chebyshev.....	171
<b>7.8.</b>	<b>Bibliografía .....</b>	<b>171</b>
<b>Capítulo 8</b>	<b>Transformaciones de Frecuencia.....</b>	<b>172</b>
<b>8.1.</b>	<b>Introducción .....</b>	<b>172</b>

8.1.1.	Transformación proporcional a la frecuencia .....	173
8.1.2.	Transformación recíproca de la frecuencia .....	174
	<i>Transformación pasa bajos - pasa altos sin normalizar ni desnormalizar .....</i>	<i>174</i>
	<i>Transformación pasa bajos - pasa altos normalizando o desnormalizando .....</i>	<i>175</i>
	<i>Patrón o plantilla de especificaciones del filtro pasa altos .....</i>	<i>176</i>
8.1.3.	Transformación pasa bajos - pasa banda (y viceversa).....	180
	<i>Patrón o plantilla de especificaciones del filtro pasa banda .....</i>	<i>183</i>
8.1.4.	Transformación pasa bajos - suprime banda (y viceversa).....	185
	<i>Patrón o plantilla de especificaciones del filtro supresor de banda .....</i>	<i>187</i>
<b>8.2.</b>	<b>Topología de los distintos tipos de filtros LC .....</b>	<b>188</b>
<b>8.3.</b>	<b>Bibliografía .....</b>	<b>189</b>
<b>Capítulo 9</b>	<b>Filtros Pasivos .....</b>	<b>190</b>
<b>9.1.</b>	<b>Introducción .....</b>	<b>190</b>
<b>9.2.</b>	<b>Funciones de transferencia de los distintos tipos de filtros .....</b>	<b>190</b>
9.2.1.	Filtro pasa bajos .....	191
9.2.2.	Filtro pasa altos .....	192
9.2.3.	Filtro pasa banda .....	193
	<i>Relación entre <math>Q_p</math> y el ancho de banda de mitad de potencia.....</i>	<i>194</i>
	<i>Filtro pasa banda de cuarto orden .....</i>	<i>195</i>
9.2.4.	Filtro supresor de banda .....	197
<b>9.3.</b>	<b>Filtros pasivos RC .....</b>	<b>198</b>
9.3.1.	Filtro RCP pasa bajos elemental.....	198
9.3.2.	Filtro RCP pasa altos elemental.....	200
9.3.3.	Filtro RCP pasa banda elemental .....	201
9.3.4.	Filtro RCP supresor de banda elemental.....	203
9.3.5.	Filtro RCP de muesca doble T en paralelo.....	206
	<i>Procedimiento de diseño .....</i>	<i>208</i>
<b>9.4.</b>	<b>Filtros pasivos LC.....</b>	<b>210</b>
9.4.1.	Especificación del diseño .....	211
9.4.2.	Generalización del método de pérdidas de inserción .....	211
9.4.3.	Procedimiento de diseño .....	213
9.4.4.	Ejemplos de diseño .....	215
<b>9.5.</b>	<b>Bibliografía .....</b>	<b>245</b>
<b>Capítulo 10</b>	<b>Filtros Activos. Aspectos Generales y Síntesis. ....</b>	<b>246</b>
<b>10.1.</b>	<b>Introducción .....</b>	<b>246</b>
<b>10.2.</b>	<b>Diseño mediante celdas en cascada .....</b>	<b>246</b>
<b>10.3.</b>	<b>Celdas de primer orden con amplificadores operacionales .....</b>	<b>247</b>
10.3.1.	Celdas pasa bajos de primer orden.....	247
10.3.2.	Celdas pasa altos de primer orden.....	249
<b>10.4.</b>	<b>Celdas de segundo orden con amplificadores operacionales.....</b>	<b>251</b>

<b>10.5. Celdas con topología Sallen Key .....</b>	<b>252</b>
<i>Operación en condiciones ideales .....</i>	<i>253</i>
10.5.1. Filtro Sallen Key pasa bajos .....	254
<i>Estrategias de diseño.....</i>	<i>254</i>
<i>Operación en condiciones no ideales .....</i>	<i>260</i>
10.5.2. Filtro Sallen Key pasa altos.....	261
<i>Estrategias de diseño.....</i>	<i>262</i>
<i>Operación en condiciones no ideales .....</i>	<i>267</i>
10.5.3. Filtro Sallen Key pasa banda .....	268
<i>Celda Sallen Key pasa banda (Topología I).....</i>	<i>269</i>
<i>Procedimiento de diseño (Topología I).....</i>	<i>270</i>
<i>Celda Sallen Key pasa banda (Topología II).....</i>	<i>272</i>
<i>Procedimiento de diseño (Topología II).....</i>	<i>273</i>
10.5.4. Filtro Sallen Key supresor de banda.....	281
<i>Operación en condiciones ideales .....</i>	<i>283</i>
<i>Topología I.....</i>	<i>283</i>
<i>Topología II.....</i>	<i>283</i>
<i>Procedimiento de diseño .....</i>	<i>284</i>
<b>10.6. Aspectos acerca de la implementación de filtros activos.....</b>	<b>287</b>
10.6.1. Selección de componentes .....	288
<i>El amplificador operacional.....</i>	<i>288</i>
<i>Capacitores.....</i>	<i>288</i>
<i>Resistores.....</i>	<i>289</i>
10.6.2. Análisis de sensibilidad.....	289
<b>10.7. Bibliografía .....</b>	<b>291</b>
<b>Capítulo 11 Filtros Digitales. Introducción al Diseño. ....</b>	<b>294</b>
<b>11.1. Introducción .....</b>	<b>294</b>
<b>11.2. Procesamiento de señales digitales.....</b>	<b>295</b>
11.2.1. Conversión analógico-digital .....	295
11.2.2. Muestreo de señales analógicas .....	296
11.2.3. Cuantización de muestras .....	297
11.2.4. Propiedad de periodicidad de las exponenciales discretas .....	297
11.2.5. Solapamiento de frecuencias o “aliasing” .....	298
11.2.6. Caracterización de los sistemas discretos.....	298
<i>Respuesta al impulso.....</i>	<i>298</i>
<i>Respuesta en frecuencia de un sistema discreto.....</i>	<i>299</i>
<i>Función del sistema .....</i>	<i>300</i>
11.2.7. Señales causales y no causales .....	300
11.2.8. Características de los filtros ideales .....	301
<i>Filtro pasa bajos ideal.....</i>	<i>302</i>
<i>Filtro pasa altos ideal .....</i>	<i>303</i>
<i>Filtro pasa banda ideal.....</i>	<i>303</i>
<i>Filtro supresor de banda ideal.....</i>	<i>303</i>

<b>11.3. Filtros digitales no recursivos o filtros FIR .....</b>	<b>304</b>
11.3.1. Causalidad vs. no causalidad.....	306
11.3.2. Características de simetría de la respuesta al impulso.....	308
<i>Filtros Tipo 1.</i> .....	309
<i>Filtros Tipo 2.</i> .....	310
<i>Filtros Tipo 3.</i> .....	311
<i>Filtros Tipo 4.</i> .....	311
11.3.3. Diseño de filtros FIR .....	312
11.3.4. Diseño empleando ventanas.....	312
<i>Ventana de Kaiser.</i> .....	319
11.3.5. Estimación del orden de filtros FIR .....	320
11.3.6. Comentarios sobre las funciones de ventana.....	321
11.3.7. Procedimiento de diseño .....	323
11.3.8. Ejemplos de diseño .....	323
<b>11.4. Filtros digitales recursivos o filtros IIR.....</b>	<b>334</b>
<b>11.5. Métodos de diseño de filtros IIR .....</b>	<b>335</b>
11.5.1. Estimación del orden de filtros IIR .....	336
11.5.2. Método de la respuesta al impulso invariante .....	336
<i>Procedimiento de diseño</i> .....	340
11.5.3. Método de la respuesta al escalón invariante .....	346
11.5.4. Transformación bilineal.....	348
11.5.5. Incidencia de la predeformación en el orden del filtro .....	351
<i>Filtro pasa banda</i> .....	351
<i>Filtro supresor de banda</i> .....	352
11.5.6. Procedimiento de diseño .....	353
11.5.7. Ejemplos de diseño .....	354
<b>11.6. Selección entre filtros FIR y filtros IIR.....</b>	<b>373</b>
<b>11.7. Formas canónicas de realización de filtros digitales .....</b>	<b>374</b>
11.7.1. Forma de implementación directa.....	374
11.7.2. Forma de implementación en cascada .....	375
11.7.3. Forma de implementación en paralelo.....	375
<b>11.8. Bibliografía .....</b>	<b>376</b>
<b>Apéndice A Modelos del Transformador en bajas frecuencias .....</b>	<b>378</b>
<b>A.1. Introducción .....</b>	<b>378</b>
<b>A.2. Circuitos magnéticamente acoplados.....</b>	<b>378</b>
<b>A.3. Transformador ideal .....</b>	<b>380</b>
<b>A.4. Transformador real .....</b>	<b>382</b>
<b>A.5. Transformador perfecto.....</b>	<b>384</b>
<b>Apéndice B Resolución de circuitos aplicando Transformada de Laplace .....</b>	<b>388</b>
<b>B.1. Generalización de las leyes y teoremas de redes al dominio de Laplace.....</b>	<b>388</b>

B.2.	Respuesta obtenida en el dominio de Laplace.....	390
B.3.	Ejemplos de obtención de distintas funciones de red $H(s)$ .....	391
<b>Apéndice C Adaptación de impedancias .....</b>		<b>396</b>
C.1.	Introducción .....	396
C.2.	Adaptación con un elemento reactivo en serie .....	397
C.3.	Adaptación con un elemento reactivo en paralelo .....	398
C.4.	Adaptación con dos elementos en L.....	400
C.4.1.	Redes L para los casos en que $R_g < R_c$ .....	401
C.4.2.	Redes L para los casos en que $R_g > R_c$ .....	403
C.4.3.	Consideraciones para el diseño .....	405
C.5.	Adaptación con tres elementos en T y en $\Pi$ .....	407
C.6.	Bibliografía .....	410
<b>Apéndice D Valores normalizados de resistores y capacitores .....</b>		<b>412</b>
D.1.	Las series de valores normalizados (Series E) .....	412
D.2.	Relaciones entre los valores de una misma lista.....	415
D.3.	Script de Matlab.....	415
D.4.	Referencias .....	417
<b>Apéndice E El amplificador operacional.....</b>		<b>418</b>
E.1.	Introducción .....	418
E.2.	El AO ideal .....	418
E.3.	El AO “perfecto”.....	419
E.4.	El AO perfecto con realimentación negativa .....	420
E.5.	Configuraciones básicas del AO.....	421
E.5.1.	Amplificador no inversor.....	421
E.5.2.	Amplificador inversor.....	422
E.5.3.	Amplificador sumador inversor.....	423
E.5.4.	Amplificador diferencial.....	423
E.5.5.	Circuito Integrador inversor.....	424
E.5.6.	Circuito derivador.....	426
E.5.7.	Convertidor de resistencia negativa .....	427
E.6.	El AO real .....	428

---

# Capítulo 1

## Cuadripolos o Redes de dos Puertas

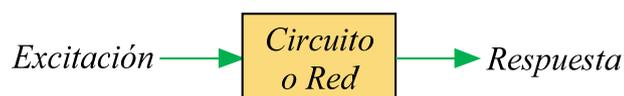
---

### 1.1. Introducción

En este texto se estudiarán redes o circuitos eléctricos de *parámetros concentrados*, que son aquéllas conformadas por la interconexión de elementos pasivos y activos mediante cables o *hilos de conexión* de resistencia nula. Los elementos pasivos pueden ser resistores, capacitores, inductores y transformadores, mientras que los elementos activos son generadores independientes o controlados de tensión o de corriente. La función básica de una red o circuito eléctrico es la transferencia de energía desde una parte de la red o circuito denominada *entrada* hacia otra parte de la red o circuito denominada *salida*.

El estudio de las redes o circuitos eléctricos abarca dos temáticas denominadas *análisis* y *síntesis* que se diferencian por el objetivo perseguido.

Para poder definir conceptualmente que es análisis y que es síntesis existen tres elementos clave a considerar que se muestran en la **Fig. 1.1**: una *excitación*, un *circuito o red* y una *respuesta*,



**Fig. 1.1.** Elementos clave para la definición de análisis y de síntesis.

El Análisis consiste en hallar la respuesta de una dada red o circuito a una excitación determinada. En cambio la Síntesis consiste en diseñar una red o circuito para que aplicada una dada excitación se obtenga una respuesta deseada.

Resulta evidente que la forma más lógica y ordenada para estudiar las redes o circuitos eléctricos comienza con el Análisis y finaliza con la Síntesis.

En el curso precedente se ha abordado el análisis de redes lineales mediante el planteo de las ecuaciones de tensiones de nodos y corrientes de mallas, y también se ha demostrado que cualquier red arbitraria, compuesta por fuentes y elementos pasivos, vista desde dos terminales puede representarse o *modelarse* por su circuito equivalente o *modelo* de Thevenin o de Norton. Aquí y en lo que sigue, se da por entendido que la corriente que *ingresa* a la red por uno de dichos terminales es igual a la corriente que *sale* de la red por el otro terminal, y viceversa. Siempre y cuando se cumpla esta condición, el par de terminales constituye una *puerta* de la red.

Consecuentemente se han podido ponderar los beneficios de representar una red por medio de su circuito equivalente o *modelo* de Thevenin o de Norton, cuando lo que interesa conocer es cómo interactúa esa red con su *exterior* (hacia afuera de la puerta o par de terminales), mientras que *no interesa* conocer lo que ocurre en el interior (hacia adentro de la puerta o par de terminales), y por lo tanto no se requiere conocer la distribución de los elementos o topología interna de la red.

Este antecedente permite comprender el interés en aplicar también el concepto de circuito equivalente a redes de dos puertas denominadas *cuadripolos*, lo cual admitiría tratar a esa red como una *caja negra*.

Más aún, se podría acceder a cualquier rama de la red agregando terminales al par de nodos que delimitan la rama en cuestión, y cada par de terminales formaría una *puerta de entrada o salida* a la red.

Una gran cantidad de redes de importancia e interés práctico pueden considerarse de dos puertas. Por ejemplo, en el modelado de dispositivos y circuitos electrónicos, redes de comunicaciones, de transmisión y distribución, etc. habitualmente resulta de interés analizar su comportamiento *de cara al exterior*, o bien, *de terminales hacia afuera*; es decir, interesa determinar la señal de salida a partir del conocimiento de la señal de entrada, mientras que el comportamiento interno de la misma se encuentra en un segundo orden de interés.

En una red bipuerta o cuadripolo existen cuatro variables de interés: tensión y corriente en la puerta de entrada y tensión y corriente en la puerta de salida (**Fig. 1.2**).



**Fig. 1.2.** Variables de un cuadripolo y convención de signos correspondientes.

El análisis de las redes bipuerta se efectúa por medio de matrices de parámetros que expresan la interdependencia de estas cuatro variables.

La teoría de los cuadripolos es muy atractiva y útil, porque permite tratar a una parte de la red como una caja negra, descrita por alguna matriz de parámetros, y el análisis se enfoca en su vínculo con el resto de la red, determinado por las cuatro variables (tensiones y corrientes en las dos puertas). La topología real de los elementos en el interior del cuadripolo no reviste verdadero interés, en principio, para los circuitos conectados de terminales *hacia afuera*.

## 1.2. Matrices características de cuadripolos

En este curso se estudiarán circuitos o redes *lineales y pasivas* (asumiendo como tales, aún aquellas dotadas de generadores *dependientes*) que pueden estar constituidas por *inductores* de inductancia  $L$  [H] invariable en el tiempo, *capacitores* de capacidad  $C$  [F] invariable en el tiempo, *resistores* de resistencia  $R$  [ $\Omega$ ] invariable en el tiempo y transformadores de relación de transformación  $n$  invariable en el tiempo.

Para tales redes, se pueden establecer dos expresiones lineales que relacionan a las cuatro variables del cuadripolo.

$$W_1 = \alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2$$

$$W_2 = \alpha_{21}X_1 + \alpha_{22}X_2$$

$X_i$  y  $W_j$  son variables que representan tensiones o corrientes, pudiendo corresponder a cualquiera de las variables indicadas en la **Fig. 1.2.**, donde se indican las convenciones de signos positivos para tensiones y corrientes.

$X_1$  y  $X_2$  son variables independientes, es decir, las *variables de entrada* o las *excitaciones* de la red representada por el cuadripolo y  $W_1$  y  $W_2$  son variables dependientes, es decir, las *variables de salida* o las *respuestas*.

De manera tal que las cuatro variables indicadas en la **Fig. 1.2.**, un par cualquiera puede considerarse como variables independientes, y el par restante como variables dependientes. Así, resultan 6 posibles pares de variables independientes y, para cada uno, el par de variables dependientes se podrá expresar como combinación lineal de las restantes.

Un aspecto muy importante es que las expresiones lineales anteriores son válidas tanto en el dominio del tiempo, como en el dominio de la frecuencia compleja  $s$  o dominio de Laplace, por la propiedad de linealidad y superposición de la transformada de Laplace.

En el dominio del tiempo para régimen sinusoidal permanente las variables de entrada y de salida son variables fasoriales.

Los parámetros  $\alpha_{ij}$  tanto en el dominio del tiempo para régimen sinusoidal permanente, como en el dominio

de Laplace dependen exclusivamente de los valores  $R, L, C$  y eventualmente de los elementos del modelo equivalente del transformador. Además, según sean las variables que se adopten como variables de entrada y de salida, los  $\alpha_{ij}$  reciben nombres diferentes, y se determinan a partir de las ecuaciones anteriores, anulando en cada una, sucesivamente una de las variables independientes:

$$\alpha_{11} = \left. \frac{W_1}{X_1} \right|_{X_2=0} \quad \alpha_{12} = \left. \frac{W_1}{X_2} \right|_{X_1=0} \quad \alpha_{21} = \left. \frac{W_2}{X_1} \right|_{X_2=0} \quad \alpha_{22} = \left. \frac{W_2}{X_2} \right|_{X_1=0} \quad (1-1)$$

Las ecuaciones escritas en forma matricial resultan:

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \mathbf{W} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{X}$$

siendo:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad \text{matriz de las excitaciones (matriz columna).}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \quad \text{matriz de las respuestas (matriz columna).}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \quad \text{matriz de parámetros del cuadripolo (matriz cuadrada).}$$

En concordancia con lo mencionado para los parámetros individuales  $\alpha_{ij}$ , según sean las variables de entrada y de salida elegidas la matriz  $\boldsymbol{\alpha}$  recibe nombres diferentes.

Es importante a tener en cuenta que, para determinar la matriz  $\boldsymbol{\alpha}$  del cuadripolo, puede no ser estrictamente necesario determinar sus 4 parámetros  $\alpha_{ij}$ , dependiendo de las características topológicas y eléctricas del cuadripolo.

Dichas características se definen a continuación.

### 1.2.1. Simetría.

Desde el punto de vista de la topología de una red, en general se definen dos tipos de simetría: la *simetría balanceada* que se define respecto de un eje de simetría *horizontal*, y la *simetría de transferencia* que se define respecto de un eje de simetría *vertical*.

En la *simetría balanceada*, la parte superior del circuito (respecto del eje de simetría horizontal) es igual a la inferior; y en la *simetría de transferencia*, la mitad (respecto del eje de simetría vertical) vista desde la entrada, es igual a la otra mitad vista desde la salida.

Los circuitos que presentan ambas simetrías suelen denominarse de *doble simetría*.

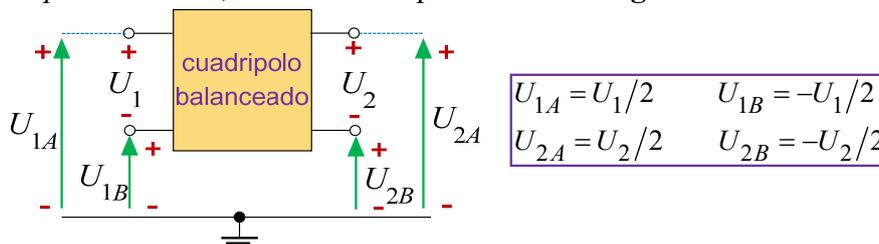
Algunos autores hacen esta distinción definiendo *cuadripolos balanceados* o *equilibrados* por un lado, *cuadripolos simétricos* por el otro.

### 1.2.2. Cuadripolos balanceados o equilibrados

Los cuadripolos balanceados o equilibrados son los que tienen simetría balanceada. Si no la tienen, se dicen no-balanceados o desbalanceados.

Esta clasificación se refiere a la topología de la red representada por el cuadripolo.

Los cuadripolos balanceados o equilibrados carecen de la conexión común entre la entrada y la salida, y son redes *equilibradas respecto a tierra*, tal como se representa en la **Fig. 1.3**.



**Fig. 1.3.** Cuadripolo sin conexión común entre ambas puertas. Condiciones de balance.

Para las tensiones indicadas en la **Fig. 1.3** las condiciones de balance serían:  $U_{1A} = -U_{1B}$  y  $U_{2A} = -U_{2B}$  con lo cual resultan las relaciones de tensiones indicadas en la figura.

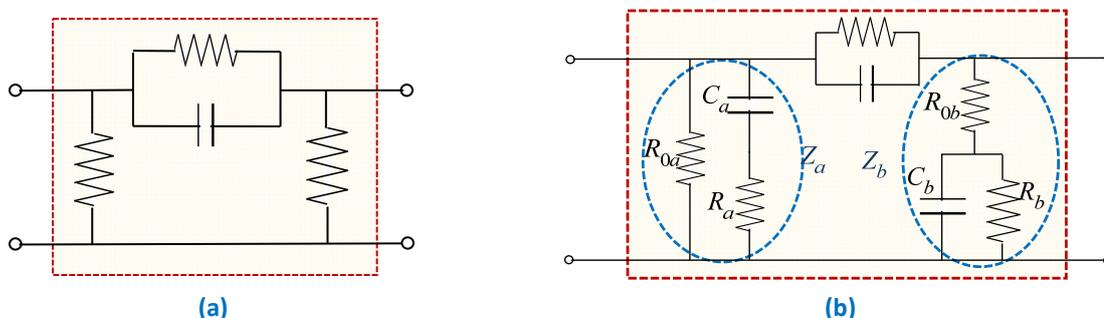
Las redes equilibradas se emplean en numerosas aplicaciones. Por ejemplo, las líneas telefónicas se hacen equilibradas respecto a tierra (o masa), para que los ruidos presentes en la línea (que aparecen como tensiones de modo común sobre ambos terminales de la red) no afecten a la información, que es transmitida como la tensión de modo diferencial entre ambos hilos.

Los cuadripolos en los que existe *un terminal común entre la entrada y la salida*, como por ejemplo los de la **Fig. 1.4**, pueden ser vistos como redes “de tres terminales”, y se denominan cuadripolos (o redes o circuitos) *no equilibrados*. Las redes no equilibradas se utilizan en sistemas puestos a tierra, como lo son las redes en cadena o escalera, y en ellas las tensiones de entrada y salida están referidas al mismo valor (normalmente tierra o masa) al cual está conectado el terminal común.

### 1.2.3. Cuadripolos simétricos

Los cuadripolos simétricos son los que tienen simetría de transferencia. Es decir, su *funcionamiento resulta indistinto si se intercambian las puertas de entrada y de salida*.

La simetría de transferencia puede ser eléctrica y topológica, es decir, igual impedancia e igual configuración del cuadripolo visto desde ambos terminales de entrada (**Fig. 1.4a**); o solamente eléctrica, es decir, igual impedancia pero distinta configuración del cuadripolo visto desde ambos terminales de entrada (**Fig. 1.4b**).



**Fig. 1.4.** Cuadripolos simétricos. **(a)** Simetría topológica. **(b)** Simetría eléctrica.

En la **Fig. 1.4b**, la condición de simetría es que  $Z_a = Z_b$ , siendo:

$$Z_a = \frac{R_{0a}(1 + sC_a R_a)}{1 + sC_a(R_{0a} + R_a)} \quad Z_b = \frac{(R_{0b} + R_b) \left( 1 + sC_b \frac{R_{0b} R_b}{R_{0b} + R_b} \right)}{1 + sC_b R_b}$$

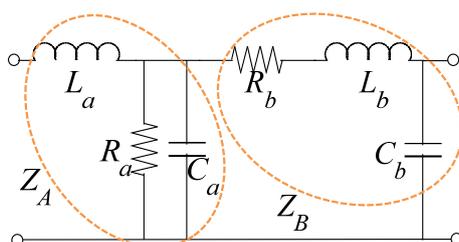
### 1.2.4. Cuadripolos asimétricos

Por contraposición, las redes *asimétricas* son cuadripolos cuyas impedancias de entrada para ambas puertas son distintas.

### 1.2.5. Cuadripolos antisimétricos

Los cuadripolos antisimétricos son aquéllos en los que se puede trazar una línea divisoria interna tal que el cuadripolo, visto *desde cada puerta*, queda dividido en dos circuitos *duales*.

Para determinados valores de los componentes, las impedancias de entrada y de salida son duales ( $Z_A Z_B = 1$ ). En la **Fig. 1.5** se muestra una configuración antisimétrica.



**Fig. 1.5.** Cuadripolo antisimétrico.

Del circuito de la **Fig. 1.5** se deduce que:

$$Z_A = \frac{s^2 L_a C_a R_a + s L_a + R_a}{1 + s C_a R_a} \quad \text{y} \quad Y_B = \frac{s^2 \frac{L_b C_b}{R_b} + s C_b + \frac{1}{R_b}}{1 + s \frac{L_b}{R_b}}$$

Y para lograr  $Z_A Z_B = 1$ , los valores de los componentes deben ser tales que:

$$R_a = \frac{1}{R_b} \quad L_a = C_b \quad C_a = L_b = 1$$

### 1.2.6. Cuadripolos recíprocos o bilaterales

El teorema de reciprocidad establece que si en una red *pasiva y lineal* se aplica una tensión  $U$  en una rama 1, obteniendo una corriente  $I$  en una rama 2, entonces al aplicar la tensión  $U$  en la rama 2 se obtendrá la misma corriente  $I$  en la rama 1. Y del mismo modo si se cambian tensiones por corrientes y viceversa.

Por lo tanto *cualquier cuadripolo que sólo contenga elementos pasivos y lineales (es decir resistencias, inductancias, capacidades y bobinas acopladas), es recíproco o bilateral.*

### 1.3. Matriz Y de admitancias en cortocircuito

Sea el cuadripolo de la **Fig. 1.2**, donde se indican las convenciones de signos positivos para tensiones y corrientes, y sean las variables de entrada las tensiones  $u_1$  y  $u_2$  y las variables de salida las corrientes  $i_1$  e  $i_2$ . Las corrientes y tensiones en general se expresarán según sus correspondientes transformadas de Laplace, y en el caso particular de excitación sinusoidal en régimen permanente, según los correspondientes fasores.

Las ecuaciones del cuadripolo en el dominio de Laplace para este caso resultan:

$$\begin{aligned} I_1(s) &= y_{11}(s)U_1(s) + y_{12}(s)U_2(s) \\ I_2(s) &= y_{21}(s)U_1(s) + y_{22}(s)U_2(s) \end{aligned} \quad (1-2)$$

Que, en notación matricial, resulta:

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

O de manera más general:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{U} \quad (1-3)$$

Donde  $\mathbf{Y}$  es la matriz de admitancias en cortocircuito, cuyo determinante resulta:

$$|\mathbf{Y}| = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21} \quad (1-4)$$

Y los parámetros  $y_{11}$ ,  $y_{12}$ ,  $y_{21}$ ,  $y_{22}$  son *las admitancias en cortocircuito* (abreviadamente *parámetros y*) y la definición de cada uno surge directamente de anular una de las tensiones en las ecuaciones (1-2):

$$\begin{aligned} y_{11}(s) &= \left. \frac{I_1(s)}{U_1(s)} \right|_{U_2(s)=0} && \text{Admitancia de entrada, con salida en cortocircuito} \\ y_{12}(s) &= \left. \frac{I_1(s)}{U_2(s)} \right|_{U_1(s)=0} && \text{Admitancia de transferencia entrada-salida, con entrada en cortocircuito o Admitancia de } \textit{transferencia directa} \textit{ en cortocircuito} \\ y_{21}(s) &= \left. \frac{I_2(s)}{U_1(s)} \right|_{U_2(s)=0} && \text{Admitancia de transferencia salida-entrada, con salida en cortocircuito o Admitancia de } \textit{transferencia inversa} \textit{ en cortocircuito} \\ y_{22}(s) &= \left. \frac{I_2(s)}{U_2(s)} \right|_{U_1(s)=0} && \text{Admitancia de salida, con entrada en cortocircuito} \end{aligned} \quad (1-5)$$

#### 1.3.1. Determinación analítica o experimental de los parámetros y

Para obtener las expresiones de los parámetros de la matriz admitancia en cortocircuito de un dado circuito, se debe tener en cuenta que las *variables independientes* o de entrada son *las tensiones*. Por lo tanto deben

ser las variables de suministro de generadores independientes. Mientras que las *variables dependientes* o de salida, que son *las corrientes*, serán las variables *a medir* o *a determinar*.

Como regla general, para la determinación de cualquiera de los parámetros  $y_{ij}$ , debe considerarse como punto de partida su definición, e interpretarla como se indica en la **Fig. 1.6**.

$$y_{ij} = \frac{I_i(s)}{U_j(s)} \Big|_{U_i(s)=0}$$

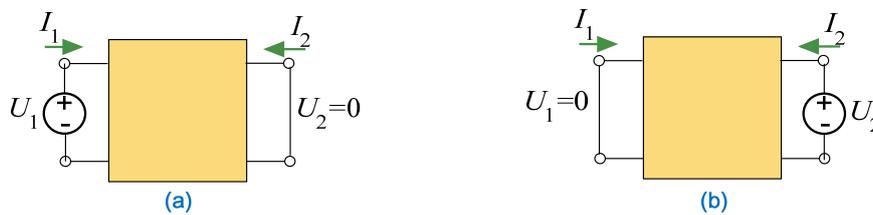
Variable a medir o determinar (en la puerta de salida)

Señal a inyectar (generador independiente en la puerta de entrada)

Condición para la puerta de salida

**Fig. 1.6.** Definición de los parámetros  $y$ .

Con base en esta premisa, los parámetros admitancia en cortocircuito se obtienen con los circuitos de la **Fig. 1.7**. El circuito de la **Fig. 1.7a** es el que debe emplearse para determinar  $y_{11}$  e  $y_{21}$ , mientras que para determinar  $y_{12}$  e  $y_{22}$ , se debe emplear el circuito de la **Fig. 1.7b**.



**Fig. 1.7.** Determinación analítica o experimental de los parámetros  $y$ .

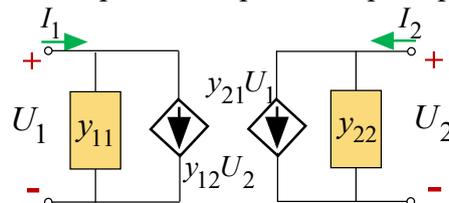
Para cuadripolos pasivos, que son *recíprocos* o *bilaterales*, resulta  $y_{12} = y_{21}$ , y por lo tanto la matriz  $\mathbf{Y}$  resulta simétrica respecto de la diagonal principal.

Para cuadripolos *simétricos*  $y_{11} = y_{22}$  y para cuadripolos *asimétricos*  $y_{11} \neq y_{22}$ .

Por lo tanto, si un cuadripolo es recíproco y simétrico sólo serían requeridos *dos* parámetros para definir completamente a la matriz  $\mathbf{Y}$ , mientras que si es recíproco y asimétrico, serían requeridos *tres* parámetros.

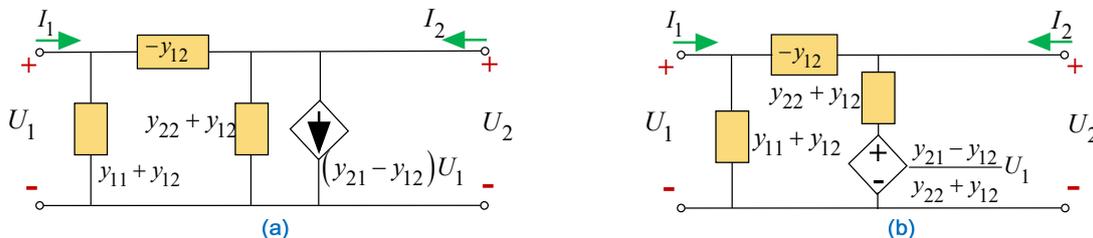
### 1.3.2. Modelo circuital del cuadripolo empleando los parámetros $y$

En **Fig. 1.8** se muestra un modelo circuital que representa al cuadripolo mediante los parámetros  $y$  con dos fuentes controladas. Por simple inspección puede comprobarse que reproduce las ecuaciones (1-2).



**Fig. 1.8.** Modelo circuital del cuadripolo empleando parámetros  $y$ .

En **Fig. 1.9** se muestran otros circuitos equivalentes que emplean una única fuente controlada.



**Fig. 1.9.** Modelos circuitales empleando parámetros  $y$  con una única fuente controlada: **(a)** de corriente; **(b)** de tensión.

El circuito de la **Fig. 1.9a** es equivalente al de la **Fig. 1.8**, y por lo tanto también reproduce las ecuaciones (1-2). En efecto, planteando las ecuaciones de las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  en la **Fig. 1.9a** resulta:

$$I_1 = (y_{11} + y_{12})U_1 - y_{12}(U_1 - U_2)$$

$$I_2 = (y_{21} - y_{12})U_1 - (-y_{12})(U_1 - U_2) + (y_{22} + y_{12})U_2$$

Siendo muy simple de comprobar que se reducen a las expresiones (1-2).

El circuito de la **Fig. 1.9b** es el equivalente de Thevenin de la **Fig. 1.9a**, y por lo tanto también reproduce las ecuaciones (1-2).

**1.4. Matriz Z de impedancias en circuito abierto**

De manera similar al caso anterior, considerando como variables independientes las corrientes en ambas puertas, y como variables dependientes las tensiones, las ecuaciones del cuadripolo en el dominio de Laplace para este caso resultan:

$$\begin{aligned} U_1(s) &= z_{11}(s) I_1(s) + z_{12}(s) I_2(s) \\ U_2(s) &= z_{21}(s) I_1(s) + z_{22}(s) I_2(s) \end{aligned} \tag{1-6}$$

Que, en notación matricial, resulta:

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) \\ z_{21}(s) & z_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}$$

O de manera más general:

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} \tag{1-7}$$

Donde **Z** es la matriz de impedancias en circuito abierto, cuyo determinante resulta:

$$|\mathbf{Z}| = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21} \tag{1-8}$$

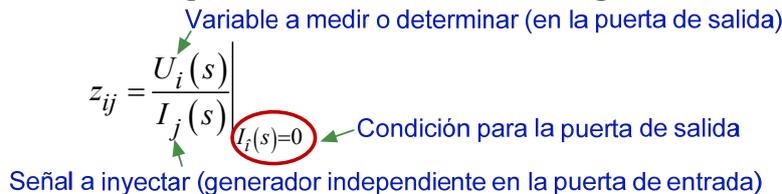
Y los parámetros  $z_{11}$ ,  $z_{12}$ ,  $z_{21}$ ,  $z_{22}$ , son las impedancias en circuito abierto (abreviadamente *parámetros z*) y la definición de cada uno surge directamente de anular una de las corrientes en las ecuaciones (1-6):

$$\begin{aligned} z_{11}(s) &= \left. \frac{U_1(s)}{I_1(s)} \right|_{I_2(s)=0} && \text{Impedancia de entrada, con salida en circuito abierto} \\ z_{12}(s) &= \left. \frac{U_1(s)}{I_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} && \text{Impedancia de transferencia entrada-salida, con entrada en circuito abierto o Impedancia de } \textit{transferencia directa} \text{ en circuito abierto} \\ z_{21}(s) &= \left. \frac{U_2(s)}{I_1(s)} \right|_{I_2(s)=0} && \text{Impedancia de transferencia salida-entrada, con salida en circuito abierto o Admitancia de } \textit{transferencia inversa} \text{ en circuito abierto} \\ z_{22}(s) &= \left. \frac{U_2(s)}{I_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} && \text{Impedancia de salida, con entrada en circuito abierto} \end{aligned} \tag{1-9}$$

**1.4.1. Determinación analítica o experimental de los parámetros z**

Para obtener las expresiones de los parámetros de la matriz impedancia de circuito abierto de un dado circuito, se debe tener en cuenta que las *variables independientes* o de entrada son *las corrientes*. Por lo tanto deben ser las variables de suministro de generadores independientes. Mientras que las *variables dependientes* o de salida, que son *las tensiones*, serán las variables *a medir* o *a determinar*.

Como regla general, para la determinación de cualquiera de los parámetros  $z_{ij}$ , debe considerarse como punto de partida su definición, e interpretarla como se indica en la **Fig. 1.10**.



**Fig. 1.10.** Definición de los parámetros z.

Con base en esta premisa, los parámetros impedancia de circuito abierto se obtienen con los circuitos de la **Fig. 1.11**. El circuito de la **Fig. 1.11a** es el que debe emplearse para determinar  $z_{11}$  y  $z_{21}$ , mientras que para determinar  $z_{12}$  y  $z_{22}$ , se debe emplear el circuito de la **Fig. 1.11b**.

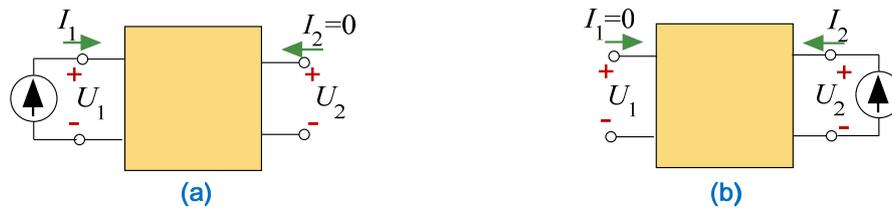


Fig. 1.11. Determinación analítica o experimental de los parámetros  $z$ .

Para cuadripolos pasivos, que son *recíprocos* o *bilaterales*, resulta  $z_{12} = z_{21}$ , y por lo tanto la matriz  $\mathbf{Z}$  resulta simétrica respecto de la diagonal principal.

Para cuadripolos *simétricos*  $z_{11} = z_{22}$  y para cuadripolos *asimétricos*  $z_{11} \neq z_{22}$ .

Por lo tanto, si un cuadripolo es recíproco y simétrico sólo serían requeridos *dos* parámetros para definir completamente a la matriz  $\mathbf{Z}$ , mientras que si es recíproco y asimétrico, serían requeridos *tres* parámetros.

### 1.4.2. Modelo circuital del cuadripolo empleando los parámetros $z$

En Fig. 1.12 se muestra un circuito que reproduce las ecuaciones (1-6) haciendo uso de dos fuentes controladas y que por lo tanto resulta equivalente al cuadripolo.

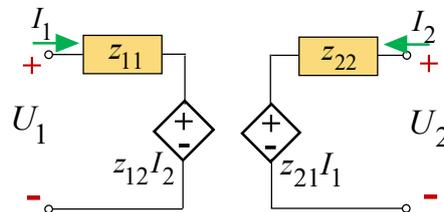


Fig. 1.12. Modelo circuital del cuadripolo empleando parámetros  $z$ .

En Fig. 1.13 se muestran otros circuitos equivalentes que emplean una única fuente controlada.

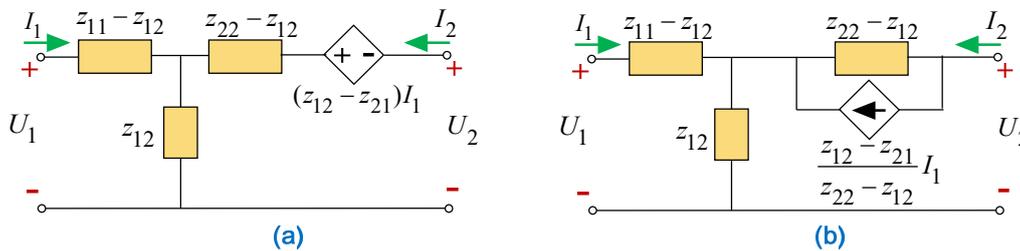


Fig. 1.13. Modelos circuitales empleando parámetros  $y$  con una única fuente controlada: (a) de tensión; (b) de corriente.

El circuito de la Fig. 1.13a es equivalente al de la Fig. 1.12, y por lo tanto también reproduce las ecuaciones (1-2). En efecto, planteando las ecuaciones de las tensiones  $U_1$  y  $U_2$  para la Fig. 1.13a resulta:

$$U_1 = (z_{11} - z_{12})I_1 + z_{12}(I_1 + I_2)$$

$$U_2 = z_{12}(I_1 + I_2) + (z_{22} - z_{12})I_2 - (z_{12} - z_{21})I_1$$

Siendo muy simple de comprobar que se reducen a las expresiones (1-6).

El circuito de la Fig. 1.13b es el equivalente de Norton de la Fig. 1.13a, y por lo tanto también reproduce las ecuaciones (1-6).

### 1.5. Relación entre los parámetros de las matrices $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$

De las expresiones (1-3) y (1-7) se deduce que las matrices  $\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{Y}$  son inversas. Entonces:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{Z}|} \begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}$$

Resultando:

$$|\mathbf{Y}| = \frac{1}{|\mathbf{Z}|}$$

Es decir:

$$|\mathbf{Y}| \cdot |\mathbf{Z}| = 1$$

También puede encontrarse la relación entre los parámetros de ambas matrices  $\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{Y}$ , aplicando la definición de los parámetros de la matriz  $\mathbf{Z}$  en el circuito equivalente de la **Fig. 1.8**. De este modo resulta:

$$z_{11} = \frac{y_{22}}{|\mathbf{Y}|} \quad z_{12} = \frac{-y_{12}}{|\mathbf{Y}|} \quad z_{22} = \frac{y_{11}}{|\mathbf{Y}|} \quad z_{21} = \frac{-y_{21}}{|\mathbf{Y}|} \quad (1-10)$$

Del mismo modo, aplicando la definición de los parámetros de la matriz  $\mathbf{Y}$  en el circuito equivalente de la **Fig. 1.12** pueden encontrarse las expresiones que relacionan los parámetros de ambas matrices  $\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{Y}$ :

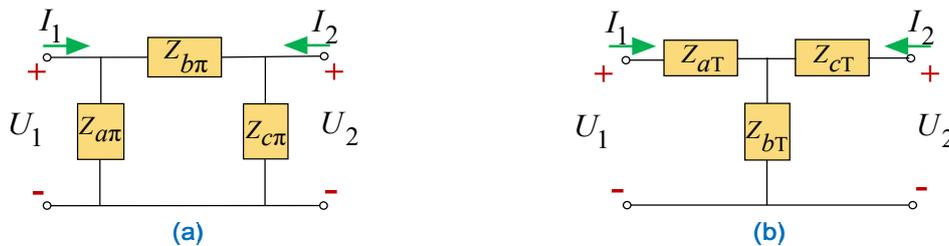
$$y_{11} = \frac{z_{22}}{|\mathbf{Z}|} \quad y_{12} = \frac{-z_{12}}{|\mathbf{Z}|} \quad y_{22} = \frac{z_{11}}{|\mathbf{Z}|} \quad y_{21} = \frac{-z_{21}}{|\mathbf{Z}|} \quad (1-11)$$

### 1.6. Uso y aplicaciones de las matrices $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$

En este apartado se presentan definiciones, características, tipos de celdas elementales que en todos los casos pueden analizarse y representarse de la mejor manera empleando las matrices  $\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{Y}$ .

#### 1.6.1. Celdas T y $\pi$

Las redes recíprocas, por estar constituidas exclusivamente por elementos pasivos, pueden modelarse *sin* fuentes controladas mediante los circuitos elementales o *celdas* que se muestran en la **Fig. 1.14**.



**Fig. 1.14.** Celdas elementales para representar redes recíprocas: (a) celda  $\pi$ ; (b) celda T.

La topología del circuito de la **Fig. 1.14a** se denomina  $\Pi$  ó  $\Delta$  ó *triángulo* y la del circuito de la **Fig. 1.14b** se denomina T ó *estrella*.

Las matrices de las celdas T y  $\Pi$  equivalentes resultan de aplicar la definición de cada parámetro a los circuitos de la **Fig. 1.14**:

$$\mathbf{Y}_\pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_{a\pi}} + \frac{1}{Z_{b\pi}} & -\frac{1}{Z_{b\pi}} \\ -\frac{1}{Z_{b\pi}} & \frac{1}{Z_{b\pi}} + \frac{1}{Z_{c\pi}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}_\pi = \begin{bmatrix} \frac{Z_{a\pi}Z_{b\pi} + Z_{a\pi}Z_{c\pi}}{Z_{a\pi} + Z_{b\pi} + Z_{c\pi}} & \frac{1}{\frac{1}{Z_{c\pi}} + \frac{1}{Z_{a\pi} + Z_{b\pi}}} \cdot \frac{Z_{a\pi}}{Z_{a\pi} + Z_{b\pi}} \\ \frac{1}{\frac{1}{Z_{a\pi}} + \frac{1}{Z_{b\pi} + Z_{c\pi}}} \cdot \frac{Z_{c\pi}}{Z_{b\pi} + Z_{c\pi}} & \frac{Z_{a\pi}Z_{c\pi} + Z_{b\pi}Z_{c\pi}}{Z_{a\pi} + Z_{b\pi} + Z_{c\pi}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}_T = \begin{bmatrix} Z_{aT} + Z_{bT} & Z_{bT} \\ Z_{bT} & Z_{bT} + Z_{cT} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_T = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_{aT} + \frac{1}{\frac{1}{Z_{bT}} + \frac{1}{Z_{cT}}}} & \frac{-1}{Z_{cT} + \frac{1}{\frac{1}{Z_{aT}} + \frac{1}{Z_{bT}}}} \cdot \frac{1}{Z_{aT} + \frac{1}{Z_{bT}}} \cdot \frac{1}{Z_{aT}} \\ \frac{-1}{Z_{aT} + \frac{1}{\frac{1}{Z_{bT}} + \frac{1}{Z_{cT}}}} \cdot \frac{1}{Z_{bT} + \frac{1}{Z_{cT}}} \cdot \frac{1}{Z_{cT}} & \frac{1}{Z_{cT} + \frac{1}{\frac{1}{Z_{aT}} + \frac{1}{Z_{bT}}}} \end{bmatrix}$$

Ambos modelos de la **Fig. 1.14** son representaciones únicas para redes recíprocas. Es decir, toda red recíproca tiene una y sólo una red T equivalente que consta sólo de elementos pasivos y sólo una red  $\Pi$  equivalente con elementos pasivos exclusivamente.

### 1.6.2. Transformación T - $\pi$ ó estrella-triángulo

De acuerdo a lo mencionado al final del apartado anterior:

*Toda red T que conste sólo de elementos pasivos tiene una red  $\Pi$  equivalente también pasiva, y viceversa.*

La transformación T a  $\Pi$  y viceversa es también conocida como transformación *estrella-triángulo*, y se puede deducir a partir del planteo de las matrices  $\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{Y}$  de los circuitos de la **Fig. 1.14** los cuales se suponen equivalentes entre sí de terminales hacia afuera.

La condición de equivalencia entre ambos circuitos, queda completamente descripta por:

$$\mathbf{Y}_\pi = \mathbf{Y}_T \quad (1-12)$$

$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_\pi$$

Las igualdades en expresiones (1-12) se aplican a los correspondientes parámetros de las matrices. Entonces para el caso de las matrices  $\mathbf{Y}$ , resultan las expresiones de las transformaciones T- $\Pi$ :

$$y_{12\pi} = y_{12T} \quad y_{11\pi} = y_{11T} \quad y_{22\pi} = y_{22T}$$

$$Z_{b\pi} = \left[ Z_{cT} + \frac{1}{\frac{1}{Z_{aT}} + \frac{1}{Z_{bT}}} \right] \cdot \left[ \frac{1}{Z_{aT}} + \frac{1}{Z_{bT}} \right] \cdot Z_{aT} = \frac{Z_{cT}Z_{aT}}{Z_{aT}} + \frac{Z_{cT}Z_{aT}}{Z_{bT}} + Z_{aT} = \frac{Z_{aT}Z_{bT} + Z_{aT}Z_{cT} + Z_{bT}Z_{cT}}{Z_{bT}}$$

$$\frac{1}{Z_{a\pi}} = \frac{1}{Z_{aT} + \frac{1}{\frac{1}{Z_{bT}} + \frac{1}{Z_{cT}}}} - \frac{1}{Z_{b\pi}} = \frac{1}{Z_{aT} + \frac{Z_{bT}Z_{cT}}{Z_{bT} + Z_{cT}}} - \frac{Z_{bT}}{Z_{aT}Z_{bT} + Z_{aT}Z_{cT} + Z_{bT}Z_{cT}} = \frac{Z_{cT}}{Z_{aT}Z_{bT} + Z_{aT}Z_{cT} + Z_{bT}Z_{cT}}$$

$$\frac{1}{Z_{c\pi}} = \frac{1}{Z_{cT} + \frac{1}{\frac{1}{Z_{aT}} + \frac{1}{Z_{bT}}}} - \frac{1}{Z_{b\pi}} = \frac{1}{Z_{cT} + \frac{Z_{aT}Z_{bT}}{Z_{aT} + Z_{bT}}} - \frac{Z_{bT}}{Z_{aT}Z_{bT} + Z_{aT}Z_{cT} + Z_{bT}Z_{cT}} = \frac{Z_{aT}}{Z_{aT}Z_{bT} + Z_{aT}Z_{cT} + Z_{bT}Z_{cT}}$$

Es decir

$$\begin{aligned} Z_{a\pi} &= \frac{Z_{aT}Z_{bT} + Z_{aT}Z_{cT} + Z_{bT}Z_{cT}}{Z_{cT}} \\ Z_{b\pi} &= \frac{Z_{aT}Z_{bT} + Z_{aT}Z_{cT} + Z_{bT}Z_{cT}}{Z_{bT}} \\ Z_{c\pi} &= \frac{Z_{aT}Z_{bT} + Z_{aT}Z_{cT} + Z_{bT}Z_{cT}}{Z_{aT}} \end{aligned} \quad (1-13)$$

De manera similar de la igualdad de las matrices  $Z$  se deduce

$$z_{12T} = z_{12\pi} \qquad z_{11T} = z_{11\pi} \qquad z_{22T} = z_{22\pi}$$

A partir de estas relaciones se obtienen las expresiones de las transformaciones:

$$Z_{bT} = \frac{1}{\frac{1}{Z_{a\pi}} + \frac{1}{Z_{b\pi}} + Z_{c\pi}} \cdot \frac{Z_{c\pi}}{Z_{b\pi} + Z_{c\pi}} = \frac{Z_{a\pi}Z_{c\pi}}{Z_{a\pi} + Z_{b\pi} + Z_{c\pi}}$$

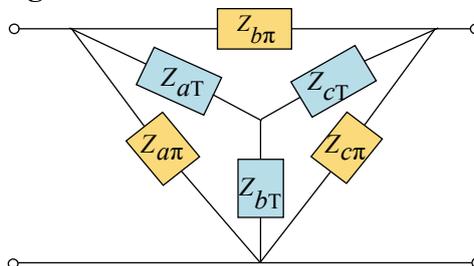
$$Z_{aT} = \frac{Z_{a\pi}Z_{b\pi} + Z_{a\pi}Z_{c\pi}}{Z_{a\pi} + Z_{b\pi} + Z_{c\pi}} - \frac{Z_{a\pi}Z_{c\pi}}{Z_{a\pi} + Z_{b\pi} + Z_{c\pi}}$$

$$Z_{cT} = \frac{Z_{a\pi}Z_{c\pi} + Z_{b\pi}Z_{c\pi}}{Z_{a\pi} + Z_{b\pi} + Z_{c\pi}} - \frac{Z_{a\pi}Z_{c\pi}}{Z_{a\pi} + Z_{b\pi} + Z_{c\pi}}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} Z_{aT} &= \frac{Z_{a\pi}Z_{b\pi}}{Z_{a\pi} + Z_{b\pi} + Z_{c\pi}} \\ Z_{bT} &= \frac{Z_{a\pi}Z_{c\pi}}{Z_{a\pi} + Z_{b\pi} + Z_{c\pi}} \\ Z_{cT} &= \frac{Z_{b\pi}Z_{c\pi}}{Z_{a\pi} + Z_{b\pi} + Z_{c\pi}} \end{aligned} \tag{1-14}$$

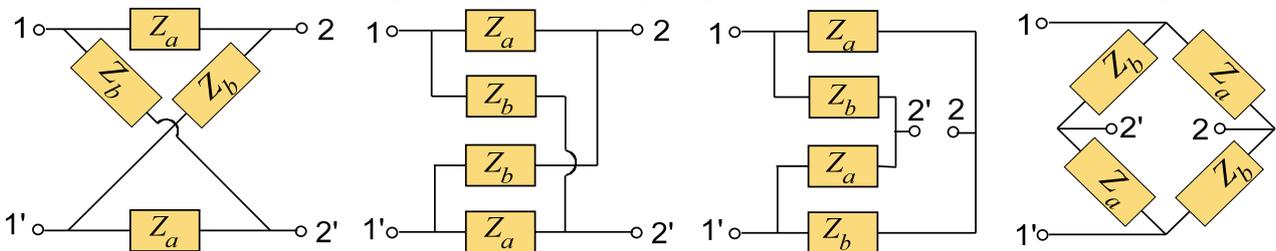
El estudiante encontrará sin mayores dificultades una regla mnemotécnica para las expresiones de transformación T- $\Pi$  ó estrella-triángulo encontradas (1-13) y (1-14), si se dibujan superpuestas ambas celdas de la manera indicada en la **Fig. 1.15**.



**Fig. 1.15.** Transformación estrella-triángulo. Disposición sugerida para una regla mnemotécnica.

### 1.6.3. Celda lattice o celosía

La topología *lattice* (o *celosía*) es el ejemplo más sencillo de redes equilibradas y las formas de representación más frecuentes empleadas para esta topología son las que se muestran en la **Fig. 1.16**.



**Fig. 1.16.** Celdas lattice o celosía: diferentes esquemas de representación.

La celda lattice es una red recíproca por estar constituida exclusivamente por elementos pasivos (por lo tanto  $y_{12} = y_{21}$  y  $z_{12} = z_{21}$ ), física y eléctricamente simétrica (por lo tanto  $y_{11} = y_{22}$  y  $z_{11} = z_{22}$ ) y balanceada o equilibrada. Por lo tanto las matrices  $Y$  y  $Z$  quedan completamente definidas mediante sólo dos parámetros. Entonces para obtener la matriz  $Y$  sólo se requiere determinar dos parámetros, por lo tanto se adopta el circuito de la **Fig. 1.17a** con el que se puede determinar  $y_{11}$  y  $y_{21}$ ; y del mismo modo, para obtener la matriz  $Z$  se adopta el circuito de la **Fig. 1.17b** con el que se puede determinar  $z_{11}$  y  $z_{21}$ .



Fig. 1.17. Celdas lattice o celosía: (a) circuito para determinar  $y_{11}$  e  $y_{21}$ ; (b) circuito para determinar  $z_{11}$  e  $z_{21}$ .

Por convención en la representación circuital siempre se indican los elementos como  $Z$ , para evitar confusiones, pero para determinar  $y_{11}$  e  $y_{21}$  de la Fig. 1.17a resulta más conveniente operar con las admitancias  $Y_a$  e  $Y_b$  de los elementos del cuadripolo. De este modo:

$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0} = \frac{1}{\frac{1}{Y_a + Y_b} + \frac{1}{Y_a + Y_b}} = \frac{Y_a + Y_b}{2}$$

$$y_{21} = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0} = \frac{\frac{U_1}{2}(Y_b - Y_a)}{U_1} = \frac{Y_b - Y_a}{2}$$

Para determinar  $z_{11}$  y  $z_{21}$  a partir de la Fig. 1.17b:

$$z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{\frac{1}{Z_a + Z_b} + \frac{1}{Z_a + Z_b}} = \frac{Z_a + Z_b}{2}$$

$$z_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{\frac{I_1}{2}(Z_b - Z_a)}{I_1} = \frac{Z_b - Z_a}{2}$$

Entonces para la celda lattice, resultan las matrices  $\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{Y}$ :

$$\mathbf{Y}_{\text{lattice}} = \begin{bmatrix} \frac{Y_a + Y_b}{2} & \frac{Y_b - Y_a}{2} \\ \frac{Y_b - Y_a}{2} & \frac{Y_a + Y_b}{2} \end{bmatrix} \quad (1-15)$$

$$\mathbf{Z}_{\text{lattice}} = \begin{bmatrix} \frac{Z_a + Z_b}{2} & \frac{Z_b - Z_a}{2} \\ \frac{Z_b - Z_a}{2} & \frac{Z_a + Z_b}{2} \end{bmatrix} \quad (1-16)$$

#### 1.6.4. Transformación de redes balanceadas a desbalanceadas

De acuerdo a lo mencionado al final del apartado 1.6.1, toda red (balanceada o no) que sea recíproca (conformada por elementos pasivos), puede transformarse en una celda T ó  $\Pi$  equivalente, es decir, en una red desbalanceada. Entonces ésta es la clave para la transformación de redes equilibradas en desequilibradas.

Los elementos de las celdas equivalentes pueden determinarse partiendo de la igualdad de la matriz  $\mathbf{Z}$  del cuadripolo a transformar con la correspondiente  $\mathbf{Z}_T$  ó  $\mathbf{Z}_\pi$ , o de la igualdad de la matriz  $\mathbf{Y}$  del cuadripolo a transformar con la correspondiente  $\mathbf{Y}_T$  ó  $\mathbf{Y}_\pi$ .

Sean  $\mathbf{Y}$  y  $\mathbf{Z}$  las matrices del cuadripolo genérico a sustituir por una celda T ó  $\Pi$ :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$$

Resulta evidente que siempre y cuando  $y_{12}=y_{21}$  y  $z_{12}=z_{21}$  puede hacerse:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_\pi &= \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z}_T &= \mathbf{Z} \end{aligned} \tag{1-17}$$

Las igualdades en expresiones (1-17) se aplican a los correspondientes parámetros de las matrices. Entonces de la igualación de las matrices  $\mathbf{Y}$  puede deducirse:

$$\begin{cases} \frac{-1}{Z_{b\pi}} = y_{12} \\ \frac{1}{Z_{a\pi}} + \frac{1}{Z_{b\pi}} = y_{11} \\ \frac{1}{Z_{b\pi}} + \frac{1}{Z_{c\pi}} = y_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_{b\pi} = \frac{-1}{y_{12}} \\ Z_{a\pi} = \frac{1}{y_{11} + y_{12}} \\ Z_{c\pi} = \frac{1}{y_{22} + y_{12}} \end{cases} \tag{1-18}$$

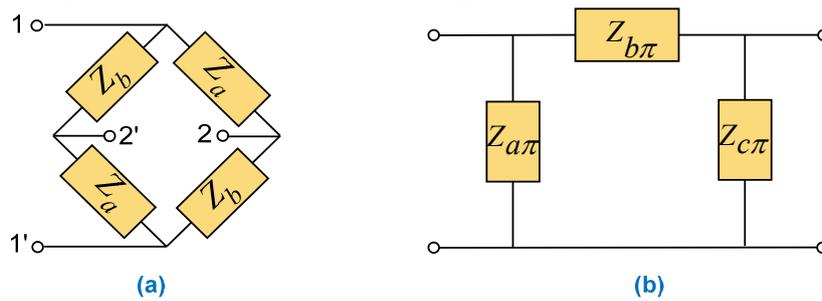
Y de la igualación de las matrices  $\mathbf{Z}$  resulta:

$$\begin{cases} Z_{bT} = z_{12} \\ Z_{aT} + Z_{bT} = z_{11} \\ Z_{bT} + Z_{cT} = z_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_{bT} = z_{12} \\ Z_{aT} = z_{11} - z_{12} \\ Z_{cT} = z_{22} - z_{12} \end{cases} \tag{1-19}$$

Con estos conjuntos de expresiones puede entonces obtenerse la celda T o  $\Pi$  equivalente a cualquier cuadripolo recíproco caracterizado por las matrices  $\mathbf{Z}$  o  $\mathbf{Y}$ .

El lector debe comprender que la equivalencia entre el cuadripolo original y la celda T o  $\Pi$  obtenida depende de que el circuito externo al cuadripolo no resulte afectado por la existencia del terminal común entre la entrada y la salida en las celdas T y  $\Pi$ .

A modo de ejemplo, consideremos la red equilibrada tipo celosía o lattice que se muestra en **Fig. 1.18a** y sea la red  $\Pi$  equivalente que se desea obtener la de la **Fig. 1.18b**.



**Fig. 1.18.** Transformación de red balanceada a desbalanceada: (a) red lattice (balanceada); (b) red  $\pi$  (desbalanceada).

La red  $\Pi$  equivalente como la de la **Fig. 1.18b** se puede determinar reemplazando en las expresiones (1-18) con los parámetros de la matriz  $\mathbf{Y}_{\text{lattice}}$  de la expresión (1-15), resultando los elementos  $Z_{a\pi}$ ,  $Z_{b\pi}$  y  $Z_{c\pi}$  en función de los elementos  $Z_a$  y  $Z_b$  de la red lattice:

$$\begin{aligned} Z_{a\pi} &= Z_b \\ Z_{b\pi} &= \frac{-1}{y_{12}} = \frac{2Z_a \cdot Z_b}{Z_b - Z_a} \\ Z_{c\pi} &= Z_b \end{aligned} \tag{1-20}$$

Las expresiones (1-20) permiten obtener los valores de los elementos de la celda desbalanceada (topología  $\Pi$ ) equivalente a la red lattice balanceada.

Debe observarse que esta transformación no siempre será posible, debido a que  $Z_{b\Pi}$  no sería realizable con elementos pasivos si  $Par\{Z_b\} < Par\{Z_a\}$ .

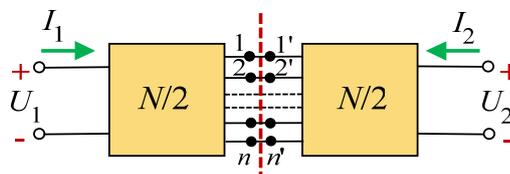
En cuanto a la transformación inversa, es decir, de la red desbalanceada  $\Pi$  de la **Fig. 1.18b** a la red lattice balanceada de la **Fig. 1.18a**, resulta de despejar los elementos de esta última de las expresiones (1-20):

$$\begin{aligned} Z_b &= Z_{a\Pi} \\ Z_a &= \frac{Z_{a\Pi} \cdot Z_{b\Pi}}{2Z_{a\Pi} + Z_{b\Pi}} \\ Z_c &= Z_{a\Pi} \end{aligned} \quad (1-21)$$

De acuerdo a estas expresiones, esta transformación siempre es posible.

### 1.6.5. Transformación de redes desbalanceadas a balanceadas

En la figura **Fig. 1.19** se muestra un cuadripolo recíproco o bilateral, física y eléctricamente simétrico, el cual ha sido separado en dos mitades simétricas entre sí, mostrándose las uniones entre ambas partes.



**Fig. 1.19.** Cuadripolo recíproco física y eléctricamente simétrico, separado en semisecciones simétricas.

Si se consideran los parámetros  $\mathbf{Y}$ , las excitaciones son las tensiones  $U_1$  y  $U_2$  a aplicar en cada puerta, las cuales en el caso más general serán asimétricas, pero siempre será posible expresarlas en función de una tensión simétrica  $U_S$  y otra tensión antisimétrica  $U_A$ , tales que:

$$U_1 = U_S + U_A$$

$$U_2 = U_S - U_A$$

Por lo tanto:

$$U_S = \frac{U_1 + U_2}{2}$$

$$U_A = \frac{U_1 - U_2}{2}$$

Por simetría de la red  $y_{11}=y_{22}$  y siendo recíproca o bilateral,  $y_{12}=y_{21}$ . Su comportamiento entonces queda completamente descrito por una única ecuación:

$$I_1 = y_{11}U_1 + y_{12}U_2 = y_{11}(U_S + U_A) + y_{12}(U_S - U_A)$$

Pudiendo reagruparse como:

$$I_1 = \underbrace{(y_{11} + y_{12})}_{I_{1S}} U_S + \underbrace{(y_{11} - y_{12})}_{I_{1A}} U_A$$

Lo que demuestra que el cuadripolo de **Fig. 1.19** puede analizarse aplicando superposición, considerando dos tipos de excitaciones simétrica y antisimétrica que serán aplicadas en sus dos entradas.

- a) Para la excitación simétrica se aplica:  $U_1 = U_2 = U_S$  y por simetría de la red ( $y_{11}=y_{22}$ ) resulta:

$$I_1 = I_2 = I_S = (y_{11} + y_{12})U_S$$

Con lo cual a admitancia de entrada para la excitación simétrica resulta:

$$Y_S = y_{11} + y_{12} \quad (1-22)$$

- b) Para la excitación antisimétrica se aplica:  $U_1 = U_A$ ;  $U_2 = -U_A$  y por simetría de la red ( $y_{11}=y_{22}$ ) resulta:

$$I_1 = -I_2 = I_A = (y_{11} - y_{12})U_A$$

Con lo cual a admitancia de entrada para la excitación antisimétrica resulta:

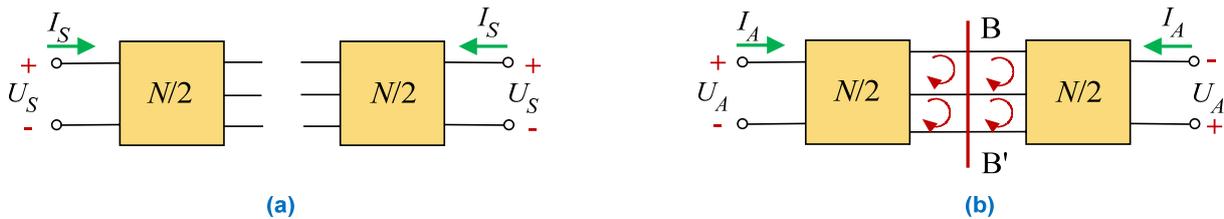
$$Y_A = y_{11} - y_{12} \tag{1-23}$$

Teorema de Bartlett

El teorema de Bartlett, también conocido como teorema de bisección, conduce a simplificaciones que agilizan el proceso de análisis, en el caso de redes simétricas.

Analicemos las dos condiciones de excitación que serán objeto de superposición.

En el caso de excitación simétrica, y por simetría de la red, los puntos 1 y 1' de la **Fig. 1.19** tienen el mismo potencial; y lo propio ocurre entre los puntos 2 y 2', ..., n y n'. Por lo tanto las corrientes en las conexiones entre ambas mitades (entre los puntos 1-1', 2-2', ..., n-n' de la **Fig. 1.19**) son nulas, por lo que pueden cortarse estos vínculos sin afectar el resultado, como se muestra en **Fig. 1.20a**.

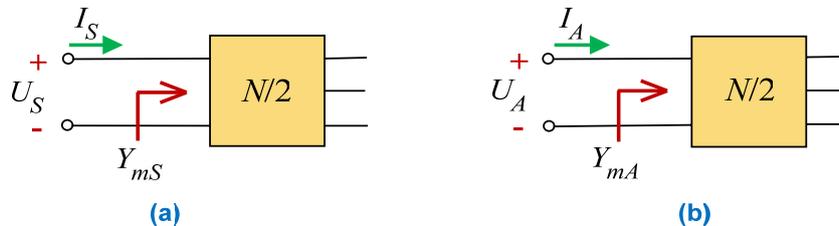


**Fig. 1.20.** Condiciones de contorno para las semisecciones para excitaciones: (a) simétricas; (b) antisimétricas.

De manera similar, para el caso de excitación antisimétrica, las diferencias de potencial entre los vínculos entre ambas mitades resultan  $U_{12} = -U_{1'2'}$ ,  $U_{13} = -U_{1'3'}$ ,  $U_{1n} = -U_{1'n'}$ , etc. Entonces, todos los vínculos entre ambas mitades de la red a lo largo del eje de simetría se encuentran al mismo potencial, y por lo tanto pueden cortocircuitarse en un solo nodo, sin que ello afecte el resultado, como se muestra en **Fig. 1.20b**.

De hecho, las corrientes a ambos lados de la barra B-B' de cortocircuito, son iguales y de signo contrario como se muestra en **Fig. 1.20b**, lo que conduce a la misma conclusión: las diferencias de potencial entre los vínculos entre ambas mitades resultan  $U_{12} = -U_{1'2'}$ ,  $U_{13} = -U_{1'3'}$ ,  $U_{1n} = -U_{1'n'}$ , etc.

Entonces la red original de la **Fig. 1.19** alimentada en cada puerta con fuentes de tensión  $U_1$  y  $U_2$ , puede analizarse superponiendo los resultados de los dos circuitos de **Fig. 1.21**: para excitación simétrica se emplea la semisección en circuito abierto, y para excitación antisimétrica se emplea la semisección en cortocircuito.



**Fig. 1.21.** (a) Excitación simétrica (semisección en circuito abierto). (b) Excitación antisimétrica (semisección en cortocircuito).

Entonces las admitancias de entrada para cada tipo de excitación, corresponden a la admitancia de entrada de la semisección en circuito abierto para la excitación simétrica, y la admitancia de entrada de la semisección en cortocircuito para la excitación antisimétrica.

Aplicación del teorema de Bartlett para la transformación de redes desbalanceadas a balanceadas

Consideremos una red celosía simétrica (**Fig. 1.22**) ya analizada en 1.6.3. donde se obtuvieron los 2 parámetros que se requieren para determinar la matriz **Y**, los cuales, adecuando las notaciones, resultan:

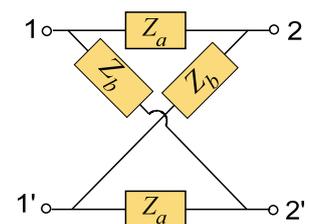
$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0} = \frac{Y_a + Y_b}{2}$$

$$y_{21} = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0} = \frac{Y_b - Y_a}{2}$$

Sumando y restando miembro a miembro ambas expresiones se obtiene:

$$Y_a = y_{11} - y_{21}$$

$$Y_b = y_{11} + y_{21}$$



**Fig. 1.22.** Red simétrica.

Que coinciden con las expresiones (1-22) y (1-23) obtenidas para las admitancias de entrada de la semisecciones en circuito abierto y en cortocircuito del cuádrupolo recíproco y simétrico.

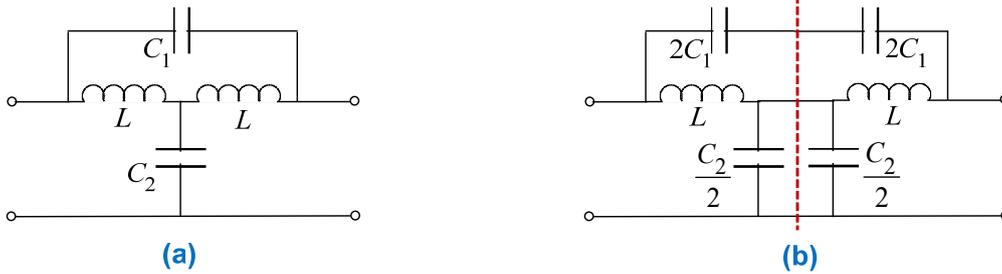
Entonces, todo cuádrupolo recíproco desbalanceado que sea simétrico, con parámetros de cortocircuito  $y_{11}$  e  $y_{21}$ , puede transformarse en balanceado (también simétrico y recíproco) con la topología lattice o celosía de la **Fig. 1.22** con elementos de inmitancias:

$$Y_a = Y_{mA}$$

$$Y_b = Y_{mS}$$

**Ejemplo 1.1.**

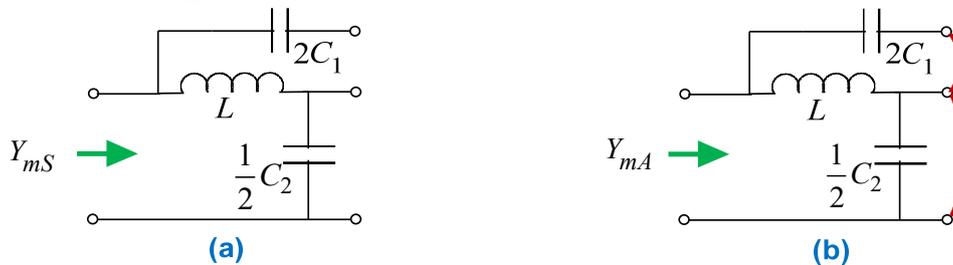
Convertir la red T puentada (desequilibrada y simétrica) de la **Fig. 1.23a**, en una red en celosía (equilibrada y simétrica), utilizando el teorema de Bartlett.



**Fig. 1.23. (a)** Red T puentada (desequilibrada y simétrica. **(b)** Simetrización respecto de un eje vertical central.

Para poder aplicar el teorema de Bartlett es necesario que el circuito sea simétrico respecto de un eje vertical, que pueda dibujarse en su parte central, como se muestra en la **Fig. 1.23b**. Para ello es necesario dividir al capacitor  $C_1$  en dos capacitores iguales tales que, en serie, sean equivalentes a  $C_1$ ; y al capacitor  $C_2$  en dos capacitores iguales tales que, en paralelo, sean equivalentes a  $C_2$ .

Entonces se puede dibujar la semisección en circuito abierto de la red T puentada, como se muestra en **Fig. 1.24a**, la cual permite determinar la admitancia que la red presenta a la excitación simétrica; y para calcular la admitancia de entrada vista por la excitación antisimétrica se emplea la semisección en cortocircuito indicada en la **Fig. 1.24b**.

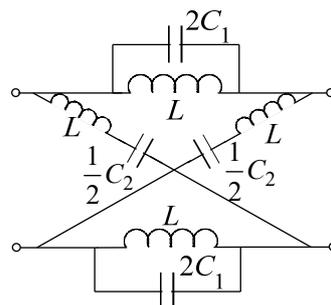


**Fig. 1.24. (a)** Excitación simétrica (semisección en circuito abierto). **(b)** Excitación antisimétrica (semisección en cortocircuito).

Ahora se puede obtener:

$$Y_{mA} = \frac{1}{sL} + s2C_1 \qquad Y_{mS} = \frac{1}{sL + \frac{2}{sC_2}}$$

Entonces, siendo los elementos de la red Lattice equivalente de la **Fig. 1.22**  $Z_a=1/Y_a$  y  $Z_b=1/Y_b$  y siendo además  $Y_a = Y_{mA}$  e  $Y_b = Y_{mS}$  resulta la red que se muestra en la **Fig. 1.25**.



**Fig. 1.25.** Circuito balanceado resultante.

### 1.7. Matrices H y G o híbridas directa e inversa

Existen dos matrices denominadas *híbridas* que resultan al considerar como variables independientes la corriente en una de las puertas y la tensión en la otra, y como variables de salida las restantes. Su denominación se debe a que los parámetros correspondientes no tienen todas las mismas unidades.

En general las matrices híbridas son particularmente útiles para cuadripolos no bilaterales, como son aquellos que poseen fuentes controladas.

La *matriz híbrida directa* o matriz de *parámetros híbridos* (parámetros  $h$ ) o matriz **H**, es muy empleada para describir los modelos equivalentes de elementos activos, tales como transistores bipolares, FET, etc.

La matriz de parámetros  $h$  resulta de las ecuaciones del cuadripolo planteadas tomando como variables independientes a la corriente de entrada y a la tensión de salida:

$$\begin{aligned} U_1(s) &= h_{11}(s) I_1(s) + h_{12}(s) U_2(s) \\ I_2(s) &= h_{21}(s) I_1(s) + h_{22}(s) U_2(s) \end{aligned} \quad (1-24)$$

De modo que los parámetros  $h$  resultan definidos por:

$$\begin{aligned} h_{11}(s) &= \left. \frac{U_1(s)}{I_1(s)} \right|_{U_2(s)=0} && \text{Impedancia de entrada, con salida en cortocircuito} \\ h_{12}(s) &= \left. \frac{U_1(s)}{U_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} && \text{Ganancia inversa de tensión con entrada en circuito abierto} \\ h_{21}(s) &= \left. \frac{I_2(s)}{I_1(s)} \right|_{U_2(s)=0} && \text{Ganancia directa de corriente con salida en cortocircuito} \\ h_{22}(s) &= \left. \frac{I_2(s)}{U_2(s)} \right|_{I_1(s)=0} && \text{Admitancia de salida con entrada en circuito abierto} \end{aligned} \quad (1-25)$$

Teniendo en cuenta las respectivas definiciones, los parámetros  $h$  están relacionados con los parámetros admitancia e impedancia mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} h_{11} &= \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{U_2=0} = \frac{1}{y_{11}} = \frac{|Z|}{z_{22}} \\ h_{12} &= \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_1=0} = -\frac{y_{12}}{y_{11}} = \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ h_{21} &= \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{U_2=0} = \frac{y_{21}}{y_{11}} = -\frac{z_{21}}{z_{22}} \\ h_{22} &= \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{I_1=0} = \frac{|Y|}{y_{11}} = \frac{1}{z_{22}} \end{aligned} \quad (1-26)$$

De manera enteramente análoga, se define la *matriz híbrida inversa*, o matriz de *parámetros híbridos inversos* (parámetros  $g$ ) o matriz **G**, resulta de las ecuaciones del cuadripolo planteadas tomando como variables independientes a la tensión de entrada y a la corriente de salida:

$$\begin{aligned} I_1(s) &= g_{11}(s) U_1(s) + g_{12}(s) I_2(s) \\ U_2(s) &= g_{21}(s) U_1(s) + g_{22}(s) I_2(s) \end{aligned} \quad (1-27)$$

Es decir, los parámetros  $g$  quedan definidos por:

$$\begin{aligned}
 g_{11}(s) &= \left. \frac{I_1(s)}{U_1(s)} \right|_{I_2(s)=0} && \text{Admitancia de entrada, con salida en circuito abierto} \\
 g_{12}(s) &= \left. \frac{I_1(s)}{I_2(s)} \right|_{U_1(s)=0} && \text{Ganancia inversa de corriente con entrada en cortocircuito} \\
 g_{21}(s) &= \left. \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \right|_{I_2(s)=0} && \text{Ganancia directa de tensión con salida en circuito abierto} \\
 g_{22}(s) &= \left. \frac{U_2(s)}{I_2(s)} \right|_{U_1(s)=0} && \text{Impedancia de salida con entrada en cortocircuito}
 \end{aligned}
 \tag{1-28}$$

Nuevamente, teniendo en cuenta las respectivas definiciones, los parámetros  $g$  están relacionados con los parámetros admitancia e impedancia mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{z_{11}} = \frac{|Y|}{y_{22}} \\
 g_{12} &= \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{U_1=0} = \frac{y_{12}}{y_{22}} = -\frac{z_{12}}{z_{11}} \\
 g_{21} &= \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0} = -\frac{y_{21}}{y_{11}} = \frac{z_{21}}{z_{22}} \\
 g_{22} &= \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{U_1=0} = \frac{|Z|}{z_{11}} = \frac{1}{y_{22}}
 \end{aligned}
 \tag{1-29}$$

Los determinantes de ambas matrices híbridas resultan:

$$|\mathbf{H}| = \frac{y_{22}}{y_{11}} = \frac{z_{11}}{z_{22}}$$

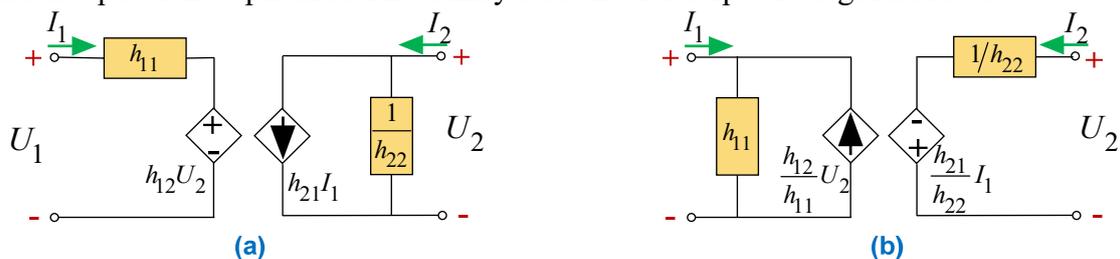
$$|\mathbf{G}| = \frac{y_{11}}{y_{22}} = \frac{z_{22}}{z_{11}}$$

Resultando:

$$|\mathbf{H}| \cdot |\mathbf{G}| = 1$$

### 1.7.1. Circuitos equivalentes de matrices híbridas con fuentes controladas

En **Fig. 1.26** se muestran dos circuitos equivalentes correspondientes a la Matriz Híbrida Directa. El de la **Fig. 1.26a** resulta por simple inspección de las expresiones (1-24), mientras que el de la **Fig. 1.26b** corresponde al equivalente aplicando Thévenin y Norton a los respectivos generadores.



**Fig. 1.26.** Parámetros  $h$ : modelos circuitales (a) reproduciendo las ecuaciones; (b) usando los equivalentes Norton y Thevenin.

En **Fig. 1.27** se muestran los circuitos equivalentes correspondientes a la Matriz Híbrida Inversa.

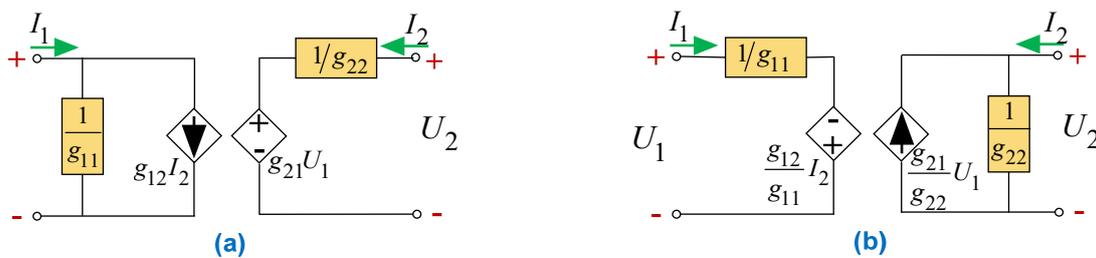


Fig. 1.27. Parámetros  $g$ : modelos circuitales (a) reproduciendo las ecuaciones; (b) usando los equivalentes Thevenin y Norton.

Ejemplo 1.2.

Se dispone de los parámetros  $h$  de un transistor bipolar para conexión *emisor común*. a) Encontrar la matriz  $\mathbf{H}$  de dicho transistor en conexión *colector común*. b) Encontrar la matriz  $\mathbf{Y}$  de dicho transistor en conexión *emisor común*.

Resolución

En la Fig. 1.28a se representa un transistor bipolar en conexión emisor común, denominación que indica que el *emisor* se encuentra conectado al terminal común entre la entrada y la salida. En las hojas de datos suministradas por los fabricantes, se indican los valores de los parámetros  $h$ , que en esta configuración se los denomina:  $h_{11}=h_{ie}$ ,  $h_{12}=h_{re}$ ,  $h_{21}=h_{fe}$  y  $h_{22}=h_{oe}$ . La  $e$  de los subíndices indica que el terminal conectado al común es el *emisor*, y es la forma en que se los identifica.

En la Fig. 1.28b se muestra el modelo circuital equivalente para la conexión emisor común, válido para pequeñas señales, que se corresponde con el de la Fig. 1.26a.

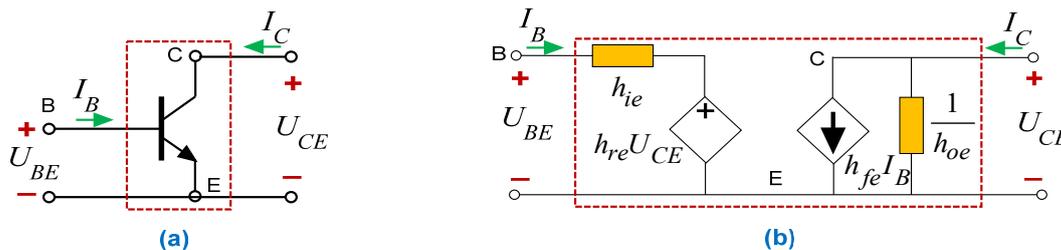


Fig. 1.28. Transistor bipolar en conexión emisor común: (a) esquema de conexión; (b) modelo equivalente con parámetros  $h$ .

a) En la Fig. 1.29a se representa un transistor bipolar en conexión colector común (el *colector* conectado al terminal común entre la entrada y la salida). Como se desea determinar los parámetros  $h$  para esta configuración, y se tienen los parámetros  $h$  para emisor común, se dispone el circuito equivalente de la Fig. 1.28b en configuración colector común como se indica en la Fig. 1.29b, y se determina cada parámetro aplicando la correspondiente definición con base en las expresiones (1-25).

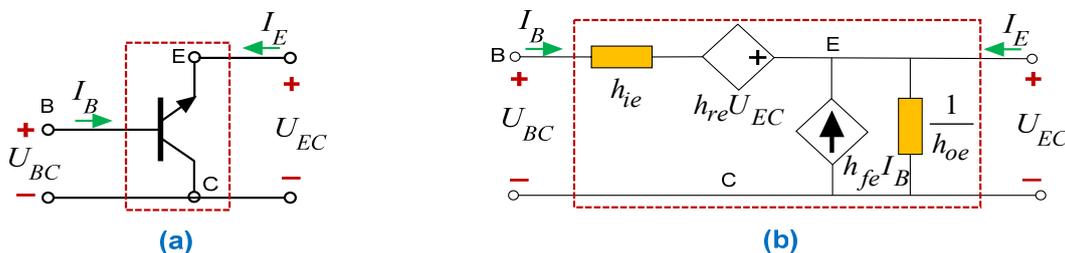


Fig. 1.29. Transistor bipolar en conexión colector común: (a) esquema de conexión; (b) modelo equivalente con parámetros  $h$  correspondientes a la configuración *emisor común*.

Parámetros para  $U_2=0$

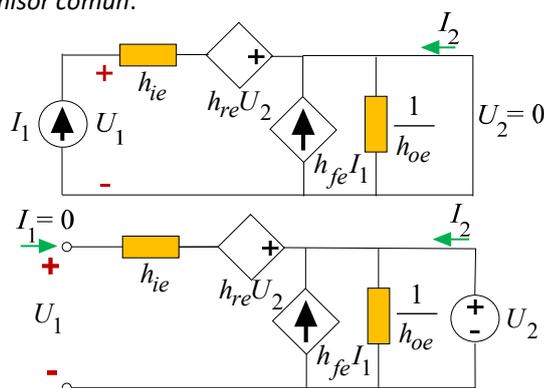
$$U_1 = h_{ie}I_1 \quad \therefore \quad h_{11} = h_{ic} = h_{ie}$$

$$I_2 = -(h_{fe} + 1)I_1 \quad \therefore \quad h_{21} = h_{fc} = -(h_{fe} + 1)$$

Parámetros para  $I_1=0$

$$U_1 = (1 - h_{re})U_2 \quad \therefore \quad h_{12} = h_{rc} = (1 - h_{re})$$

$$I_2 = h_{oe}U_2 \quad \therefore \quad h_{22} = h_{oc} = h_{oe}$$



Es decir, los parámetros de la matriz **H** para la conexión colector común, expresados en función de los parámetros *h* para la conexión emisor común resultan:

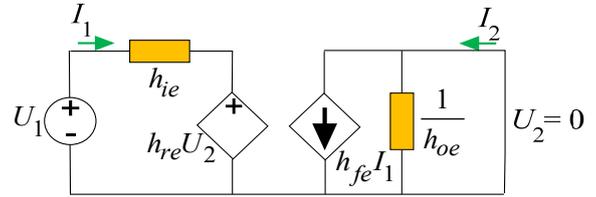
$$\boxed{h_{11} = h_{ic} = h_{ie}} \quad \boxed{h_{12} = h_{rc} = (1 - h_{re})} \quad \boxed{h_{21} = h_{fc} = (h_{fe} - 1)} \quad \boxed{h_{22} = h_{oc} = h_{oe}}$$

b) Siendo conocidos todos los parámetros del modelo de la **Fig. 1.28b** se emplea para determinar los parámetros de la matriz **Y** procediendo según **1.3.1**. Para ello se debe tener en cuenta la definición de los parámetros admitancia dada por las expresiones (1-5).

Parámetros para  $U_2=0$

$$I_2 = \frac{h_{fe}}{h_{ie}} U_1 \quad \therefore \quad y_{21} = \frac{h_{fe}}{h_{ie}}$$

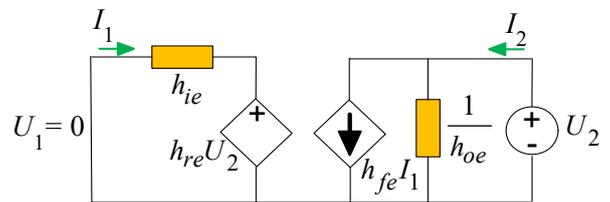
$$I_1 = \frac{U_1}{h_{ie}} \quad \therefore \quad y_{11} = \frac{1}{h_{ie}}$$



Parámetros para  $U_1=0$

$$I_1 = -\frac{h_{re}}{h_{ie}} U_2 \quad \therefore \quad y_{12} = -\frac{h_{re}}{h_{ie}}$$

$$I_2 = -\frac{h_{re}h_{fe}}{h_{ie}} U_2 + h_{oe}U_2 \quad \therefore \quad y_{22} = h_{oe} - \frac{h_{re} \cdot h_{fe}}{h_{ie}}$$



Es decir, los parámetros de la matriz de admitancias en cortocircuito para la conexión emisor común, expresados en función de los parámetros *h* para la misma conexión resultan:

$$\boxed{y_{11} = \frac{1}{h_{ie}}} \quad \boxed{y_{12} = -\frac{h_{re}}{h_{ie}}} \quad \boxed{y_{21} = \frac{h_{fe}}{h_{ie}}} \quad \boxed{y_{22} = h_{oe} - \frac{h_{re} \cdot h_{fe}}{h_{ie}}}$$

Finalmente, la matriz de admitancias en cortocircuito para la configuración *emisor común* **Y<sub>EC</sub>** resulta:

$$\mathbf{Y}_{EC} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/h_{ie} & -h_{re}/h_{ie} \\ h_{fe}/h_{ie} & h_{oe} - h_{re} \cdot h_{fe}/h_{ie} \end{bmatrix}$$

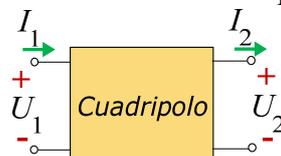
Este ejemplo muestra la forma de proceder cuando son conocidos los parámetros de alguna de las matrices, pero se desea determinar los parámetros de otra matriz o los de la misma para otra conexión del cuadripolo.

### 1.8. Matriz **T** de transmisión

La matriz de transmisión o matriz **T** (también para algunos autores, matriz **Γ**), resulta cuando se consideran como variables independientes la tensión y corriente en la puerta de salida, y como variables dependientes la tensión y corriente en la puerta de entrada.

Los parámetros de esta matriz, se conocen como *parámetros de transmisión* o parámetros **ABCD** o parámetros *t* y relacionan directamente las variables de entrada con las de salida. Por tal razón son empleados en el estudio de líneas de transmisión de potencia, y en general, en redes de dos puertas conectadas en cascada, tales como: amplificadores multietapa, circuitos de filtros de orden mayor a 2, etc.

En este tipo de conexión la corriente  $I_2(s)$  saliente de uno de los cuadripolos es igual a la corriente  $I_1(s)$  entrante al siguiente cuadripolo de la cascada. Por ello, los parámetros de transmisión se han definido aplicando la convención de sentidos de referencia considerados positivos que se muestra en la **Fig. 1.30**.



**Fig. 1.30.** Variables y convención de signos empleada en la definición original de los parámetros de transmisión.

Las expresiones del cuadripolo aplicando los parámetros de transmisión con la convención de signos positivos indicada en la **Fig. 1.30** son las siguientes:

$$U_1(s) = A(s) U_2(s) + B(s) I_2(s)$$

$$I_1(s) = C(s) U_2(s) + D(s) I_2(s)$$

Como este curso no está orientado a una especialidad en particular, se ha preferido mantener la convención de signos empleada hasta aquí, y que corresponde a los sentidos de referencia de la **Fig. 1.2**, o sea, *positivo* cuando la corriente es *entrante* al cuadripolo. En tal caso las expresiones del cuadripolo resultan:

$$U_1(s) = A(s) U_2(s) - B(s) I_2(s)$$

$$I_1(s) = C(s) U_2(s) - D(s) I_2(s)$$
(1-30)

Así, de las expresiones (1-30) resultan las siguientes definiciones de los parámetros de transmisión:

$$A(s) = \left. \frac{U_1(s)}{U_2(s)} \right|_{I_2(s)=0} \quad \text{Ganancia inversa de tensión, con salida en circuito abierto}$$

$$B(s) = \left. \frac{U_1(s)}{-I_2(s)} \right|_{U_2(s)=0} \quad \text{Impedancia de transferencia con salida en cortocircuito}$$

$$C(s) = \left. \frac{I_1(s)}{U_2(s)} \right|_{I_2(s)=0} \quad \text{Admitancia de transferencia con salida en circuito abierto}$$

$$D(s) = \left. \frac{I_1(s)}{-I_2(s)} \right|_{U_2(s)=0} \quad \text{Ganancia inversa de corriente, con salida en cortocircuito}$$
(1-31)

Que también, a veces se los designa indistintamente como parámetros  $t$  con la notación siguiente.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ C(s) & D(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}(s) & t_{12}(s) \\ t_{21}(s) & t_{22}(s) \end{bmatrix}$$

Cabe destacar que los parámetros de la matriz de transmisión no se pueden determinar experimentalmente en forma directa, atendiendo a su definición. En efecto, los parámetros  $A$  y  $C$  requerirían un circuito en el cual se inyecte una tensión  $U_2$  con un generador de tensión de resistencia infinita (para satisfacer la condición  $I_2=0$ ); y los parámetros  $B$  y  $D$  requerirían un circuito en el cual se inyecte una corriente  $I_2$  con un generador de corriente de resistencia nula (para satisfacer la condición  $U_2=0$ ). Por lo tanto, su determinación debe efectuarse en forma indirecta.

Una forma de hacerlo es trabajar con la inversa de los parámetros  $ABCD$ , que sí pueden determinarse, experimentalmente o por análisis, a partir de su definición:

$$\frac{1}{A} = \left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{I_2=0}$$

$$\frac{1}{B} = \left. \frac{-I_2}{U_1} \right|_{U_2=0}$$

$$\frac{1}{C} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

$$\frac{1}{D} = \left. \frac{-I_2}{I_1} \right|_{U_2=0}$$
(1-32)

En efecto, estas nuevas definiciones auxiliares pueden determinarse aplicando en la puerta de entrada del cuadripolo un generador de tensión o de corriente, con la puerta de salida en cortocircuito o a circuito abierto. Finalmente, invirtiéndolas resultan los parámetros de la matriz **T**.

La otra forma de hacerlo es teniendo en cuenta en las respectivas definiciones de los parámetros *ABCD*, las definiciones de los parámetros admitancia e impedancia. Así se obtienen las siguientes relaciones que permiten obtener los parámetros de la matriz de transmisión a partir de los parámetros admitancia e impedancia:

$$\begin{aligned}
 A &= \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_2=0} = \frac{z_{11}}{z_{21}} = -\frac{y_{22}}{y_{21}} \\
 B &= \left. \frac{U_1}{-I_2} \right|_{U_2=0} = -\frac{1}{y_{21}} = \frac{|Z|}{z_{21}} \\
 C &= \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{z_{21}} = -\frac{|Y|}{y_{21}} \\
 D &= \left. \frac{I_1}{-I_2} \right|_{U_2=0} = -\frac{y_{11}}{y_{21}} = \frac{z_{22}}{z_{21}}
 \end{aligned}
 \tag{1-33}$$

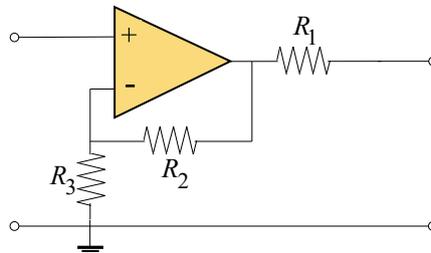
El determinante de la matriz de transmisión es:

$$|\mathbf{T}| = AD - BC = \frac{z_{12}}{z_{21}}
 \tag{1-34}$$

Con lo cual este determinante vale 1 si la red es pasiva. Además la red es simétrica  $A=D$ .

**Ejemplo 1.3.**

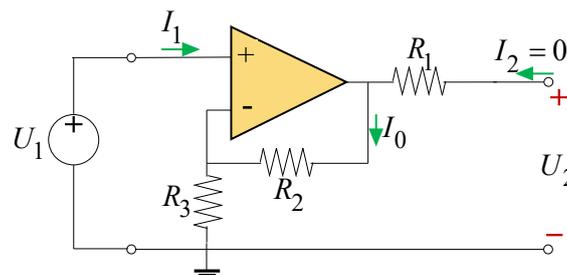
Determinar la matriz **T** del circuito de la **Fig. 1.31** con un amplificador operacional ideal.



**Fig. 1.31.** Circuito con amplificador operacional ideal.

**Resolución**

El parámetro *A* se determina a partir de la definición de  $[1/A]$  de las expresiones (1-32), aplicando un generador de tensión  $U_1(s)$  en la puerta de entrada y se deja a circuito abierto la puerta de salida. El circuito para esta determinación se indica en la **Fig. 1.32**.



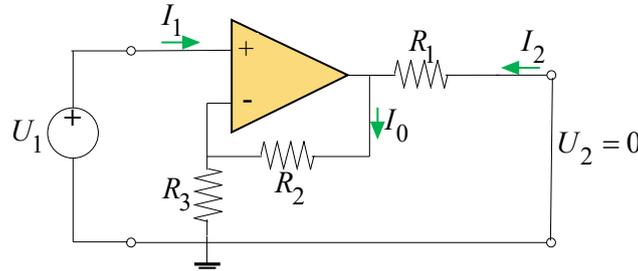
**Fig. 1.32.** Determinación indirecta del parámetro *A*, obteniendo  $1/A$ .

Por medición o por cálculo se obtiene la tensión  $U_2$  y dividiéndola por  $U_1$  resulta el parámetro *A*. En este caso, por cálculo:

$$I_0 = \frac{1}{R_3} U_1 \qquad U_2 = (R_2 + R_3) I_0 = \left( \frac{R_2 + R_3}{R_3} \right) U_1 \qquad A = \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

El parámetro  $B$  se determina a partir de la definición de  $[1/B]$  de las expresiones (1-32), aplicando un generador de tensión  $U_1$  en la puerta de entrada y cortocircuitando la puerta de salida.

El circuito para esta determinación se indica en la **Fig. 1.33**.



**Fig. 1.33.** Determinación indirecta del parámetro  $B$ , obteniendo  $1/B$ .

Por medición o por cálculo se obtiene la corriente  $I_2$  y dividiéndola por  $U_1$  resulta el parámetro  $B$ .

En este caso, por cálculo:

$$I_0 = \frac{1}{R_3} U_1 \qquad I_2 = -\frac{1}{R_1} (R_2 + R_3) I_0 = -\frac{R_2 + R_3}{R_1 R_3} U_1 \qquad B = \frac{R_1 R_3}{R_2 + R_3}$$

Si el amplificador operacional se considera ideal, la corriente  $I_1=0$  para cualquier condición de la puerta de salida. Por lo tanto, teniendo en cuenta las expresiones (1-31) quedan determinados los valores de los parámetros  $C$  y  $D$ :

$$C = 0; \quad D = 0$$

Por lo tanto,

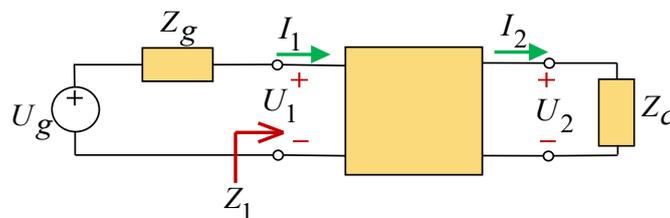
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{R_3}{R_2 + R_3} & \frac{R_1 R_3}{R_2 + R_3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 1.9. Uso y aplicaciones de la matriz de transmisión $\mathbf{T}$

En este apartado se presentan definiciones, características y propiedades de las redes que en todos los casos pueden analizarse y representarse de la mejor manera empleando la matriz de transmisión  $\mathbf{T}$ .

#### 1.9.1. Impedancia de entrada

En la **Fig. 1.34** se muestra un cuadripolo excitado con un generador de impedancia interna  $Z_g$  en la puerta de entrada y cargado en la salida con una impedancia  $Z_c$ . Se denomina *impedancia de entrada* a la impedancia  $Z_1$  que presenta el cuadripolo a la fuente que lo alimenta y, naturalmente, depende de la impedancia  $Z_c$  con que está cargado el cuadripolo.



**Fig. 1.34.** Impedancia de entrada  $Z_1$  de un cuadripolo cargado.

Para el sentido de la corriente de salida indicado como referencia *saliente* del cuadripolo, tal como se advirtió oportunamente, las expresiones (1-30) resultan:

$$U_1 = A U_2 + B I_2$$

$$I_1 = C U_2 + D I_2$$

Por lo que la impedancia de entrada resulta dividiendo miembro a miembro:

$$Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{AU_2 + B}{CU_2 + DI_2} \quad (1-35)$$

Y por la condición establecida por la carga en la salida:

$$Z_c = \frac{U_2}{I_2}$$

Se obtiene la impedancia de entrada con la salida cargada con  $Z_c$ :

$$Z_1 = \frac{AZ_c + B}{CZ_c + D} \quad (1-36)$$

Que es la impedancia que presenta el cuadripolo cargado en la salida con  $Z_c$  a la fuente que lo alimenta.

### Impedancia de entrada en vacío y en cortocircuito

Las denominadas impedancias de entrada en vacío  $Z_{1V}$  e impedancia de entrada en cortocircuito  $Z_{1C}$ , se definen para los dos casos extremos de carga:  $Z_c = \infty$  es decir puerta 2 en vacío ( $I_2 = 0$ ) y  $Z_c = 0$  es decir puerta 2 en corto circuito ( $U_2 = 0$ ).

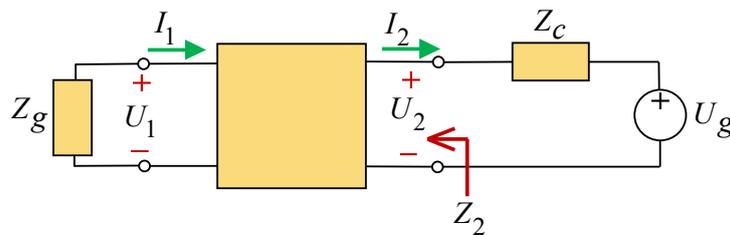
De este modo, de la expresión (1-36) y teniendo en cuenta las relaciones (1-33) resultan:

$$Z_{1V} = \frac{A}{C} = \frac{z_{21}}{1} = z_{11} \quad (1-37)$$

$$Z_{1C} = \frac{B}{D} = \frac{1}{-y_{11}} = \frac{1}{y_{21}} \quad (1-38)$$

### 1.9.2. Impedancia de salida

Similarmente, si se conectara el generador en bornes de salida, como se indica en **Fig. 1.35** puede obtenerse la *impedancia de salida* con la entrada cargada con  $Z_g$ .



**Fig. 1.35.** Impedancia de salida  $Z_2$  de un cuadripolo excitado con un generador de impedancia interna  $Z_g$ .

En este caso puede ser más conveniente emplear las expresiones del cuadripolo empleando los parámetros de la matriz  $\mathbf{Z}$ , teniendo cuidado al considerar los signos de las corrientes y de la caída de tensión en  $Z_g$ .

$$U_1 = Z_{11} I_1 - Z_{12} I_2$$

$$U_2 = Z_{21} I_1 - Z_{22} I_2$$

Teniendo en cuenta la condición impuesta por la conexión en la puerta de entrada:

$$I_1 = -\frac{1}{Z_g} U_1$$

Resulta:

$$U_1 = -\frac{z_{11}}{Z_g} U_1 - z_{12} I_2$$

$$U_2 = -\frac{z_{21}}{Z_g} U_1 - z_{22} I_2$$

Despejando  $U_1(s)$  de la primera expresión y reemplazando en la segunda:

$$U_1 = -\frac{z_{12}}{1 + \frac{z_{11}}{Z_g}} I_2$$

$$U_2 = \left( \frac{z_{12}z_{21}}{Z_g + z_{11}} - z_{22} \right) I_2$$

De acuerdo a los sentidos indicados como positivos en la **Fig. 1.35**, la impedancia de salida  $Z_2$  resulta:

$$Z_2 = -\frac{U_2}{I_2}$$

Es decir:

$$Z_2 = -\frac{z_{12}z_{21}}{Z_g + z_{11}} + z_{22} = \frac{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21} + z_{22}Z_g}{Z_g + z_{11}} = \frac{|Z| + z_{22}Z_g}{Z_g + z_{11}}$$

Dividiendo numerador y denominador por  $z_{21}$  y teniendo en cuenta las relaciones (1-33) resulta:

$$Z_2 = \frac{D Z_g + B}{C Z_g + A} \tag{1-39}$$

La impedancia de salida  $Z_2$  de un cuadripolo, que es el cociente entre la tensión y la corriente que sale por el puerto de salida y que por supuesto depende de la impedancia del generador  $Z_g$ , es equivalente a la impedancia interna de una fuente; por lo tanto, cuanto menor sea, mayor será la capacidad del cuadripolo de transferir potencia a la carga.

Impedancia de salida en vacío y en cortocircuito

Las denominadas impedancias de salida en vacío  $Z_{2V}$  e impedancia de salida en cortocircuito  $Z_{2C}$ , se definen para los dos valores extremos de impedancia  $Z_g$ :  $Z_g = \infty$  es decir puerta 1 en vacío ( $I_1 = 0$ ) y  $Z_g = 0$  es decir puerta 1 en cortocircuito ( $U_1 = 0$ ).

De este modo, de la expresión (1-39) y teniendo en cuenta las relaciones (1-33) resultan:

$$Z_{2V} = \frac{D}{C} = \frac{z_{21}}{1} = z_{22} \tag{1-40}$$

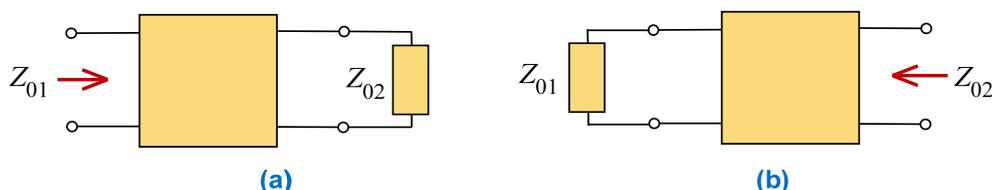
$$Z_{2C} = \frac{B}{A} = \frac{-\frac{1}{y_{21}}}{-\frac{y_{22}}{y_{21}}} = \frac{1}{y_{22}} \tag{1-41}$$

1.9.3. Impedancias imagen

Existen dos impedancias llamadas *impedancias imagen* ( $Z_{01}$  y  $Z_{02}$ ) tales que si  $Z_g = Z_{01}$  y  $Z_c = Z_{02}$ , resulta ser  $Z_1 = Z_{01}$  y  $Z_2 = Z_{02}$ . Estas definiciones de impedancias imagen se muestran en **Fig. 1.36**.

De acuerdo a esta definición resulta:

$$Z_1 = Z_{01} = \frac{A Z_{02} + B}{C Z_{02} + D} \quad \text{y} \quad Z_2 = Z_{02} = \frac{D Z_{01} + B}{C Z_{01} + A}$$



**Fig. 1.36.** Impedancias imagen. (a) de entrada. (b) de salida.

Resolviendo estas ecuaciones, resultan las siguientes relaciones útiles:

$$Z_{01}Z_{02} = \frac{B}{C} \quad (1-42)$$

$$\frac{Z_{01}}{Z_{02}} = \frac{A}{D} \quad (1-43)$$

$$Z_{01} = \sqrt{\frac{AB}{DC}} \quad (1-44)$$

$$Z_{02} = \sqrt{\frac{DB}{AC}} \quad (1-45)$$

Lo que indica que  $Z_{01}$  y  $Z_{02}$  son parámetros característicos del cuadripolo, independientes de  $Z_c$  y  $Z_g$ .

Si el cuadripolo se diseña de manera tal que sus impedancias imagen resulten respectivamente  $Z_{01}=Z_g$  y  $Z_{02}=Z_c$  su efecto puede verse como una transformación de impedancias, pudiendo definirse la relación de transformación  $n$  del cuadripolo (por asociación con un cuadripolo que representa a un transformador ideal – ver Apéndice A -) como:

$$n = \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{AB}{CD}}}{\sqrt{\frac{DB}{AC}}}} = \sqrt{\frac{A}{D}} \quad (1-46)$$

Recordando (1-37), (1-38), (1-40) y (1-41):

$$Z_{01} = \sqrt{\frac{AB}{CD}} = \sqrt{Z_{1V}Z_{1C}} \quad (1-47)$$

$$Z_{02} = \sqrt{\frac{BD}{AC}} = \sqrt{Z_{2V}Z_{2C}} \quad (1-48)$$

Es decir que las impedancias imagen son las medias geométricas de las impedancias terminales, con el otro extremo en circuito abierto y en cortocircuito respectivamente.

Estas expresiones permiten determinar experimentalmente las impedancias imagen, midiendo la impedancias de entrada y de salida con el otro extremo del cuadripolo en circuito abierto y en cortocircuito.

#### 1.9.4. Impedancia característica

Para las redes simétricas se cumple que  $A=D$ , y recordando las expresiones de las impedancias imagen de entrada y de salida, surge que ambas impedancias imagen (de entrada y de salida) como cabía esperar son iguales entre sí y a esta impedancia se la denomina *impedancia característica*  $Z_0$ :

$$Z_0 = Z_{01} = Z_{02} = \sqrt{\frac{B}{C}} \quad (1-49)$$

Se considera importante mencionar un ejemplo para comprender conceptualmente este parámetro. La impedancia característica de un cable coaxial no se refiere a la impedancia del conductor central, ni a la impedancia por unidad de longitud, y tampoco a la impedancia por efecto pelicular. Cuando se dice que un cable tiene una impedancia característica de  $50 \Omega$ , quiere decir que al conectar una resistencia pura de  $50 \Omega$  en uno de los extremos, la impedancia de entrada medida en el otro extremo será también  $50 \Omega$  independientemente de la longitud del cable y de la frecuencia. En este ejemplo sencillo, el cable permite efectuar una *adaptación simétrica* (ver apartado 0) entre la fuente de señal (con una resistencia interna de  $50 \Omega$ ) y la carga (también resistiva de  $50 \Omega$ ).

Combinando las expresiones (1-49), (1-47) y (1-48) resulta:

$$Z_0 = \sqrt{Z_{1V}Z_{1C}} = \sqrt{Z_{2V}Z_{2C}} \quad (1-50)$$

Estas expresiones permiten determinar experimentalmente la impedancia característica, midiendo la impedancias de entrada y de salida con el otro extremo del cuadripolo en circuito abierto y en cortocircuito.

#### Ejemplo 1.4.

Determinar la impedancia característica del cuadripolo T de la **Fig. 1.37**.

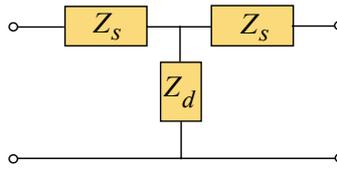


Fig. 1.37. Cuadripolo T.

**Resolución**

Para aplicar la expresión (1-50), se determinan las impedancias  $Z_{1V}=Z_{2V}$  y  $Z_{1C}=Z_{2C}$ :

$$Z_{1V} = Z_{2V} = Z_s + Z_d$$

$$Z_{1C} = Z_{2C} = Z_s + \frac{Z_s Z_d}{Z_s + Z_d}$$

Finalmente:

$$Z_0 = \sqrt{(Z_s + Z_d) \left( Z_s + \frac{Z_s Z_d}{Z_s + Z_d} \right)} = \sqrt{Z_s^2 + 2Z_s Z_d}$$

**Ejemplo 1.5.**

Determinar la impedancia característica del cuadripolo  $\Pi$  de la Fig. 1.38.

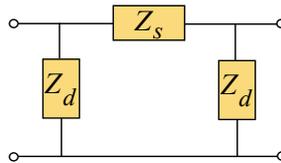


Fig. 1.38. Cuadripolo  $\pi$ .

**Resolución**

Nuevamente se determinan las impedancias  $Z_{1V}=Z_{2V}$  y  $Z_{1C}=Z_{2C}$ :

$$Z_{1V} = Z_{2V} = \frac{1}{\frac{1}{Z_d} + \frac{1}{Z_s + Z_d}} = \frac{Z_d (Z_s + Z_d)}{Z_s + 2Z_d}$$

$$Z_{1C} = Z_{2C} = \frac{1}{\frac{1}{Z_d}} + \frac{1}{\frac{1}{Z_s}} = \frac{Z_d Z_s}{Z_d + Z_s}$$

Finalmente mediante la expresión (1-50):

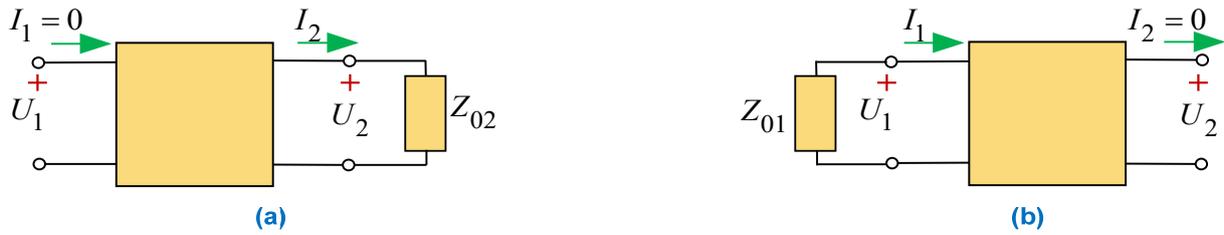
$$Z_0 = \sqrt{\left( \frac{Z_d (Z_s + Z_d)}{Z_s + 2Z_d} \right) \left( \frac{Z_d Z_s}{Z_d + Z_s} \right)} = \sqrt{\frac{Z_s Z_d^2}{Z_s + 2Z_d}}$$

**1.9.5. Transferencias de tensiones y corrientes**

En esta sección se determinará la relación existente entre la tensión en los terminales de entrada y la tensión en terminales de salida de un cuadripolo, y también esa misma relación para las corrientes. Dichas relaciones se denominan transferencia de tensiones y transferencia de corrientes.

Entonces, interesa calcular las transferencias de un cuadripolo en función de sus parámetros, que por otra parte y como cabe esperar, también dependerán de la carga del cuadripolo. Para estas determinaciones, los parámetros más adecuados son los parámetros de transmisión.

Supóngase primero que la impedancia de carga es igual a la impedancia imagen de la salida, es decir que  $Z_c=Z_{02}$ , como se muestra en Fig. 1.39a.



**Fig. 1.39.** Cuadripolos excitados con generador ideal y cargados con las impedancias imagen: **(a)** generador en la entrada y  $Z_{02}$  en la salida; **(b)** generador en la salida y  $Z_{01}$  en la entrada.

Entonces conectando en la entrada el generador  $U_1$ :

$$U_1 = AU_2 + BI_2 = \left( A + \frac{B}{Z_{02}} \right) U_2$$

$$I_1 = CU_2 + DI_2 = (CZ_{02} + D) I_2$$

Con lo cual la relación entre las tensiones y la relación entre las corrientes resultan:

$$\frac{U_1}{U_2} = A + \frac{B}{Z_{02}} = A + B\sqrt{\frac{AC}{BD}} = \sqrt{\frac{A}{D}} (\sqrt{AD} + \sqrt{BC})$$

$$\frac{I_1}{I_2} = CZ_{02} + D = C + D\sqrt{\frac{AC}{BD}} = \sqrt{\frac{D}{A}} (\sqrt{AD} + \sqrt{BC})$$

Si ahora se conecta  $Z_{01}$  en los terminales de entrada, y el generador de tensión  $U_2$  en los bornes de salida como se muestra en **Fig. 1.39b**, resulta:

$$U_2 = \left( D - \frac{B}{Z_{01}} \right) U_1$$

$$I_2 = (-CZ_{01} + A) I_1$$

Siguiendo un procedimiento similar al anterior, se obtienen las siguientes relaciones entre las tensiones y las corrientes:

$$\frac{U_2}{U_1} = \sqrt{\frac{D}{A}} (\sqrt{AD} - \sqrt{BC})$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \sqrt{\frac{A}{D}} (\sqrt{AD} - \sqrt{BC})$$

El otro factor que aparece en las relaciones entre tensiones o entre corrientes, puede expresarse en forma exponencial:

$$e^\gamma = \sqrt{AD} + \sqrt{BC} \quad (1-51)$$

Siendo  $\gamma = \alpha + j\beta$  la *constante de propagación*,  $\alpha$  la *constante de atenuación* y  $\beta$  la *constante de fase*.

Esta constante de propagación da cuenta del efecto de la red sobre las tensiones y corrientes al propagarse por la misma. Introduciendo estos factores, y teniendo en cuenta la relación de transformación  $n$  de la red definida por (1-46) resulta:

$$\begin{cases} \frac{U_1}{U_2} = ne^\gamma \\ \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{n}e^\gamma \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{n}e^{-\gamma} \\ \frac{I_2}{I_1} = ne^{-\gamma} \end{cases} \quad (1-52)$$

Por otra parte:

$$e^{-\gamma} = \frac{1}{\sqrt{AD} + \sqrt{BC}} = \frac{\sqrt{AD} - \sqrt{BC}}{(\sqrt{AD} + \sqrt{BC})(\sqrt{AD} - \sqrt{BC})} = \frac{\sqrt{AD} - \sqrt{BC}}{AD - BC}$$

Puesto que en las redes pasivas tal como se desprende de (1-34) se cumple que:

$$AD - BC = 1 \quad (1-53)$$

Resulta:

$$e^{-\gamma} = \sqrt{AD} - \sqrt{BC} \quad (1-54)$$

Por lo tanto:

$$\cosh \gamma = \frac{e^{\gamma} + e^{-\gamma}}{2} = \sqrt{AD}$$

$$\sinh \gamma = \frac{e^{\gamma} - e^{-\gamma}}{2} = \sqrt{BC}$$

Resultando en definitiva:

$$U_1 = n \left[ (\cosh \gamma) U_2 + (Z_{02} \sinh \gamma) I_2 \right]$$

$$I_1 = \frac{1}{n} \left[ \left( \frac{\sinh \gamma}{Z_{02}} \right) U_2 + (\cosh \gamma) I_2 \right]$$

Expresiones que relacionan las tensiones y corrientes de un cuadripolo, terminado o no en sus impedancias imagen, y los parámetros físicos del mismo, como son las impedancias imagen y la función de propagación.

Por comparación resulta:

$$A = n(\cosh \gamma) \quad B = n(Z_{02} \sinh \gamma)$$

$$C = \frac{1}{n} \left( \frac{\sinh \gamma}{Z_{02}} \right) \quad D = \frac{1}{n} (\cosh \gamma)$$

Con lo cual:

$$\operatorname{tgh} \gamma = \frac{\sinh \gamma}{\cosh \gamma} = \sqrt{\frac{BC}{AD}} = \sqrt{\frac{Z_{1C}}{Z_{1V}}} = \sqrt{\frac{Z_{2C}}{Z_{2V}}} \quad (1-55)$$

Estos últimos resultados son lógicos, ya que la función de propagación no depende de las terminaciones.

Además la expresión (1-55) permite determinar experimentalmente la constante de propagación, midiendo impedancias de entrada y de salida con el otro extremo del cuadripolo en circuito abierto y en cortocircuito.

#### Cuadripolo pasivo y simétrico cargado con la impedancia característica

Cuando el cuadripolo insertado es pasivo, simétrico y se encuentra cargado con la impedancia característica pueden efectuarse simplificaciones muy útiles en las expresiones de las funciones de transferencia de tensiones y corrientes.

En primer lugar, para las redes simétricas  $A=D$  y el valor de la denominada relación de transformación resulta:

$$n = \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} = \sqrt{\frac{A}{D}} = 1$$

Con lo cual las relaciones entre las tensiones y corrientes de entrada y de salida (1-52) resultan:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2} = e^{\gamma} \quad (1-56)$$

Por otra parte, para redes pasivas se cumple (1-53), y si el cuadripolo además es simétrico:

$$A^2 - BC = 1 \Rightarrow BC = \sqrt{A^2 - 1}$$

Finalmente, reemplazando en (1-51) y luego en (1-56) resulta:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2} = A + \sqrt{A^2 - 1} = D + \sqrt{D^2 - 1} \quad (1-57)$$

Observándose que las relaciones entre las tensiones y corrientes de entrada y de salida son iguales y dependen sólo de uno de los parámetros  $A$  ó  $D$ .

1.9.6. Equivalente de Thevenin a partir de la matriz de transmisión

Una aplicación interesante de la matriz de transmisión  $\mathbf{T}$  es el caso de una red, a la que perfectamente se le pueden determinar los parámetros  $ABCD$ , que está alimentada por un generador de tensión  $U_g$  y se desea determinar el equivalente de Thevenin desde un par de terminales, considerados como terminales de salida, a los que se conecta una impedancia de carga  $Z_c$  como se indica en la Fig. 1.40.

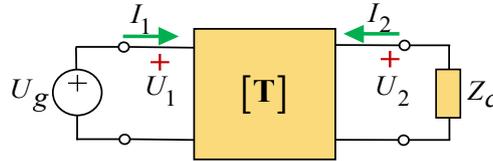


Fig. 1.40. Esquema de una red para determinar su equivalente Thevenin.

En este caso,  $U_1=U_g$  e  $I_1$  pueden considerarse conocidos o que pueden determinarse directamente por medición y serán por lo tanto las variables independientes.

Para el sentido de la corriente de salida indicado como referencia *entrante* al cuadripolo, tal como se advirtió oportunamente, las expresiones (1-30) resultan:

$$U_1 = A U_2 - B I_2$$

$$I_1 = C U_2 - D I_2$$

Para determinar la tensión de Thevenin se debe desconectar la carga, lo que se corresponde con la condición  $I_2=0$ . Esto da conduce a:

$$U_1 = A U_2$$

Por lo tanto:

$$U_{Th} = U_2|_{I_2=0} = \frac{U_1}{A} = \frac{U_g}{A}$$

Para obtener la impedancia de Thevenin primero se deben anular todas las fuentes independientes (en este caso la única fuente independiente es  $U_g$ ). Luego, en los terminales de salida, se debe aplicar una tensión de valor conveniente (por ejemplo,  $U_2=1$  V) y determinar la corriente inyectada resultante. La relación entre la tensión aplicada y la corriente resultante será la impedancia de Thevenin  $Z_{th}$ .

Entonces para esta determinación se tiene:

$$Z_{Th} = \frac{U_2}{I_2} \Big|_{U_1=0}$$

$$U_1 = A U_2 - B I_2$$

Donde se hace:

$$U_1 = 0 \quad U_2 = 1$$

Es decir:

$$0 = A - B I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{A}{B}$$

$$Z_{Th} = \frac{1}{A/B} = \frac{B}{A}$$

Finalmente el circuito equivalente es el que se indica en la Fig. 1.41.

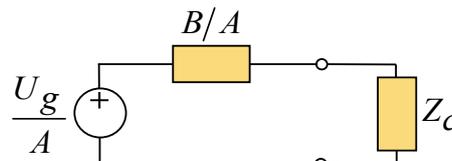


Fig. 1.41. Modelo equivalente de Thevenin resultante.

1.10. Interconexión de cuadripolos

La interconexión entre cuadripolos permite obtener cuadripolos de mayor grado de complejidad y

caracterizarlos mediante alguna de las matrices de parámetros, que pueda obtenerse de manera sencilla a partir de las correspondientes matrices de los cuadripolos individuales interconectados.

En lo que sigue, se presentarán las distintas formas de interconexión y cómo se pueden calcular los parámetros del cuadripolo resultante en función de los parámetros de los cuadripolos individuales. Esto será muy útil para aplicar en ambos sentidos, es decir:

- Dados dos o más cuadripolos conocidos que se interconectan para obtener un cuadripolo más complejo y se requiere analizar este último.
- Dado un cuadripolo que presenta cierto grado de complejidad, se lo subdivide en cuadripolos más simples interconectados, para los cuales resulta más sencillo determinar la matrices de parámetros que sea más adecuada para el tipo de interconexión, en función de ellas se obtiene la matriz correspondiente al cuadripolo original.

Por simplicidad se estudiará la conexión entre dos cuadripolos, ya que los resultados se pueden extender de manera directa a un mayor número de cuadripolos.

Existen varias formas de conectar cuadripolos entre sí y se pueden clasificar en dos grupos:

- El primer grupo conecta entradas entre sí y salidas entre sí. Hay 4 formas de conexión de este tipo: las denominadas conexiones *en paralelo*, *en serie*, *serie-paralelo* y *paralelo-serie*.

En este grupo, puede ocurrir que la interconexión altere el funcionamiento normal de uno de los cuadripolos. Esta situación se pone siempre de manifiesto en la corriente de entrada y/o de salida de los cuadripolos individuales cuando están conectados; esto es, en esa puerta, la corriente que ingresa por uno de los terminales es distinta de la corriente que sale por el otro terminal.

Esto ocurre porque la interconexión produce una modificación tal, que en el circuito se establece una corriente de circulación interna. En cada caso de interconexión se deben efectuar dos pruebas diseñadas por O. Brune (una en las entradas y otra en las salidas), que permiten determinar si habrá corriente de circulación.

Cabe aclarar que si la interconexión da lugar a una corriente de circulación no nula, *no significa que la interconexión no se pueda hacer*, sino que una dada matriz del cuadripolo resultante no se puede determinar a partir de las correspondientes matrices de los cuadripolos individuales.

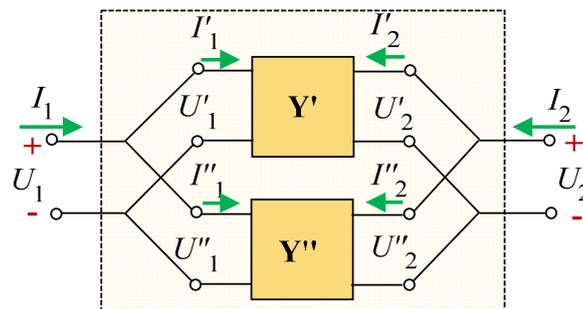
- El segundo grupo conecta la entrada de un cuadripolo con la salida de otro. Hay una sola forma de conexión de este tipo: es la denominada conexión *en cascada* o *en cadena*.

Esta interconexión nunca origina corriente de circulación.

En lo que sigue se verán las particularidades del tratamiento de cada tipo de interconexión.

### 1.10.1. Conexión de cuadripolos en paralelo

Dos o más cuadripolos se dicen conectados en paralelo cuando se aplica a todas las puertas de entrada la misma tensión  $U_1$  y a todas las puertas de salida la misma tensión  $U_2$  como se muestra en **Fig. 1.42**.



**Fig. 1.42.** Interconexión de cuadripolos: entradas en paralelo y salidas en paralelo.

Lo más apropiado sería denominar la conexión como: *paralelo-paralelo*, lo que significa conexión en paralelo a la entrada y en paralelo a la salida. En este caso resulta conveniente considerar el sistema de ecuaciones del cuadripolo que resulta cuando las variables independientes son las tensiones de entrada y de salida, que son las variables comunes a los cuadripolos interconectados. Por lo tanto, los cuadripolos estarán caracterizados por los parámetros admitancia, y las ecuaciones para cada uno serán:

$$I' = Y' \cdot U'$$

$$I'' = Y'' \cdot U''$$

Como puede observarse, la interconexión en paralelo impone las siguientes condiciones:

$$U = U' = U''$$

$$I = I' + I''$$

Sumando miembro a miembro las expresiones de los cuadripolos individuales, y teniendo en cuenta las condiciones impuestas por la interconexión resulta:

$$I = (Y' + Y'') \cdot U$$

Lo que indica que la matriz  $Y$  del cuadripolo equivalente a la interconexión en paralelo está dada por la suma de las matrices de los cuadripolos interconectados:

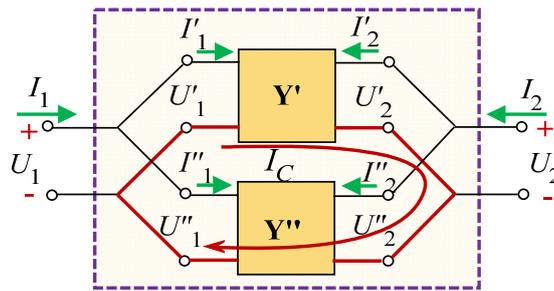
$$Y = Y' + Y'' \tag{1-58}$$

Este análisis es válido si los parámetros de cada cuadripolo aislado, no se modifican cuando se vinculan entre sí. En efecto, cuando se realiza la conexión, uno de los cuadripolos podría modificar los parámetros del otro, y en tal situación lo deducido no sería aplicable.

Esto nunca ocurrirá si los cuadripolos conectados *en paralelo* son todos balanceados o bien todos no balanceados, pero siempre que se conecten *en paralelo* cuadripolos de ambos tipos balanceados y no balanceados, se pondrá de manifiesto este inconveniente.

Prueba de Brune

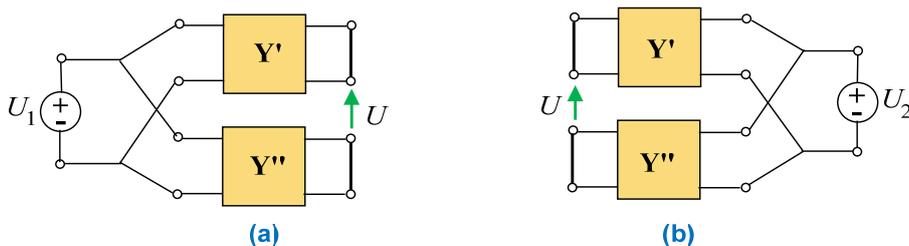
Cuando se conecten en paralelo cuadripolos balanceados y no balanceados se presentará la situación que se ilustra en la **Fig. 1.43**, donde se muestra cómo al interconectar los cuadripolos se forma entre ellos un lazo interno en el que se puede establecer una corriente denominada corriente de circulación  $I_C$ , que no se manifiesta en los terminales del cuadripolo *combinado*.



**Fig. 1.43.** Interconexión de cuadripolos en paralelo-paralelo: corrientes de circulación.

Obsérvese que el sentido de  $I_C$  es tal que reduce la magnitud de la corriente en uno de los terminales de algunas puertas e incrementa la magnitud de corriente en otros terminales de las otras puertas de los cuadripolos *individuales*. Por lo tanto la condición de que en cada puerta de un cuadripolo la corriente que entra es igual a la que sale, sólo se cumple en el cuadripolo combinado resultante de la interconexión, pero no en los cuadripolos individuales interconectados. Si esto ocurre, lo cual sería como consecuencia que  $I_C$  es no nula, entonces no sería válido obtener la matriz  $Y$  mediante (1-58) porque las matrices de los cuadripolos individuales cambiarían cuando se efectúa la interconexión.

Entonces para poder aplicar (1-58) hay que verificar que  $I_C=0$  y esto se consigue mediante la regla de Brune, que en este caso, consiste en realizar la conexiones indicadas en **Fig. 1.44**, debiéndose cumplir para ambas situaciones que la tensión  $U$  sea nula ( $U=0$ ).



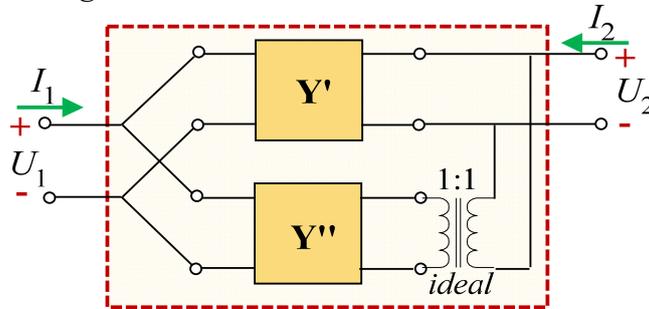
**Fig. 1.44.** Prueba de Brune para Interconexión paralelo-paralelo: (a) entradas excitadas con variable común y salidas individuales con variable común anulada; (b) salidas excitadas con variable común y entradas individuales con variable común anulada.

La regla general de la prueba de Brune consiste en la siguiente secuencia de pasos que se deben repetir para ambas puertas del cuadripolo resultante:

- 1) Se excita en una de las puertas del cuadripolo resultante con la variable común a los cuadripolos individuales.
- 2) Se anula la variable común entre los cuadripolos individuales en la otra puerta de la interconexión.
- 3) Se mide la tensión  $U$  entre los 2 puntos donde se anuló la variable común.

La realización de esta prueba en ambas puertas del cuadripolo resultante debe dar por resultado  $U=0$ .

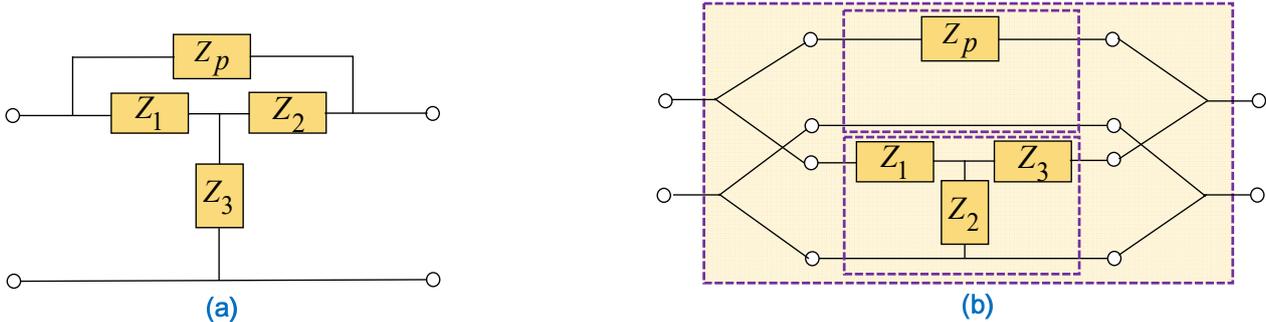
Si no se cumple esta condición aún se podrían poner en paralelo los cuadripolos, y obtener la matriz  $Y$  del cuadripolo resultante mediante la expresión (1-58). Esto se hace utilizando un transformador ideal de relación 1:1, como se indica en **Fig. 1.45**.



**Fig. 1.45.** Recurso para efectuar la interconexión paralelo-paralelo cuando no se cumple la prueba de Brune.

**Ejemplo 1.6.**

Determinar la matriz  $Y$  de admitancias en cortocircuito de la celda T puenteada de la **Fig. 1.46a**.



**Fig. 1.46.** (a) Celda T puenteada. (b) Esquema de equivalencia con dos cuadripolos en paralelo-paralelo.

**Resolución**

La celda T puenteada de la **Fig. 1.46a**, puede ser interpretada como la conexión en paralelo de una celda T, con otra que solo tiene un elemento en serie, tal como se muestra en la **Fig. 1.46b**.

Los elementos de la matriz de Admitancias del elemento serie son:

$$Y_p = \begin{bmatrix} 1/Z_p & -1/Z_p \\ -1/Z_p & 1/Z_p \end{bmatrix}$$

Los elementos de la matriz de Admitancias de la celda T resultan:

$$Y_T = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1 + \frac{1}{\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}}} & \frac{-1}{Z_2 + \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_3}}} \cdot \frac{1}{Z_1 + \frac{1}{Z_3}} \cdot \frac{1}{Z_1} \\ \frac{-1}{Z_1 + \frac{1}{\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}}} \cdot \frac{1}{Z_2 + \frac{1}{Z_3}} \cdot \frac{1}{Z_2} & \frac{1}{Z_2 + \frac{1}{\frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_1}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_2 + Z_3}{Z_T^2} & \frac{-Z_3}{Z_T^2} \\ \frac{-Z_3}{Z_T^2} & \frac{Z_1 + Z_3}{Z_T^2} \end{bmatrix}$$

siendo

$$Z_T^2 = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3$$

Entonces la matriz Admitancias del paralelo resulta:

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{Z_p(Z_2 + Z_3) + Z_T^2}{Z_T^2 Z_p} & -\frac{Z_p Z_3 + Z_T^2}{Z_T^2 Z_p} \\ -\frac{Z_p Z_3 + Z_T^2}{Z_T^2 Z_p} & \frac{Z_p(Z_1 + Z_3) + Z_T^2}{Z_T^2 Z_p} \end{bmatrix}$$

**Ejemplo 1.7.**

Determinar la expresión de la transferencia de tensión  $U_2/U_1$  para la celda T puenteada de la **Fig. 1.46a**.

**Resolución**

Se empleará la ecuación del cuadripolo que expresa a la corriente de salida en función de los parámetros admitancia, que ya fueron determinados en el ejemplo anterior:

$$I_2 = y_{21} U_1 + y_{22} U_2$$

Y dado que la T puenteada se encuentra descargada en ambos extremos, en este caso  $I_2=0$ , con lo cual:

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{y_{21}}{y_{22}}$$

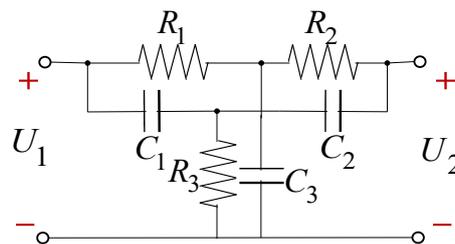
Reemplazando con los elementos  $y_{21}$  e  $y_{22}$  encontrados en el **Ejemplo 1.6** resulta:

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{-\frac{Z_p Z_3 + Z_T^2}{Z_T^2 Z_p}}{\frac{Z_p(Z_1 + Z_3) + Z_T^2}{Z_T^2 Z_p}} = \frac{Z_p Z_3 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_p Z_1 + Z_p Z_3 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}$$

La expresión buscada, se obtiene en forma directa, sin necesidad de plantear ecuaciones de corrientes de malla o tensiones de nodos.

**Ejemplo 1.8.**

Determinar la función de transferencia definida como:  $|H(s)| = |U_2(s)/U_1(s)|_{I_2(s)=0}$  de la celda de la **Fig. 1.47** conocida como *doble T* ó *T gemelas* (en inglés, *twin T*).



**Fig. 1.47.** Celda doble T.

**Resolución**

La función de transferencia definida como:  $|H(s)| = |U_2(s)/U_1(s)|_{I_2(s)=0}$  puede obtenerse efectuando el análisis en el dominio de Laplace, anulando todas las condiciones iniciales, y planteando las matrices de admitancias en cortocircuito de cada celda T.

La celda de la **Fig. 1.47** puede analizarse como dos celdas T en paralelo, como se muestra en la **Fig. 1.48**.

La correspondencia entre la **Fig. 1.47** y la **Fig. 1.48** indica que:

$$Z_{1a} = R_1; \quad Z_{2a} = R_2; \quad Z_{3a} = 1/sC_3$$

$$Z_{1b} = 1/sC_1; \quad Z_{2b} = 1/sC_2; \quad Z_{3b} = R_3$$

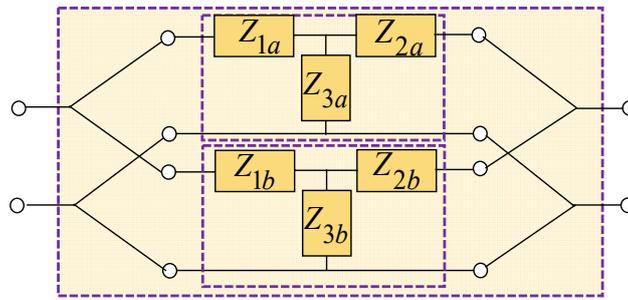


Fig. 1.48. Esquema de equivalencia de la celda doble T con dos celdas T en paralelo-paralelo.

De este modo se puede adecuar la expresión de la matriz  $\mathbf{Y}_T$  obtenida en el [Ejemplo 1.6](#) para cada una de las T gemelas, y la matriz de admitancias de cortocircuito del paralelo de dos celdas T de la [Fig. 1.48](#) resulta:

$$\mathbf{Y}_{TT} = \begin{bmatrix} \frac{Z_{2a} + Z_{3a}}{Z_{Ta}^2} + \frac{Z_{2b} + Z_{3b}}{Z_{Tb}^2} & -\frac{Z_{3a}}{Z_{Ta}^2} - \frac{Z_{3b}}{Z_{Tb}^2} \\ -\frac{Z_{3a}}{Z_{Ta}^2} - \frac{Z_{3b}}{Z_{Tb}^2} & \frac{Z_{1a} + Z_{3a}}{Z_{Ta}^2} + \frac{Z_{1b} + Z_{3b}}{Z_{Tb}^2} \end{bmatrix}$$

Siendo:

$$Z_{Ta}^2 = R_1 R_2 + R_1 \frac{1}{sC_3} + R_2 \frac{1}{sC_3} \qquad Z_{Tb}^2 = \frac{1}{s^2 C_1 C_2} + \frac{1}{sC_1} R_3 + \frac{1}{sC_2} R_3$$

De la expresión del cuadripolo correspondiente a los parámetros Y, para la corriente  $I_2=0$  resulta:

$$H(s) = \left. \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \right|_{I_2=0} = -\frac{y_{21}}{y_{22}} = \frac{Z_{3a} \cdot Z_{Tb}^2 + Z_{3b} \cdot Z_{Ta}^2}{(Z_{1a} + Z_{3a}) \cdot Z_{Tb}^2 + (Z_{1b} + Z_{3b}) \cdot Z_{Ta}^2}$$

Resultando:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC_3} \cdot \left( \frac{1}{s^2 C_1 C_2} + \frac{1}{sC_1} R_3 + \frac{1}{sC_2} R_3 \right) + R_3 \cdot \left( R_1 R_2 + R_1 \frac{1}{sC_3} + R_2 \frac{1}{sC_3} \right)}{\left( R_1 + \frac{1}{sC_3} \right) \cdot \left( \frac{1}{s^2 C_1 C_2} + \frac{1}{sC_1} R_3 + \frac{1}{sC_2} R_3 \right) + \left( \frac{1}{sC_1} + R_3 \right) \cdot \left( R_1 R_2 + R_1 \frac{1}{sC_3} + R_2 \frac{1}{sC_3} \right)}$$

**Ejemplo 1.9.**

Obtener la matriz  $\mathbf{Y}$  de la celda lattice mostrada en la [Fig. 1.49a](#).

**Resolución**

La celda lattice de la [Fig. 1.49a](#), puede ser interpretada como la conexión en paralelo de las dos celdas balanceadas [Fig. 1.49b](#) y [Fig. 1.49c](#).

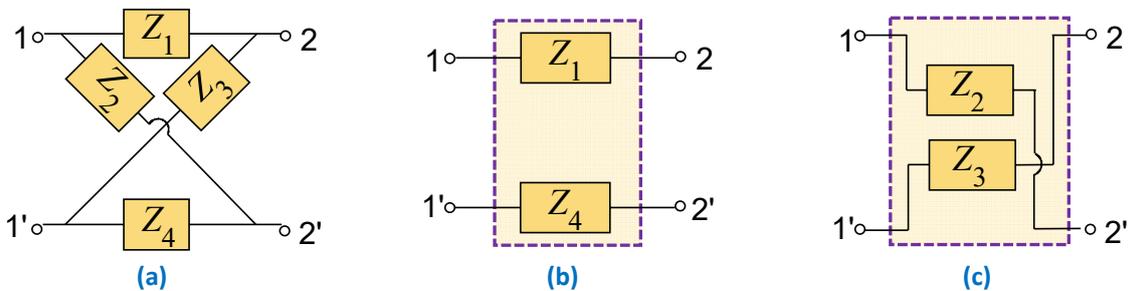


Fig. 1.49. Descomposición de la celda lattice representada en (a) en las celdas (b) y (c) en paralelo-paralelo.

Sean, respectivamente,  $\mathbf{Y}_b$  e  $\mathbf{Y}_c$  las matrices de admitancias en cortocircuito de los circuitos de [Fig. 1.49b](#) de [Fig. 1.49c](#), que resultan:

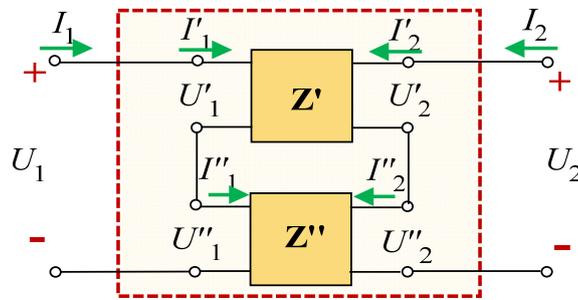
$$Y_b = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1+Z_4} & -\frac{1}{Z_1+Z_4} \\ -\frac{1}{Z_1+Z_4} & \frac{1}{Z_1+Z_4} \end{bmatrix} \quad Y_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_2+Z_3} & \frac{1}{Z_2+Z_3} \\ \frac{1}{Z_2+Z_3} & \frac{1}{Z_2+Z_3} \end{bmatrix}$$

Entonces, la matriz **Y** de la celda lattice original de **Fig. 1.49a** resulta:

$$Y = Y_b + Y_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1+Z_4} + \frac{1}{Z_2+Z_3} & \frac{1}{Z_2+Z_3} - \frac{1}{Z_1+Z_4} \\ \frac{1}{Z_2+Z_3} - \frac{1}{Z_1+Z_4} & \frac{1}{Z_1+Z_4} + \frac{1}{Z_2+Z_3} \end{bmatrix}$$

### 1.10.2. Conexión de cuadripolos en serie

Dos ó más cuadripolos se dicen conectados en serie cuando en todas las puertas de entrada circula la misma corriente  $I_1$  y en todas las puertas de salida circula la misma corriente  $I_2$ . En este caso, sería más apropiado denominar la conexión como: *serie-serie*, lo que significa conexión en serie a la entrada y en serie a la salida, como se indica **Fig. 1.50**.



**Fig. 1.50.** Interconexión de cuadripolos: entradas en serie y salidas en serie.

En este caso resulta conveniente considerar el sistema de ecuaciones del cuadripolo que resulta cuando las variables independientes son las corrientes de entrada y de salida, que son las variables comunes a los cuadripolos interconectados. Por lo tanto, los cuadripolos estarán caracterizados por los parámetros impedancia, y las ecuaciones para cada uno serán:

$$U' = Z' \cdot I'$$

$$U'' = Z'' \cdot I''$$

En este caso, la interconexión en serie en ambas puertas impone las siguientes condiciones:

$$U = U' + U''$$

$$I = I' = I''$$

Sumando miembro a miembro las expresiones de los cuadripolos individuales, y teniendo en cuenta las condiciones impuestas por la interconexión resulta:

$$U = (Z' + Z'') \cdot I$$

Lo que indica que la matriz **Z** del cuadripolo equivalente a la interconexión en serie está dada por la suma de las matrices de los cuadripolos interconectados:

$$Z = Z' + Z'' \tag{1-59}$$

Nuevamente, este análisis es válido si los parámetros de cada cuadripolo aislado, no se modifican cuando se vinculan entre sí. En efecto, cuando se realiza la conexión, uno de los cuadripolos podría modificar los parámetros del otro, y en tal situación lo deducido no sería aplicable.

Esto ocurrirá siempre que alguno de los cuadripolos conectados *en serie* sea no balanceado, pero siempre que se conecten *en serie* cuadripolos balanceados, nunca se pondrá de manifiesto este inconveniente.

### Prueba de Brune

Cuando se conecten en serie cuadripolos balanceados y no balanceados se presentará la situación que se ilustra en la **Fig. 1.51**, donde se muestra cómo al interconectar los cuadripolos se forma entre ellos un lazo

interno en el que se puede establecer una corriente denominada corriente de circulación  $I_C$ , que no se manifiesta en los terminales del cuadripolo *combinado*.

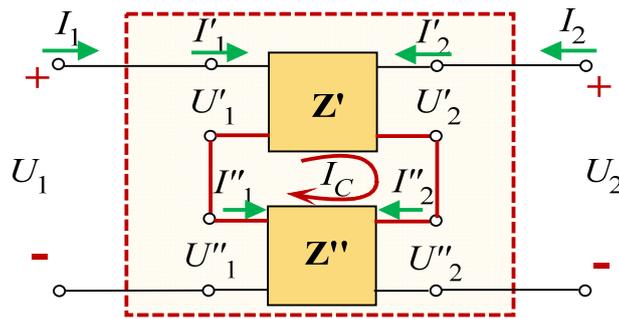


Fig. 1.51. Interconexión de cuadripolos en serie-serie: corrientes de circulación.

El sentido de  $I_C$  es tal que reduce la magnitud de la corriente en uno de los terminales de algunas puertas e incrementa la magnitud de corriente en los otros terminales de los cuadripolos *individuales*.

Por lo tanto la condición de que en cada puerta de un cuadripolo la corriente que entra es igual a la que sale, sólo se cumple en el cuadripolo *combinado* resultante de la interconexión, pero no en los cuadripolos *individuales* interconectados.

Si esto ocurre, lo cual sería como consecuencia que  $I_C$  es no nula, entonces no sería válido obtener la matriz  $Z$  mediante (1-59) porque los cuadripolos *individuales* se modifican cuando se efectúa la interconexión.

Entonces para poder aplicar (1-59) hay que verificar que  $I_C=0$  y esto se consigue mediante la regla de Brune, que en este caso, consiste en realizar la conexiones indicadas en Fig. 1.52, debiéndose cumplir para ambas situaciones que  $U=0$ .

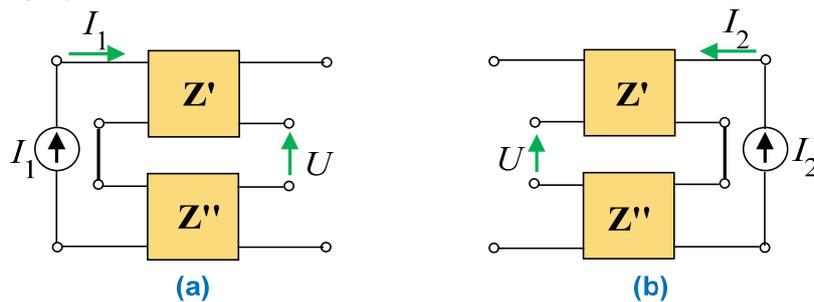


Fig. 1.52. Prueba de Brune para Interconexión serie-serie: (a) entradas excitadas con variable común y salidas individuales con variable común anulada; (b) salidas excitadas con variable común y entradas individuales con variable común anulada.

La regla general de la prueba de Brune consiste en la siguiente secuencia de pasos que se deben repetir para ambas puertas del cuadripolo resultante:

- 1) Excitar una de las puertas del cuadripolo resultante con la variable común a los cuadripolos *individuales*.
- 2) Anular la variable común entre los cuadripolos *individuales* en la otra puerta de la interconexión.
- 3) Medir la tensión  $U$  entre los 2 puntos donde se anuló la variable común.

La realización de esta prueba en ambas puertas del cuadripolo resultante debe dar por resultado  $U=0$ .

Si no se cumple esta condición aún se podría poner en serie los cuadripolos y obtener la matriz  $Z$  del cuadripolo resultante mediante la expresión (1-59). Esto se hace utilizando un transformador ideal de relación 1:1, como se indica en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.10.

Efectuar una conexión entradas en serie - salidas en serie entre dos celdas T.

Resolución

La conexión entradas en serie - salidas en serie entre dos celdas T no puede efectuarse de manera directa, porque en tal caso quedaría cortocircuitada la rama serie de una de las celdas.

Para evitar este inconveniente, sería necesario emplear un transformador ideal de relación 1:1 para conectar en serie ambas puertas de salida, como se indica en la Fig. 1.53.

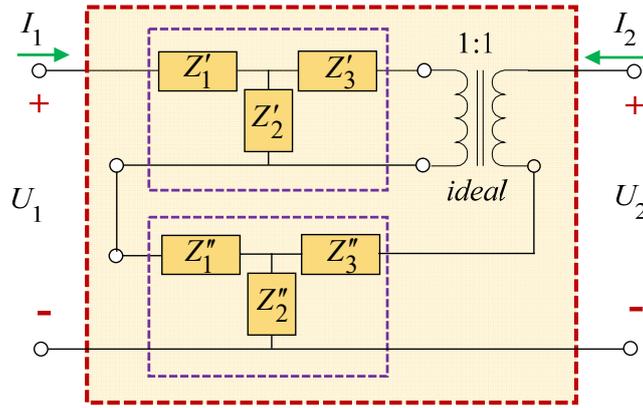


Fig. 1.53. Recurso para efectuar la interconexión serie-serie cuando no se cumple la prueba de Brune.

1.10.3. Conexión de cuadripolos en serie-paralelo

Dos o más cuadripolos se dicen conectados en serie-paralelo, cuando en todas las puertas de entrada circula la misma corriente  $I_1$  y todas las puertas de salida tienen aplicada la misma tensión  $U_2$ . En la Fig. 1.54 se muestra esta conexión entre dos cuadripolos.

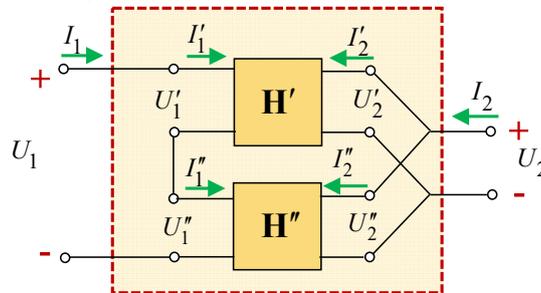


Fig. 1.54. Interconexión de cuadripolos: entradas en serie y salidas en paralelo.

Las expresiones correspondientes son:

$$\begin{vmatrix} U'_1 + U''_1 \\ I'_2 + I''_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_1 \\ I_2 \end{vmatrix} = (\mathbf{H}' + \mathbf{H}'') \begin{vmatrix} I_1 \\ U_2 \end{vmatrix}$$

Esta conexión es válida si no existe la corriente de circulación  $I_C$  entre ambos cuadripolos, que en este caso circularía como se indica en Fig. 1.55.

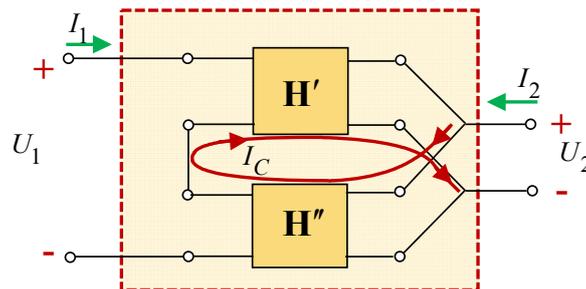


Fig. 1.55. Interconexión de cuadripolos en serie-paralelo: corrientes de circulación.

Para verificar si la corriente  $I_C$  es nula, en este caso la prueba de Brune sería la que sugiere la Fig. 1.56.

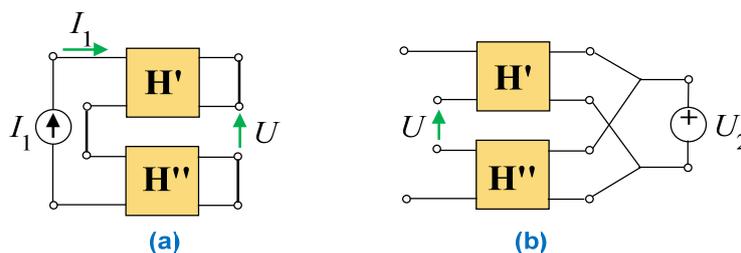
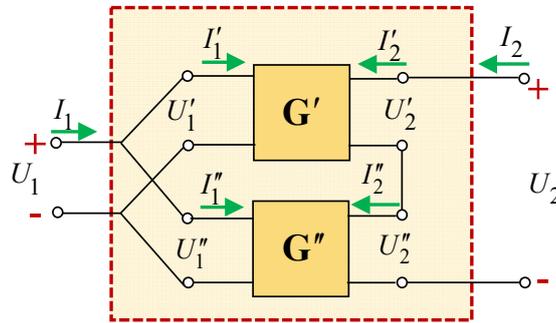


Fig. 1.56. Prueba de Brune para Interconexión serie-paralelo: (a) entradas excitadas con variable común y salidas individuales con variable común anulada; (b) salidas excitadas con variable común y entradas individuales con variable común anulada.

La corriente de circulación  $I_C$  será nula cuando lo sea la tensión  $U$  medida en **Fig. 1.56a** y en **Fig. 1.56b**.

1.10.4. Conexión de cuadripolos en paralelo-serie

Paralelo-serie. Todas las puertas de entrada tienen aplicada la misma tensión  $U_1$  y en todas las puertas de salida circula la misma corriente  $I_2$ . En la **Fig. 1.57** se muestra esta conexión entre dos cuadripolos.

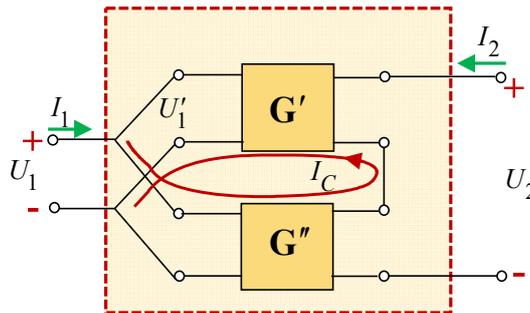


**Fig. 1.57.** Interconexión de cuadripolos: entradas en paralelo y salidas en serie.

Las expresiones correspondientes son:

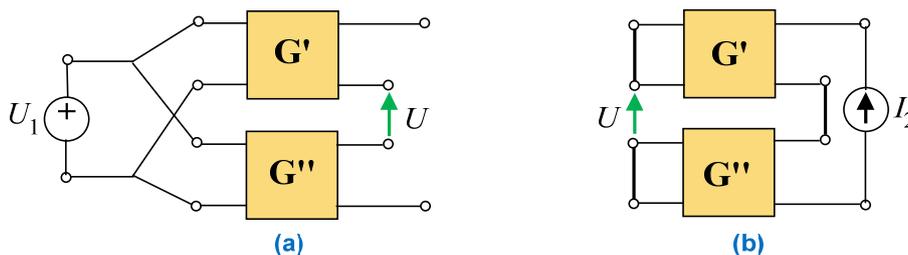
$$\begin{vmatrix} I_1' + I_1'' \\ U_2' + U_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_1 \\ U_2 \end{vmatrix} = (\mathbf{G}' + \mathbf{G}'') \begin{vmatrix} U_1 \\ I_2 \end{vmatrix}$$

Esta conexión es válida si no existe corriente de circulación entre ambos cuadripolos, que en este caso circularía como se indica en **Fig. 1.58**.



**Fig. 1.58.** Interconexión de cuadripolos en paralelo-serie: corrientes de circulación.

Para verificar si hay corriente de circulación, en este caso la prueba de Brune es la que sugiere la **Fig. 1.59**.

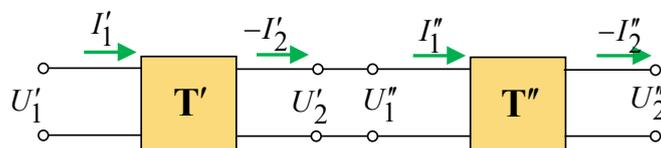


**Fig. 1.59.** Prueba de Brune para Interconexión paralelo-serie: (a) entradas excitadas con variable común y salidas individuales con variable común anulada; (b) salidas excitadas con variable común y entradas individuales con variable común anulada.

La corriente de circulación será nula cuando la tensión  $U$  sea nula tanto en **Fig. 1.59a** como en **Fig. 1.59b**.

1.10.5. Cuadripolos en cascada

Dos cuadripolos se dicen conectados en cascada cuando la salida del primer cuadripolo se conecta a la entrada del segundo. Es decir, las variables de salida del primer cuadripolo son las variables de entrada del segundo. En la **Fig. 1.60** se muestra la conexión en cascada de dos cuadripolos.



**Fig. 1.60.** Interconexión de cuadripolos en cascada.

Las matrices de transmisión de cada uno de ellos son:

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ I_1' \end{bmatrix} = \mathbf{T}' \cdot \begin{bmatrix} U_2' \\ -I_2' \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} U_2'' \\ -I_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1'' \\ I_1'' \end{bmatrix} = \mathbf{T}'' \cdot \begin{bmatrix} U_2'' \\ -I_2'' \end{bmatrix}$$

Resultando por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ I_1' \end{bmatrix} = (\mathbf{T}' \cdot \mathbf{T}'') \cdot \begin{bmatrix} U_2'' \\ -I_2'' \end{bmatrix}$$

Es decir que la matriz de Transmisión resultante de poner en cascada dos cuadripolos, es igual al producto de las matrices de Transmisión, en el orden en que están conectadas (ya que el producto de matrices no es conmutativo).

**1.11. Redes iterativas**

En ingeniería en telecomunicaciones o eléctrica se utilizan muchas veces redes que consisten en circuitos iterativos, es decir en un cierto número de etapas pasivas idénticas, conectadas en cascada, entre un generador y una carga.

Como ejemplo pueden citarse líneas artificiales, filtros de onda, etc. En la Fig. 1.61 se ejemplifica este tipo de redes iterativas.

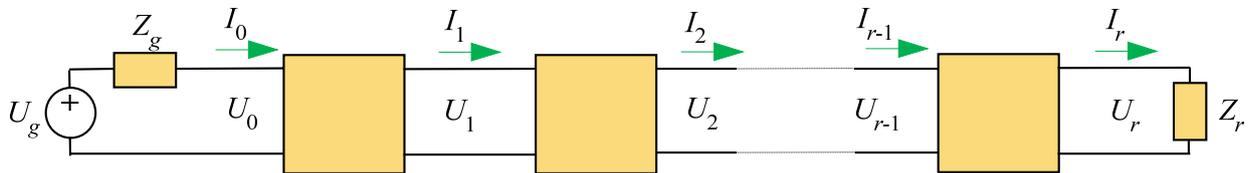


Fig. 1.61. Redes iterativas.

Por aplicación sucesiva de las ecuaciones generales de circuitos, o de la matriz de transmisión, es posible encontrar el valor de la tensión y de la corriente, en cualquier etapa intermedia de la cascada, pero este es un proceso muy laborioso. Por ejemplo, si hay 100 secciones en cascada, habrá que escribir y resolver 101 ecuaciones simultáneas para calcular una corriente de una etapa cualquiera.

*Este trabajo puede simplificarse notablemente si todas las celdas son idénticas.*

Se define como *impedancia iterativa* de un cuadripolo a aquella impedancia que, conectada a un par de terminales (de entrada o de salida), produce una impedancia igual en el otro par de terminales.

Extendiendo lo visto en 1.10.5, en una red iterativa simétrica, resulta:

$$\frac{U_1}{U_{k+1}} = \frac{U_1}{U_2} \cdot \frac{U_2}{U_3} \dots \frac{U_k}{U_{k+1}} = e^{k\gamma}$$

Resultando que *la atenuación y el desfase producido por k secciones, es igual a k veces la atenuación y el desfase producido por una sección.*

Además, si se disponen en cascada secciones de redes con la misma impedancia característica pero con distintas constantes de propagación ( $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ ), terminadas en la impedancia característica, resulta:

$$e^\gamma = e^{(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n)}$$

**Ejemplo 1.11.**

Dado el cuadripolo T de la Fig. 1.62, hallar la impedancia iterativa.

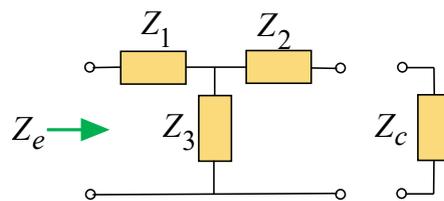


Fig. 1.62. Impedancia iterativa de un cuadripolo T cargado.

**Resolución**

La impedancia de entrada de este cuadripolo cargado es:

$$Z_e = Z_1 + \frac{Z_3(Z_2 + Z_c)}{Z_2 + Z_3 + Z_c}$$

Haciendo:

$$Z_e = Z_c = Z_{it}$$

Resulta que la impedancia iterativa es:

$$Z_{it} = \frac{Z_1 - Z_2}{2} + \sqrt{\frac{(Z_1 + Z_2)^2}{4} + Z_3(Z_1 + Z_2)}$$

En una red compuesta por celdas idénticas, terminada en su impedancia iterativa, cada celda estará cargada con su impedancia iterativa, que también resulta ser la impedancia de entrada de las celdas, y por lo tanto resulta posible calcular el comportamiento de cada sección, independientemente de las demás.

---

### 1.12. Bibliografía

- [1] M. E. Van Valkenburg. *Análisis de Redes*. Capítulo 11 “Parámetros de dos puertos”. Ed. Editorial Limusa. México. 1999. ISBN 9789681801786.
- [2] W. Warzanskyj Poliscuk. *Análisis de Circuitos*. Capítulo XII “Redes de dos Puertas”. Capítulo XIII: “Redes Simétricas y Especiales”. Universidad Politécnica de Madrid. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicaciones. 1979. ISBN 9788460058410.
- [3] Kendall L. Su. *Introducción al estudio de los circuitos, la electrónica y el análisis de señales*. Capítulo 7: “Redes Lineales Bipuerta y de Tres Terminales”. Editorial Reverté S.A. Barcelona, 1979. ISBN 8429134492.
- [4] F. López Ferreras. *Análisis de Circuitos Lineales (Vol. II)*. Editorial Ciencia 3 Distribución S.L. Madrid. 2001. ISBN 84-95391-83X.
- [5] William H. Hayt, Jr. Jack E. Kemmerly and Steven M. Durbin. *Análisis de Circuitos en Ingeniería*. 8ª Ed. Capítulo 17 “Redes de dos Puertos”. Mc Graw Hill Interamericana. México D.F., 2012. ISBN: 978-607-15-0802-7.
- [6] A. Anand Kumar. *Network Analysis and Circuits*. Chapter 15 “Two-Port Networks”. PHI Learning Private Limited. Delhi, 2019. ISBN: 978-93-88028-10-3.

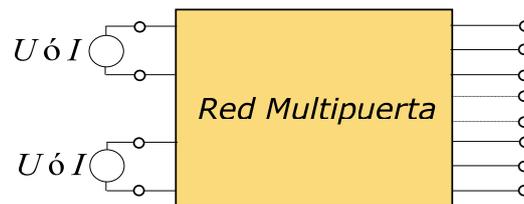


# Capítulo 2

## Redes Multipuerta

### 2.1. Introducción

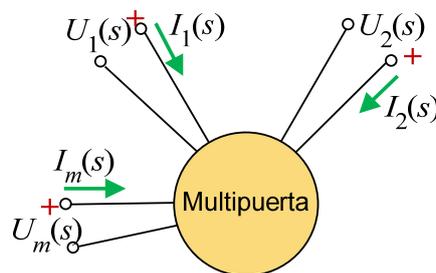
El concepto de red multipuerta puede aplicarse acualquier red que pueda considerarse como una *caja negra* con  $p$  pares de terminales de entrada donde se conectan los generadores independientes, y  $q$  pares de terminales de salida, donde se conectan las cargas (las cuales pueden ser otras redes multipuerta). En la **Fig. 2.1** se ejemplifica una red multipuerta.



**Fig. 2.1.** Esquema de definición de red multipuerta.

Hemos visto las redes bipuerta o cuadripolos, con dos pares de terminales (un par de terminales de entrada y otro de salida); es decir circuitos con cuatro terminales tomados de dos en dos.

Los resultados podrían generalizarse para circuitos con  $m$  pares de terminales, como se muestra en **Fig. 2.2**.



**Fig. 2.2.** Esquema de red de  $m$  puertas con las variables de cada puerta y las respectivas convenciones de signos.

Esta generalización nos permitirá definir matrices como la matriz de impedancias o la matriz de admitancias, ya que en estos casos los parámetros de estas matrices resultarán:

$$z_{jk}(s) = \left. \frac{U_j(s)}{I_k(s)} \right|_{\text{demás corrientes}=0}$$

$$z_{jk}(s) = \left. \frac{I_j(s)}{U_k(s)} \right|_{\text{demás tensiones}=0}$$

Esta generalización ya no será posible para variables combinadas, como es el caso de las matrices híbridas directa **H** e inversa **G** y el caso de la matriz de transmisión **T**.

Al igual que los cuadripolos, los pares de terminales de estos *n*-polos se pueden conectar con otros *n*-polos, en serie, en paralelo, en cascada, o combinaciones de las mismas.

### 2.2. Matriz de admitancias indefinida

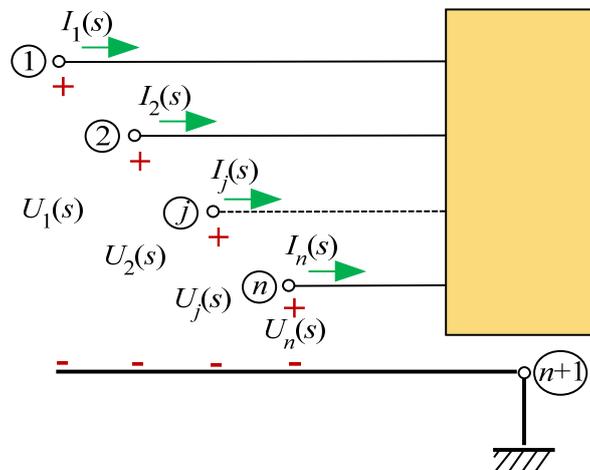
La descripción de las redes mediante puertas (pares de terminales) solo es necesaria cuando hay que realizar conexiones exteriores por terminales tomados de a pares.

En general, los terminales no necesitan estar apareados. En tal caso es más práctico una descripción de la red, desde el punto de vista del comportamiento externo, como una red multiterminal en vez de como una red multipuerta. De hecho, hay casos en que resulta más conveniente tratar a una red o a un dispositivo con un enfoque basado en sus terminales o polos y no en base a sus puertas. Como primer ejemplo se puede citar al transistor, que es un dispositivo de tres terminales, que pueden tener distintas formas conectarse. La ventaja más importante de tratar a una red o dispositivo atendiendo a sus terminales es que no se adquiere un compromiso previo acerca de cómo se aparean o agrupan los terminales.

Aún cuando para caracterizar a una red multiterminal o multipolo puede utilizarse la matriz de impedancias, la de utilización más conveniente es, con mucho, la matriz de admitancias. La matriz de admitancias que caracteriza a una red multiterminal se denomina *matriz de admitancias indefinida* (MAI) Una red multiterminal es una generalización de una red multipuerta. En efecto, una red con *n* puertas, donde la tensión de cada puerta tiene un nodo común, es igual a una red de *n*+1 terminales, siendo el terminal (*n*+1) el común.

Supongamos tener una red conexas, de *n* terminales que sea lineal y que no contenga ningún generador independiente. Por ser conexas, ninguno de sus terminales estará aislado de los demás.

Apliquemos a la red *n* tensiones exteriores  $U_1(s), U_2(s), \dots, U_j(s), \dots, U_n(s)$ , respecto a un nodo *exterior* adoptado como nodo de referencia (*tierra*), tal como se indica en la **Fig. 2.3**.



**Fig. 2.3.** Esquema de red multiterminal.

En este caso, las corrientes no están asociadas con las puertas sino con los terminales.

Evidentemente para esta red se satisface la primera Ley de Kirchhoff, es decir:

$$\sum_{k=1}^n I_k(s) = 0$$

Las intensidades pueden expresarse en función de las tensiones terminales, respecto del nodo común, dando:

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ \vdots \\ I_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) & \dots & y_{1n}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) & \dots & y_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(s) & y_{n2}(s) & \dots & y_{nn}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_n(s) \end{bmatrix}$$

Donde los coeficientes de la matriz son admitancias en cortocircuito, según se observa en **Fig. 2.4**.

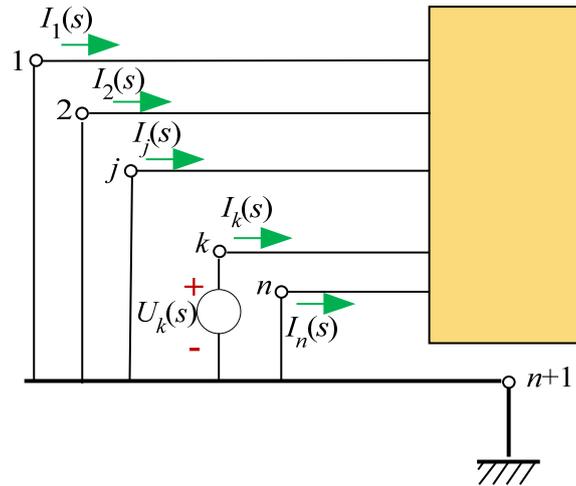


Fig. 2.4. Esquema para la determinación de los coeficientes de la fila k de la matriz Y.

En efecto, los coeficientes de esta matriz de admitancias están definidos por:

$$y_{jk} = \left. \frac{I_j(s)}{U_k(s)} \right|_{\text{demás terminales al nodo de referencia}}$$

La matriz resultante se denomina *matriz de admitancias indefinida*, y se representa por:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}_i \cdot \mathbf{U}$$

Para ver algunas propiedades de esta matriz, resulta conveniente desarrollar las expresiones en forma explícita:

$$I_1(s) = y_{11} U_1(s) + y_{12} U_2(s) + \dots + y_{1n} U_n(s)$$

$$I_2(s) = y_{21} U_1(s) + y_{22} U_2(s) + \dots + y_{2n} U_n(s)$$

.

$$I_n(s) = y_{n1} U_1(s) + y_{n2} U_2(s) + \dots + y_{nn} U_n(s)$$

Sumando miembro a miembro todas las ecuaciones resulta:

$$\sum_{i=1}^n I_i(s) = [y_{11} + y_{21} + \dots + y_{n1}]U_1(s) + [y_{12} + y_{22} + \dots + y_{n2}]U_2(s) + \dots + [y_{1n} + y_{2n} + \dots + y_{nn}]U_n(s)$$

Pero por aplicación de la primera Ley de Kirchhoff:

$$\sum_{i=1}^n I_i(s) = 0$$

Las cantidades entre corchetes son sumas de elementos de una columna de la matriz. Las tensiones terminales son todas independientes entre sí.

Supóngase cortocircuitados al nodo común todos los terminales menos el k-ésimo, al cual se le aplica un generador de tensión  $U_k$ , es decir:

$$U_j(s) = 0 \quad U_k(s) \neq 0 \quad j \neq k$$

Entonces, la expresión anterior se reduce a:

$$[y_{1k} + y_{2k} + \dots + y_{nk}]U_k(s) = 0 \quad \text{con} \quad U_k(s) \neq 0$$

Entonces: *La suma de todos los elementos de una columna de la matriz de admitancias indefinida es nula.*

Luego, las filas de esta matriz son linealmente dependientes, y la matriz es singular (determinante nulo).

Supongamos ahora que se dejan abiertos todos los terminales, menos el j-ésimo al cual se le aplica una tensión  $U_j(s)$ .

Las intensidades en todos los demás terminales serán nulas, por estar abiertos, es decir:

$$I_i(s) = 0 \text{ para } i \neq j, \text{ y también será } I_j(s) = 0 \text{ por ser } \sum I = 0$$

Y por ser una red conexas, la tensión de todos los terminales será igual a  $U_j(s)$ .  
 En estas condiciones resulta que una cualquiera de las corrientes, la  $I_j(s)$ , es igual a:

$$I_j(s) = y_{j1}U_1(s) + y_{j2}U_2(s) + \dots + y_{jj}U_j(s) + \dots + y_{jn}U_n(s)$$

$$I_j(s) = [y_{j1} + y_{j2} + \dots + y_{jk} + \dots + y_{jn}]U_j(s) = 0 \quad \text{con} \quad U_j(s) \neq 0$$

Por lo tanto *La suma de todos los elementos de una fila de la matriz de admitancias indefinida es nula.*

### 2.3. Relación entre la MAI y la matriz de admitancias en cortocircuito

Realizar una red de  $n$  puertas con un terminal común, a partir de una red de  $(n+1)$  terminales resulta sencillo, si se conoce la matriz de admitancias indefinida de esta última red.

Si se toma como terminal de referencia arbitrario el terminal que va a ser el común, por ejemplo el  $n+1$ , su tensión será nula. Luego podrá suprimirse la última columna (columna  $n+1$ ) de la matriz de admitancias indefinida, ya que sus elementos son los que se multiplican por esa tensión, que será nula. Además, en función de la primer Ley de Kirchhoff, la corriente de ese terminal es conocida, y podrá eliminarse la última fila de la matriz de admitancias indefinida.

Así resulta que: “Para hacer que uno de los terminales de una red multiterminales sea el terminal común de una red de  $n$  puertas puesta a tierra, basta suprimir la fila y la columna correspondiente a dicho terminal de la matriz de admitancias indefinida”. Esto resulta en una matriz de admitancias en cortocircuito, con el terminal suprimido como el nodo común de todas las  $n$ -puertas.

La operación inversa es: “Dada la matriz de admitancias en cortocircuito de una red de  $n$  puertas con terminal común, se le agrega a dicha matriz otra fila, cuyos elementos sean las sumas, cambiadas de signo, de todos los elementos de cada columna. Luego se agrega otra columna, cada uno de cuyos elementos es igual a la suma, cambiada de signo, de todos los elementos de la fila correspondiente”. Esto resulta en una matriz de admitancias indefinida.

#### Ejemplo 2.1.

El circuito equivalente de un FET en conexión fuente (o *source*) común se muestra en la Fig. 2.5.

Para dicha configuración la matriz de admitancias de cortocircuito resulta:

$$Y_{source\ común} = \begin{matrix} & \begin{matrix} G & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} G \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} G_g + sC & -sC \\ g_m - sC & G_d + sC \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Determinar la matriz de admitancias de cortocircuito para la configuración “Gate Común”, que se muestra en Fig. 2.6.

#### Resolución

La matriz de admitancias indefinida resulta:

$$Y_{indefinida} = \begin{matrix} & \begin{matrix} G & D & S \end{matrix} \\ \begin{matrix} G \\ D \\ S \end{matrix} & \begin{bmatrix} G_g + sC & -sC & -G_g \\ g_m - sC & G_d + sC & -(g_m + G_d) \\ -(g_m + G_g) & -G_d & g_m + G_d + G_g \end{bmatrix} \end{matrix}$$

La matriz de admitancias de cortocircuito para la conexión Gate común resulta entonces suprimiendo fila y columna correspondiente a Gate, y reordenando la matriz teniendo en cuenta que, según se indica en Fig. 2.6, la entrada es la puerta Source-Gate y la salida es la puerta Drain-Gate:

$$Y_{gate\ común} = \begin{matrix} & \begin{matrix} S & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} S \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} g_m + G_g + G_d & -G_d \\ -(g_m + G_d) & G_d + sC \end{bmatrix} \end{matrix}$$

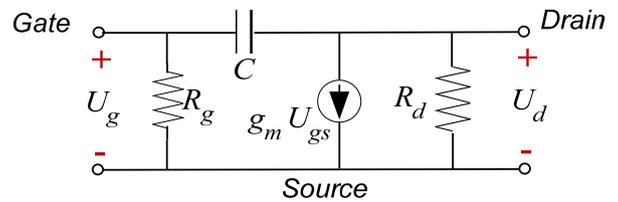


Fig. 2.5. Modelo del FET en configuración fuente común.

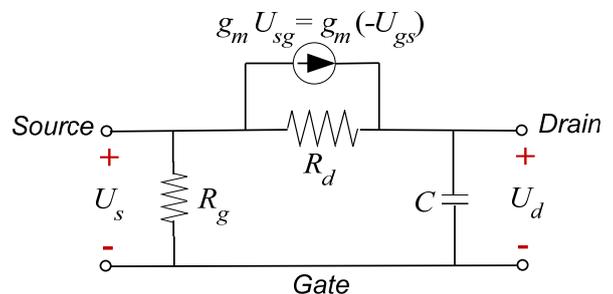


Fig. 2.6. Modelo del FET en configuración puerta común.

## 2.4. Operaciones con matrices de admitancias indefinidas

### 2.4.1. Unión de dos terminales

Si unimos dos terminales de una red de  $n$  terminales, las dos corrientes se suman y las tensiones son iguales. Luego la matriz Admitancias Indefinida resultante (para la red de  $n-1$  terminales), se obtiene sumando las dos filas y las dos columnas correspondientes de la matriz original, sustituyendo estas sumas a las dos filas y dos columnas originales.

La extensión a más de dos terminales es obvia.

### 2.4.2. Supresión de terminales

Se denomina supresión de un terminal al procedimiento para pasar un nodo terminal a ser un nodo interno de la red.

La corriente de dicho terminal, que llamaremos  $n$ -ésimo, será nula. Puede despejarse la tensión de este terminal de la ecuación  $I_n(s)=0$  (suponiendo que  $y_{nn}$  es distinto de cero), y sustituir el resultado en las ecuaciones restantes, eliminando así  $U_n(s)$ , y quedando entonces  $n-1$  ecuaciones.

$$I_n(s) = 0 = y_{n1} U_1(s) + y_{n2} U_2(s) + \dots + y_{nj} U_j(s) + \dots + y_{nn} U_n(s)$$

O sea que:

$$U_n(s) = \frac{1}{y_{nn}} \left[ -y_{n1} U_1(s) - y_{n2} U_2(s) - \dots - y_{nj} U_j(s) - \dots - y_{n(n-1)} U_{n-1}(s) \right]$$

Este procedimiento puede extenderse en forma matricial para más de un terminal.

Si se parte la matriz en dos submatrices:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_a \\ \mathbf{I}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{aa} & \mathbf{Y}_{ab} \\ \mathbf{Y}_{ba} & \mathbf{Y}_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_b \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\mathbf{I}_b \text{ y } \mathbf{U}_b$$

Corresponden a los terminales a suprimir. Es decir que:

$$\sum \mathbf{I}_b = 0$$

Entonces se puede escribir:

$$\begin{cases} \mathbf{I}_a = \mathbf{Y}_{aa} \cdot \mathbf{U}_a + \mathbf{Y}_{ab} \cdot \mathbf{U}_b \\ \mathbf{I}_b = \mathbf{Y}_{ba} \cdot \mathbf{U}_a + \mathbf{Y}_{bb} \cdot \mathbf{U}_b = 0 \Rightarrow \mathbf{U}_b = -\mathbf{Y}_{bb}^{-1} \cdot \mathbf{Y}_{ba} \cdot \mathbf{U}_a \end{cases}$$

Esta última expresión reemplazada en la primer ecuación resulta:

$$\mathbf{I}_a = (\mathbf{Y}_{aa} - \mathbf{Y}_{ab} \cdot \mathbf{Y}_{bb}^{-1} \cdot \mathbf{Y}_{ba}) \cdot \mathbf{U}_a$$

Resultando la nueva matriz Admitancia Indefinida igual a:

$$\mathbf{Y}_{indefinida} = \mathbf{Y}_{aa} - \mathbf{Y}_{ab} \cdot \mathbf{Y}_{bb}^{-1} \cdot \mathbf{Y}_{ba}$$

### 2.4.3. Redes en paralelo

La matriz Admitancias Indefinida de dos redes conectadas en paralelo, es igual a la suma de las matrices Admitancias Indefinida de cada una de las redes, suponiendo que ambas redes tienen el mismo terminal común como referencia para las tensiones.

No es necesario que las dos redes tengan el mismo número de terminales, ya que a la matriz que posea menor número de terminales se le agregan filas y columnas con elementos nulos.

## 2.5. Bibliografía

- [1] Norman Balabanian, Theodore A. Bickart and Sundaram Seshu. *Teoría de las Redes Eléctricas*. Editorial Reverté S.A. Barcelona, 1993. ISBN 978-84-291-3001-0.
- [2] Kendall L. Su. *Introducción al estudio de los circuitos, la electrónica y el análisis de señales*. Editorial Reverté S.A. Barcelona, 1979. ISBN 8429134492.



---

# Capítulo 3

## Transferencia de Potencia

---

### 3.1. Introducción

En la Ingeniería aplicada a redes eléctricas y circuitos electrónicos en general el objetivo de diseño principal es lograr que la *transferencia de potencia* desde la fuente a la carga sea tal que se logre suministrar a la carga la *mayor potencia* posible de la manera *más eficiente* posible.

En este planteo se debe tener presente que tanto las fuentes como las cargas (que pueden ser tan diversas como motores, parlantes, equipos electrónicos, hornos eléctricos, etc.) están caracterizadas por una *potencia nominal*. La potencia nominal de un equipo o dispositivo tiene en cuenta la cantidad de calor que se puede disipar en régimen permanente, sin reducir su vida útil.

En el caso de las fuentes, la potencia nominal es la capacidad de suministro de potencia en régimen estacionario que ha sido uno de los objetivos del diseño; y en el caso de las cargas, la potencia nominal es la potencia de suministro requerida para su normal funcionamiento en régimen estacionario.

Estos temas son muy importantes para los ingenieros eléctricos, electrónicos y de comunicaciones por cuanto el suministro de potencia tiene un costo económico que impone que la transferencia desde la fuente a la carga sea eficiente. Dicho costo puede ser directo, como en el caso de la distribución de energía eléctrica; o indirecto, como por ejemplo la corta duración de las baterías en dispositivos electrónicos con diseños económicos o de poco desarrollo.

Teniendo en cuenta la importancia de la potencia eléctrica tanto en el análisis como en el diseño de redes eléctricas en general, en este capítulo se estudiará aplicada a redes de una puerta y de dos puertas, funcionando en régimen estacionario.

Se estudiarán conceptos que tienen que ver con aspectos prácticos y económicos asociados con la distribución de energía eléctrica, como lo son el factor de potencia y la potencia compleja; y para finalizar, este capítulo se completará introduciendo conceptos y funciones relacionados con la optimización de la transferencia de la potencia desde la fuente de suministro a la carga.

### 3.2. Potencia instantánea y potencia media

Se empezará por considerar la *potencia instantánea*, que es el producto en el dominio del tiempo entre los valores (instantáneos) de la tensión y la corriente asociados con el elemento o punto de la red de interés. De manera que la potencia entregada a cualquier dispositivo en función del tiempo está dada por el producto de la tensión instantánea a través del dispositivo y la corriente instantánea que pasa por él; así,

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \tag{3-1}$$

La potencia instantánea es útil por sí misma para muchas aplicaciones, ya que su valor máximo debe ser limitado para no sobrepasar el *rango de operación útil o seguro* de un dispositivo. Por ejemplo, en aplicaciones de audio, los transistores usados como amplificadores de potencia producirán una salida

distorsionada y, en consecuencia, los altavoces darán un sonido distorsionado cuando el valor pico de la potencia exceda cierto valor límite.

Pero además, la potencia instantánea es interesante por la sencilla razón de que proporciona un medio para determinar la *potencia promedio* o *potencia media* que es una magnitud mucho más importante.

Para hacer una analogía que facilite la comprensión de estos conceptos, consideremos un viaje en automóvil. El interés en conocer las *velocidades instantáneas* a lo largo del recorrido se limita a evitar velocidades que excedan los límites a fin de evitar sanciones, o bien a fin de evitar velocidades demasiado grandes que pudieran poner en peligro la seguridad. Sin embargo la *velocidad promedio* a lo largo del recorrido caracteriza mejor el desarrollo del viaje.

En la práctica de la Ingeniería se tratará con valores de potencia promedio que van desde una fracción de picowatt ( $10^{-12}$  W) disponible en una señal de telemetría procedente del espacio exterior, a los pocos watts de una señal de audio suministrada a los altavoces de un sistema de audio; desde los varios cientos de watts requeridos para hacer funcionar una cafetera eléctrica, hasta varios gigawatts ( $10^9$  W) generados en las grandes centrales hidroeléctricas.

La mayoría de los problemas que requieren cálculos de potencia son los que tratan con circuitos excitados por funciones senoidales en estado estacionario. Pero aún si se emplean funciones de excitación *periódicas no senoidales*, es posible descomponer la excitación en una combinación de excitaciones senoidales y aplicar superposición. Es por esto que el estudio del régimen senoidal permanente merece una atención especial.

Cuando se habla del valor promedio de la potencia instantánea o potencia media, debe especificarse claramente el intervalo sobre el que se toma el promedio. Si se adopta un intervalo general de tiempo comprendido entre  $t_1$  y  $t_2$  la potencia promedio resulta:

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt \quad (3-2)$$

La potencia promedio se denota por la letra  $P$  y si bien no es una función del tiempo, sí es función de  $t_1$  y  $t_2$ , los dos instantes que definen el intervalo de integración. Sin embargo, cuando  $p(t)$  es periódica de período  $T$ , si se adoptan  $t_1$  y  $t_2$  de manera tal que  $T = t_2 - t_1$ ,  $P$  resulta independiente del período en particular sobre el que se efectúe la integración.

Considérese la tensión y la corriente en un dado punto de la red o sobre un dado elemento en régimen sinusoidal permanente:

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta_u) \quad (3-3)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i) \quad (3-4)$$

La potencia instantánea resulta:

$$p(t) = U_m I_m \cos(\omega t + \theta_u) \cos(\omega t + \theta_i)$$

Teniendo en cuenta la igualdad trigonométrica:

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

Resulta:

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\theta_u - \theta_i) + \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t + \theta_u + \theta_i) \quad (3-5)$$

Con esta expresión a la vista, se puede anticipar el resultado de la integración (3-2). El primer término es una constante, independiente de  $t$ . El término restante es una función coseno; por lo tanto,  $p(t)$  es periódica, y su periodo es  $T/2$ , siendo  $T$  el período de la corriente y la tensión.

Por inspección, el valor promedio del segundo término es cero en un periodo  $T$  (o bien en  $T/2$ ), y el valor promedio del primer término, una constante, es la constante misma. Por tanto:

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\theta_u - \theta_i) \quad (3-6)$$

Este importante resultado es completamente general para régimen sinusoidal permanente. La potencia promedio es igual a un medio del producto de la amplitud máxima de la tensión, por la amplitud máxima de la corriente, y el coseno de la diferencia entre los ángulos fase de la tensión y la corriente.

Denotando dicha diferencia angular con  $\phi$  y teniendo en cuenta los valores eficaces de la tensión y de la corriente para formas de onda senoidales:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad (3-7)$$

con la expresión (3-6) resulta:

$$P = UI \cos(\phi) \quad (3-8)$$

Donde se vuelve a hacer hincapié en la notación:  $P$  denota la potencia media, mientras que  $U$  e  $I$  son valores eficaces y  $\phi$  es el ángulo de fase de la corriente con respecto a la tensión.

Además es importante observar la diferencia con respecto al caso de corriente continua donde la potencia  $P$  es el producto de  $U \cdot I$ , mientras que con excitaciones sinusoidales la expresión (3-8) indica que el producto de los valores eficaces  $U \cdot I$  no es la potencia  $P$ ; en tal caso el producto  $U \cdot I$  se define como la *potencia aparente* y el factor  $\cos(\phi)$  recibe el nombre de *factor de potencia*, simbolizado por  $FP$ :

$$FP = \cos(\phi) \quad (3-9)$$

Con la convención de decir que es *atrasado* o *inductivo* si la corriente atrasa a la tensión y que es *adelantado* o *capacitivo* si la corriente adelanta a la tensión. Por tanto, un factor de potencia de 0.85 inductivo implica que la corriente está atrasada con respecto a la tensión por  $\cos^{-1} 0.85 = 31.8^\circ$ .

### 3.3. Potencia compleja

En este apartado se estudiará el caso de excitaciones senoidales haciendo uso del análisis fasorial para reproducir la expresión (3-8), que además dará lugar a la aparición de nuevos términos.

Entonces, si ahora se consideran las expresiones (3-3) y (3-4) en forma fasorial:

$$\mathbf{U} = U \cdot e^{j\omega t + \theta} \quad (3-10)$$

$$\mathbf{I} = I \cdot e^{j\omega t + \psi} \quad (3-11)$$

Donde se ha empleado la convención más habitual según la cual la *magnitud* del fasor corresponde al *valor eficaz* de la variable.

De este modo resulta:

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{I}} = \frac{U \cdot e^{j(\omega t + \theta)}}{I \cdot e^{j(\omega t + \psi)}} = \frac{U}{I} \cdot e^{j(\theta - \psi)} = \frac{U}{I} \cdot e^{j\phi} \quad (3-12)$$

Tal como se mencionó, la expresión (3-8) involucra el producto entre los valores eficaces de  $U$  e  $I$  y la *diferencia* de fase de la corriente respecto a la tensión.

Pero el producto fasorial  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{I}$  tendría una fase resultante igual a la *suma* entre los ángulos de fase de la tensión y de la corriente:  $UI e^{j(2\omega t + \theta + \psi)}$ , mientras que lo que se requiere es la *diferencia* entre dichos ángulos. Entonces lo que se requiere es considerar el conjugado de  $\mathbf{I}$ , haciendo el producto de  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{I}^*$ , con lo cual así resulta correctamente:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{I}^* = U \cdot e^{j(\omega t + \theta)} \cdot I \cdot e^{-j(\omega t + \psi)} = UI \cdot e^{j(\theta - \psi)} = UI \cdot e^{j\phi} \quad (3-13)$$

De este modo, la potencia media  $P$  expresada por (3-8) sería la parte real de (3-13), y el producto  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{I}^*$  se denomina *potencia compleja S*, con lo cual:

$$\mathbf{S} = UI \cdot e^{j\phi} = P + jQ \quad (3-14)$$

Donde:

$$P = UI \cos(\phi)$$

Es la potencia media o *potencia real* o *potencia activa*. La unidad es el *vatio* (watt en inglés) cuyo símbolo es W.

$$Q = UI \sin(\phi)$$

Es la potencia *potencia reactiva*. La unidad es el *voltamperio reactivo* cuyo símbolo es var. Y además:

$$S = |\mathbf{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2} = U \cdot I$$

Es la potencia *potencia aparente*.

Si bien dimensionalmente, la potencia aparente debería tener las mismas unidades que la potencia  $P$ , ya que  $\cos(\phi)$  es adimensional, para evitar confusiones se emplea el término *voltamperios*, cuyo símbolo es VA.

La potencia aparente no es un concepto limitado a excitaciones y respuestas de tipo senoidal. Puede calcularse para cualquier forma de onda de tensión y corriente, simplemente efectuando el producto de los valores eficaces de la tensión y de la corriente.

Otras expresiones de gran utilidad pueden derivarse partiendo de (3-13) y (3-14):

$$S = P + jQ = \mathbf{U} \cdot \mathbf{I}^* = \mathbf{I} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}^* = \mathbf{I} \cdot \mathbf{I}^* \cdot \mathbf{Z} = I^2 \cdot \mathbf{Z} = I^2 (R + jX)$$

Entonces:

$$P = I^2 R \tag{3-15}$$

$$Q = I^2 X \tag{3-16}$$

De modo que la potencia reactiva  $Q$  tendrá el signo de la reactancia  $X$  (negativo cuando es capacitiva y positivo cuando es inductiva).

### 3.4. Transferencia de potencia. Aspectos relacionados a su optimización.

En esta sección se estudian algunas cuestiones relacionadas con la transferencia de la potencia desde la fuente de suministro a la carga. Aquí la *carga* se referirá a un aparato, dispositivo, elemento o alguna porción de la red que podrá consistir en uno o más elementos y esa carga se conecta a la fuente a través de una red de dos puertos, como se ilustra en la **Fig. 3.1a**. En la mayoría de los casos resulta conveniente adoptar como modelo para la red y la fuente al equivalente de Thévenin visto desde el punto de conexión de la carga o *punto de suministro*, como se se ilustra en la **Fig. 3.1b**.



**Fig. 3.1.** (a) Carga conectada a la fuente a través de una red de dos puertos. (b) Modelo Thevenin de la red y la fuente.

#### 3.4.1. Corrección del factor de potencia

El factor de potencia tiene una gran importancia para las instalaciones eléctricas de potencia, lo cual puede comprenderse si se analiza la expresión (3-8) con un enfoque adecuado. Supóngase una carga de una dada potencia nominal  $P$  con un dado  $\cos(\phi)$ . La tensión eficaz  $U$  está determinada por la instalación. La corriente demandada por la carga resulta:

$$I = \frac{P}{U \cos(\phi)} \tag{3-17}$$

Lo que indica que un factor de potencia elevado (cercano a 1) demandaría, para desarrollar una dada  $P$ , una corriente *menor* que un factor de potencia bajo.

Resulta evidente que un valor bajo del factor de potencia en vez de un valor cercano a 1, da lugar a corrientes eficaces más elevadas y, por consiguiente, a potencias aparentes más elevadas. Lo primero se traduce en que se requieren conductores de mayor sección y lo segundo en que se requieren generadores de mayor porte.

Ambas consecuencias implican mayores costos de la instalación para el suministro. Puesto que las compañías suministradoras de electricidad facturan la potencia activa consumida, los costos de un factor de potencia bajo repercuten íntegramente en la compañía suministradora y nada en el consumidor. Por ello, las compañías suministradoras o bien, obligan a mejorar factores de potencia bajos, o bien penalizan a los usuarios imponiendo costos adicionales como señal correctora tendiente a su mejora.

El objetivo de diseño de una buena instalación es lograr que  $FP$  sea tan cercano a 1 como resulte económicamente posible, dado que cuanto más bajo sea el factor de potencia de una carga, se requiere más corriente para conseguir la misma cantidad de energía útil. Un valor adecuado de  $FP$  permite optimizar técnica y económicamente una instalación ya que evita sobredimensionamiento de equipos y mejora su utilización.

La forma de mejorar  $FP$  puede inferirse de:

$$FP = \frac{P}{UI} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \tag{3-18}$$

Si  $FP_{actual}$  es demasiado bajo es porque  $|Q_{actual}|$  no es mucho menor que  $P$ . Entonces hay que agregar una reactancia de compensación que aporte una potencia reactiva  $Q_C$  con la que se obtendrá un valor de potencia reactiva resultante  $Q_T$  menor que  $Q_{actual}$  con el que se logrará el valor de  $FP_{corregido}$ . El esquema de la compensación se muestra en la Fig. 3.2.

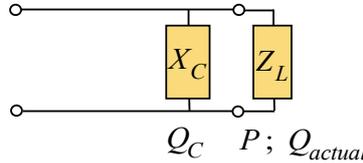


Fig. 3.2. Esquema de compensación del factor de potencia.

Claramente  $Q_C$  será de signo opuesto a  $Q_{actual}$ , es decir si  $Q_{actual}$  es inductiva,  $Q_C$  será capacitiva, y viceversa. Para  $Q_C$  capacitiva:

$$Q_C = -2\pi f C U^2 \tag{3-19}$$

Y para  $Q_C$  inductiva

$$Q_C = \frac{U^2}{2\pi f L} \tag{3-20}$$

El valor de potencia reactiva resultante  $Q_T$  se determina de la expresión (3-18) con  $FP_{corregido}$ :

$$Q_T = P \cdot \sqrt{\frac{1}{FP_{corregido}^2} - 1}$$

El valor de reactivo de compensación resulta:

$$Q_C = Q_T - Q_{actual}$$

El signo será negativo (positivo) cuando  $Q_C$  sea capacitiva (inductiva), y los componentes a agregar en paralelo con la carga se deducen de (3-19) o (3-20) según corresponda.

### 3.4.2. Máxima transferencia de potencia

Se vuelve a dibujar la red de la Fig. 3.1b en la forma que se indica en la Fig. 3.3, donde se muestra la notación que se empleará en lo que sigue.

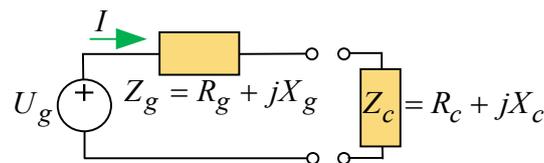


Fig. 3.3. Red representada por su equivalente Thevenin en el punto de conexión con una carga  $Z_c$ .

Ahora  $U_g$  y  $Z_g$  representan ya sea a la tensión e impedancia interna del generador, o bien al equivalente de Thévenin para una red de dos puertos más complicada, que incluso puede contener otras fuentes internas.

En este estudio se considera que estos parámetros son invariantes, por representar al generador o a la red vista desde el punto de suministro a la carga.

En este caso, el objetivo es determinar el valor de  $R_c$  y  $X_c$  que proporcionen la máxima transferencia de potencia a la carga, para lo cual la impedancia  $Z_c = R_c + jX_c$  será considerada tal que  $R_c$  y  $X_c$  pueden variar en forma independiente.

La potencia media entregada a la carga resulta:

$$P_c = \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{U}_c \cdot \mathbf{I}^*] = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \frac{\mathbf{U}_g Z_c}{Z_g + Z_c} \left( \frac{\mathbf{U}_g}{Z_g + Z_c} \right)^* \right] = \frac{|\mathbf{U}_g|^2}{4} \frac{Z_c + Z_c^*}{(Z_g + Z_c)(Z_g^* + Z_c^*)} \tag{3-21}$$

$$P_c = \frac{|\mathbf{U}_g|^2}{2} \frac{R_c}{\left[ R_g + R_c + j(X_g + X_c) \right] + \left[ R_g + R_c - j(X_g + X_c) \right]} = \frac{|\mathbf{U}_g|^2 R_c}{2 \left[ (R_g + R_c)^2 + (X_g + X_c)^2 \right]} \quad (3-22)$$

Que también podría haberse obtenido de manera más directa como:

$$P_c = \frac{1}{2} |\mathbf{I}|^2 R_c = \frac{|\mathbf{U}_g|^2}{2} \frac{R_c}{(R_g + R_c)^2 + (X_g + X_c)^2} \quad (3-23)$$

Pero la forma de la expresión (3-21) será de utilidad más adelante en este apartado.

Ahora se considera oportuno determinar los valores de  $R_c$  y  $X_c$  para los cuales resulta máxima la potencia transferida desde el generador a la carga. Para ello, primero se considerará que  $R_c$  es constante y se determinará el valor de  $X_c$  que haga máxima a  $P_c$ , para lo cual se deriva la ecuación (3-23) resultando:

$$\frac{dP_c}{dX_c} = \frac{|\mathbf{U}_g|^2}{2} R_c \frac{-2(X_g + X_c)}{\left[ (R_g + R_c)^2 + (X_g + X_c)^2 \right]^2}$$

El valor de  $X_c$  con el que se consigue que  $P_c$  sea máxima será el que anula esta derivada:

$$X_c = -X_g \quad (3-24)$$

Con este valor en la ecuación (3-23):

$$P_c = \frac{|\mathbf{U}_g|^2 R_c}{2(R_g + R_c)^2} \quad (3-25)$$

Ahora se puede obtener  $dP_c/dR_c$ :

$$\frac{dP_c}{dR_c} = \frac{|\mathbf{U}_g|^2}{2} \frac{(R_g + R_c)^2 - 2R_c(R_g + R_c)}{(R_g + R_c)^4} = \frac{|\mathbf{U}_g|^2}{2} \frac{R_g^2 - R_c^2}{(R_g + R_c)^4}$$

Encontrándose que el valor de  $R_c$  que anula esta derivada es:

$$R_c = R_g \quad (3-26)$$

Por tanto, la máxima transferencia de potencia se logra cuando las componentes reactivas de  $Z_g$  y  $Z_c$  se anulan y cuando las componentes reales son iguales. Las ecuaciones (3-24) y (3-26) se pueden combinar en un solo requisito que es:

$$Z_c = Z_g^* \quad (3-27)$$

Cuando las impedancias  $Z_g$  y  $Z_c$  se ajustan en esta forma, se dice que existe una *adaptación conjugada* de impedancias o una *adaptación para máxima transferencia de potencia*.

Entonces, la máxima potencia que se puede obtener de un generador se da en condiciones de adaptación conjugada, es decir cargándolo con una impedancia  $Z_c = Z_g^*$ , y esta máxima potencia resulta reemplazando con (3-27) en (3-21):

$$P_{m\acute{a}x} = \frac{|\mathbf{U}_g|^2}{4} \frac{Z_g^* + Z_g}{(Z_g + Z_g^*)(Z_g^* + Z_g)} = \frac{|\mathbf{U}_g|^2}{4} \frac{1}{Z_g^* + Z_g} \quad (3-28)$$

Resultando:

$$P_{m\acute{a}x} = \frac{|\mathbf{U}_g|^2}{8R_g} = \frac{U_g^2}{4R_g} \quad (3-29)$$

Que también podía haberse obtenido más directamente reemplazando con (3-27) en (3-23).

Claramente ambos resultados coinciden con el conocido teorema de máxima transferencia de potencia.

Se considera importante destacar que la condición (3-27), sólo puede lograrse para una frecuencia única, que es la que satisface la igualdad (3-24). Por ello si se requiere un acoplamiento para lograr la máxima

transferencia de potencia en un amplio rango de frecuencias (de banda ancha) la carga debe ser resistiva pura y se debe *adaptar* perfectamente a la impedancia de la fuente, que también debe ser resistiva pura para minimizar la potencia *reflejada* en la carga.

### 3.4.3. Máxima eficiencia en la transferencia de potencia

La eficiencia o rendimiento de la transferencia de potencia se define como:

$$\eta_t = \frac{P_c}{P_g + P_c} \tag{3-30}$$

Siendo  $P_g$  la potencia media en la parte real de  $Z_g$  y  $P_c$  la potencia media en la parte real de  $Z_c$ .

Claramente  $\eta_t$  será máxima cuando  $P_g$  sea tan pequeña como sea posible.

Se debe recordar que para una adaptación conjugada  $R_g=R_c$ , de tal manera que, en estas condiciones,  $\eta_t = 0,5$ , lo que significa que la potencia de la fuente se comparte por partes iguales entre los dos resistores. Una eficiencia de transmisión tan baja como esta sería admisible en sistemas de comunicaciones pero no se puede tolerar en un sistema de potencia. En sistemas de potencia  $R_c$  es grande frente a  $R_g$ , lo cual significa que  $P_g \ll P_c$ , con lo que se logra que la eficiencia sea alta.

Es decir, la condición de máxima transferencia de potencia no implica máxima eficiencia.

Considerando reactancias adaptadas, es decir  $X_c = -X_g$ , entonces la expresión (3-30) conduce a:

$$\eta_t = \frac{R_c}{R_g + R_c} = \frac{1}{1 + R_g/R_c} \tag{3-31}$$

Se observa que cuando la adaptación es completa (es decir, además  $R_c = R_g$ ) el valor de la eficiencia resulta 0,5. Para lograr el valor 1 (eficiencia máxima),  $R_c$  debe ser infinitamente más grande que  $R_g$ , pero en tal caso la potencia transferida tiende a cero. En el otro extremo, cuando  $R_c$  es muy pequeña comparada con  $R_g$ , tanto la eficiencia como la potencia transferida tienden a cero.

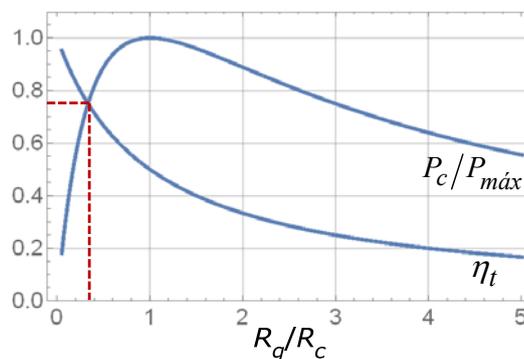
Este comportamiento queda representado en forma continua para diferentes relaciones  $R_g/R_c$  en la **Fig. 3.4** (curva identificada como  $\eta_t$ ).

Pero el hecho que la condición de máxima transferencia de potencia corresponde a una eficiencia de 0,5 plantea un interrogante acerca de la mejor condición tanto desde el punto de vista de la transferencia de potencia como desde el punto de vista de la eficiencia.

Para despejar dudas se obtiene la relación entre la potencia transferida a la carga ( $P_c$ ) y la máxima potencia que es posible transferir dada por (3-29):

$$\frac{P_c}{P_{m\acute{a}x}} = \frac{\frac{U_g^2 R_c}{(R_g + R_c)^2}}{\frac{U_g^2}{4R_g}} = \frac{4R_g R_c}{(R_g + R_c)^2} = \frac{4 \frac{R_g}{R_c}}{\left(1 + \frac{R_g}{R_c}\right)^2} \tag{3-32}$$

Esta relación se representa en forma continua para diferentes relaciones  $R_g/R_c$  en la **Fig. 3.4** (curva identificada como  $P_c/P_{m\acute{a}x}$ ).



**Fig. 3.4.** Relación entre la potencia transferida ( $P_c$ ) y la máxima potencia que es posible transferir a la carga ( $P_{m\acute{a}x}$ ) y eficiencia en la transferencia de potencia ( $\eta_t$ ).

Se considera importante volver a destacar que las expresiones (3-31) y (3-32) se obtuvieron para la condición de reactancias completamente compensadas.

Se hace notar que el máximo de la curva  $P_c/P_{m\acute{a}x}$  no es crítico. Cuando las dos resistencias están desadaptadas con una relación igual a 2, la potencia transferida es aún 89% del máximo posible.

Cuando la impedancia de la fuente es una resistencia pura (sin parte reactiva), la adaptación se hace con una resistencia y es válida para todas las frecuencias. En cambio, cuando la impedancia de la fuente tiene una parte reactiva, la adaptación solo se puede hacer a una sola frecuencia. Si la parte reactiva es grande (comparada a la parte resistiva), la adaptación será muy sensible a la frecuencia, lo que puede ser un inconveniente.

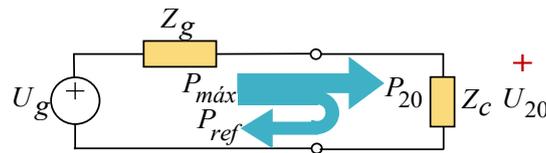
Entonces resulta interesante determinar el punto de cruce de ambas curvas como se muestra en la **Fig. 3.4**, que puede obtenerse igualando expresiones (3-31) y (3-32). Así resulta:

$$\frac{R_g}{R_c} = \frac{1}{3} \text{ y } \frac{P_c}{P_{m\acute{a}x}} = \frac{3}{4}$$

Es decir que cuando  $R_c=3R_g$ , la potencia transferida a la carga es  $0,75 P_{m\acute{a}x}$  y la eficiencia de la transferencia es  $\eta_t = 0,75$ .

### 3.5. Flujo de potencia

En la **Fig. 3.5** se hace foco en el flujo de potencia entre un generador de impedancia interna  $Z_g$  y una impedancia de carga  $Z_c$  conectada en terminales del generador.



**Fig. 3.5.** Flujo de potencia entre un generador de impedancia interna  $Z_g$  y una carga de impedancia  $Z_c$ .

Si se cumplen las condiciones de adaptación conjugada (3-27), toda la potencia  $P_{m\acute{a}x}$  que es capaz de erogarle el generador será suministrada a la carga, es decir  $P_{20}=P_{m\acute{a}x}$ . La designación  $P_{20}$  indica que es la potencia en la carga (subíndice 2) cuando se encuentra conectada directamente en terminales del generador (subíndice 0). Con referencia a la **Fig. 3.5**,  $P_{20}$  está dada por:

$$P_{20} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \mathbf{U}_{20} \cdot \mathbf{I}^* \right] = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \frac{\mathbf{U}_g Z_c}{Z_g + Z_c} \cdot \frac{\mathbf{U}_g^*}{Z_g^* + Z_c^*} \right] = \frac{|\mathbf{U}_g|^2}{4} \frac{Z_c + Z_c^*}{(Z_g + Z_c)(Z_g^* + Z_c^*)} \quad (3-33)$$

#### 3.5.1. Potencia reflejada

Si la carga está desadaptada, es decir si no satisface la condición (3-27), la potencia suministrada a la carga será  $P_{20} < P_{m\acute{a}x}$ . La diferencia ( $P_{m\acute{a}x} - P_{20}$ ) es la parte de potencia  $P_{ref}$  que se *refleja* en el punto de desadaptación, en este caso, los terminales de la carga y resulta:

$$P_{ref} = P_{m\acute{a}x} - P_{20} = \frac{|\mathbf{U}_g|^2}{4} \frac{1}{Z_g^* + Z_g} \left[ 1 - \frac{(Z_c + Z_c^*)(Z_g + Z_g^*)}{(Z_g + Z_c)(Z_g^* + Z_c^*)} \right] = \frac{|\mathbf{U}_g|^2}{4} \frac{1}{Z_g^* + Z_g} \left[ \frac{(Z_g + Z_c)(Z_g^* + Z_c^*) - (Z_c + Z_c^*)(Z_g + Z_g^*)}{(Z_g + Z_c)(Z_g^* + Z_c^*)} \right]$$

$$P_{ref} = \frac{|\mathbf{U}_g|^2}{4} \frac{1}{2R_g} \left[ \frac{(R_c + R_g)^2 + (X_c + X_g)^2 - 4R_c R_g}{|Z_g + Z_c|^2} \right] = \frac{|\mathbf{U}_g|^2}{4} \frac{1}{2R_g} \left[ \frac{(R_c - R_g)^2 + (X_g + X_c)^2}{|Z_g + Z_c|^2} \right] = \frac{|\mathbf{U}_g|^2}{8R_g} \frac{|Z_c - Z_g^*|^2}{|Z_g + Z_c|^2}$$

Es decir:

$$P_{ref} = P_{m\acute{a}x} \cdot \left| \frac{Z_c - Z_g^*}{Z_g + Z_c} \right|^2 \quad (3-34)$$

#### 3.5.2. Coeficiente de reflexión

Si se define:

$$\rho_0^2 = \frac{P_{ref}}{P_{m\acute{a}x}} \quad (3-35)$$

Considerando (3-34) resulta:

$$\rho_0^2 = \left| \frac{Z_c - Z_g^*}{Z_g + Z_c} \right|^2 \quad (3-36)$$

Siendo  $\rho_0$  el denominado *coeficiente de reflexión* de la onda de tensión que se propaga desde el generador hacia la carga. En este caso, el subíndice 0 indica que el punto de reflexión considerado se encuentra en *terminales del generador* (incluida su impedancia  $Z_g$ ).

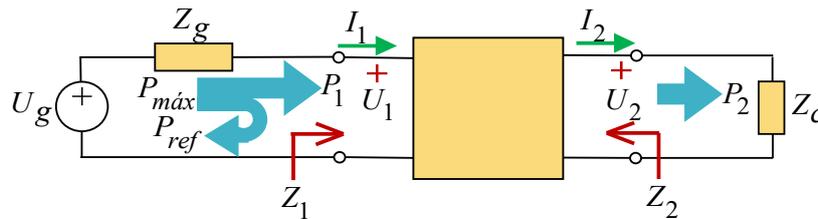
$\rho_0$  es una magnitud compleja que es función de la frecuencia y resulta:

$$\rho_0(\omega) = \pm \frac{Z_c - Z_g^*}{Z_g + Z_c} \quad (3-37)$$

Pudiendo comprobarse que siempre se cumple la relación  $|\rho_0(\omega)| \leq 1$ .

### 3.5.3. Pérdida de inserción

Cuando entre el generador y la carga se inserta un cuadripolo recíproco no disipativo (constituido por elementos ideales *LC* y transformadores), y haciendo  $Z_2 = Z_c^*$ , el flujo de potencia resulta como se indica en la **Fig. 3.6**. En general, dicho cuadripolo puede representar una línea de transmisión, un filtro o una red de adaptación de impedancias.



**Fig. 3.6.** Flujo de potencia entre un generador de impedancia interna  $Z_g$  y una carga de impedancia  $Z_c$  cuando se inserta un cuadripolo.

En este caso, la impedancia de entrada  $Z_1(\omega) = R_1(\omega) + jX_1(\omega)$  del cuadripolo (cargado en la salida con  $Z_c$ ) es la carga que ve el generador de impedancia  $Z_g$ . Por lo tanto, adecuando las expresiones (3-36) y (3-37) se puede determinar la potencia que se refleja  $P_{ref}$  en terminales de entrada del cuadripolo.

$$\rho_1(\omega) = \pm \frac{Z_1(\omega) - Z_g^*}{Z_g + Z_1(\omega)} \quad (3-38)$$

Donde ahora  $\rho_1(\omega)$  es el coeficiente de reflexión en la puerta 1 del cuadripolo insertado.

Como se verá más adelante en el apartado **6.3**, algunos procedimientos de síntesis requieren determinar la expresión de la impedancia de entrada  $Z_1(\omega)$  en función de  $\rho_1(\omega)$  y de  $Z_g$  que resulta:

$$Z_1(\omega) = \frac{Z_g^* \pm \rho_1(\omega)Z_g}{1 \mp \rho_1(\omega)} \quad (3-39)$$

Y cuando  $Z_g$  es resistiva pura resulta:

$$Z_1(\omega) = R_g \frac{1 \pm \rho_1(\omega)}{1 \mp \rho_1(\omega)} = R_g \left( \frac{1 + \rho_1(\omega)}{1 - \rho_1(\omega)} \right)^{\pm 1} \quad (3-40)$$

En cuanto a la potencia  $P_2$  es suministrada a la carga *a través* del cuadripolo (que es recíproco y no disipativo), y por lo tanto si  $Z_2 = Z_c^*$ , se cumplirá que  $P_2 = P_1$ :

$$P_2 = P_1 = \frac{1}{2} \text{Re}[U_1 \cdot I_1^*] = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \frac{U_g \cdot Z_1(\omega)}{Z_g + Z_1(\omega)} \cdot \left( \frac{U_g}{Z_g + Z_1(\omega)} \right)^* \right] = \frac{1}{2} \frac{U_g^2}{[Z_g + Z_1(\omega)] \cdot [Z_g^* + Z_1^*(\omega)]} \text{Re}[Z_1(\omega)]$$

$$P_2 = \frac{U_g^2}{4} \frac{Z_1(\omega) + Z_1^*(\omega)}{[Z_g + Z_1(\omega)] \cdot [Z_g^* + Z_1^*(\omega)]} = \frac{U_g^2 \cdot R_1(\omega)}{[R_g + R_1(\omega) + j(X_g + X_1(\omega))] \cdot [R_g + R_1(\omega) - j(X_g + X_1(\omega))]}$$

$$P_2 = \frac{U_g^2 \cdot R_1(\omega)}{[R_g + R_1(\omega)]^2 + [X_g + X_1(\omega)]^2} \quad (3-41)$$

Esta potencia  $P_2$  es suministrada a  $Z_c$  a través del cuadripolo y será igual o menor que la potencia  $P_{20}$  suministrada *sin* el cuadripolo dada por (3-33):

$$P_{20} = \frac{U_g^2}{4} \frac{Z_c + Z_c^*}{(Z_g + Z_c)(Z_g^* + Z_c^*)} = \frac{U_g^2}{2} \frac{R_c}{[R_g + R_c]^2 + [X_g + X_c]^2}$$

Por lo tanto, debido a la red insertada, hay una pérdida de potencia transferida que se conoce como *pérdida de inserción*, que está definida por la siguiente expresión:

$$PI = \frac{P_{20}}{P_2} \quad (3-42)$$

Tal como se infiere de las **Fig. 3.5** y **Fig. 3.6**, a partir de (3-42) la pérdida de inserción  $PI$  también puede expresarse en función de las tensiones  $U_{20}$  y  $U_g$ :

$$PI = \frac{P_{20}}{P_2} = \left( \frac{U_{20}}{U_2} \right)^2 = \left( \frac{R_c}{R_g + R_c} \right)^2 \left( \frac{U_g}{U_2} \right)^2 \quad (3-43)$$

En el apartado **6.3** se aplicarán estas relaciones para diseñar filtros  $LC$  doblemente cargados resistivamente, minimizando las pérdidas de inserción.

### 3.6. Adaptación de impedancias

Cuando no se puede hacer cumplir la igualdad (3-27) porque las impedancias  $Z_g$  y  $Z_c$  no pueden elegirse ni modificarse, se requiere insertar un cuadripolo que permita *adaptar* ambas impedancias. Estas redes de adaptación se realizan con elementos sin pérdidas, como capacitores, inductores o líneas de transmisión.

El objetivo de adaptar impedancias es lograr la máxima transferencia de potencia, reduciendo la reflexión de potencia todo lo que resulte posible. Con referencia a la **Fig. 3.6**, se ha visto en el apartado **3.4.2** que la condición para máxima transferencia de potencia es  $Z_1 = Z_g^*$ , condición que también aplica para adaptación sin reflexión de potencia, considerando el análisis efectuado en el apartado **3.5** en relación a las expresiones (3-34) y (3-37). Por lo tanto, la adaptación sin reflexión y la adaptación para máxima transferencia de potencia son completamente equivalentes para impedancias  $Z_g$  y  $Z_c$  reales o complejas.

Entonces, la adaptación de impedancias permitirá lograr la mejor transferencia de potencia desde el generador a la carga, y ocurrirá cuando  $Z_1$  (la impedancia de entrada del cuadripolo cargado con  $Z_c$  en la salida) sea igual al *conjugado* de la impedancia  $Z_g$  de la fuente, y que simultáneamente  $Z_2$  (impedancia de salida del cuadripolo cargado con  $Z_g$  en la entrada) sea igual al *conjugado* de la impedancia  $Z_c$  de la carga.

Dado que las reactancias dependen de la frecuencia, dichas igualdades ocurren estrictamente a una única frecuencia. Pero si el ancho de banda  $\Delta f$  del sistema es muy pequeño respecto de la frecuencia de operación  $f_0$ , podría lograrse que el apartamiento respecto de la igualdad resulte aceptable en todo el ancho  $\Delta f$ . En tal situación se dice que la adaptación es de *banda angosta*.

En el caso particular en que tanto  $Z_c$  como  $Z_g$  son *resistivas puras*, tal como se mencionó en **3.4.2**, la adaptación es de *banda ancha*, independiente de la frecuencia y la condición de adaptación resulta:

$$\begin{aligned} Z_g &= Z_{01} \\ Z_c &= Z_{02} \end{aligned} \quad (3-44)$$

Donde  $Z_{01}$  y  $Z_{02}$  son las impedancias imagen de la red de adaptación.

La condición de adaptación es diferente cuando las impedancias de la fuente y de la carga (una de ellas, o ambas simultáneamente) son complejas. En efecto, en tal caso no es posible apelar a la definición de las impedancias imagen, porque la impedancia vista desde la entrada del cuadripolo cargado con  $Z_c$  debe ser *el*

conjugado de la impedancia  $Z_g$  de la fuente mientras que la impedancia vista desde la salida del cuadripolo cargado con  $Z_g$  en la entrada debe ser el conjugado de la impedancia  $Z_c$  de la carga.

La adaptación empleando elementos de parámetros concentrados se basa en la transformación de impedancias o admitancias que se consigue disponiendo elementos reactivos en serie o en derivación. De hecho, aún con un simple elemento reactivo se puede lograr una adaptación de impedancias limitada. Este procedimiento se analiza detalladamente en el **Apéndice C**.

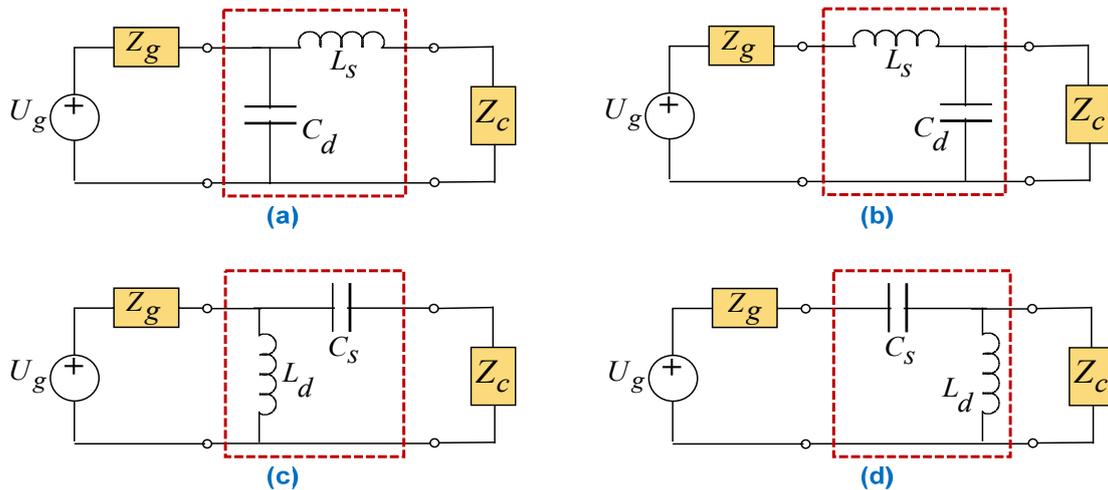
### 3.6.1. Adaptación con dos elementos en L

Las redes L se emplean para adaptar impedancias en todo tipo de circuitos electrónicos; por ejemplo, son útiles para adaptar la salida de un amplificador con la entrada de una etapa siguiente; o bien adaptar la impedancia de una antena con la salida de un transmisor o la entrada de un receptor, etc.

Una red de adaptación L sin pérdidas es un circuito simple de dos elementos LC que se puede usar para adaptar una amplia gama de impedancias tanto puramente resistivas como complejas.

La adaptación entre dos niveles de resistencias diferentes se puede realizar mediante una red LC de dos elementos en L, los cuales pueden disponerse de dos formas: 1) un elemento reactivo en derivación  $X_d$  y un elemento reactivo en serie  $X_s$ ; 2) un elemento reactivo en serie  $X_s$  y un elemento reactivo en derivación  $X_d$ . Tanto  $X_d$  como  $X_s$  pueden ser capacitiva o inductiva, pero siempre ambas serán de distinto tipo.

Por lo tanto, las configuraciones de la red L son cuatro (**Fig. 3.7**): los circuitos **(a)** y **(c)** son adecuados cuando  $R_g > R_c$ , mientras que los circuitos **(b)** y **(d)** son adecuados cuando  $R_g < R_c$ .



**Fig. 3.7.** Circuitos de adaptación con dos elementos en L: **(a)** indicado para  $R_g > R_c$ ; **(b)** indicado para  $R_g < R_c$ ; **(c)** indicado para  $R_g > R_c$  y **(d)** indicado para  $R_g < R_c$ .

Conceptualmente esta correspondencia se justifica considerando que para adaptar  $Z_g$  y  $Z_c$  se requiere *aumentar* la resistencia *menor* (esto se logra con el elemento en serie, que debe estar en serie con la impedancia cuya parte real sea menor) y *reducir* la resistencia *mayor* (esto se logra con el elemento en derivación, que debe estar en paralelo con la impedancia cuya parte real sea mayor).

Por otra parte, puede observarse que las configuraciones **(a)** y **(b)** son *pasa bajos* y las configuraciones **(c)** y **(d)** son *pasa altos*. Las versiones *pasa bajos* son probablemente las más utilizadas, ya que atenúan las armónicas, el ruido y otras señales no deseadas, como suele ser necesario en una enorme cantidad de aplicaciones. Los criterios de diseño clave son las magnitudes y los tamaños *relativos* de la impedancia de salida del generador y la impedancia de carga.

#### Consideraciones para el diseño

Para una red de adaptación en L, el  $Q$  del circuito y por lo tanto el ancho de banda de la adaptación, es fijo y no hay posibilidad alguna de controlar su valor.

Por eso, para saber si una red de dos elementos es adecuada para adaptar impedancias para una dada aplicación, debe tenerse en cuenta que el  $Q$  requerido se obtiene mediante la relación:

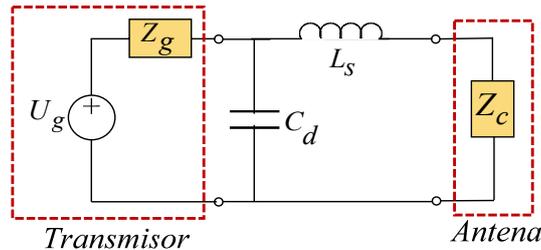
$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} \tag{3-45}$$

donde  $f_0$  es la frecuencia de operación y  $\Delta f$  es el ancho de banda de 3 dB.

Si bien la red  $L$  es muy versátil, es posible que no se adapte a todas las necesidades. En efecto, puede ocurrir que el  $Q$  requerido dado por (3-45), sea muy superior al valor que puede conseguirse con una red  $L$ . En otros casos, los valores calculados de inductancia o capacitancia pueden ser demasiado grandes o pequeños para ser prácticos para cierto rango de frecuencias; pero, en ocasiones, este problema se puede superar cambiando de una versión pasa bajos a una versión pasa altos o viceversa.

### Ejemplo 3.1.

El transmisor de la **Fig. 3.8** opera a 1 GHz y tiene una impedancia de salida real pura  $Z_g = 75 \Omega$ . El transmisor debe estar conectado directamente a una antena cuya impedancia de entrada es real pura  $Z_c = 50 \Omega$ . Utilizando la sección  $L$  indicada, encuentre los valores de  $L_s$  y  $C_d$  que permitan la máxima transferencia de potencia a la antena.



**Fig. 3.8.** Red de adaptación en  $L$  entre un transmisor y la antena.

### Resolución

El Ejemplo C.3 del Apéndice C corresponde a este mismo caso, el cual fue resuelto por el procedimiento clásico de diseño de redes de adaptación. Aquí se resolverá aplicando los conceptos de adaptación de impedancias descritos en 3.6. y en 3.6.1. En este caso, como las impedancias de generador y de carga son reales puras, se puede resolver por dos formas de proceder diferentes, las cuales serán desarrolladas a continuación.

#### Primera forma

Esta forma se puede aplicar para impedancias  $Z_g$  y  $Z_c$  reales puras o complejas en general, y consiste en determinar las impedancias de entrada y de salida  $Z_1$  y  $Z_2$  del cuadripolo doblemente cargado y hacer que  $Z_1$  sea igual al *conjugado* de la impedancia  $Z_g$  de la fuente, y que simultáneamente  $Z_2$  sea igual al *conjugado* de la impedancia  $Z_c$  de la carga. En este caso, como ambas  $Z_c$  y  $Z_g$  son resistivas puras:

$$Z_1 = Z_g^* = 75 \quad Z_2 = Z_c^* = 50$$

$$Z_1 = \frac{1}{\frac{1}{Z_d} + \frac{1}{Z_s + Z_c}} = \frac{Z_d(Z_s + Z_c)}{Z_s + Z_d + Z_c} \Rightarrow Z_1 Z_s + Z_1 Z_d - Z_s Z_d - Z_c Z_d + Z_1 Z_c = 0$$

$$Z_1 Z_s + (Z_1 - Z_c) Z_d - Z_s Z_d + Z_1 Z_c = 0 \quad (3)$$

$$Z_2 = Z_s + \frac{1}{\frac{1}{Z_g} + \frac{1}{Z_d}} = Z_s + \frac{Z_g Z_d}{Z_g + Z_d} \Rightarrow Z_g Z_s + Z_d Z_s + Z_g Z_d - Z_2 Z_g - Z_2 Z_d = 0$$

$$Z_g Z_s + (Z_g - Z_2) Z_d + Z_s Z_d - Z_2 Z_g = 0 \quad (4)$$

Hay que resolver el sistema de 2 ecuaciones conformado por las expresiones (3) y (4), en el cual las dos incógnitas son  $Z_d$  y  $Z_s$ .

Para ello se emplea la función `fsolve` de Matlab mediante las siguientes líneas de código.

```
01 function Adaptacion_01
02 clc
03 omega=2*pi*1e9;
04 Zg=75; Zc=50;
05 Z1=conj(Zg); Z2=conj(Zc);
06 %% Definición de una función anónima F que permite evaluar
07 % a las expresiones cuyas raíces simultáneas se desea determinar.
```

```

08 % Se define como lista de argumentos al vector z el cual está asociado a
09 % las variables del sistema de la siguiente forma:
10 % z(1) corresponde a Zs y z(2) corresponde a Zd
11 F = @(z) [Z1*z(1)+(Z1-Zc)*z(2)-z(1)*z(2)+Z1*Zc; ...
12           Zg*z(1)+(Zg-Z2)*z(2)+z(1)*z(2)-Z2*Zg];
13 %% Solución del sistema de ecuaciones no lineales
14 % La condición inicial para determinar las raíces buscadas es que
15 % z(1) ó Zs sea inductiva pura y z(2) ó Zd sea capacitiva pura
16 z0 = [0+100i; 0-100i];
17 z = fsolve(F, z0);
18 %% Presentación de resultados
19 [Rs, Ys]=Z2RY(z(1));
20 [Rd, Yd]=Z2RY(z(2));
21 disp(['Zs=', num2str(1j*Ys), ' Ls=', num2str(Ys/omega)]);
22 disp(['Zd=', num2str(1j*Yd), ' Cd=', num2str(-1/Yd/omega)]);
23
24 function [R, Y]=Z2RY(zValue)
25     R=real(zValue);
26     X=imag(zValue);
27     if abs(R)<1e-6*abs(X)
28         R=0;
29     else
30         if abs(X)<1e-6*abs(R), X=0; end
31     end
32 end
33 end

```

Las líneas 11 y 12 definen la función anónima  $F(z)$  que devuelve un arreglo cuyos elementos son los miembros de la izquierda en las ecuaciones (3) y (4), habiéndose considerado la siguiente correspondencia de variables:  $z(1)=Z_s$  y  $z(2)=Z_d$ .

La línea 16 es muy importante ya que corresponde a los valores iniciales asignados a  $z(1)$  y  $z(2)$ , los cuales definen qué solución es la que se desea para cada variable, entre todas las que puede tener el sistema de ecuaciones. En este caso, como se desean  $z(1)$  inductiva pura y  $z(2)$  capacitiva pura, se asignan los valores:  $z0=[0+100i; 0-100i]$ .

La línea 17 resuelve numéricamente el sistema convergiendo a las soluciones deseadas, las cuales fueron indicadas por  $z0$ .

Como resultado de la ejecución se obtienen los siguientes valores:

$$Z_d = -j106,066 \qquad Z_s = j35,3553$$

Que coinciden con los obtenidos previamente, y por lo tanto para la frecuencia de operación de 1 GHz se vuelven a obtener los siguientes valores de los componentes:

$$C_d = \frac{1}{2\pi \cdot 10^9 \cdot 106,066} = 1,5 \cdot 10^{-12} \text{ F} \qquad L_s = \frac{35,3553}{2\pi \cdot 10^9} = 5,6 \cdot 10^{-9} \text{ H}$$

### Segunda forma

Esta forma se puede aplicar sólo cuando ambas impedancias  $Z_g$  y  $Z_c$  son reales puras.

Consiste en aplicar las expresiones (3-44) haciendo que las respectivas impedancias imagen del cuadripolo de adaptación sean iguales a las impedancias de la fuente y de la carga.

$$\omega = 2\pi 10^6 \qquad Z_g = 75 \Omega \qquad Z_c = 50 \Omega$$

$$Z_d = -j \frac{1}{\omega C_d} \qquad Z_s = j\omega L_s$$

Las impedancias  $Z_1$  con las condiciones de vacío y de cortocircuito en la salida resultan:

$$Z_{1V} = Z_d \qquad Z_{1C} = \frac{Z_d Z_s}{Z_d + Z_s}$$

Las impedancias  $Z_2$  con las condiciones de vacío y de cortocircuito en la entrada resultan:

$$Z_{2V} = Z_d + Z_s \qquad Z_{2C} = Z_s$$

$$Z_g = Z_{01} = \sqrt{Z_{1V} Z_{1C}} = Z_d \sqrt{\frac{Z_s}{Z_d + Z_s}} \Rightarrow Z_g^2 Z_d + Z_g^2 Z_s = Z_s Z_d^2$$

$$Z_s Z_d^2 - Z_g^2 Z_d - Z_g^2 Z_s = 0 \quad (5)$$

$$Z_c = Z_{02} = \sqrt{Z_{2V} Z_{2C}} = \sqrt{Z_s (Z_d + Z_s)} \Rightarrow Z_c^2 = Z_s^2 + Z_d Z_s$$

$$Z_s^2 + Z_d Z_s - Z_c^2 = 0 \quad (6)$$

Hay que resolver el sistema de 2 ecuaciones no lineales conformado por las expresiones (5) y (6), en el cual las dos incógnitas son  $Z_d$  y  $Z_s$ .

Para ello se emplea la función `fsolve` de Matlab mediante las siguientes líneas de código.

```

01 function Adaptacion_02
02 clc
03 omega=2*pi*1e9;
04 Zg=75; Zc=50;
05 %% Definición de una función anónima F que permite evaluar
06 % a las expresiones cuyas raíces simultáneas se desea determinar.
07 % Se define como lista de argumentos al vector z el cual está asociado a
08 % las variables del sistema de la siguiente forma:
09 % z(1) corresponde a Zs y z(2) corresponde a Zd
10 F = @(z) [z(1)*z(2)^2-Zg^2*z(2)-Zg^2*z(1);
11          z(1)^2+z(2)*z(1)-Zc^2];
12 %% Solución del sistema de ecuaciones no lineales
13 % La condición inicial para determinar las raíces buscadas es que
14 % z(1) ó Zs sea inductiva pura y z(2) ó Zd sea capacitiva pura
15 z0 = [0+100i; 0-100i];
16 z = fsolve(F, z0);
17 %% Presentación de resultados
18 [Rs, Xs]=Z2RX(z(1));
19 [Rd, Xd]=Z2RX(z(2));
20 disp(['Xs=', num2str(Xs), ' Ls=', num2str(Xs/omega)]);
21 disp(['Xd=', num2str(Xd), ' Cd=', num2str(-1/Xd/omega)]);
22
23 function [R, X]=Z2RX(zValue)
24 R=real(zValue);
25 X=imag(zValue);
26 if abs<1e-6*abs(X)
27 R=0;
28 else
29 if abs(X)<1e-6*abs(R), X=0; end
30 end
31 end
32 end

```

Las líneas 10 y 11 definen la función anónima  $F(z)$  que devuelve un arreglo cuyos elementos son los miembros de la izquierda en las ecuaciones (5) y (6), habiéndose considerado la siguiente correspondencia de variables:  $z(1)=Z_s$  y  $z(2)=Z_d$ .

La línea 15 es muy importante ya que corresponde a los valores iniciales asignados a  $z(1)$  y  $z(2)$ , los cuales definen qué solución es la que se desea para cada variable, entre todas las que puede tener el sistema de ecuaciones. En este caso, como se desean  $z(1)$  inductiva pura y  $z(2)$  capacitiva pura, se asignan los valores:  $z_0=[0+100i; 0-100i]$ .

La línea 16 resuelve numéricamente el sistema convergiendo a las soluciones deseadas, las cuales fueron indicadas por  $z_0$ .

Como resultado de la ejecución se obtienen los siguientes valores:

$$Z_d = -j106,066 \quad Z_s = j35,3553$$

Que para la frecuencia de operación de 1 GHz corresponden a los siguientes elementos:

$$C_d = \frac{1}{2\pi \cdot 10^9 \cdot 106,066} = 1,5 \cdot 10^{-12} \text{ F} \quad L_s = \frac{35,3553}{2\pi \cdot 10^9} = 5,6 \cdot 10^{-9} \text{ H}$$

**Ejemplo 3.2.**

Considere ahora que transmisor de la **Fig. 3.8** operando 1 GHz tiene una impedancia de salida  $Z_g = (90 + j30)$  y que la impedancia de entrada de la antena es una combinación en serie de una resistencia  $R_c = 75 \Omega$  y un inductor  $L_c = 3$  nH. Determinar los valores de  $C_d$  y  $L_s$  de la celda de adaptación en L (celda de acoplamiento de la antena).

**Resolución**

El Ejemplo C.4 del Apéndice C corresponde a este mismo caso, el cual fue resuelto por el procedimiento clásico de diseño de redes de adaptación. Aquí se resolverá aplicando los conceptos de adaptación de impedancias descritos en 3.6. y en 3.6.1. En este caso, como las impedancias de generador y de carga son complejas, sólo se se puede aplicar la primera forma de resolución aplicada en el **Ejemplo 3.1**. siendo ahora la condición que deben satisfacer las impedancias de entrada y de salida  $Z_1$  y  $Z_2$  del cuadripolo doblemente cargado:

$$Z_1 = Z_g^* = 90 - j30 \qquad Z_2 = Z_c^* = 75 - j2\pi \cdot 1 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-9} = 75 - j6\pi$$

La topología de la celda de adaptación L continúa siendo la misma de la **Fig. 3.8** porque  $R_g = \text{Re}[Z_g] > R_c = \text{Re}[Z_c]$ , tal como se explica en el apartado C.4. del Apéndice C.

Como la topología de la celda L requerida es la misma que en el **Ejemplo 3.1**, no solamente son válidas todas las expresiones desarrolladas en la primera forma de resolución de dicho ejemplo, sino además también es aplicable el mismo código de Matlab en el cual solo debe modificarse la línea 4 y cambiarse por:

```
04 Zg=90+30i; Zc=75+6i*pi;
```

Como resultado de la ejecución se obtienen los siguientes valores:

$$Z_d = -j109,8 \qquad Z_s = j24,45$$

Por lo tanto para la frecuencia de operación de 1 GHz se obtienen los siguientes valores de componentes:

$$C_d = \frac{1}{2\pi \cdot 10^9 \cdot 109,8} = 1,449 \cdot 10^{-12} \text{ F} \qquad L_s = \frac{24,45}{2\pi \cdot 10^9} = 3,89 \cdot 10^{-9} \text{ H}$$

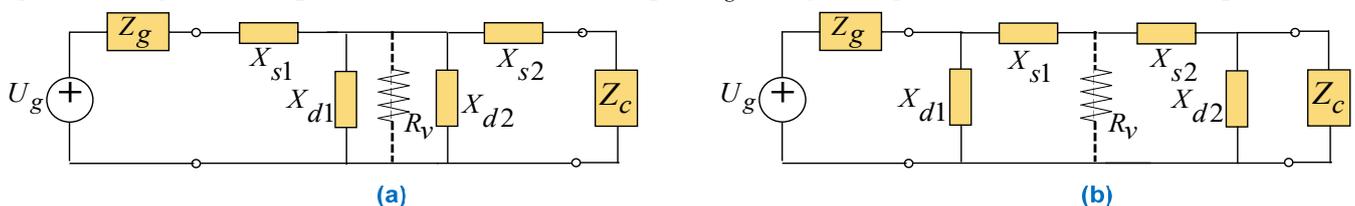
**3.6.2. Adaptación con tres elementos en T y en Π**

Si bien las redes L son adecuadas para una enorme cantidad de aplicaciones, en muchos casos puede ser necesario un circuito más complejo para proporcionar un mejor desempeño o cumplir mejor con las especificaciones. Los circuitos que siguen a las redes L en grado de complejidad son las redes T y Π.

La razón principal para emplear una red T o una red Π es lograr el control sobre el coeficiente de sobretensión o factor  $Q$  del circuito, cosa que no es posible con una red L, en las cuales no solo  $Q$  es fijo por ser una función de las resistencias de entrada y salida, sino que además es muy bajo para aplicaciones en las que se requiere limitar el ancho de banda para reducir los armónicos o ayudar a filtrar las señales adyacentes sin el uso de filtros adicionales.

Las redes T y Π proporcionan suficiente variedad para adaptarse a casi cualquier situación.

Para diseñar una red T o Π se emplean los procedimientos de las redes L. De hecho, ambos tipos T y Π pueden considerarse como dos redes L verticalmente espejadas y en cascada, lo cual permite emplear los procedimientos de diseño para las redes L. Para ello, se debe asumir una carga intermedia virtual  $R_V$  para la primera L que será vista como una resistencia de fuente virtual  $R_V$  para la segunda L, como se muestra en la **Fig. 3.9**. Así, el diseño de cada sección se plantea como en el caso de la red de adaptación L, con los siguientes objetivos: la primera sección L debe adaptar  $Z_g$  a  $R_V$  y la segunda sección L debe adaptar  $R_V$  a  $Z_c$ .



**Fig. 3.9.** Diseño de redes de adaptación con tres elementos con base en redes L: (a) redes en T; (b) redes Π.

- En el caso de las redes T (**Fig. 3.9a**) puede obtenerse una buena estimación del valor de la resistencia virtual  $R_V$  mediante la relación:

$$R_V = \min(R_g, R_c) \cdot (1 + Q^2) \quad (3-46)$$

Donde  $Q$  es el valor requerido que se determina mediante (3-45).

Este criterio asegura que el valor  $R_V$  resultante sea *mayor* que  $R_g$  y  $R_c$  y puede aplicarse con resultados aceptables aún cuando las impedancias  $Z_g$  y/o  $Z_c$  no sean resistivas puras

Una vez que se determina el valor de  $R_V$ , se calculan los valores de los componentes de cada sección L con la ayuda de la resistencia virtual y se obtienen 4 elementos.

Los dos componentes en *derivación* de cada sección L se pueden combinar sumando las *suceptancias*. El tipo de componente resultante dependerá del signo de la reactancia final.

De este modo, la red de adaptación obtenida consta de tres elementos y tiene el  $Q$  requerido.

- En el caso de las redes  $\Pi$  (**Fig. 3.9b**) puede obtenerse una buena estimación del valor de la resistencia virtual  $R_V$  mediante la relación:

$$R_V = \frac{\max(R_g, R_c)}{1 + Q^2} \quad (3-47)$$

Donde  $Q$  es el valor requerido que se determina mediante (3-45).

Este criterio asegura que el valor  $R_V$  resultante sea *menor* que  $R_g$  y  $R_c$  y puede aplicarse con resultados aceptables aún cuando las impedancias  $Z_g$  y/o  $Z_c$  no sean resistivas puras.

Una vez que se determina el valor de  $R_V$ , se calculan los valores de los componentes de cada sección L con la ayuda de la resistencia virtual y se obtienen 4 elementos.

Los dos componentes en *serie* de cada sección L se pueden combinar sumando sus *reactancias*. El tipo de componente resultante dependerá del signo de la reactancia final.

De este modo, la red de adaptación obtenida consta de tres elementos y tiene el  $Q$  requerido.

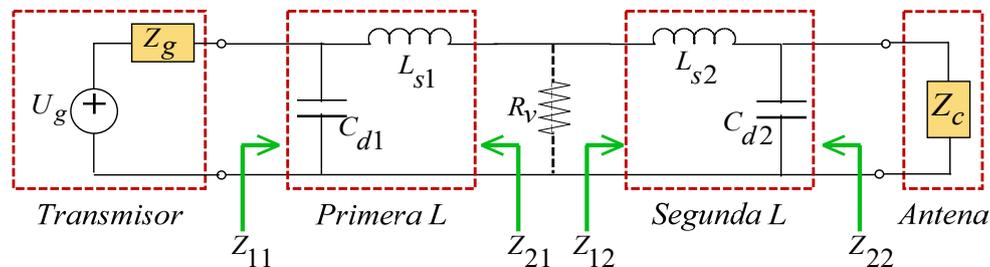
### Ejemplo 3.3.

Una antena de chip se montó en una PCB de 4 capas para operar a 2445 MHz con un ancho de banda de 500 MHz, y se midió el valor de impedancia justo en el punto de alimentación de la antena que resultó de  $21 + j1,15 \Omega$ . Se requiere diseñar una red de adaptación  $\Pi$  pasa bajos entre dicha antena y la fuente de señal cuya impedancia es  $Z_g = 50 + j0 \Omega$

### Resolución

El Ejemplo C.5 del Apéndice C corresponde a este mismo caso, el cual fue resuelto por el procedimiento clásico de diseño de redes de adaptación. Aquí se resolverá aplicando los conceptos de adaptación de impedancias descritos en 3.6. y en 3.6.2. En este caso, como las impedancias de generador y de carga son reales puras, se puede resolver por dos formas de proceder diferentes, las cuales serán desarrolladas a continuación.

El esquema del circuito a emplear se muestra en la **Fig. 3.10**.



**Fig. 3.10.** Red de adaptación  $\Pi$  entre un transmisor y la antena.

El factor  $Q$  requerido resulta de aplicar la expresión (3-45):

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{2445 \cdot 10^6}{500 \cdot 10^6} = 4,89$$

Por ser una red  $\Pi$ , la primera L debe empezar en derivación, es decir  $R_g > R_V$ ; y la segunda L debe empezar en serie, es decir  $R_V < R_c$ . Entonces  $R_V$  se calcula mediante la expresión (3-47):

$$R_V = \frac{\max(R_g, R_c)}{1 + Q^2} = \frac{50}{1 + 4,89^2} = 2 \Omega$$

Diseño de la primera L

Las impedancias que cargan a la primera L son  $Z_g$  y  $R_V$  que, en este caso, ambas son resistivas puras. Hay que determinar las impedancias de entrada y de salida  $Z_{11}$  y  $Z_{21}$  de la L doblemente cargada y hacer que  $Z_{11}$  sea igual al *conjugado* de la impedancia  $Z_g$  de la fuente, y que simultáneamente  $Z_{21}$  sea igual al *conjugado* de la impedancia  $R_V$  de la carga virtual. En este caso, como ambas son resistivas puras:

$$Z_{11} = Z_g^* = 50 \quad Z_{21} = R_V = 8,489$$

$$\omega = 2\pi \cdot 2,445 \cdot 10^9 = 4,89\pi \cdot 10^9 \quad Z_{d1} = -j \frac{1}{\omega C_{d1}} \quad Z_{s1} = j\omega L_{s1}$$

$$Z_{11} = \frac{1}{\frac{1}{Z_{d1}} + \frac{1}{Z_{s1} + R_V}} = \frac{Z_{d1}(Z_{s1} + R_V)}{Z_{s1} + Z_{d1} + R_V} \Rightarrow Z_{11}Z_{s1} + Z_{11}Z_{d1} - Z_{s1}Z_{d1} - R_V Z_{d1} + Z_{11}R_V = 0$$

$$Z_{11}Z_{s1} + (Z_{11} - R_V)Z_{d1} - Z_{s1}Z_{d1} + Z_{11}R_V = 0 \tag{1}$$

$$Z_{21} = Z_{s1} + \frac{1}{\frac{1}{Z_g} + \frac{1}{Z_{d1}}} = Z_{s1} + \frac{Z_g Z_{d1}}{Z_g + Z_{d1}} \Rightarrow Z_g Z_{s1} + Z_{d1}Z_{s1} + Z_g Z_{d1} - Z_{21}Z_g - Z_{21}Z_{d1} = 0$$

$$Z_g Z_{s1} + (Z_g - Z_{21})Z_{d1} + Z_{s1}Z_{d1} - Z_{21}Z_g = 0 \tag{2}$$

La resolución simultánea de las ecuaciones (1) y (2) permite determinar las dos incógnitas  $Z_{d1}$  y  $Z_{s1}$  de la primera L.

Diseño de la segunda L

Las impedancias que cargan a la segunda L son  $R_V=8,489 \Omega$  y  $Z_c=21+j1,15 \Omega$ . Ahora hay que determinar las impedancias de entrada y de salida  $Z_{12}$  y  $Z_{22}$  de la L doblemente cargada y hacer que  $Z_{12}$  sea igual al *conjugado* de la impedancia  $R_V$  de la carga virtual, y que simultáneamente  $Z_{21}$  sea igual al *conjugado* de la impedancia  $Z_c$  de la antena:

$$Z_{12} = R_V = 8,489 \quad Z_{22} = Z_c^* = 21 - j1,15$$

$$\omega = 2\pi \cdot 2,445 \cdot 10^9 = 4,89\pi \cdot 10^9 \quad Z_{d2} = -j \frac{1}{\omega C_{d2}} \quad Z_{s2} = j\omega L_{s2}$$

$$Z_{22} = \frac{1}{\frac{1}{Z_{d2}} + \frac{1}{Z_{s2} + Z_g}} = \frac{Z_{d2}(Z_{s2} + R_V)}{Z_{s2} + Z_{d2} + R_V} \Rightarrow Z_{22}Z_{s2} + Z_{22}Z_{d2} - Z_{s2}Z_{d2} - R_V Z_{d2} + Z_{22}R_V = 0$$

$$Z_{22}Z_{s2} + (Z_{22} - R_V)Z_{d2} - Z_{s2}Z_{d2} + Z_{22}R_V = 0 \tag{3}$$

$$Z_{12} = Z_{s2} + \frac{1}{\frac{1}{Z_c} + \frac{1}{Z_{d2}}} = Z_{s2} + \frac{Z_c Z_{d2}}{Z_c + Z_{d2}} \Rightarrow Z_c Z_{s2} + Z_{d2}Z_{s2} + Z_c Z_{d2} - Z_{12}Z_c - Z_{12}Z_{d2} = 0$$

$$Z_c Z_{s2} + (Z_c - Z_{12})Z_{d2} + Z_{s2}Z_{d2} - Z_{12}Z_c = 0 \tag{4}$$

La resolución simultánea de las ecuaciones (3) y (4) permite determinar las dos incógnitas  $Z_{d2}$  y  $Z_{s2}$  de la segunda L.

Claramente, los sistemas de ecuaciones [(1), (2)] y [(3), (4)] se pueden resolver separadamente o simultáneamente mediante la función `fsolve` de Matlab. En las siguientes líneas de código se presenta la resolución del sistema de 4 ecuaciones y cuatro incógnitas.

```

01 function Adaptacion_03
02 clc
03 f0=2445*1E6;
04 Df=500*1E6;
05 Q=f0/Df;
06 omega=2*pi*f0;
07 Zg=50; Zc=21+1i*1.15;
08 RH=max(real(Zg), real(Zc));
09 RV=RH/(1+Q^2);
10 Z11=conj(Zg); Z21=RV;
11 Z22=conj(Zc); Z12=RV;
12 %% Definición de una función anónima F que permite evaluar
13 % a las expresiones cuyas raíces simultáneas se desea determinar.
14 % Se define como lista de argumentos al vector z el cual está asociado a
15 % las variables del sistema de la siguiente forma:
16 %   z(1) corresponde a Zd1 y z(2) corresponde a Zs1
17 %   z(3) corresponde a Zs2 y z(4) corresponde a Zd2
18 F = @(z) [(Z11-RV)*z(1)+Z11*z(2)-z(1)*z(2)+Z11*RV;
19           (Zg-Z21)*z(1)+Zg*z(2)+z(1)*z(2)-Z21*Zg;
20           Z22*z(3)+(Z22-RV)*z(4)-z(3)*z(4)+Z22*RV;
21           Zc*z(3)+(Zc-Z12)*z(4)+z(3)*z(4)-Z12*Zc];
22 %% Solución del sistema de ecuaciones no lineales
23 % La condición inicial para determinar las raíces buscadas es que
24 % z(1) ó Zd1 sea capacitiva pura y z(2) ó Zs1 sea inductiva pura
25 % z(3) ó Zs2 sea inductiva pura y z(4) ó Zd2 sea capacitiva pura
26 z0 = [0+100i; 0-100i; 0+100i; 0-100i];
27 z = fsolve(F, z0);
28 %% Presentación de resultados
29 [Rs1, Xs1]=Z2RX(z(1));
30 [Rd1, Xd1]=Z2RX(z(2));
31 [Rs2, Xs2]=Z2RX(z(3));
32 [Rd2, Xd2]=Z2RX(z(4));
33 DispXsXd('d1', Xd1, omega);
34 DispXsXd('s1', Xs1, omega);
35 DispXsXd('s2', Xs2, omega);
36 DispXsXd('s', Xs1+Xs2, omega);
37 DispXsXd('d2', Xd2, omega);
38 %% Funciones internas
39 function [R, Y]=Z2RY(zValue)
40     R=real(zValue);
41     X=imag(zValue);
42     if abs(R)<1e-6*abs(X)
43         R=0;
44     else
45         if abs(X)<1e-6*abs(R), X=0; end
46     end
47 end
48 function DispXsXd(sd, X, W)
49     if XVal>0
50         disp(['X',sd,'=', num2str(X), '   L',sd,'=', num2str(X/W)]);
51     else
52         disp(['X',sd,'=', num2str(X), '   C',sd,'=', num2str(-1/X/W)]);
53     end
54 end
55 end

```

Las líneas 17 a 20 definen la función anónima  $F(z)$  que devuelve un arreglo cuyos elementos son los miembros de la izquierda en las ecuaciones (1), (2), (3) y (4), habiéndose considerado la siguiente correspondencia de variables:  $z(1)=Z_{d1}$ ,  $z(2)=Z_{s1}$ ,  $z(3)=Z_{s2}$  y  $z(4)=Z_{d2}$ .

La línea 25 corresponde a los valores iniciales asignados a  $z(1)$ ,  $z(2)$ ,  $z(3)$  y  $z(4)$ , los cuales definen qué solución es la que se desea para cada variable, entre todas las que puede tener el sistema de ecuaciones. En este caso, como se desean  $z(1)$  capacitiva pura,  $z(2)$  inductiva pura,  $z(3)$  inductiva pura y  $z(4)$  capacitiva pura, se asignan los valores:  $z0=[0-100i; 0+100i; 0+100i; 0-100i]$ .

La línea 26 resuelve numéricamente el sistema convergiendo a las soluciones deseadas, las cuales fueron indicadas por  $z0$ .

Como resultado de la ejecución se obtienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned} Z_{d1} &= -j10,2249 & Z_{s1} &= j9,8145 \\ Z_{s2} &= j6,1844 & Z_{d1} &= -j6,7164 \end{aligned}$$

Debiendo combinarse los elementos en serie de ambas L resultando:

$$Z_s = Z_{s1} + Z_{s2} = j9,8145 + j6,1844 = j15,9989$$

Por lo tanto para la frecuencia de operación de 2445 MHz se obtienen los siguientes valores de componentes:

$$C_{d1} = \frac{1}{2\pi \cdot 2445 \cdot 10^6 \cdot 10,2249} = 6,366 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

$$L_s = \frac{15,9989}{2\pi \cdot 2445 \cdot 10^6} = 1,041 \cdot 10^{-9} \text{ H}$$

$$C_{d2} = \frac{1}{2\pi \cdot 2445 \cdot 10^6 \cdot 6,7164} = 9,692 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

### 3.7. Bibliografía

- [1] M. E. Van Valkenburg. *Análisis de Redes*. Capítulo 14 “Potencia de entrada, transferencia de potencia y pérdida de inserción”. Ed. Editorial Limusa. México. 1999. ISBN 9789681801786.
- [2] Allan H. Robbins, Wilhelm C Miller. *Circuit Analysis: Theory and Practice*. Chapter 17: “Power in AC circuits”. Delmar Publications. 2002. ISBN 9780766806269.
- [3] Lamin Zhan, Shihao Qi, Baoquan Hu, Yunzhong Wu, Changzhong Chen. “Reflection Coefficient between Complex Impedances”. Proceedings of the IEEE 3rd International Conference on Electronics Technology. pp. 127-131. 8-12 May, 2020. Chengdu, China. ISBN: 9781728162836.
- [4] Robert W. Beatty. “Insertion Loss Concepts”. Proceedings of the IEEE. Vol. 52-6, pp. 663-671. June 1964.



---

# Capítulo 4

## Síntesis de Dipolos $LC$

---

### 4.1. Introducción

Dada una relación cuantitativa causa-efecto entre determinadas magnitudes o variables (entrada y salida), se entiende por *síntesis* al proceso de obtener un modelo del sistema que, actuando sobre las variables de entrada, las transforme en las de salida, dentro de un margen de tolerancia. En el caso de síntesis de una red, el problema consiste en definir la configuración (modelo) y determinar los valores de los elementos.

Para denominar *indistintamente* a impedancias y admitancias de entrada o de transferencia, se emplea el término *inmitancia*.

En general, se parte de una expresión algebraica de una inmitancia en el dominio de Laplace, aunque también se puede partir de señales de entrada y salida en el dominio del tiempo, dada la dualidad entre los dominios del tiempo y de la frecuencia.

A partir de esto, la síntesis se basa en el estudio de las propiedades de las funciones que caracterizan el comportamiento de una red.

Las impedancias o las admitancias *terminales* (inmitancias de punto impulsor) son las únicas funciones que, en rigor, pueden traducirse en *estructuras circuitales* denominadas *dipolos* o *redes monopuerta*, es decir, con dos terminales de acceso.

El concepto de *dipolo* o *red monopuerta* es el elemento básico de todo proceso de síntesis y por ello, el estudio de síntesis se inicia con su tratamiento.

Se tratará de descomponer las funciones de inmitancia en elementos simples ( $L$ ,  $C$ , o  $R$ ) confiriendo a la red las propiedades deseadas, mediante la agrupación adecuada de los elementos hallados.

El análisis quedará restringido a condiciones de linealidad y pasividad de la red.

### 4.2. Realizabilidad de inmitancias $RLC$

Toda función inmitancia terminal de una red pasiva compuesta por elementos  $RLC$  es un cociente de polinomios en  $s$  (frecuencia compleja) cuyos coeficientes están determinados por los valores  $R$ ,  $L$  y  $C$  del circuito, y por lo tanto son positivos. Entonces, una función inmitancia terminal de una red pasiva  $RLC$  es una *función racional real, real-positiva*<sup>1</sup>.

La primera premisa a tener presente es que la inversa de una función inmitancia terminal (admitancia o impedancia) también es una inmitancia (impedancia o admitancia).

Entonces una función de inmitancia  $F(s)$  es realizable como una red  $RLC$  si y sólo si  $F(s)$  es una *función racional-real, real-positiva*. Esto no aporta mucho si no se define una función racional real, real positiva.

---

<sup>1</sup> No debe olvidarse el contexto: circuitos lineales invariables en el tiempo de parámetros concentrados, con valores de elementos  $R$ ,  $L$ , y  $C$  positivos (circuito pasivo). En el caso de transformadores, el signo de la inductancia mutua  $M$  es sólo una cuestión de criterio en la elección de la polaridad de las puertas, por lo que no es importante. Recuérdese también que la inmitancia será siempre una impedancia o una admitancia, y que la realizabilidad de una y otra irán siempre unidas.

Una función  $F(s)$  es una función racional real, real positiva si y sólo si:

- es una función racional real, y además
- es una función real positiva.

Entonces es necesario definir *función racional real* y *función real positiva*.

**a)** Una función  $F(s)$  es una *función racional real* si y sólo si es una función racional con coeficientes reales. Es decir, si y sólo si

$$F(s) = \frac{\sum_{j=0}^m a_j s^j}{\sum_{i=0}^n b_i s^i} \quad \text{con} \quad \begin{cases} a_j \in \mathfrak{R} \quad \forall j = 0, \dots, m \\ b_i \in \mathfrak{R} \quad \forall i = 0, \dots, n \end{cases}$$

Claramente, esto tiene como consecuencia que para cualquier valor real de la variable, la función es real.

**b)** Una función  $F(s)$  es una *función real positiva* si y sólo si para cualquier valor de la variable compleja con parte real no-negativa, el valor de la función (evaluada en ese valor de la variable) también tiene parte real no-negativa. Es decir, si y sólo si,

$$\operatorname{Re}[F(s)] \geq 0 \quad \forall s / \operatorname{Re}[s] \geq 0 \quad (4-1)$$

Existe un conjunto *alternativo* de condiciones necesarias y suficientes para que una función sea real positiva. Es decir, una definición alternativa de función real positiva, que es la siguiente.

Una función  $F(s)$  es una función real positiva si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes,

**b.1)** La evaluación de la función en el eje imaginario resulta en un conjunto de valores contenido en el semiplano derecho cerrado. Es decir,

$$\operatorname{Re}[F(j\omega)] \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathfrak{R} \quad (4-2)$$

**b.2)** Todos los polos de  $F(s)$  están en el semiplano izquierdo cerrado, y los polos que haya en el eje imaginario son simples y sus residuos asociados son reales y positivos.

Es importante hacer notar que los valores  $s=0$  y  $s \rightarrow \infty$  también se encuentran en el eje  $j\omega$ , y por tanto también deben cumplir la condición establecida en (4-1), o las establecidas en (4-2) y b.2.

Claramente, las funciones inmitancia terminal de redes *RLC* pasivas deben ser reales positivas porque absorben energía de los generadores que las excitan. Si la impedancia (admitancia) terminal es real positiva, su inversa o sea la admitancia (impedancia) también es real positiva:

$$Z(s) = Z(\sigma + j\omega) = R(\sigma + j\omega) + jX(\sigma + j\omega)$$

$$Y(s) = Y(\sigma + j\omega) = \frac{1}{Z(\sigma + j\omega)} = \frac{R(\sigma + j\omega) - jX(\sigma + j\omega)}{R^2(\sigma + j\omega) + X^2(\sigma + j\omega)} \quad \forall \omega \in \mathfrak{R} \quad \forall \sigma \geq 0$$

### 4.3. Propiedades de las inmitancias *RLC* de punto impulsor

Toda función de inmitancia terminal de una red *RLC* es una función real positiva y, antes de proceder a la síntesis, debe analizarse si es real positiva (condición de realizabilidad).

- Son funciones racionales en  $s$  con coeficientes reales y positivos. Esto implica que tienen polos y ceros reales y/o complejos conjugados, con parte real negativa.
- Los polinomios del numerador y denominador son completos, sin faltar ningún término, excepto que sean pares o impares, en cuyo caso serán pares completos o impares completos.
- Cuando  $s$  tiende a infinito, el grado del numerador no puede diferir en más de uno respecto del grado del denominador, lo que equivale a decir que  $Z(s)$  ó  $Y(s)$  se comportan como  $k$ ,  $k/s$ , ó  $ks$  (en altas frecuencias predomina un tipo de elemento).
- Los polos (y también los ceros por ser  $F(s)$  y su inversa funciones reales positivas) sobre el eje imaginario deben ser simples.
- Los residuos en los polos sobre el eje imaginario deben ser reales y positivos.

En las proximidades del polo, la función inmitancia  $F(s)$  puede ser desarrollada en serie de Laurent:

$$F(s) = \frac{a_{-1}}{(s+s_0)} + a_0 + a_1(s+s_0) + \dots$$

Siendo el primer término de este desarrollo, la parte principal de  $F(s)$  en el entorno del polo  $s_0$ . Si  $a_{-1}$  es complejo (residuo complejo):

$$a_{-1} = \alpha \pm j\beta \quad y \quad s_0 = j\omega_0$$

Puede ponerse:

$$F(\sigma + j\omega) = \frac{\alpha \pm j\beta}{\sigma + j(\omega + \omega_0)} + \dots$$

Separando partes real e imaginaria:

$$F(\sigma + j\omega) = \left[ \frac{\alpha\sigma \pm \beta(\omega + \omega_0)}{\sigma^2 + (\omega + \omega_0)^2} \pm j \frac{\beta\sigma - \alpha(\omega + \omega_0)}{\sigma^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right] + \dots$$

Puesto que:

$$\text{Re}[\sigma + j\omega] \geq 0 \quad \text{para todo } \sigma > 0$$

La condición necesaria es:

$$\beta = 0 \quad y \quad \alpha > 0$$

Es decir el residuo para polos sobre el eje imaginario es *real y positivo*.

- La derivada en los ceros sobre el eje imaginario de una función real positiva, es positiva. Ya se demostró que los polos (y también los ceros) de una función racional real-real positiva *ubicados sobre el eje imaginario*, son reales positivos.

Para hallar la siguiente expresión del residuo de  $F(s)$  en un polo  $s_0$ :

Sea  $F(s)$  una función racional real positiva-real positiva:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Y sea  $s = -s_i$  un polo de  $F(s)$ , y por lo tanto cero de  $1/F(s)$ . Es decir  $Q(s)$  puede factorizarse de la siguiente manera:

$$Q(s) = (s + s_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} (s + s_j)$$

Y por lo tanto, la derivada de  $Q(s)$  resulta:

$$\frac{dQ(s)}{ds} = \left[ \prod_{j=1; j \neq i} (s + s_j) + (s + s_i) \frac{d}{ds} \prod_{j=1; j \neq i} (s + s_j) \right]_{s=-s_i}$$

De modo tal que cuando se la evalúa en  $s = -s_i$  resulta:

$$\left. \frac{dQ(s)}{ds} \right|_{s=-s_i} = \left[ \prod_{j=1; j \neq i} (s + s_j) \right]_{s=-s_i} = \left[ \frac{Q(s)}{(s + s_i)} \right]_{s=-s_i}$$

Por otra parte, el residuo en  $s = -s_i$ , según la definición clásica resulta:

$$K_i = \lim_{s \rightarrow -s_i} \left[ (s + s_i) \frac{P(s)}{Q(s)} \right] = \lim_{s \rightarrow -s_i} \frac{P(s)}{\prod_{j=1; j \neq i} (s + s_j)} = \left[ \frac{P(s)}{Q'(s)} \right]_{s=-s_i}$$

Para deducir la propiedad de la derivada de una función racional real positiva evaluada en los ceros sobre el eje imaginario, se deriva la inversa de  $F(s)$  y se evalúa en  $s = j\omega_i$  ya que como  $F(s)$  tiene un polo en  $s = j\omega_i$ ,  $1/F(s)$  tendrá un cero:

$$\lim_{s \rightarrow j\omega_i} \left[ \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{F(s)} \right) \right] = \lim_{s \rightarrow j\omega_i} \left[ \frac{P(s)Q'(s) - P'(s)Q(s)}{P^2(s)} \right]$$

Entonces:

$$Q(j\omega_i) = 0 \Rightarrow \lim_{s \rightarrow j\omega_i} \left[ \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{F(s)} \right) \right] = \left[ \frac{Q'(s)}{P(s)} \right]_{s=j\omega_i} = \frac{1}{K_i}$$

Si  $1/F(s)$  es real positiva, su inversa  $F(s)$  también lo es por lo que el residuo  $K_i$  es real y positivo. Por lo tanto, *la derivada en los ceros sobre el eje imaginario de una función real positiva, es positiva.*

En resumen, se puede enunciar que las funciones racionales reales positivas tienen las siguientes propiedades:

- 1) Son funciones racionales en  $s$ , con coeficientes reales y positivos.
- 2) Los grados del numerador y denominador no difieren en más de uno.
- 3) Su parte real (evaluada sobre el eje imaginario de la variable frecuencia compleja  $s$ ) es no negativa.
- 4) No tienen polos ni ceros en el semiplano derecho de la variable frecuencia compleja  $s$ , y los que están sobre el eje imaginario son simples.
- 5) Los residuos en los polos sobre el eje imaginario de la variable frecuencia compleja  $s$ , son reales y positivos.
- 6) Las derivadas en los ceros, evaluadas sobre el eje imaginario de la variable frecuencia compleja  $s$ , son reales y positivas (consecuencia de la propiedad 5).

Las propiedades 3, 4, y 5 son fundamentales, puesto que las propiedades 1, 2, y 6 derivan de ellas.

#### 4.4. Realizabilidad de inmitancias terminales LC

Este es un caso particular de realizabilidad *RLC*, es decir, las inmitancias realizables *LC* son un subconjunto de las inmitancias realizables *RLC*. Es de esperar por tanto que las condiciones de realizabilidad *LC* sean algo más restrictivas que las de realizabilidad *RLC*. Las siguientes condiciones se derivan del resultado obtenido para la realizabilidad *RLC* y considerando que no existe ninguna resistencia.

Una función de inmitancia  $F(s)$  es *realizable LC* si y sólo si se dan las siguientes condiciones,

**a)**  $F(s)$  es una función racional real, y además

**b.1)** La evaluación de la función en el eje imaginario resulta en un conjunto de valores contenido en el eje imaginario. Es decir,

$$\operatorname{Re}[F(j\omega)] = 0 \quad \forall \omega \in \Re \quad (4-3)$$

Es decir:

$$\operatorname{Re}\{F(j\omega)\} = \operatorname{Par}\{F(\omega)\} = 0 \quad \forall \omega \in \Re$$

Con lo cual  $F(s)$  es una función impar.

**b.2)** Todos los polos de  $F(s)$  están en el eje imaginario, son simples y sus residuos asociados son reales y positivos.

Esto es así porque cada par de polos conjugados de multiplicidad  $n$  en el eje  $j\omega$  daría lugar a términos de la respuesta de la forma  $[t^{n-1}/(n-1)! e^{j\omega t}]$ . Lo cual también corresponde a una respuesta no acotada, inadmisibles en una red pasiva.

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s+a)] = f(t) e^{-at}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^n}\right] = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s \pm j\omega)^n}\right] = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\mp j\omega t}$$

Como en el caso anterior, es importante hacer notar que los valores  $s = 0$  y  $s \rightarrow \infty$  también se encuentran en el eje  $j\omega$ , y por tanto también deben cumplir las condiciones establecidas en (4-3) y en **b.2**.

Como se ha anticipado en base a razonamientos sobre la “simultaneidad de la impedancia y la admitancia” de cualquier monopuerta realizable, puede demostrarse que si una función  $F(s)$  cumple las condiciones de realizabilidad LC, su inversa  $G(s) = 1/F(s)$  también las cumple.

**4.5. Propiedades de dipolos LC: funciones racionales reales positivas impares**

Cuando una red solo tiene elementos  $L$  y  $C$  esto implica que:

$$\text{Re}[Z(j\omega)] = \text{Re}[Y(j\omega)] = 0$$

Todos los polos y ceros están sobre el eje imaginario y la impedancia o admitancia de entrada se reduce a una reactancia o susceptancia pura.

Puede verse también que, en este caso, las inmitancias son funciones impares de  $s$  (ya que su parte par es nula), resultando para  $s$  tendiendo a infinito, comportamientos como  $ks$  ó  $k/s$  (y no como  $k$ ).

Resumiendo:

Propiedades de las inmitancias LC de punto impulsor

- 1) Son funciones racionales reales, impares en  $s$ , con coeficientes reales y positivos.
- 2) Cuando  $s$  tiende a infinito, se comportan como  $ks$  ó  $k/s$ .
- 3) Su parte real es nula en todo el eje imaginario, o sea:  $\text{Re}[F(j\omega)] = 0$
- 4) Sus polos y ceros están sobre el eje imaginario.
- 5) Todos sus polos y ceros son simples, conjugados dos a dos, y sus residuos son reales y positivos.
- 6) Como consecuencia de la propiedad 5, solo pueden tener en el origen o en el infinito, un polo simple o un cero simple.

Los casos más sencillos son  $F(s) = ks$  ó  $k/s$ , con  $k$  real y positivo, que contienen un simple elemento.

**4.6. Teorema de Foster**

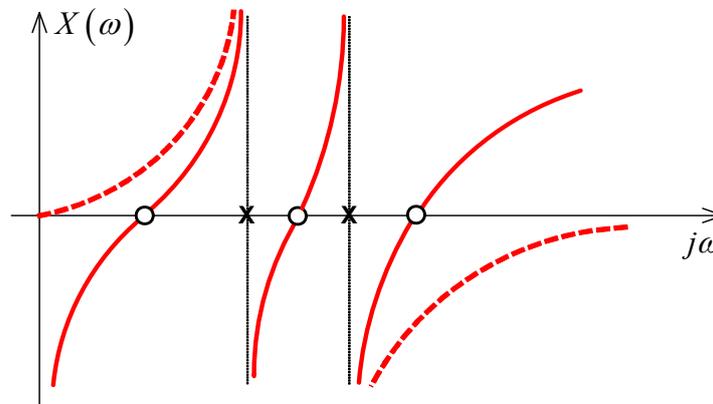
Basándose en las propiedades 4, y 5 anteriores para funciones reales positivas impares, se las puede desarrollar como:

$$F(s) = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s - j\omega_1} + \frac{K_1^*}{s + j\omega_1} + \frac{K_2}{s - j\omega_2} + \frac{K_2^*}{s + j\omega_2} + \dots + K_\infty s$$

Agrupando los polos complejos conjugados:

$$F(s) = \frac{K_0}{s} + \frac{2K_1 s}{s^2 + \omega_1^2} + \frac{2K_2 s}{s^2 + \omega_2^2} + \dots + K_\infty s$$

En la **Fig. 4.1** se muestra la gráfica de las funciones reales positivas impares, en función de  $j\omega$ , o *curvas de reactancia* o *susceptancia*, en donde se incluyen todas las variantes posibles (cero en el origen o en el infinito, y polo en el origen o en el infinito respectivamente), (*LL*, *LC*, *CL*, y *CC*).



**Fig. 4.1.** Variantes para la ubicación de polos y ceros y su efecto sobre las curvas de reactancia (o susceptancia).

En las proximidades de cada polo,  $X(\omega)$  ó  $B(\omega)$  varía como:

$$X(j\omega) = \frac{1}{j} \frac{K_\lambda}{(j\omega - j\omega_\lambda)} = \frac{K_\lambda}{\omega_\lambda - \omega}$$

Es decir que pasa de valer *más* infinito a valer *menos* infinito, en forma brusca. Además, en los ceros, estas funciones tienen derivadas positivas.

$$F'(s) = -\frac{K_0}{s^2} + K_\infty + \sum_{\lambda} 2K_{\lambda} \frac{\omega_{\lambda}^2 - s^2}{(\omega_{\lambda}^2 + s^2)^2}$$

$$F'(j\omega) = \frac{K_0}{\omega^2} + K_\infty + \sum_{\lambda} 2K_{\lambda} \frac{\omega_{\lambda}^2 + \omega^2}{(\omega_{\lambda}^2 - \omega^2)^2}$$

Siendo esta derivada positiva para todo valor de  $\omega$ .

El *Teorema de Foster* propone que:

$$F(s) = H \frac{s(s^2 + \omega_2^2)(s^2 + \omega_4^2) \dots}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_3^2) \dots}$$

O bien:

$$F(s) = H \frac{(s^2 + \omega_2^2)(s^2 + \omega_4^2) \dots}{s(s^2 + \omega_3^2)(s^2 + \omega_5^2) \dots}$$

Funciones que tienen sus polos y ceros simples, y se hallan alternados sobre el eje imaginario, o sea que:

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots$$

Este teorema expresa que una función de inmitancia terminal *LC* (de entrada o salida), queda determinada por sus polos y ceros, excepto un factor de escala *H*. Este factor puede ser ajustado mediante un transformador o un paso de amplificación, o bien tenerse en cuenta cuando se desnormaliza respecto al nivel de impedancia.

### 4.7. Síntesis de dipolos en las formas canónicas de Foster

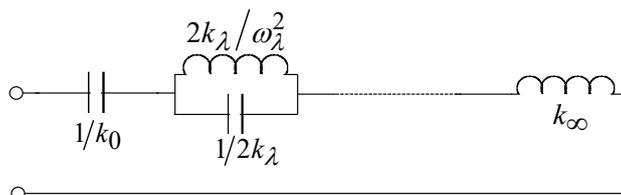
La representación dada por Foster para las funciones reales positivas impares:

$$F(s) = \frac{k_0}{s} + k_\infty s + \sum_{\lambda} \frac{2k_{\lambda} s}{s^2 + \omega_{\lambda}^2} = \frac{1}{\frac{1}{k_0} s} + \sum_{\lambda=1}^n \frac{1}{\frac{1}{2k_{\lambda}} s + \frac{1}{\frac{2k_{\lambda}}{\omega_{\lambda}^2} s}} + k_\infty s$$

Sugiere dos formas de realización, basado en que tanto  $F(s)$  como su inversa son funciones reales positivas impares.

La primera de estas formas de realización es como impedancia, mientras que la segunda es como admitancia. La implementación como impedancia, se conoce como *Primera Forma Canónica* o *Primera Forma de Foster* o simplemente *Foster I*; y la implementación como admitancia, se conoce como *Segunda Forma Canónica* o *Segunda Forma de Foster* o simplemente *Foster II*. Es decir: *Foster I* se aplica a la *síntesis de impedancias*, mientras que *Foster II* se aplica a la *síntesis de admitancias*.

En la **Fig. 4.2** se muestra la realización de  $F(s)$  como *impedancia* o forma canónica Foster 1. Esto significa que se aplica el desarrollo de Foster ya sea a  $F(s)$  o bien a  $1/F(s)$ , la que resulte *impedancia*.



**Fig. 4.2.** Primera Forma Canónica o Foster I.

En la **Fig. 4.3** se muestra la realización de  $F(s)$  como *admitancia* o forma canónica Foster 2. Esto significa que se aplica el desarrollo de Foster ya sea a  $F(s)$  o bien a  $1/F(s)$ , la que resulte *admitancia*.

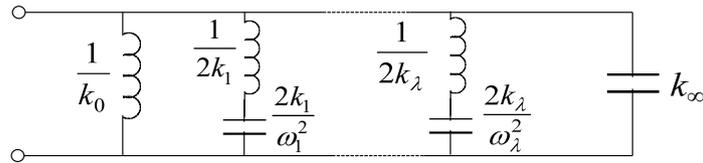


Fig. 4.3. Segunda Forma Canónica o Foster II.

Se denominan formas canónicas porque tienen el número mínimo de elementos en su realización.

Se sugiere que el estudiante compruebe por sí mismo, a partir de las realizaciones obtenidas anteriormente, que este número mínimo de elementos, para síntesis de dipolos LC, es igual a:

- El orden de  $F(s)$
- El número total de polos simples de  $F(s)$
- El número total de ceros simples de  $F(s)$
- El número de frecuencias críticas finitas más uno

**Ejemplo 4.1.**

Sea la  $Z(s)$  reactiva pura, cuyo diagrama cero-polar y curva de reactancia se muestran en la Fig. 4.4. Sintetizar  $Z(s)$  por Foster, sabiendo que se requiere que  $Z(j4)=j100\Omega$ .

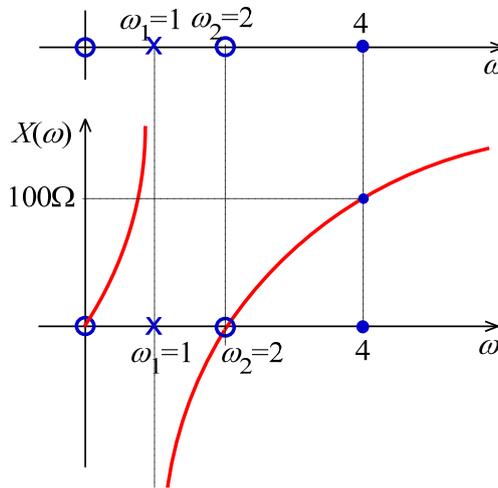


Fig. 4.4. Diagrama cero-polar y curva de reactancia de  $Z(s)$ .

**Resolución**

Del diagrama de polos y ceros surge que:

$$Z(s) = R_0 \frac{s(s^2 + \omega_2^2)}{s^2 + \omega_1^2}$$

Siendo  $R_0$  el factor de escala que no es posible describir por el diagrama de polos y ceros. Normalizando la impedancia respecto de  $R_0$  (es decir, dividiendo a  $Z(s)$  por  $R_0$ ) resulta:

$$Z_n(s) = \frac{s(s^2 + 4)}{s^2 + 1} = \frac{2k_1s}{s^2 + 1} + k_\infty s$$

Siendo:

$$k_1 = \lim_{s^2 \rightarrow -1} \left[ \frac{s^2 + 1}{2s} Z(s) \right] = \lim_{s^2 \rightarrow -1} \left[ \frac{s^2 + 4}{2} \right] = \frac{3}{2} \qquad k_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{s} Z(s) \right] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ \frac{s^2 + 4}{s^2 + 1} \right] = 1$$

Por lo tanto:

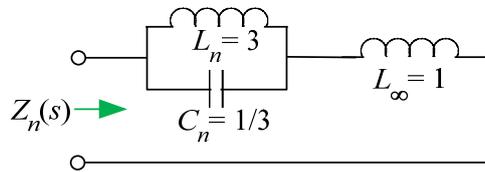
$$Z_n(s) = \frac{s(s^2 + 4)}{(s^2 + 1)} = \frac{3s}{s^2 + 1} + s = \frac{1}{\frac{1}{3}s + \frac{1}{3s}} + s$$

Ahora se puede determinar el valor de  $R_0$  sabiendo que  $Z(j4)=j100$ :

$$Z(j4) = R_0 Z_n(j4) = R_0 \frac{j4(-16+4)}{(-16+1)} = jR_0 \frac{48}{15} = j100$$

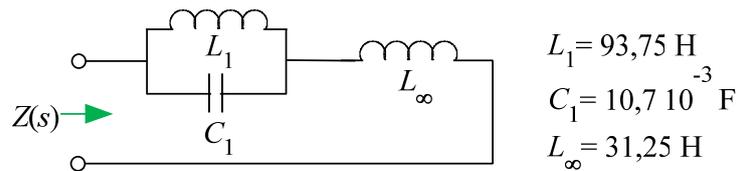
De donde  $R_0=31,25\Omega$ .

En la **Fig. 4.5** se muestra la realización normalizada de esta impedancia.



**Fig. 4.5.** Síntesis de  $Z(s)$  por Foster I (valores normalizados).

En la **Fig. 4.6** se muestra la misma realización de esta impedancia ya desnormalizada.



**Fig. 4.6.** Síntesis de  $Z(s)$  por Foster I (valores desnormalizados).

Donde la desnormalización de los valores de inductancias y capacitancias se efectúa así:

$$sL = R_0 \cdot sL_n \Rightarrow L = R_0 \cdot L_n \quad \text{y} \quad \frac{1}{sC} = R_0 \cdot \frac{1}{sC_n} \Rightarrow C = \frac{C_n}{R_0}$$

#### 4.8. Remociones de polos de inmitancias de punto impulsor.

El desarrollo de Foster de las funciones reales positivas impares, tanto sea impedancias como admitancias, permite aplicar el concepto de síntesis por *remociones de polos* de la inmitancia terminal.

En efecto, sea  $F(s)$ :

$$F(s) = \frac{k_0}{s} + \frac{2k_1s}{s^2 + \omega_1^2} + \frac{2k_2s}{s^2 + \omega_2^2} + \dots + \frac{2k_\lambda s}{s^2 + \omega_\lambda^2} + k_\infty s$$

##### 4.8.1. Remoción de un polo en el origen

Si  $F(s)$  es una impedancia de entrada  $Z(s)$ , la remoción del polo en el origen puede realizarse considerando:

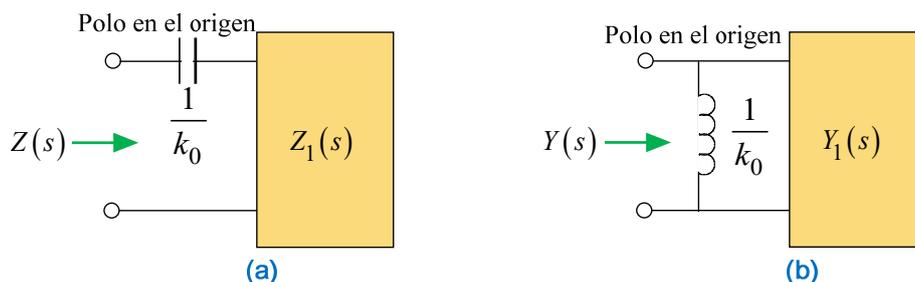
$$Z(s) = \frac{k_0}{s} + Z_1(s) \Rightarrow Z_1(s) = Z(s) - \frac{k_0}{s}$$

Esta sustracción, que puede interpretarse circuitalmente como se indica en la **Fig. 4.7a**, sugiere que  $Z_1(s)$  tendrá un cero en el origen.

Si  $F(s)$  es una admitancia de entrada  $Y(s)$ , la remoción del polo en el origen puede realizarse considerando:

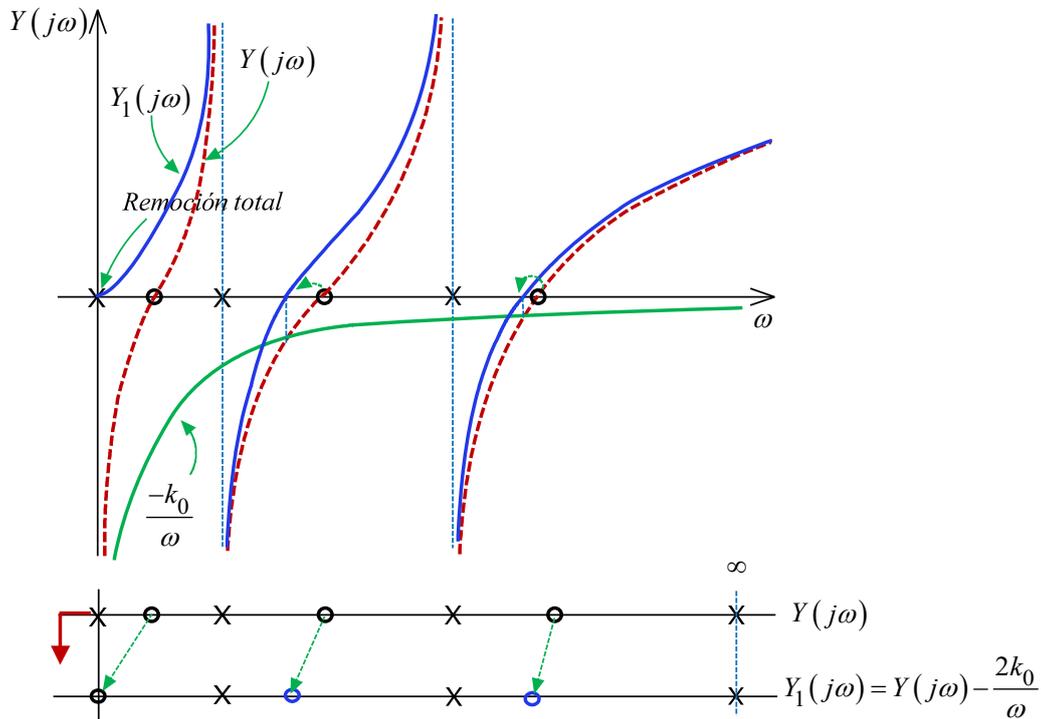
$$Y(s) = \frac{k_0}{s} + Y_1(s) \Rightarrow Y_1(s) = Y(s) - \frac{k_0}{s}$$

Esta sustracción, que puede interpretarse circuitalmente como se indica en la **Fig. 4.7b**, sugiere que  $Y_1(s)$  tendrá un cero en el origen.



**Fig. 4.7.** Remoción de un polo en el origen: **(a)** para una  $Z(s)$ ; **(b)** para una  $Y(s)$ .

El efecto de esta remoción total sobre los polos y ceros de la parte remanente, se aprecia en la **Fig. 4.8**, y puede resumirse diciendo que todo resulta *como si* el cero más cercano al polo removido se desplazara hacia ese sitio, y el resto de los ceros, excluyendo el eventual cero en infinito, también se desplazan levemente en dirección al origen (lugar donde se efectuó la remoción), pero sin alcanzar al polo contiguo.



**Fig. 4.8.** Efecto de la remoción de un polo en el origen sobre la curva de reactancia y sobre el diagrama cero-polar.

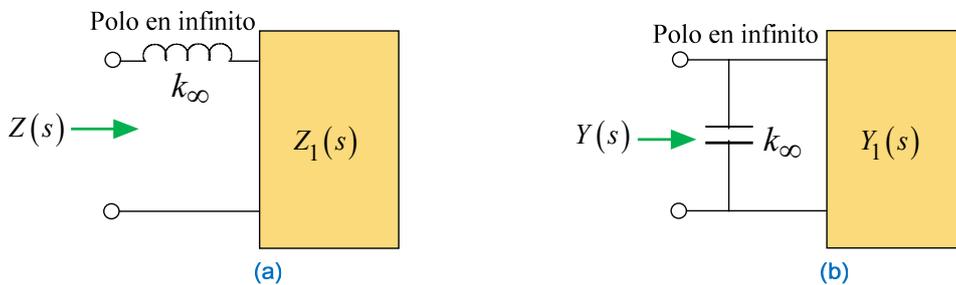
4.8.2. Remoción de un polo en infinito

Si  $F(s)$  es una impedancia de entrada  $Z(s)$ , la remoción del polo en infinito puede realizarse considerando:  
 $Z(s) = Z_1(s) + k_\infty s \Rightarrow Z_1(s) = Z(s) - k_\infty s$

Esta sustracción, que puede interpretarse circuitalmente como se indica en la **Fig. 4.9a**, sugiere que  $Z_1(s)$  tendrá un cero en infinito.

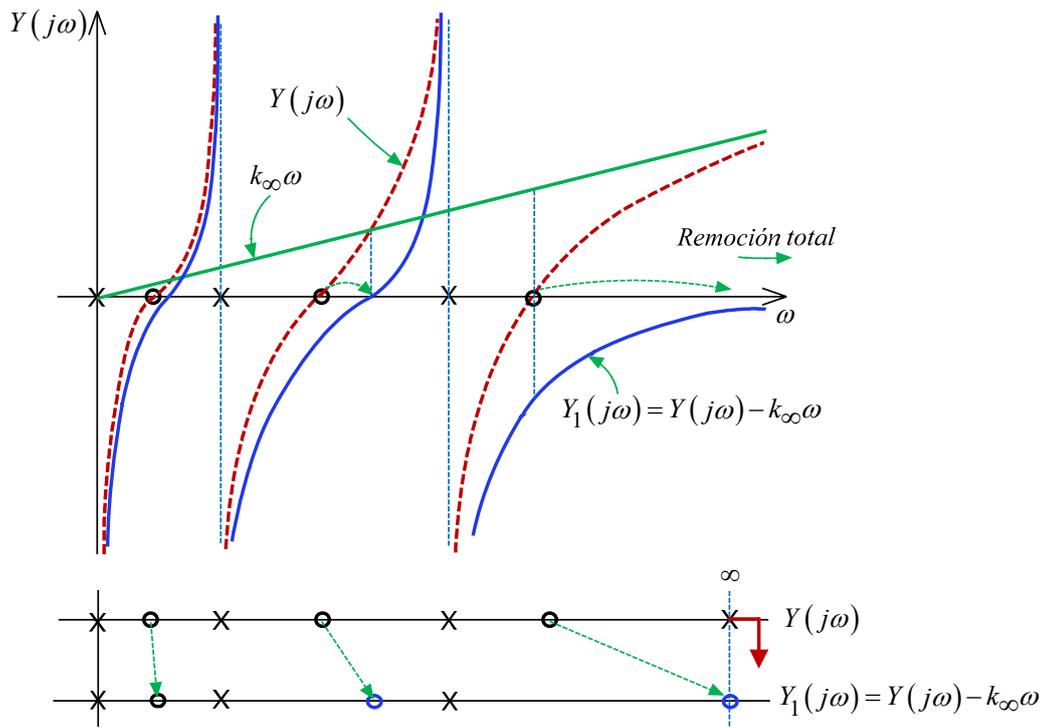
Si  $F(s)$  es una admitancia de entrada  $Y(s)$ , la remoción del polo en infinito puede realizarse considerando:  
 $Y(s) = Y_1(s) + k_\infty s \Rightarrow Y_1(s) = Y(s) - k_\infty s$

Esta sustracción, que puede interpretarse circuitalmente como se indica en la **Fig. 4.9b**, sugiere que  $Y_1(s)$  tendrá un cero en infinito.



**Fig. 4.9.** Remoción de un polo en infinito: (a) para una  $Z(s)$ ; (b) para una  $Y(s)$ .

El efecto de esta remoción total sobre los polos y ceros de la parte remanente, se aprecia en la **Fig. 4.10**, y puede resumirse diciendo que todo resulta *como si* el cero más cercano al polo removido se desplazara hacia ese sitio, y el resto de los ceros, excluyendo el eventual cero en el origen, también se desplazan levemente hacia el infinito (lugar donde se efectuó la remoción), pero sin alcanzar al polo contiguo.



**Fig. 4.10.** Efecto de la remoción de un polo en infinito sobre la curva de reactancia y sobre el diagrama cero-polar.

**4.8.3. Remoción de un polo finito en el eje  $j\omega$ .**

Si  $F(s)$  es una impedancia de entrada  $Z(s)$ , la remoción del polo en  $s=\pm j\omega_1$  puede realizarse considerando:

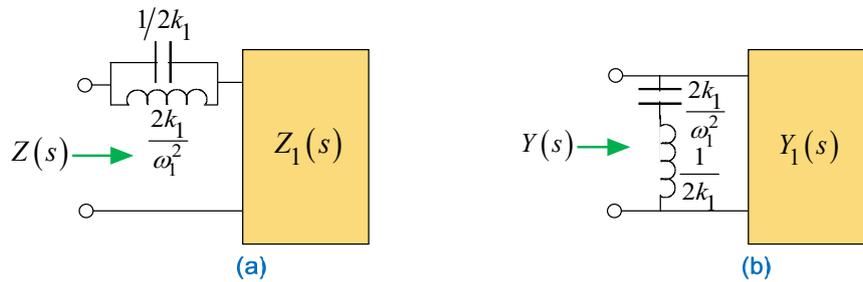
$$Z(s) = Z_1(s) + \frac{2k_1s}{s^2 + \omega_1^2} \Rightarrow Z_1(s) = Z(s) - \frac{2k_1s}{s^2 + \omega_1^2}$$

Esta sustracción, que puede interpretarse circuitalmente como se indica en la **Fig. 4.11a**, sugiere que  $Z_1(s)$  tendrá un cero en  $s=\pm j\omega_1$ .

Si  $F(s)$  es una admitancia de entrada  $Y(s)$ , la remoción del polo en  $\pm j1$  puede realizarse considerando:

$$Y(s) = Y_1(s) + \frac{2k_1s}{s^2 + \omega_1^2} \Rightarrow Y_1(s) = Y(s) - \frac{2k_1s}{s^2 + \omega_1^2}$$

Esta sustracción, que puede interpretarse circuitalmente como se indica en la **Fig. 4.11b**, sugiere que  $Y_1(s)$  tendrá un cero en  $s=\pm j\omega_1$ .



**Fig. 4.11.** Remoción de un polo finito en el eje  $j\omega$ : (a) para una  $Z(s)$ ; (b) para una  $Y(s)$ .

El efecto de esta remoción total sobre los polos y ceros de la parte remanente, se aprecia en la **Fig. 4.12**, y puede resumirse diciendo que todo resulta *como si* los ceros vecinos al polo removido se desplazaran hacia ese sitio, y el resto de los ceros también se desplazan levemente en dirección al polo removido (lugar donde se efectuó la remoción), pero sin alcanzar al polo contiguo. Quedan excluidos a esta “atracción” los eventuales ceros en infinito y en el origen, que no se desplazan.

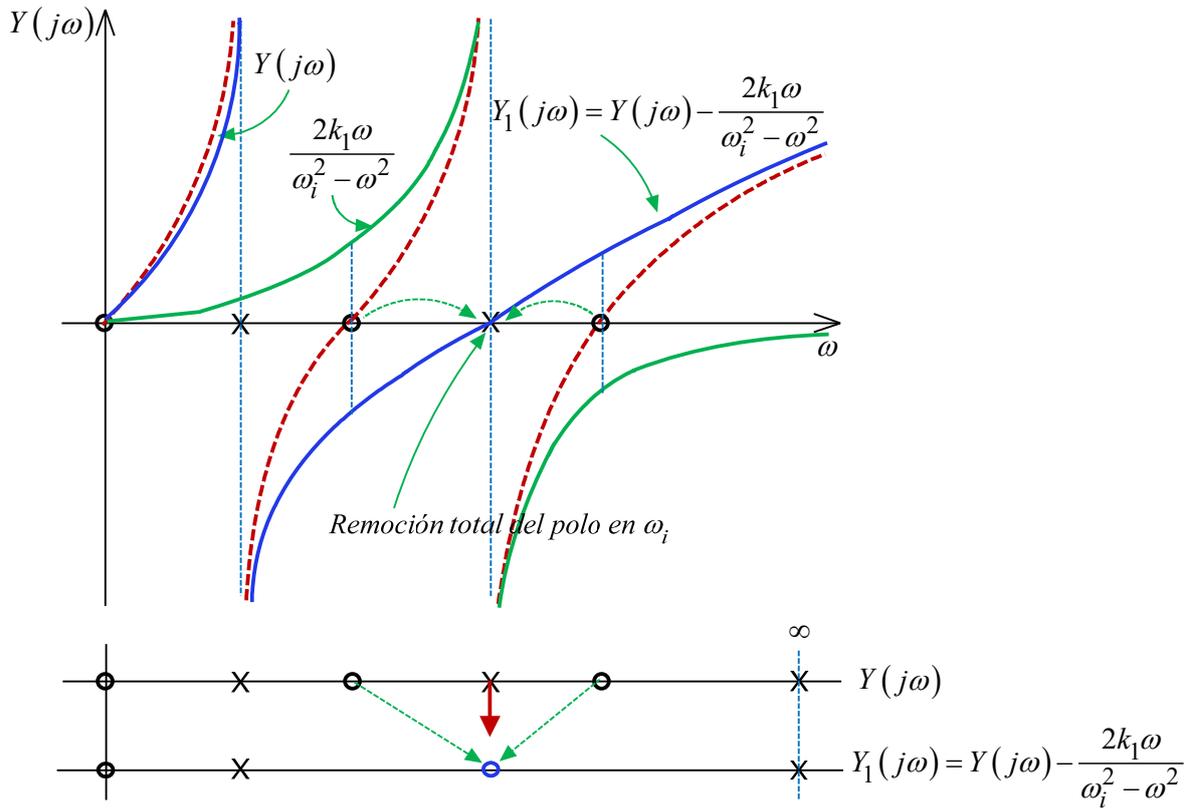


Fig. 4.12. Efecto de la remoción de un polo finito sobre la curva de reactancia y sobre el diagrama cero-polar.

**4.9. Desarrollo de Cauer. Formas canónicas tercera y cuarta**

El desarrollo dado por el teorema de Foster abre otra posibilidad para la realización de funciones reales positivas impares, como impedancias o admitancias.

En efecto, toda función racional real, real positiva impar, tiene en el infinito un cero simple o un polo simple. Si la función original tiene un cero simple en infinito, su inversa (la otra instancia, que también será real positiva impar) tendrá un polo en infinito.

Entonces, sea  $F(s)$  la instancia en la cual se tiene un polo simple en el infinito. La función resultante de extraer dicho polo será la siguiente:

$$F_1(s) = F(s) - k_{\infty}^{(1)}s = \frac{k_0}{s} + \sum_{\lambda} \frac{2k_{\lambda}s}{s^2 + \omega_{\lambda}^2}$$

Esta función es también real positiva impar, pero ya sin polo en el infinito. Al no tener un polo en el infinito, debe tener un cero allí, por lo tanto su inversa tendrá un polo en el infinito, el cual podrá extraerse, resultando la siguiente función:

$$F_2(s) = \frac{1}{F_1(s)} - k_{\infty}^{(2)}s$$

Esta función resultante es también real positiva impar, pero con un cero en el infinito. Por lo tanto su inversa tiene un polo en el infinito, cuya extracción dará lugar a la siguiente función:

$$F_3(s) = \frac{1}{F_2(s)} - k_{\infty}^{(3)}s$$

Generalizando,  $F(s)$  se puede desarrollar como la siguiente fracción continua:

$$F(s) = k_{\infty}^{(1)}s + \frac{1}{k_{\infty}^{(2)}s + \frac{1}{k_{\infty}^{(3)}s + \dots + \frac{1}{k_{\infty}^{(\lambda)}s}}$$

Si  $F(s)$  es una impedancia, entonces:

$$k_{\infty}^{(1)} = L \quad k_{\infty}^{(2)} = C \quad \text{etc.}$$

El procedimiento de realización es simple, ya que consiste en desarrollar la división de numerador y denominador por fracción continua.

Esta forma de realización da una red tipo escalera, tal como se muestra en Fig. 4.13 para el caso que  $F(s)$  sea una impedancia.

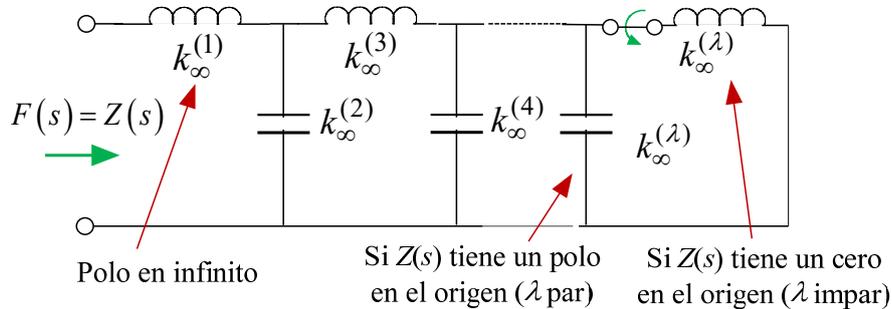


Fig. 4.13. Síntesis de  $F(s)$  por Cauer I como impedancia. La terminación depende del comportamiento de  $F(s)$  en el origen.

Si  $\lambda$  es par, la red terminará en una  $C$  en paralelo, mientras que si  $\lambda$  es impar la red terminará en una  $L$  serie, siendo  $\lambda$  el orden de  $F(s)$ . Esto es así porque la terminación tiene que ver con el comportamiento en el otro extremo de frecuencias respecto del que se efectuaron las remociones. En este caso, como las remociones se hacen en infinito, la terminación determina el comportamiento en el origen. Entonces si  $F(s)$  que para el caso de la Fig. 4.13 es una  $Z(s)$ , tiene un polo en el origen, la terminación debe ser con una  $C$  (que es la que realiza dicho polo); en cambio si tiene un cero en el origen, la terminación debe ser con una  $L$  (todos los inductores en serie determinan que para frecuencia cero  $Z(s)$  es cero).

Además el número de elementos reactivos simples (de aquí que este desarrollo es canónico), también es igual al número de polos más ceros finitos más uno.

Los polos que están en frecuencias finitas aparecen de a pares conjugados, por tanto si  $\lambda$  es par y existe polo en el infinito, debe haber otro en el origen, y este polo en el origen (terminación de la red) se realiza con una  $C$ .

Si  $F(s)$  es una admitancia, se inicia con una  $C$  en derivación. En este caso el polo en el origen se materializa como una  $L$  en serie, y si la función tiene un cero en el origen, la red termina en una  $C$ . Este desarrollo de  $F(s)$  como admitancia se muestra en la Fig. 4.14.

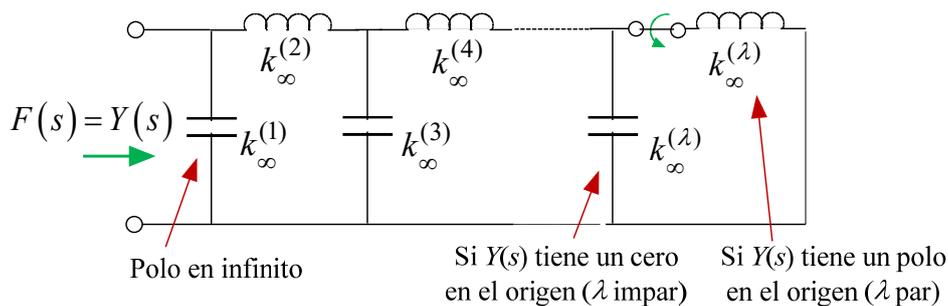


Fig. 4.14. Síntesis de  $F(s)$  por Cauer I como admitancia. La terminación depende del comportamiento de  $F(s)$  en el origen.

Esta realización, *extracción de polos en el infinito*, debida a Cauer se denomina *Tercera Forma Canónica* o *Primera Forma de Cauer* o *Cauer I*, tanto para  $F(s)$  desarrollada como impedancia o como admitancia (la instancia en la que  $F(s)$  posea un polo en infinito).

Otra forma de desarrollar  $F(s)$  en redes tipo escalera consiste en ir extrayendo los polos *en el origen*, dando lugar a la *Cuarta Forma Canónica* o *Segunda Forma de Cauer* o *Cauer II*. El proceso es dual al anterior.

En efecto, toda función racional real, real positiva impar, tiene en el origen o un cero o un polo simple. Si la función original tiene un cero simple en el origen, su inversa (la otra instancia, que también será real positiva impar) tendrá un polo en el origen.

Entonces, sea  $F(s)$  la instancia en la cual se tiene un polo simple en el origen. La función resultante de extraer dicho polo será la siguiente:

$$F_1(s) = F(s) - \frac{k_0^{(1)}}{s} = k_\infty s + \sum_{\lambda} \frac{2k_\lambda s}{s^2 + \omega_\lambda^2}$$

Esta función es también real positiva impar, pero ya sin polo en el origen. Al no tener un polo en el origen, debe tener un cero allí, por lo tanto su inversa tendrá un polo en el origen, el cual podrá extraerse, resultando la siguiente función:

$$F_2(s) = \frac{1}{F_1(s)} - \frac{k_0^{(1)}}{s}$$

Esta función resultante es también real positiva impar, pero con un cero en el origen.

Repitiendo el razonamiento anterior, habida cuenta que su inversa tiene un polo en el origen, cuya extracción dará lugar a la siguiente función:

$$F_3(s) = \frac{1}{F_2(s)} - \frac{k_0^{(2)}}{s}$$

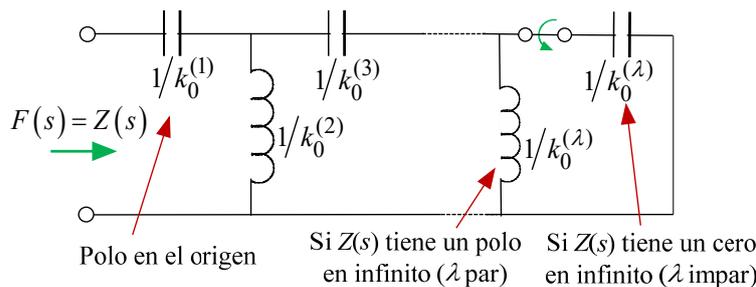
Generalizando,  $F(s)$  se puede desarrollar como la siguiente fracción continua:

$$F(s) = k_0^{(1)} \frac{1}{s} + \frac{1}{k_0^{(2)} \frac{1}{s} + \frac{1}{k_0^{(3)} \frac{1}{s} + \frac{1}{k_0^{(4)} \frac{1}{s} + \dots}}$$

Si  $F(s)$  es una impedancia, entonces:  $\frac{1}{k_0^{(1)}} = C$      $\frac{1}{k_0^{(2)}} = L$     etc.

El procedimiento de realización es simple, ya que consiste en desarrollar la división de numerador y denominador por fracción continua. Consiste primero en dividir numerador y denominador de  $F(s)$  por la mayor potencia de  $s$  (*grado* de  $F(s)$ ), y a continuación desarrollar la función (o su inversa) en fracciones continuas, mediante divisiones sucesivas, tomando a  $(1/s)$  como variable. Este proceso se aplica para  $F(s)$  como impedancia o como admitancia (la instancia en la que  $F(s)$  posea un polo en el origen de la variable  $s$ , o un polo en infinito de la nueva variable  $1/s$ ).

Esta forma de realización da una red tipo escalera, tal como se muestra en **Fig. 4.15** para el caso que  $F(s)$  sea una impedancia.



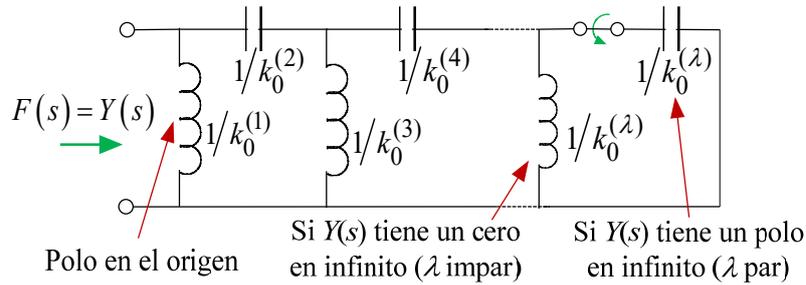
**Fig. 4.15.** Síntesis de  $F(s)$  por Cauer II como impedancia. La terminación depende del comportamiento de  $F(s)$  en infinito.

Si  $\lambda$  es par, la red terminará en una  $L$  en paralelo, mientras que si  $\lambda$  es impar la red terminará en una  $C$  serie, siendo  $\lambda$  el orden de  $F(s)$ . Esto es así porque la terminación tiene que ver con el comportamiento en el otro extremo de frecuencias respecto del que se efectuaron las remociones. En este caso, como las remociones se hacen en el origen, la terminación determina el comportamiento en infinito. Entonces si  $F(s)$  que para el caso de la **Fig. 4.15** es una  $Z(s)$ , tiene un polo en infinito, la terminación debe ser con una  $L$  (que es la que realiza dicho polo); en cambio si en infinito tiene un cero, la terminación debe ser con una  $C$  (todos los capacitores en serie determinan que para frecuencia infinita  $Z(s)$  es cero).

Además el número de elementos reactivos simples (de aquí que este desarrollo es canónico), también es igual a  $1 +$  número de polos finitos  $+$  número de ceros finitos.

Los polos que están en frecuencias finitas aparecen en pares conjugados, por tanto si  $\lambda$  es par y existe polo en el infinito, debe haber otro en el origen, que será la terminación de la red, y se realiza con una  $C$ .

Si  $F(s)$  es una admitancia, se inicia con una  $L$  en derivación. En este caso el polo *en infinito* se materializa con una terminación con una  $C$  en serie, y si la función tiene un cero *en infinito*, la red termina en una  $L$ . Este desarrollo de  $F(s)$  como admitancia se muestra en la **Fig. 4.16**.



**Fig. 4.16.** Síntesis de  $F(s)$  por Cauer II como admitancia. La terminación depende del comportamiento de  $F(s)$  en infinito.

Esta realización, *extracción de polos en el origen*, debida a Cauer se denomina *Cuarta Forma Canónica* o *Segunda Forma de Cauer* o *Cauer II*, tanto para  $F(s)$  desarrollada como impedancia o como admitancia (la instancia en la que  $F(s)$  posea un polo en el origen).

### 4.10. Ejemplos de síntesis por el método de Cauer

#### 4.10.1. Síntesis por Cauer I

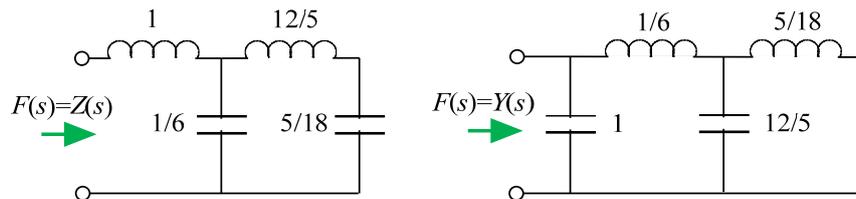
Se tiene una función  $F(s)$  dada por la expresión:

$$F(s) = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)} = \frac{s^4 + 10s^2 + 9}{s^3 + 4s}$$

La síntesis por Cauer I consiste en efectuar remociones sucesivas de polos en infinito; y dado que  $F(s)$  ya posee un polo en infinito, la síntesis se inicia directamente en la instancia de  $F(s)$ :

$$\begin{array}{r}
 s^4 + 10s^2 + 9 \Big| s^3 + 4s \\
 \underline{-s^4 - 4s^2} \phantom{+ 9} \\
 6s^2 + 9 \phantom{+ 9} \\
 \underline{-6s^2} \phantom{+ 9} \\
 9 \phantom{+ 9} \\
 \underline{-9} \\
 0
 \end{array}
 \quad \Rightarrow \quad
 F(s) = s + \frac{1}{\frac{1}{6}s + \frac{1}{\frac{12}{5}s + \frac{1}{\frac{5}{18}s}}}$$

Cuya realización como impedancia o admitancia se muestra en **Fig. 4.17**.



**Fig. 4.17.** Realización de  $F(s)$  como impedancia y como admitancia.

Resulta muy ilustrativo analizar el procedimiento de las remociones sucesivas en el diagrama cero-polar, graficando las inmitancias que resultan luego de cada remoción.

Este proceso se muestra en la **Fig. 4.18**.

El diagrama de polos y ceros de  $F(s)$  se muestra en la parte superior de la **Fig. 4.18**.

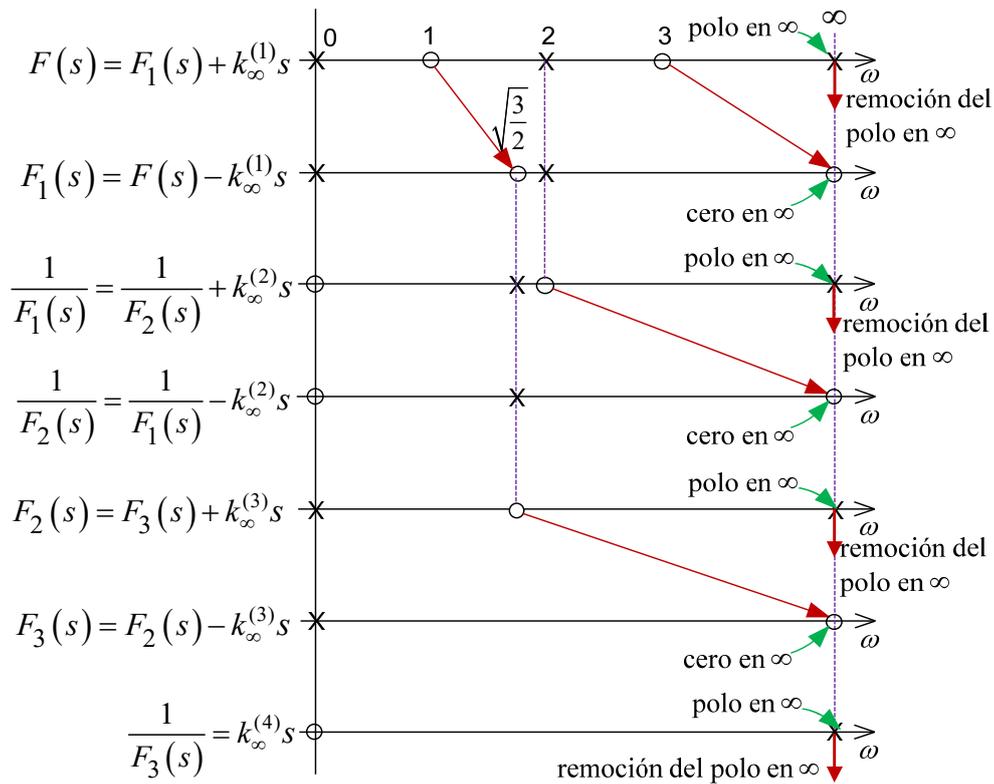


Fig. 4.18. Efecto de las remociones de polos en infinito sobre el diagrama cero-polar.

Dado que  $F(s)$  ya posee un polo en infinito, se comienza la secuencia realizando la remoción de ese polo de  $F(s)$  sustrayendo un término de la forma  $k_\infty^{(1)}s$ , siendo:

$$k_\infty^{(1)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)} = 1$$

Que coincide con el primer cociente del proceso de división continua realizado anteriormente. La remoción de este polo en infinito conduce a:

$$F_1(s) = F(s) - k_\infty^{(1)}s = \frac{s^4 + 10s^2 + 9}{s^3 + 4s} - s = \frac{6s^2 + 9}{s^3 + 4s} = 6 \frac{s^2 + 3/2}{s(s^2 + 4)}$$

Que ya no posee un polo, sino un cero en infinito y un cero en  $s = \pm j\sqrt{3}/2$ . Y Además posee un polo en  $s=0$  y en  $s = \pm j2$ .

Entonces la inversa de  $F_1(s)$  tendrá un polo en infinito y se podrá remover sustrayendo un término de la forma  $k_\infty^{(2)}s$ , siendo:

$$k_\infty^{(2)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \frac{s(s^2 + 4)}{6(s^2 + 3/2)} = \frac{1}{6}$$

Que coincide con el segundo cociente del proceso de división continua. La remoción de este polo en infinito conduce a:

$$\frac{1}{F_2(s)} = \frac{1}{F_1(s)} - k_\infty^{(2)}s = \frac{s^3 + 4s}{6s^2 + 9} - \frac{1}{6}s = \frac{s^3 + 4s - s^3 - 1,5s}{6s^2 + 9} = \frac{2,5s}{6s^2 + 9}$$

Que posee un cero en infinito y un cero en  $s=0$  y además posee un polo en  $s = \pm j\sqrt{3}/2$ .

Entonces la inversa de esta función, es decir  $F_2(s)$  tendrá un polo en infinito y se podrá remover sustrayendo un término de la forma  $k_\infty^{(3)}s$ , siendo:

$$k_{\infty}^{(3)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \frac{6s^2 + 9}{\frac{5}{2}s} = \frac{12}{5}$$

Que coincide con el tercer cociente del proceso de división continua. La remoción de este polo en infinito conduce a:

$$F_3(s) = F_2(s) - k_{\infty}^{(3)}s = \frac{6s^2 + 9}{\frac{5}{2}s} - \frac{12}{5}s = \frac{6s^2 + 9 - 6s^2}{\frac{5}{2}s} = \frac{18}{5s}$$

Que corresponde a un elemento simple, cuya inversa tiene la forma:

$$\frac{1}{F_3(s)} = k_{\infty}^{(4)}s$$

Presenta un polo en infinito cuyo residuo es 5/18 y coincide con el último cociente de la división continua.

### 4.10.2. Síntesis por Cauer II

Habiendo comprobado la eficacia de la división continua para simplificar las sucesivas remociones de polos en infinito, surge el interés en adaptarlo al procedimiento de las sucesivas remociones en el origen. Para ello se procede de manera de conseguir un cambio de variables, pasando de la variable  $s$  a la variable  $(1/s)$ , con lo cual si la función  $F(s)$  tiene  $n$  polos en  $s=0$ , expresada como  $F(1/s)$  tendrá  $n$  polos en  $(1/s)=\infty$ .

Por lo tanto, para desarrollar  $F(s)$  en la cuarta forma canónica (Cauer II), se divide numerador y denominador de  $F(s)$  por la máxima potencia de  $s$ , en este caso  $s^4$ , para expresarla en potencias de  $(1/s)$ . Por último se reordenan los términos de numerador y denominador en forma decreciente de potencias de  $(1/s)$ :

$$F(s) = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)} = \frac{s^4 + 10s^2 + 9}{s^3 + 4s} = \frac{9(1/s)^4 + 10(1/s)^2 + 1}{4(1/s)^3 + 1(1/s)}$$

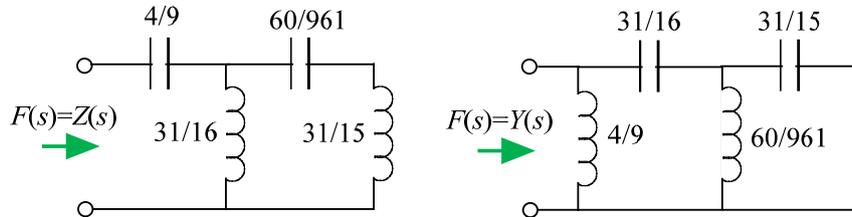
El proceso de división continua para la variable  $(1/s)$  resulta:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l}
 9\left(\frac{1}{s}\right)^4 + 10\left(\frac{1}{s}\right)^2 + 1 \\
 -9\left(\frac{1}{s}\right)^4 - \frac{9}{4}\left(\frac{1}{s}\right)^2
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 4\left(\frac{1}{s}\right)^3 + 1\left(\frac{1}{s}\right) \\
 \hline
 \frac{9}{4}\left(\frac{1}{s}\right) \leftarrow
 \end{array}
 \right. \\
 \hline
 \begin{array}{l}
 4\left(\frac{1}{s}\right)^3 + 1\left(\frac{1}{s}\right) \\
 -\frac{31}{4}\left(\frac{1}{s}\right)^2 - \frac{16}{31}\left(\frac{1}{s}\right)
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 \frac{31}{4}\left(\frac{1}{s}\right)^2 + 1 \\
 \hline
 \frac{16}{31}\left(\frac{1}{s}\right) \leftarrow
 \end{array}
 \right. \\
 \hline
 \begin{array}{l}
 \frac{31}{4}\left(\frac{1}{s}\right)^2 + 1 \\
 -\frac{31}{4}\left(\frac{1}{s}\right)^2
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 \frac{15}{31}\left(\frac{1}{s}\right) \\
 \hline
 \frac{961}{60}\left(\frac{1}{s}\right) \leftarrow
 \end{array}
 \right. \\
 \hline
 \begin{array}{l}
 \frac{15}{31}\left(\frac{1}{s}\right) \\
 -\frac{15}{31}\left(\frac{1}{s}\right)
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 1 \\
 \hline
 \frac{15}{31}\left(\frac{1}{s}\right) \leftarrow
 \end{array}
 \right. \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Finalmente, expresando el proceso como una fracción continua resulta:

$$F(s) = \frac{9}{4} \left( \frac{1}{s} \right) + \frac{1}{\frac{16}{31} \left( \frac{1}{s} \right) + \frac{1}{\frac{961}{60} \left( \frac{1}{s} \right) + \frac{1}{\frac{15}{31} \left( \frac{1}{s} \right)}}$$

Cuyas realizaciones como impedancia —esto es, considerando que  $F(s)$  es  $Z(s)$ —, o admitancia —si  $F(s)$  es  $Y(s)$ — se muestran en **Fig. 4.19**.

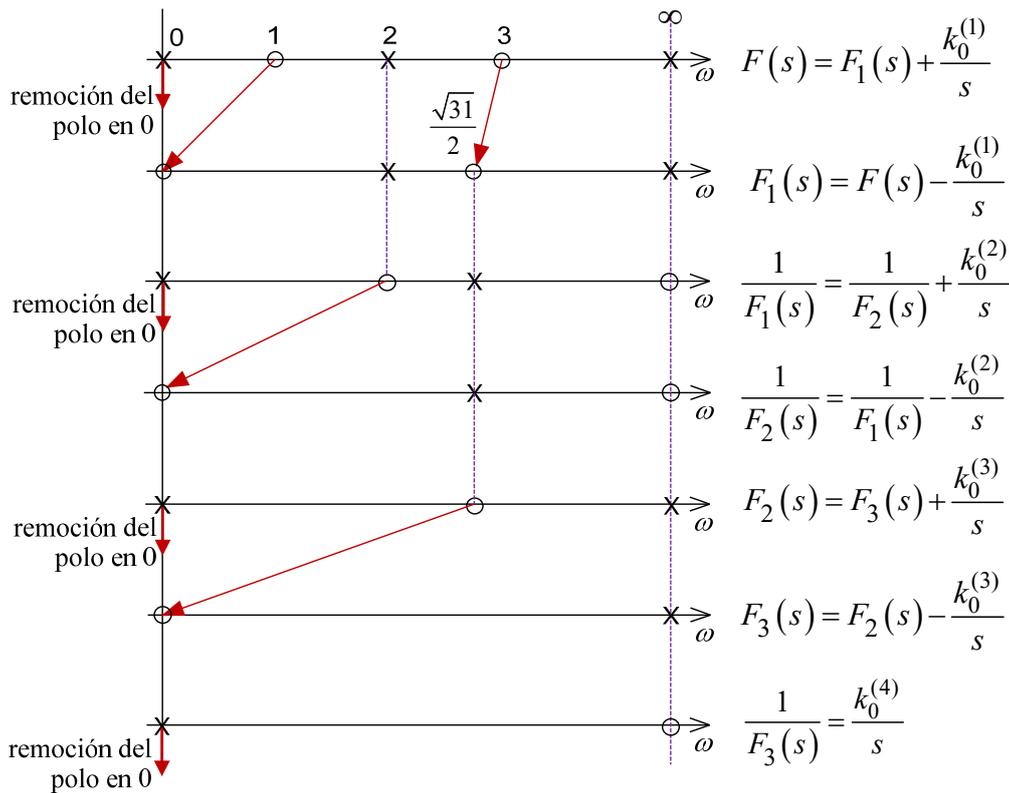


**Fig. 4.19.** Realización de  $F(s)$  como impedancia y como admitancia.

En este caso también se considera muy ilustrativo analizar el procedimiento de las remociones sucesivas en el diagrama cero-polar, graficando las inmitancias que resultan luego de cada remoción.

En la **Fig. 4.20** se muestra en la parte superior el diagrama de polos y ceros de  $F(s)$ , y continuando hacia abajo se muestra cada paso del proceso de sucesivas remociones de un polo en el origen.

Entonces el proceso de síntesis por Cauer II se inicia en la instancia de  $F(s)$  en la que exista un polo en  $s=0$ , que en este caso es directamente  $F(s)$ .



**Fig. 4.20.** Efecto de las remociones de polos en el origen sobre el diagrama cero-polar.

Dado que  $F(s)$  ya posee un polo en el origen, se comienza la secuencia realizando la remoción de ese polo de  $F(s)$  sustrayendo un término de la forma  $k_0^{(1)}/s$ , siendo:

$$k_0^{(1)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}{s(s^2 + 4)} = \frac{9}{4}$$

Que coincide con el primer cociente del proceso de división continua realizado anteriormente. La remoción de este polo en el origen conduce a:

$$F_1(s) = F(s) - \frac{k_0^{(1)}}{s} = \frac{s^4 + 10s^2 + 9}{s^3 + 4s} - \frac{9}{4s} = \frac{s^4 + \frac{31}{4}s^2 + 9 - 9}{s(s^2 + 4)} = \frac{s(s^2 + \frac{31}{4})}{s^2 + 4}$$

Que ya no posee un polo, sino un cero en el origen y un cero en  $s = \pm j\sqrt{31}/2$ . Y además posee un polo en  $s = \pm j2$  y un polo en infinito.

Entonces la inversa de  $F_1(s)$  tendrá un polo en el origen y se podrá remover sustrayendo un término de la forma  $k_0^{(2)}/s$ , siendo:

$$k_0^{(2)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2 + 4}{s(s^2 + \frac{31}{4})} = \frac{16}{31}$$

Que coincide con el segundo cociente del proceso de división continua. La remoción de este polo en el origen conduce a:

$$\frac{1}{F_2(s)} = \frac{1}{F_1(s)} - k_0^{(2)}s = \frac{s^2 + 4}{s(s^2 + \frac{31}{4})} - \frac{16}{31s} = \frac{s^2 + 4 - \frac{16}{31}s^2 - 4}{s(s^2 + \frac{31}{4})} = \frac{\frac{15}{31}s^2}{s(s^2 + \frac{31}{4})} = \frac{\frac{15}{31}s}{s^2 + \frac{31}{4}}$$

Que posee un cero en infinito y un cero en  $s=0$  y además posee un polo en  $s = \pm j\sqrt{31}/2$ .

Entonces la inversa de esta función, es decir  $F_2(s)$  tendrá un polo en  $s=0$  y se podrá remover sustrayendo un término de la forma  $k_0^{(3)}/s$ , siendo:

$$k_0^{(3)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2 + \frac{31}{4}}{\frac{15}{31}s} = \frac{961}{60}$$

Que coincide con el tercer cociente del proceso de división continua. La remoción de este polo en el origen conduce a:

$$F_3(s) = F_2(s) - k_0^{(3)}s = \frac{s^2 + \frac{31}{4}}{\frac{15}{31}s} - \frac{961}{60s} = \frac{s^2 + \frac{31}{4} - \frac{31}{4}}{\frac{15}{31}s} = \frac{31}{15}s$$

Que corresponde a un elemento simple, cuya inversa tiene la forma:

$$\frac{1}{F_3(s)} = \frac{k_4^{(4)}}{s}$$

Presenta un polo en  $s=0$  cuyo residuo es  $15/31$  y coincide con el último cociente de la división continua.

Por lo tanto, para cada tipo de inmitancia existen cuatro realizaciones canónicas (dos de ellas en escalera). La elección de una dada realización entre las cuatro depende de factores prácticos tales como valores de los elementos, efectos parásitos, y otros que se verán más adelante, en relación con la síntesis de cuadripolos.

#### 4.11. Bibliografía

- [1] W. Warzanskyj Poliscuk. *Métodos de Síntesis de Redes Lineales*. Capítulo II: “Síntesis de Dipolos: redes con dos tipos de elementos”. Universidad Politécnica de Madrid. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicaciones. 1977. ISBN 978-84-740-2054-9.
- [2] Wai-Kai Chen. *Passive, Active and Digital Filters (3<sup>rd</sup>. Ed)*. Chapter 7. “Synthesis of LCM and RC One-Port Networks”. CRC Press. Boca Raton. FL. 2009. ISBN 978-1-4200-5885-7.



---

# Capítulo 5

## Síntesis de Cuadripolos LC Descargados

---

### 5.1. Introducción

El concepto de cuadripolos o redes bipuerta puede aplicarse a toda red interpuesta entre un generador y una carga, con la finalidad de transferir la energía desde el generador a la carga, con características determinadas por cada aplicación.

El hecho que, desde cada puerta, el cuadripolo pueda verse como un dipolo, sugiere una relación muy estrecha con los conceptos y topologías discutidas en el capítulo anterior.

Pero como el diseño de redes monopuerta se efectúa a partir de la relación  $U-I$  de la red (impedancia o admitancia terminal), ahora habrá que tener en cuenta las relaciones  $U-I$  para los cuadripolos, las cuales se expresan ahora matricialmente:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{U} \qquad \mathbf{U} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}$$

Por lo tanto, para realizar la síntesis de cuadripolos o redes de dos puertas, deben conocerse las propiedades de las matrices que los caracterizan.

### 5.2. Matrices reales positivas

Un cuadripolo queda caracterizado por cualquiera de las matrices de coeficientes, por ejemplo la de los parámetros de cortocircuito o de circuito abierto. Utilizando la matriz de admitancias de cortocircuito:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{U}$$

$$I_1(s) = y_{11}(s)U_1(s) + y_{12}(s)U_2(s)$$

$$I_2(s) = y_{21}(s)U_1(s) + y_{22}(s)U_2(s)$$

En este curso se trabajará con matrices de redes pasivas, en las cuales  $y_{21}=y_{12}$ , por lo tanto solo hay que conocer el comportamiento de tres elementos:  $y_{11}$ ,  $y_{22}$  e  $y_{12}$ , que definen completamente a la red.

Por ser inmitancias terminales  $y_{11}$  e  $y_{22}$  son *funciones reales positivas*, mientras que  $y_{21}$  no tiene que ser necesariamente *real positiva* porque vincula tensión y corriente en dos puntos distintos, y su parte real no puede ser inferida por condiciones energéticas.

Por definición es:

$$y_{21}(s) = \left. \frac{I_2(s)}{U_1(s)} \right|_{U_2(s)=0}$$

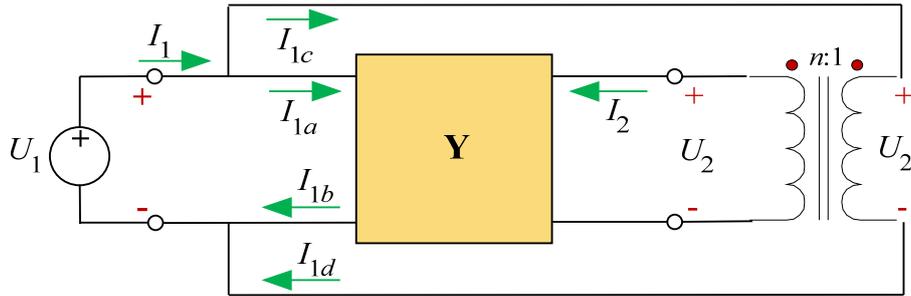
Se deduce que sus polos son frecuencias en las que puede haber respuesta ( $I_2(s)$ ) sin haber excitación ( $U_1(s)$  y  $U_2(s)$ ). Por consiguiente estos polos deben ser frecuencias propias de la red, y por consiguiente, no pueden estar ubicados en el semiplano derecho de  $s$ .

Sin embargo, la inversa de esta admitancia de transferencia, no solo deja de ser una función de transferencia, sino que ni siquiera puede definirse como una función de red, dado que es imposible aplicar una excitación, en forma de generador de corriente, a un par de terminales en cortocircuito.

De aquí que, a priori, no pueda establecerse ningún criterio para la ubicación de los ceros de  $y_{21}$  (de hecho existen redes pasivas, cuyas funciones de transferencia tienen ceros en el semiplano derecho de  $s$ , funciones de no mínima fase).

Sin embargo, debe haber alguna propiedad distintiva de estas funciones, o de la matriz de coeficientes en su conjunto.

Para estudiar este tema Cauer propuso interconectar los bornes de entrada y de salida de la red mediante un transformador ideal de relación  $n:1$ , como se muestra en la **Fig. 5.1**, para dar lugar a una nueva función de inmitancia de entrada, que incorpora a los tres elementos de la matriz  $\mathbf{Y}$ .



**Fig. 5.1.** Conexión de un cuadripolo pasivo con un transformador ideal en la salida.

Siendo el transformador ideal, la relación  $U-I$  que corresponde aplicar es:

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2' \\ I_{1c} \end{bmatrix}$$

La admitancia de entrada de esta red será:

$$Y(s) = \frac{I_1(s)}{U_1(s)} = \frac{I_{1a}(s) + I_{1c}(s)}{U_1(s)} = \frac{I_{1a}(s) + nI_2(s)}{U_1(s)}$$

Pero  $I_{1a}(s)$  e  $I_2(s)$  son las corrientes de entrada y de salida del cuadripolo, y están relacionadas a las tensiones de entrada  $U_1(s)$  y  $U_2(s)$  mediante los parámetros admitancia de cortocircuito, resultando entonces:

$$Y(s) = \frac{I_{1a}(s) + nI_2(s)}{U_1(s)} = \frac{[y_{11} U_1(s) + y_{12} U_2(s)] + n[y_{21} U_1(s) + y_{22} U_2(s)]}{U_1(s)}$$

Pero puesto que:

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{U_2(s)}{U_2'(s)} = n$$

Finalmente resulta:

$$Y(s) = y_{11} + 2n \cdot y_{21} + n^2 \cdot y_{22} \tag{5-1}$$

Por ser la admitancia de entrada de una red pasiva,  $Y(s)$  tiene que ser una función *real positiva*, para cualquier valor de  $n$  (positivo o negativo). Por lo tanto esta expresión constituye una propiedad característica de las matrices de admitancia de cortocircuito.

Las matrices que gozan de esta propiedad se dice que son matrices reales positivas.

Queda claro entonces que las matrices de admitancias de cortocircuito de redes pasivas son matrices reales positivas.

Un análisis similar, realizado sobre la configuración de la red mostrada en la **Fig. 5.2**, se traduce en una expresión análoga para la impedancia de entrada.

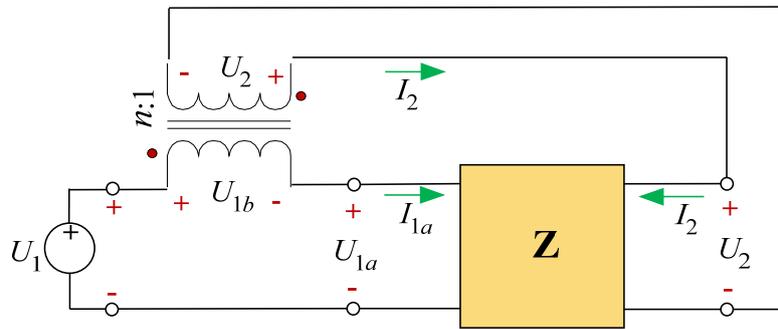


Fig. 5.2. Conexión de un cuadripolo pasivo con un transformador ideal en la entrada.

En efecto, otra vez, el transformador es ideal y la relación  $U$ - $I$  correspondiente resulta:

$$\begin{bmatrix} U_{1b} \\ I_{1a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

La impedancia de entrada de esta red será:

$$Z(s) = \frac{U_1(s)}{I_1(s)} = \frac{U_{1a}(s) + U_{1b}(s)}{I_{1a}(s)} = \frac{U_{1a}(s) + nU_2(s)}{I_{1a}(s)}$$

Y ahora empleando las ecuaciones de los parámetros impedancia de circuito abierto:

$$Z(s) = \frac{U_1(s)}{I_1(s)} = \frac{[z_{11} I_{1a}(s) + z_{12} I_2(s)] + n[z_{21} I_{1a}(s) + z_{22} I_2(s)]}{I_{1a}(s)}$$

es decir:

$$Z(s) = z_{11} + 2n \cdot z_{21} + n^2 \cdot z_{22} \tag{5-2}$$

Que resulta válida para cualquier valor de  $n$ , positivo o negativo.

Queda por demostrar que toda matriz real positiva pueda constituir una matriz de admitancias de cortocircuito o una matriz de impedancias de circuito abierto de una red.

### 5.3. Extensión del desarrollo de Foster a las redes LC de dos puertas

Recurriendo a la definición de los parámetros de la matriz de admitancias de cortocircuito, puede considerarse:

$$y_{11}(s) = \left. \frac{I_1(s)}{U_1(s)} \right|_{U_2=0} = \left. \frac{I_2(s) I_1(s)}{U_1(s) I_2(s)} \right|_{U_2=0} = y_{21}(s) \left. \frac{I_1(s)}{I_2(s)} \right|_{U_2=0}$$

$$y_{22}(s) = \left. \frac{I_2(s)}{U_2(s)} \right|_{U_1=0} = \left. \frac{I_1(s) I_2(s)}{U_2(s) I_1(s)} \right|_{U_1=0} = y_{12}(s) \left. \frac{I_2(s)}{I_1(s)} \right|_{U_1=0}$$

Deduciéndose que todos los polos de  $y_{21}=y_{12}$  son compartidos con las inmitancias terminales  $y_{11}$  e  $y_{22}$ . Esto se confirma también por el hecho de que los polos de  $y_{21}$  son *frecuencias propias de la red* y, por lo tanto, deben estar contenidas en  $y_{11}$  e  $y_{22}$ .

Además las inmitancias terminales también pueden tener polos propios, es decir, pueden existir frecuencias particulares para las cuales la corriente en el extremo de la inmitancia terminal es distinta de cero mientras que la corriente en el extremo opuesto (en cortocircuito) es nula.

Por otra parte, en la expresión (5-1) que da la condición de matriz real positiva, tanto  $Y(s)$ ,  $y_{11}$  como  $y_{22}$  deben ser funciones racionales reales impares *positivas* (por ser inmitancias terminales), y por lo tanto todos sus polos se encuentran sobre el eje imaginario, son simples y sus *residuos* deben ser *positivos*. En cuanto a  $y_{21}$ , que puede escribirse como:

$$y_{21}(s) = \frac{1}{2n} Y(s) - y_{11}(s) - \frac{n}{2} y_{22}(s)$$

Por ser una combinación lineal de funciones racionales reales impares *positivas*, solamente puede resultar racional real impar *positiva* si los coeficientes de la combinación lineal son positivos. Pero este no es el caso y por lo tanto resultará real impar, lo cual también cabía de esperar por el hecho que  $y_{21}$  no es una inmitancia terminal sino una inmitancia de transferencia o *transinmitancia*.

De manera que  $y_{21}$  es una función *racional real impar*, pudiendo tener por lo tanto, *residuos negativos*. Entonces teniendo en cuenta que los tres parámetros de la matriz son funciones racionales reales impares con polos simples sobre el eje imaginario, admiten el desarrollo de Foster en fracciones simples, que pueden escribirse en forma unificada como:

$$y_{11}(s) = \frac{K_{11(0)}}{s} + \frac{2K_{11(1)}s}{s^2 + \omega_1^2} + \frac{2K_{11(2)}s}{s^2 + \omega_2^2} + \dots + \frac{2K_{11(m)}s}{s^2 + \omega_m^2} + K_{11(\infty)}s$$

$$y_{21}(s) = \frac{K_{21(0)}}{s} + \frac{2K_{21(1)}s}{s^2 + \omega_1^2} + \frac{2K_{21(2)}s}{s^2 + \omega_2^2} + \dots + \frac{2K_{21(m)}s}{s^2 + \omega_m^2} + K_{21(\infty)}s$$

$$y_{22}(s) = \frac{K_{22(0)}}{s} + \frac{2K_{22(1)}s}{s^2 + \omega_1^2} + \frac{2K_{22(2)}s}{s^2 + \omega_2^2} + \dots + \frac{2K_{22(m)}s}{s^2 + \omega_m^2} + K_{22(\infty)}s$$

En las proximidades de cada polo  $s_i$  de  $y_{21}$ , la función  $Y(s)$ , que es una función *real positiva impar*, se comporta como:

$$Y(s) = \left( K_{11(i)} + 2nK_{21(i)} + n^2K_{22(i)} \right) F_i(s) \quad s \rightarrow -s_i$$

Donde  $F_i(s)$  se denomina *factor de polo*:

$$F_0(s) = \frac{1}{s} \quad F_n(s) = \frac{2s}{s^2 + \omega_n^2} \quad F_\infty(s) = s$$

Siendo:

$$\lim_{s \rightarrow -s_i} F_i(s) = \infty$$

Debiendo cumplirse en todos y cada uno de los polos  $s_i$  de  $Y_{21}(s)$ :

$$K_{11(i)} + 2nK_{21(i)} + n^2K_{22(i)} \geq 0$$

Que completando cuadrados, también puede escribirse como:

$$\left( \frac{K_{21(i)}}{\sqrt{K_{22(i)}}} + n\sqrt{K_{22(i)}} \right)^2 + \left( K_{11(i)} - \frac{K_{21(i)}^2}{K_{22(i)}} \right) \geq 0$$

Lo que conduce a que, en cada polo  $s_i$  de  $Y_{21}$  se deba cumplir la llamada *condición de residuos*, o sea que:

$$K_{11(i)} - \frac{K_{21(i)}^2}{K_{22(i)}} \geq 0 \quad \text{ó} \quad K_{11(i)}K_{22(i)} \geq K_{21(i)}^2$$

Contrariamente a la conclusión a la que se arribó respecto a que todos los polos de  $y_{21}$  son polos de  $y_{11}$  y de  $y_{22}$ , se observa que no todos los polos de  $y_{11}$  e  $y_{22}$  tienen que pertenecer a los otros dos elementos de la matriz  $\mathbf{Y}$ . Puede ocurrir que  $K_{11} \neq 0$  y  $K_{21} = K_{22} = 0$ , y lo mismo respecto de  $K_{22}$ , puesto que ello no invalida la condición de residuos.

En otras palabras, tanto  $y_{11}$  como  $y_{22}$  pueden tener "*polos particulares o privados*", no presentes en las otras dos funciones de admitancia.

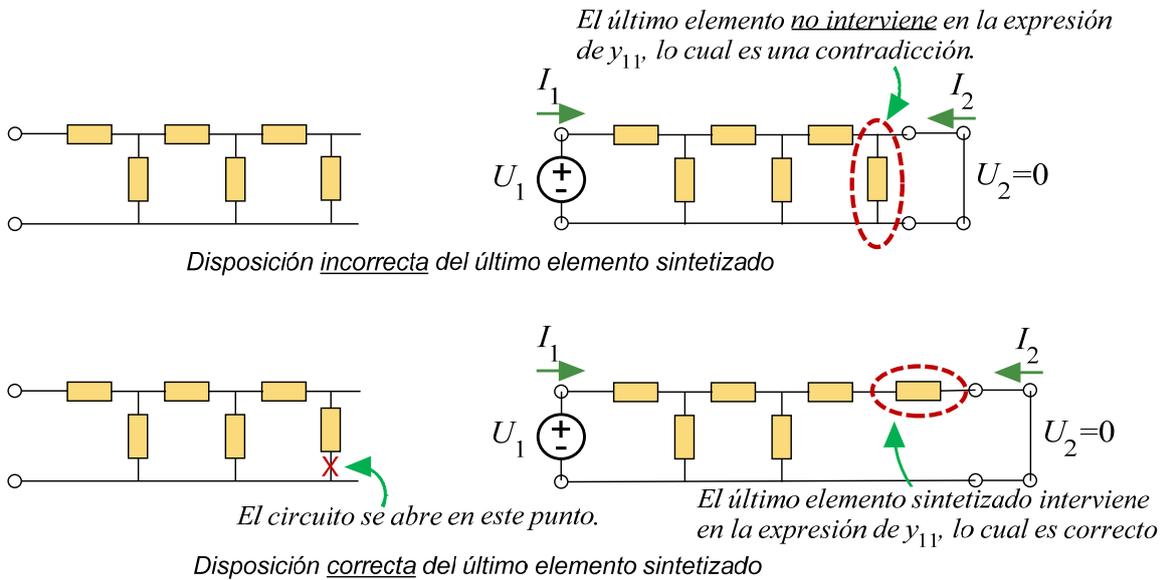
#### 5.4. Síntesis en cadena de una inmitancia terminal de un cuadripolo

Los cuadripolos en cadena son redes sencillas y cómodas para realizar, y tienen la ventaja de poder "ser puestas a tierra" por tener un terminal común.

Ya se sabe cómo realizar las inmitancias  $y_{11}$  e  $y_{22}$  en cadena, puesto que son inmitancias terminales. La dificultad a salvar consiste en conferir las propiedades de transferencia impuestas por  $y_{21}$ .

Supóngase que se desarrolla en cualquier forma, canónica o no, la admitancia de entrada  $y_{11}$ , y se *transforma* la red obtenida en cuadripolo, abriendo un par de terminales de salida (**Fig. 5.3**). Aquí es muy importante tener en cuenta que los elementos de la terminación deben quedar en *serie* con la puerta de *salida*. Si no fuera así, no intervendrían en la expresión de  $y_{11}$ , que es la admitancia vista desde la puerta de entrada con la puerta de salida en cortocircuito. Es decir, cortocircuitando los terminales de salida, la admitancia de entrada tiene que ser la  $y_{11}$  de partida.

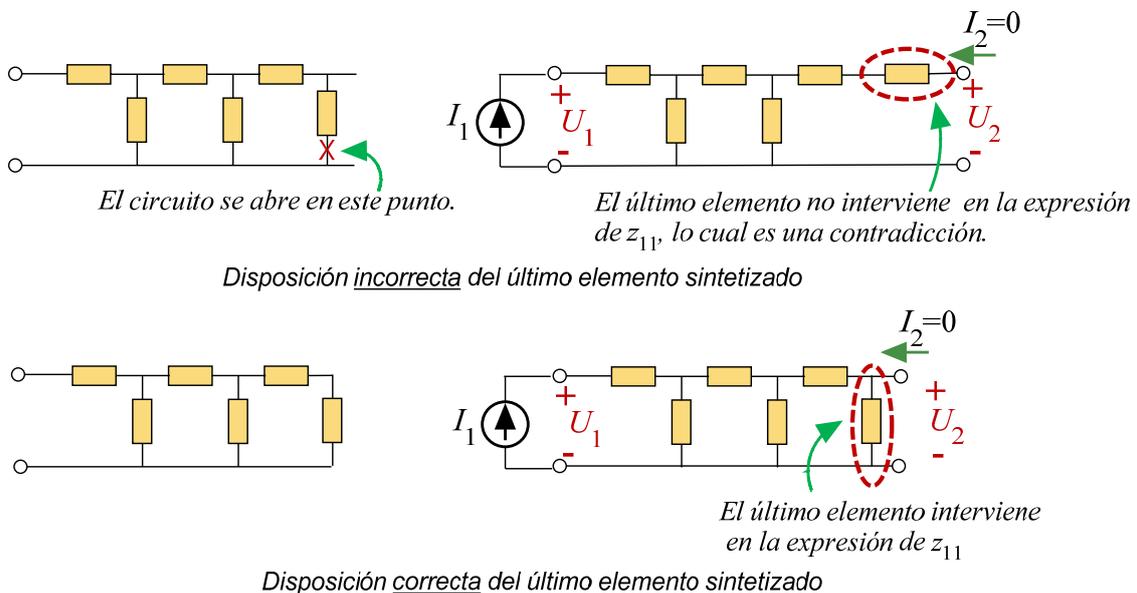
Entonces, en la síntesis de  $y_{11}$  se requiere que los elementos de la terminación se dispongan en *serie* con la puerta de *salida*. Si no fuera así, no intervendrían en la expresión de  $y_{11}$ , que es la admitancia vista desde la puerta de entrada con la salida en cortocircuito.



**Fig. 5.3.** Síntesis en escalera de la admitancia terminal  $y_{11}$  de un cuadripolo: cómo disponer el último elemento.

Para el caso dual en que se desea sintetizar un cuadripolo a partir de los parámetros de la matriz  $\mathbf{Z}$ , si  $z_{11}$  es el parámetro que se desea sintetizar, se la realiza como un dipolo, y la red obtenida se transforma en cuadripolo, abriendo un par de terminales de salida (**Fig. 5.4**). Como consecuencia y aplicando la definición del parámetro  $z_{11}$ , dejando los terminales de salida a *circuito abierto*, la impedancia de entrada debe ser la  $z_{11}$  de partida.

Entonces, en la síntesis de  $z_{11}$  se requiere que los elementos de la terminación se dispongan en *paralelo* con la puerta de *salida*. Si no fuera así, no intervendrían en la expresión de  $z_{11}$ , que es la impedancia vista desde la puerta de entrada con la salida a circuito abierto.



**Fig. 5.4.** Síntesis en escalera de la impedancia terminal  $z_{11}$  de un cuadripolo: cómo disponer el último elemento.

### 5.5. Propiedades de las inmitancias de transferencia de los cuadripolos LC

Sólo algunas de las propiedades de las inmitancias de punto impulsor vistas en el apartado 4.3 se aplican a las inmitancias de transferencia porque, al contrario de lo que ocurre con las inmitancias terminales, la inversión de una función de transferencia carece de sentido.

En el caso más general de cuadripolos *RLC*, para que la respuesta se mantenga acotada, los polos deben estar ubicados en el semiplano izquierdo de la frecuencia compleja  $s$ , pudiendo tener multiplicidad mayor o igual a 1. Pero, en el caso de las inmitancias de transferencia, esto no es aplicable a los ceros porque la inversa de una función de transferencia carece de sentido. Por lo tanto los ceros pueden estar en cualquier lugar del plano complejo, pero deben conservar la propiedad de reflexión, es decir que si son complejos, debe existir el conjugado.

En el caso más específico de cuadripolos *LC*, tal como se dedujo en el apartado 5.3, las inmitancias de transferencia son funciones *racionales reales impares*, que pueden tener *residuos negativos*. Esto combinado con el hecho que todos los polos de las inmitancias de transferencia son también polos de las inmitancias terminales, indica que las inmitancias de transferencia son cocientes de polinomios en  $s$  con coeficientes *reales*, cuyo denominador es *completo* con coeficientes *positivos*; mientras que el numerador puede ser *incompleto* y puede tener coeficientes *negativos*.

Por otra parte, los polos deben estar ubicados en el eje imaginario  $y$ , para que la respuesta se mantenga acotada, deben ser *simples* (multiplicidad igual a 1). Además los ceros por ser, al igual que los polos, frecuencias propias de la red, también deben encontrarse sobre el eje imaginario, deben ser pares conjugados y pueden tener multiplicidad mayor o igual a 1.

El grado del numerador puede encontrarse entre 0 y el grado del denominador más 1.

En resumen, las propiedades de las inmitancias de transferencia *LC* que pueden indicarse como las *condiciones necesarias* para que una función pueda ser considerada inmitancia de transferencia *LC* son las siguientes (se suponen anulados los factores comunes del numerador y denominador):

- 1) Los coeficientes de los polinomios del numerador y denominador deben ser reales, y los del denominador deben ser positivos.
- 2) Los polos y ceros imaginarios deben ser conjugados.  
Tanto los polos considerados de a pares conjugados como el eventual polo en el origen deben ser simples.
- 3) El polinomio del denominador debe ser par completo o impar completo, es decir, no le deben faltar términos entre los de orden superior e inferior.
- 4) El numerador puede ser incompleto y algunos coeficientes pueden ser negativos.
- 5) El grado del numerador puede ser tan bajo como cero, independientemente del grado del denominador.
- 6) El grado máximo del numerador es el grado del denominador más uno.

### 5.6. Interpretación física de los polos y ceros de las inmitancias de transferencia

En la red *sintetizada* a partir de  $y_{11}$ , resulta:

$$y_{11} = y'_{11} = \left. \frac{I'_1}{U_1} \right|_{U_2=0} = \left. \frac{I'_2}{U_1} \frac{I'_1}{I'_2} \right|_{U_2=0} = y'_{21} \left. \frac{I'_1}{I'_2} \right|_{U_2=0}$$

la relación entre la corriente en el extremo de salida cortocircuitado, y la tensión en bornes de entrada, es una admitancia de transferencia  $y'_{21}$ , cuyos polos son los polos de  $y_{11}$  (menos los polos de las admitancias que, eventualmente, puedan estar en paralelo con los bornes de entrada, que serán *polos particulares* o *proprios* o *privados* de  $y_{11}$ ). Si no existen impedancias en paralelo con la entrada, los polos de  $y'_{21}$  son los mismos que los de  $y_{11}$ , y viceversa (recordar que la impedancia en paralelo con los bornes de entrada no participa en la formulación de la admitancia de transferencia  $y_{21}$ ).

Dicho de otro modo, los polos de  $y_{11}$  son los polos de  $y'_{21}$  más aquellas frecuencias, no afectadas por  $y'_{21}$ , a las que puede haber corriente en la entrada pero no en la salida, que son los llamados polos particulares de  $y_{11}$ .

En la **Fig. 5.5** se ejemplifica la ecuación anterior, poniendo de manifiesto los polos particulares de  $y_{11}$ .

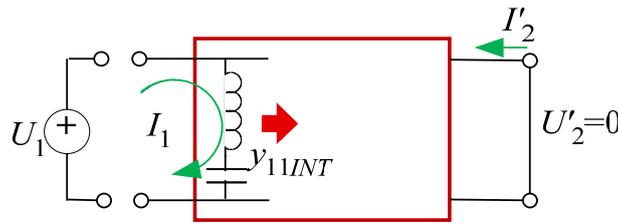


Fig. 5.5. Síntesis en escalera de la admitancia terminal  $y_{11}$  de un cuadripolo: polos propios y parte interior.

Extraídos estos polos particulares de  $y_{11}$ , la parte remanente de  $y_{11}$  se denomina *parte interior* de  $y_{11}$  y la denotaremos  $y_{11INT}$ . Entonces  $y'_{21}$  tendrá *todos* los polos de  $y_{11INT}$  y *sólo* estos.

La identificación de  $y'_{21}$  con  $y_{21}$  requiere que ambas tengan, además de los mismos polos, los mismos ceros e igual factor de proporcionalidad.

Analicemos ahora los ceros de las funciones de transferencia. De la propia definición de  $y_{21}$  y  $z_{21}$ , se deduce que sus ceros son aquellas frecuencias en las que no existe transferencia de energía (de la entrada a la salida), es decir son *ceros de transmisión*.

En una red en cadena, como la que se muestra en Fig. 5.6, estos ceros de la transferencia coinciden con las frecuencias a las que las impedancias en serie o las admitancias en paralelo *de la parte interior* son infinitas, excepto en la rama  $Y_1$  en paralelo con la entrada, que no interviene en la formulación de  $y_{21}$  como ya se vio. Aquí es importante comprender que  $Y_1$  *realizará* un cero de transmisión si el cuadripolo se alimenta con un generador de tensión *real*, pero *no realizará* un cero de transmisión si se alimenta con un generador de tensión *ideal*.

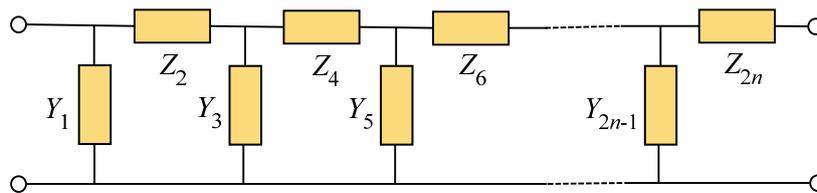


Fig. 5.6. Síntesis en cadena: ceros de transmisión y ceros de  $y_{21}$ .

Dualmente, para la impedancia de transferencia  $z_{21}$ , los ceros se corresponden con los polos de  $Y_1, Y_3, Y_5, \dots$  y con los polos de  $Z_2, Z_4, Z_6, \dots$ , excluidos los polos de  $Z_{2n}$  puesto que las ramas en serie con los terminales de salida no intervienen en la formulación de la impedancia de transferencia.

De aquí, la importante conclusión de que los ceros de  $y_{21}$  y  $z_{21}$  de una red en cadena dependen solo de la configuración de las ramas y no de los ceros de  $y_{11}$  y  $z_{11}$  respectivamente.

Además dado que los polos de las inmitancias LC (que conforman cada rama de la red) son frecuencias reales, se concluye que en las redes LC en cadena, los ceros de  $y_{21}$  y  $z_{21}$  se hallan todos sobre el eje imaginario.

**5.7. Bases para un procedimiento de síntesis de la matriz especificada**

Dado que la síntesis de la función admitancia de entrada  $y_{11}$  se puede realizar de manera exacta, efectuando remociones de términos del desarrollo de Foster en cualquier secuencia, teniendo en cuenta lo visto en el apartado anterior, dicha secuencia de remociones puede hacerse de una manera conveniente para, al mismo tiempo ir realizando  $y_{21}$ . Para ello se deben efectuar los siguientes pasos, en la secuencia indicada:

- 1) Realizar los polos particulares de  $y_{11}$  (no presentes en  $y_{21}$ ) como una admitancia en paralelo con los terminales de entrada.
- 2) Desarrollar la *parte interior* de  $y_{11}$  en forma de red en cadena, realizando los ceros de  $y_{21}$ , es decir, remover en cada cero de  $y_{21}$  un polo de la inmitancia terminal remanente que va resultando.
- 3) Transformar la inmitancia terminal  $y_{11}$ , en la inmitancia de entrada de un cuadripolo, abriendo un par de terminales de salida, atendiendo lo mencionado en 5.4.

El cuadripolo sintetizado de este modo, cuyos parámetros serán identificados como  $y_{11S}, y_{21S}$  y  $y_{22S}$ , resulta con las siguientes características:

- $y_{11S} = y_{11E}$  (por realización como inmitancia terminal)

- $y_{21S}$  tiene los polos de  $y_{21E}$  (por ser compartidos con  $y_{11E}$ ) y los ceros de  $y_{21E}$  (por realización, dado que los ceros de  $y_{21E}$  son polos de impedancias de las ramas en serie y polos de admitancias de las ramas en derivación, que fueron sintetizadas haciendo remociones en los ceros de  $y_{21E}$ ). Por lo tanto  $y_{21E}=k y_{21S}$ .

Es decir, procediendo de este modo, el cuadripolo hasta aquí sintetizado logra realizar exactamente  $y_{11E}$ , y el parámetro  $y_{21E}$  se realiza a menos de un factor de proporcionalidad o factor de escala. Por lo tanto, será necesario determinar este factor de escala y realizar esa adecuación en el circuito.

Además, habrá que resolver cómo hacer coincidir el valor obtenido  $y_{22S}$  con el valor real  $y_{22}$ .

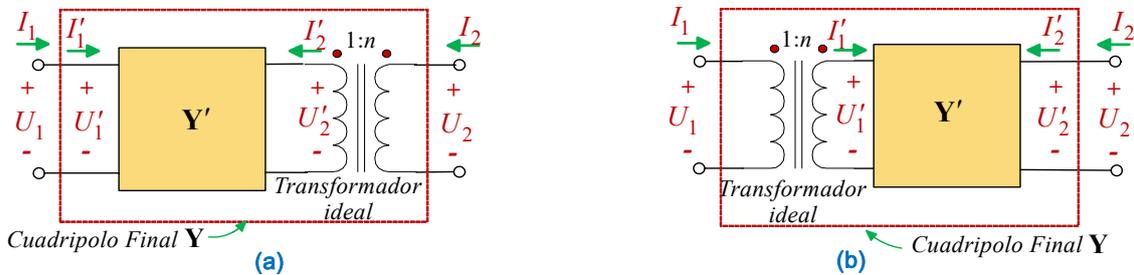
En lo que sigue se tratan estos aspectos y se analizarán distintos casos para sistematizar el análisis.

### 5.8. Cambio de nivel de admitancia e impedancia en los cuadripolos

Muchas veces se requiere corregir con un factor de escala constante e independiente de la frecuencia, tanto en inmitancias terminales como en inmitancias de transferencia, y para ello se emplean transformadores ideales.

Se verá cómo resultan afectados los niveles de impedancias y de admitancias aplicando este elemento de circuito.

En la **Fig. 5.7** se muestran dos casos, uno incluyendo al transformador en los terminales de salida del cuadripolo original y el otro con el transformador en los terminales de entrada.



**Fig. 5.7.** Cambio del nivel de inmitancias empleando un transformador ideal: **(a)** en la salida; **(b)** en la entrada.

En el caso de la **Fig. 5.7a** las relaciones de las tensiones y corrientes entre el cuadripolo original y el resultante (que incluye al transformador) son:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= I_1' & U_1 &= U_1' \\
 I_2' &= n I_2 & U_2' &= \frac{1}{n} U_2
 \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned}
 y_{11}'(s) &= \left. \frac{I_1'}{U_1'} \right|_{U_2'=0} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{U_2=0} = y_{11}(s) & y_{12}'(s) &= \left. \frac{I_1'}{U_2'} \right|_{U_1'=0} = \left. \frac{I_1}{\frac{1}{n} U_2} \right|_{U_1=0} = n y_{12}(s) \\
 y_{21}'(s) &= \left. \frac{I_2'}{U_1'} \right|_{U_2'=0} = \left. \frac{n I_2}{U_1} \right|_{U_2=0} = n y_{21}(s) & y_{22}'(s) &= \left. \frac{I_2'}{U_2'} \right|_{U_1'=0} = \left. \frac{\frac{1}{n} U_2}{n I_2} \right|_{U_1=0} = \frac{1}{n^2} y_{22}(s)
 \end{aligned}$$

En el caso de la **Fig. 5.7b** las relaciones de las tensiones y corrientes entre el cuadripolo original y el resultante (que incluye al transformador) son:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= n I_1' & U_1 &= \frac{1}{n} U_1' \\
 I_2' &= I_2 & U_2' &= U_2
 \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$y'_{11}(s) = \left. \frac{I'_1}{U'_1} \right|_{U'_2=0} = \left. \frac{\frac{1}{n}U_1}{nI_1} \right|_{U_2=0} = \frac{1}{n^2} y_{11}(s)$$

$$y'_{12}(s) = \left. \frac{I'_1}{U'_2} \right|_{U'_1=0} = \left. \frac{\frac{1}{n}I_1}{U_2} \right|_{U_1=0} = \frac{1}{n} y_{12}(s)$$

$$y'_{21}(s) = \left. \frac{I'_2}{U'_1} \right|_{U'_2=0} = \left. \frac{I_2}{nU_1} \right|_{U_2=0} = \frac{1}{n} y_{21}(s)$$

$$y'_{22}(s) = \left. \frac{I'_2}{U'_2} \right|_{U'_1=0} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{U_1=0} = y_{22}(s)$$

En consecuencia, la compensación del factor de proporcionalidad entre  $y'_{21}$  e  $y_{21}$  que se había dejado pendiente, podría lograrse insertando un transformador en el extremo opuesto a la inmitancia terminal que se sintetizó, la cual no se verá afectada.

En forma análoga se puede arribar a la misma conclusión para los parámetros de la matriz  $\mathbf{Z}$ .

En muchos casos el uso de transformador puede resultar inadmisibles, y la realización final resultará con el nivel de admitancias alterado en el factor  $1/n^2$  para  $y_{22}$ , y  $1/n$  para  $y_{21}$  (cuando se sintetiza desde los terminales de  $y_{11}$ ).

Este cambio puede resultar perfectamente tolerable en aquellos casos en que  $y_{22}$  no está especificada, puesto que la modificación del factor de escala  $y_{21}$  (*ganancia de transmisión*) puede compensarse mediante una oportuna amplificación en otra parte del sistema que utiliza la red así modificada.

### 5.9. Síntesis de Redes LC en cadena

#### Teorema

“Sea una red en cadena sintetizada a partir de los parámetros de cortocircuito. Si la parte interior empieza y termina en serie, la condición de residuos se satisface con el signo de igualdad”. Para el caso dual, se enunciaría así: “Sea una red en cadena sintetizada a partir de los parámetros de circuito abierto. Si la parte interior empieza y termina en paralelo, la condición de residuos se satisface con el signo de igualdad”.

#### Demostración.

Sea la red en cadena como la anteriormente indicada en Fig. 5.6 en la cual  $Y_1$  (admitancia en paralelo con los terminales de entrada) es cero. Los ceros de  $z_{21}$  serían los mismos de  $y_{21}$ , menos los polos de  $Z_2$  y  $Z_{2n}$  y sólo éstos (impedancias en serie con los terminales de entrada y salida respectivamente, que serían “polos particulares” de  $z_{11}$  y  $z_{22}$  respectivamente). Es decir, todos los ceros de  $z_{21}$  son ceros de  $y_{21}$ .

Como cada uno de los parámetros de la matriz  $\mathbf{Y}$  puede desarrollarse en fracciones simples (desarrollo de Foster):

$$y_{ij}(s) = K_{ij(0)} \frac{1}{s} + \sum_n \frac{2K_{ij(n)}s}{s^2 + \omega_n^2} + K_{ij(\infty)}s$$

Entonces, en las proximidades de cada polo  $s_i$  de  $y_{21}$  (que son compartidos con  $y_{11}$  e  $y_{22}$ ) resulta:

$$y_{11}(s) = K_{11(i)}F_i(s); \quad y_{22}(s) = K_{22(i)}F_i(s); \quad y_{21}(s) = K_{21(i)}F_i(s)$$

Donde  $F_i(s)$  se denomina *factor de polo* y:

$$\lim_{s \rightarrow s_i} F_i(s) = \infty$$

$$\text{ya que: } F_0(s) = \frac{1}{s} \quad F_n(s) = \frac{2s}{s^2 + \omega_n^2} \quad \text{ó} \quad F_\infty(s) = s$$

Entonces, en cada polo  $s_i$  de  $y_{21}$ :

$$\lim_{s \rightarrow s_i} y_{21}(s) = \infty$$

Teniendo en cuenta las relaciones entre parámetros de las matrices  $\mathbf{Y}$  y  $\mathbf{Z}$ :

$$z_{11} = \frac{y_{22}}{|\mathbf{Y}|}; \quad z_{22} = \frac{y_{11}}{|\mathbf{Y}|}; \quad z_{21} = -\frac{y_{21}}{|\mathbf{Y}|}$$

Entonces, resulta:

$$z_{21}(s) = -\frac{y_{21}(s)}{|\mathbf{Y}|} \Big|_{s \rightarrow s_i} = \frac{-K_{21(i)} F_i(s)}{(K_{11(i)} K_{22(i)} - K_{21(i)}^2) F_i^2(s)} = \frac{-K_{21(i)}}{K_{11(i)} K_{22(i)} - K_{21(i)}^2} \cdot \frac{1}{F_i(s)}$$

Por consiguiente, en las proximidades de cada polo  $s_i$  de  $y_{21}$ ,  $F_i(s) \rightarrow \infty$  y entonces si:

$$K_{11(i)} K_{22(i)} - K_{21(i)}^2 \neq 0$$

Resultaría:

$$z_{21}(s) = 0 \Big|_{s \rightarrow s_i}$$

Lo que indicaría que  $z_{21}$  tiene un cero en  $s_i$ , mientras que  $y_{21}$  tiene un polo.

Esto último, según se demostró anteriormente, es imposible puesto que todos los ceros de  $z_{21}$  son también ceros de  $y_{21}$ , y por consiguiente  $z_{21}$  no puede tender a cero cuando  $y_{21}$  tiende a infinito.

En consecuencia se debe cumplir que:

$$K_{11(i)} K_{22(i)} - K_{21(i)}^2 = 0$$

Que es la condición de los residuos para cada polo de  $y_{21}(s)$ , la cual se cumple con el *signo de igualdad*, como se quería demostrar.

### 5.10. Redes LC en cadena, con todos los ceros de $y_{21}$ en el infinito

Se considerará que se han especificado las expresiones de los parámetros de cortocircuito de la red que se desea sintetizar (matriz  $\mathbf{Y}$ ). Aplicando el principio de dualidad, los resultados pueden extenderse de manera sencilla al caso en que la especificación sean los parámetros de circuito abierto (matriz  $\mathbf{Z}$ ).

El caso de *todos* los ceros de transmisión en infinito es el más sencillo. Por ser  $y_{21}$  una función impar de  $s$ , y su numerador es par en  $s$ , su forma debe ser:

$$y_{21}(s) = \frac{K}{sB(s)}$$

Siendo  $K$  una constante de proporcionalidad y  $B(s)$  un polinomio par en  $s$ .

Por otra parte, por tener  $y_{11}$  todos los polos de  $y_{21}$  más los posibles polos particulares, deberá ser de la forma:

$$y_{11}(s) = \frac{A_{11}(s)}{sB(s)} + y_{11}^{(p)}(s)$$

Siendo tanto  $A_{11}(s)/sB(s)$  como  $y_{11}^{(p)}$ , funciones reales positivas impares, y  $A_{11}(s)$  función par de  $s$ .

Entonces, la síntesis debe comenzar conectando en paralelo con los terminales de entrada la admitancia  $y_{11}^{(p)}$  y a continuación se debe desarrollar la *parte interior* de  $y_{11}$ , dada por:

$$y_{11INT} = y_{11} - y_{11}^{(p)} = \frac{A_{11}(s)}{sB(s)}$$

Esta *parte interior* de  $y_{11}$  se desarrolla como red en cadena de forma tal que los polos de las impedancias en serie y de las admitancias en paralelo estén en el infinito, para así lograr los ceros de transmisión buscados.

Evidentemente, las impedancias serie serán inductores, y las admitancias paralelo serán capacitores. Es decir que el desarrollo se hará en la tercera forma canónica o Cauer I ya vista (remoción de polos en el infinito), como se muestra en la **Fig. 5.8**.

Además la red empezará y terminará con un inductor en serie, dado que  $A_{11}(s)/sB(s)$  no tiene polos en el infinito, por no tenerlos  $y_{21}$ , la cual tiene un cero múltiple en el infinito.

Por lo tanto,  $A_{11}(s)/sB(s)$  tiene un cero en el infinito, lo que implica que el grado de  $A_{11}(s)$  es inferior en una unidad al grado de  $sB(s)$ .

De aquí que, para desarrollar  $A_{11}(s)/sB(s)$  en la tercera forma canónica, debe partirse de  $sB(s)/A_{11}(s)$ , siendo el primer término del desarrollo una inductancia en serie. Por otra parte, al ser impar el número de polos de  $A_{11}(s)/sB(s)$ , la red terminará en un inductor en serie, y el número de ramas será igual al grado de  $sB(s)$ , es decir, será igual al número de ceros de  $y_{21}$ .

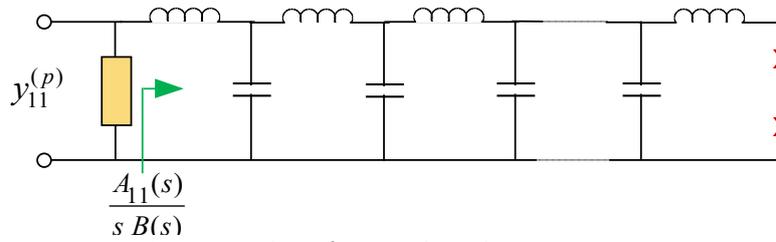


Fig. 5.8. Realización en cadena de  $y_{11}$  por Cauer I.

Si se abre ahora la red para obtener un par de terminales de salida, se obtiene un cuadripolo cuya matriz es:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y'_{11} & y'_{12} \\ y'_{21} & y'_{22} \end{bmatrix}$$

Siendo  $y'_{11} = y_{11INT}$  por construcción de la red, y además:

$$y'_{21} = y'_{12} = \frac{K'}{sB(s)}$$

El valor de  $K'$  se calcula a partir de los residuos en  $s=0$ , de  $y'_{11}$  e  $y'_{12}$ .

En efecto,  $y'_{11} = y_{11INT}$  y su residuo en  $s=0$  es  $A_{11}(0)/B(0)$ , mientras que el residuo de  $y'_{12}$  en  $s=0$  es  $K'/B(0)$

Como el circuito se obtuvo efectuando todas las remociones en infinito, la red asintótica que simplificará el análisis será la correspondiente al comportamiento para bajas frecuencias.

Del análisis asintótico de los parámetros especificados y sintetizados resulta:

$$y_{11INT}(s) \underset{s \rightarrow 0}{=} \frac{1}{s} \frac{A_{11}(0)}{B(0)} \quad y'_{11}(s) \underset{s \rightarrow 0}{=} \frac{1}{s \sum L_i}$$

Como

$$y'_{11} = y_{11INT} \quad y'_{11}(s) \underset{s \rightarrow 0}{=} y_{11INT}(s) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s \sum L_i} = \frac{A_{11}(0)}{sB(0)}$$

$$y_{12}(s) \underset{s \rightarrow 0}{=} \frac{K}{sB(0)} \quad y'_{12}(s) \underset{s \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{s \sum L_i} = -\frac{A_{11}(0)}{sB(0)}$$

Para que el circuito sintetizado satisfaga además el factor de escala de  $y_{12}(s)$ , es decir, para que la síntesis satisfaga por completo los parámetros  $y_{11}$  e  $y_{12}$  especificados, se postula disponer un transformador ideal de relación  $1:n$  en el otro extremo del cuadripolo (el opuesto a la inmitancia terminal que se está sintetizando, que en este caso es  $y_{11}$ ), tal como se indica en Fig. 5.9, con lo cual:

$$y'_{12}(s) = n \cdot y_{12}(s)$$

Entonces:

$$n \left[ \frac{K}{sB(0)} \right] = -\frac{A_{11}(0)}{sB(0)} \quad \therefore \quad \boxed{n = -\frac{A_{11}(0)}{K}}$$

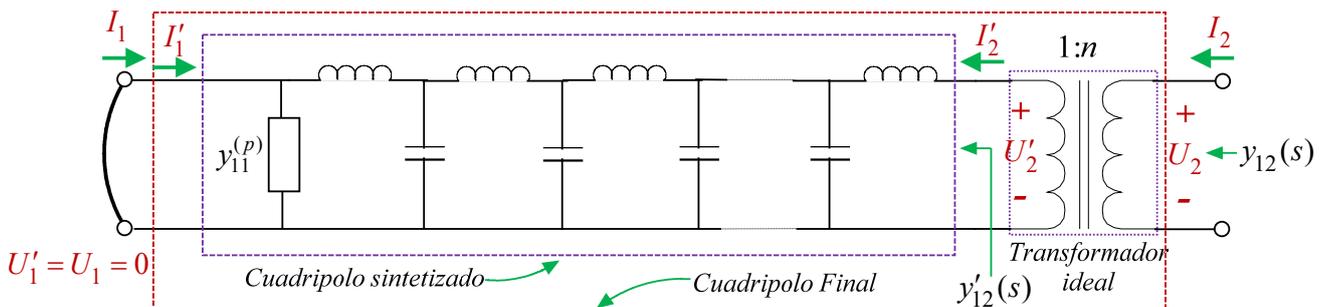


Fig. 5.9. Compensación del factor de escala de  $y_{12}$  mediante un transformador ideal.

Con la inclusión del transformador ideal de relación de transformación  $1:n$  el circuito sintetizado satisface por completo los parámetros  $y_{11}$  e  $y_{12}=y_{21}$  especificados, es decir se ha logrado una red con:

$$y'_{11}(s) = y_{11}(s)$$

$$y'_{12}(s) = y_{12}(s)$$

Con lo cual, para todos y cada uno de los polos  $s_i$  de  $y_{11}$  e  $y_{12}=y_{21}$  se cumple:

$$K'_{11(i)} = K_{11(i)}$$

$$K'_{12(i)} = K_{12(i)}$$

Queda por verificar y eventualmente *ajustar*  $y'_{22}$ . Para ello se hará uso del Teorema demostrado en **5.9**.

Como el circuito se ha sintetizado en cadena, y la parte interior empieza y termina en serie, el circuito (es decir, la matriz **Y sintetizada**) cumple con la condición de residuos *con el signo de igualdad*:

$$K'_{22(i)} = \frac{K'^2_{21(i)}}{K'_{11(i)}} = \frac{K^2_{21(i)}}{K_{11(i)}}$$

Por otra parte, para que la matriz **Y especificada** sea realizable con elementos pasivos debe cumplir la condición de residuos con el signo *mayor o igual*:

$$K_{22(i)} \geq \frac{K^2_{21(i)}}{K_{11(i)}}$$

Es decir, en el circuito hasta aquí sintetizado (**Fig. 5.9**) resulta en cada polo  $s_i$  de  $y_{12}=y_{21}$ :

$$K_{22(i)} \geq K'^2_{22(i)}$$

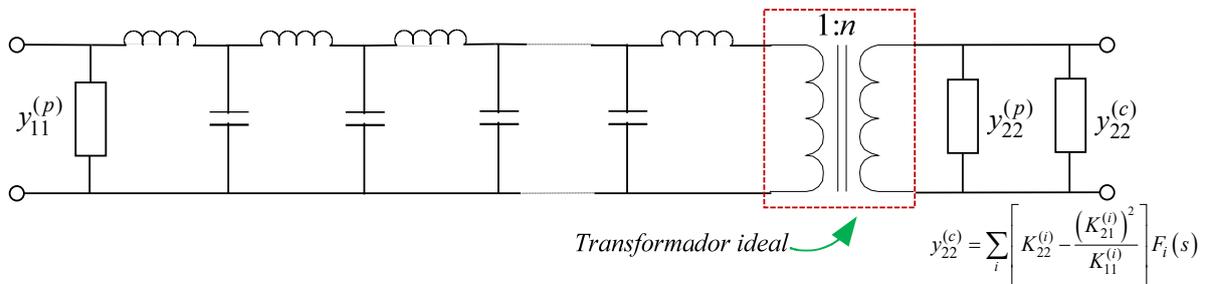
En conclusión, la diferencia entre  $y'_{22}$  e  $y_{22}$  consistirá en que  $y'_{22}$  puede estar incompleta debido a que:

- a) En los términos resultantes del desarrollo en fracciones simples algunos residuos son “*débiles*”.
- b) Quedarán sin realizar los “*polos particulares*” de  $y_{22}$ .

Ambos efectos podrán ser *compensados* agregando reactancias *en paralelo* con los terminales de salida:

- 1)  $K_{22(i)} - (K^2_{21(i)}/K_{11(i)})F_i(s)$  para completar o compensar los polos débiles.
- 2)  $K_{22(p)}F_i(s)$  Para realizar los polos particulares de  $y_{22}$ .

La red, en su versión definitiva, será la mostrada en **Fig. 5.10**.



**Fig. 5.10.** Realización de  $y_{22}$ : polos particulares y compensación de polos débiles.

Si el desarrollo se hubiera empezado con  $y_{22}$ , se habría obtenido un resultado equivalente invirtiendo entrada con salida, pero diferente del anterior.

**Ejemplo 5.1.**

Sintetizar la matriz **Y** cuyos coeficientes son:

$$y_{11}(s) = \frac{11,5s^4 + 35s^2 + 20}{s^5 + 6s^3 + 8s} \quad y_{21}(s) = \frac{-2}{s^3 + 2s} \quad y_{22}(s) = \frac{2s^2 + 0,8}{s^3 + 2s}$$

**Resolución**

El primer paso es efectuar el desarrollo de Foster para los tres parámetros, tal como se indica. De este modo se ponen en evidencia los polos particulares de las admitancias terminales y los polos compartidos (que corresponden a la *parte interior* de las admitancias terminales).

$$y_{11}(s) = \frac{11,5s^4 + 35s^2 + 20}{s^5 + 6s^3 + 8s} = \frac{(s^2 + 0,76)(s^2 + 2,28)}{s(s^2 + 2)(s^2 + 4)} = \frac{2,5}{s} + \frac{s}{s^2 + 2} + \frac{8s}{s^2 + 4}$$

$$y_{21}(s) = \frac{-2}{s^3 + 2s} = \frac{-2}{s(s^2 + 2)} = -\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 2}$$

$$y_{22}(s) = \frac{2s^2 + 0,8}{s^3 + 2s} = \frac{2(s^2 + 0,4)}{s(s^2 + 2)} = \frac{0,4}{s} + \frac{1,6s}{s^2 + 2}$$

Se observa que:

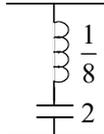
- $y_{21}(s)$  tiene todos sus ceros (tres) en infinito.
- $y_{11}(s)$  e  $y_{22}(s)$  comparten con  $y_{21}(s)$  los polos que se encuentran en el origen y en  $s = \pm j\sqrt{2}$
- $y_{11}(s)$  tiene un polo particular (en rigor un par de polos complejos conjugados) en  $\pm j2$ .
- $y_{22}(s)$  no tiene polos particulares.

La evaluación de la condición de residuos resulta:

- en  $s=0$  :  $2,5 \cdot 4 - 1^2 = 0$
- en  $s = \pm j\sqrt{2}$  :  $\frac{1}{2} \cdot 0,8 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0,15$

Si se elige sintetizar  $y_{11}(s)$ , el primer paso de síntesis es realizar los polos particulares de  $y_{11}(s)$ :

$$y_{11}^{(P)} = \frac{8s}{s^2 + 4} = \frac{1}{\frac{1}{8}s + \frac{1}{2s}}$$



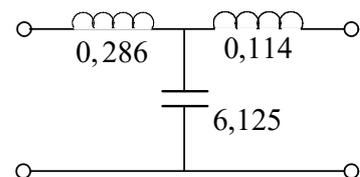
El cual se realiza como un rama en paralelo con los terminales de entrada, que consiste en dos elementos en serie: un inductor de valor 1/8 y un capacitor de valor 2.

La parte interior de  $y_{11}(s)$  resulta:

$$y_{11INT}(s) = \frac{2,5}{s} + \frac{s}{s^2 + 2} = \frac{\frac{5}{2}s^2 + 5 + s^2}{s(s^2 + 2)} = \frac{\frac{7}{2}s^2 + 5}{s^3 + 2s} = \frac{A_{11}(s)}{s B(s)}$$

Seguidamente, de  $y_{11INT}(s)$  hay que efectuar 3 remociones de polos en infinito, dado que  $y_{21}(s)$  tiene 3 ceros en infinito. Por lo tanto, se puede efectuar la síntesis directamente en la tercera forma canónica (Cauer I), comenzado con  $1/y_{11INT}(s)$  que tiene un polo en infinito:

$$y_{11INT} = \frac{3,5s^2 + 5}{s^3 + 2s} = \frac{1}{0,286s + \frac{1}{6,125s + \frac{1}{0,114s}}}$$



Para ajustar la constante o factor de escala de  $y_{12}(s)$ , se analiza el comportamiento asintótico. La simplificación de este análisis resultará para bajas frecuencias (como todos los elementos fueron sintetizados por remociones en infinito, todos tendrán peso en este extremo de frecuencias).

En bajas frecuencias la red sintetizada se comporta como una inductancia de valor  $L_{eq} = 0,286 + 0,114 = 0,4$ .

$$y'_{21}(s) = \frac{-1}{0,4s} = -\frac{2,5}{s}$$

$$y_{21}(s) = \frac{-2}{s(s^2 + 2)} \Rightarrow y_{21}(s) = \frac{-2}{2s} = -\frac{1}{s}$$

Por lo tanto se necesita un transformador ideal de relación:

$$n = \frac{y'_{12}(s)}{y_{12}(s)} = \frac{y'_{21}(s)}{y_{21}(s)} = \frac{-2,5/s}{-1/s} = 2,5$$

Que coincide con:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{y'_{21}(s)}{y_{21}(s)} = -\frac{A_{11}(0)}{K} = -\frac{5}{-2} = 2,5$$

Resta verificar y eventualmente ajustar  $y_{22}(s)$ .

Los elementos de compensación pueden determinarse directamente a partir de los parámetros especificados, porque la parte interior se sintetizó en cadena comenzando y terminando en serie.

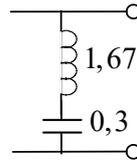
En el polo en el origen la condición de residuos se cumple con el signo de igualdad.

En los polos en  $s = \pm j\sqrt{2}$ :

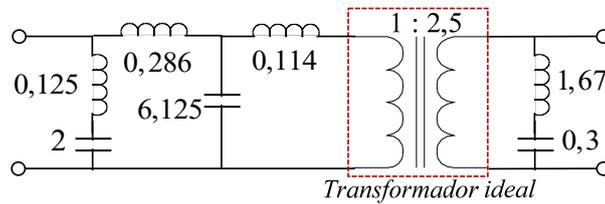
$$K_{22} - \frac{K_{21}^2}{K_{11}} = 0,8 - \frac{(0,5)^2}{0,5} = 0,3 > 0$$

por lo que el parámetro  $y'_{22}$  de la síntesis tiene un polo débil. Los elementos de compensación de este polo débil resultan:

$$y_{22}^{(c)} = \frac{2 \cdot 0,3 s}{s^2 + 2} = \frac{1}{\frac{s}{0,6} + \frac{2}{0,6s}} = \frac{1}{1,67s + \frac{1}{0,3s}}$$



La red que se obtiene está mostrada en **Fig. 5.11**.



**Fig. 5.11.** Circuito resultante.

### 5.11. Redes LC en cadena, con todos los ceros de $y_{21}$ en el origen

Se invierte el rol entre cero e infinito, respecto del caso anterior y por lo tanto es equivalente a reemplazar  $s$  por  $1/s$  en los cálculos realizados.

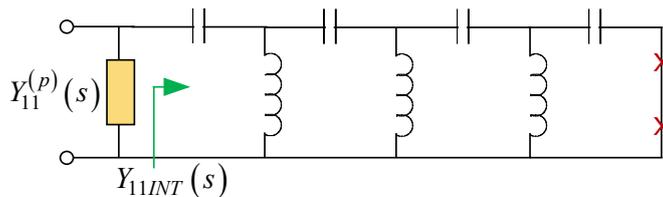
Ahora la expresión de  $y_{21}$  tendrá la forma:

$$y_{21}(s) = \frac{Ks^n}{B(s)}$$

Con  $n$  impar e igual a 1 más el grado de  $B(s)$  (si no,  $y_{21}$  tendría un cero en infinito, y no es este el caso), e igual al de  $sA_{11}(s)$ , ya que si  $y_{21}$  tiene un polo en infinito, también debe tenerlo  $y_{11}$ . Por lo tanto  $y_{11}$  tiene un cero en el origen, y tendrá la forma<sup>2</sup>:

$$y_{11INT}(s) = \frac{sA_{11}(s)}{B(s)}$$

Esto implica un desarrollo de la parte interior de  $y_{11}$  en la cuarta forma canónica (Cauer II - extracción de polos en el origen), donde las ramas serie serán capacidades y las ramas paralelo serán inductores, ya que los polos de unas y otras se encuentran en el origen, que es lo que se precisa (**Fig. 5.12**).



**Fig. 5.12.** Realización en cadena de  $y_{11}$  por Cauer II.

<sup>2</sup> Tener en cuenta que  $y_{11INT}$  debe comenzar en serie, por lo tanto el primer polo en el origen se debe remover como impedancia, por lo cual  $Y_{11INT}$  debe tener un cero en el origen.

El valor de la relación de transformación  $n$  surge de manera más simple del análisis asintótico para  $s \rightarrow \infty$  (dado que todos los componentes del circuito se obtuvieron por remociones en el origen).

La red asintótica para altas frecuencias de la parte interior de  $y_{11}$  serán los capacitores en serie, entonces:

$$y_{11INT}(s) = \frac{sA_{11}(\infty)}{B(\infty)} \quad y'_{11}(s) = \frac{s}{\sum_i \frac{1}{C_i}}$$

Como

$$y'_{11}(s) = Y_{11INT}(s) \quad y'_{11}(s) = y_{11INT}(s) \quad \Rightarrow \quad \frac{s}{\sum_i \frac{1}{C_i}} = \frac{sA_{11}(\infty)}{B(\infty)}$$

$$y_{21}(s) = \frac{Ks}{B(\infty)} \quad y'_{21}(s) = -\frac{s}{\sum_i \frac{1}{C_i}} = -\frac{sA_{11}(\infty)}{B(\infty)}$$

Para que el circuito sintetizado satisfaga además el factor de escala de  $y_{21}$ , es decir, para que la síntesis satisfaga por completo los parámetros  $y_{11}$  e  $y_{21}$  especificados, se postula disponer un transformador ideal de relación  $1:n$  en el otro extremo del cuadripolo (el opuesto a la inmitancia terminal que se está sintetizando, que en este caso es  $y_{11}$ ), con lo cual:

$$y'_{21}(s) = n \cdot y_{21}(s)$$

Entonces:

$$n \left[ \frac{Ks}{B(\infty)} \right] = -\frac{sA_{11}(\infty)}{B(\infty)} \quad \therefore \quad \boxed{n = -\frac{A_{11}(\infty)}{K}}$$

**Ejemplo 5.2.**

Sintetizar la matriz  $Y$  cuyos coeficientes son:

$$y_{11}(s) = \frac{4s^5 + 15,26s^3 + 10,06s}{s^4 + 2,89s^2 + 1,44}$$

$$y_{21}(s) = \frac{-2s^5}{s^4 + 2,89s^2 + 1,44}$$

$$y_{22}(s) = \frac{2s^6 + 22,816s^4 + 16,381s^2 + 1,44}{s^5 + 2,89s^3 + 1,44s}$$

**Resolución**

El desarrollo de Foster para los tres parámetros pone en evidencia los polos particulares de las admitancias terminales y los polos compartidos (que corresponden a la *parte interior* de las admitancias terminales):

$$y_{11}(s) = \frac{4s^5 + 15,26s^3 + 10,06s}{s^4 + 2,89s^2 + 1,44} = \frac{1,2s}{s^2 + 0,64} + \frac{2,5s}{s^2 + 2,25} + 4s$$

$$y_{21}(s) = \frac{-2s^5}{s^4 + 2,89s^2 + 1,44} = -\frac{0,509s}{s^2 + 0,64} + \frac{6,289s}{s^2 + 2,25} - 2s$$

$$y_{22}(s) = \frac{2s^6 + 22,816s^4 + 16,381s^2 + 1,44}{s^5 + 2,89s^3 + 1,44s} = \frac{0,216s}{s^2 + 0,64} + \frac{15,82s}{s^2 + 2,25} + 2s + \frac{1}{s}$$

Se observa que  $y_{11}$  no tiene polos propios y que  $y_{21}$  tiene todos sus ceros (cinco) en el origen. Se procede a sintetizar  $y_{11}$  realizando 5 remociones en el origen. Desarrollando  $y_{11}$  por Caer II en la cuarta forma canónica, resulta:

$$y_{11}(s) = \frac{4s^5 + 15,26s^3 + 10,06s}{s^4 + 2,89s^2 + 1,44} = \frac{10,06\left(\frac{1}{s}\right)^4 + 15,26\left(\frac{1}{s}\right)^2 + 4}{1,44\left(\frac{1}{s}\right)^5 + 2,89\left(\frac{1}{s}\right)^3 + \left(\frac{1}{s}\right)} =$$

$$y_{11}(s) = \frac{1}{0,143\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{1}{14,26\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{1}{0,077\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{1}{77,03\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{1}{0,030\left(\frac{1}{s}\right)}}}}$$

- Compensación de polos débiles de  $y_{22}$ :  $\left(K_{22} - \frac{K_{21}^2}{K_{11}}\right)F(s)$

En infinito:  $\left(2 - \frac{4}{4}\right)s = s$

En  $(s^2 = -2,25)$ :  $\left(15,82 - \frac{6,289^2}{2,5}\right) \frac{s}{s^2 + 2,25} = 0$  El polo no es débil

En  $(s^2 = -0,64)$ :  $\left(0,216 - \frac{0,509^2}{1,2}\right) \frac{s}{s^2 + 0,64} = 0$  El polo no es débil

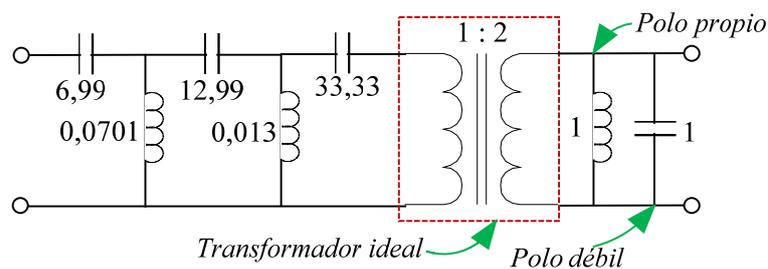
- Polos particulares de  $y_{22}$ :

$$y_{22}^{(p)}(s) = \frac{1}{s}$$

- Relación de transformación:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{y'_{21}(s)}{y_{21}(s)} = -\frac{A_{11}(\infty)}{K} = -\frac{4}{-2} = 2$$

La red resultante se muestra en **Fig. 5.13**.



**Fig. 5.13.** Compensación de  $y_{12}$  y realización del polo propio y compensación del polo débil de  $y_{22}$ .

### 5.12. Redes LC en cadena, con ceros de $y_{21}$ en el origen y en el infinito

Suponiendo que  $y_{21}$  es de orden  $m$ , si tiene  $n$  ceros en el origen, tendrá entonces  $(m-n)$  ceros en el infinito, y su expresión resulta:

$$y_{21}(s) = \frac{Ks^n}{s^m + a_{m-2}s^{m-2} + \dots + a_2s^2 + a_0} = \frac{Ks^n}{B(s)}$$

Por ser  $\mathbf{Y}$  matriz real positiva impar y  $B(s)$  un polinomio par en  $s$  (el denominador no puede ser impar, de la forma  $s B(s)$ ) entonces  $n$  debe ser impar al igual que  $(m-n)$ , para empezar y terminar en serie los respectivos desarrollos en cadena. Además:

$$y_{11}(s) = \frac{sA_{11}(s)}{B(s)} + y_{11}^{(p)}(s) = y_{11INT}(s) + y_{11}^{(p)}(s)$$

$$y_{22}(s) = \frac{sA_{22}(s)}{B(s)} + y_{22}^{(p)}(s) = y_{22INT}(s) + y_{22}^{(p)}(s)$$

Donde  $y_{11INT}$  tiene por denominador a  $B(s)$  por tener los mismos polos que  $y_{21}$ . Además  $y_{11INT}$  es de orden  $m$ , y tiene un cero en el origen y otro en el infinito. En efecto,  $s A_{11}(s)$  es un grado menor que  $B(s)$ , porque  $y_{11INT}$  tiene que empezar en serie, es decir que su inversa debe tener tanto un polo en infinito como un polo en el origen. Los polos particulares de  $y_{11}$  están en  $y_{11}^{(p)}$ . Lo mismo ocurre con  $y_{22INT}$  e  $y_{22}^{(p)}$ .

El desarrollo empieza realizando los polos particulares de  $y_{11}$  en paralelo con los terminales de entrada, y después se sintetiza  $y_{11INT}$  realizando primero, por ejemplo, los ceros de transmisión en  $s=0$ , es decir procediendo con la cuarta forma canónica hasta llegar al  $n$ -ésimo elemento ( $y_{21}$  tiene  $n$  ceros en el origen). Entonces, la red empezará con un capacitor en serie, y el  $n$ -ésimo elemento también será un capacitor en serie por ser  $n$  impar.

El resto de  $y_{11INT}$  debe realizar los ceros de transmisión en infinito que faltan, que también es un número positivo impar de orden  $(m-n)$ . Por lo tanto esta parte se realiza en la tercera forma canónica, y su desarrollo empieza y termina con un inductor en serie, por ser  $(m-n)$  impar.

Resta solo abrir dos terminales de salida, calcular la relación de vueltas del transformador ideal, y completar la red con los elementos de compensación de los polos débiles de la síntesis y los polos particulares de  $y_{22}$ .

La red resultante se muestra en Fig. 5.14.

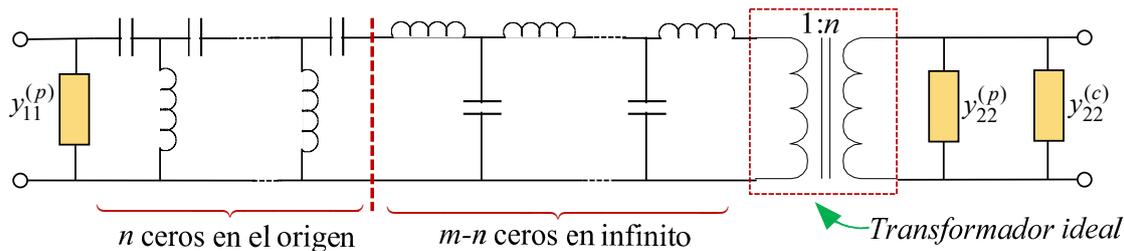


Fig. 5.14. Realización de  $y_{11}$ , compensación de  $y_{12}$ , realización de polos propios y compensación de polos débiles de  $y_{22}$ .

Resulta ahora más complicado el cálculo de la relación de transformación, dado que no existe ninguna frecuencia para la cual la red se comporte como un único elemento.

Habrá que calcular la admitancia  $y'_{21}$  de la red sintetizada (sin transformador) a una dada frecuencia, y compararla con el valor de  $y_{21}$  especificado a la misma frecuencia, o bien recurrir a las redes asintóticas.

**Ejemplo 5.3.**

Sintetizar el cuadripolo descargado que realiza los coeficientes especificados de la matriz  $Y$ .

$$y_{21}(s) = \frac{-3s^3}{s^6 + 5,25s^4 + 5,25s^2 + 1}$$

$$y_{22}(s) = \frac{8/9s^5 + 25/9s^3 + 8/9s}{s^6 + 5,25s^4 + 5,25s^2 + 1}$$

**Resolución**

El parámetro  $y_{11}$ , no fue especificado, lo cual otorga la libertad para adoptar alguno que se crea conveniente o realizar la síntesis de  $y_{22}$  y aceptar el  $y_{11}$  que resulte.

En este caso se adoptará el parámetro  $y_{11}$  más sencillo, y es el que cumple la condición de residuos con el signo de igualdad. Ello implica que si se efectúa la síntesis de  $y_{11}$  por el procedimiento visto el parámetro  $y_{22}$  resultante no tendrá polos débiles.

$$y_{21}(s) = \frac{-3s^3}{s^6 + 5,25s^4 + 5,25s^2 + 1} = \frac{4/15s}{s^2 + 0,25} - \frac{4/3s}{s^2 + 1} + \frac{16/15s}{s^2 + 4}$$

$$y_{22}(s) = \frac{8/9s^5 + 25/9s^3 + 8/9s}{s^6 + 5,25s^4 + 5,25s^2 + 1} = \frac{4/45s}{s^2 + 0,25} + \frac{4/9s}{s^2 + 1} + \frac{16/45s}{s^2 + 4}$$

$$K_{11(1)} = \frac{\left(\frac{2}{15}\right)^2}{\frac{2}{45}} = \frac{2}{5} \quad K_{11(2)} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{2}{9}} = 2 \quad K_{11(3)} = \frac{\left(\frac{8}{15}\right)^2}{\frac{8}{45}} = \frac{8}{5}$$

Entonces se adopta:

$$y_{11}(s) = \frac{4/5s}{s^2 + 0,25} + \frac{4s}{s^2 + 1} + \frac{16/5s}{s^2 + 4} = \frac{8s^5 + 25s^3 + 8s}{s^6 + 5,25s^4 + 5,25s^2 + 1}$$

Se elige realizar en primer lugar los ceros de transmisión en el origen.

Puesto que  $y_{21}$  tiene  $n=3$  ceros en el origen, se extraen los primeros tres elementos, desarrollando  $y_{11}$  en la cuarta forma canónica:

$$y_{11}(s) = \frac{8\frac{1}{s} + 25\frac{1}{s^3} + 8\frac{1}{s^5}}{1 + \frac{21}{4}\frac{1}{s^2} + \frac{21}{4}\frac{1}{s^4} + \frac{1}{s^6}}$$

$$\frac{8\frac{1}{s^5} + 25\frac{1}{s^3} + 8\frac{1}{s}}{-8\frac{1}{s^5} - 16\frac{1}{s^3} - \frac{64}{17}\frac{1}{s}} \Bigg| \frac{17}{72s} \rightarrow Z_C(s) = \frac{1}{sC_3}$$

$$\frac{\frac{1}{s^6} + \frac{21}{4}\frac{1}{s^4} + \frac{21}{4}\frac{1}{s^2} + 1}{\frac{1}{s^6} - \frac{25}{8}\frac{1}{s^4} - \frac{1}{s^2}} \Bigg| \frac{64}{17s} \rightarrow Y_B(s) = \frac{1}{sL_1}$$

$$\frac{8\frac{1}{s^5} + 25\frac{1}{s^3} + 8\frac{1}{s}}{\frac{1}{s^6} + \frac{21}{4}\frac{1}{s^4} + \frac{21}{4}\frac{1}{s^2} + 1} \Bigg| \frac{1}{8s} \rightarrow Z_A(s) = \frac{1}{sC_1}$$

$$y_{11}(s) = \frac{1}{\frac{1}{8s} + \frac{1}{\frac{17}{64}s} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{72}{17}s} + \frac{13\left(\frac{1}{s}\right)^2 + 1}{9\left(\frac{1}{s}\right)^3 + \frac{72\left(\frac{1}{s}\right)}{17}}}}$$

Se desarrollan a continuación los  $(m-n)=3$  ceros en el infinito restantes, en la tercera forma canónica (remociones en infinito):

$$Z_1(s) = \frac{\frac{13}{4}\left(\frac{1}{s}\right)^2 + 1}{9\left(\frac{1}{s}\right)^3 + \frac{72}{17}\left(\frac{1}{s}\right)} = \frac{\frac{13}{4}s + s^3}{9 + \frac{72}{17}s^2}$$

$$\frac{\frac{9}{8}s}{-\frac{9}{8}s} \Bigg| \frac{1}{8s} \rightarrow Z_F(s) = sL_6$$

$$\frac{\frac{72}{17}s^2 + 9}{-\frac{72}{17}s^2} \Bigg| \frac{64}{17s} \rightarrow Y_E(s) = sC_5$$

$$\frac{s^3 + \frac{13}{4}s}{-s^3 - \frac{17}{8}s} \Bigg| \frac{17}{72s} \rightarrow Z_D(s) = sL_4$$

Por lo tanto:

$$Z_1(s) = \frac{17}{72}s + \frac{1}{\frac{64}{17}s + \frac{1}{\frac{1}{8}s}}$$

Y entonces:

$$y_{11}(s) = \frac{1}{\frac{1}{8s} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{17}{64}s + \frac{1}{\frac{17}{72}s + \frac{1}{\frac{64}{17}s + \frac{1}{\frac{1}{8}s}}}}}}$$

Para ajustar la relación de transformación se necesita un transformador ideal cuya relación de transformación se debe cumplir para todas las frecuencias, por lo tanto en particular, puede calcularse para  $s=1$  obteniéndose  $y'_{21}(1) = -0,72$ , mientras que  $y_{21}(1) = -0,24$ , con lo cual resulta:

$$n = \frac{y'_{21}(1)}{y_{21}(s)} = \frac{-0,72}{-0,24} = 3$$

La red resultante se muestra en Fig. 5.15.

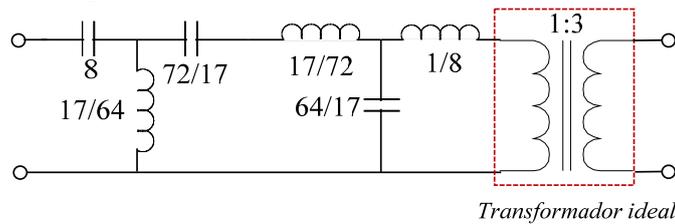


Fig. 5.15. Circuito resultante.

### 5.13. Orden de realización de los ceros de $y_{21}$ en el origen e infinito. Redes asintóticas

Cuando  $y_{21}$  tiene ceros en el origen e infinito, no hay ningún orden impuesto en su realización (primero los de infinito, después los del origen, o viceversa, o uno en el infinito y el siguiente en el origen y así siguiendo, o viceversa).

La única restricción es que queden realizados los  $n$  ceros en el origen y los  $(m-n)$  ceros en el infinito. Ello impone que la red empiece y termine en serie *efectivamente* para todas las frecuencias, las más bajas y las más altas, es decir teniendo en cuenta las redes asintóticas.

El concepto de red asintótica surge del hecho que, para frecuencias muy bajas, los inductores *tienden* a comportarse como cortocircuitos, y los capacitores *tienden* a comportarse como circuitos abiertos, a la inversa de lo que ocurre para altas frecuencias, en donde los inductores *tienden* a comportarse como circuitos abiertos y los capacitores *tienden* a comportarse como cortocircuitos.

A modo de ejemplo, en la Fig. 5.16 se muestra una red sintetizada a partir de la matriz  $\mathbf{Y}$  y las redes asintóticas para bajas y altas frecuencias de los circuitos empleados para determinar los parámetros de la  $Y_{12}$ , con los cuales pueden calcularse fácilmente las relaciones de transformación.

De la Fig. 5.16, considerando el circuito asintótico para bajas frecuencias:

$$I_1(s) = \frac{-U_2}{\frac{1}{sC_3} + \frac{1}{\frac{1}{sL_2} + sC_1}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{sL_2} + sC_1} \cdot sC_1 = -U_2 \frac{sC_1}{\frac{1}{sC_3} \left( \frac{1}{sL_2} + sC_1 \right) + 1} = -U_2 \frac{s^3 C_1 L_2 C_3}{1 + s^3 C_1 L_2 C_3 + s^2 L_2 C_3}$$

$$\therefore y'_{21}(s) = \frac{I_1}{U_2} \Big|_{U_1=0} = -s^3 C_1 L_2 C_3$$

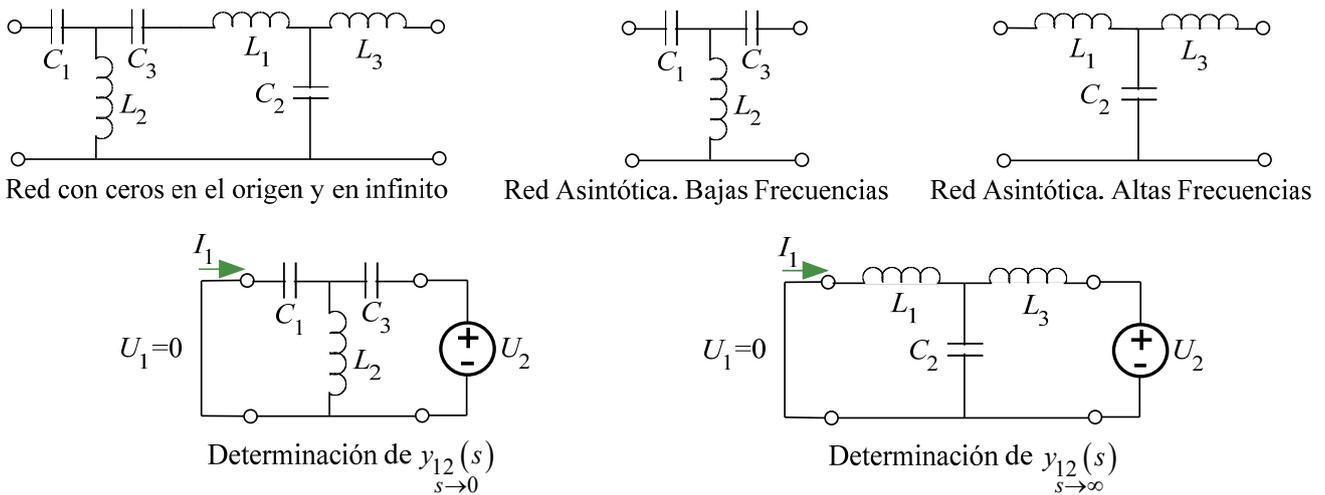


Fig. 5.16. Determinación del comportamiento asintótico de  $y_{12}$  empleando las redes asintóticas del cuádrupolo.

Considerando el circuito asintótico para altas frecuencias de la Fig. 5.16:

$$I_1(s) = \frac{-U_2}{sL_1 + \frac{1}{sC_2 + \frac{1}{sL_3}}} \cdot \frac{1}{sC_2 + \frac{1}{sL_3}} \cdot \frac{1}{sL_3} = -U_2 \frac{1}{\left(s^2L_1C_2 + \frac{L_1}{L_3} + 1\right)sL_3} = -U_2 \frac{1}{s^3L_1C_2L_3 + s(L_1 + L_3)}$$

$$\therefore y'_{21}(s) = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{U_1=0} = -\frac{1}{s^3L_1C_2L_3}$$

Además, las redes asintóticas permiten comparar las distintas realizaciones posibles de una red y decidir su validez, ya que todas las realizaciones deben tener el mismo comportamiento asintótico, y por lo tanto, las mismas redes asintóticas, lo que limita el número de realizaciones posibles.

En efecto, un cero en el origen de  $y_{21}$  puede realizarse con un capacitor serie o un inductor paralelo, y un cero en el infinito puede realizarse con un inductor serie o un capacitor en paralelo. Sin embargo, dado que la parte interior (en cadena) de la red con ceros en el origen e infinito, debe comenzar y terminar en serie, esto puede realizarse con un capacitor y un inductor en serie o con un inductor y un capacitor en serie, siendo ambas iguales.

Otras dos realizaciones posibles de la  $y_{21}$  del ejemplo dado anteriormente, con tres ceros en el origen y tres ceros en el infinito, son las mostradas en Fig. 5.17.

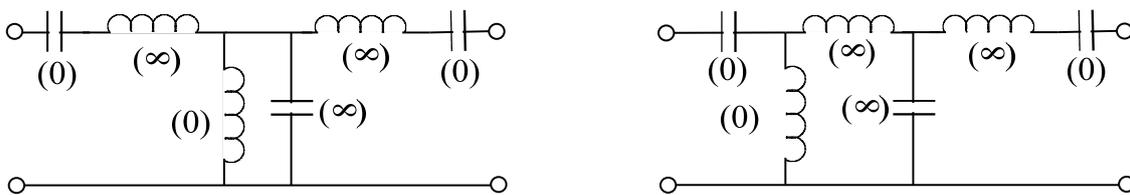


Fig. 5.17. Dos realizaciones posibles de  $y_{12}$  (tres ceros en el origen y tres ceros en el infinito).

El problema de ingeniería consiste en encontrar la mejor de todas las realizaciones posibles.

A modo de ejemplo, en la Fig. 5.18 se muestra una realización apta para ser implementada con transformador real, en lugar de ideal (ver Apéndice A).

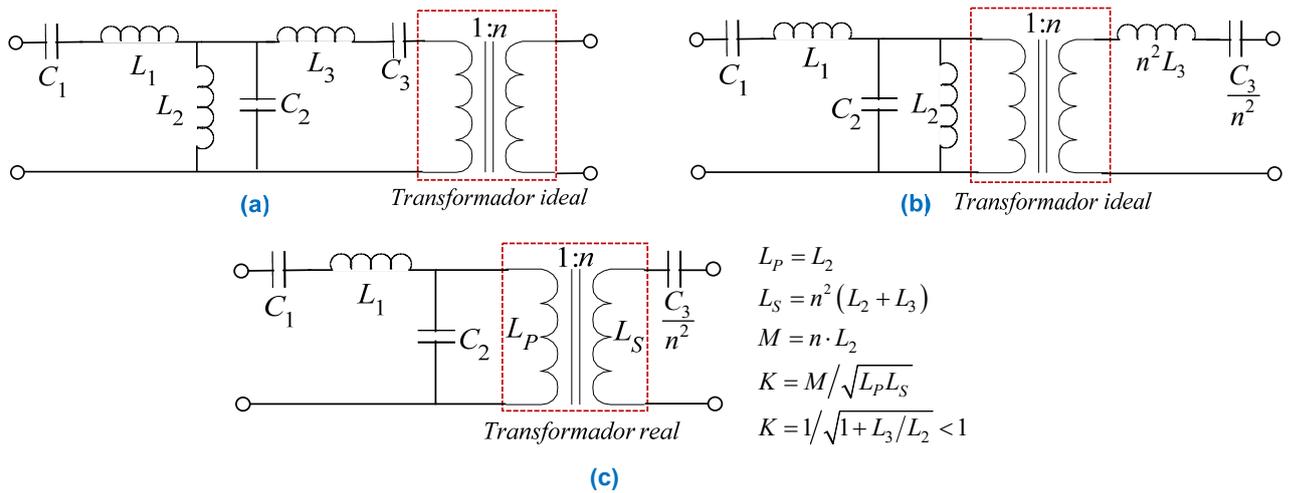


Fig. 5.18. Ajustes para el uso de un transformador real: (a) síntesis original; (b) pasar elementos al secundario del transformador ideal, teniendo como objetivo el modelo del transformador real; (c) circuito resultante.

Queda por aclarar algo ya mencionado. Se dijo que una red debe empezar y terminar *efectivamente* en serie. Esto significa que debe ser así no solo desde un punto de vista meramente topológico, sino también desde el punto de vista de su comportamiento asintótico para bajas frecuencias y para altas frecuencias. Esto determina que se excluyan las realizaciones que empiezan como se muestra en la Fig. 5.19a o terminan como se muestra en la Fig. 5.19b por dar cortocircuitos al nodo común en altas frecuencias (capacitores) o bajas frecuencias (inductores) respectivamente.

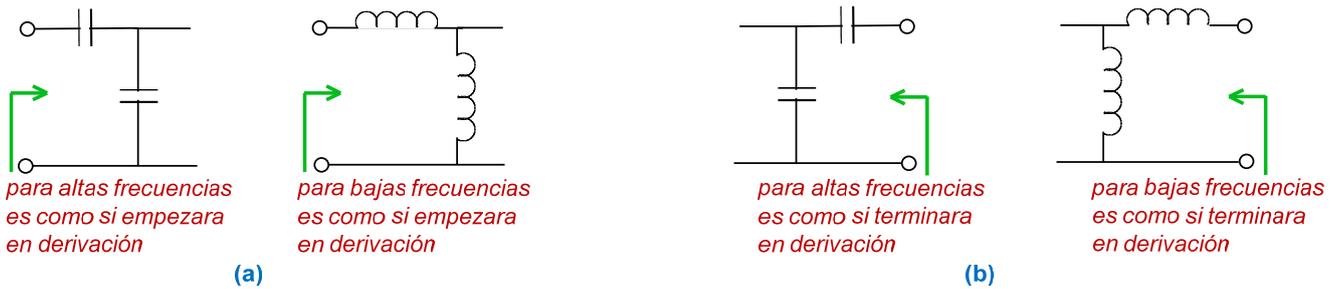


Fig. 5.19. La parte interior de  $y_{11}$  no empieza ni termina efectivamente en serie. (a) comienzo de  $y_{11INT}$ ; (b) terminación de  $y_{11INT}$ .

### 5.14. Cuadripolos con ceros de $y_{21}$ finitos sobre el eje $j\omega$ . Remociones parciales.

Cuando  $y_{21}$  tiene ceros sobre el eje imaginario distintos del origen e infinito, estos ceros por lo general no guardan relación con los polos y ceros de  $y_{11}$  y  $y_{22}$ , por lo que el desarrollo de las admitancias terminales, en cualquiera de las formas canónicas, no conduce a circuitos sintonizados a las frecuencias de interés. En consecuencia, estas frecuencias deben “crearse”.

Siempre que se tenga la libertad de elegir a conveniencia una de las admitancias (impedancias) terminales y, eventualmente la constante de proporcionalidad de  $y_{21}$  (*ganancia de transmisión*), la realización de los ceros de  $y_{21}$  sobre el eje  $j\omega$ , se puede lograr mediante la *remoción parcial* de polos de la admitancia (impedancia) terminal impuesta como dato.

El procedimiento consiste en remover *parcialmente* un polo para ubicar algún cero finito adyacente a dicho polo (tener en cuenta que los ceros que se encuentran en el origen y en infinito son inamovibles), en el valor de  $s=s_q$  donde  $y_{21}$  posee un cero de transmisión finito. Entonces invirtiendo la inmitancia, el cero que se termina de acomodar pasa a ser un polo, que al removerse (*remoción total*) realiza el cero de transmisión finito deseado.

#### 5.14.1. Remoción parcial de un polo en el origen

Si  $F(s)$  es una impedancia de entrada  $Z(s)$ , la remoción parcial del polo en el origen puede realizarse considerando:

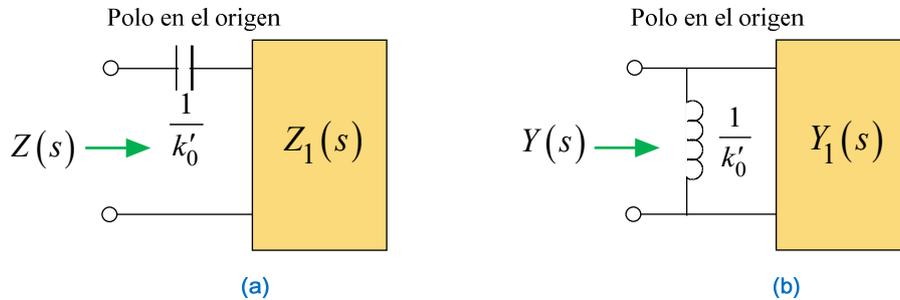
$$Z(s) = \frac{k'_0}{s} + Z_1(s) \Rightarrow Z_1(s) = Z(s) - \frac{k'_0}{s}$$

Esta sustracción, que puede interpretarse circuitalmente como se indica en la **Fig. 5.20a**, sugiere que  $Z_1(s)$  mantendrá el polo en el origen, pero *debilitado*, es decir, con un residuo menor que el que tenía  $Z(s)$ .

Si  $F(s)$  es una admitancia de entrada  $Y(s)$ , la remoción del polo en el origen puede realizarse considerando:

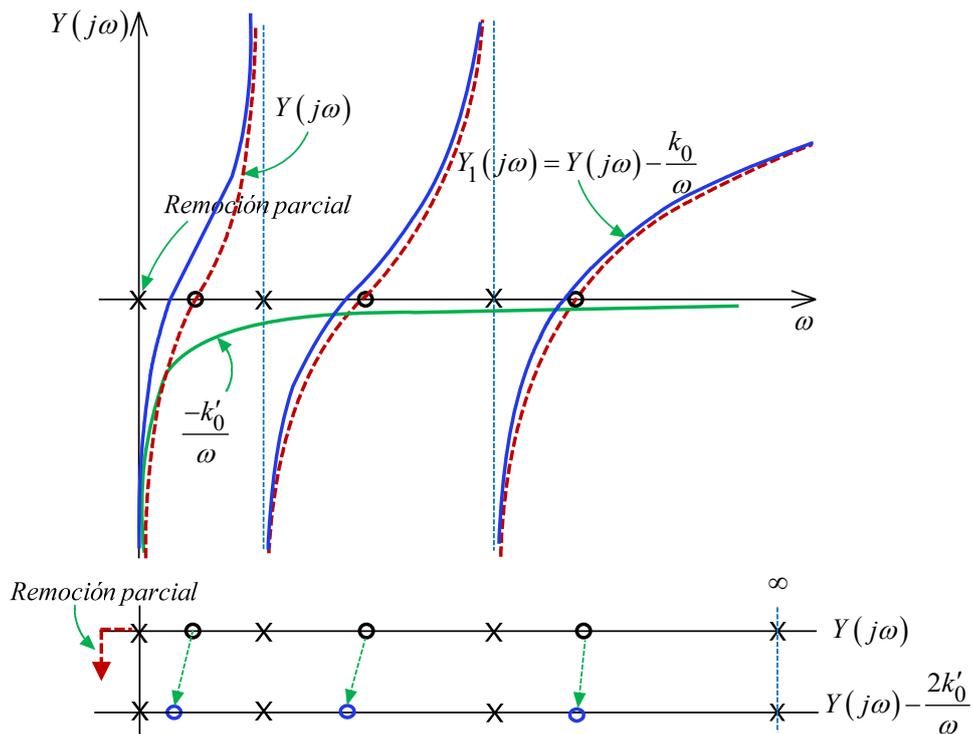
$$Y(s) = \frac{k'_0}{s} + Y_1(s) \Rightarrow Y_1(s) = Y(s) - \frac{k'_0}{s}$$

Esta sustracción, que puede interpretarse circuitalmente como se indica en la **Fig. 5.20b**, sugiere que  $Y_1(s)$  mantendrá el polo en el origen, pero *debilitado*, es decir, con un residuo menor que el que tenía  $Y(s)$ .



**Fig. 5.20.** Remociones parciales en el origen: **(a)** instancia de impedancia; **(b)** instancia de admitancia.

El efecto de esta remoción parcial sobre los polos y ceros de la parte remanente, se aprecia en la **Fig. 5.21**, y puede resumirse diciendo que todo resulta *como si* todos los ceros (excluyendo el eventual cero en infinito) se desplazaran en dirección al origen (lugar donde se efectuó la remoción), pero sin alcanzar a los respectivos polos contiguos.



**Fig. 5.21.** Efecto de la remoción parcial de un polo en el origen sobre la curva de inmitancia y sobre el diagrama cero-polar.

#### 5.14.2. Remoción parcial de un polo en infinito

Si  $F(s)$  es una impedancia de entrada  $Z(s)$ , la remoción del polo en infinito puede realizarse considerando:

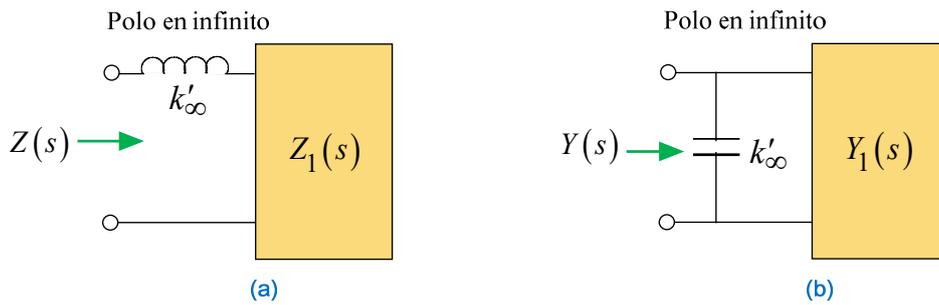
$$Z(s) = Z_1(s) + k'_\infty s \Rightarrow Z_1(s) = Z(s) - k'_\infty s$$

Esta sustracción, que puede interpretarse circuitalmente como se indica en la **Fig. 5.22a**, sugiere que  $Z_1(s)$  mantendrá el polo en infinito, pero *debilitado*, es decir, con un residuo menor que el que tenía  $Z(s)$ .

Si  $F(s)$  es una admitancia de entrada  $Y(s)$ , la remoción del polo en infinito puede realizarse considerando:

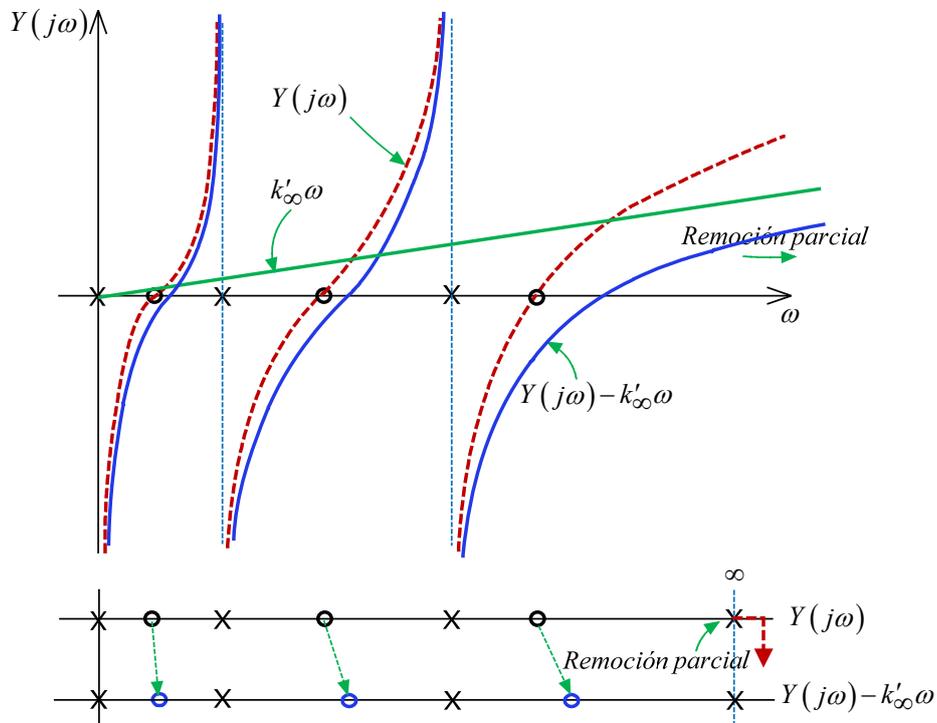
$$Y(s) = Y_1(s) + k'_\infty s \Rightarrow Y_1(s) = Y(s) - k'_\infty s$$

Esta sustracción puede interpretarse circuitalmente como se indica en la **Fig. 5.22b**, también revela que  $Y_1(s)$  mantendrá el polo en infinito, pero *debilitado*, es decir, con un residuo menor que el que tenía  $Y(s)$ .



**Fig. 5.22.** Remociones parciales en infinito: (a) instancia de impedancia; (b) instancia de admitancia.

El efecto de esta remoción parcial sobre los polos y ceros de la parte remanente, se aprecia en la **Fig. 5.23** y puede resumirse diciendo que todo resulta *como si* todos los ceros (excluyendo el eventual cero en el origen) se desplazaran en dirección al infinito (lugar donde se efectuó la remoción), pero sin alcanzar a los respectivos polos contiguos.



**Fig. 5.23.** Efecto de la remoción parcial de un polo en infinito sobre la curva de inmitancia y sobre el diagrama cero-polar.

5.14.3. Remoción parcial de un polo finito en el eje  $j\omega$ .

Si  $F(s)$  es una impedancia de entrada  $Z(s)$ , la remoción del polo en  $s=\pm j\omega_1$  puede realizarse considerando:

$$Z(s) = Z_1(s) + \frac{2k'_1 s}{s^2 + \omega_1^2} \Rightarrow Z_1(s) = Z(s) - \frac{2k'_1 s}{s^2 + \omega_1^2}$$

Esta sustracción, que puede interpretarse circuitalmente como se indica en la **Fig. 5.24a**, sugiere que  $Z_1(s)$  mantendrá el polo en  $s=\pm j\omega_1$ , pero *debilitado*, es decir, con un residuo menor que el que tenía  $Z(s)$ .

Si  $F(s)$  es una admitancia de entrada  $Y(s)$ , la remoción del polo en infinito puede realizarse considerando:

$$Y(s) = Y_1(s) + \frac{2k'_1 s}{s^2 + \omega_1^2} \Rightarrow Y_1(s) = Y(s) - \frac{2k'_1 s}{s^2 + \omega_1^2}$$

Esta sustracción, que puede interpretarse circuitalmente como se indica en la **Fig. 5.24b**, sugiere que  $Y_1(s)$  mantendrá el polo en  $s=\pm j\omega_1$ , pero *debilitado*, es decir, con un residuo menor que el que tenía  $Y(s)$ .

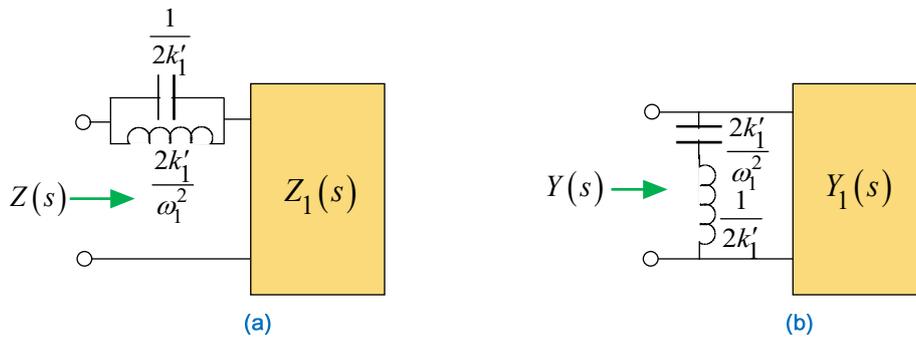


Fig. 5.24. Remociones parciales en puntos finitos del eje  $j\omega$ : (a) instancia de impedancia; (b) instancia de admitancia.

El efecto de esta remoción total sobre los polos y ceros de la parte remanente, se aprecia en la Fig. 5.25, y puede resumirse diciendo que todo resulta *como si* todos los ceros (excluyendo los eventuales ceros en el origen y en infinito) se desplazaran en dirección a  $s=\pm j\omega_1$  (lugar donde se efectuó la remoción), pero sin alcanzar a los respectivos polos contiguos.

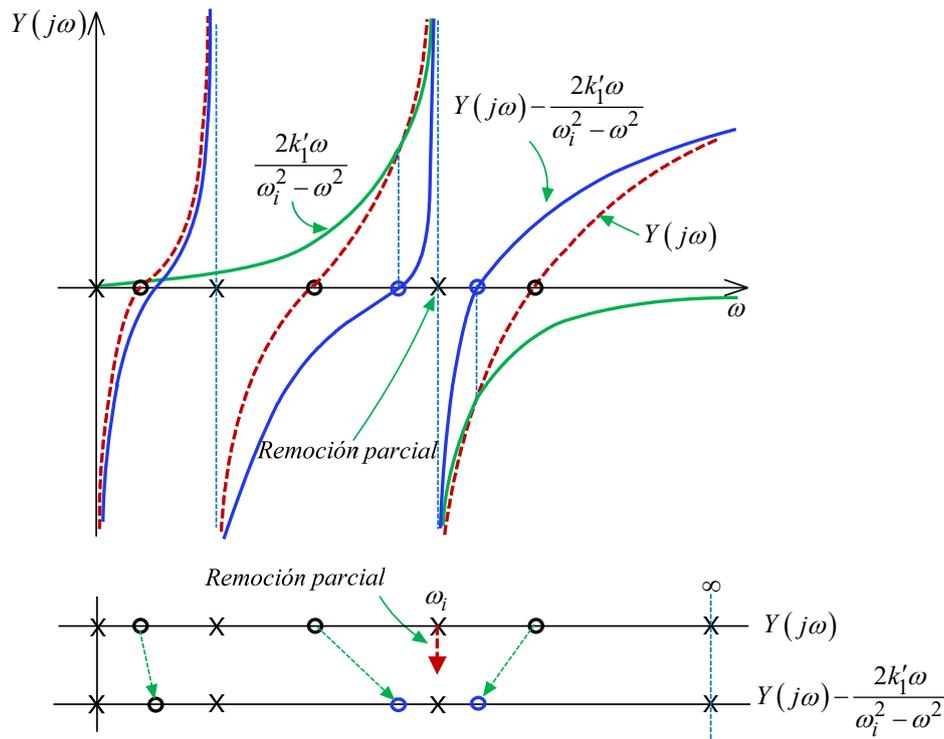


Fig. 5.25. Efecto de la remoción parcial de un polo finito sobre la curva de inmitancia y sobre el diagrama cero-polar.

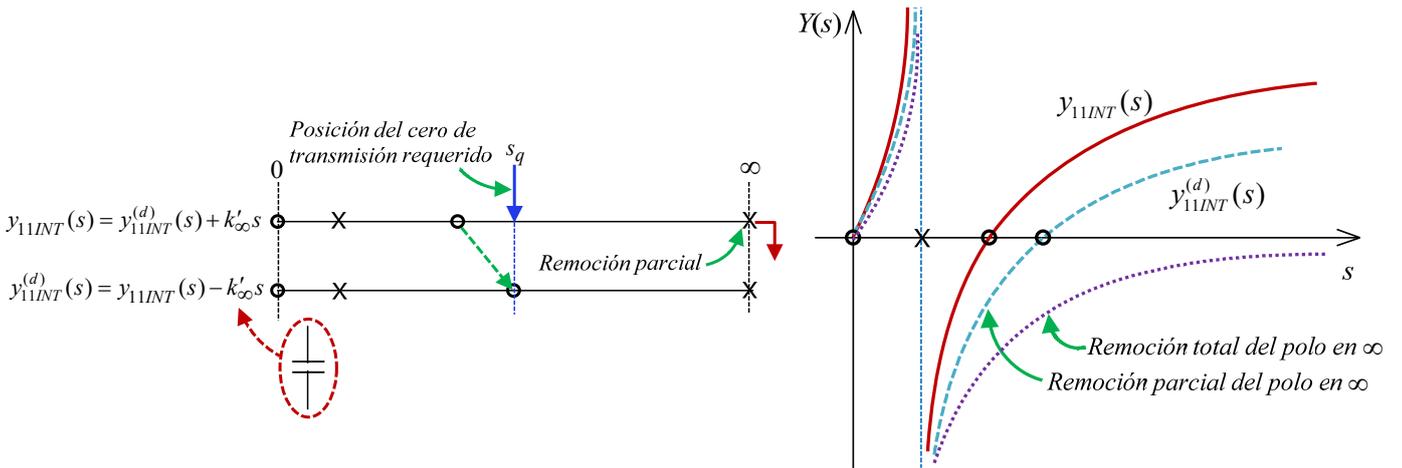
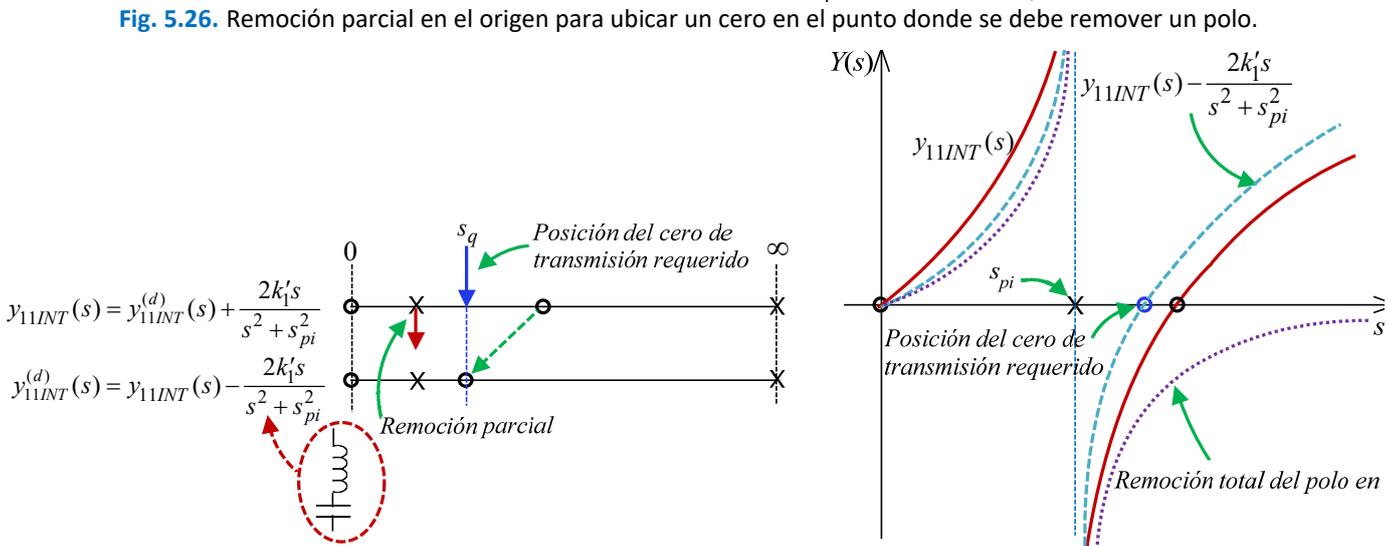
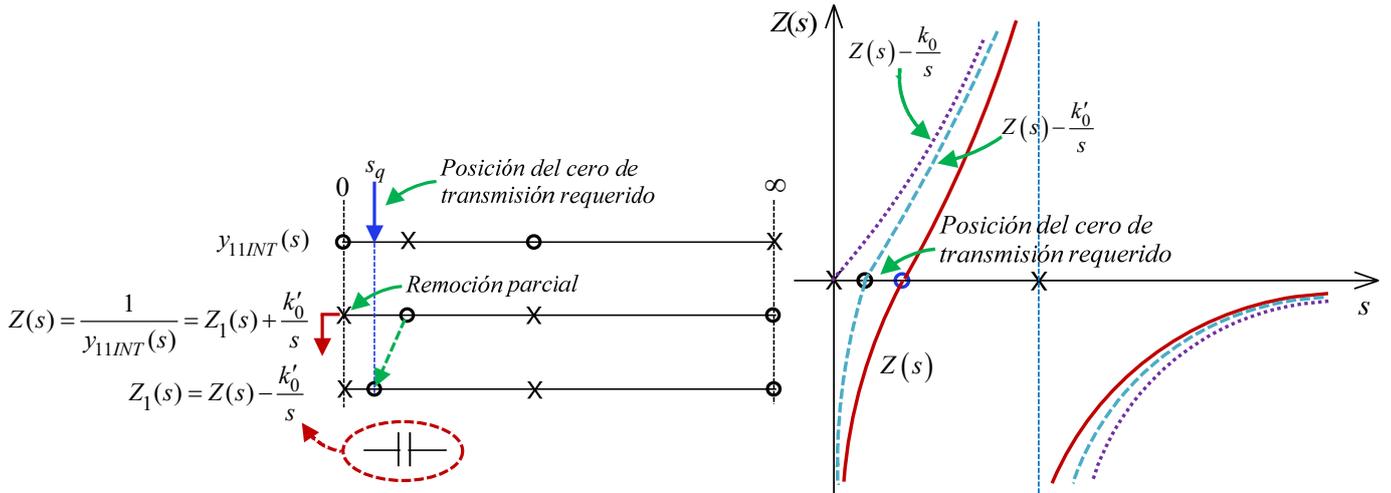
#### 5.14.4. Realización de ceros de transmisión finitos en el eje $j\omega$ .

La secuencia en que se realizan los ceros de transmisión, puede determinar que la parte interior se realice en cadena o no, y que comience y termine en serie o no. Esto a su vez determina si la parte interior cumple con la condición de residuos con el signo de igualdad, o no.

Este aspecto es relevante cuando se especifican los tres parámetros de la matriz  $\mathbf{Y}$  ( $y_{11}$ ,  $y_{22}$  e  $y_{21}=y_{12}$ ). Por el contrario, cuando se especifican sólo dos parámetros (una de las inmitancias terminales  $y_{11}$  ó  $y_{22}$  y la inmitancia de transferencia  $y_{21}=y_{12}$ ) no tendrá mayor importancia la secuencia de realización de los ceros de transmisión.

Por lo tanto si fuera este el caso, y se requiriera que la parte interior se realice en cadena y que comience y termine en serie, una vez removidos los polos particulares de  $y_{11}$ , hay que remover *parcialmente* un polo para *acomodar* en  $s=s_q$  a uno de los ceros adyacentes. Teniendo en cuenta que la remoción de un polo atrae a los ceros finitos *hacia* la ubicación de ese polo, en este paso pueden presentarse genéricamente dos situaciones, determinadas por la ubicación relativa del polo a remover y del cero a acomodar, respecto de la posición  $s_q$  del cero de transmisión deseado: una en la cual la remoción parcial debe efectuarse como

impedancia (Fig. 5.26), es decir como  $Z(s)=1/y_{11INT}(s)$  y la otra en la cual la remoción parcial debe efectuarse como  $y_{11INT}(s)$  (Fig. 5.27 y Fig. 5.28).



Si la remoción parcial debe realizarse como *impedancia*, significa que  $y_{11INT}(s)$  comenzará en serie, y de no existir más ceros de transmisión finitos, la síntesis se podrá completar en cadena y terminará también en serie. Entonces la realización cumplirá con la condición de residuos con el signo de igualdad.

El cero acomodado en la ubicación deseada, deberá ser removido *totalmente* como admitancia para realizar el cero de transmisión buscado. Es decir el elemento extraído para *acomodar* el cero, no genera un cero de  $y_{21}$  por sí mismo, si no se encuentra *acompañado* por la remoción *total* del polo en esa posición.

Si la remoción parcial debe realizarse como *admitancia* corresponderá a un elemento en paralelo con los terminales de entrada y con los elementos que realizan los polos particulares de  $y_{11}$ . Los elementos que sintetizan la remoción parcial serán elementos de compensación del residuo débil que le quedó a  $y_{11INT}^{(d)}$  (la nueva parte interior que prosigue) en el polo removido. El cero de  $y_{11INT}^{(d)}$  acomodado en la ubicación deseada, deberá ser removido como polo de impedancia, con lo cual  $y_{11INT}^{(d)}$  comenzará en serie. Además tiene un polo débil que ya fue *compensado* por el elemento correspondiente a la remoción parcial. De no existir más ceros de transmisión finitos, se podrá completar la síntesis de  $y_{11INT}^{(d)}$  en cadena, que comenzó en serie, y se podrá terminar también en serie, con lo cual cumplirá con la condición de residuos con el *signo de igualdad*. Por lo tanto,  $y_{11INT}$  (con el elemento de la remoción parcial que actúa como elemento de compensación de  $y_{11INT}^{(d)}$ ) cumplirá con la condición de residuos con el *signo mayor o igual*.

#### Ejemplo 5.4.

Sintetizar un cuadripolo que realice los siguientes coeficientes de la matriz  $\mathbf{Y}$ :

$$y_{22}(s) = \frac{2s^4 + 15s^2 + 2,5}{s(s^2 + 2,5)} \quad y_{21}(s) = \frac{-2s(s^2 + 1)}{(s^2 + 2,5)}$$

#### Resolución

Sólo se especifican  $y_{22}$  e  $y_{21}$ . Se observa que  $y_{21}$  tiene un cero de transmisión en  $s=0$  y en  $s=\pm j1$ .

En este caso no sería necesario verificar la condición de residuos, como tampoco sería necesario realizar el desarrollo de Foster de los parámetros especificados. Sin embargo es útil, al menos para la inmitancia terminal, ya que permite determinar en forma directa la parte interior:

$$y_{22}(s) = \frac{2s^4 + 15s^2 + 2,5}{s(s^2 + 2,5)} = \frac{(s^2 + 0,17)(s^2 + 7,33)}{s(s^2 + 2,5)} = \frac{9s}{s^2 + 2,5} + 2s + \frac{1}{s}$$

$$y_{21}(s) = \frac{-2s(s^2 + 1)}{(s^2 + 2,5)} = \frac{3s}{s^2 + 2,5} - 2s$$

Como en este caso sólo se especifican dos parámetros de la matriz  $\mathbf{Y}$ , no tendrá mayor importancia la secuencia de realización de los ceros de transmisión, como así tampoco si la remoción parcial que se requerirá, puede hacerse o no, en paralelo con los terminales de entrada, para que sea vista como elementos de compensación.

El proceso de síntesis se debe comenzar desde los terminales de salida, ya que el dato es  $y_{22}$ . El procedimiento a seguir se indica en la **Fig. 5.29**.

Como siempre, el primer paso es sintetizar los polos particulares o propios de la inmitancia terminal; en este caso, sólo un polo particular de  $y_{22}$  en el origen. Su remoción representa una admitancia inversamente proporcional a  $s$  lo cual corresponde a un inductor en derivación de valor  $L_1=1$ . Por ser un polo particular, su remoción no realiza el cero de  $y_{21}$  en el origen.

Al removerlo queda la parte interior:

$$y_{22INT} = Y_{22}(s) - \frac{1}{s} = \frac{9s}{s^2 + 2,5} + 2s = \frac{2s^3 + 14s}{s^2 + 2,5}$$

Se observa que  $y_{22INT}$  tiene un cero en el origen y otro en  $s = \pm j\sqrt{7}$ , sin relación alguna con el cero de  $y_{21}$  en  $s = \pm j1$ .

El procedimiento a aplicar consiste en *desplazar* un *cero* al lugar apropiado, mediante una remoción parcial de algún polo. Se vio que si esta remoción parcial se realiza como admitancia, los elementos sintetizados resultan elementos de compensación en paralelo con los terminales de entrada (en este caso, de salida, dado que la admitancia que se está sintetizando es  $y_{22}$ ) y con los elementos que realizan los polos particulares.

Pero en este caso, la distribución de polos y ceros de  $y_{22INT}$  que muestra la **Fig. 5.29** indica que la única posibilidad de correr un cero a  $s = \pm j1$  es haciendo una *remoción parcial* del polo en el origen de:

$$Z_1(s) = \frac{1}{y_{22INT}(s)} = \frac{s^2 + 2,5}{2s^3 + 14s}$$

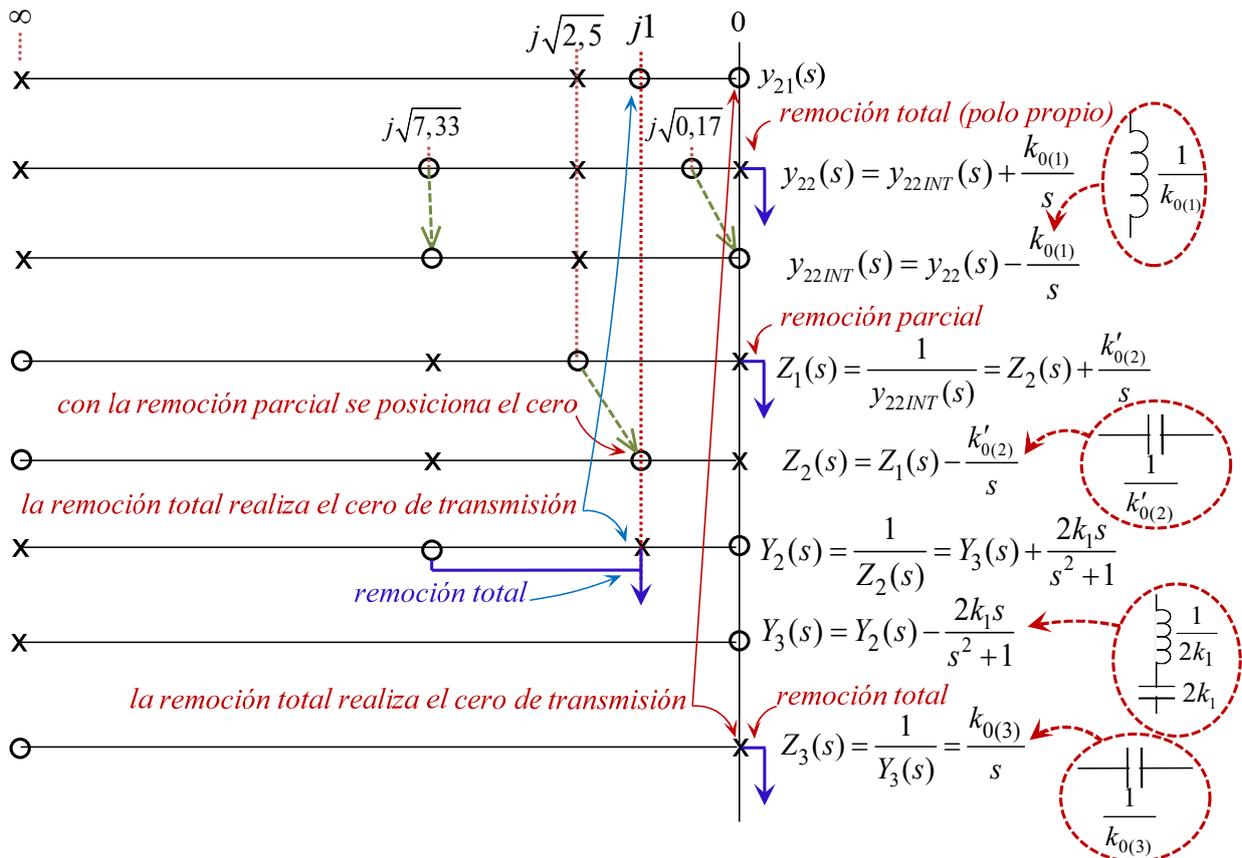


Fig. 5.29. Efecto de cada paso del procedimiento de síntesis sobre el diagrama cero-polar y su interpretación circuital.

En efecto, si de la inversa de  $y_{22INT}$  se removiera totalmente el polo en el origen cuyo residuo total es  $k_0 = 2,5/12 = 0,179$ , se obtendría:

$$Z_2(s) = Z_1(s) - \frac{0,179}{s} = \frac{4,5}{14} \frac{s}{s^2 + 7}$$

Este remanente  $Z_2$  tiene ahora un cero en el origen. Lo que ocurrió es que se desplazó el cero en  $s = \pm j\sqrt{2,5}$  hasta el origen. Si  $k_0$  fuese menor que 0,179 (cantidad necesaria para desplazar hasta el origen el cero en  $s = \pm j\sqrt{2,5}$ ), el cero se desplazaría hacia el origen pero sin alcanzarlo. Esto es precisamente lo que se necesita. En la Fig. 5.30 se muestra este desplazamiento de los ceros.

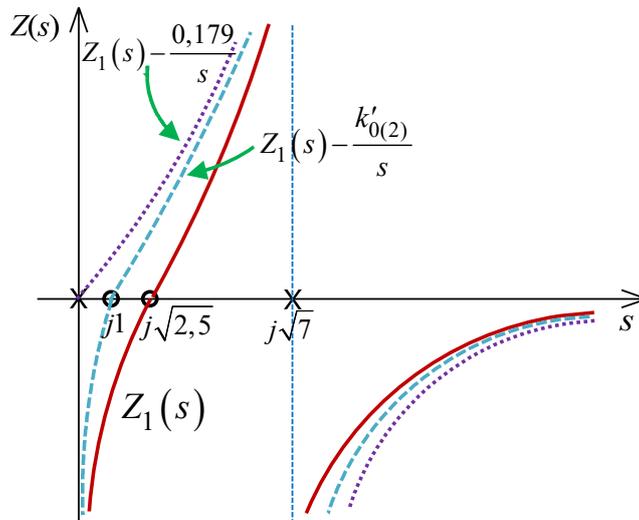


Fig. 5.30. Desplazamiento del cero cercano al origen causado por la remoción parcial del polo en el origen.

Para determinar el valor exacto del residuo que debe sustraerse, basta imponer a la función  $Z_2(s)$  la condición:

$$Z_2(s) \Big|_{s=\pm j1} = 0$$

Con lo cual, siendo:

$$Z_1(s) = Z_2(s) + \frac{k'_{0(2)}}{s}$$

Resulta:

$$k'_{0(2)} = sZ_1(s) \Big|_{s=\pm j1}$$

O sea que:

$$k'_{0(2)} = s \frac{s^2 + 2,5}{2s^3 + 14s} = \frac{s^2 + 2,5}{2s^2 + 14} = \frac{-1 + 2,5}{-2 + 14} = 0,125$$

Por lo tanto:

$$Z_2(s) = \frac{s^2 + 2,5}{2s^3 + 14s} - \frac{k'_{0(2)}}{s} = \frac{s^2 + 2,5}{2s^3 + 14s} - \frac{0,125}{s} = \frac{3}{8} \frac{s^2 + 1}{s(s^2 + 7)}$$

Que posee el cero en  $s=\pm j1$  tal como se pretendía. Tomando ahora la inversa de  $Z_2$ , resulta:

$$Y_2(s) = \frac{1}{Z_2(s)} = \frac{8}{3} \frac{s(s^2 + 7)}{(s^2 + 1)} = \frac{16s}{s^2 + 1} + \frac{8}{3}s$$

El proceso consiste en *crear* el cero, para luego invertir y extraer el polo. Entonces, como los polos de las impedancias (elementos en serie) y de las admitancias (elementos en paralelo) son ceros de transmisión, dichos elementos realizan los ceros de  $y_{21}$ .

El elemento extraído para *acomodar* el cero, no genera un cero de  $y_{21}$  por sí mismo, si no se encuentra *acompañado* por la remoción total del polo. La síntesis de la admitancia  $y_{22}$  se muestra en la **Fig. 5.31**, donde las cruces indican la apertura de los terminales para realizar la otra puerta del cuadripolo.

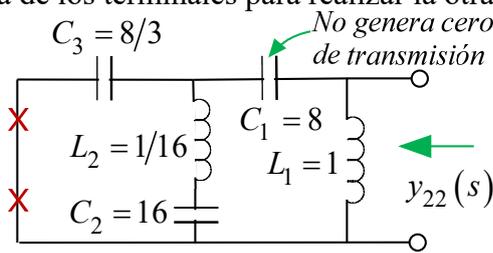


Fig. 5.31. Síntesis de  $y_{22}$  como inmitancia terminal.

En la **Fig. 5.32** se muestra el cuadripolo resultante y las redes asintóticas para bajas frecuencias y para altas frecuencias.

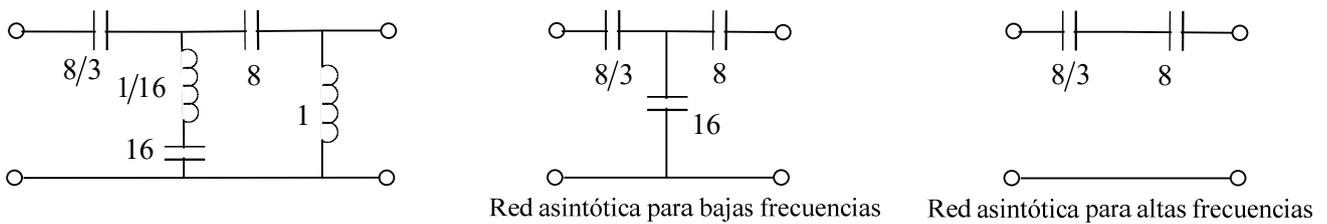


Fig. 5.32. Redes asintóticas de la síntesis efectuada.

En altas frecuencias la red se comporta como un capacitor en serie de valor:

$$y'_{21}(s) = -sC_{eq} = \frac{-s}{\frac{1}{8/3} + \frac{1}{8}} = -2s$$

Que resulta igual al comportamiento asintótico de  $y_{21}$  especificado; por lo cual (casualmente) no se requiere transformador.

Puede verse que la admitancia  $y'_{11}$  obtenida:

$$y'_{11}(s) = \frac{2s(s^2 + 3)}{(s^2 + 2,5)} = \frac{s}{s^2 + 2,5} + 2s$$

Hace cumplir la condición de residuos con el signo de igualdad.

Sin embargo, este resultado no es general, dado que ya no se cumple que todos los polos de las impedancias serie y de las admitancias paralelo corresponden a ceros de transmisión.

Debe comprenderse que el capacitor  $C_1=1/k'_{0(2)}$  no crea un cero de transmisión en el origen dado que corresponde a una remoción parcial de un polo en el origen. Sólo una remoción total de un polo (de una impedancia o admitancia) realiza el cero de transmisión.

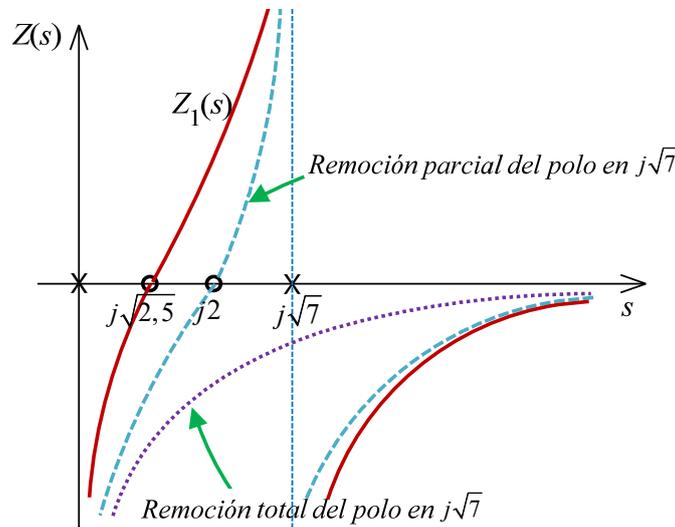
También debe tenerse precaución con la red asintótica a bajas frecuencias, ya que el capacitor  $C_2$  no es despreciable por estar conectado en derivación entre  $C_1$  y  $C_3$ .

El éxito del procedimiento que se ha empleado, se debe a la necesidad de desplazar el cero de  $y'_{21}$  hacia el origen (en el ejemplo particular dado).

**Ejemplo 5.5.**

Si se hubiera pretendido desplazar este cero hacia el infinito, la estrategia habría sido diferente.

En efecto, así como la *remoción parcial* del polo en el origen desplazó el cero en  $s=\pm j\sqrt{2,5}$  hacia el origen, es lógico suponer que la *remoción parcial* del polo en  $s=\pm j\sqrt{7}$  atraerá ese mismo cero en su dirección, como se indica en **Fig. 5.33**.



**Fig. 5.33.** Desplazamiento del cero ubicado en  $j\sqrt{2,5}$  causado por la remoción parcial del polo en  $j\sqrt{7}$ .

La remoción parcial en  $s=\pm j\sqrt{7}$  se expresa como:

$$Z_2(s) = Z_1(s) - \frac{2k'_3 s}{s^2 + 7} = \frac{s^2 + 2,5}{2s(s^2 + 7)} - \frac{2k'_3 s}{s^2 + 7}$$

Donde  $k'_3$  debe ser tal que haga  $Z_2(\pm j2)=0$ , con lo cual

$$(1 - 4k'_3)(\pm j2)^2 + 2,5 = 0 \Rightarrow k'_3 = \frac{1,5}{16}$$

Resultando entonces:

$$Z_2(s) = \frac{s^2 + 2,5}{2s^3 + 14s} - \frac{1,5/8 s}{s^2 + 7} = \frac{5}{16} \frac{s^2 + 4}{s(s^2 + 7)}$$

Con el cero deseado en  $s=\pm j2$ .

**Ejemplo 5.6.**

Queda por analizar otra posibilidad que es la que se presenta si se requiriera crear un cero ubicado en valores de  $s$  superiores a  $j\sqrt{7}$ . Como en tal caso no se dispone de ningún polo más allá de  $s=\pm j\sqrt{7}$  para “atraer” el cero, la solución es tomar la inversa de  $Z_1$ , es decir, directamente  $Y_{22INT}$ , y extraer parcialmente el polo en el infinito como se indica en **Fig. 5.34**.

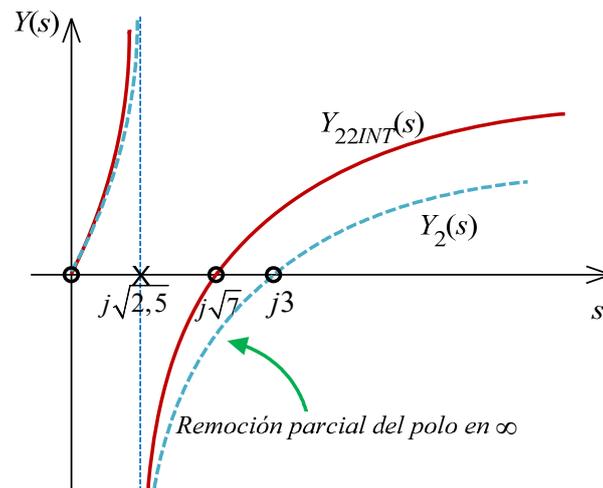


Fig. 5.34. Desplazamiento del cero ubicado en  $j\sqrt{7}$  causado por la remoción parcial del polo en infinito.

Así para “crear” un cero de transmisión en  $s=\pm j3$ , se plantea:

$$Y_2(s) = Y_1(s) - k_3 s = \frac{2s(s^2 + 7)}{s^2 + 2,5} - k_3 s = \frac{s[(2 - k_3)s^2 + (14 - 2,5 k_3)]}{(s^2 + 2,5)}$$

Determinándose el valor de  $k_3$  para  $s=\pm j3$ , a partir de la condición:

$$(2 - k_3)(-3)^2 + (14 - 2,5 k_3) = 0 \Rightarrow k_3 = \frac{8}{13}$$

Resultando entonces:

$$Y_2(s) = Y_1(s) - k_3 s = \frac{2s(s^2 + 7)}{s^2 + 2,5} - \frac{8}{13} s = \frac{s(s^2 + 9)}{(s^2 + 2,5)}$$

Con el cero en  $s=\pm j3$  deseado.

En conclusión puede afirmarse que, si se tiene la libertad de elección de una de las admitancias (impedancias) terminales ( $y_{11}$  ó  $y_{22}$ ), puede crearse un cero de transmisión en cualquier punto del eje  $j\omega$ , sin uso de transformadores, mediante la extracción parcial de un polo de la admitancia (impedancia) terminal impuesta, o de su recíproca (recordar que el polo extraído parcialmente “atrae” el cero hacia él).

La forma de realización resultante no es canónica, porque necesita más elementos que los estrictamente necesarios.

Asimismo, conviene remarcar que un cero de transmisión solo se crea mediante la *remoción total* de un polo.

Evidentemente, si una de las funciones terminales tiene un cero en común con  $y_{21}$ , ya no hay necesidad de *acomodar* tal cero, sino que basta con extraer el *correspondiente* polo de su recíproca.

### Ejemplo 5.7.

Sea la matriz  $\mathbf{Y}$  dada por los siguientes coeficientes:

$$y_{11}(s) = \frac{12s^4 + 19s^2 + 4}{s(7s^2 + 5)} = \frac{(4s^2 + 1)(3s^2 + 4)}{s(7s^2 + 5)}$$

$$y_{21}(s) = -\frac{s^4 + 17s^2 + 4}{s(7s^2 + 5)} = -\frac{(4s^2 + 1)(s^2 + 4)}{s(7s^2 + 5)}$$

### Resolución

Como  $y_{11}$  e  $y_{21}$ , tienen un cero en  $s=\pm j0,5$  y que  $y_{11}$  no tiene polos propios, el primer paso más adecuado sería generar el cero de transmisión en  $s=\pm j0,5$  removiendo el polo correspondiente de la inversa de  $y_{11}$ :

$$Z_1(s) = \frac{1}{Y_{11}(s)} = \frac{7s^3 + 5s}{12(s^2 + 1/4)(s^2 + 4/3)} = \frac{1/4s}{s^2 + 1/4} + Z_2(s)$$

Siendo  $Z_2$  igual a:

$$Z_2(s) = Z_1(s) - \frac{1/4s}{s^2 + 1/4} = \frac{s}{3s^2 + 4}$$

El cero de  $Y_{21}$  en  $s = \pm j0,5$  se realiza así con una impedancia:

$$\frac{1/4s}{s^2 + 1/4} = \frac{1}{4s + \frac{1}{s}}$$

Ahora hay que trasladar el cero de  $Y_2 = 1/Z_2$ , desde  $s = \pm j\sqrt{4/3}$  hasta  $s = \pm j2$ , y para ello se debe remover parcialmente el polo de  $Y_2$  en infinito, lo cual atraerá al cero adyacente hacia el infinito (Fig. 5.35).

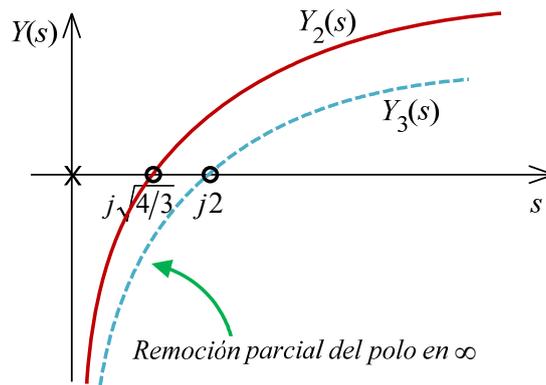


Fig. 5.35. Desplazamiento del cero ubicado en  $j\sqrt{4/3}$  causado por la remoción parcial del polo en infinito.

Esto se logra mediante un capacitor en paralelo, de modo que:

$$Y_3(s) = Y_2(s) - k_3s = \frac{3s^2 + 4}{s} - k_3s = \frac{(3 - k_3)s^2 + 4}{s}$$

Sea igual a cero para  $s = j2$ , con lo que resulta:

$$(3 - k_3)(-4)^2 + 4 = 0 \Rightarrow k_3 = 2$$

O sea:

$$Y_3(s) = Y_2(s) - k_3s = \frac{3s^2 + 4}{s} - k_3s = \frac{s^2 + 4}{s}$$

$$Z_3(s) = \frac{1}{Y_3(s)} = \frac{s}{s^2 + 4} = \frac{1}{s + \frac{1}{\frac{1}{s}}}$$

Obteniéndose la red mostrada en la Fig. 5.36.

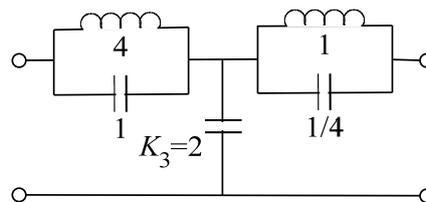


Fig. 5.36. Circuito resultante.

### 5.15. Síntesis de transferencias

En numerosas aplicaciones puede resultar de interés diseñar un cuadripolo LC a partir de la especificación de alguna de las funciones de transferencia del cuadripolo descargado.

En todos los casos se procede partiendo de las ecuaciones del cudripolo en el dominio de Laplace, para

obtener la relación entre las variables de interés en función de los parámetros  $\mathbf{Z}$  ó  $\mathbf{Y}$  del cuadripolo.

Una vez obtenida la expresión en  $s$  de dicha relación, se deben construir las expresiones de un par de parámetros de la matriz correspondiente  $\mathbf{Z}$  ó  $\mathbf{Y}$ .

La estrategia a seguir es obtener, haciendo cumplir las condiciones de realizabilidad de los parámetros, un par de expresiones lo más sencillas posibles tales que den por resultado la relación requerida.

Este procedimiento resultará más comprensible analizando un par de ejemplos.

### Ejemplo 5.8.

Sintetizar la siguiente transferencia:

$$T(s) = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0} = -\frac{s^2 + 4}{s(s^2 + 9)}$$

### Resolución

Del conjunto de ecuaciones del cuadripolo:

$$I_1(s) = y_{11}(s) U_1(s) + y_{12}(s) U_2(s)$$

$$I_2(s) = y_{21}(s) U_1(s) + y_{22}(s) U_2(s)$$

En la segunda ecuación resulta para  $U_2(s)=0$ , la función de transferencia buscada, haciendo la relación  $I_2(s)/U_1(s)$ :

$$\left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0} = y_{21}(s) = -\frac{s^2 + 4}{s(s^2 + 9)}$$

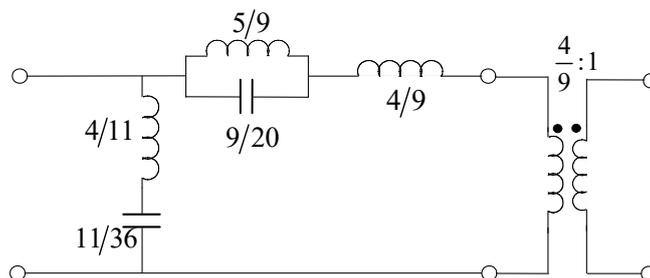
Esto significa que para sintetizar la función de transferencia deseada, basta con sintetizar un cuadripolo que cumpla con  $y_{21}(s)$ , sin importar las inmitancias terminales  $y_{11}(s)$  e  $y_{22}(s)$ .

Entonces puede adoptarse libremente cualquier expresión válida para una de las inmitancias terminales, para poder sintetizarla en cadena. Por ejemplo bien podría servir:

$$y_{11}(s) = \frac{5(s^2 + \frac{9}{5})}{s(s^2 + 9)}$$

$$y_{21}(s) = -\frac{s^2 + 4}{s(s^2 + 9)}$$

Cuya síntesis conduce al circuito de la **Fig. 5.37**.



**Fig. 5.37.** Circuito resultante.

### Ejemplo 5.9.

Sintetizar la siguiente transferencia:  $T(s) = \left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{I_2=0} = \frac{(s^2 + 4)(s^2 + 25)}{(s^2 + 1)(s^2 + 100)}$

### Resolución

Del conjunto de ecuaciones del cuadripolo:

$$U_1(s) = z_{11}(s) I_1(s) + z_{12}(s) I_2(s)$$

$$U_2(s) = z_{21}(s) I_1(s) + z_{22}(s) I_2(s)$$

Resulta para  $I_2(s)=0$ , la función de transferencia buscada, haciendo la relación  $U_2(s) / U_1(s)$ :

$$T_1(s) = \left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{I_2=0} = \frac{z_{21}(s)}{z_{11}(s)} = \frac{(s^2 + 4)(s^2 + 25)}{(s^2 + 1)(s^2 + 100)}$$

Como los polos de  $z_{21}(s)$  deben ser también polos de  $z_{11}(s)$ , desde todo punto de vista, resulta válido hacer:

$$\frac{z_{21}(s)}{z_{11}(s)} = - \frac{\frac{(s^2 + 4)(s^2 + 25)}{D(s)}}{\frac{(s^2 + 1)(s^2 + 100)}{D(s)}}$$

Si se adopta:

$$D(s) = s(s^2 + 9)$$

se satisfacen todas las propiedades de las inmitancias de punto impulsor y de transferencia, resultando finalmente:

$$z_{11}(s) = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 100)}{s(s^2 + 9)}$$

$$z_{21}(s) = \frac{(s^2 + 4)(s^2 + 25)}{s(s^2 + 9)}$$

## 5.16. Bibliografía

- [1] W. Warzanskyj Poliscuk. *Métodos de Síntesis de Redes Lineales*. Capítulo V: “Redes en Cadena”. Universidad Politécnica de Madrid. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicaciones. 1977. ISBN 978-84-740-2054-9.
- [2] Wai-Kai Chen. *Passive, Active and Digital Filters (3<sup>rd</sup>. Ed)*. Chapter 8. “Two-Port Synthesis by Ladder Development”. CRC Press. Boca Raton. FL. 2009. ISBN 978-1-4200-5885-7.



---

# Capítulo 6

## Síntesis de Cuadripolos Cargados

---

### 6.1. Introducción

Hasta aquí se ha estudiado la síntesis de cuadripolos descargados constituidos por elementos  $LC$  sin haber tenido en cuenta las resistencias que cargan ambas puertas, entre las que el cuadripolo ha de operar.

Esta aproximación es aceptable en filtros activos, en los que la resistencia de la fuente puede considerarse parte del filtro y la resistencia de carga suele no tener influencia porque la salida del filtro normalmente es la salida de un amplificador operacional que puede considerarse una fuente ideal de tensión.

Pero estas resistencias sí han de tenerse en cuenta en filtros pasivos  $LC$  ya que transforman al circuito en  $RLC$  y, por tanto, afectan la transferencia de potencia desde la fuente a la carga.

En este capítulo se estudiarán los procedimientos de síntesis de cuadripolos cargados en un único extremo (alimentados con un generador ideal) y doblemente cargados (alimentados con un generador real).

Será importante aquí tener presente las propiedades de las funciones de transferencia, para comprender las condiciones de realizabilidad de las funciones que se obtengan:

- Son funciones racionales reales en  $s$ , es decir, cocientes de polinomios con coeficientes reales.
- Los coeficientes del polinomio del denominador deben ser positivos.
- Los polos y ceros imaginarios o complejos, deben ser conjugados.
- La parte real de todos los polos debe ser negativa o cero.
- Si la parte real del polo es cero, entonces el polo debe ser simple (incluido el origen).
- El polinomio del denominador debe ser completo, es decir, no le deben faltar términos entre los de orden superior e inferior, a menos que sea par o impar (en cuyo caso debe ser par completo o impar completo).
- El numerador puede tener términos faltantes entre los de mayor y menor grado, y puede tener coeficientes negativos.
- El grado del numerador puede ser tan bajo como cero, independientemente del grado del denominador.
- En cuanto al grado máximo del numerador:
  - si la función es una transferencia de tensión - tensión ó corriente - corriente, el grado máximo del numerador es el grado de denominador.
  - si la función es una transferencia de tensión – corriente ó corriente - tensión, el grado máximo del numerador es  $1 +$  el grado de denominador,

### 6.2. Diseño de cuadripolos cargados alimentados por un generador ideal

Para estudiar el diseño de un cuadripolo  $LC$  (filtro) cargado con una  $R$ , excitado por un generador ideal consideremos el esquema de la **Fig. 6.1** alimentado, ya sea por un generador de tensión (con resistencia nula en serie), ya sea por un generador de corriente (con admitancia nula en paralelo).

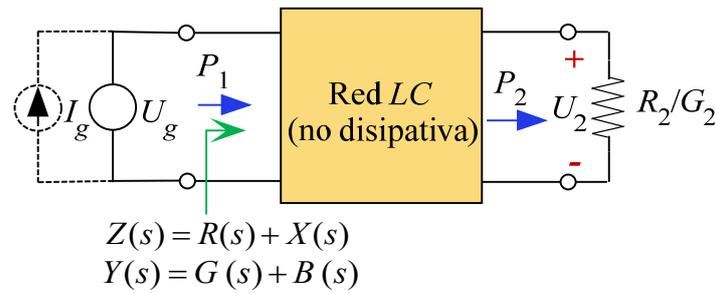


Fig. 6.1. Cuadripolo no disipativo excitado con un generador ideal y cargado con una resistencia R.

Sea  $P_{20}$  la potencia que el generador transfiere a la carga cuando el cuadripolo no se encuentra insertado:

$$P_{20}(s) = |U_g|^2 G_2 \quad \text{ó} \quad P_{20}(s) = |I_g|^2 R_2$$

Cuando el cuadripolo está insertado en el circuito, por ser no disipativo, toda la potencia  $P_1$  entregada por el generador a la red, pasa a la carga, es decir  $P_1=P_2$ , con lo cual:

$$P_1 = P_2 = |U_g|^2 G(s) \quad \text{ó} \quad P_1 = P_2 = |I_g|^2 R(s)$$

La relación:

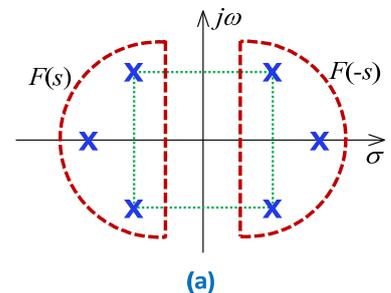
$$\frac{P_{20}}{P_2} = \frac{G_2}{G(s)} \quad \text{ó} \quad \frac{P_{20}}{P_2} = \frac{R_2}{R(s)}$$

Es una función de  $s$  que se denomina *pérdidas de inserción*  $PI(s)$ , y es inversamente proporcional a la parte par de  $Y(s)$  ó  $Z(s)$ , o sea  $G(s)$  ó  $R(s)$ .

Por lo tanto, los *ceros*  $PI(s)$  son los *polos* de  $G(s)=\text{Par}[Y(s)]$  o bien los *polos* de  $R(s)=\text{Par}[Z(s)]$ .

Aquí se considera conveniente tener en cuenta que, por ser  $F(s)$  una inmitancia terminal ( $Y(s)$  ó  $Z(s)$ ) con parte real no nula, no pueden existir polos sobre el eje  $j\omega$ , encontrándose por lo tanto en el semiplano izquierdo.

Entonces, dado que los polos de la parte par de una función  $F(s)$  son el conjunto de polos de  $F(s)$  y de  $F(-s)$ , y como los polos de  $F(s)$  se encuentran en el semiplano izquierdo, los de  $F(-s)$  estarán en el semiplano derecho. Con lo cual los polos de  $\text{Par}[F(s)]$  tienen distribución simétrica respecto del eje  $j\omega$  y *nunca* se encuentran sobre dicho eje. Esto se ilustra en la Fig. 6.2a.



Por lo tanto, como se muestra en la Fig. 6.2b, como los *ceros* de  $PI(s)$  son los polos de  $\text{Par}[Y(s)]$  o  $\text{Par}[Z(s)]$ , conocida la expresión de  $PI(s)$  se pueden determinar sus *ceros* y por lo tanto, los *polos* de  $\text{Par}[Y(s)]$  o  $\text{Par}[Z(s)]$ . Y tomando de estos los que se encuentran sobre el semiplano izquierdo, puede reconstruirse el *denominador* de  $Y(s)$  ó  $Z(s)$ .

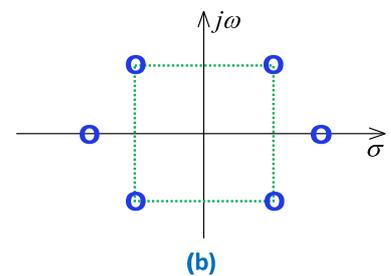


Fig. 6.2. (a) Distribución de polos de  $\text{Par}[F(s)]$ .  
(b) Distribución de polos de  $PI(s)$ .

En consecuencia, si la especificación a satisfacer fuera la función  $PI(s)$ , al realizar la inmitancia terminal  $Y(s)$  ó  $Z(s)$  por cualquier procedimiento canónico, se estarían realizando los *ceros* de  $PI(s)$ . Para encontrar la forma de realizar simultáneamente los polos y los *ceros* de la función  $PI(s)$ , es necesario determinar los factores que determinan los polos de  $PI(s)$ . Para ello, se considera que la red LC está definida por su matriz  $\mathbf{Y}$ . Entonces:

$$Y(s) = \frac{I_1(s)}{U_1(s)} = \frac{y_{11}(s)U_1(s) + y_{12}(s)U_2(s)}{U_1(s)} = y_{11}(s) + y_{12}(s) \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$$

Pero por estar la red LC cargada con  $G_2$ :

$$\left. \begin{aligned} I_2(s) &= -G_2 U_2(s) \\ I_2(s) &= y_{21}(s)U_1(s) + y_{22}(s)U_2(s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow U_2(s) = -\frac{y_{21}(s)}{y_{22}(s) + G_2} U_1(s)$$

Combinando ambas expresiones resulta:

$$Y(s) = y_{11}(s) + y_{12}(s) \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = y_{11}(s) - \frac{y_{21}^2(s)}{y_{22}(s) + G_2}$$

Entonces:

$$\text{Par}[Y(s)] = \frac{1}{2}[Y(s) + Y(-s)] = \frac{1}{2} \left[ \left( y_{11}(s) - \frac{y_{21}^2(s)}{G_2 + y_{22}(s)} \right) + \left( y_{11}(-s) - \frac{y_{21}^2(-s)}{G_2 + y_{22}(-s)} \right) \right]$$

Y por ser  $y_{11}(s)$  función impar, resulta que:

$$\text{Par}[Y(s)] = \frac{1}{2} \left[ \left( y_{11}(s) - \frac{y_{21}^2(s)}{G_2 + y_{22}(s)} \right) + \left( -y_{11}(s) - \frac{(-1)^2 y_{21}^2(s)}{G_2 - y_{22}(s)} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[ -\frac{y_{21}^2(s)}{G_2 - y_{22}(s)} - \frac{y_{21}^2(s)}{G_2 + y_{22}(s)} \right]$$

$$\text{Par}[Y(s)] = -\frac{y_{21}^2(s) G_2}{G_2^2 - y_{22}^2(s)}$$

Por tanto:

$$\frac{P_{20}}{P_2} = \frac{y_{22}^2(s) - G_2^2}{y_{21}^2(s)}$$

Procediendo de manera enteramente dual, se puede obtener una expresión similar para la matriz  $\mathbf{Z}$ :

$$\frac{P_{20}}{P_2} = \frac{z_{22}^2(s) - R_2^2}{z_{21}^2(s)}$$

De donde se deduce que los *polos particulares* de  $y_{22}(s)$  y los *ceros* de  $y_{21}(s)$  (todos ubicados en el semiplano izquierdo), constituyen *la mitad* de los polos de  $PI(s) = P_{20}/P_2$  (siendo la otra mitad simétrica respecto del eje imaginario). Esto significa que los polos de  $PI(s)$  que se encuentran en el SPI y la mitad de los que se encuentren sobre el eje  $j\omega$ , corresponden a los *ceros de transmisión*.

En consecuencia, como ya habíamos demostrado que al realizar la inmitancia terminal  $Y(s)$  [ $Z(s)$ ] por cualquier procedimiento canónico, se estarían realizando los *ceros* de  $PI(s)$ , si esta síntesis la efectuamos haciendo remociones en los polos propios de  $y_{22}(s)$  [ $z_{22}(s)$ ] y en los *ceros* de  $y_{21}(s)$  [ $z_{21}(s)$ ], se estarán realizando simultáneamente los *polos* de  $PI(s)$ . De este modo, la función especificada estará realizada a menos de una constante.

En el siguiente capítulo se comprenderá que dicha constante no afecta la especificación cuando la misma se realiza en términos relativos, como es el caso de  $PI(s) = P_{20}/P_2$ , o como se verá más adelante con funciones de transferencia.

Por lo tanto de todo lo discutido hasta aquí, puede establecerse la forma de proceder para realizar un circuito que satisfaga una dada función  $PI(s)$ .

1. Análisis de realizabilidad de la función  $PI(s)$ .
  - a)  $P_{20}/P_2|_{s=j\omega}$  debe ser función racional, par de  $\omega$ , con coeficientes reales.
  - b)  $0 \leq P_{20}/P_2(\omega) < \infty$  para todo  $\omega$ . Este requerimiento se debe a que para toda  $Y(s)$  que sea una admitancia terminal se cumple que  $0 \leq \text{Re}\{Y(s)\} < \infty$  en  $s=j\omega$  y para todo  $\omega$  (y del mismo modo para todo  $Z(s)$  que sea una impedancia terminal se cumple que  $0 \leq \text{Re}\{Z(s)\} < \infty$ )
  - c)  $P_{20}/P_2(s)$  no puede tener *ceros* imaginarios puros. Todos los *ceros* deben tener una disposición simétrica respecto del origen.
2. Obtención de la inmitancia terminal  $Y(s)$  ó  $Z(s)$ , partiendo de la función de pérdidas de inserción como dato. Servirá en este paso tener presente que:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{m_1(s) + n_1(s)}{m_2(s) + n_2(s)} \qquad Z(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{m_1(s) + n_1(s)}{m_2(s) + n_2(s)}$$

- a) Se obtiene el denominador  $D(s)$  con los *ceros* de  $PI(s)$  que se encuentran en el SPI, con lo cual quedan determinados  $m_2(s)$  y  $n_2(s)$ .

b) Se postula un numerador  $N(s)$  teniendo en cuenta que el numerador de  $\text{Par}[Y(s)]$  ó  $\text{Par}[Z(s)]$  puede hacerse:

$$\text{Par}[Y(s)] = \frac{m_1(s)m_2(s) - n_1(s)n_2(s)}{m_2^2(s) - n_2^2(s)} \quad \text{Par}[Z(s)] = \frac{m_1(s)m_2(s) - n_1(s)n_2(s)}{m_2^2(s) - n_2^2(s)}$$

Se postula:

$$N(s) = m_1(s) + n_1(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_qs^q$$

Debiendo deducirse el grado  $q$  de  $N(s)$  y los coeficientes  $a_i$  propuestos, comparando el denominador de  $PI(s)$  con  $[m_1(s)m_2(s) - n_1(s)n_2(s)]$ .

3. Síntesis de la inmitancia terminal  $Y(s)$  ó  $Z(s)$ .

Una vez obtenida la expresión de  $Y(s)$  ó  $Z(s)$  se procede a efectuar remociones de polos de  $Y(s)$  ó  $Z(s)$  en las posiciones de los ceros de transmisión, que tal como se vio son la mitad (que se encuentra en el semiplano izquierdo) de los polos de la función pérdidas de inserción.

### Ejemplo 6.1.

Sintetizar un circuito no disipativo excitado con un generador de tensión ideal y cargado con una resistencia  $R_2=R_1=1$ . La función pérdidas de inserción requerida es la siguiente:

$$\frac{P_{20}}{P_2} = \frac{1 + \omega^6}{\omega^4}$$

### Resolución

Esta función de pérdidas de inserción cumple con los requisitos a) y b), y tiene 4 polos en el origen y dos polos en infinito.

Si la red es alimentada por un generador ideal de tensión, y tiene una carga normalizada a  $G_2=1$ , sabiendo que:

$$\frac{P_{20}}{P_2} = \frac{G_2}{G(s)}$$

Resulta:

$$G(s) = \frac{G_2}{\left. \frac{P_{20}}{P_2}(\omega) \right|_{\omega=\frac{s}{j}}} = \frac{s^4}{1-s^6}$$

Por otra parte, si:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{m_1(s) + n_1(s)}{m_2(s) + n_2(s)}$$

Entonces:

$$\text{Par}[Y(s)] = G(s) = \frac{m_1(s)m_2(s) - n_1(s)n_2(s)}{m_2^2(s) - n_2^2(s)} = \frac{s^4}{1-s^6}$$

Los ceros de  $G(s)$  son 6, de los cuales 4 se encuentran en el origen y 2 en infinito.

Los polos de  $G(s)$  también son 6 y resultan de hacer:

$$1 - s^6 = 0$$

Aplicando la Fórmula de De Moivre para la raíz  $n$ -ésima de un número complejo:

$$s_{1..n} = \sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{|Z|} e^{j\theta} = \sqrt[n]{|Z|} e^{j\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

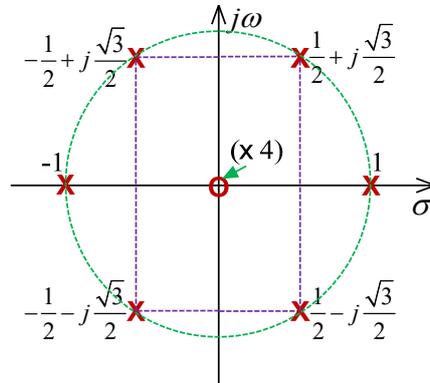
Resulta:

$$s_{1..6} = \sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1} e^{j0} = \sqrt[6]{1} e^{j\left(\frac{0}{6} + 2k\frac{\pi}{6}\right)} = 1 e^{k\frac{\pi}{3}} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots, 5$$

Por lo tanto, la distribución de polos y ceros de  $G(s)$  resulta como se indica en la **Fig. 6.3**.

Las raíces de  $D(s)$  tienen que encontrarse en el semiplano izquierdo, por lo tanto,  $D(s)$  sólo se puede componer mediante los polos ubicados en el semiplano izquierdo de la **Fig. 6.3.**:

$$m_2(s) + n_2(s) = (s + 1) \left( s + \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left( s + \frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = (s + 1)(s^2 + s + 1) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$$



**Fig. 6.3.** Distribución de polos y ceros de  $G(s)=Par[Y(s)]$ .

Entonces:

$$m_2(s) = 2s^2 + 1 \quad n_2(s) = s^3 + 2s$$

Por ser el numerador de la parte  $Par[Y(s)]$  de orden 4, se postula que el numerador de  $Y(s)$  al ser de grado 2, tendrá la forma:

$$m_1(s) + n_1(s) = a_2s^2 + a_1s + a_0$$

Entonces resulta ser:

$$Par[Y(s)] = \frac{s^4}{1-s^6} = \frac{m_1(s)m_2(s) - n_1(s)n_2(s)}{m_2^2(s) - n_2^2(s)} = \frac{(2s^2 + 1)(a_2s^2 + a_0) - a_1s(s^3 + 2s)}{1 - s^6}$$

Agrupando las potencias de  $s$ :

$$\frac{(2a_2 - a_1)s^4 + (2a_0 + a_2 - 2a_1)s^2 + a_0}{1 - s^6} = \frac{s^4}{1 - s^6}$$

De donde surge el siguiente sistema de ecuaciones a resolver para determinar los coeficientes  $a_i$ :

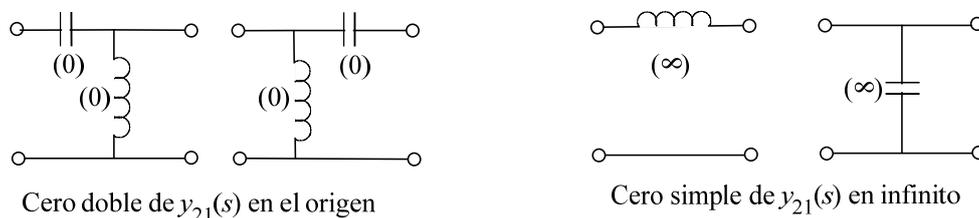
$$\left. \begin{aligned} 2a_2 - a_1 &= 1 \\ 2a_0 + a_2 - 2a_1 &= 0 \\ a_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad a_0 = 0; \quad a_1 = \frac{1}{3}; \quad a_2 = \frac{2}{3}$$

Quedando ahora determinada:

$$Y(s) = \frac{2s^2 + s}{3s^3 + 6s^2 + 6s + 3}$$

Se observa que, para desarrollar  $Y(s)$ , la función de pérdidas tiene 4 polos en el origen y dos en el infinito (que son ceros de transmisión), a los que contribuyen tanto los ceros de  $y_{21}$  como los polos particulares de  $y_{22}$  (que también son puntos de atenuación infinita), pero no los polos particulares de  $y_{11}$ , ya que la red está alimentada por un generador ideal de tensión.

Debido a que en el caso bajo estudio existen puntos de atenuación infinita en el origen y en infinito, pueden hallarse varias realizaciones, que serán las posibles combinaciones de las celdas que se indican en **Fig. 6.4.**



**Fig. 6.4.** Celdas elementales correspondientes a los ceros de transmisión que se deben implementar.

Considerando las posibles combinaciones, y teniendo en cuenta que la red “debe empezar en serie” por estar excitada por un generador ideal de tensión, se llega a las dos únicas soluciones posibles, que son:

a) Extracción de un polo en el infinito, y luego dos polos en el origen:

$$Y(s) = \frac{2s^2 + s}{3s^3 + 6s^2 + 6s + 3}$$

Para remover en primer lugar un polo en infinito (3ª Forma Canónica), se debe empezar la síntesis invirtiendo  $Y(s)$ , es decir empezando como  $Z(s)$ :

$$Z(s) = \frac{1}{Y(s)} = \frac{3s^3 + 6s^2 + 6s + 3}{2s^2 + s} = Z_1(s) + k_{\infty 1}s \quad k_{\infty 1} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Z(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3s^3 + 6s^2 + 6s + 3}{s(2s^2 + s)} = \frac{3}{2}$$

$$Z_1(s) = Z(s) - k_{\infty 1}s = \frac{3s^3 + 6s^2 + 6s + 3}{2s^2 + s} - \frac{3}{2}s = \frac{\frac{9}{2}s^2 + 6s + 3}{2s^2 + s}$$

Esta remoción se realiza circuitalmente con un inductor en serie de valor  $3/2$ .

Para proseguir efectuando dos remociones en el origen (4ª Forma Canónica), se proseguir con  $Z_1(s)$  que ya tiene un polo en el origen:

$$Z_1(s) = Z_2(s) + \frac{k_{01}}{s} \quad k_{01} = \lim_{s \rightarrow 0} sZ_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\frac{9}{2}s^2 + 6s + 3}{s(2s + 1)} = 3$$

$$Z_2(s) = Z_1(s) - \frac{k_{01}}{s} = \frac{\frac{9}{2}s^2 + 6s + 3}{2s^2 + s} - \frac{3}{s} = \frac{\frac{9}{2}s^2 + 6s + 3 - 6s - 3}{2s^2 + s} = \frac{\frac{9}{2}s}{2s + 1}$$

Esta remoción se realiza circuitalmente con un capacitor en serie de valor  $1/3$ .

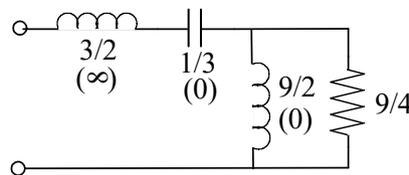
Ahora, la segunda remoción en el origen se debe efectuar como admitancia:

$$Y_2(s) = \frac{1}{Z_2(s)} = Y_3(s) + \frac{k_{02}}{s} \quad k_{02} = \lim_{s \rightarrow 0} sY_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{2s + 1}{\frac{9}{2}s} = \frac{2}{9}$$

$$Y_3(s) = Y_2(s) - \frac{k_{02}}{s} = \frac{2s + 1}{\frac{9}{2}s} - \frac{\frac{2}{9}}{s} = \frac{2s + 1 - 1}{\frac{9}{2}s} = \frac{2s}{\frac{9}{2}s} = \frac{4}{9}$$

Esta remoción se realiza circuitalmente con un inductor en derivación de valor  $9/2$  y da por resultado un elemento simple de admitancia  $4/9$  (es decir corresponde a un resistor en derivación de valor  $9/4$ ).

La red resultante corresponde a la **Fig. 6.5**, con la realización de uno de los ceros de transmisión en el origen como polo particular de  $y_{22}$ .



**Fig. 6.5.** Resultado de la síntesis realizando un polo en infinito y luego dos polos en el origen.

b) Extracción de dos polos en el origen, y luego de un polo en el infinito:

Esta segunda alternativa se desarrollará aplicando el procedimiento de división continua.

Para efectuar en primer lugar las dos remociones de polos en el origen (4ª Forma Canónica), se efectúa el cambio de variables  $s \rightarrow 1/s$ , dividiendo numerador y denominador de  $Y(s)$  por la máxima potencia de  $s$ :

$$Y(s) = \frac{2s^2 + s}{3s^3 + 6s^2 + 6s + 3} = \frac{2\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}}{3 + 6\frac{1}{s} + 6\frac{1}{s^2} + 3\frac{1}{s^3}}$$

$$\begin{array}{l|l} 3\frac{1}{s^3} + 6\frac{1}{s^2} + 6\frac{1}{s} + 3 & \frac{1}{s^2} + 2\frac{1}{s} \\ -3\frac{1}{s^3} - 6\frac{1}{s^2} & 3\frac{1}{s} \leftarrow \end{array} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{3\frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{1}{6}s + Y_1(s)}} = \frac{1}{3\frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{1}{6}s + \frac{3}{6\frac{1}{s} + 3}}}$$

$$\begin{array}{l|l} \frac{1}{s^2} + 2\frac{1}{s} & 6\frac{1}{s} + 3 \\ -\frac{1}{s^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{s} & \frac{1}{6}\frac{1}{s} \leftarrow \end{array}$$

$$\frac{3}{2}\frac{1}{s} \left| \right.$$

Para proseguir efectuando una remoción el infinito, se vuelve a cambiar a la variable  $s$  y se remueve el polo en infinito de  $Z_1(s)=1/Y_1(s)$ .

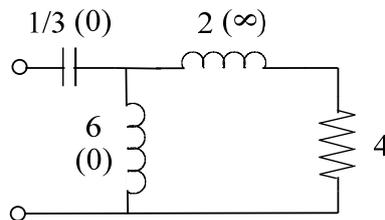
$$Y_1(s) = \frac{\frac{3}{2}\frac{1}{s}}{6\frac{1}{s} + 3} = \frac{\frac{3}{2}}{6 + 3s}$$

$$\begin{array}{l|l} 3s + 6 & \frac{3}{2} \\ -3s & 2s \leftarrow \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l|l} \frac{3}{2} & \frac{6}{4} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \leftarrow \\ \hline 0 & \end{array}$$

Por lo tanto:

$$Y(s) = \frac{1}{3\frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{1}{6}s + Y_1(s)}} = \frac{1}{3s + \frac{1}{\frac{1}{6s} + \frac{1}{2s + \frac{1}{4}}}}$$

Que corresponde a la red de la **Fig. 6.6**.



**Fig. 6.6.** Resultado de la síntesis realizando dos polos en el origen y luego un polo en infinito.

Ambas realizaciones deben terminar en la resistencia normalizada de 1 ohm. Esto indica la necesidad de un transformador, cuya acción es equivalente al ajuste de una constante multiplicativa en  $y_{21}(s)$ . Resulta más práctico cambiar la escala de admitancias, multiplicando las  $L$  y  $R$  y dividiendo las  $C$ , lo que equivale a dividir  $P_{20}/P_2$  por la misma constante, lo que luego puede compensarse en otra parte del sistema.

### 6.3. Diseño de cuadripolos cargados alimentados por un generador real

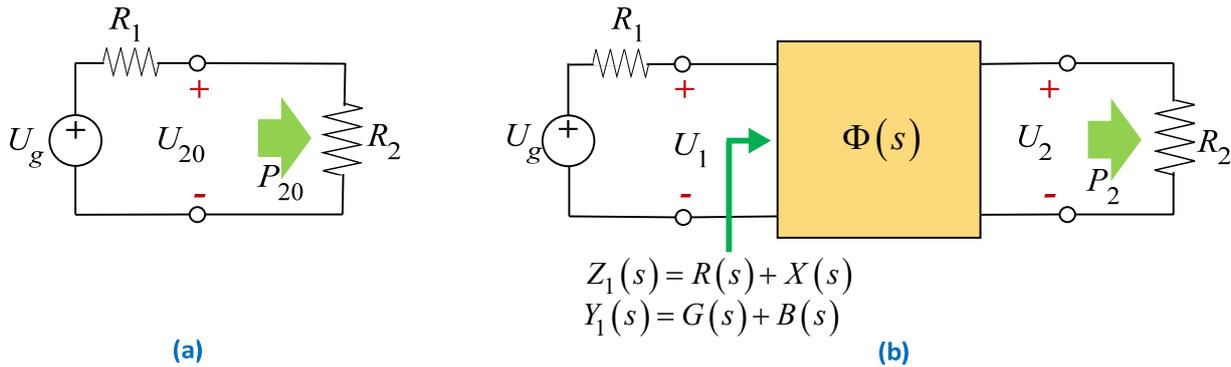
Se considera como referencia la situación descrita por la **Fig. 6.7a** en la cual un generador de tensión real de resistencia interna  $R_1$  tiene conectada directamente en sus terminales una resistencia de carga  $R_2$ . Para

esta situación, la tensión sobre  $R_2$  es  $U_{20}$  y la potencia suministrada a  $R_2$  para sostener dicha tensión es  $P_{20}$ , que está dada por:

$$P_{20} = \frac{|U_g|^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2}$$

Las magnitudes de  $U_{20}$  y de  $P_{20}$  son independientes de la frecuencia.

Pero en innumerables aplicaciones se requiere que la potencia suministrada a la carga sí tenga una cierta dependencia de la frecuencia que forma parte de la especificación de cada aplicación. Para lograrlo, entre el generador y la carga se inserta un cuadripolo recíproco y sin pérdidas, como se muestra en la **Fig. 6.7b**, con el cual se le confiere a la potencia suministrada a  $R_2$  a través del cuadripolo la característica en frecuencia deseada. Dicho cuadripolo se denomina *filtro*.



**Fig. 6.7.** Síntesis de cuadripolos cargados excitados con un generador real: **(a)** circuito sin el cuadripolo; **(b)** inserción del cuadripolo entre el generador y la carga.

Una red recíproca sin pérdidas se puede realizar utilizando solo elementos de circuito pasivos y sin pérdidas, por ejemplo, inductores, capacitores, transformadores y líneas de transmisión sin pérdidas. Aunque se pueden usar otros elementos de circuito, estos filtros a menudo se denominan *filtros LC*.

Sea el filtro de la **Fig. 6.7b** caracterizado por una función en  $\omega$  que describe la *pérdida de inserción* ya definida en el Capítulo 3, que en este caso resulta:

$$PI(\omega) = \frac{P_{20}}{P_2(\omega)}$$

cuya inversa es la función *ganancia de inserción* que normalmente se la define en  $s$  como:

$$\Phi(s) = \left[ \frac{P_2(\omega)}{P_{20}} \right]_{\omega=s/j}$$

siendo  $P_{20}$  la potencia que se suministraría a la carga sin la presencia del cuadripolo (**Fig. 6.7a**), y  $P_2(s)$  la potencia suministrada a través del cuadripolo (**Fig. 6.7b**).

Según lo ya visto en el apartado 3.5.1 para cualquier  $Z_1(s)$  distinta de la  $R_1$ , la potencia  $P_2(s)$  que arriba a la carga es menor que  $P_{m\acute{a}x}$  porque una parte se “refleja” ( $P_{ref}$ ) volviendo al generador, resultando:

$$P_2(s) = P_{m\acute{a}x} - P_{ref}(s)$$

Expresión que puesta en forma *normalizada* resulta:

$$\frac{P_2(s)}{P_{m\acute{a}x}} + \frac{P_{ref}(s)}{P_{m\acute{a}x}} = 1$$

E introduciendo el factor denominado *coeficiente de reflexión*, ya definido en definido en el apartado 3.5.2 se obtiene:

$$|\rho_1(s)|^2 = \frac{P_{ref}(s)}{P_{m\acute{a}x}} = 1 - \frac{P_2(s)}{P_{m\acute{a}x}} = 1 - \frac{P_{20}}{P_{m\acute{a}x}} \frac{P_2(s)}{P_{20}} = 1 - t \frac{P_2(s)}{P_{20}} \tag{6-1}$$

Es decir:

$$|\rho_1(s)|^2 = 1 - t \Phi(s) \tag{6-2}$$

siendo la inversa de la función pérdidas de inserción, la denominada *ganancia de inserción*  $\Phi(s)$ :

$$\Phi(s) = \frac{P_2(s)}{P_{20}}(\omega) \Big|_{\omega=s/j} \quad (6-3)$$

y  $t$  es un parámetro que no depende del cuadripolo ni de la variable compleja  $s$ :

$$t = \frac{P_{20}}{P_{m\acute{a}x}} = \frac{\frac{|U_g|^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2}}{\frac{|U_g|^2}{4R_1}} = \frac{4R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \quad (6-4)$$

un nuevo parámetro que no depende del cuadripolo ni de la variable compleja  $s$ .

La expresión (6-2) es clave para definir un procedimiento de diseño del filtro, dado que permite obtener una función en  $s$  para definir a  $|\rho_1(s)|^2$  a partir de la especificación de la pérdida de inserción. La función  $|\rho_1(s)|^2$  permitirá determinar las raíces  $\rho_{1a}(s)$  y  $\rho_{1b}(s)$ , con las cuales, aplicando la expresión (3-40) se pueden determinar las expresiones para  $Z_{1a}(s)$  y  $Z_{1b}(s)$  como así también de sus inversas  $Y_{1a}(s)$  e  $Y_{1b}(s)$  de entrada al cuadripolo cargado con  $R_2$ :

$$Z_{1a,b}(s) = R_1 \frac{1 \pm \rho_{1a,b}(s)}{1 \mp \rho_{1a,b}(s)} = R_1 \left( \frac{1 + \rho_{1a,b}(s)}{1 - \rho_{1a,b}(s)} \right)^{\pm 1}$$

$$Y_{1a,b}(s) = G_1 \frac{1 \mp \rho_{1a,b}(s)}{1 \pm \rho_{1a,b}(s)} = G_1 \left( \frac{1 - \rho_{1a,b}(s)}{1 + \rho_{1a,b}(s)} \right)^{\pm 1}$$

Si estas expresiones se normalizan con respecto a  $R_1$  y a  $G_1$  respectivamente, resulta:

$$Z_{1a,b}(s) = \left( \frac{1 + \rho_{1a,b}(s)}{1 - \rho_{1a,b}(s)} \right)^{\pm 1} \quad (6-5)$$

$$Y_{1a,b}(s) = \left( \frac{1 - \rho_{1a,b}(s)}{1 + \rho_{1a,b}(s)} \right)^{\pm 1} \quad (6-6)$$

Ahora es importante definir el signo del exponente en las expresiones (6-5) y (6-6). El signo + ó - del exponente se definirá atendiendo a los ceros de transmisión del cuadripolo *cargado* (es decir, los ceros de  $y_{12}(s)$  y polos particulares de  $y_{11}(s)$  y de  $y_{22}(s)$ ), que son la mitad de los polos de la función pérdidas de inserción. Entonces, a la inmitancia de entrada  $Z_1(s)$  o  $Y_1(s)$  del cuadripolo que se pretende sintetizar se le deben efectuar remociones de polos en la mitad de los polos de la función pérdidas de inserción. De este modo, el signo del exponente en las expresiones (6-5) y (6-6) debe ser tal que  $Z_1(s)$  o  $Y_1(s)$  tenga un polo ubicado en uno de los ceros de transmisión para poder iniciar la secuencia de remociones.

### 6.3.1. Análisis de realizabilidad

Normalmente se especifica la función *pérdidas de inserción*:

$$PI(\omega) = \frac{P_{20}}{P_2(\omega)}$$

Por ser el cuadripolo *no disipativo*, resulta:

$$P_1(\omega) = P_2(\omega) = |U_1^2| G(\omega)$$

y la potencia desarrollada sobre  $R_2$  sin el cuadripolo insertado en el circuito:

$$P_{20} = |U_1^2| G_2$$

Es decir:

$$\frac{P_{20}}{P_2(\omega)} = \frac{G_2}{G(\omega)}$$

En consecuencia la función pérdidas de inserción debe cumplir con los requisitos de una función conductancia  $G(\omega)$ , parte real de una función admitancia  $Y$ , debiendo obedecer a las siguientes condiciones:

- (a) ser una función racional par en  $\omega$ , con coeficientes reales y positivos.
- (b) ser  $0 \leq P_{20}/P_2(\omega) < \infty$  para todas las frecuencias. Pero la expresión (6-2) impone una exigencia mayor dado que tiene que ser  $0 \leq |\rho_1(s)|^2 \leq 1$ , y en consecuencia  $t \leq P_{20}/P_2(\omega) < \infty$  para todas las frecuencias.
- (c) Además  $P_{20}/P_2(s)$  no puede tener ceros imaginarios puros, y todos los ceros deben tener una disposición simétrica respecto del origen.

### 6.3.2. Procedimiento de síntesis

- 1) Verificar si  $P_{20}/P_2(\omega)$  cumple los requisitos de realizabilidad.
- 2) Si  $P_{20}/P_2$  es realizable, se calcula  $t$  mediante (6-4).
- 3) Se calcula  $|\rho_1(s)|^2$  mediante (6-2) y se determinan sus singularidades.
- 4) Se obtiene  $\rho_1(s)$  considerando los polos ubicados en el SPI (la mitad de polos de  $|\rho_1(s)|^2$ ). Puede haber dos soluciones posibles:  $\rho_{1a}(s)$  con los *ceros* en el SPI y  $\rho_{1b}(s)$  con los *ceros* en el SPD.
- 5) Se calcula la impedancia y admitancia de entrada mediante las expresiones (6-5) y (6-6).
- 6) Se sintetizan  $Z(s)$  ó  $Y(s)$  de modo de realizar la mitad de los polos de la función pérdidas de inserción que se encuentran en el SPI (o sea los puntos de pérdidas infinitas -  $P_2=0$ ). Se empleará alguna de las formas canónicas, según la ubicación de los polos sobre el eje imaginario.

#### Ejemplo 6.2.

Sintetizar un circuito no disipativo excitado con un generador de tensión de resistencia  $R_1=1 \Omega$  y cargado con una resistencia  $R_2=R_1=1$ . La función pérdidas de inserción requerida es la siguiente:

$$\frac{P_{20}}{P_2} = 1 + \omega^4 + \omega^6$$

#### Resolución

La función dada cumple la primera condición de realizabilidad al ser una función par en  $\omega$  con coeficientes reales positivos. Por otra parte, el parámetro  $t$  resulta:

$$t = \frac{P_{20}}{P_{m\acute{a}x}} = \frac{4R_1R_2}{(R_1 + R_2)^2} = 1$$

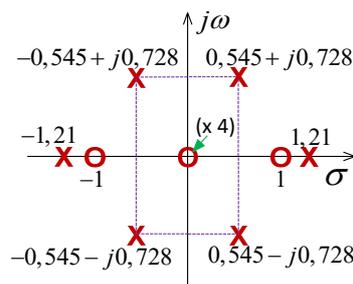
Con lo cual también se cumple la segunda condición de realizabilidad:

$$t \leq \frac{P_{20}}{P_2} \leq \infty \quad \Rightarrow \quad 1 \leq \frac{P_{20}}{P_2} \leq \infty$$

Ahora se puede calcular el coeficiente de reflexión:

$$|\rho_1(s)|^2 = 1 - t \left( \frac{P_2}{P_{20}} \right)_{\omega=s/j} = 1 - \frac{1}{1 + s^4 - s^6} = \frac{s^4(1 - s^2)}{1 + s^4 - s^6}$$

En la **Fig. 6.8** se muestra el diagrama de polos y ceros del cuadrado del coeficiente de reflexión, destacándose el cumplimiento de la tercera condición de realizabilidad.



**Fig. 6.8.** Diagrama de polos y ceros del cuadrado del coeficiente de reflexión.

Para hallar  $\rho_1(s)$ , se tomarán los tres polos del semiplano izquierdo (ceros de  $P_{20}/P_2$ ). En cuanto a los ceros, se tomarán dos en el origen, más otro en  $s = -1$  ó en  $s = 1$ , dando lugar a dos posibles soluciones:

$$\rho_{1a}(s) = \pm \frac{s^2(s+1)}{s^3 + 2,3s^2 + 2,15s + 1} \quad \rho_{1b}(s) = \pm \frac{s^2(s-1)}{s^3 + 2,3s^2 + 2,15s + 1}$$

Calculamos ahora la impedancia o admitancia de entrada, a partir de la expresión:

$$Z(s) = \left( \frac{1 + \rho_1(s)}{1 - \rho_1(s)} \right)^{\pm 1} \quad \text{o} \quad Y(s) = \left( \frac{1 - \rho_1(s)}{1 + \rho_1(s)} \right)^{\pm 1}$$

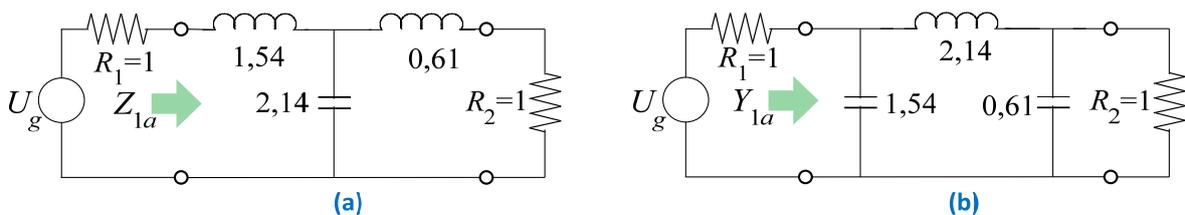
Dando, para ambas posibles soluciones, las siguientes expresiones:

$$Z_{1a}(s) = Y_{1a}(s) = \left( \frac{2s^3 + 3,3s^2 + 2,15s + 1}{1,30s^2 + 2,15s + 1} \right)^{\pm 1} \quad Z_{1b}(s) = Y_{1b}(s) = \left( \frac{2s^3 + 1,3s^2 + 2,15s + 1}{3,30s^2 + 2,15s + 1} \right)^{\pm 1}$$

Teniendo en cuenta que todos los polos de  $P_{20}/P_2$  están en el infinito, se desarrolla  $Z(s)$  o  $Y(s)$  en la tercera forma canónica:

$$Z_{1a}(s) = Y_{1a}(s) = \frac{2s^3 + 3,3s^2 + 2,15s + 1}{1,30s^2 + 2,15s + 1} = 1,54s + \frac{1}{2,14s + \frac{1}{0,61s + 1}}$$

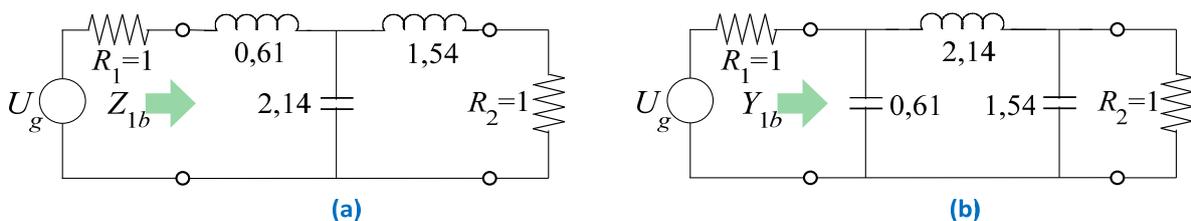
Resultando las redes mostradas en la **Fig. 6.9**.



**Fig. 6.9.** Síntesis de la inmitancia obtenida con  $\rho_{1a}(s)$ : (a) síntesis como impedancia  $Z_{1a}(s)$ ; (b) síntesis como admitancia  $Y_{1a}(s)$ .

$$Z_{1b}(s) = Y_{1b}(s) = \frac{2s^3 + 1,3s^2 + 2,15s + 1}{3,30s^2 + 2,15s + 1} = 0,61s + \frac{1}{2,14s + \frac{1}{1,54s + 1}}$$

Resultando las redes mostradas en la **Fig. 6.10**.



**Fig. 6.10.** Síntesis de la inmitancia obtenida con  $\rho_{1b}(s)$ : (a) síntesis como impedancia  $Z_{1b}(s)$ ; (b) síntesis como admitancia  $Y_{1b}(s)$ .

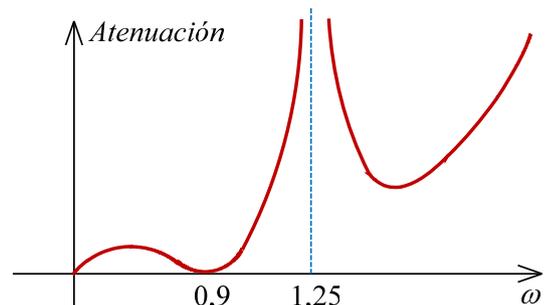
Se observa que existe inversión geométrica entre las dos realizaciones como  $Z(s)$  y las dos realizaciones como  $Y(s)$ , como consecuencia de que  $R_1=R_2$ .

**Ejemplo 6.3.**

Sintetizar un filtro pasa bajos con una característica de atenuación como se indica en **Fig. 6.11**, en la cual los puntos de atenuación infinita se encuentran en  $\omega=1,25$  y en infinito; y los de atenuación nula en el origen y en  $\omega=0,9$ .

**Resolución**

Para realizar la síntesis, se debe determinar la función pérdidas de inserción  $PI(s)$  y para ello se deben tener en cuenta los siguientes aspectos fundamentales:



**Fig. 6.11.** Característica de atenuación requerida.

- La pérdida de inserción está definida por (3-42) como  $PI(s)=P_{20}/P_2$  es una función en  $s$  y es una relación de *potencias* con simetría cuadrantal. Esto último significa que  $PI(s)$  puede expresarse como el producto de una cierta  $F(s)$  por  $F(-s)$ , siendo  $F(s)$  una función con todos los polos y ceros en el semiplano izquierdo.
- La atenuación  $A(\omega)$  en dB es la función de la pulsación angular  $\omega$  que está definida como relación de *tensiones* o de *corrientes* (magnitud de entrada sobre magnitud de salida en este caso  $U_{20}/U_2$ ) para los valores reales positivos de  $\omega$ .

Teniendo en cuenta ambas premisas se puede deducir que los polos de atenuación, es decir los valores de  $\omega$  para los que  $A(\omega)=\infty$ , corresponden a la situación en que  $P_2(\omega)=0$ ;  $P_{20}(\omega)\neq 0$ , con lo cual si  $A(\omega_i)=\infty$  entonces  $PI(\pm j\omega_i)=\infty$ .

Por otra parte siendo los ceros de atenuación los valores de  $\omega$  para los cuales  $A(\omega)=0$  dB, corresponden a la situación en que  $P_2(\omega)=P_{20}(\omega)$ , es decir  $PI(s)=1$ , con lo cual si  $A(\omega_i)=0$  entonces  $PI(\pm j\omega_i)\neq 0$ . Esto es muy importante, dado que la tercera condición de realizabilidad de la función *pérdidas de inserción* es que los ceros no pueden ser imaginarios puros, es decir, no deben ubicarse sobre el eje  $j\omega$ .

Por lo tanto, con base en estas premisas y teniendo en cuenta que  $A(\omega)$  es una relación de tensiones (aunque expresada en dB) y que  $PI(s)$  es una relación de potencias, la expresión de la función de *pérdidas de inserción* en  $\omega$  tendrá la siguiente forma:

$$PI(s) = 1 \pm \frac{s^2 [(s + j0,9)(s - j0,9)]^2}{[(s + j1,25)(s - j1,25)]^2} = 1 \pm \frac{s^2 (s^2 + 0,81)^2}{(s^2 + 1,56)^2}$$

Donde queda por develar en el signo  $\pm$  cuál es el que corresponde considerar. Para ello hay que tener en cuenta que los ceros de  $PI(s)$  no deben ubicarse sobre el eje  $j\omega$ . Así, considerando el signo positivo, los ceros de  $PI(s)$  resultan:  $s = \pm j1,08$  y  $s = \pm 0,6 \pm j1,04$ .

Mientras que considerando el signo negativo los ceros de  $PI(s)$  resultan:  $s = \pm 1,3$  y  $s = \pm 0,15 \pm j1,085$ .

Por lo tanto, la expresión de la función de *pérdidas de inserción* en  $s$  que debe adoptarse es la siguiente:

$$PI(s) = 1 - \frac{s^2 (s^2 + 0,81)^2}{(s^2 + 1,56)^2} = \frac{(s^2 + 1,56)^2 - s^2 (s^2 + 0,81)^2}{(s^2 + 1,56)^2} = \frac{-s^6 - 0,62s^4 + 2,47s^2 + 2,44}{(s^2 + 1,56)^2}$$

que cumple con todas las condiciones de realizabilidad.

Sea además  $R_2=R_1=1$ , en cuyo caso resulta:

$$t = \frac{P_{20}}{P_{m\acute{a}x}} = \frac{4R_1R_2}{(R_1 + R_2)^2} = 1$$

Ahora se puede calcular el coeficiente de reflexión  $\rho_1(s)$ :

$$|\rho_1(s)|^2 = 1 - t \left( \frac{1}{PI(s)} \right) = 1 - \frac{(s^2 + 1,56)^2}{-s^6 - 0,62s^4 + 2,47s^2 + 2,44} = \frac{-s^2 (s^2 + 0,81)^2}{-s^6 - 0,62s^4 + 2,47s^2 + 2,44}$$

Las raíces del numerador son todas raíces dobles y las raíces del denominador tiene están en  $s = \pm 1,3$  y  $s = \pm 0,15 \pm j1,085$ .

La expresión de  $\rho_1(s)$  se obtiene con la mitad de los ceros (tomando la mitad de los que se encuentran en el origen y los del semiplano izquierdo) y la mitad de los polos (los del semiplano izquierdo):

$$\rho_1(s) = \pm \frac{s (s^2 + 0,81)}{(s + 1,3)(s + 0,15 - j1,085)(s + 0,15 + j1,085)} = \pm \frac{s (s^2 + 0,81)}{s^3 + 1,6s^2 + 1,59s + 1,56}$$

Se determina ahora la impedancia o admitancia de entrada, a partir de la expresión (6-5), resultando la siguiente expresión para la impedancia de entrada y para la admitancia de entrada, ambas normalizadas respecto de  $R_1$ :

$$Z(s) = Y(s) = \left[ \frac{(s^3 + 1,6s^2 + 1,59s + 1,56) - (s^3 + 0,81s)}{(s^3 + 1,6s^2 + 1,59s + 1,56) + (s^3 + 0,81s)} \right]^{\pm 1} = \left( \frac{1,6s^2 + 0,78s + 1,56}{2s^3 + 1,6s^2 + 2,4s + 1,56} \right)^{\pm 1}$$

Se debe sintetizar la red como impedancia o como admitancia, realizando los ceros de transmisión impuestos en este caso por la función atenuación dada: los ceros de transmisión son los polos de la atenuación (mitad de los polos - los del semiplano izquierdo - de la función pérdidas de inserción).

Por lo tanto, se debe sintetizar la red a partir de las expresiones de  $Z(s)$  o  $Y(s)$  anteriores, realizando una remoción en  $s=\pm j1,25$  y otra en infinito.

Procediendo para la síntesis de la red como impedancia, considerando para el exponente el valor (-1) si se remueve parcialmente el polo en infinito de manera que:

$$Z(s) = Z_1(s) + k'_\infty s \quad Z_1(\pm j1,25) = 0$$

Resulta

$$k'_\infty = \frac{Z(s)}{s} \Big|_{s=\pm j1,25} = \frac{\pm j0,963}{\pm j1,25} = 0,77$$


$$Z_1(s) = Z(s) - k'_\infty s = \frac{2s^3 + 1,6s^2 + 2,4s + 1,56}{1,6s^2 + 0,78s + 1,56} - 0,77s = \frac{2s^3 + 1,6s^2 + 2,4s + 1,56 - 1,23s^3 - 0,6s^2 - 1,2s}{1,6s^2 + 0,78s + 1,56}$$

$$Z_1(s) = \frac{0,77s^3 + s^2 + 1,2s + 1,56}{1,6s^2 + 0,78s + 1,56} = \frac{(s+1,3)(s^2+1,25^2)}{1,6s^2 + 0,78s + 1,56}$$

Que como cabía esperar, tiene un cero en  $s=\pm j1,25$ . Entonces su inversa tendrá un polo en  $s=\pm j1,25$  que al ser removido totalmente sintetizará el cero de transmisión deseado:

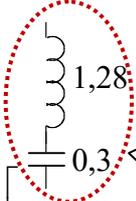
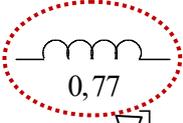
$$Y_1(s) = \frac{1}{Z_1(s)} = \frac{1,6s^2 + 0,78s + 1,56}{(s+1,3)(s^2+1,25^2)} = \frac{k_{R1}}{s+1,3} + \frac{2k_{F1}s}{s^2+1,25^2} = \frac{(k_{R1} + 2k_{F1})s^2 + 2,6k_{F1}s + k_{R1}1,56}{(s+1,3)(s^2+1,25^2)}$$

Resultando:

$$2,6k_{F1} = 0,78 \Rightarrow k_{F1} = 0,3$$

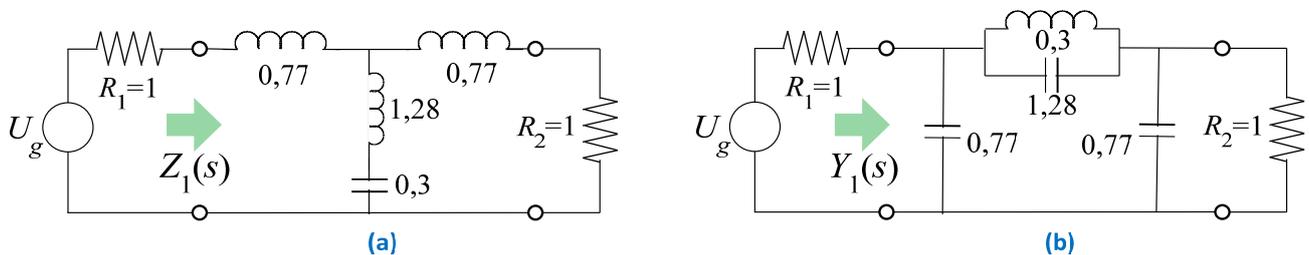
$$k_{R1}1,56 = 1,56 \Rightarrow k_{R1} = 1$$

Por lo tanto:

$$Y_1(s) = \frac{0,6s}{s^2+1,25^2} + \frac{1}{s+1,3} = \frac{1}{1,67s + \frac{1}{0,385s}} + \frac{1}{1,3} \frac{1}{0,77s+1} = \frac{1}{1,3} \left[ \frac{1}{1,28s + \frac{1}{0,3s}} + \frac{1}{0,77s+1} \right]$$



Debido a la presencia de polos de  $Z(s)$  e  $Y(s)$  en el infinito de peso suficiente, todas las inductancias de  $Z(s)$  y capacidades de  $Y(s)$  resultan positivas y por lo tanto realizables.

Las redes resultantes se muestran en **Fig. 6.12**, comprobándose que ambas redes son simétricas y que una es la inversa de la otra



**Fig. 6.12.** Síntesis de la inmitancia obtenida con  $\rho_1(s)$ : (a) síntesis como impedancia  $Z_1(s)$ ; (b) síntesis como admitancia  $Y_1(s)$ .

En la **Fig. 6.13** se muestra el resultado de la simulación de los circuitos sintetizados.

A los efectos de una comparación con la especificación (**Fig. 6.11**) debe tenerse en cuenta por un lado, que entre ambos ejes de abscisas existe un factor de  $2\pi$ , y por otro lado, que para los dos circuitos de la **Fig. 6.12**, los ceros de atenuación del cuadripolo LC corresponden a:

$$\frac{U_2}{U_g} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{2}$$

Es decir -6 dB, lo que expresado como atenuación es +6dB.

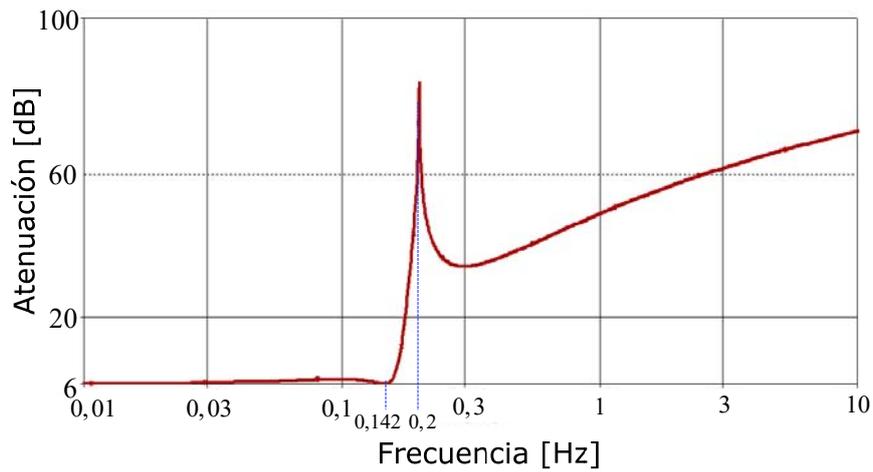


Fig. 6.13. Característica de atenuación sintetizada.

#### 6.4. Bibliografía

- [1] W. Warzanskyj Poliscuk. *Métodos de Síntesis de Redes Lineales*. Capítulo X: “Teoría de Darlington”. Universidad Politécnica de Madrid. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicaciones. 1977. ISBN 978-84-740-2054-9.
- [2] Wai-Kai Chen. *Passive, Active and Digital Filters (3<sup>rd</sup>. Ed)*. Chapter 9. “Design of Resistively Terminated Networks”. CRC Press. Boca Raton. FL. 2009. ISBN 978-1-4200-5885-7.

---

# Capítulo 7

## Filtros. Normalizaciones y Aproximaciones.

---

### 7.1. Introducción

Los filtros son cuadripolos particulares, cuyo objetivo es transmitir con la mínima distorsión posible, las señales comprendidas dentro de determinadas bandas de frecuencia, atenuando al mismo tiempo todas las demás frecuencias presentes en dicha señal que estén fuera de las bandas. Una clasificación muy general basada en las bandas de frecuencias que dejan pasar conduce a las denominaciones: pasa bajos, pasa altos, pasa banda, supresor de banda, etc.

Los filtros juegan un importante rol en la electrónica actual, en diversas áreas tales como comunicaciones, procesamiento de señales (p. ej., de audio, de video, etc), control automático, etc.

En principio, se pueden clasificar en las siguientes tipologías: *analógicos*, *digitales* e *híbridos* (o de capacitor conmutado, los cuales contienen elementos analógicos y digitales).

Además los filtros analógicos se pueden clasificar en *pasivos*, contruidos en base a resistencias, inductores y capacitores; y en *activos*, conformados por resistencias, capacitores y amplificadores operacionales.

Los filtros pasivos están compuestos básicamente por elementos no disipativos ( $L$  y  $C$ ) y el efecto de disipación por apartamiento de las características ideales de los componentes se toma en cuenta en la etapa de ajustes y correcciones finales.

En este capítulo se desarrollarán las bases para un método de diseño que consiste en aproximar la característica de amplitud de la función de transferencia del filtro que se desea, mediante funciones racionales que satisfagan las premisas del diseño.

### 7.2. Normalización de funciones de red

Cuando se trabaja con circuitos eléctricos es usual normalizar la frecuencia y el nivel de impedancia. La normalización no causa ninguna pérdida de generalidad y se efectúa únicamente para simplificar los valores numéricos evitando la tediosa manipulación de grandes potencias de 10, y minimizando el efecto de los errores de redondeo.

#### 7.2.1. Normalización y desnormalización del nivel de impedancia

Ya se ha trabajado con impedancias normalizadas, por ejemplo, en el método de pérdidas de inserción, al obtener las expresiones (6-5) y (6-6) se ha normalizado respecto de la resistencia del generador. En general, cuando se requiere cambiar el nivel de impedancias en un valor  $R_0$  se aplica la siguiente regla: “Para normalizar el nivel de impedancias a un valor  $R_0$ , se dividen todas las impedancias por  $R_0$ ”. O sea:

$$Z_N(s) = \frac{Z(s)}{R_0}$$

Por ejemplo, para elementos con valores  $R$ ,  $L$  y  $C$ , la normalización implica las siguientes operaciones:

$$\frac{1}{sC_N} = \left( \frac{1}{sC} \right) \frac{1}{R_0} \Rightarrow C_N = R_0 C$$

$$sL_N = (sL) \frac{1}{R_0} \Rightarrow L_N = \frac{L}{R_0}$$

$$R_N = (R) \frac{1}{R_0} \Rightarrow R_N = \frac{R}{R_0}$$

El proceso de desnormalización es el inverso. Si se pretende desnormalizar impedancias respecto de  $R_0$ :

$$Z(s) = R_0 Z_N(s)$$

Para elementos con valores  $R$ ,  $L$  y  $C$  deben efectuarse las siguientes operaciones:

$$\frac{1}{sC} = \left( \frac{1}{sC_N} \right) R_0 \Rightarrow C = \frac{C_N}{R_0}$$

$$sL = (sL_N) R_0 \Rightarrow L = L_N R_0$$

$$R = (R_N) R_0 \Rightarrow R = R_N R_0$$

### 7.2.2. Normalización y desnormalización de frecuencia

El segundo concepto es el de frecuencia normalizada. Para normalizar respecto de una pulsación angular  $\omega_0$ , se deben realizar las siguientes operaciones sobre los elementos  $R$ ,  $L$  y  $C$ , para conservar el mismo nivel de impedancias, teniendo en cuenta que  $\bar{s} = s/\omega_0$  es la frecuencia compleja normalizada:

$$\frac{1}{\bar{s}C_N} = \frac{1}{\frac{s}{\omega_0} (\omega_0 C)} \Rightarrow C_N = \omega_0 C$$

$$\bar{s}L_N = \frac{s}{\omega_0} (\omega_0 L) \Rightarrow L_N = \omega_0 L$$

$$R_N = R$$

El proceso inverso de desnormalización respecto de una pulsación angular  $\omega_0$ , es:

$$\frac{1}{sC} = \frac{1}{\bar{s} \cdot \omega_0 \frac{C_N}{\omega_0}} \Rightarrow C = \frac{C_N}{\omega_0}$$

$$sL = \bar{s} \cdot \omega_0 \frac{L_N}{\omega_0} \Rightarrow L = \frac{L_N}{\omega_0}$$

$$R = R_N$$

Por consiguiente, normalizar respecto de  $R_0$  y  $\omega_0$  involucra las siguientes operaciones:

$$\frac{1}{R_0} R + \frac{1}{R_0} \cdot (\omega_0 L) \cdot \frac{s}{\omega_0} + \frac{1}{R_0} \cdot \frac{1}{\frac{s}{\omega_0} (\omega_0 C)}$$

Y desnormalizar respecto de  $R_0$  y  $\omega_0$  involucra las siguientes operaciones:

$$R_0 R_N + R_0 \frac{L_N}{\omega_0} (\bar{s} \cdot \omega_0) + R_0 \frac{1}{\frac{C_N}{\omega_0} (\bar{s} \cdot \omega_0)}$$

### 7.3. Características de amplitud de un filtro pasa bajos ideal

La denominación *característica de amplitud* se refiere a alguna representación gráfica de  $|U_2/U_1|$  ó  $|U_1/U_2|$  en función de la pulsación angular  $\omega$  ó de la frecuencia  $f$ .

Si  $H(s)$  es la transferencia de tensión del circuito, es decir la relación de la tensión de salida a la tensión de entrada:

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \tag{7-1}$$

Cuando se evalúa sobre el eje  $j\omega$  resulta la denominada *amplitud de la respuesta en frecuencia*:

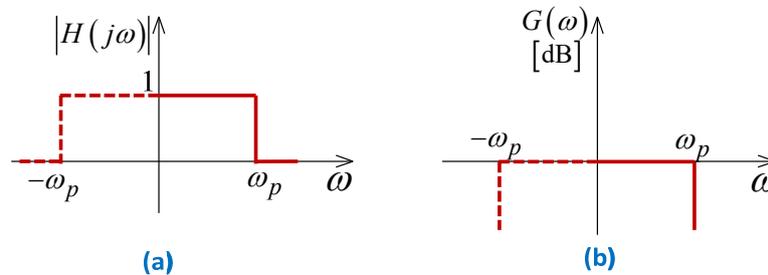
$$|H(j\omega)| = |H(s)|_{s=j\omega} \tag{7-2}$$

Para aquellas frecuencias o pulsaciones en que resultan valores mayores que 1, la tensión de salida es mayor que la tensión de entrada; es decir, la señal es *amplificada* por el circuito. Por ello  $|H(j\omega)|$  también recibe el nombre de *ganancia* y puede expresarse en *veces* o *por unidad* (p.u.) y en *decibeles* (dB).

En un filtro ideal *pasivo*, en la banda de paso la tensión de salida es igual a la tensión de entrada y en la banda de supresión la señal de salida es nula para cualquier valor en la entrada.

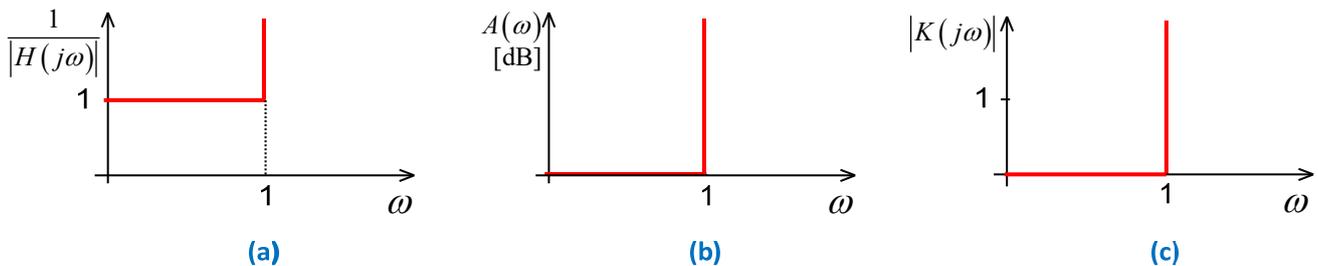
En la **Fig. 7.1** se muestra la función  $|H(j\omega)|$  de un filtro *pasa bajos* ideal cuya banda de paso se encuentra limitada a la pulsación  $\omega_p$ . La **Fig. 7.1a** corresponde a la representación en *veces* o *por unidad* (p.u.) y la **Fig. 7.1b** es la representación en dB, que también suele denominarse *ganancia*  $G(\omega)$ :

$$G(\omega) = |H(j\omega)|_{dB} = 20 \log |H(j\omega)| \text{ [dB]} \tag{7-3}$$



**Fig. 7.1.** Características de un filtro pasa bajos ideal: (a) función  $|H(j\omega)|$  en p.u.; (b) función ganancia en dB.

En la **Fig. 7.2** se representan otras funciones que se encuentran en la bibliografía que también caracterizan al filtro pasa bajos ideal. En este caso están *normalizadas* en frecuencia respecto de la pulsación  $\omega_p$  de la **Fig. 7.1**. y solo se representan para las frecuencias positivas.



**Fig. 7.2.** Características de un filtro pasa bajos ideal: (a)  $1/|H(j\omega)|$  en p.u.; (b) atenuación en dB; (c) función característica.

En la **Fig. 7.2a** se representa la inversa de la curva de la **Fig. 7.1a** que, tratándose de cuadripolos pasivos y por lo tanto recíprocos, corresponde a la relación de la tensión de entrada a la tensión de salida y por resultar mayor o igual que la unidad, expresa en *veces* o *por unidad* (p.u.) la atenuación que sufre la señal.

En la **Fig. 7.2b**, se representa la atenuación  $A(\omega)$  que siempre se expresa en dB y se define como:

$$A(\omega) = 20 \log \frac{1}{|H(j\omega)|} \text{ [dB]} \tag{7-4}$$

En la **Fig. 7.2c**, se representa la función  $|K(j\omega)|$ , que es la amplitud de la *función característica*  $K(s)|_{s=j\omega}$  definida de manera tal que:

$$[H(s)]^2 = \frac{1}{1 + [K(s)]^2} \tag{7-5}$$

Es decir para un filtro pasa bajos *ideal*, como  $1/|H(j\omega)|$  tiene valor unitario en la banda de paso e infinito en la banda de atenuación,  $|K(j\omega)|$  tiene valor nulo en la banda de paso e infinito en la banda de atenuación.

Entonces:

$$A(\omega) = 20 \log(1 + |K(j\omega)|) \quad [\text{dB}] \quad (7-6)$$

De manera que cuando  $H(j\omega)$  es cero (ceros de *transmisión*), tanto  $K(j\omega)$  como  $A(\omega)$  son infinito (polos de *atenuación*); y cuando  $K(j\omega)$  es cero  $A(\omega)$  también es cero (ceros de *atenuación*).

Por ello muchos autores consideran de mayor utilidad a la función característica, porque no sólo elimina la constante unitaria de la banda de paso y describe los ceros de transmisión, sino que además describe los ceros de atenuación.

Entonces el objetivo de los métodos de aproximación a la característica de la amplitud de la función de transferencia es aproximar a la función característica  $|K(j\omega)|$  de un filtro pasa bajos normalizado por medio de un polinomio en  $\omega$  de orden  $n$ . Es decir:

$$|K(j\omega)| = a_n \omega^n + a_{n-1} \omega^{n-1} + \dots + a_1 \omega + a_0 \quad (7-7)$$

Con lo cual, teniendo en cuenta (7-5),  $H(s)$  resulta de la forma:

$$H(s) = \frac{K}{c_n s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_1 s + c_0} \quad (7-8)$$

Las funciones de aproximación a la amplitud de la transferencia de un filtro pasa bajos que se verán aquí, se pueden aplicar al diseño de otro tipo de filtros, mediante las transformaciones de frecuencias que serán objeto de estudio en el siguiente capítulo.

#### 7.4. Especificación de Filtros Pasa Bajos Reales

La especificación de un filtro pasa bajos real contiene los requerimientos relevantes para el correcto desempeño, en términos de límites aceptables para los apartamientos respecto de la característica de amplitud del filtro pasa bajos ideal. Por lo general, la especificación indica la frecuencia límite de la banda de paso, límites para la ondulación aceptable dentro de la banda de paso y la atenuación requerida a una o más frecuencias en la banda de supresión.

Para un filtro pasa bajos *ideal*, la magnitud de la respuesta en frecuencia  $|H(j\omega)|$  es igual a uno en la banda de paso y cero en la banda de supresión (**Fig. 7.1a**); pero a simple vista se percibe que este filtro es *irrealizable* por dos razones: la primera es que la ganancia de los circuitos eléctricos no se puede mantener absolutamente constante en una banda de frecuencia; la segunda razón es que la ganancia es una función continua de  $\omega$  y no puede exhibir un salto desde 1 hasta 0 en la pulsación  $\omega_p$  como ocurre en la **Fig. 7.1a**.

Por tal irrealizabilidad, como recurso de diseño se debe emplear una *aproximación* a la magnitud de la respuesta en frecuencia ideal. Existen varias aproximaciones normalizadas que han sido optimizadas según diferentes criterios, es decir, para tener el mejor rendimiento posible desde un determinado punto de vista.

Una aproximación *aceptable* a la característica de amplitud de un filtro ideal debe tener una variación en la banda de paso suficientemente pequeña como para ser despreciable, y una atenuación en la banda de supresión que sea suficientemente grande. Si bien algunas aproximaciones, también pueden incluir requisitos sobre las características de retardo de fase y de grupo, las mismas se encuentran más allá del alcance pretendido en este curso.

En la mayoría de los filtros reales la ganancia en la banda de supresión es varios órdenes de magnitud inferior a la ganancia en la banda de paso. Por ello, la ganancia normalmente se expresa en decibeles (dB). Por ejemplo, la ganancia *mínima* admitida en la banda de paso de un filtro podría especificarse como 0,707 ó -3 dB, mientras que la ganancia *máxima* admitida en la banda de supresión podría especificarse como 0,0001 ó -80 dB. Como puede apreciarse, los valores en decibeles son más manejables cuando las ganancias son muy pequeñas.

Algunos diseñadores de filtros prefieren usar valores de atenuación en lugar de valores de ganancia. Como atenuación es la inversa de la ganancia, la atenuación expresada en decibeles es simplemente la ganancia en decibeles cambiada de signo.

En los capítulos que siguen, en las especificaciones de los filtros a diseñar se emplearán indistintamente valores de ganancia o de atenuación expresados en decibeles o en p.u. a fin de propiciar la habilidad para interpretar todas las variantes que se encuentran en la bibliografía.

7.4.1. Especificación de la respuesta en frecuencia en términos de ganancia

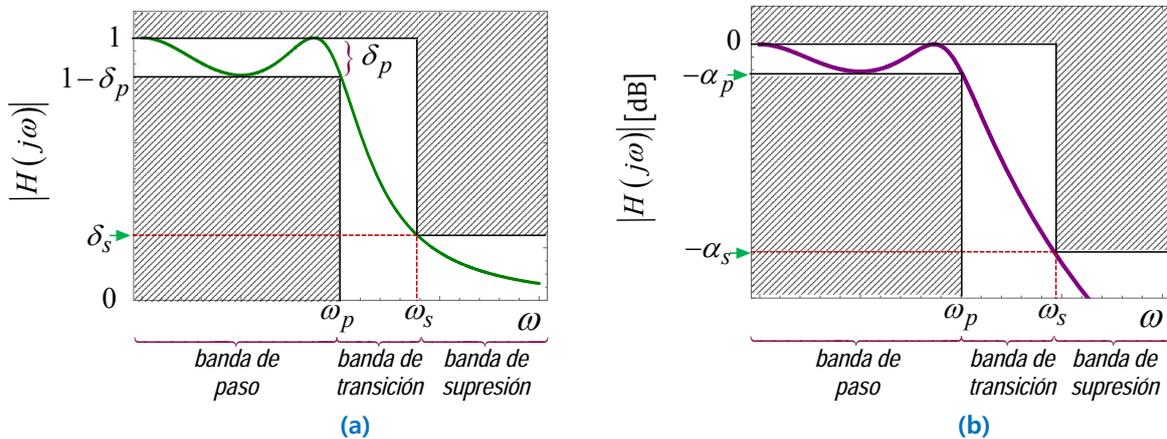
Cabe destacar que, desde el punto de vista del filtrado, solo interesa la ganancia *relativa* referida a la máxima ganancia en la banda de paso. Por ello, la amplitud de la respuesta en frecuencia *se normaliza* de manera tal que la ganancia máxima en la banda de paso sea 1 p.u., lo que corresponde a 0 dB. La ganancia realmente requerida en la banda de paso del filtro se ajusta en un paso posterior del diseño, por ejemplo, agregando una etapa de amplificación constante para todo el rango de frecuencias.

En la **Fig. 7.3** se muestra una especificación normalizada para la característica de amplitud de un filtro pasa bajos real en la cual el borde o límite de la banda de *paso* es la pulsación  $\omega_p$  y el límite de la la banda de *supresión* es la pulsación  $\omega_s$ . A veces, dependiendo del tipo de aproximación, la pulsación  $\omega_p$  se refiere como borde de la ondulación. El intervalo comprendido entre el borde de la banda de paso y el borde de la banda de supresión, es decir el intervalo  $\omega_s - \omega_p$ , es la denominada banda de *transición*.

La característica de amplitud requerida suele especificarse mediante *rangos de tolerancia* tanto para la banda de paso como para la banda de supresión, los cuales suelen ser diferentes. En la banda de transición solo se requiere que la característica de amplitud decaiga.

En la **Fig. 7.3a** se muestra la representación en veces o p.u. (por unidad) de  $|H(j\omega)|$  en la cual se indican los rangos de tolerancia  $\delta_p$  para la banda de paso y  $\delta_s$  para la banda de supresión.

En la **Fig. 7.3b** se muestra la representación en dB de  $|H(j\omega)|$  en la cual se indican los límites de tolerancia  $-\alpha_p$  para la banda de paso y  $-\alpha_s$  para la banda de supresión.



**Fig. 7.3.** Patrón de especificación de los rangos de tolerancia de un filtro pasa bajos: (a)  $|H(j\omega)|$  en p.u.; (b)  $|H(j\omega)|$  en dB.

La relación entre ambas especificaciones resulta:

$$\alpha_p = 20 \cdot \log(1) - 20 \cdot \log(1 - \delta_p) \Rightarrow 10^{-0,05 \cdot \alpha_p} = 1 - \delta_p$$

Despejando  $\delta_p$  en función de  $\alpha_p$  se obtiene:

$$\delta_p = 1 - 10^{-0,05 \cdot \alpha_p} \tag{7-9}$$

Por otra parte, en la banda de supresión, la magnitud de la respuesta en frecuencia se encuentra por debajo de  $\delta_s$ , entonces la excursión del rizado en dB coincidirá con la atenuación mínima en la banda de atenuación que está dada por  $\alpha_s = 20 \cdot \log(1) - 20 \cdot \log(\delta_s)$ , de donde resulta:

$$\delta_s = 10^{-0,05 \cdot \alpha_s} \tag{7-10}$$

De manera que la especificación del filtro pasa bajos que se desea sintetizar, se efectúa mediante pares de valores  $(\omega_p; \delta_p)$  y  $(\omega_s; \delta_s)$  si la característica considerada es  $|H(j\omega)|$  en p.u. , o bien  $(\omega_p; \alpha_p)$  y  $(\omega_s; \alpha_s)$  si la característica considerada es  $|H(j\omega)|$  en dB. Estos pares de valores definen las regiones sombreadas indicadas en la **Fig. 7.3**, las cuales se conocen como *patrón* o *plantilla de especificaciones* para la ganancia del filtro pasa bajos a sintetizar.

Los pares  $(\omega_p; \delta_p)$  y  $(\omega_p; \alpha_p)$  son una forma muy conveniente de indicar cuánto se le exige a la aproximación que se acerque a la característica del filtro ideal *en la banda de paso*. En efecto, esta forma de especificar el problema puede interpretarse razonando que la característica ideal para la **Fig. 7.3a** (**Fig. 7.3b**) es 1 p.u. (0 dB) hasta el límite  $\omega_p$  de la banda de paso, y se admite que la aproximación tenga un apartamiento máximo  $\delta_p$  ( $\alpha_p$ ) respecto de 1 (0 dB) en  $\omega_p$ .

Análogamente, los pares  $(\omega_s; \delta_s)$  y  $(\omega_s; \alpha_s)$  son una forma muy conveniente de indicar cuánto se le exige a la aproximación que se acerque a la característica del filtro ideal *en la banda de supresión*. En efecto, dado que la característica ideal para la **Fig. 7.3a** (**Fig. 7.3b**) para la pulsación  $\omega_s$  en la banda de supresión es cero (-infinito), se requiere que la aproximación sea por lo menos  $\delta_s$  ( $-\alpha_s$ ).

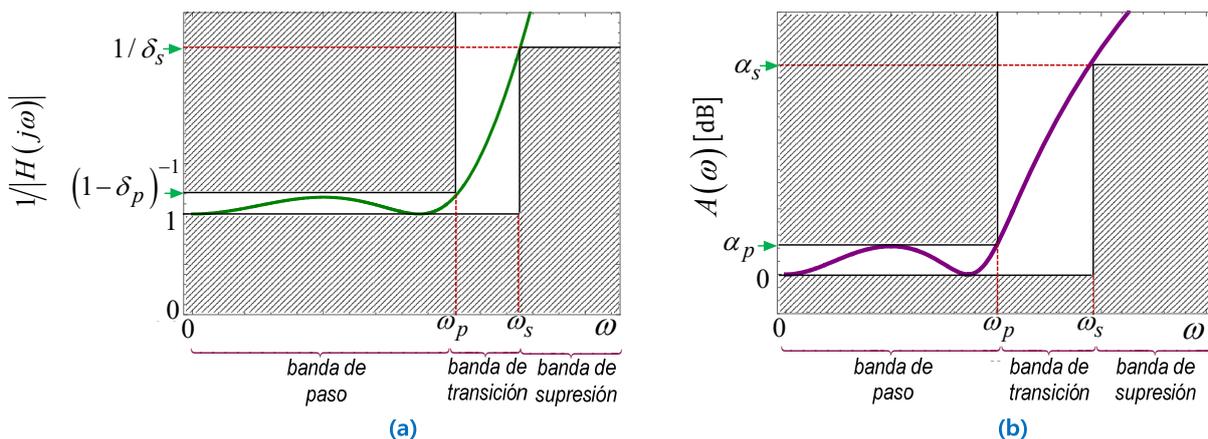
#### 7.4.2. Especificación de la respuesta en frecuencia en términos de atenuación

En concordancia con lo mencionado para la ganancia, desde el punto de vista del filtrado, solo interesa la atenuación *relativa* referida a la mínima atenuación en la banda de paso. Por ello, la característica de atenuación *se normaliza* de manera tal que la atenuación mínima en la banda de paso sea 1 p.u., lo que corresponde a 0 dB. La atenuación realmente requerida en la banda de paso del filtro se ajusta en un paso posterior del diseño, por ejemplo, agregando una etapa de amplificación constante para todo el rango de frecuencias.

En la **Fig. 7.4** se muestra una especificación típica de los requisitos de atenuación para un filtro pasa bajos real en la cual el borde o límite de la banda de *paso* es la pulsación  $\omega_p$  y el límite de la banda de *supresión* es la pulsación  $\omega_s$  y el intervalo  $\omega_s - \omega_p$ , es la denominada banda de *transición*.

En la **Fig. 7.4a** se muestra la representación en veces o p.u. (por unidad) de  $|H(j\omega)|^{-1}$  en la cual se indican los límites de tolerancia, que en este caso son  $1/(1-\delta_p)$  para la banda de paso y  $1/\delta_s$  para la banda de supresión.

En la **Fig. 7.4b** se muestra la representación de  $A(\omega)$ , es decir  $|H(j\omega)|^{-1}$  en dB, en la cual se indican los límites de tolerancia  $\alpha_p$  para la banda de paso y  $\alpha_s$  para la banda de supresión.



**Fig. 7.4.** Patrón de especificación de los rangos de tolerancia de un filtro pasa bajos: (a)  $1/|H(j\omega)|$  en p.u.; (b) atenuación en dB.

La relación entre ambas especificaciones resulta:

$$\alpha_p = 20 \cdot \log(1 - \delta_p)^{-1} - 20 \cdot \log(1) = -20 \cdot \log(1 - \delta_p) \Rightarrow 10^{-0,05 \cdot \alpha_p} = 1 - \delta_p$$

Despejando  $\delta_p$  en función de  $\alpha_p$  otra vez resulta:

$$\delta_p = 1 - 10^{-0,05 \cdot \alpha_p} \quad (7-11)$$

Por otra parte, en la banda de supresión, la magnitud de la atenuación p.u. debe encontrarse por encima de  $1/\delta_s$ , con lo cual, la atenuación en dB coincidirá con la atenuación mínima en la banda de supresión que está dada por  $\alpha_s = 20 \cdot \log(1/\delta_s) = -20 \cdot \log(\delta_s)$ , de donde otra vez resulta:

$$\delta_s = 10^{-0,05 \cdot \alpha_s} \quad (7-12)$$

La representación de la **Fig. 7.4a** rara vez se emplea para especificar el filtro pasa bajos que se desea sintetizar, a diferencia de la **Fig. 7.4b** que sí es muy empleada y en cuyo caso, la especificación se efectúa mediante pares de valores  $(\omega_p; \alpha_p)$  y  $(\omega_s; \alpha_s)$ . Estos pares de valores definen las regiones sombreadas que se conocen como *patrón* o *plantilla de especificaciones* para la atenuación del filtro pasa bajos a sintetizar.

El par  $(\omega_p; \alpha_p)$  es una forma muy conveniente de indicar cuánto se le exige a la aproximación que se acerque a la característica del filtro ideal *en la banda de paso*. En efecto, esta forma de especificar el problema puede interpretarse razonando que la característica ideal para la **Fig. 7.4b** es 0 dB hasta el límite  $\omega_p$  de la banda de paso, y se admite que la aproximación tenga un apartamiento máximo  $\alpha_p$  respecto de 0 dB en  $\omega_p$ .

Análogamente, el par  $(\omega_s ; \alpha_s)$  es una forma muy conveniente de indicar cuánto se le exige a la aproximación que se acerque a la característica del filtro ideal *en la banda de supresión*. En efecto, dado que la característica ideal para la **Fig. 7.4b** para la pulsación  $\omega_s$  en la banda de supresión es infinito, se requiere que la aproximación sea por lo menos  $\alpha_s$ .

### 7.5. Métodos de aproximación a las características de amplitud

El diseño de los filtros pasivos *LC* puede realizarse ya sea mediante la selección adecuada de sus elementos, o bien aplicando a los filtros pasa bajos normalizados (prototipos pasa bajos) determinadas transformaciones de frecuencia en el plano complejo, permitiendo de este modo elaborar filtros con una distribución arbitraria de bandas de transmisión, con muy poco esfuerzo adicional.

El método de aproximación puede aplicarse tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia. En el dominio temporal consiste en aproximar las características de la respuesta transitoria. En el dominio de la frecuencia consiste en aproximar la respuesta de amplitud o de fase.

Los diferentes métodos de aproximación a la característica de amplitud permiten obtener un filtro pasa bajos *normalizado* (\*) que se aproxime a un filtro ideal con un determinado error.

Luego, mediante un proceso de desnormalización, tanto en frecuencia como en impedancia, se halla la aproximación correspondiente al filtro pasa bajos no normalizado. Finalmente, si el filtro a aproximar no es un pasa bajos, se procede a aplicar *transformaciones en frecuencia* (a pasa altos, a pasa banda, etc.) según el caso, las cuales serán objeto de estudio del siguiente capítulo.

En definitiva el proceso de aproximación a las características de amplitud en el dominio de la frecuencia empieza aproximando un filtro prototipo pasa bajos ideal de frecuencia de corte unitaria.

### 7.6. Aproximación de Butterworth

La función de aproximación de Butterworth permite obtener una respuesta en frecuencia *máximamente plana*, así denominada porque ninguna otra aproximación tiene una transición más suave a través de la banda de paso hasta la banda de supresión. La respuesta de fase también es muy suave, lo cual es importante cuando la distorsión debe ser tenida en cuenta. Es el método de aproximación elegido cuando se requiere una baja distorsión de fase y una selectividad moderada.

Se pretende aproximar la función característica de un filtro pasa bajos ideal representada en la **Fig. 7.2c** mediante:

$$|K(j\omega)| = \varepsilon B_n(\omega); \quad 0 < \varepsilon \leq 1 \quad (7-13)$$

donde  $B_n(\omega)$  es la función genérica de Butterworth de orden  $n$  la cual debe cumplir las propiedades:

1.  $B_n(\omega)$  es un polinomio de orden  $n$ .
2.  $B_n(0) = 0$
3.  $B_n(\omega)$  es *máximamente plano* en el origen.
4.  $B_n(1) = 1$

Aquí es importante darse cuenta que la propiedad 4 indica que en (7-13), y en todo lo que sigue,  $\omega$  está *normalizada* respecto de la pulsación  $\omega_p$  que delimita la banda de paso del filtro pasa bajos ideal.

La condición 1 implica que:

$$B_n(\omega) = c_0 + c_1\omega + c_2\omega^2 + \dots + c_n\omega^n$$

La condición 2 requiere que  $c_0 = 0$ . *Máximamente plano* en el origen implica que tantas derivadas como sea posible son nulas en el origen. Entonces:

$$\frac{dB_n(\omega)}{d\omega} = c_1 + 2c_2\omega + \dots + nc_n\omega^{n-1}$$

Y para que esta expresión resulte cero en  $\omega=0$ , deberá cumplirse que  $c_1=0$ .

Del mismo modo, las derivadas de orden superior se pueden anular haciendo los coeficientes de mayor orden cero.

Finalmente, la condición 4 da lugar a  $c_n=1$ .

(\*) Esto significa que en las expresiones de las aproximaciones a la amplitud que se verán en este capítulo, la pulsación angular  $\omega$  debe entenderse que está normalizada, es decir en realidad se trata de  $\omega' = \omega/\omega_p$ , donde  $\omega_p$  es la pulsación de corte del filtro pasa bajos *no normalizado ideal* que se pretende aproximar, y para simplificar la notación, en lo que sigue, se suprimirá el símbolo *prima*.

En definitiva surge que la función de Butterworth de orden  $n$  resulta:

$$B_n(\omega) = \omega^n \tag{7-14}$$

La cual cumple las propiedades ya enumeradas.

### 7.6.1. Aproximación de Butterworth a la característica de amplitud

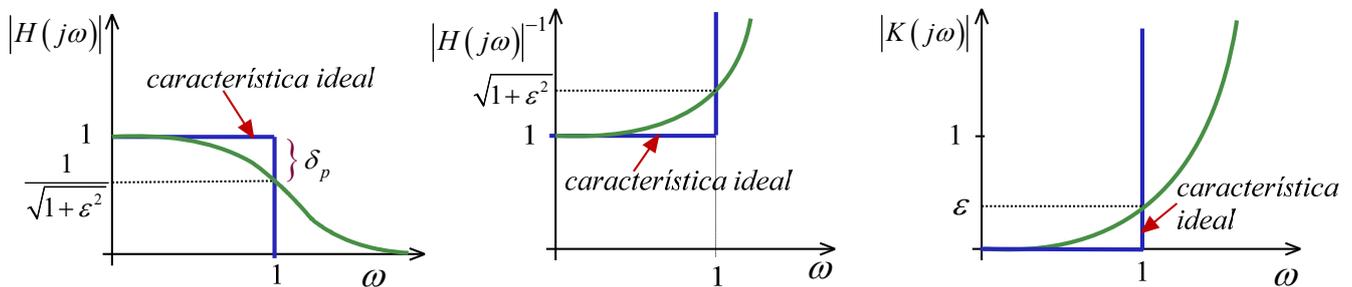
A la luz de las expresiones (7-13) y (7-14) puede deducirse que aproximar la característica de amplitud de un filtro pasa bajos ideal mediante el polinomio de Butterworth de orden  $n$  conduce a:

$$|K(j\omega)| = \varepsilon \cdot \omega^n \tag{7-15}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \omega^{2n}}} \tag{7-16}$$

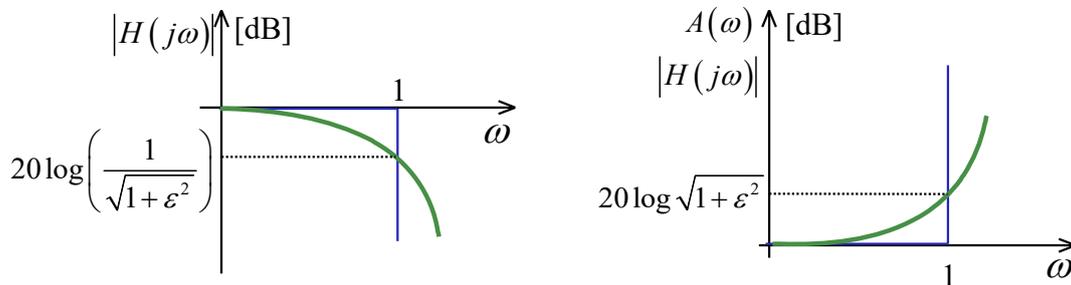
donde  $\varepsilon$  es un número real positivo no mayor que 1, y la pulsación  $\omega$  se encuentra *normalizada* respecto a la pulsación  $\omega_p$  correspondiente al límite de la banda de paso del filtro pasa bajos ideal.

Las respectivas aproximaciones se indican en la **Fig. 7.5**, donde todas las funciones están representadas *en veces*.



**Fig. 7.5.** Aproximaciones a las características de amplitud del filtro ideal (en p.u.) para un filtro pasa bajos real.

Representándolas en decibels, resultan las gráficas que se muestran en la **Fig. 7.6**.



**Fig. 7.6.** Aproximaciones a las características de amplitud del filtro ideal (en dB) para un filtro pasa bajos real.

Si en la expresión  $H(j\omega)$  dada por (7-16) se hace explícita la normalización respecto de la pulsación  $\omega_p$  que delimita la banda de paso en el filtro pasa bajos ideal, resulta:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 (\omega/\omega_p)^{2n}}} \tag{7-17}$$

y expresándola en decibels como atenuación resulta:

$$A(\omega) = 10 \log \left[ 1 + \varepsilon^2 (\omega/\omega_p)^{2n} \right] \quad [\text{dB}] \tag{7-18}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta (7-17), dentro de la banda de paso,  $|H(j\omega)|$  oscila entre 1 y  $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$ .

En la **Fig. 7.5a** se muestra  $|H(j\omega)|$  obtenida mediante (7-16) empleando algún valor de  $n$  y de  $\varepsilon$ . De (7-16) se deduce que la amplitud del apartamiento  $\delta_p$  en la banda de paso ocurre para  $\omega=1$  y resulta:

$$\delta_p = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \tag{7-19}$$

que para valores de  $\varepsilon$  muy pequeños resulta  $\delta_p \cong \varepsilon^2$ .

La función  $H(s)$  se puede obtener teniendo en cuenta que:

$$[H(s)]^2 = H(s) \cdot H(-s) = \frac{1}{1+(-1)^n \varepsilon^2 s^{2n}} = \frac{1/\varepsilon^2}{s^{2n} + (-1)^n 1/\varepsilon^2} \quad (7-20)$$

Con lo cual la expresión de  $H(s)$  podría construirse, teniendo en cuenta que todos sus polos deben encontrarse en el semiplano izquierdo del plano  $s$  (SPI) como<sup>3</sup>:

$$H(s) = \frac{1/\varepsilon}{\prod_{\forall s_k \in SPI} (s + s_k)} \quad (7-21)$$

Cuyos polos son  $n$  y corresponden a la mitad de las  $2n$  soluciones, indistintamente, de:

$$1+(-1)^n \varepsilon^2 s^{2n} = 0 \quad \text{ó} \quad s^{2n} + (-1)^n 1/\varepsilon^2 = 0 \quad (7-22)$$

Las cuales resultan:

$$s_k = 2n \sqrt[n]{\frac{-1}{\varepsilon^2 (-1)^n}} = \varepsilon^{-1/n} 2n \sqrt[n]{\frac{j^2}{j^{2n}}} = \varepsilon^{-1/n} 2n \sqrt[n]{j^{2(1-n)}} = \varepsilon^{-1/n} 2n \sqrt[n]{e^{j\frac{\pi}{2} 2(1-n)}} = \varepsilon^{-1/n} 2n \sqrt[n]{e^{j\pi(1-n)}} = \varepsilon^{-1/n} 2n \sqrt[n]{e^{j\pi(n-1)}}$$

Aplicando la fórmula de De Moivre para la raíz de un número complejo  $z = M e^{j\theta}$ :

$$\sqrt[m]{z} = \sqrt[m]{M} \cdot e^{j\left(\frac{\theta}{m} + k\frac{2\pi}{m}\right)} \quad \text{siendo } k = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

Entonces:

$$s_k = \varepsilon^{-1/n} e^{j\left[\frac{\pi(n-1)}{2n} + \frac{2k\pi}{2n}\right]} \quad \text{siendo } k = 0, 1, 2, \dots, 2n-1$$

o lo que es lo mismo:

$$s_k = \varepsilon^{-1/n} e^{j\frac{1}{2n}[n\pi + (2k-1)\pi]} \quad \text{siendo } k = 1, 2, \dots, 2n$$

resultando  $2n$  raíces sobre una circunferencia de radio  $\varepsilon^{1/n}$  y espaciamiento angular  $\pi/n$ .

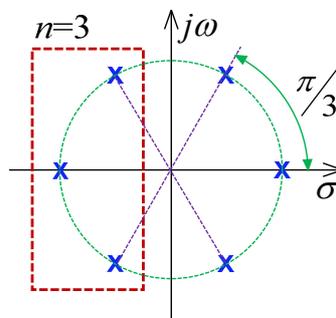
- $n$  par: Como sumar o restar pares de veces  $\pi$  en el argumento de  $s_k$  no produce cambios resulta:

$$s_k = \varepsilon^{-1/n} e^{j(2k-1)\frac{\pi}{2n}} \quad \text{siendo } k = 1, 2, \dots, 2n$$

- $n$  impar: Sumar o restar un número impar de veces  $\pi$  en el argumento de  $s_k$  equivale a sumar  $\pi$ .

$$s_k = \varepsilon^{-1/n} e^{jk\frac{\pi}{n}} \quad \text{siendo } k = 1, 2, \dots, 2n$$

En la **Fig. 7.7** se muestra la ubicación de las raíces de (7-22) (también conocidas como raíces de Butterworth) para  $n=3$ .



**Fig. 7.7.** Ubicación de las raíces de (7-22).

<sup>3</sup> Obsérvese que los polinomios del denominador de ambas formas de (7-20) tienen las mismas raíces; sin embargo, el producto de dichas raíces, siempre da por resultado un *polinomio normalizado* (coeficiente principal unitario). Por lo tanto, para desarrollar el denominador de  $H(s)^2$  como el producto de sus raíces, corresponde considerar la expresión con el polinomio del denominador normalizado, para la cual la constante del numerador es  $1/\varepsilon^2$ .

Para el caso en que  $\varepsilon=1$  si  $n$  es impar, siempre habrá una raíz real en  $s=\pm 1$ , y por lo tanto el denominador de  $H(s)$  contendrá el factor  $(s+1)$ . El resto de las raíces de (7-22) son pares complejos conjugados, ubicados sobre una circunferencia de radio 1.

Si  $\varepsilon < 1$  las raíces de (7-22) se encuentran sobre una circunferencia de radio  $\varepsilon^{1/n}$ .

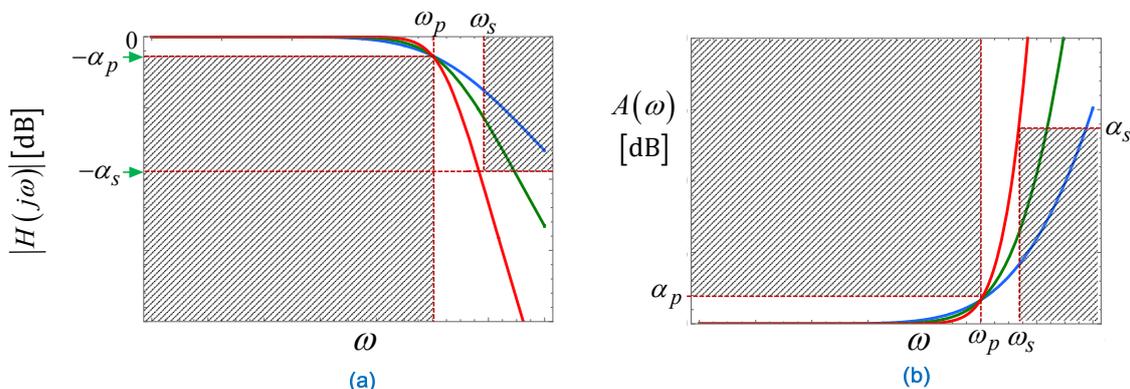
### 7.6.2. Patrón o plantilla de especificaciones

De la **Fig. 7.6** se deduce que para el filtro Butterworth pasa bajos normalizado, en el límite de la banda de paso, tanto  $|H(j\omega)|_{\text{dB}}$  como  $A(\omega)$  tienen el máximo apartamiento respecto del valor para  $\omega=0$ . Ese máximo apartamiento en dB es  $-\alpha_p$  para  $|H(j\omega)|_{\text{dB}}$  y  $\alpha_p$  para  $A(\omega)$ , siendo:

$$\alpha_p = 20 \log \sqrt{1 + \varepsilon^2} = 10 \log(1 + \varepsilon^2) \tag{7-23}$$

Entonces para la pulsación correspondiente al límite de la banda de *paso* resulta  $|H(j\omega_p)|_{\text{dB}} = -\alpha_p$  y  $A(\omega_p) = \alpha_p$ . En la **Fig. 7.8a** se grafican tres curvas que corresponden a  $|H(j\omega)|_{\text{dB}}$  para distintos valores de  $n$ ; y en la **Fig. 7.8b** se muestran las correspondientes curvas para  $A(\omega)$ . Puede comprobarse que, en la banda de supresión, la pendiente de la curva resulta más pronunciada al aumentar  $n$ . Por lo tanto se puede afirmar que el aumento de  $n$  mejora la aproximación a la característica ideal en la banda de supresión, mientras que prácticamente no tiene efecto sobre la aproximación que se logra en la banda de paso.

En la misma **Fig. 7.8** se muestra la plantilla o patrón de especificaciones del filtro pasa bajos que se desea sintetizar, la cual está determinada por los pares  $(\omega_p; \alpha_p)$  y  $(\omega_s; \alpha_s)$  especificados.



**Fig. 7.8.** Patrón de especificación del filtro pasa bajos a sintetizar: **(a)**  $|H(j\omega)|$  en p.u.; **(b)** atenuación en dB.

Una especificación con una banda de transición pequeña requerirá un filtro de orden elevado, y un filtro que cumpla con requisitos mayores de lo necesario será más costoso de implementar. Debido a que el costo de un filtro aumenta con el orden del filtro, lógicamente interesa minimizar el orden del filtro.

### 7.6.3. Determinación de los parámetros de diseño

Los parámetros de diseño a determinar a partir de las especificaciones son  $\varepsilon$  y  $n$ . Si se adoptan correctamente la curva aproximada no atravesará las zonas sombreadas de la plantilla de especificaciones. Uno de los requisitos a cumplir es el de atenuación máxima  $\alpha_p$  admitida en la banda de paso, especificada para la pulsación  $\omega_p$ .

$$A(\omega_p) = 10 \log \left( 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{\omega_p}{\omega_p} \right)^{2n} \right) \leq \alpha_p$$

de donde resulta:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1\alpha_p} - 1} \tag{7-24}$$

Con la aproximación de Butterworth es habitual normalizar con respecto a la pulsación angular para la cual la curva de atenuación llega al nivel de 3 dB, la cual suele denominarse *pulsación de corte*  $\omega_C$  (o bien, si se trabaja con frecuencias, *frecuencia de corte*  $f_C$ ). Es decir  $A(\omega_C) = 3$  dB, y por lo tanto según (7-18):

$$A(\omega_C) = 10 \log \left( 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{\omega_C}{\omega_C} \right)^{2n} \right) \Rightarrow \varepsilon = 1$$

Es decir, cuando se normaliza respecto  $\omega_C$ , por ser  $A(\omega_C) = 3$  dB, debe considerarse  $\varepsilon = 1$ . Por ello, aunque el dato de especificación sea una pulsación  $\omega_p$  y  $\alpha_p = x$  dB, suele preferirse normalizar respecto a la pulsación de corte de 3 dB ( $\omega_C$ ), para trabajar con coeficientes numéricamente más sencillos. Pero en tal caso, cuando sea necesario *desnormalizar*, será necesario determinar la pulsación  $\omega_C$  no especificada. La relación entre  $\omega_p$  y  $\omega_C$  resulta de considerar:

$$A(\omega_C) = 10 \log \left[ 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{\omega_C}{\omega_p} \right)^{2n} \right] = 3 \text{ dB} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \left( \frac{\omega_C}{\omega_p} \right)^n = 1 \quad (7-25)$$

y por lo tanto:

$$\omega_C = \frac{\omega_p}{\sqrt[n]{\varepsilon}} \quad (7-26)$$

Entonces, según lo dicho, cuando se normaliza respecto de  $\omega_C$  (pulsación de corte de 3 dB) debe considerarse  $\varepsilon = 1$  con lo cual la expresión (7-16) adopta la forma conocida:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^{2n}}} \quad (7-27)$$

Por otra parte, también se mencionó que los puntos de la banda de atenuación se especifican de modo que cumplan con:

$$A(\omega_s) = 10 \log \left( 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{\omega_s}{\omega_p} \right)^{2n} \right) \geq \alpha_s \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{\log \left[ \frac{10^{0,1\alpha_s} - 1}{\varepsilon^2} \right]}{2 \log \left( \frac{\omega_s}{\omega_p} \right)}$$

y empleando (7-24):

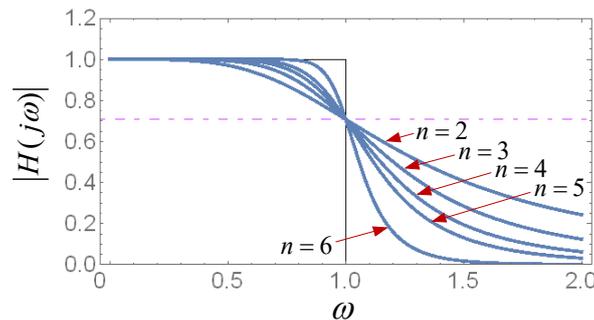
$$n \geq \frac{\log \left[ \frac{10^{0,1\alpha_s} - 1}{10^{0,1\alpha_p} - 1} \right]}{2 \log \left( \frac{\omega_s}{\omega_p} \right)} \quad (7-28)$$

En la **Fig. 7.9** se grafica la expresión (7-27) para distintos valores de  $n$ . Obsérvese que en el eje de abcisas se indica  $\omega$ , pero debe entenderse que se ha aplicado la normalización  $\omega/\omega_C$ .

Puede observarse que, a medida que  $n$  aumenta, mejor es la aproximación al módulo de la transferencia de un filtro pasa bajos ideal. Además independientemente del valor  $n$ , el módulo de la función  $|H(j\omega)|$  para  $\omega = 1$  resulta, como cabía esperar:

$$|H(j\omega)|_{\omega=1} = 0,707 \quad (\equiv -3 \text{ dB})$$

Pero es muy importante observar que está expresada en veces y que se llega a este resultado, porque la pulsación con respecto a la cual se normalizó es  $\omega_C$ .



**Fig. 7.9.** Efecto del orden  $n$  del filtro en la aproximación a  $|H(j\omega)|$  en p.u. del filtro ideal.

7.6.4. Polinomios de Butterworth normalizados

La transferencia  $H(s)$  de un filtro Butterworth pasa bajos normalizado de orden  $n$  dada por (7-21) tendrá la siguiente forma:

$$H(s) = \frac{1/\varepsilon}{(s+s_1)(s+s_2)\dots(s+s_n)} = \frac{1/\varepsilon}{s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_2s^2 + c_1s + c_0} = \frac{1/\varepsilon}{B_n^*(s)} \tag{7-29}$$

Siendo el denominador un polinomio de orden  $n$ , denominado  $B_n^*(s)$ , que será referido como *polinomio de Butterworth normalizado*. Cabe recordar que un polinomio se dice *normalizado*, cuando el coeficiente del término de mayor orden, es decir, el coeficiente de  $s^n$ , es 1.

Por otra parte, el término independiente resulta igual al producto de los términos independientes de los factores correspondientes a todas las raíces del semiplano izquierdo, las cuales se encuentran sobre una circunferencia de radio  $\varepsilon^{1/n}$ . Entonces, el término independiente de cada factor de primer orden será  $\varepsilon^{1/n}$  y el de los factores de segundo orden será  $(\varepsilon^{1/n})^2$  y por consiguiente, el término independiente del polinomio  $B_n^*(s)$  será  $(\varepsilon^{1/n})^n = \varepsilon^{-1}$ . Los polinomios de Butterworth normalizados, para los valores más bajos de  $n$ , para  $\varepsilon=1$  es decir, para una atenuación máxima en la banda de paso  $\alpha_p = 3$  dB, resultan los siguientes:

$$B_1^*(s) = s + 1$$

$$B_2^*(s) = s^2 + 1,4142s + 1$$

$$B_3^*(s) = (s + 1)(s^2 + s + 1) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$$

$$B_4^*(s) = (s^2 + 0,7653s + 1)(s^2 + 1,8477s + 1) = s^4 + 2,613s^3 + 3,414s^2 + 2,613s + 1$$

En manuales y bibliografía dedicada al diseño de filtros es normal encontrar tablas que involucran distintas formas de resumir la información concerniente a los polinomios  $B_n^*(s)$ . Una forma es presentar los coeficientes  $c_i$  de cada polinomio normalizado, tal como se muestra en la **Tabla 7-1** hasta el orden 10.

**Tabla 7-1.** Coeficientes de los polinomios normalizados de Butterworth,  $c_n s^n + c_{n-1} s_{n-1} + \dots + c_1 s + c_0$ , para  $\alpha_p=3$ dB ( $\varepsilon=1$ ).

$n$	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$	$c_7$	$c_8$	$c_9$	$c_{10}$
1	1	1									
2	1	1,41421	1								
3	1	2	2	1							
4	1	2,61313	3,41421	2,61313	1						
5	1	3,23607	5,23607	5,23607	3,23607	1					
6	1	3,86370	7,46410	9,14162	7,46410	3,86370	1				
7	1	4,49396	10,09784	14,59179	14,59179	10,09784	4,49396	1			
8	1	5,12583	13,13707	21,84615	25,68836	21,84615	13,13707	5,12583	1		
9	1	5,75877	16,581719,	31,16344	41,98639	41,98639	31,16344	16,58172	5,75877	1	
10	1	6,39245	20,43173	42,80206	64,88240	74,23343	64,88240	42,80206	20,43173	6,39245	1

Otra forma, más frecuentemente encontrada en libros de diseño de filtros activos y digitales, es presentar los coeficientes de los factores de segundo orden y, para  $n$  impar del factor de primer orden, que corresponden a cada polinomio  $B_n^*(s)$ , tal como se hizo más arriba, para  $B_3^*(s)$  y  $B_4^*(s)$ . Esto se hace así porque a partir de los coeficientes de cada factor de primer y segundo orden, es posible obtener los valores de los componentes de cada etapa de un filtro activo a fin de lograr, disponiéndolas en cascada, el orden del filtro necesario para cumplir con los requisitos de atenuación. Este formato de presentación de la información necesaria se muestra en la **Tabla 7.2**.

**Tabla 7-2,** Coeficientes y características de los factores de primer orden ( $s+a_i$ ) y de segundo orden ( $b_i s^2+a_i s+1$ ) de los polinomios normalizados de Butterworth para  $\alpha_p=3\text{dB}$  ( $\varepsilon=1$ ),

$n$	$i$	$a_i$	$b_i$	$Q_i$	$\omega_i$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$\xi_i$
1	1	1			1			
2	1	1,4142	1	0,71	1	0,7071	0,7071	0,707
3	1	1			1			
	2	1	1	1	1	0,5	0,8660	0,5
4	1	1,8478	1	0,54	1	0,9239	0,3826	0,924
	2	0,7654	1	1,31	1	0,3827	0,9239	0,383
5	1	1			1			
	2	1,618	1	0,62	1	0,809	0,5878	0,809
	3	0,618	1	1,62	1	0,309	0,9511	0,309
6	1	1,9319	1	0,52	1	0,96595	0,2587	0,966
	2	1,4142	1	0,71	1	0,7071	0,7071	0,707
	3	0,5176	1	1,93	1	0,2588	0,9659	0,259
7	1	1			1			
	2	1,8019	1	0,55	1	0,90095	0,4339	0,901
	3	1,247	1	0,80	1	0,6235	0,7818	0,624
	4	0,445	1	2,25	1	0,2225	0,9749	0,223
8	1	1,9616	1	0,51	1	0,9808	0,1950	0,981
	2	1,6629	1	0,60	1	0,83145	0,5556	0,832
	3	1,1111	1	0,90	1	0,55555	0,8315	0,556
	4	0,3902	1	2,56	1	0,1951	0,9808	0,195
9	1	1			1			
	2	1,8794	1	0,53	1	0,9397	0,3420	0,94
	3	1,5321	1	0,65	1	0,76605	0,6428	0,766
	4	1	1	1	1	0,5	0,8660	0,5
	5	0,3473	1	2,88	1	0,17365	0,9848	0,174
10	1	1,9754	1	0,51	1	0,9877	0,1564	0,988
	2	1,782	1	0,56	1	0,891	0,4540	0,891
	3	1,4142	1	0,71	1	0,7071	0,7071	0,707
	4	0,908	1	1,10	1	0,454	0,8910	0,454
	5	0,3129	1	3,20	1	0,15645	0,9877	0,157

En esta tabla,  $n$  es el orden del polinomio (orden del filtro),  $i$  es el índice del factor correspondiente (o sección del filtro) y, para cada factor, se indican las raíces correspondientes  $s_i = \alpha_i \pm j\beta_i$  y además el coeficiente de amortiguamiento  $\xi_i$ , la pulsación de quiebre de la asíntota de alta frecuencia  $\omega_i$  y el factor de mérito  $Q_i$ . La secuencia de ordenamiento se efectúa en orden creciente del factor  $Q_i$ , o lo que es equivalente, en orden decreciente del coeficiente de amortiguamiento  $\xi_i$ .

### Ejemplo 7.1.

Obtener la función de transferencia  $H(s)$  de un filtro *pasa bajos* que permita el paso de frecuencias inferiores a 6 kHz con una variación de amplitud que no supere los 3 dB y que para frecuencias superiores a 14 kHz atenúe como mínimo 20 dB empleando la aproximación de Butterworth.

### Resolución

Adecuando las especificaciones a la notación empleada:

$$f_p = f_C = 6 \text{ kHz} \quad \alpha_p = A_{\text{máx}} = 3 \text{ dB} \quad f_s = 14 \text{ kHz} \quad \alpha_s = A_{\text{mín}} = 20 \text{ dB}$$

#### (1) Calcular los parámetros de diseño del filtro

El coeficiente de ondulación  $\varepsilon$  se obtiene a partir de la especificación de la máxima atenuación admitida en la banda de paso:

$$10 \cdot \log[1 + \varepsilon^2] = \alpha_p \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \sqrt{10^{0,1 \cdot \alpha_p} - 1} = \sqrt{10^{0,1 \cdot 3} - 1} = 1$$

El orden  $n$  del filtro se obtiene a partir de la especificación de la atenuación mínima  $\alpha_s$  admitida en la banda de supresión:

$$A(f_s) = 10 \log \left( 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{f_s}{f_p} \right)^{2n} \right) \geq \alpha_s \Rightarrow n \geq \frac{\log \left[ \frac{10^{0,1 \cdot \alpha_s} - 1}{\varepsilon^2} \right]}{2 \log \left( \frac{f_s}{f_p} \right)} = \frac{\log \left[ \frac{10^{0,1 \cdot 20} - 1}{10^{0,1 \cdot 3} - 1} \right]}{2 \log \left( \frac{14 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^3} \right)} = 2,72$$

Entonces resulta  $\varepsilon=1$  y  $n=3$ .

### (2) Obtener $H(s)$ del pasa bajos normalizado

Ahora se puede escribir:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \omega^{2n}} \Rightarrow [H(s)]^2 = \frac{1}{1 - s^6}$$

Esta expresión que se encuentra normalizada respecto de  $\omega_p = \omega_c = 2\pi \cdot 6 \cdot 10^3$  rad/s, tiene seis ceros en el origen y seis polos con simetría cuadrantal ubicados sobre una circunferencia de radio 1:

$$s_k = \pm 1; \pm \frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

La expresión de  $H(s)$ , normalizada respecto de  $\omega_p = \omega_c = 2\pi \cdot 6 \cdot 10^3$  rad/s, puede escribirse aplicando (7-21):

$$H(s) = \frac{1}{(s+1) \left( s + \frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left( s + \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

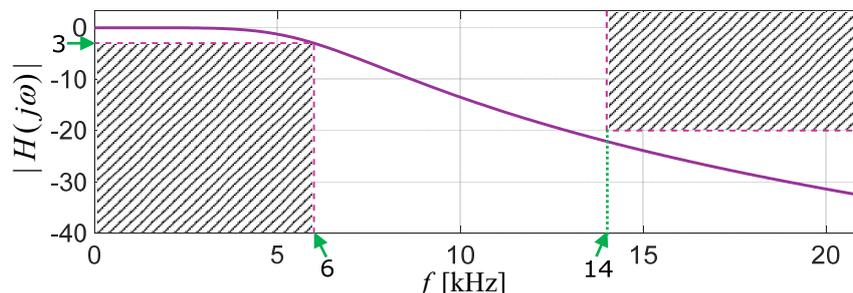
Obsérvese que una vez determinados  $n$  y  $\varepsilon$  se pudo haber escrito directamente la expresión de  $H(s)$  a partir de la **Tabla 8-1**.

### (3) Obtener $H(s)$ del pasa bajos desnormalizado

$$H(s) = \frac{1}{(\bar{s})^3 + 2(\bar{s})^2 + 2\bar{s} + 1} = \frac{1}{\left( \frac{\omega_c \bar{s}}{\omega_c} \right)^3 + 2 \left( \frac{\omega_c \bar{s}}{\omega_c} \right)^2 + 2 \left( \frac{\omega_c \bar{s}}{\omega_c} \right) + 1} = \frac{\omega_c^3}{s^3 + 2\omega_c s^2 + 2\omega_c^2 s + \omega_c^3}$$

$$H(s) = \frac{5,358 \cdot 10^{13}}{s^3 + 7,54 \cdot 10^4 \cdot s^2 + 2,482 \cdot 10^9 \cdot s + 5,358 \cdot 10^{13}}$$

Verificándose gráficamente el cumplimiento de las especificaciones tal como se muestra en la **Fig. 7.10**.



**Fig. 7.10.** Función  $|H(j\omega)|$  en dB del filtro sintetizado.

#### 7.6.5. Comportamiento asintótico de la aproximación de Butterworth

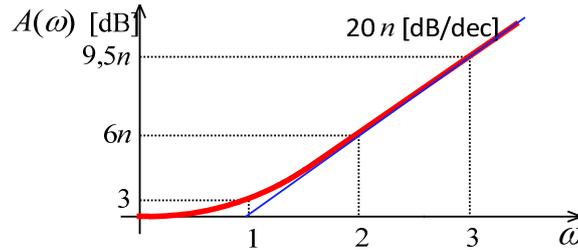
La aproximación de Butterworth, cuando  $\omega \gg 1$  resulta:

$$|H(j\omega)| \cong 1/\omega^n$$

Expresada como atenuación (en dB) resulta:

$$A(\omega) = 20 \log \frac{1}{|H(j\omega)|} = n \cdot 20 \log \omega$$

Cuya asíntota es  $20n$  dB/dec ó  $6n$  dB/oct, partiendo de  $\omega=1$ , según puede apreciarse en **Fig. 7.11**.



**Fig. 7.11.** Comportamiento asíntótico para  $\omega \rightarrow \infty$  de la aproximación de Butterworth.

El error de la asíntota respecto de la curva real en  $\omega=1$  es de 3 dB, independiente del valor de  $n$ .

## 7.7. Aproximación de Chebyshev

La aproximación de Butterworth a la característica de amplitud de un filtro pasa bajos ideal concentra toda su potencia de aproximación en el origen, en vez de distribuirla en el intervalo  $0 < \omega < 1$ .

En este sentido, se obtiene una mejor aproximación mediante una función racional que se aproxime a 1 en todo el margen de frecuencias, en forma oscilatoria. Así, puede esperarse una mejor aproximación a la amplitud de la función característica de un filtro pasa bajos ideal mediante un polinomio en  $\omega$ , si este se acerca a 0 en forma oscilatoria y con una *amplitud constante de la oscilación* en el intervalo  $0 < \omega < 1$ , y alcanza rápidamente grandes valores cuando  $\omega > 1$ .

Los polinomios de Chebyshev cumplen con esta condición. Un polinomio de este tipo de orden  $n$ , en la variable real  $\omega$ , se define por:

$$V_n(\omega) = \cos(n \cos^{-1} \omega) \quad (7-30)$$

Esta expresión parece una función trascendental, pero puede verse que resulta un polinomio finito en  $\omega$  si se considera que:

$$\cos^{-1} \omega = \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \omega$$

Y recordando que  $\cos n\varphi$  puede expresarse como una suma de potencias de  $\cos \varphi$ , hasta la potencia  $n$ -ésima (potencias pares si  $n$  es par, e impares si  $n$  es impar), resulta.

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi &= -1 + 2 \cos^2 \varphi & V_2(\omega) &= -1 + 2\omega^2 \\ \cos 3\varphi &= -3 \cos \varphi + 4 \cos^3 \varphi & \Rightarrow V_3(\omega) &= -3\omega + 4\omega^3 \\ \cos 4\varphi &= 1 - 8 \cos^2 \varphi + 8 \cos^4 \varphi & V_4(\omega) &= 1 - 8\omega^2 + 8\omega^4 \end{aligned}$$

La expresión de  $V_n(\omega)$  pone en evidencia que los polinomios de Chebyshev oscilan con una amplitud 1 en el intervalo  $-1 < \omega < 1$  (ya que  $\varphi$  es real en este intervalo).

A fin de hallar polinomios de cualquier orden, y también poder calcular sus valores para todo  $\omega$ , se hará uso de las siguientes relaciones:

Para  $-1 < \omega < 1$ :

$$\cos^{-1} \omega = \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \omega ; \quad \text{sen } \varphi = \sqrt{1 - \omega^2} \quad (7-31)$$

Por lo que:

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \text{sen } \varphi = \omega + j\sqrt{1 - \omega^2}$$

Entonces:

$$e^{jn\varphi} = \left( \omega + j\sqrt{1 - \omega^2} \right)^n \quad \text{y} \quad e^{-jn\varphi} = \left( \omega \pm j\sqrt{1 - \omega^2} \right)^{\mp n}$$

Por lo tanto:

$$V_n(\omega) = \cos(n\varphi) = \frac{e^{jn\varphi} - e^{-jn\varphi}}{2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \omega + j\sqrt{1 - \omega^2} \right)^n + \left( \omega - j\sqrt{1 - \omega^2} \right)^n \right] \quad (7-32)$$

Para  $\omega > 1$ :

$$\cos^{-1} \omega = j\varphi$$

Entonces:

$$\omega = \cos j\varphi = \frac{e^{j(j\varphi)} + e^{-j(j\varphi)}}{2} = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} = \cosh \varphi$$

Lo que implica que:

$$\cos^{-1} \omega = j \cosh^{-1} \omega$$

Teniendo en cuenta esta igualdad en (7-30):

$$V_n(\omega) = \cos(n \cos^{-1} \omega) = \cos(nj \cosh^{-1} \omega) = \cosh(n \cosh^{-1} \omega)$$

Y ahora, si en lugar de hacer en (7-31)  $\cos \varphi = \omega$  se pone:

$$\cosh \varphi = \omega \quad \text{y} \quad \sinh \varphi = \sqrt{\omega^2 - 1} \quad (7-33)$$

Se obtiene:

$$e^{\pm \varphi} = \cosh \varphi \pm \sinh \varphi = \omega \pm \sqrt{\omega^2 - 1}$$

Resultando ahora:

$$V_n(\omega) = \cosh(n\varphi) = \frac{e^{n\varphi} + e^{-n\varphi}}{2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \omega + \sqrt{\omega^2 - 1} \right)^n + \left( \omega - \sqrt{\omega^2 - 1} \right)^n \right] \quad (7-34)$$

Expresión equivalente a la (7-32) para  $\omega > 1$ .

También de (7-32) y (7-34) puede verse que:

$$V_1(\omega) = \omega$$

$$V_2(\omega) = 2\omega^2 - 1$$

$$V_3(\omega) = 4\omega^3 - 3\omega$$

$$V_4(\omega) = 8\omega^4 - 8\omega^2 + 1$$

Existe una fórmula de recurrencia para hallar estos polinomios:

$$V_{n+1}(\omega) - 2\omega V_n(\omega) + V_{n-1}(\omega) = 0$$

Y también:

$$V_n^2(\omega) = \frac{1}{2} [V_{2n}(\omega) + 1]$$

Los valores de  $\varphi$  para los cuales  $\cos n\varphi = \pm 1$  (en el intervalo  $-1 < \omega < 1$ ) son  $\varphi = k\pi/n$  (con  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ).

De aquí se obtienen los valores de  $\omega$ :

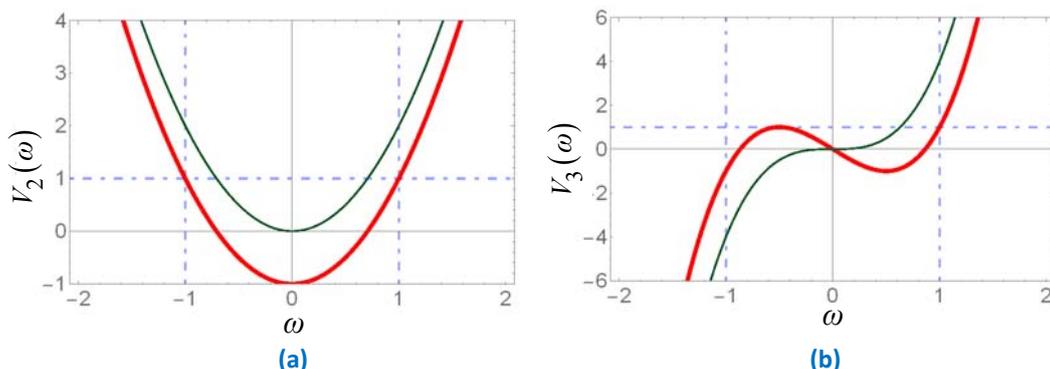
$$\omega = \cos \left[ k \frac{\pi}{n} \right] \quad \text{para } k=0, 1, 2, \dots, n-1$$

Para  $\omega \gg 1$  de (7-34) puede obtenerse:

$$V_n(\omega) \approx 2^{n-1} \omega^n \quad \text{para } \omega \gg 1 \quad (7-35)$$

Que es la expansión asintótica de  $V_n(\omega)$ .

En la **Fig. 7.12.a** se muestra la gráfica del polinomio de segundo orden  $V_2(\omega)$  en línea gruesa, la gráfica de la expansión asintótica correspondiente en línea más fina; y en la **Fig. 7.12.b** se muestra la gráfica del polinomio tercer orden  $V_3(\omega)$  en línea gruesa y su expansión asintótica en línea más fina.



**Fig. 7.12.** Polinomios de Chebyshev y sus expansiones asintóticas: (a) de segundo orden; (b) de tercer orden.

7.7.1. Aproximación de Chebyshev a la característica de amplitud

A diferencia del caso Butterworth, la aproximación de Chebyshev no es plana en la banda de paso del filtro, sino que produce una *ondulación*. Esto puede verse como una reducción de las restricciones impuestas a las características de la banda de paso, lo que se traduce en características de transición más pronunciadas que la transición de Butterworth. Debido a esta transición más rápida, un filtro Chebyshev puede satisfacer las especificaciones con filtros de menor orden que el caso Butterworth. Sin embargo, la respuesta de fase no es tan lineal como en el caso de Butterworth y, por lo tanto, si una baja distorsión de fase es una prioridad, la aproximación de Chebyshev puede no ser la mejor opción.

El objetivo es aproximar la función característica de un filtro pasa bajos ideal representada en la Fig. 7.2c mediante polinomios de Chebyshev, es decir, desea lograr que:

$$|K(j\omega)| = \varepsilon V_n(\omega); \quad 0 < \varepsilon \leq 1$$

Entonces, puede deducirse que aproximar las características de amplitud de un filtro pasa bajos ideal mediante el empleo de la aproximación de Chebyshev de orden  $n$  conduce a:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 V_n^2(\omega)}} \tag{7-36}$$

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 V_n^2(\omega)} \tag{7-37}$$

$$A(\omega) = 10 \log [1 + \varepsilon^2 V_n^2(\omega)] \tag{7-38}$$

Para determinar, al menos de manera cualitativa, la gráfica de  $|H(j\omega)|$  hay que tener en cuenta la gráfica de  $V_n^2(\omega)$ . En la Fig. 7.13 se representa  $V_n^2(\omega)$  para distintos valores de  $n$ .

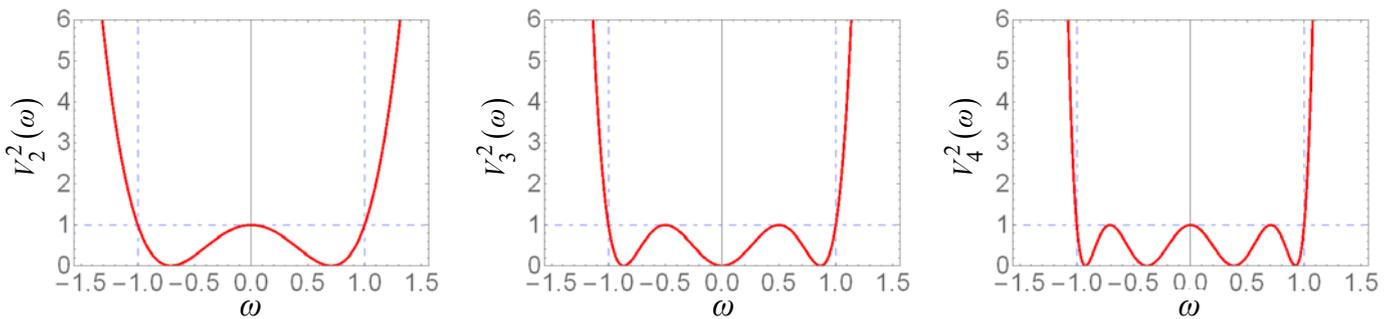


Fig. 7.13. Cuadrados de polinomios de Chebyshev: (a) de segundo orden; (b) de tercer orden (c) de cuarto orden.

Es importante observar que en la banda de paso ( $0 < \omega < 1$ )  $V_n^2(\omega)$  oscila entre 0 y 1, presentando  $n$  máximos y mínimos. Por este motivo a  $\varepsilon$  se lo denomina *coeficiente de ondulación*. Además  $V_n^2(1) = 1$  para todos los valores de  $n$ ; pero  $V_n^2(0) = 0$  para valores impares de  $n$  mientras que  $V_n^2(0) = 1$  para valores pares de  $n$ , y esto tendrá implicancias importantes en la síntesis de filtros Chebyshev pasivos de orden par.

Por lo tanto, teniendo en cuenta (7-36), dentro de la banda de paso,  $|H(j\omega)|$  oscila entre 1 y  $1/\sqrt{1 + \varepsilon^2}$ .

En la Fig. 7.14 se muestra  $|H(j\omega)|$  obtenida mediante (7-36), empleando los valores  $n = 3, n = 4$  y  $\varepsilon = 1/5$ .

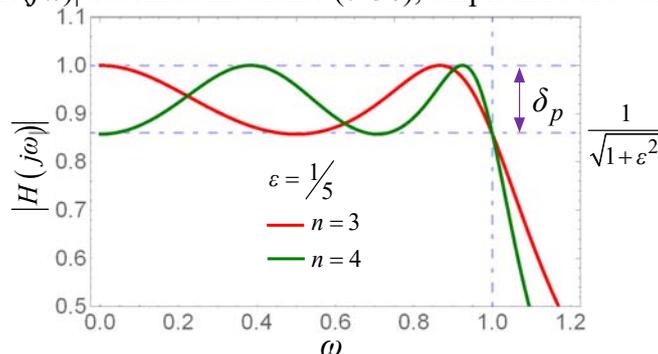


Fig. 7.14. Efecto del orden  $n$  del filtro en la aproximación a  $|H(j\omega)|$  en p.u. del filtro ideal.

De (7-36) puede deducirse que la amplitud de la ondulación o rizado en la banda de paso  $\delta_p$  está dada por:

$$\delta_p = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \quad (7-39)$$

que para valores de  $\varepsilon$  muy pequeños resulta  $\delta_p \cong \varepsilon^2$ .

Mientras que en la banda de atenuación, en la cual  $\varepsilon^2 V_n^2(\omega) \gg 1$  resulta:

$$|H(j\omega)| \cong \frac{1}{\varepsilon V_n(\omega)}$$

que puede a su vez, empleando la expansión asintótica (7-35), expresarse como:

$$|H(j\omega)| \cong \frac{1}{\varepsilon 2^{n-1} \omega^n} \quad (7-40)$$

Lo que indica que si se exigen valores pequeños de  $\varepsilon$  para disminuir la ondulación en la banda de paso, el comportamiento en la banda de atenuación empeora.

La función  $H(s)$  se puede obtener fácilmente observando que:

$$[H(s)]^2 = H(s) \cdot H(-s) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 V_n^2(\omega)} \Big|_{\omega=s/j} = \frac{K}{V_n^2(\omega) + 1/\varepsilon^2} \Big|_{\omega=s/j} \quad (7-41)$$

Para determinar la constante  $K$  se evalúa el comportamiento asintótico de (7-41) para  $\omega \rightarrow \infty$ , el cual se debe corresponder con la expresión que resulta de emplear la expansión asintótica (7-35):

$$\frac{K}{\omega^{2n}} = \frac{1}{(\varepsilon \cdot 2^{n-1} \omega^n)^2} \Rightarrow K = \frac{1}{(\varepsilon \cdot 2^{n-1})^2} \quad (7-42)$$

Con lo cual la expresión de  $H(s)$  podría construirse, teniendo en cuenta que todos sus polos deben encontrarse en el SPI como<sup>4</sup>:

$$H(s) = \frac{1/(\varepsilon \cdot 2^{n-1})}{\prod_{\forall s_k \in SPI} (s + s_k)} \quad (7-43)$$

Cuyos polos son  $n$  y corresponden a la mitad de las  $2n$  soluciones, indistintamente, de:

$$1 + \varepsilon^2 V_n^2(\omega) \Big|_{\omega=s/j} = 0 \quad \text{ó} \quad V_n^2(\omega) + 1/\varepsilon^2 \Big|_{\omega=s/j} = 0 \quad (7-44)$$

Entonces es necesario hallar, teniendo en cuenta la expresión (7-41), las raíces de:

$$1 + \varepsilon^2 V_n^2(\omega) = 1 + \varepsilon^2 \cos^2(n\varphi) = 0$$

Pero dado que será de utilidad para obtener las raíces tanto del numerador como del denominador de  $|\rho_1(s)|^2$  se resolverá en forma más genérica:

$$A + \varepsilon^2 V_n^2(\omega) = A + \varepsilon^2 \cos^2(n\varphi) = 0$$

Siendo  $A$  una constante, que a los efectos de obtener los polos de (7-37) debe valer 1. Entonces:

$$\varepsilon^2 \cos^2(n\varphi) = -A \Rightarrow \varepsilon \cos(n\varphi) = \pm j\sqrt{A}$$

Para poder trabajar con valores complejos se hace  $\varphi = \varphi_1 + j\varphi_2$ , teniendo en cuenta que:

$$\cos[n(\varphi_1 + j\varphi_2)] = \cos(n\varphi_1) \cosh(n\varphi_2) - j \operatorname{sen}(n\varphi_1) \operatorname{senh}(n\varphi_2) \quad (7-45)$$

entonces:

$$\pm j\sqrt{A} = \varepsilon \cos[n(\varphi_1 + j\varphi_2)] = \varepsilon \cos(n\varphi_1) \cosh(n\varphi_2) - j\varepsilon \operatorname{sen}(n\varphi_1) \operatorname{senh}(n\varphi_2)$$

Igualando la parte real e imaginaria resulta:

<sup>4</sup> Obsérvese que los polinomios del denominador de ambas formas de (7-41) tienen las mismas raíces; sin embargo, el producto de dichas raíces, siempre da por resultado un *polinomio normalizado* (coeficiente principal unitario). Por lo tanto, para desarrollar el denominador de  $H(s)^2$  como el producto de sus raíces, corresponde considerar la expresión con el polinomio del denominador normalizado, para la cual la constante del numerador es  $1/(\varepsilon \cdot 2^{n-1})^2$ .

$$\begin{cases} \cos(n\varphi_1) \cosh(n\varphi_2) = 0 \\ \sen(n\varphi_1) \sinh(n\varphi_2) = \pm \sqrt{A}/\varepsilon \end{cases} \quad (7-46)$$

De donde pueden determinarse  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ , sabiendo que, para todos los valores reales de  $\varphi_2$  resulta:

$$\cosh(n\varphi_2) \geq 0$$

Entonces, la primera de las dos condiciones (7-46) impone que:

$$\cos(n\varphi_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sen(n\varphi_1) = \pm 1$$

Condición que se cumple para:

$$n\varphi_1 = (2k-1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = (2k-1)\frac{\pi}{2n} \quad k=1, 2, 3, \dots$$

que reemplazado en la segunda condición (7-46) permite determinar:

$$\sinh(n\varphi_2) = \pm \sqrt{A}/\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \cosh(n\varphi_2) = \sqrt{\frac{A}{\varepsilon^2} + 1}$$

Por otra parte, sabiendo que:

$$\cosh(n\varphi_2) = \frac{1}{2}(e^{n\varphi_2} + e^{-n\varphi_2}) \quad \sinh(n\varphi_2) = \frac{1}{2}(e^{n\varphi_2} - e^{-n\varphi_2})$$

Puede hacerse:

$$e^{n\varphi_2} = \cosh(n\varphi_2) + \sinh(n\varphi_2) = \sqrt{\frac{A}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{\sqrt{A}}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad e^{\pm n\varphi_2} = \left( \sqrt{\frac{A}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{\sqrt{A}}{\varepsilon} \right)^{\pm 1/n}$$

Donde el signo más/menos conduce a valores recíprocos de las exponenciales. Ahora puede determinarse:

$$\begin{aligned} \cosh \varphi_2 &= \frac{e^{\varphi_2} + e^{-\varphi_2}}{2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \sqrt{\frac{A}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{\sqrt{A}}{\varepsilon} \right)^{1/n} + \left( \sqrt{\frac{A}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{\sqrt{A}}{\varepsilon} \right)^{-1/n} \right] \\ \sinh \varphi_2 &= \frac{e^{\varphi_2} - e^{-\varphi_2}}{2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \sqrt{\frac{A}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{\sqrt{A}}{\varepsilon} \right)^{1/n} - \left( \sqrt{\frac{A}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{\sqrt{A}}{\varepsilon} \right)^{-1/n} \right] \end{aligned}$$

Con lo que, teniendo en cuenta (7-32):

$$\cos(\varphi) = \omega = s/j$$

las raíces buscadas correspondientes a  $A + \varepsilon^2 V_n^2(\omega) = 0$  resultan ser:

$$s_k = j \cos(\varphi_1 + j\varphi_2) = \sen(\varphi_1) \sinh(\varphi_2) + j \cos(\varphi_1) \cosh(\varphi_2)$$

$$\text{con} \quad \varphi_1 = \frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad k=1, 2, 3, \dots, 2n$$

Si se separan las partes real e imaginaria de las raíces:

$$s_k = \alpha_k + j\beta_k \quad k=1, 2, 3, \dots, 2n \quad (7-47)$$

resulta:

$$\alpha_k = \sen\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \sinh(\varphi_2) = \frac{1}{2} \sen\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \left[ \left( \sqrt{\frac{A}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{\sqrt{A}}{\varepsilon} \right)^{1/n} - \left( \sqrt{\frac{A}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{\sqrt{A}}{\varepsilon} \right)^{-1/n} \right] \quad (7-48)$$

$$\beta_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \cosh(\varphi_2) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \left[ \left( \sqrt{\frac{A}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{\sqrt{A}}{\varepsilon} \right)^{1/n} + \left( \sqrt{\frac{A}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{\sqrt{A}}{\varepsilon} \right)^{-1/n} \right] \quad (7-49)$$

Es decir:

$$\frac{\alpha_k^2}{\sinh^2(\varphi_2)} + \frac{\beta_k^2}{\cosh^2(\varphi_2)} = 1$$

es el lugar geométrico de las raíces y es la ecuación de una elipse en el plano  $s$  de *semieje menor* ubicado sobre el eje  $\sigma$  e igual a  $\sinh(\varphi_2)$ , y *semieje mayor* ubicado sobre el eje  $\omega$  y de valor  $\cosh(\varphi_2)$ .

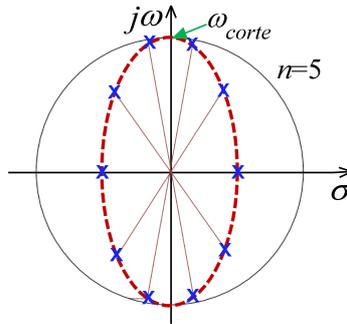
Obsérvese que  $\alpha_k$  nunca se anula para todos los valores de  $k$  (el argumento de  $\sin(\varphi_1)$  nunca resulta un número entero de  $\pi$ ). Por lo tanto las raíces  $s_k$  tienen distribución simétrica respecto del eje  $j\omega$  pero no se encuentran sobre dicho eje.

Esta elipse se muestra en la **Fig. 7.15**, con la ubicación de los polos cuando  $n=5$ .

El *semieje mayor* de la elipse resulta:

$$\omega_{corte} = \cosh(\varphi_2) \tag{7-50}$$

Que es la pulsación de corte del filtro pasa bajos (la mayor pulsación a la cual  $|H(j\omega)|$  es igual al rizado).



**Fig. 7.15.** Ubicación de las raíces dadas por (7-47), (7-48) y (7-49).

**7.7.2. Patrón o plantilla de especificaciones**

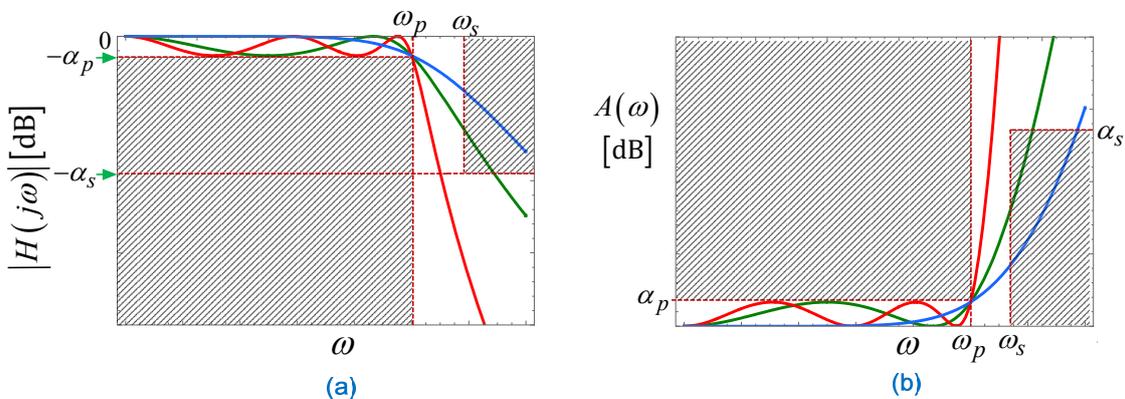
De la **Fig. 7.14** y de la expresión (7-39) se deduce que para el filtro Chebyshev pasa bajos normalizado, tanto  $|H(j\omega)|_{dB}$  como  $A(\omega)$  tienen, dentro de la banda de paso, un rizado en dB que es  $-\alpha_p$  para  $|H(j\omega)|_{dB}$  y  $\alpha_p$  para  $A(\omega)$ , siendo:

$$\alpha_p = 20 \log \sqrt{1 + \varepsilon^2} = 10 \log(1 + \varepsilon^2) \tag{7-51}$$

Además para la pulsación correspondiente al *límite* de la banda de *paso* resulta  $|H(j\omega_p)|_{dB} = -\alpha_p$  y  $A(\omega_p) = \alpha_p$  (el subíndice  $p$  refiere a *paso*).

En la **Fig. 7.16a** se grafican tres curvas que corresponden a  $|H(j\omega)|_{dB}$  para distintos valores de  $n$ ; y en la **Fig. 7.16b** se muestran las correspondientes curvas para  $A(\omega)$ . Puede comprobarse que, en la banda de supresión, la pendiente de la curva resulta más pronunciada al aumentar  $n$ . Por lo tanto se puede afirmar que el aumento de  $n$  mejora la aproximación a la característica ideal en la banda de supresión, mientras que prácticamente no tiene efecto sobre la aproximación que se logra en la banda de paso.

En la misma **Fig. 7.16** se muestra la plantilla o patrón de especificaciones del filtro pasa bajos que se desea sintetizar, la cual está determinada por los pares  $(\omega_p; \alpha_p)$  y  $(\omega_s; \alpha_s)$  especificados.



**Fig. 7.16.** Patrón de especificación del filtro pasa bajos a sintetizar: (a)  $|H(j\omega)|$  en p.u.; (b) atenuación en dB.

Una especificación con una banda de transición pequeña requerirá un filtro de orden elevado, y un filtro que cumpla con requisitos mayores de lo necesario será más costoso de implementar. Debido a que el costo de un filtro aumenta con el orden del filtro, lógicamente resulta sensato minimizar el orden del filtro. Sin

embargo, en muchos casos puede resultar ventajoso diseñar un filtro con un orden algo mayor que lo estrictamente necesario.

### 7.7.3. Determinación de los parámetros de diseño

Nuevamente, como en el caso de Butterworth, existen dos parámetros de diseño  $\varepsilon$  y  $n$  los cuales deben determinarse a partir de las especificaciones; y si se adoptan correctamente, la curva aproximada no debe atravesar las regiones sombreadas de la plantilla de especificaciones.

Uno de los requisitos a cumplir es el de atenuación máxima  $\alpha_p$  admitida en la banda de paso, especificada para la pulsación  $\omega_p$ .

Si  $|H(j\omega)|$  es una transferencia tensión de salida - tensión de entrada, para hablar en términos de *atenuación* hay que considerar que:

$$A(\omega) = 20 \log \left( \frac{1}{|H(j\omega)|} \right) = 20 \log \sqrt{1 + [\varepsilon V_n(\omega)]^2} = 10 \log [1 + \varepsilon^2 V_n^2(\omega)]$$

La *atenuación máxima* en la banda de paso expresada en dB se corresponderá con los valores máximos de  $V_n(\omega)$  en la banda de paso, es decir:  $V_n(\omega)=1$ . En consecuencia:

$$\alpha_p = 10 \log (1 + \varepsilon^2)$$

es decir:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1\alpha_p} - 1} \quad (7-52)$$

Por lo tanto, el coeficiente de ondulación  $\varepsilon$  queda determinado por la máxima atenuación admitida en la banda de paso. Por otra parte, el polinomio de Chebyshev de orden  $n$  puede escribirse como:

$$V_n(\omega) = \cos(n \cos^{-1} \omega) \quad \text{para } \omega \leq 1$$

$$V_n(\omega) = \cosh(n \cosh^{-1} \omega) \quad \text{para } \omega \gg 1$$

Es decir que la atenuación fuera de la banda de paso (banda de supresión) puede escribirse como:

$$A(\omega) = 10 \log \left\{ 1 + [\varepsilon V_n(\omega)]^2 \right\} = 10 \log \left\{ 1 + \left[ \varepsilon \cosh(n \cosh^{-1} \omega) \right]^2 \right\}$$

Un criterio de diseño habitual es especificar la *atenuación mínima* admitida a una determinada pulsación  $\omega_s$  en la banda de supresión, siendo entonces:

$$A(\omega_s) = 10 \log \left\{ 1 + \left[ \varepsilon \cosh \left( n \cosh^{-1} \left( \frac{\omega_s}{\omega_p} \right) \right) \right]^2 \right\} \geq \alpha_s \Rightarrow n \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{0,1\alpha_s} - 1}{10^{0,1\alpha_p} - 1}}}{\cosh^{-1} \left( \frac{\omega_s}{\omega_p} \right)} \quad (7-53)$$

Otra forma es considerar la aproximación asintótica dada por  $V_n(\omega) = 2^{n-1} \omega^n$ . Entonces:

$$A(\omega_s) = 10 \log \left\{ 1 + \left[ \varepsilon \cdot 2^{n-1} \left( \frac{\omega_s}{\omega_p} \right)^n \right]^2 \right\} \geq \alpha_s \Rightarrow n \geq \frac{\log \left[ 2 \cdot \sqrt{\frac{10^{0,1\alpha_s} - 1}{10^{0,1\alpha_p} - 1}} \right]}{\log \left( \frac{2 \cdot \omega_s}{\omega_p} \right)} \quad (7-54)$$

### 7.7.4. Polinomios de Chebyshev normalizados

De manera similar a lo mencionado en 7.6.4 para la aproximación de Butterworth, la transferencia  $H(s)$  de un filtro Chebyshev pasa bajos normalizado de orden  $n$  tendrá, a partir de (7-43), la siguiente forma:

$$H(s) = \frac{1/(\varepsilon \cdot 2^{n-1})}{(s+s_1)(s+s_2)\dots(s+s_n)} = \frac{1/(\varepsilon \cdot 2^{n-1})}{s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_2s^2 + c_1s + c_0} = \frac{1/(\varepsilon \cdot 2^{n-1})}{V_n^*(s)} \quad (7-55)$$

En este caso, el denominador resulta del producto de las raíces obtenidas con (7-47), (7-48) y (7-49) considerando el valor de  $A=1$ , que se encuentren en el semiplano izquierdo. De este modo, el denominador resulta un polinomio *normalizado* (la mayor potencia de  $s$  tiene coeficiente 1) de orden  $n$ , denominado *polinomio de Chebyshev normalizado*  $V_n^*(s)$ , el cual se determina para diferentes valores de  $\varepsilon$  indicados indirectamente mediante la máxima atenuación obtenida en la banda de paso  $\alpha_p$ , según la expresión (7-52). Los polinomios de Chebyshev normalizados, para los valores más bajos de  $n$  y para  $\alpha_p=1$  dB ( $\varepsilon=0,5$ ) resultan los siguientes:

$$V_1^*(s) = s + 1,96523$$

$$V_2^*(s) = s^2 + 1,0977s + 1,1025$$

$$V_3^*(s) = (s + 0,49417)(s^2 + 0,49417s + 0,9942) = s^3 + 0,9983s^2 + 1,2384s + 0,4913$$

$$V_4^*(s) = (s^2 + 0,6737s + 0,2794)(s^2 + 0,2791s + 0,9865) = s^4 + 0,9528s^3 + 0,9983s^2 + 0,7426s + 0,2756$$

Para  $n \geq 2$  los polinomios  $V_n^*(s)$  tienen pares de raíces complejas conjugadas que son polos de  $H(s)$ .

En manuales y bibliografía dedicada al diseño de filtros es normal encontrar tablas que involucran distintas formas de resumir la información concerniente a los polinomios  $V_n^*(s)$ . Una forma es presentar los coeficientes  $c_i$  de cada polinomio normalizado, tal como se muestra en la **Tabla 7-3** y en la **Tabla 7-5** hasta el orden 10. Otra forma, frecuentemente encontrada en el diseño de filtros activos y digitales, es presentar los coeficientes de los factores de segundo orden y, para  $n$  impar del factor de primer orden, que corresponden a cada polinomio  $V_n^*(s)$ , tal como se hizo más arriba, para  $V_3^*(s)$  y  $V_4^*(s)$ . Este formato de presentación de la información necesaria se muestra en la **Tabla 7-4** y en la **Tabla 7-6**.

A partir de los coeficientes de cada factor de primer y segundo orden que se obtiene de las **Tablas 7-4** y **7-6** y otras similares existentes en la bibliografía, es posible calcular los componentes de cada etapa de un filtro activo que, dispuestas en cascada, permiten obtener el orden del filtro requerido.

En estas tablas  $n$  es el orden del polinomio (orden del filtro),  $i$  es el índice del factor correspondiente (o sección del filtro) y, para cada factor, se indican las raíces correspondientes  $s_i = \alpha_i \pm j\beta_i$  y además el coeficiente de amortiguamiento  $\xi_i$ , la pulsación de quiebre de la asíntota de alta frecuencia  $\omega_i$  y el factor de mérito  $Q_i$ . La secuencia de ordenamiento se efectúa en orden creciente del factor  $Q_i$ , o lo que es equivalente, en orden decreciente del coeficiente de amortiguamiento  $\xi_i$ .

**Tabla 7-3.** Coeficientes de los polinomios normalizados de Chebyshev,  $c_n s^n + c_{n-1} s_{n-1} + \dots + c_1 s + c_0$ , para  $\alpha_p=1$  dB ( $\varepsilon=0,5$ ).

$n$	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$	$c_7$	$c_8$	$c_9$	$c_{10}$
1	1,96523	1									
2	1,10251	1,09773	1								
3	0,491307	1,23841	0,988341	1							
4	0,275628	0,74262	1,45392	0,95281	1						
5	0,122827	0,58053	0,97440	1,68882	0,93682	1					
6	0,068907	0,30708	0,93935	1,20214	1,93082	0,92825	1				
7	0,030707	0,21367	0,54862	1,35754	1,42879	2,17608	0,92312	1			
8	0,017227	0,10735	0,44783	0,84682	1,83690	1,65516	2,42303	0,91981	1		
9	0,007677	0,07060	0,24419	0,78631	1,20161	2,37812	1,88148	2,67095	0,91755	1	
10	0,004307	0,03450	0,18245	0,45539	1,24449	1,61299	2,98151	2,10785	2,91947	0,91593	1

**Tabla 7-4.** Coeficientes y características de los factores de primer orden ( $s+a_i$ ) y de segundo orden ( $b_i s^2+a_i s+ 1$ ) de los polinomios normalizados de Chebyshev para  $\alpha_p=1\text{dB}$  ( $\varepsilon=0,5$ ).

$n$	$i$	$a_i$	$b_i$	$Q_i$	$\omega_i$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$\xi_i$
1	1	3,9305			1,9652	1,9652		
2	1	1,0977	1,1025	0,91	1,0500	0,5489	0,8951	0,5489
3	1	0,9883			0,4942	0,4942		
	2	0,4942	0,9942	2,02	0,9971	0,2471	0,9660	0,2471
4	1	0,6737	0,2794	1,48	0,5286	0,3369	0,4073	0,3369
	2	0,2791	0,9865	3,58	0,9932	0,1395	0,9834	0,1395
5	1	0,5790			0,2895	0,2895		
	2	0,4684	0,4293	2,13	0,6552	0,2342	0,6119	0,2342
	3	0,1789	0,9883	5,59	0,9941	0,0895	0,9901	0,0895
6	1	0,4641	0,1247	2,15	0,3531	0,2321	0,2662	0,2321
	2	0,3398	0,5577	2,94	0,7468	0,1699	0,7272	0,1699
	3	0,1244	0,9907	8,04	0,9954	0,0622	0,9934	0,0622
7	1	0,4108			0,2054	0,2054		
	2	0,3701	0,2305	2,70	0,4801	0,1851	0,4429	0,1851
	3	0,2561	0,6535	3,90	0,8084	0,1281	0,7982	0,1281
	4	0,0914	0,9927	10,94	0,9963	0,0457	0,9953	0,0457
8	1	0,3520	0,0703	2,84	0,2651	0,1760	0,1982	0,1760
	2	0,2984	0,3409	3,35	0,5838	0,1492	0,5644	0,1492
	3	0,1994	0,7235	5,02	0,8506	0,0997	0,8448	0,0997
	4	0,0700	0,9941	14,28	0,9971	0,0350	0,9965	0,0350
9	1	0,3187		3,14	0,1593	0,1593		0,1593
	2	0,2994	0,1424	3,34	0,3773	0,1497	0,3463	0,1497
	3	0,2441	0,4386	4,10	0,6622	0,1221	0,6509	0,1221
	4	0,1593	0,7754	6,28	0,8806	0,0797	0,8769	0,0797
	5	0,0553	0,9952	18,07	0,9976	0,0277	0,9972	0,0277
10	1	0,2830	0,0450	3,53	0,2121	0,1415	0,1580	0,1415
	2	0,2553	0,2266	3,92	0,4761	0,1277	0,4586	0,1277
	3	0,2026	0,5205	4,94	0,7215	0,1013	0,7143	0,1013
	4	0,1301	0,8144	7,69	0,9025	0,0650	0,9001	0,0650
	5	0,0448	0,9961	22,31	0,9980	0,0224	0,9978	0,0224

**Tabla 7-5.** Coeficientes de los polinomios normalizados de Chebyshev,  $c_n s^n + c_{n-1} s_{n-1} + \dots + c_1 s + c_0$ , para  $\alpha_p=0,5\text{dB}$  ( $\varepsilon=0,349$ ).

$n$	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$	$c_7$	$c_8$	$c_9$	$c_{10}$
1	2,86278	1									
2	1,5162	1,42562	1								
3	0,715694	1,5349	1,25291	1							
4	0,379051	1,02546	1,71687	1,19739	1						
5	0,178923	0,75252	1,30957	1,93737	1,17249	1					
6	0,094763	0,43237	1,17186	1,58976	2,17184	1,15918	1				
7	0,044731	0,28207	0,75565	1,64790	1,86941	2,41265	1,15122	1			
8	0,023691	0,15254	0,57356	1,14859	2,18402	2,14922	2,65675	1,14608	1		
9	0,011183	0,09412	0,34082	0,98362	1,61139	2,78150	2,42933	2,90273	1,14257	1	
10	0,005923	0,04929	0,23727	0,62697	1,52743	2,14424	3,44093	2,70974	3,14988	1,14007	1

**Tabla 7-6.** Coeficientes y características de los factores de primer orden ( $s+a_i$ ) y de segundo orden ( $b_i s^2 + a_i s + 1$ ) de los polinomios normalizados de Chebyshev para  $\alpha_p=0,5\text{dB}$  ( $\varepsilon=0,349$ ).

$n$	$i$	$a_i$	$b_i$	$Q_i$	$\omega_i$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$\xi_i$
1	1	5,7256			2,8628	2,8628		
2	1	1,4256	1,5162	0,70	1,2313	0,7128	1,0040	0,7128
3	1	1,2529			0,6265	0,6265		
	2	0,6265	1,1425	1,60	1,0689	0,3132	1,0219	0,3132
4	1	0,8467	0,3564	1,18	0,5970	0,4233	0,4209	0,4233
	2	0,3507	1,0635	2,85	1,0313	0,1754	1,0163	0,1754
5	1	0,7246			0,3623	0,3623		
	2	0,5862	0,4768	1,71	0,6905	0,2931	0,6252	0,2931
	3	0,2239	1,0358	4,47	1,0177	0,1120	1,0116	0,1120
6	1	0,5796	0,1570	1,73	0,3962	0,2898	0,2702	0,2898
	2	0,4243	0,5900	2,36	0,7681	0,2121	0,7382	0,2121
	3	0,1553	1,0230	6,44	1,0114	0,0777	1,0085	0,0777
7	1	0,5123			0,2562	0,2562		
	2	0,4616	0,2539	2,17	0,5039	0,2308	0,4479	0,2308
	3	0,3194	0,6769	3,13	0,8227	0,1597	0,8071	0,1597
	4	0,1140	1,0161	8,77	1,0080	0,0570	1,0064	0,0570
8	1	0,4386	0,0881	2,28	0,2967	0,2193	0,1999	0,2193
	2	0,3718	0,3587	2,69	0,5989	0,1859	0,5693	0,1859
	3	0,2484	0,7413	4,03	0,8610	0,1242	0,8520	0,1242
	4	0,0872	1,0119	11,46	1,0059	0,0436	1,0050	0,0436
9	1	0,3968		2,52	0,1984	0,1984		0,1984
	2	0,3729	0,1563	2,68	0,3954	0,1864	0,3487	0,1864
	3	0,3040	0,4525	3,29	0,6727	0,1520	0,6553	0,1520
	4	0,1984	0,7894	5,04	0,8885	0,0992	0,8829	0,0992
	5	0,0689	1,0092	14,51	1,0046	0,0345	1,0040	0,0345
10	1	0,3523	0,0563	2,84	0,2372	0,1762	0,1589	0,1762
	2	0,3178	0,2379	3,15	0,4878	0,1589	0,4612	0,1589
	3	0,2522	0,5318	3,96	0,7293	0,1261	0,7183	0,1261
	4	0,1619	0,8257	6,18	0,9087	0,0810	0,9051	0,0810
	5	0,0558	1,0073	17,92	1,0037	0,0279	1,0033	0,0279

### Ejemplo 7.2.

Obtener la función de transferencia  $H(s)$  de un filtro *pasa bajos* empleando la aproximación de Chebyshev. La banda de paso debe ser 10 kHz con una variación de amplitud que no supere 1,4 dB. Además para frecuencias superiores a 15 kHz debe atenuar como mínimo 20 dB.

### Resolución

Adecuando las especificaciones a la notación empleada:

$$f_p = 10 \text{ kHz}$$

$$\alpha_p = A_{\text{máx}} = 1,4 \text{ dB}$$

$$f_s = 15 \text{ kHz}$$

$$\alpha_s = A_{\text{mín}} = 20 \text{ dB}$$

#### (1) Calcular los parámetros de diseño del filtro

El coeficiente de ondulación  $\varepsilon$  se obtiene a partir de la especificación de la máxima atenuación admitida en la banda de paso:

$$10 \cdot \log[1 + \varepsilon^2] = \alpha_p \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \sqrt{10^{0,1 \cdot \alpha_p} - 1} = \sqrt{10^{0,1 \cdot 1,4} - 1} = 0,6167$$

El orden  $n$  del filtro se obtiene a partir de la especificación de la atenuación mínima  $\alpha_s$  admitida en la banda de supresión:

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{0,1\alpha_s} - 1}{10^{0,1\alpha_p} - 1}}}{\cosh^{-1} \left( \frac{\omega_s}{\omega_p} \right)} = \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{0,1,20} - 1}{10^{0,1,4} - 1}}}{\cosh^{-1} \left( \frac{2\pi \cdot 15 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 10 \cdot 10^3} \right)} = 3,609$$

Entonces resulta  $\varepsilon=0,617$  y  $n=4$ .

### (2) Obtener $H(s)$ del pasa bajos normalizado

Se emplea (7-43) teniendo en cuenta que esta expresión se encuentra normalizada, en este caso respecto de  $\omega_p=2\pi \cdot 10^4$  rad/s:

$$\overline{H(s)} = \frac{1/(\varepsilon \cdot 2^{n-1})}{\prod_{\forall s_k \in SPI} (s + s_k)}$$

Los 4 polos son de la forma:

$$s_k = \alpha_k + j\beta_k$$

Y son los 4 que cumplen  $\alpha_k < 0$  con  $\alpha_k$  dada por (7-48) y  $\beta_k$  por (7-49), con  $A=1$  y  $k=1, 2, \dots, 8$ :

$$\alpha_k = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left( \frac{(2k-1)\pi}{8} \right) \left[ \left( \sqrt{\frac{1}{0,617^2} + 1} + \frac{1}{0,617} \right)^{1/4} - \left( \sqrt{\frac{1}{0,617^2} + 1} + \frac{1}{0,617} \right)^{-1/4} \right]$$

$$\beta_k = \frac{1}{2} \operatorname{cos} \left( \frac{(2k-1)\pi}{8} \right) \left[ \left( \sqrt{\frac{1}{0,617^2} + 1} + \frac{1}{0,617} \right)^{1/4} + \left( \sqrt{\frac{1}{0,617^2} + 1} + \frac{1}{0,617} \right)^{-1/4} \right]$$

De manera que los 4 polos del SPI resultan:

$$-0,1226 \pm j 0,9701 ; -0,2959 \pm j 0,4018$$

Ahora puede construirse la expresión de  $H(s)$  del pasa bajos normalizado:

$$\overline{H(s)} = \frac{1/(\varepsilon \cdot 2^{n-1})}{\prod_{\forall s_k \in SPI} (s + s_k)} = \frac{1/(0,617 \cdot 2^3)}{(s + 0,12 - j0,97)(s + 0,12 + j0,97)(s + 0,3 - j0,4)(s + 0,3 + j0,4)}$$

$$\overline{H(s)} = \frac{0,2027}{s^4 + 0,837 \cdot s^3 + 1,35 \cdot s^2 + 0,6269 \cdot s + 0,2381}$$

Expresión que se encuentra normalizada respecto de  $\omega_p=2\pi \cdot 10^4$  rad/s.

Obsérvese que una vez determinados  $n$  y  $\varepsilon$  se pudo haber escrito directamente la expresión de  $H(s)$  a partir de una tabla que corresponda a  $\alpha_p=1,4$  dB, equivalente a la **Tabla 7-3** ( $\alpha_p=1$  dB) o **Tabla 7-5** ( $\alpha_p=0,5$  dB).

### (3) Obtener $H(s)$ del pasa bajos desnormalizado

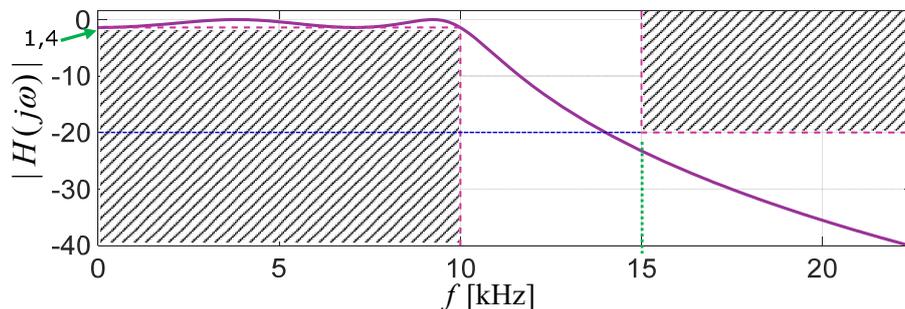
$$H(s) = \frac{0,2027}{\left( \frac{\omega_p^-}{\omega_p} s \right)^4 + 0,837 \cdot \left( \frac{\omega_p^-}{\omega_p} s \right)^3 + 1,35 \cdot \left( \frac{\omega_p^-}{\omega_p} s \right)^2 + 0,6269 \cdot \left( \frac{\omega_p^-}{\omega_p} s \right) + 0,2381}$$

$$H(s) = \frac{0,2027}{\left( \frac{s}{\omega_p} \right)^4 + 0,837 \cdot \left( \frac{s}{\omega_p} \right)^3 + 1,35 \cdot \left( \frac{s}{\omega_p} \right)^2 + 0,6269 \cdot \left( \frac{s}{\omega_p} \right) + 0,2381}$$

$$H(s) = \frac{0,2027 \cdot \omega_p^4}{s^4 + 0,837 \cdot \omega_p \cdot s^3 + 1,35 \cdot \omega_p^2 \cdot s^2 + 0,6269 \cdot \omega_p^3 \cdot s + 0,2381 \cdot \omega_p^4}$$

$$H(s) = \frac{3,159 \cdot 10^{18}}{s^4 + 5,259 \cdot 10^4 \cdot s^3 + 5,331 \cdot 10^9 \cdot s^2 + 1,555 \cdot 10^{14} \cdot s + 3,711 \cdot 10^{18}}$$

Verificándose gráficamente el cumplimiento de las especificaciones tal como se muestra en la **Fig. 7.17**.



**Fig. 7.17.** Función  $|H(j\omega)|$  en dB del filtro sintetizado.

### 7.7.5. Comportamiento asintótico de la aproximación de Chebyshev

Tal como se vio en **0**, el comportamiento asintótico la función de Butterworth, cuando  $\omega \gg 1$ , expresada como atenuación en dB resulta  $20 \cdot n$  dB/dec ó  $6 \cdot n$  dB/oct, partiendo de  $\omega=1$ .

Por otra parte, cabe recordar que la función de Chebyshev, para  $\omega \gg 1$  está dada por (7-40):

$$|H(j\omega)| \cong \frac{1}{\varepsilon 2^{n-1} \omega^n}$$

Que expresada en dB como atenuación resulta:

$$20 \log \frac{1}{|H(j\omega)|} = 20 \log 2^{n-1} + 20 \log \varepsilon + 20 \log \omega^n = 6(n-1) + 20 \log \varepsilon + 20 \cdot n \log \omega$$

Esta expresión difiere respecto de lo obtenido para la aproximación de Butterworth, en dos términos que son constantes en dB, siendo uno positivo  $6(n-1)$ , y el otro negativo  $20 \log(\varepsilon)$  ya que  $\varepsilon < 1$ ; pero el comportamiento asintótico resulta igualmente una recta de pendiente  $20n$  dB/década.

### 7.8. Bibliografía

- [1] W. Warzanskyj Poliscuk. *Métodos de Síntesis de Redes Lineales*. Capítulo X: "Síntesis de Filtros por el Método de Aproximación". Universidad Politécnica de Madrid. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicaciones. 1977. ISBN 978-84-740-2054-9.
- [2] R. W. Daniels. *Approximation methods for electronic filter design*. Capítulo I: "Introduction". Capítulo III: "The Chebyshev Approximation". McGraw Hill. New York, 1974. ISBN 978-00-701-5308-0.
- [3] M. E. Van Valkenburg. *Modern Network Synthesis*. Capítulo 13: "Approximation II". John Wiley & Sons. New York, 1960.

---

# Capítulo 8

## Transformaciones de Frecuencia.

---

### 8.1. Introducción

Las características de un filtro pasa bajos pueden ser extendidas a otros tipos de filtros mediante el uso de transformaciones de la variable frecuencia compleja, modificando así las características de las funciones racionales que caracterizan a los filtros.

Para los efectos del análisis, se denominará  $\bar{s} = \bar{\sigma} + j\bar{\omega}$  a la frecuencia compleja que es la variable independiente de las funciones racionales que caracterizan al prototipo pasa bajos. Mientras que  $s = \sigma + j\omega$  designará a la frecuencia transformada.

Lo que se pretende es hallar una relación entre  $\bar{s}$  y  $s$  que convierta a la función  $H(\bar{s})$ , que caracteriza al filtro pasa bajos prototipo, en otra  $H(s)$  apropiada para definir el otro tipo de filtro que nos interesa.

La inmitancia de los elementos  $R$  de una red no depende de la frecuencia, mientras que la inmitancia de los elementos  $L$  y  $C$  sí. De hecho, ambos productos  $sL$  y  $sC$ , determinan el comportamiento de la red en función de la frecuencia. Entonces, si se reemplaza a  $s$  por una función de  $s$ , el comportamiento de sus funciones características en función de  $\omega$  cambiará. En el diagrama esquemático de la red, cada elemento  $L$  y  $C$  se reemplazará por dipolos  $LC$ , los cuales serán realizables si se elige convenientemente la función de transformación.

Existe un tipo de tales funciones que reemplaza a la vez cada elemento  $L$  y  $C$  por *combinaciones realizables* de otros elementos  $L$  y  $C$ , logrando simultáneamente cambios útiles sobre la función  $H(s)$ . Dichas funciones son aquellas que reemplazan a  $s$  por una función real positiva impar, es decir una función inmitancia  $L-C$ .

Es decir, la relación buscada puede escribirse como:

$$\bar{s} = Z(s)$$

donde  $Z(s)$  tiene las características de una función inmitancia, que transforma una inmitancia en el plano  $\bar{s}$  en otra inmitancia en el plano  $s$ , lo cual resultará de gran utilidad práctica, como se verá más adelante.

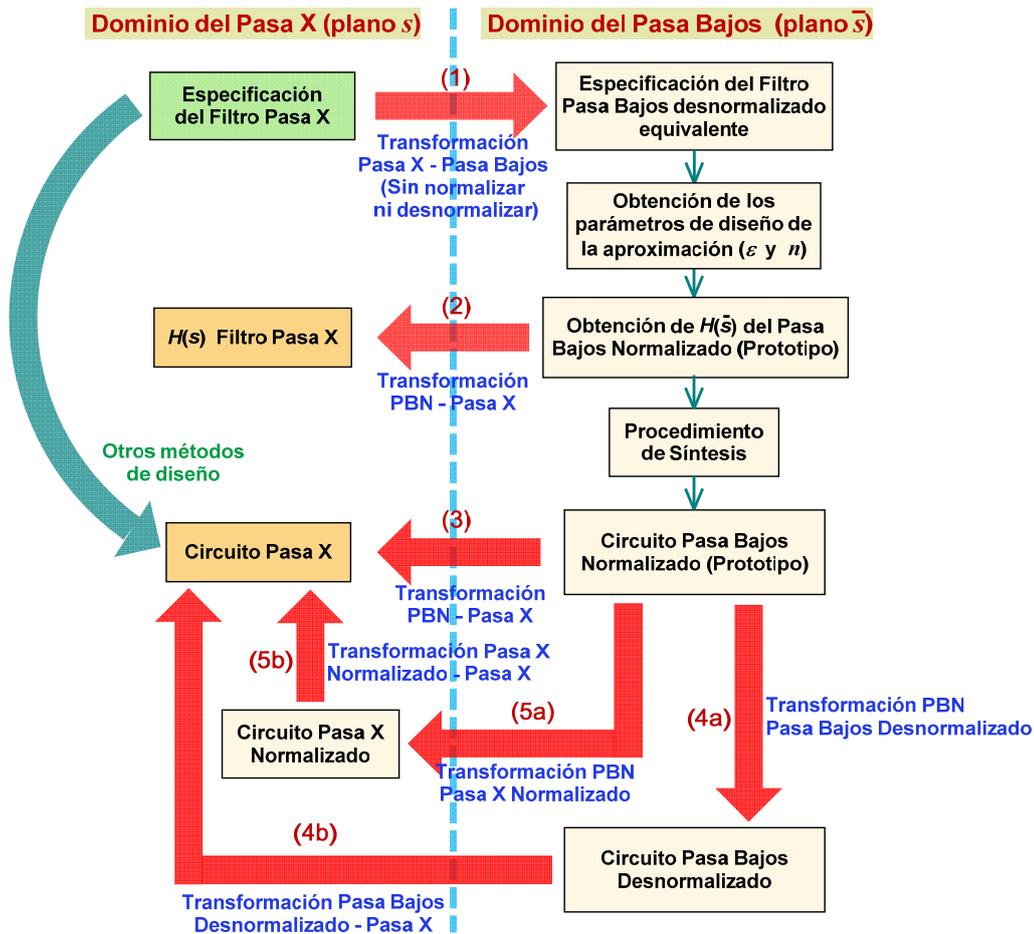
Lo que realmente sucede en el circuito pasa bajos prototipo es que cada elemento  $L$  y  $C$  se reemplaza por un dipolo  $L-C$  realizable, lo cual asegura la realizabilidad del circuito transformado al nuevo dominio.

Las transformaciones que se considerarán en este capítulo se designarán genéricamente como *pasa bajos - pasa X*, siendo *pasa X* una notación abreviada y genérica, para cualquiera de los siguientes filtros: pasa bajos, pasa altos, pasa banda, supresor de banda, etc. y son aplicables a:

- la especificación del filtro pasa X requerido para obtener la especificación del filtro pasa bajos equivalente.

- las características de amplitud, que usualmente es la función de transferencia  $H(\bar{s})$  del filtro pasa bajos normalizado (PBN), para obtener la función de transferencia  $H(s)$  del filtro pasa X resultante que cumple con las especificaciones.
- los elementos del circuito del filtro PBN, para obtener el circuito del filtro pasa X resultante que cumple con las especificaciones.

La utilidad de cada una de estas aplicaciones de una dada función de transformación se aclara con el diagrama de la **Fig. 8.1**, que representa el procedimiento para obtener, a partir de las especificaciones de un filtro pasa X, ya sea directamente el circuito del filtro pasivo LC (capítulo 9); o bien la función  $H(s)$  que será de utilidad para la síntesis del filtro activo (capítulo 10) o digital (capítulo 11).



**Fig. 8.1.** Aplicación de las funciones de transformación para determinar la función de transferencia o sintetizar un filtro.

En el plano  $\bar{s}$  los puntos singulares del filtro pasa bajos normalizado son tres:

- $\bar{s} = 0$  que es el centro de la banda de paso (teniendo en cuenta las frecuencias negativas),
- $\bar{s} = \pm j1$  que es límite de la banda de paso y
- $\bar{s} = \infty$  que corresponde al centro de la banda de supresión.

En lo que sigue se presentarán, en grado creciente de complejidad, las transformaciones más profusamente empleadas, y se estudiarán a partir de su aplicación a los tres puntos singulares del filtro pasa bajos en el plano  $\bar{s}$ .

### 8.1.1. Transformación proporcional a la frecuencia

La función de *transformación proporcional a la frecuencia* es la función empleada para normalizar y desnormalizar el filtro pasa bajos:

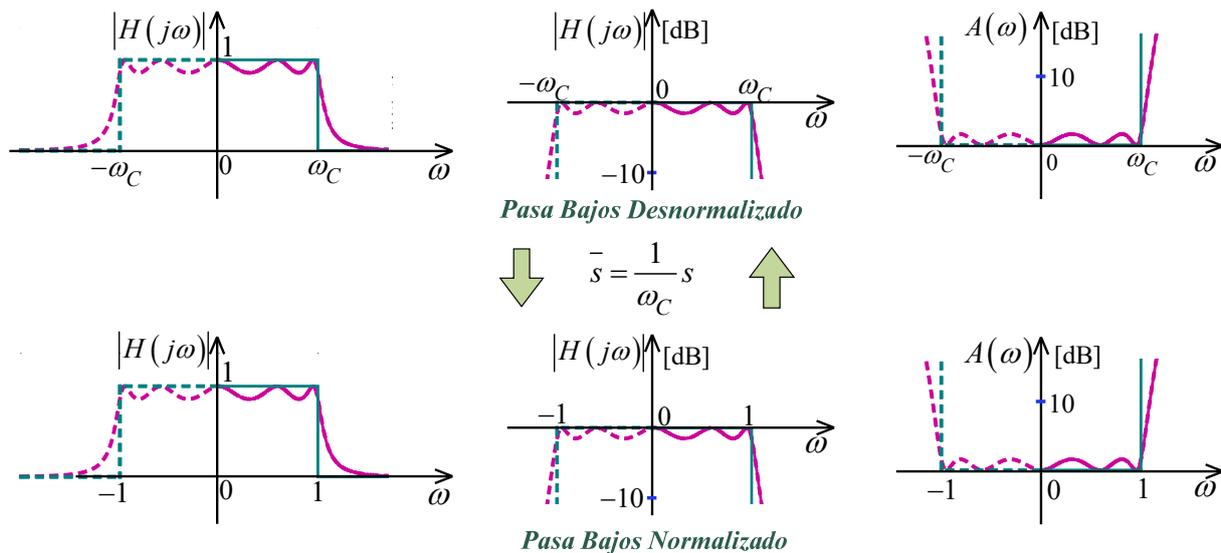
$$\bar{s} = \frac{1}{\omega_C} s \tag{8-1}$$

y corresponde a la normalización-desnormalización de frecuencias ya vista, siendo en este caso  $\omega_C$  la pulsación límite de la banda de paso del filtro pasa bajos desnormalizado.

En efecto, aplicada a los tres puntos característicos del filtro pasa bajos en el plano  $\bar{s}$  resulta:

$$\begin{cases} \bar{s} = 0 & \Leftrightarrow & s = 0 \\ \bar{s} = \infty & \Leftrightarrow & s = \infty \\ \bar{s} = \pm j1 & \Leftrightarrow & s = \pm j\omega_C \end{cases}$$

En la **Fig. 8.2** se muestra el resultado de aplicar la transformación proporcional a las características de amplitud de un filtro pasa bajos, tanto para el caso ideal como para las características aproximadas.



**Fig. 8.2.** Transformación proporcional a la frecuencia o pasa bajos desnormalizado - pasa bajos normalizado.

Esta transformación puede aplicarse *en ambos sentidos* entre ambos dominios: el dominio del pasa bajos *desnormalizado* con banda de paso limitada a la pulsación  $\omega_C$  y el dominio del pasa bajos *normalizado*, es decir con pulsación de corte unitaria y amplitud unitaria en la banda de paso. Sin embargo esta transformación por lo general se aplica ya sea a la función de transferencia del pasa bajos normalizado para obtener función de transferencia del pasa bajos desnormalizado – transformación (2) en la **Fig. 8.1** –, o bien al circuito pasa bajos normalizado, resultante del procedimiento de síntesis, para obtener el circuito desnormalizado – transformación (4a) en la **Fig. 8.1** –.

### 8.1.2. Transformación recíproca de la frecuencia

La transformación que sigue en grado de complejidad es la *recíproca*, cuya forma es la siguiente:

$$\bar{s} = \frac{K}{s} \tag{8-2}$$

Y es una función real positiva impar de un solo término.

Produce un cambio de frecuencias bajas en altas, y viceversa. Es decir esta transformación intercambia el origen con el infinito y viceversa, entre los planos  $\bar{s}$  y  $s$ . En otras palabras, luego de la transformación desde el plano  $\bar{s}$  al plano  $s$ , la banda de paso estará centrada en el infinito y el comportamiento asintótico de la atenuación se traslada al origen.

#### Transformación pasa bajos - pasa altos sin normalizar ni desnormalizar

La siguiente transformación se aplica en cualquiera de los dos sentidos, cuando se desea que el ancho de banda para ambos dominios (pasa-bajos y pasa-altos) sea equivalente, es decir, sin normalizar ni desnormalizar en la transformación:

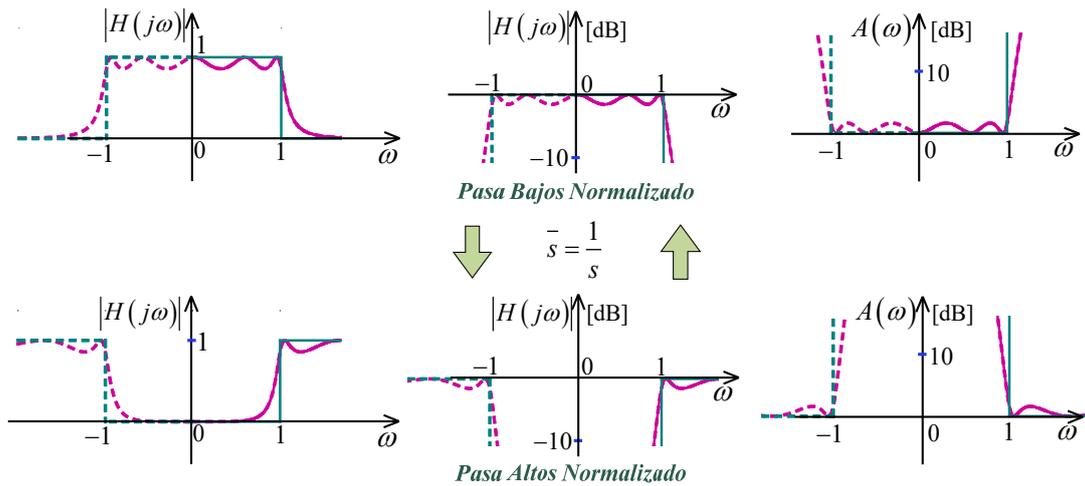
$$\bar{s} = \frac{1}{s} \tag{8-3}$$

Aplicada a los tres puntos característicos del filtro pasa bajos en el plano  $\bar{s}$  resulta:

$$\begin{cases} \bar{s} = 0 & \Leftrightarrow & s = \infty \\ \bar{s} = \infty & \Leftrightarrow & s = 0 \\ \bar{s} = \pm j1 & \Leftrightarrow & s = \mp j1 \end{cases}$$

Es decir, luego de esta transformación, la banda de paso queda centrada en el infinito y el comportamiento asintótico de la banda de atenuación se traslada al origen, como se ve en **Fig. 8.3**.

Además las frecuencias negativas en uno de los dominios se transforman en frecuencias positivas en el otro dominio, y viceversa. Por ello, aún cuando el resultado de la transformación que interesa es solamente el rango de frecuencias positivas, por cuestiones estrictamente matemáticas se debe aplicar la transformación a todas las frecuencias (positivas y negativas).



**Fig. 8.3.** Transformación recíproca de la frecuencia o pasa bajos normalizado - pasa altos normalizado.

Por otra parte, el hecho de que la función de transformación sea una inmitancia, garantiza la realizabilidad de los elementos circuitales transformados y, en la instancia (5a) de la **Fig. 8.1**, los elementos del filtro pasa bajos *normalizado* (de frecuencia de corte unitaria) se transforman en elementos del filtro pasa altos *normalizado* (también de frecuencia de corte unitaria), según las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} \frac{\bar{s}L}{s} = \frac{\bar{L}}{s} \Rightarrow C = \frac{1}{\bar{L}} \\ \frac{1}{sC} = \frac{s}{C} \Rightarrow L = \frac{1}{C} \\ \bar{R} = R \end{cases} \quad \begin{matrix} \bar{L} & \Rightarrow & C = 1/\bar{L} \\ \bar{C} & \Rightarrow & L = 1/\bar{C} \\ \bar{R} & \Rightarrow & R = \bar{R} \end{matrix}$$

**Fig. 8.4.** Aplicación de la función de transformación a los elementos del filtro PBN.

En la **Fig. 8.4** se muestra el resultado de la transformación de cada elemento.

Esta transformación puede aplicarse *en ambos sentidos* entre ambos dominios: el dominio del pasa bajos y el dominio del pasa altos. Se aplica en dos instancias del proceso de síntesis representado en la **Fig. 8.1** para un filtro pasa altos, a saber:

- a las especificaciones del filtro pasa altos que se desea sintetizar para obtener las especificaciones del pasa bajos equivalente, transformación (1) en la **Fig. 8.1**;
- al circuito pasa bajos desnormalizado para obtener el circuito pasa altos desnormalizado, transformación (4b) en la **Fig. 8.1**.

Transformación pasa bajos - pasa altos normalizando o desnormalizando

Es importante destacar que si se desea obtener un filtro pasa altos *desnormalizado*, de pulsación angular de corte  $\omega_C$ , mediante la transformación (8-3) se puede obtener el filtro pasa altos *normalizado* - (5a) en la **Fig. 8.1** - y luego desnormalizar en frecuencia con la pulsación  $\omega_C$  - (5b) en la **Fig. 8.1** - o, lo que sería

completamente equivalente, se puede proceder directamente como se indica con (3) en la **Fig. 8.1** empleando como función de transformación:

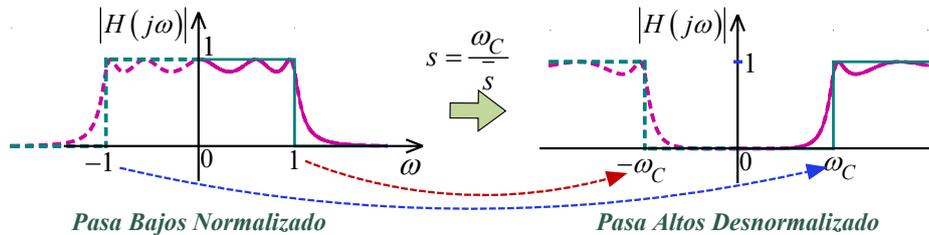
$$\bar{s} = \frac{\omega_c}{s} \tag{8-4}$$

Esta función de transformación también se aplica en la instancia (2) del procedimiento representado en la **Fig. 8.1** a la transferencia  $H(\bar{s})$  de un filtro pasa bajos normalizado, y en este caso los puntos singulares de las características de amplitud resultan:

$$\begin{cases} \bar{s} = 0 & \Leftrightarrow & s = \infty \\ \bar{s} = \infty & \Leftrightarrow & s = 0 \\ \bar{s} = \pm j1 & \Leftrightarrow & s = \mp j\omega_c \end{cases}$$

Lo que indica que la  $H(s)$  resultante ahora tiene la banda de paso centrada en  $s = \infty$ , la banda de atenuación está centrada en  $s = 0$  y la banda de paso tiene por límite inferior a la pulsación  $\pm j\omega_c$ . Por lo tanto corresponde a un filtro pasa altos desnormalizado (**Fig. 8.5**)

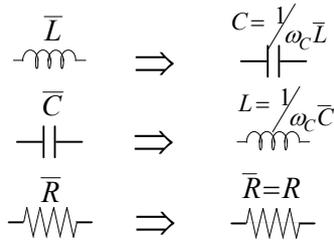
Nuevamente las frecuencias negativas en uno de los dominios se transforman en frecuencias positivas en el otro dominio, y viceversa. Es decir, por cuestiones estrictamente matemáticas, lo correcto es aplicar la transformación tanto a las frecuencias positivas como negativas, aunque como producto de la transformación solo interesa el rango de frecuencias positivas.



**Fig. 8.5.** Transformación pasa bajos normalizado - pasa altos desnormalizado.

Cuando en la instancia (3) en la **Fig. 8.1** se aplica esta función de transformación a los elementos del circuito en el dominio de Laplace correspondiente al filtro PBN, resultan los elementos del filtro pasa altos desnormalizado de pulsación de corte  $\omega_c$  que se indican en la **Fig. 8.6**.

$$\begin{cases} \frac{\bar{s}\bar{L}}{s} = \frac{\omega_c \bar{L}}{s} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega_c \bar{L}} \\ \frac{1}{s\bar{C}} = \frac{s}{\omega_c \bar{C}} \Rightarrow L = \frac{1}{\omega_c \bar{C}} \\ \bar{R} = R \end{cases}$$



**Fig. 8.6.** Aplicación de la función de transformación a los elementos del filtro PBN.

Patrón o plantilla de especificaciones del filtro pasa altos

En la **Fig. 8.7** se muestran las plantillas o patrones de especificaciones para el filtro pasa altos que se desea sintetizar, para las distintas formas de representar la característica de amplitud. En el caso de la **Fig. 8.7a** que corresponde a  $|H(j\omega)|$  en p.u. la plantilla queda determinada por los pares  $(\omega_p ; \delta_p)$  y  $(\omega_s ; \delta_s)$  especificados; mientras que para  $|H(j\omega)|$  en dB (**Fig. 8.7b**) y  $A(\omega)$  en dB (**Fig. 8.7c**) la plantilla queda determinada por la especificación de los pares  $(\omega_p ; \alpha_p)$  y  $(\omega_s ; \alpha_s)$ .

La importancia de comprender el significado de cada parámetro indicado en las plantillas de especificaciones radica en que, tal como se indica en la **Fig. 8.1**, en el procedimiento de diseño de un filtro pasa altos que se empleará en este curso se aplicará la transformación (8-3) a las especificaciones del filtro pasa altos, para obtener las especificaciones del filtro pasa bajos equivalente con las cuales se sintetizará un filtro pasa bajos normalizado para luego transformarlo al pasa altos requerido aplicando esta vez la transformación (8-4).

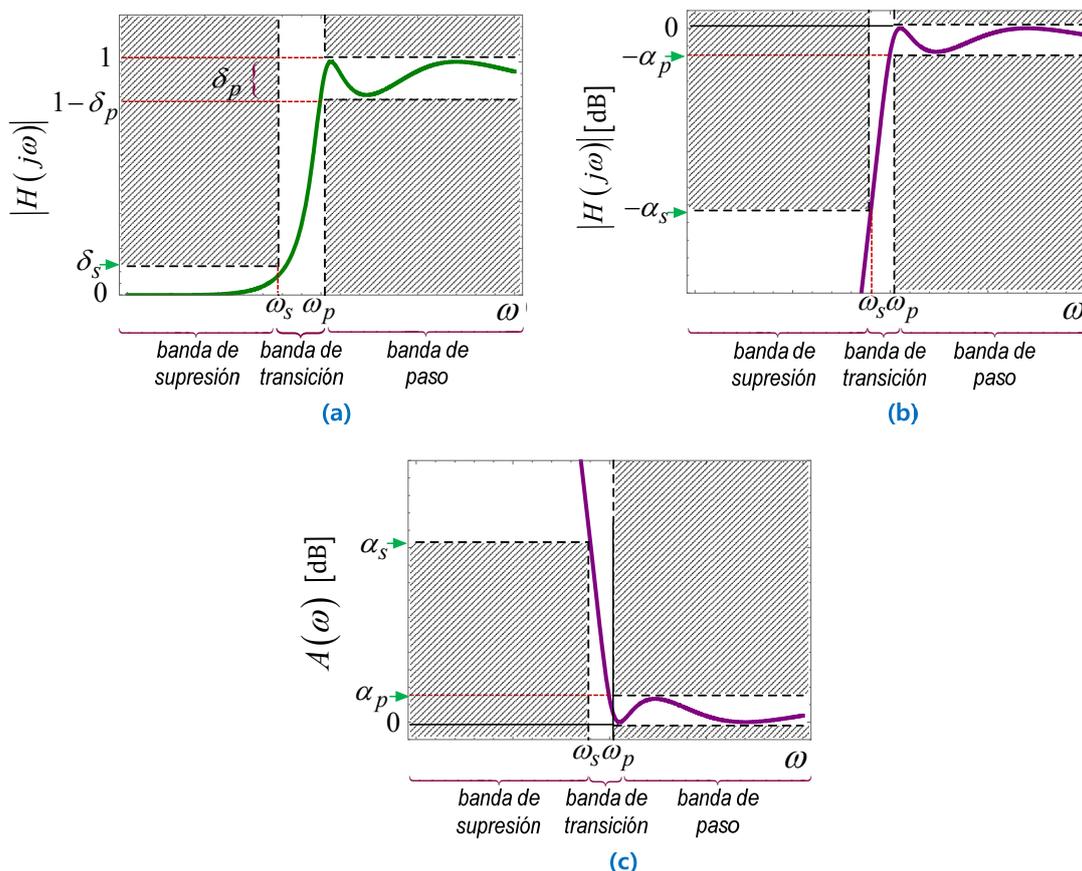


Fig. 8.7. Patrón de especificación del filtro pasa altos a sintetizar: (a)  $|H(j\omega)|$  en p.u.; (b)  $|H(j\omega)|$  en dB; (c) atenuación en dB.

**Ejemplo 8.1.**

Obtener la función de transferencia  $H(s)$  de un filtro *pasa altos* empleando la aproximación de Chebyshev. La banda de paso estará delimitada a frecuencias superiores a 5 kHz con una variación de amplitud que no supere 1,4 dB. Para frecuencias inferiores a 2 kHz deberá atenuar como mínimo 30 dB.

**Resolución**

Se procede según la secuencia que se indica en la Fig. 8.1:

(1) Transformar las especificaciones al dominio del filtro *pasa bajos equivalente*

Se aplica la transformación *pasa altos-pasa bajos* sin normalizar ni desnormalizar:

$$\bar{s} = \frac{1}{s}$$

donde  $\bar{s}$  es la frecuencia compleja en el dominio del *pasa bajos* y  $s$  la frecuencia compleja en el dominio del *pasa altos*. En el prototipo *pasa bajos equivalente* resulta:

$$\bar{\omega}_p = \frac{1}{\omega_p} = \frac{1}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^3} = 3,183 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s} \quad \bar{\omega}_s = \frac{1}{\omega_s} = \frac{1}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^3} = 7,958 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

Entonces las especificaciones en el dominio del *pasa bajos equivalente* resultan:

- Banda de paso:  
 $\bar{\omega}_p = 3,183 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$       y       $\alpha_p = 1,4 \text{ dB}$
- Banda de atenuación:  
 $\bar{\omega}_s = 7,958 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$       y       $\alpha_s = 30 \text{ dB}$

(2) Calcular los parámetros de diseño  $\epsilon$  y  $n$  del *pasa bajos equivalente* con la aproximación de *Chebyshev*

El coeficiente de ondulación  $\epsilon$  se obtiene a partir de la especificación de la máxima atenuación admitida en la banda de paso:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1\alpha_p} - 1} = \sqrt{10^{0,1\cdot 1,4} - 1} = 0,617$$

El orden  $n$  del filtro se obtiene a partir de la especificación de la atenuación mínima admitida en la banda de atenuación:

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{0,1\alpha_p} - 1}{10^{0,1\alpha_s} - 1}}}{\cosh^{-1} \left( \frac{\omega_s}{\omega_p} \right)} = \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{0,1\cdot 30} - 1}{10^{0,1\cdot 1,4} - 1}}}{\cosh^{-1} \left( \frac{7,958 \cdot 10^{-5}}{3,183 \cdot 10^{-5}} \right)} = 2,955$$

Entonces resulta  $\varepsilon=0,617$  y  $n=3$ .

**(3) Verificación del cumplimiento de las especificaciones**

Se puede verificar si con el valor de  $n$  adoptado se satisface la especificación para la banda de supresión  $A(\omega_s) > 30$  dB, es decir:

$$A(\omega_s) = 10 \log \left\{ 1 + \left( \varepsilon \cdot \cosh \left[ n \cdot \cosh^{-1} \left( \frac{\omega_s}{\omega_p} \right) \right] \right)^2 \right\}$$

$$A(\omega_s) = 10 \log \left\{ 1 + \left( 0,617 \cdot \cosh \left[ 3 \cdot \cosh^{-1} \left( \frac{7,958}{3,183} \right) \right] \right)^2 \right\} = 30,6 \text{ dB}$$

**(4) Obtener  $H(s)$  del pasa bajos normalizado**

Ahora se puede emplear (7-43):

$$H(\bar{s}) = \frac{1/(\varepsilon \cdot 2^{n-1})}{\prod_{\forall s_k \in SPI} (s + s_k)}$$

Destacando que esta expresión se encuentra normalizada, en este caso respecto de  $\omega_p = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^4$  rad/s, Los 3 polos son de la forma:

$$s_k = \alpha_k + j\beta_k$$

Y son los 3 que cumplen  $\alpha_k < 0$  con  $\alpha_k$  dada por (7-48) y  $\beta_k$  por (7-49), con  $A=1$  y  $k=1, 2, \dots, 6$ :

$$\alpha_k = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left( \frac{(2k-1)\pi}{6} \right) \left[ \left( \sqrt{\frac{1}{0,617^2} + 1} + \frac{1}{0,617} \right)^{1/3} - \left( \sqrt{\frac{1}{0,617^2} + 1} + \frac{1}{0,617} \right)^{-1/3} \right]$$

$$\beta_k = \frac{1}{2} \operatorname{cos} \left( \frac{(2k-1)\pi}{6} \right) \left[ \left( \sqrt{\frac{1}{0,617^2} + 1} + \frac{1}{0,617} \right)^{1/3} + \left( \sqrt{\frac{1}{0,617^2} + 1} + \frac{1}{0,617} \right)^{-1/3} \right]$$

De manera que los 3 polos del SPI resultan:

$$-0,4326 ; -0,2163 \pm j 0,9436$$

Ahora puede construirse la expresión de  $H(s)$  del pasa bajos normalizado:

$$H(\bar{s}) = \frac{1/(\varepsilon \cdot 2^{n-1})}{\prod_{\forall s_k \in SPI} (s + s_k)} = \frac{1/0,617^2}{(s + 0,4326)(s + 0,2163 - j0,9436)(s + 0,2163 + j0,9436)}$$

$$H(\bar{s}) = \frac{0,4053}{s^3 + 0,8641 \cdot s^2 + 1,124 \cdot s + 0,4053}$$

Expresión que se encuentra normalizada respecto de  $\omega_p = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^4$  rad/s.

Obsérvese que una vez determinados  $n$  y  $\varepsilon$  se pudo haber escrito directamente la expresión de  $H(s)$  a partir de una tabla que corresponda a  $\alpha_p = 1,4$  dB, si la hubiera, equivalente a la **Tabla 7-3** ( $\alpha_p = 1$  dB) o **Tabla 7-5** ( $\alpha_p = 0,5$  dB).

**(5) Obtener  $H(s)$  del pasa altos desnormalizado**

Ahora se puede obtener la  $H(s)$  del filtro pasa altos *desnormalizado* aplicando la transformación pasa bajos normalizado a pasa altos, en este caso, desnormalizando para el ancho de banda  $\omega_p=2\pi \cdot 5 \cdot 10^3$  rad/s.

$$\frac{-}{s} = \frac{\omega_p}{s}$$

Con lo cual resulta:

$$H(s) = \frac{0,4053}{\left(\frac{\omega_p}{s}\right)^3 + 0,8641 \cdot \left(\frac{\omega_p}{s}\right)^2 + 1,124 \cdot \left(\frac{\omega_p}{s}\right) + 0,4053} = \frac{s^3}{s^3 + \frac{1,124 \cdot \omega_p}{0,4053} s^2 + \frac{0,8641 \cdot \omega_p^2}{0,4053} s + \omega_p^3}$$

$$H(s) = \frac{s^3}{s^3 + 8,713 \cdot 10^4 \cdot s^2 + 2,106 \cdot 10^9 \cdot s + 7,649 \cdot 10^{13}}$$

Estos cálculos fueron efectuados mediante las siguientes líneas de código de Matlab.

```

01 function Ejemplo_8_1_Cheby_Pasa_Altos
02 %% Bloque Principal
03 clc
04 % ***** Datos del caso *****
05 fp=5*10^3; fs=2*10^3;
06 alfa_p=1.4; alfa_s=30;
07 wpHP=2*pi*fp; wsHP=2*pi*fs;
08 % ***** Límites de Graficación deseados *****
09 min_dBplot=-40; max_dBplot=1.1*alfa_p;
10 f_units='kHz'; kf=1000; % f_units='MHz' kf=1E6; f_units='kHz' kf=1E3; etc.
11 min_f=0/kf; max_f=4*fp/kf;
12
13 %(1) Transformar la especificación al dominio del pasa bajos equivalente
14 wpLP=1/wpHP;
15 wsLP =1/wsHP;
16 %(2) Calcular los parámetros del diseño
17 n_Cheby=acosh(sqrt(10^(alfa_s/10)-1)/ ...
18             sqrt(10^(alfa_p/10)-1))/acosh(wsLP/wpLP);
19 n=ceil(n_Cheby);
20 eps=sqrt(10^(0.1*alfa_p)-1);
21 %(3) Verificar el n obtenido. Se debe cumplir A(ws)>alfa_s
22 At = 10*log10(1+(eps*cosh(n*acosh(wsLP/wpLP)))^2);
23 fprintf('CHEBYSHEV:\n      n_real=%g  n=%g  eps=%g  At=%g\n', ...
24         n_Cheby, n, eps, At)
25 %(4) Obtener H(s) del pasa bajos normalizado
26 sPs=Roots_Cheby(1, eps, n, 'SPI'); % Polos de H(s) del pasa bajos
27 abs(sPs);
28 K=1/(2^(n-1)*eps); % Constante de H(s) con el denominador normalizado
29 z=zeros(n,1); sZs = z.^-1; % El pasa bajos tiene n ceros en infinito
30 [Nslp, Dslp]=zp2tf(sZs, sPs, K);
31 Hs=tf(Nslp, Dslp) % Escribir la H(s) del pasa bajos en formato normal
32 %(5) Obtener H(s) del pasa altos desnormalizado
33 [Ns, Ds]=lp2hp(Nslp, Dslp, 2*pi*fp); % Coef. de H(s) del pasa altos
34 Hs=tf(Ns, Ds) % Escribir la H(s) del pasa altos en formato normal
35
36 %% Gráfica de la Magnitud de |H(jw)| en dB vs. f en kHz
37 wi=2*pi*linspace(0, max_f, 2001); % 2001 valores linealm. espaciados de w
38 [Hjw, w]=freqs(Ns, Ds, wi*kf); % Evaluar H(jw) en 2001 valores de wi
39 freq=w/(2*pi*kf); % f [Hz] o [kHz] a graficar en abcisas
40 H_dB=20*log10(abs(Hjw)); % |H(jw)| en dB a graficar en ordenadas
41 figure('Color',[1,1,1]);
42 plot(freq, H_dB, 'LineWidth', 3, 'Color',[0.6,0.2,0.6])
43 hold on
44 % Plantilla de la especificación para la banda de paso
45 fp=fp/kf; % Frecuencia en Hz ó kHz
46 fs=fs/kf; % Frecuencia en Hz ó kHz

```

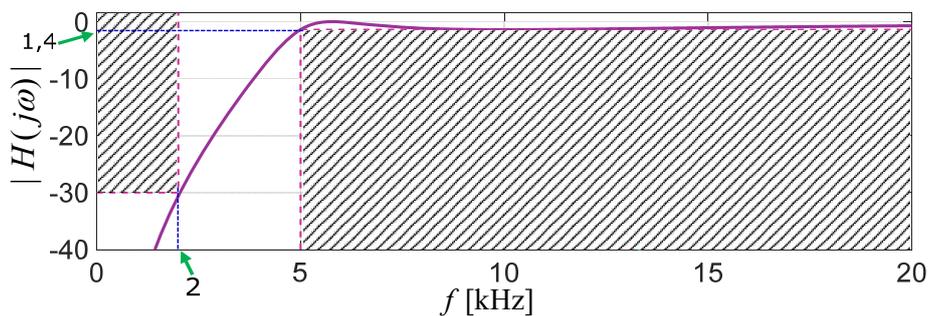
```

47 Xp=[fp fp max_f];
48 Yp=[min_dBplot -alfa_p -alfa_p];
49 % Plantilla de la especificación para la banda de atenuación
50 Xs=[min_f fs fs];
51 Ys=[-alfa_s -alfa_s max_dBplot];
52 plot(Xp, Yp, 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '--', 'Color', [0.8,0.2,0.6]);
53 plot(Xs, Ys, 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '--', 'Color', [0.8,0.2,0.6]);
54 grid on
55 set(gca,'FontName','Arial','FontSize',26)
56 axis([min_f, max_f, min_dBplot, max_dBplot])
57 xlabel(['\fontname{Times}\fontsize{26}\it f\rm [', f_units, ']']);
58 ylabel('\fontname{Times}\fontsize{26}\itH\rm(\it j\omega \rm) | [dB]');
59
60 %% ===== Funciones Internas =====
61 function Roots_Array = Roots_Cheby(A, eps, n, SP)
62 % Obtención de las raíces de la expresión
63 % A + eps^2 Vn(s)^2 = 0
64 % A = 1-t para los ceros de |rho1(s)|^2 y A=1 para los polos
65 % SP es el semiplano donde están las raíces (debe ser 'SPI' ó 'SPD')
66 % Roots_Array es el vector con las n raíces ubicadas en SP
67 k=1:n;
68 if strcmpi(SP,'SPI'), k=n+1:2*n; end
69 alfa_Array = 0.5*sin((2*k-1)*pi/2/n)* ...
70             ( sqrt(A/eps^2+1)+sqrt(A)/eps)^(1/n) - ...
71             ( sqrt(A/eps^2+1)+sqrt(A)/eps)^(-1/n) );
72 beta_Array = 0.5*cos((2*k-1)*pi/2/n)* ...
73             ( sqrt(A/eps^2+1)+sqrt(A)/eps)^(1/n) + ...
74             ( sqrt(A/eps^2+1)+sqrt(A)/eps)^(-1/n) );
75 Roots_Array=(alfa_Array+li*beta_Array)';
76 end % Roots_Cheby
77
78 end

```

Las líneas de código 61 a 76 corresponden a la función `Roots_Cheby()`, invocada en la línea 26, que permite obtener los polos  $s_k = \alpha + j\beta_k$  de  $H(s)$  mediante las expresiones (7-48) y (7-49). Para ello, al primer parámetro debe asignársele el valor 1 y al cuarto parámetro la cadena 'SPI' para indicar que se desean las raíces del semiplano izquierdo.

El cumplimiento de las especificaciones también puede verificarse efectuando la gráfica de  $|H(j\omega)|$ , lo cual se efectúa mediante las siguientes líneas 36 a 58 del código de Matlab. El resultado se muestra en la **Fig. 8.8**.



**Fig. 8.8.** Función  $|H(j\omega)|$  en dB del filtro sintetizado.

### 8.1.3. Transformación pasa bajos - pasa banda (y viceversa)

La función de transformación que sigue en grado de complejidad es la suma de una transformación pasa bajos - pasa bajos y una transformación pasa bajos - pasa altos, es decir:

$$s = s + \frac{\omega_0^2}{s} = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s} \tag{8-5}$$

Que escrita de una forma más general resulta más apropiada para obtener un filtro pasa banda no normalizado, es decir de ancho de banda  $\Delta \omega$  genérico y centrado<sup>(1)</sup> en  $\omega_0$ :

$$\bar{s} = \frac{1}{\Delta \omega} \left( s + \frac{\omega_0^2}{s} \right) = \frac{s}{\Delta \omega} + \frac{\omega_0^2}{\Delta \omega s} = \frac{s^2 + \omega_0^2}{\Delta \omega s} \quad (8-6)$$

Las transformaciones de los puntos singulares de la curva de amplitud del filtro pasa bajos normalizado resultan:

- Punto  $\bar{s}=0$ :

$$0 = \frac{s^2 + \omega_0^2}{\Delta \omega s} \Rightarrow s^2 = -\omega_0^2 \Rightarrow s = \pm j\omega_0$$

- Punto  $\bar{s}=\infty$ :

$$\infty = \frac{1}{\Delta \omega} \left( s + \frac{\omega_0^2}{s} \right) \Rightarrow \begin{cases} s = 0 \\ s = \infty \end{cases}$$

- Puntos  $\bar{s}=\pm j1$ :

$$\pm j1 = \frac{1}{\Delta \omega} \left( j\omega + \frac{\omega_0^2}{j\omega} \right) \Rightarrow \mp (\Delta \omega) \omega = -\omega^2 + \omega_0^2 \Rightarrow \omega^2 \mp (\Delta \omega) \omega - \omega_0^2 = 0$$

$$\therefore \omega_{1,2,3,4} = \frac{1}{2} \left( \pm \Delta \omega \pm \sqrt{(\Delta \omega)^2 + 4\omega_0^2} \right) = \pm \frac{\Delta \omega}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\Delta \omega}{2} \right)^2 + \omega_0^2}$$

Con lo cual se infiere que existen 2 soluciones positivas ( $\omega_1$  y  $\omega_2$ ) y otras 2 negativas ( $\omega_3=-\omega_1$  y  $\omega_4=-\omega_2$ ), que resultan:

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{\Delta \omega}{2} + \sqrt{\left( \frac{\Delta \omega}{2} \right)^2 + \omega_0^2} \quad \text{con } \omega_2 > \omega_1 \quad \omega_{3,4} = \pm \frac{\Delta \omega}{2} - \sqrt{\left( \frac{\Delta \omega}{2} \right)^2 + \omega_0^2} \quad \text{con } \omega_4 > \omega_3$$

Pudiendo comprobarse que el punto  $\bar{s}=+j1$  se transforma en dos valores de  $s = j\omega_{2,3}$  siendo  $\omega_2 > 0$  y  $\omega_3 < 0$  y el punto  $\bar{s}=-j1$  se transforma en dos valores de  $s = j\omega_{1,4}$  siendo  $\omega_1 > 0$  y  $\omega_4 < 0$ .

El ancho de la *banda de paso* resultante sobre las frecuencias positivas es:

$$\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\Delta \omega}{2} + \sqrt{\left( \frac{\Delta \omega}{2} \right)^2 + \omega_0^2} - \left( -\frac{\Delta \omega}{2} + \sqrt{\left( \frac{\Delta \omega}{2} \right)^2 + \omega_0^2} \right) \Rightarrow \boxed{\omega_2 - \omega_1 = \Delta \omega}$$

Y por otra parte, el producto  $\omega_1 \omega_2$  resulta:

$$\omega_1 \omega_2 = \left( \frac{\Delta \omega}{2} + \sqrt{\left( \frac{\Delta \omega}{2} \right)^2 + \omega_0^2} \right) \left( -\frac{\Delta \omega}{2} + \sqrt{\left( \frac{\Delta \omega}{2} \right)^2 + \omega_0^2} \right) = -\frac{(\Delta \omega)^2}{4} + \left( \frac{\Delta \omega}{2} \right)^2 + \omega_0^2 \Rightarrow \boxed{\omega_1 \cdot \omega_2 = \omega_0^2}$$

En resumen las transformaciones resultantes son:

$$\bar{s} = 0 \Leftrightarrow s = \pm j\omega_0$$

$$\bar{s} = \infty \Leftrightarrow \begin{cases} s = 0 \\ s = \infty \end{cases}$$

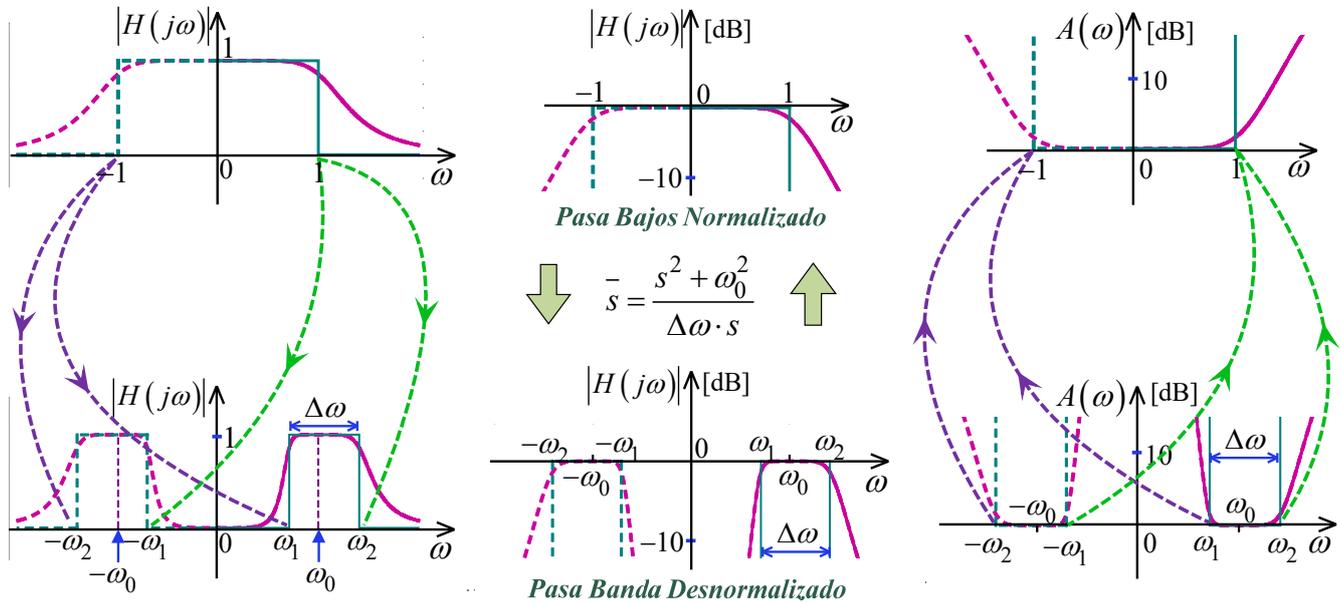
$$\bar{s} = j1 \Leftrightarrow \begin{cases} s = j\omega_2 \\ s = j\omega_3 = -j\omega_1 \end{cases} \quad \omega_3 < 0 < \omega_2$$

$$\bar{s} = -j1 \Leftrightarrow \begin{cases} s = j\omega_1 \\ s = j\omega_4 = -j\omega_2 \end{cases} \quad \omega_4 < 0 < \omega_1$$

<sup>(1)</sup> Se verá en este apartado que esta afirmación es una aproximación tanto más válida cuanto mejor se cumpla que  $\omega_0 \gg \Delta \omega$ .

Esta transformación permite convertir el filtro pasa bajos *normalizado* (de ancho de banda 1) a un filtro pasa banda cuya banda de paso es *geoméricamente simétrica* alrededor de la pulsación  $\omega_0$  tal que  $\omega_0^2 = \omega_1\omega_2$  y tiene un ancho  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ , según se indica en la **Fig. 8.9**.

La simetría se acerca tanto más a la aritmética cuanto más cierto resulte que  $\omega_0 \gg \Delta\omega$ . Para las curvas aproximadas, que también se dibujan en la **Fig. 8.9** se observa que la respuesta para pulsaciones inferiores a  $\omega_0$  resulta más comprimida que para pulsaciones superiores a  $\omega_0$ .



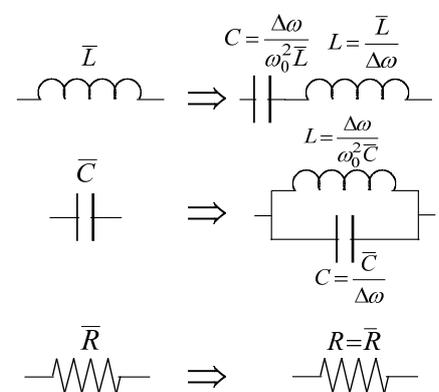
**Fig. 8.9.** Transformación pasa bajos normalizado - pasa banda desnormalizado.

Los elementos del circuito transformado resultante se indican en la **Fig. 8.10**.

$$\frac{1}{s\bar{L}} = \frac{1}{\Delta\omega} \left( s + \frac{\omega_0^2}{s} \right) \bar{L} = \frac{\bar{L}}{\Delta\omega} s + \frac{\omega_0^2 \bar{L}}{\Delta\omega} \frac{1}{s} \Rightarrow \begin{cases} L = \frac{\bar{L}}{\Delta\omega} \\ C = \frac{\Delta\omega}{\omega_0^2 \bar{L}} \end{cases}$$

$$\frac{1}{s\bar{C}} = \frac{1}{\Delta\omega} \left( s + \frac{\omega_0^2}{s} \right) \bar{C} = \frac{\bar{C}}{\Delta\omega} s + \frac{\omega_0^2 \bar{C}}{\Delta\omega} \frac{1}{s} \Rightarrow \begin{cases} L = \frac{\Delta\omega}{\omega_0^2 \bar{C}} \\ C = \frac{\bar{C}}{\Delta\omega} \end{cases}$$

$$\bar{R} = R$$



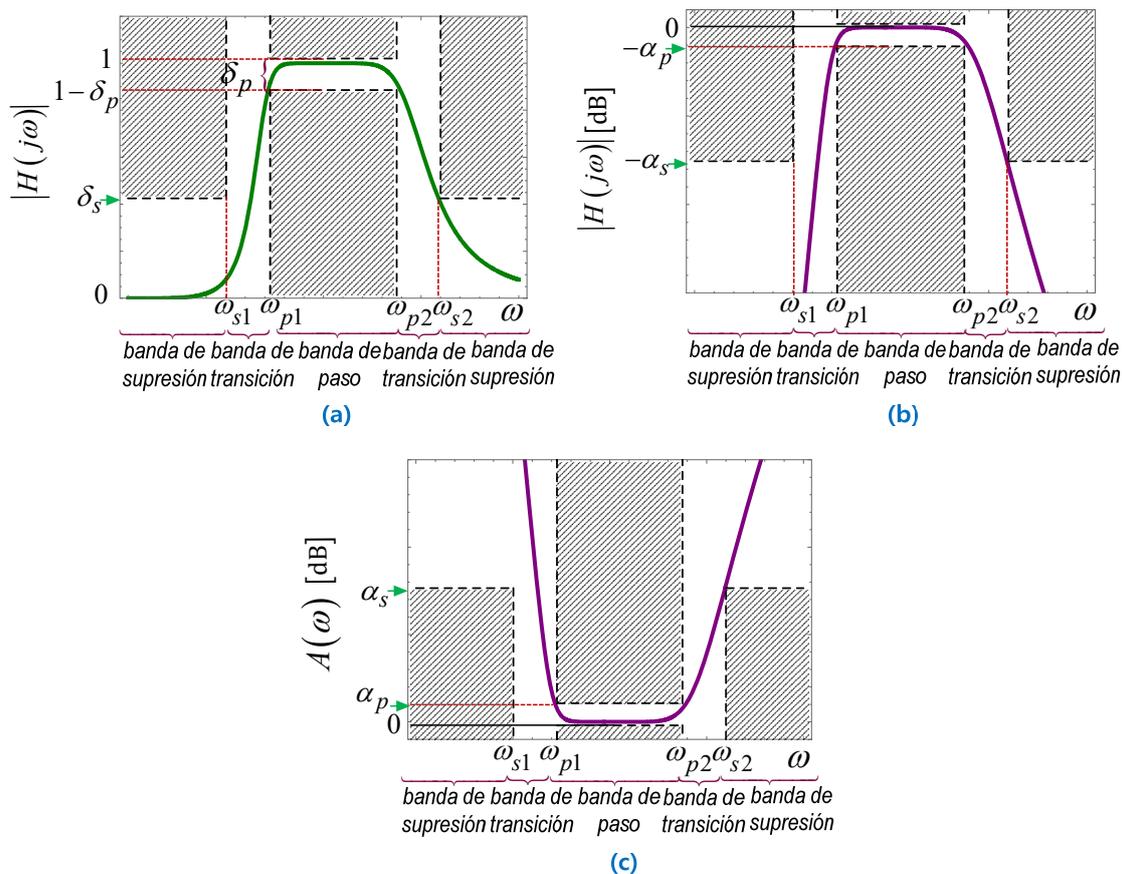
**Fig. 8.10.** Aplicación de la función de transformación a los elementos del filtro PBN.

Si la función de transformación pasa banda-pasa bajos (y viceversa) se aplica con  $\Delta\omega \neq 1$  se dice que la transformación se realiza *sin conservar el ancho de banda*. Es decir, aplicada al filtro pasa bajos normalizado, dará por resultado un filtro pasa banda de ancho de banda  $\Delta\omega$ ; y viceversa, aplicada a un filtro pasa banda de ancho de banda  $\Delta\omega$  dará por resultado un filtro pasa bajos normalizado.

Si la función de transformación pasa banda-pasa bajos (y viceversa) se aplica con  $\Delta\omega = 1$  se dice que la transformación se realiza *sin normalizar ni desnormalizar*, o bien, *conservando el ancho de banda* en ambos sentidos. Es decir, aplicada a un filtro pasa banda de ancho de banda  $\Delta\omega$  resulta un filtro pasa bajos cuyo ancho de banda  $\omega_p = \Delta\omega$ . Esta conclusión también se puede poner en evidencia con un ejemplo numérico como el siguiente, y su importancia se apreciará en los siguientes capítulos.

Patrón o plantilla de especificaciones del filtro pasa banda

En la **Fig. 8.11** se muestran las plantillas o patrones de especificaciones para el filtro pasa banda que se desea sintetizar, para las distintas formas de representar la característica de amplitud. En el caso de la **Fig. 8.11a** que corresponde a  $|H(j\omega)|$  en p.u. la plantilla queda determinada por los pares  $(\omega_{p1}; \delta_p)$ ,  $(\omega_{p2}; \delta_p)$ ,  $(\omega_{s1}; \delta_s)$  y  $(\omega_{s2}; \delta_s)$  especificados; mientras que para  $|H(j\omega)|$  en dB (**Fig. 8.11b**) y  $A(\omega)$  en dB (**Fig. 8.11c**) la plantilla queda determinada por la especificación de los pares  $(\omega_{p1}; \alpha_p)$ ,  $(\omega_{p2}; \alpha_p)$ ,  $(\omega_{s1}; \alpha_s)$  y  $(\omega_{s2}; \alpha_s)$ . La importancia de comprender el significado de cada parámetro indicado en las plantillas de especificaciones radica en que, tal como se indica en la **Fig. 8.1**, en el procedimiento de diseño de un filtro pasa banda que se empleará en este curso se aplicará la transformación (8-6) a las especificaciones del filtro pasa banda, para obtener las especificaciones del filtro pasa bajos equivalente (considerando  $\Delta\omega=1$ ) que permitirá definir los parámetros de diseño con los cuales se sintetizará un filtro pasa bajos normalizado, el cual se transforma al pasa banda requerido aplicando nuevamente la transformación (8-6) pero esta vez con el  $\Delta\omega$  requerido.



**Fig. 8.11.** Patrón de especificaciones del filtro pasa banda a sintetizar: **(a)**  $|H(j\omega)|$  en p.u.; **(b)**  $|H(j\omega)|$  en dB; **(c)** atenuación en dB.

Ejemplo 8.2.

Un filtro pasa banda, obtenido a partir de un filtro pasa bajos, tiene un ancho de banda de 3 dB de 30 MHz y una frecuencia central de 60 MHz. **(a)** Obtener las frecuencias  $f_{p1}$  y  $f_{p2}$  para las cuales la atenuación es 3 dB y las correspondientes frecuencias equivalentes en el dominio del pasa bajos. **(b)** Obtenga la frecuencia equivalente a  $f_A = \pm 100$  MHz en el filtro pasa bajos correspondiente.

Resolución.

**(a)** Obsérvese que en este caso  $\Delta f_{3\text{dB}}$  resulta comparable con  $f_0$ , y en consecuencia cabe esperar una asimetría notable de la banda de paso del filtro pasa banda resultante, con respecto a la frecuencia  $f_0$ . Obtención de las frecuencias que definen el ancho de banda de 3 dB:

$$\Delta f|_{3\text{ dB}} = 30 \cdot 10^6 \quad f_{p2} - f_{p1} = 30 \cdot 10^6 \quad f_{p2} = f_{p1} + 30 \cdot 10^6 \quad (1)$$

$$f_0 = 6 \cdot 10^7 \quad f_{p1} \cdot f_{p2} = 36 \cdot 10^{14} \quad (2)$$

Con (1) en (2)

$$f_{p1}^2 + 30 \cdot 10^6 f_{p1} - 36 \cdot 10^{14} = 0$$

$$f_{p1a,b} = -\frac{30}{2} \cdot 10^6 \pm \frac{1}{2} \sqrt{(30 \cdot 10^6)^2 + 4 \cdot 36 \cdot 10^{14}} \Rightarrow \begin{aligned} f_{p1a} &= 46,847 \cdot 10^6 \\ f_{p1b} &= -76,847 \cdot 10^6 \end{aligned} \quad (3)$$

Con (3) en (1):

$$f_{p2a} = f_{p1a} + 30 \cdot 10^6 = 46,847 \cdot 10^6 + 30 \cdot 10^6 = 76,847 \cdot 10^6$$

$$f_{p2b} = f_{p1b} + 30 \cdot 10^6 = -76,847 \cdot 10^6 + 30 \cdot 10^6 = -46,847 \cdot 10^6$$

Entonces, considerando ambas bandas (sobre las frecuencias positivas y las negativas):

$$f_{p1} \Big|_{3 \text{ dB}} = \pm 46,847 \cdot 10^6 \quad f_{p2} \Big|_{3 \text{ dB}} = \pm 76,847 \cdot 10^6$$

Si hubiese sido  $\Delta f_{3\text{dB}} \ll f_0$  la respuesta hubiera resultado aproximadamente aritméticamente simétrica, y las frecuencias de corte hubieran resultado 45 MHz y 75 MHz

Aplicando la transformación pasa banda-pasa bajos conservando el ancho de banda, siendo  $f_p$  en el dominio del pasa bajos equivalente:

$$\frac{\bar{s}}{s} = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s} \Rightarrow j\bar{\omega} = \frac{-\omega^2 + \omega_0^2}{j\omega} \quad \therefore \bar{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega} \Rightarrow \bar{f} = \frac{f^2 - f_0^2}{f}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} \bar{f}_{pa} &= \frac{(\pm 46,847 \cdot 10^6)^2 - (60 \cdot 10^6)^2}{\pm 46,847 \cdot 10^6} = \mp 30 \cdot 10^6 \text{ Hz} \\ \bar{f}_{pb} &= \frac{(\pm 76,847 \cdot 10^6)^2 - (60 \cdot 10^6)^2}{\pm 76,847 \cdot 10^6} = \pm 30 \cdot 10^6 \text{ Hz} \end{aligned}$$

Entonces para el pasa bajos equivalente:  $\boxed{\bar{f}_p = 30 \cdot 10^6 \text{ Hz}}$

Obsérvese que la transformación pasa banda-pasa bajos *conservando el ancho de banda*, transforma el ancho de banda  $\Delta f_p = 30 \text{ MHz}$  en el dominio del pasa banda, al ancho de banda  $\bar{f}_p = 30 \text{ MHz}$  en el dominio del pasa bajos.

**(b)** Como en el filtro pasa banda la frecuencia 100 MHz se encuentra por encima de  $f_0 = 60 \text{ MHz}$ , la llamaremos  $f_2$ , la cual determina un ancho de banda de  $\Delta f_{X_{\text{dB}}}$  alrededor de  $f_0$  tal que:

$$\Delta f_{X_{\text{dB}}} = f_{s2} - f_{s1} \quad \text{y} \quad f_0^2 = f_{s1} f_{s2}$$

Entonces

$$f_{s1} = \frac{f_0^2}{f_{s2}} = \frac{(60 \cdot 10^6)^2}{100 \cdot 10^6} = 36 \text{ MHz} \quad \text{y} \quad \Delta f_{X_{\text{dB}}} = 100 - 36 = 64 \text{ MHz}$$

Si se aplica la transformación pasa bajos-pasa banda (y viceversa) *conservando el ancho de banda*, en este caso en el sentido pasa banda a pasa bajos, resulta:

$$\frac{\bar{s}}{s} = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s} \Rightarrow j\bar{\omega} = \frac{-\omega^2 + \omega_0^2}{j\omega} \quad \therefore \bar{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega} \Rightarrow \bar{f} = \frac{f^2 - f_0^2}{f}$$

Es decir:

$$\bar{f} = \frac{(\pm 36 \cdot 10^6)^2 - (60 \cdot 10^6)^2}{36 \cdot 10^6} = -64 \cdot 10^6 \text{ Hz} \quad \bar{f} = \frac{(\pm 100 \cdot 10^6)^2 - (60 \cdot 10^6)^2}{100 \cdot 10^6} = 64 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

Resultado que otra vez demuestra que la transformación pasa banda-pasa bajos *conservando el ancho de banda* transforma el *ancho de banda* en uno de los dos dominios al *ancho de banda* en el otro dominio.

#### 8.1.4. Transformación pasa bajos - suprime banda (y viceversa)

La función de transformación inversa de la anteriormente considerada, transforma el filtro pasa bajos normalizado en un filtro *supresor de banda*, de ancho de banda de supresión  $\Delta\omega$ . En particular, para  $\Delta\omega=1$  resulta un filtro supresor de banda normalizado.

La función de transformación es inversa a la transformación pasa bajos - pasa banda:

$$\bar{s} = \frac{\Delta\omega \cdot s}{s^2 + \omega_0^2} \quad (8-7)$$

Se desarrollará el caso general de ancho de la banda suprimida  $\Delta\omega$  que correspondería a un filtro supresor de banda *desnormalizado*. Para el caso *normalizado*, bastaría con considerar  $\Delta\omega=1$ .

Las transformaciones de los puntos singulares de la curva de amplitud del filtro pasa bajos normalizado resultan:

- Punto  $\bar{s}=0$ :

$$0 = \frac{s \Delta\omega}{s^2 + \omega_0^2} \Rightarrow \begin{cases} s = 0 \\ s = \infty \end{cases}$$

- Punto  $\bar{s}=\infty$ :

$$\infty = \frac{s \Delta\omega}{s^2 + \omega_0^2} \Rightarrow s^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow s = \pm j\omega_0$$

- Puntos  $\bar{s}=\pm j1$ :

$$\pm j1 = \frac{j\omega \Delta\omega}{-\omega^2 + \omega_0^2} \Rightarrow \omega^2 \pm (\Delta\omega)\omega - \omega_0^2 = 0$$

$$\therefore \omega_{1,2,3,4} = \frac{1}{2} \left( \mp \Delta\omega \pm \sqrt{(\Delta\omega)^2 + 4\omega_0^2} \right) = \mp \frac{\Delta\omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2}$$

Con lo cual se infiere que existen 2 soluciones positivas ( $\omega_1$  y  $\omega_2$ ) y otras 2 negativas ( $\omega_3=-\omega_1$  y  $\omega_4=-\omega_2$ ), que resultan:

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{\Delta\omega}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2} \quad \text{con } \omega_2 > \omega_1 \quad \omega_{3,4} = \pm \frac{\Delta\omega}{2} - \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2} \quad \text{con } \omega_4 > \omega_3$$

Es decir que el punto  $\bar{s}=+j1$  se transforma en dos valores de  $s = j\omega_{2,3}$  siendo  $\omega_2 > 0$  y  $\omega_3 < 0$  y el punto  $\bar{s}=-j1$  se transforma en dos valores de  $s = j\omega_{1,4}$  siendo  $\omega_1 > 0$  y  $\omega_4 < 0$

El ancho de la *banda suprimida* resultante sobre las frecuencias positivas es:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\Delta\omega}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2} - \left( -\frac{\Delta\omega}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2} \right) \Rightarrow \boxed{\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega}$$

Y por otra parte, el producto  $\omega_1 \omega_2$  resulta:

$$\omega_1 \omega_2 = \left( \frac{\Delta\omega}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2} \right) \left( -\frac{\Delta\omega}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2} \right) = -\frac{(\Delta\omega)^2}{4} + \left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2 \Rightarrow \boxed{\omega_1 \cdot \omega_2 = \omega_0^2}$$

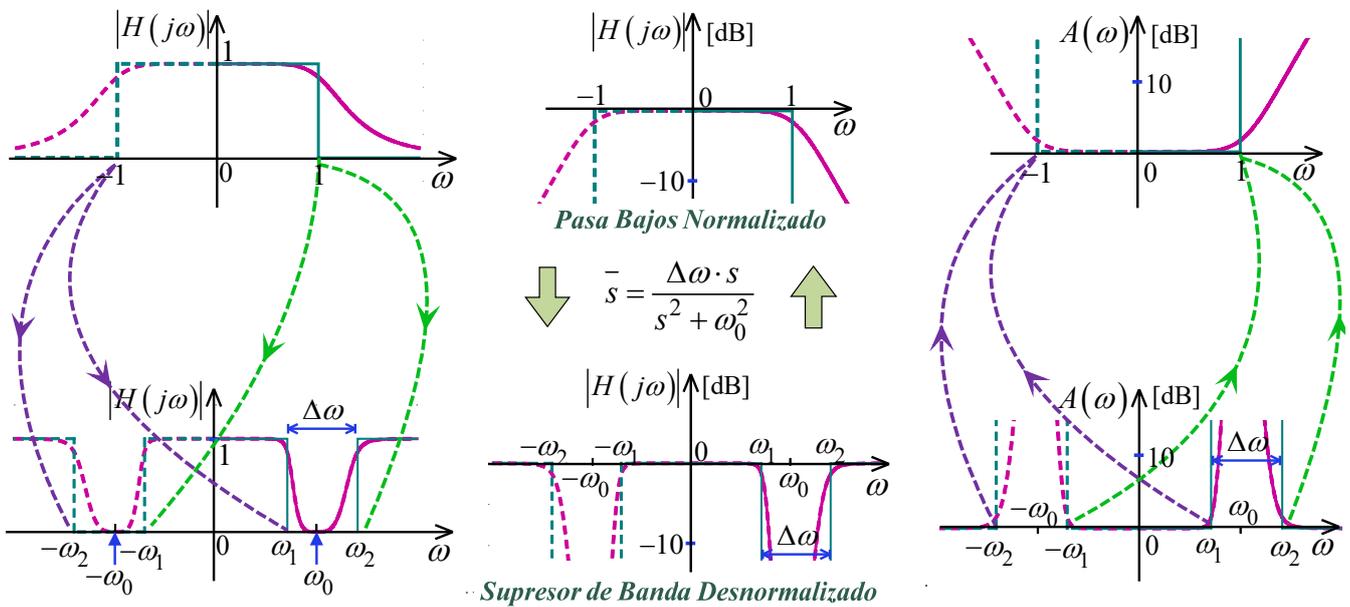
En resumen las transformaciones resultantes son:

$$\bar{s} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s = 0 \\ s = \infty \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bar{s} = \infty &\Leftrightarrow s = \pm j\omega_0 \\ \bar{s} = j1 &\Leftrightarrow \begin{cases} s = j\omega_2 \\ s = j\omega_3 = -j\omega_1 \end{cases} \quad \omega_3 < 0 < \omega_2 \\ \bar{s} = -j1 &\Leftrightarrow \begin{cases} s = j\omega_1 \\ s = j\omega_4 = -j\omega_2 \end{cases} \quad \omega_4 < 0 < \omega_1 \end{aligned}$$

Esta transformación permite convertir el filtro pasa bajos *normalizado* (de ancho de banda 1) a un filtro supresor de banda *desnormalizado* cuya banda de supresión está centrada en la pulsación  $\omega_0$  tal que  $\omega_0^2 = \omega_1\omega_2$  y tiene un ancho  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ , según se indica en la **Fig. 8.12**.

La simetría se acerca tanto más a la aritmética cuanto más cierto resulte que  $\omega_0 \gg \Delta\omega$ . Para las curvas aproximadas, que también se dibujan en la **Fig. 8.12** se observa que la respuesta para pulsaciones inferiores a  $\omega_0$  resulta más comprimida que para pulsaciones superiores a  $\omega_0$ .



**Fig. 8.12.** Transformación pasa bajos normalizado – supresor de banda desnormalizado.

Los elementos del circuito transformado resultante se indican en la **Fig. 8.13**.

$$\begin{aligned} \bar{s}L &= \frac{\Delta\omega s}{s^2 + \omega_0^2} \bar{L} = \frac{1}{\frac{1}{\Delta\omega \bar{L}} s + \frac{\omega_0^2}{\Delta\omega \bar{L}} \frac{1}{s}} \Rightarrow \begin{cases} L = \frac{\Delta\omega \bar{L}}{\omega_0^2} \\ C = \frac{1}{\Delta\omega \bar{L}} \end{cases} \\ \frac{1}{s\bar{C}} &= \frac{1}{\frac{\Delta\omega s}{s^2 + \omega_0^2} \bar{C}} = \frac{1}{\Delta\omega \bar{C}} s + \frac{\omega_0^2}{\Delta\omega \bar{C}} \frac{1}{s} \Rightarrow \begin{cases} L = \frac{1}{\Delta\omega \bar{C}} \\ C = \frac{\Delta\omega \bar{C}}{\omega_0^2} \end{cases} \\ \bar{R} &= R \end{aligned}$$

**Fig. 8.13.** Aplicación de la función de transformación a los elementos del filtro PBN.

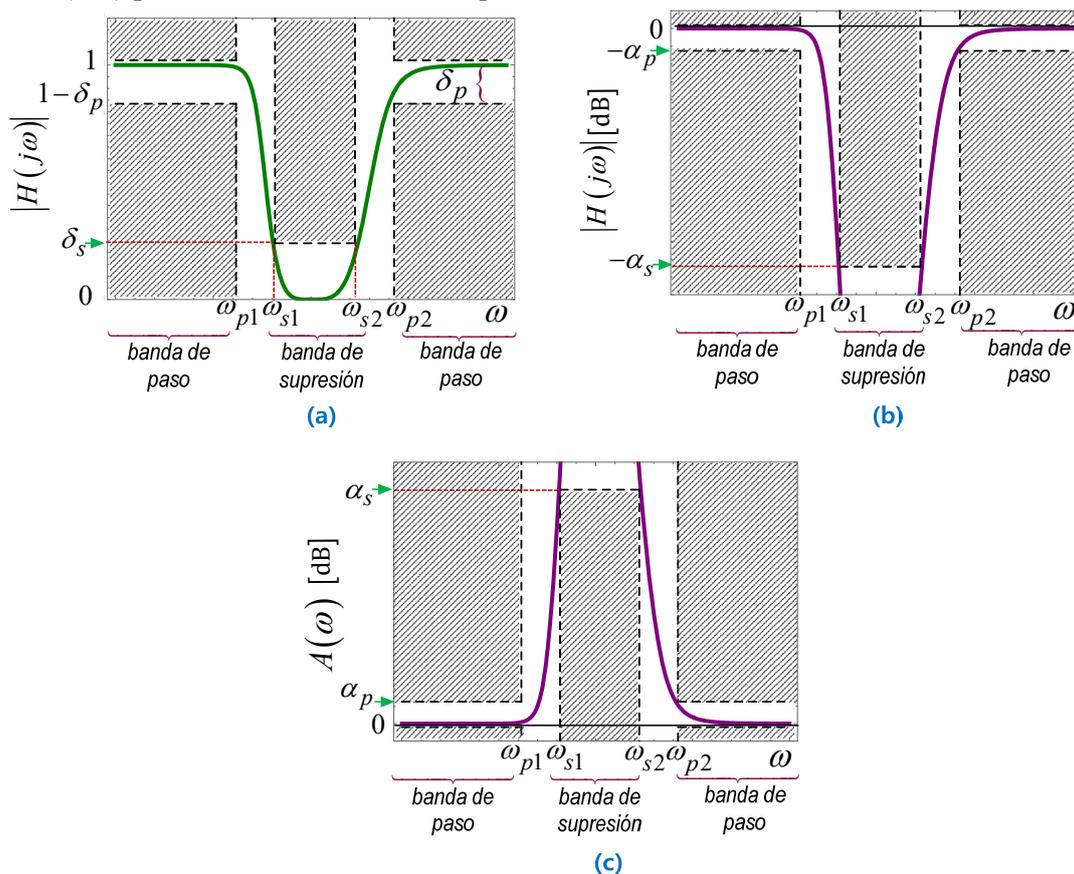
Si la función de transformación pasa bajos - suprime banda (y viceversa) se aplica con  $\Delta\omega \neq 1$  se dice que la transformación se realiza *normalizando* o *desnormalizando*, es decir, “sin conservar” el ancho de banda. Es decir, aplicada al filtro pasa bajos normalizado, dará por resultado un filtro supresor de banda de ancho de

banda de supresión  $\Delta\omega$ ; y viceversa, aplicada a un filtro supresor de banda de ancho de banda de supresión  $\Delta\omega$  dará por resultado un filtro pasa bajos normalizado.

Si la función de transformación pasa bajos - suprime banda (y viceversa) se aplica con  $\Delta\omega=1$  se dice que la transformación se realiza *sin normalizar ni desnormalizar*, o bien, “*conservando*” el ancho de banda en ambos sentidos. Es decir, aplicada a un filtro supresor de banda de ancho de banda de supresión  $\Delta\omega$  resulta un filtro pasa bajos de ancho de banda  $\omega_p=1/\Delta\omega$ . Esta conclusión también queda en evidencia con el siguiente ejemplo numérico, y su importancia se apreciará en los capítulos que siguen.

Patrón o plantilla de especificaciones del filtro supresor de banda

En la **Fig. 8.14** se muestran las plantillas o patrones de especificaciones para el filtro supresor de banda que se desea sintetizar, para las distintas formas de representar la característica de amplitud. En el caso de la **Fig. 8.14a** que corresponde a  $|H(j\omega)|$  en p.u. la plantilla queda determinada por los pares  $(\omega_{p1}; \delta_p)$ ,  $(\omega_{p2}; \delta_p)$ ,  $(\omega_{s1}; \delta_s)$  y  $(\omega_{s2}; \delta_s)$  especificados; mientras que para  $|H(j\omega)|$  en dB (**Fig. 8.14b**) y  $A(\omega)$  en dB (**Fig. 8.14c**) la plantilla queda determinada por la especificación de los pares  $(\omega_{p1}; \alpha_p)$ ,  $(\omega_{p2}; \alpha_p)$ ,  $(\omega_{s1}; \alpha_s)$  y  $(\omega_{s2}; \alpha_s)$ . La importancia de comprender el significado de cada parámetro indicado en las plantillas de especificaciones radica en que, tal como se indica en la **Fig. 8.1**, en el procedimiento de diseño de un filtro supresor de banda que se empleará en este curso se aplicará la transformación (8-7) a las especificaciones del filtro supresor de banda, para obtener las especificaciones del filtro pasa bajos equivalente (considerando  $\Delta\omega=1$ ) que permitirá definir los parámetros de diseño con los cuales se sintetizará un filtro pasa bajos normalizado, el cual se transforma al supresor de banda requerido aplicando nuevamente la transformación (8-7) pero esta vez con el  $\Delta\omega$  requerido.



**Fig. 8.14.** Patrón de especificaciones del filtro supresor de banda a sintetizar: (a)  $|H(j\omega)|$  en p.u.; (b)  $|H(j\omega)|$  en dB; (c) atenuación en dB.

Ejemplo 8.3.

Se desea sintetizar un filtro supresor banda para suprimir las interferencias de radio en líneas telefónicas. La banda de paso de 3 dB debe estar comprendida entre 0 y 400 kHz y por encima de 1900 kHz. Obtener las correspondientes frecuencias equivalentes de 3 dB en el dominio del pasa bajos.

**Resolución.**

En este caso  $f_{p1}=400$  kHz;  $f_{p2}=1900$  kHz y  $\alpha_p=3$  dB. En consecuencia  $\Delta f_p=\Delta f_{3dB}$  y  $f_0$  resultan:

$$\Delta f|_{3\text{ dB}} = f_{p2} - f_{p1} = 1900 - 400 = 1500 \text{ kHz}$$

$$f_0 = \sqrt{f_{p1} \cdot f_{p2}} = \sqrt{400 \cdot 1900} = 871,8 \text{ kHz}$$

Que resultan magnitudes comparables, y en consecuencia cabe esperar una notable asimetría de la banda suprimida del filtro supresor resultante, con respecto a la frecuencia  $f_0$ .

La transformación de las frecuencias que definen el ancho de banda suprimida de 3 dB al dominio del pasa bajos equivalente se realiza aplicando la transformación suprime banda-pasa bajos conservando el ancho de banda, siendo  $f_p$  en el dominio del pasa bajos equivalente:

$$\bar{s} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \Rightarrow j\bar{\omega} = \frac{j\omega}{-\omega^2 + \omega_0^2} \therefore \bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \Rightarrow \bar{f} = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{f}{f_0^2 - f^2}$$

Es decir:

$$\bar{f}_{pa} = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{\pm 1900 \cdot 10^3}{(871,8 \cdot 10^3)^2 - (\pm 1900 \cdot 10^3)^2} = \mp \frac{1}{4\pi^2 \cdot 1500 \cdot 10^3} = \mp 1,689 \cdot 10^{-8} \text{ Hz}$$

$$\bar{f}_{pb} = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{\pm 400 \cdot 10^3}{(871,8 \cdot 10^3)^2 - (\pm 400 \cdot 10^3)^2} = \pm \frac{1}{4\pi^2 \cdot 1500 \cdot 10^3} = \pm 1,689 \cdot 10^{-8} \text{ Hz}$$

Entonces para el pasa bajos equivalente:  $f_p = 1,689 \cdot 10^{-8} \text{ Hz}$

Resultado que demuestra que la transformación suprime banda-pasa bajos *conservando el ancho de banda*, transforma el ancho de banda  $\Delta f_p = 1500$  kHz en el dominio del supresor de banda, al ancho de banda  $\bar{f}_p = 1/(4\pi^2 \cdot 1500 \cdot 10^3) = 1,689 \cdot 10^{-8} \text{ Hz}$  en el dominio del pasa bajos.

**8.2. Topología de los distintos tipos de filtros LC**

Se puede pensar un filtro pasa bajos como un cuadripolo en cadena LC, para el cual el parámetro  $y_{21}(s)$  [ $z_{21}(s)$ ] tiene *todos* sus *ceros* en *infinito*.

Por ser  $y_{21}$  [ $z_{21}$ ] una función racional real impar en  $s$  su forma será:

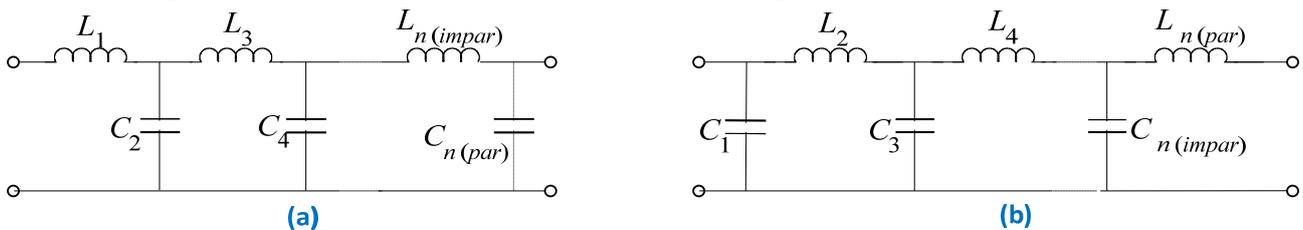
$$y_{21}(s) = \frac{K}{sB(s)} \quad \text{ó} \quad z_{21}(s) = \frac{K}{sB(s)}$$

donde  $K$  es una constante y  $B(s)$  un polinomio *par* en  $s$ .

Es decir  $y_{21}(s)$  [ $z_{21}(s)$ ] tiene en infinito un cero de multiplicidad  $n$ , siendo  $n$  el grado del *denominador*.

Esto significa que aplicando la tercera forma canónica (Cauer I) a una de las inmitancias terminales, el circuito obtenido, *topológicamente* hablando no debería diferir del que se muestra en la **Fig. 8.15**.

Es decir que para realizar los  $n$  ceros de  $y_{21}(s)$  [ $z_{21}(s)$ ] (ceros de transmisión en infinito) se deben efectuar  $n$  remociones de polos en infinito a las instancias de inmitancia que se derivan de la inmitancia terminal.



**Fig. 8.15.** Topología de un filtro pasa bajos de orden  $n$ . (a) Síntesis de la impedancia terminal. (b) Síntesis de la admitancia terminal.

De este modo, como cada remoción en infinito se realiza con un inductor en serie o con un capacitor en derivación, las  $n$  remociones en infinito determinan que el circuito resultante tenga  $n$  elementos.

El primer elemento será una inductancia en serie o un capacitor en derivación, dependiendo respectivamente si la síntesis se inicia como impedancia o admitancia (la instancia de la inmitancia terminal que tenga un polo en infinito).

El último elemento estará determinado por la paridad de  $n$ , según sea par o impar, tal como se muestra en la **Fig. 8.15**.

Una vez determinada la topología del filtro pasa bajos (normalizado o no), aplicando elemento a elemento las diferentes transformaciones vistas pueden obtenerse las topologías de todos los tipos de filtros.

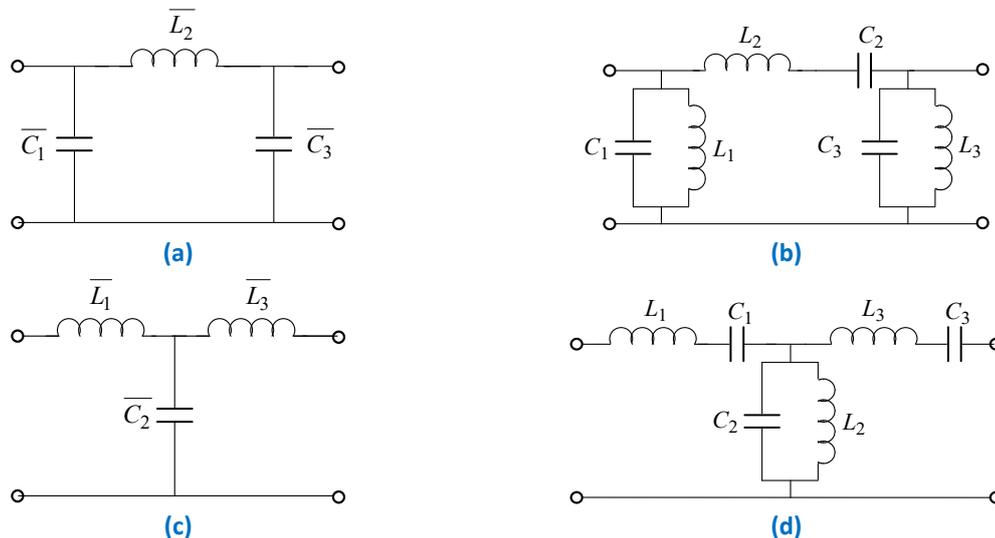
#### Ejemplo 8.4.

Determinar la topología de un filtro pasa banda de orden 3, indicando cuántos elementos de cada tipo son necesarios.

#### Resolución

El filtro pasa bajos de orden 3, desarrollado como admitancia tendrá la topología indicada en la **Fig. 8.16a** y el pasa banda resultante la indicada en la **Fig. 8.16b**. Desarrollado como impedancia tendrá la topología indicada en la **Fig. 8.16c**, y el pasa banda resultante la indicada en la **Fig. 8.16d**.

En cualquier caso, el número de elementos necesarios es 6 (3 capacitores y 3 inductores). En un caso de diseño real, serán los valores obtenidos para estos componentes los que determinen el circuito más adecuado.



**Fig. 8.16.** (a) Filtro pasa bajos de orden 3 sintetizado como admitancia. (b) Filtro pasa banda resultante. (c) Filtro pasa bajos de orden 3 sintetizado como impedancia. (d) Filtro pasa banda resultante.

### 8.3. Bibliografía

- [1] W. Warzanskyj Poliscuk. *Métodos de Síntesis de Redes Lineales*. Capítulo VIII: “Introducción a la Teoría Clásica de Filtros”. Universidad Politécnica de Madrid. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicaciones. 1977. ISBN 978-84-740-2054-9.
- [2] R. W. Daniels. *Approximation methods for electronic filter design*. Capítulo I: “Introduction”. Capítulo VI: “Frequency Transformations”. McGraw Hill. New York, 1974. ISBN 978-00-701-5308-0.
- [3] Wai-Kai Chen. *Passive, Active and Digital Filters (3<sup>rd</sup>. Ed)*. Chapter 3. “Approximation”. Chapter 4. “Frequency Transformation”. CRC Press. Boca Raton. FL. 2009. ISBN 978-1-4200-5885-7.

---

# Capítulo 9

## *Filtros Pasivos.*

---

### 9.1. Introducción

El empleo de filtros es indispensable en numerosas aplicaciones, bien sea para seleccionar las señales deseadas en una determinada banda de frecuencias o para rechazar las frecuencias indeseadas que pueden degradar a las señales de interés.

El diseño de filtros es una de las pocas áreas de ingeniería para las cuales existe una teoría de diseño completa, comenzando en la especificación y terminando con la realización de un circuito. Por ello, un estudio detallado del diseño de filtros requeriría un libro completo y de hecho existen tales libros. En este curso se desarrollará una introducción al tema de modo al abordar los métodos de diseño con un fundamento teórico adecuado.

En este capítulo se tratarán algunos de los principales aspectos relacionados con los filtros pasivos en el contexto de las señales analógicas. Una parte muy importante de los filtros pasivos, la constituyen los filtros designados como *RC* y *LC*, si bien no son los únicos.

El diseño de los filtros pasivos ha seguido, desde sus orígenes, dos trayectorias principales: diseño mediante parámetros imagen y diseño por pérdida de inserción.

El método de parámetros imagen se basa en una clasificación sistemática de las respuestas de circuitos *LC* simples, de dos puertos o pares de terminales, expresadas en términos de impedancias y pérdidas o atenuaciones. El filtro requerido, con la característica de atenuación y fase deseadas, se realiza conectando en cascada las secciones prototipo *LC* necesarias, con la adaptación correspondiente de las impedancias imagen.

El método de pérdida de inserción, el más utilizado actualmente, forma parte de la teoría moderna de filtros y se basa en la especificación de la respuesta de la red mediante una función de transferencia en magnitud y fase. Dicha función de transferencia se sintetiza, mediante diversas técnicas en un circuito de parámetros concentrados (*L*, *C*) para obtener la respuesta deseada. Contempla el diseño a partir de la determinación de los polos y ceros de una función de transferencia realizable, que presenta la característica de atenuación y fase requeridas. La información que proporciona esta función de transferencia se usa luego para calcular una impedancia típica, a partir de la cual se determinan todos los elementos del filtro.

Los principales tipos de filtros se caracterizan según la forma de su respuesta en frecuencia y se designan con los nombres de quienes los desarrollaron o de las funciones matemáticas en que se basa su diseño. Los más usuales son los de Butterworth, Chebyshev, Bessel, elípticos, etc.

Este capítulo se completa con la presentación del procedimiento de diseño y los detalles que se requieren tener en cuenta para transformar el conjunto de especificaciones en un circuito funcional.

### 9.2. Funciones de transferencia de los distintos tipos de filtros

La función de transferencia de un filtro  $H(s)$  es un cociente de dos polinomios en  $s$ :

$$H(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_1 s + c_0} \quad (9-1)$$

Para que el circuito del filtro resulte estable, el grado del numerador debe ser menor o igual al grado del denominador; por lo tanto, es el grado  $n$  del denominador el que determina el *orden del filtro*.

La característica de amplitud de la función de transferencia, considerando a los filtros como cuádrupolos, permite establecer cuatro tipos básicos de filtros, teniendo en cuenta el rango de las frecuencias que no resultan atenuadas: pasa bajos, pasa altos, pasa banda y rechaza banda.

En esta sección se analizan las funciones de transferencia de primer orden y de segundo orden, que son las funciones de transferencia más simples tanto como importantes, por el hecho que conectando en cascada filtros de primer orden y segundo orden, pueden lograrse filtros de orden superior.

### 9.2.1. Filtro pasa bajos

La función de transferencia de un filtro pasa bajos de orden  $n$  debe tener  $n$  ceros (ceros de transmisión) en infinito. Entonces la expresión (9-1) tendrá la siguiente forma:

$$H(s) = \frac{K \cdot c_0}{s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_1 s + c_0} \quad (9-2)$$

Donde  $K$  es la *ganancia* para  $s=0$ , es decir, la que corresponde al *centro* de la banda de paso del filtro. Los coeficientes del denominador se corresponden con la notación empleada en las **Tablas 8-1, 8-3 y 8-5**, de manera que adoptando los coeficientes correspondientes, podría construirse el denominador de la función de transferencia de un filtro pasa bajos de Butterworth o de Chebyshev del orden  $n$  requerido.

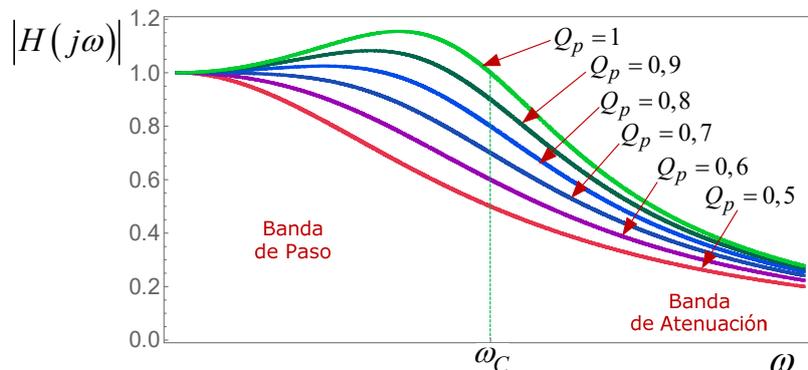
Entonces la transferencia de un filtro pasa bajos de *primer* orden ( $n=1$ ) será:

$$H(s) = \frac{K \cdot c_0}{s + c_0} \quad (9-3)$$

De manera similar, la transferencia de un filtro pasa bajos de *segundo* orden ( $n=2$ ) puede escribirse, renombrando convenientemente los coeficientes, de la siguiente forma:

$$H(s) = \frac{K \cdot c_0}{s^2 + c_1 s + c_0} = \frac{K \omega_c^2}{s^2 + \frac{\omega_c}{Q_p} s + \omega_c^2} = \frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + \frac{1}{Q_p} \frac{s}{\omega_c} + 1} \quad (9-4)$$

Aquí se da por sobreentendido que las raíces del denominador son complejas conjugadas, en cuyo caso, el factor de mérito  $Q_p$  de las raíces debe ser mayor que 0.5. En la **Fig. 9.1** se muestra el efecto de  $Q_p$  sobre  $|H(j\omega)|$ . Se puede observar que cuanto más elevado es  $Q_p$ , más abrupta resulta la transición desde la banda de paso a la banda de atenuación.



**Fig. 9.1.** Efecto del factor  $Q_p$  del par de polos sobre  $|H(j\omega)|$  del filtro pasa bajos.

Se puede observar en la **Fig. 9.1** que el caso  $Q_p=0,7$  (más precisamente  $Q_p = 1/\sqrt{2}$ ) da la máxima planicidad de la curva en la banda de paso. En efecto, esto es así porque para  $Q_p = 1/\sqrt{2}$  de (9-4) resulta:

$$H(j\omega) = \frac{K \omega_c^2}{\omega_c^2 - \omega^2 + j\sqrt{2}\omega_c\omega}$$

Y por lo tanto:

$$|H(j\omega)| = \frac{K \omega_c^2}{\sqrt{(\omega_c^2 - \omega^2)^2 + (\sqrt{2}\omega_c\omega)^2}} = \frac{K \omega_c^2}{\sqrt{\omega_c^4 - 2\omega_c^2\omega^2 + \omega^4 + 2\omega_c^2\omega^2}} = \frac{K}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^4}}$$

Que corresponde a la aproximación de Butterworth de orden 2, lo cual explica la máxima planicidad de la transferencia en la banda de paso para este valor particular de  $Q_p = 1/\sqrt{2}$ .

9.2.2. Filtro pasa altos

Empleando la transformación pasa bajos – pasa altos, es decir, reemplazando en (9-2) a  $s$  por  $1/s$ , resulta la forma de la transferencia de un filtro pasa-altos:

$$H(s) = \frac{K s^n}{s^n + \frac{c_1}{c_0} s^{n-1} + \dots + \frac{c_{n-1}}{c_0} s + \frac{1}{c_0}} = \frac{K s^n}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \tag{9-5}$$

Ahora  $K$  es la ganancia para  $s \rightarrow \infty$ , es decir, la que corresponde al centro de la banda de paso del filtro. Ciertamente en este caso debe ocurrir que  $H(s)$  tiene  $n$  ceros (ceros de transmisión) en el origen, como ocurre con la expresión (9-5).

Entonces la transferencia de un filtro pasa-altos de primer orden ( $n=1$ ) será:

$$H(s) = \frac{K \cdot s}{s + b_0} \tag{9-6}$$

De manera similar, la transferencia de un filtro pasa-altos de segundo orden ( $n=2$ ) puede escribirse, renombrando convenientemente los coeficientes, de la siguiente forma:

$$H(s) = \frac{K \cdot s^2}{s^2 + b_1 s + b_0} = \frac{K s^2}{s^2 + \frac{\omega_c}{Q_p} s + \omega_c^2} = \frac{K \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + \frac{1}{Q_p} \left(\frac{s}{\omega_c}\right) + 1} \tag{9-7}$$

Donde  $K$  es la ganancia para  $s \rightarrow \infty$ . Nuevamente se da por sobreentendido que las raíces del denominador son complejas conjugadas, en cuyo caso, el factor de mérito  $Q_p$  de las raíces debe ser mayor que 0,5. En la Fig. 9.2 se muestra el efecto de  $Q_p$  sobre  $|H(j\omega)|$ . Se puede observar que cuanto mas elevado es  $Q_p$ , más abrupta resulta la transición desde la banda de paso a la banda de atenuación.

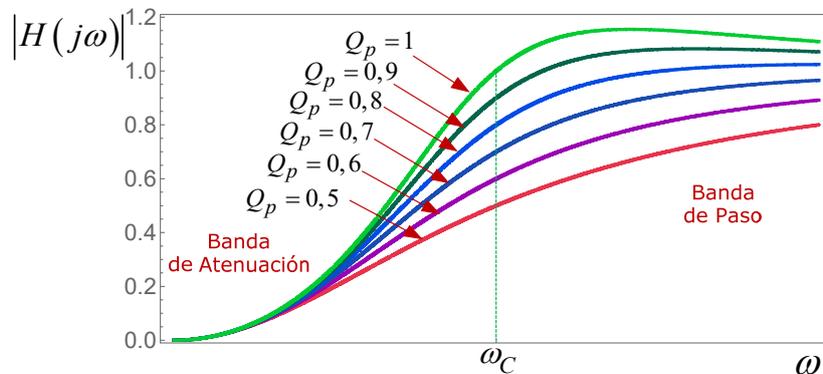


Fig. 9.2. Efecto del factor Qp del par de polos sobre  $|H(j\omega)|$  del filtro pasa altos.

Otra vez puede comprobarse que la transferencia presenta máxima planicidad en la banda de paso cuando  $Q_p = 1/\sqrt{2}$ , ya que corresponde a la aproximación de Butterworth de orden 2, tal como se demostró en el apartado 9.2.1. para el filtro pasa bajos.

### 9.2.3. Filtro pasa banda

Para obtener la función de transferencia de un filtro pasa banda de ancho de banda  $\Delta\omega$  centrado en  $\omega_0$ , se aplica la transformación:

$$s = \frac{s^2 + \omega_0^2}{\Delta\omega \cdot s} \quad (9-8)$$

Y para obtener la función de transferencia de un filtro pasa banda de ancho de banda normalizado  $\Delta\Omega$  centrado en  $\omega_0=1$  se aplica la transformación:

$$s = \frac{s^2 + 1}{\Delta\Omega \cdot s}, \text{ con } \Delta\Omega = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \quad (9-9)$$

En cualquier caso, el orden del filtro resultante será el doble del orden del prototipo pasa bajos. Esto significa que todos los filtros pasabanda son de orden *par* y que el filtro pasa banda de menor orden que se puede implementar es  $n=2$

Para obtener la función transferencia de un filtro pasa banda de segundo orden, hay que tener en cuenta que el prototipo pasa bajos al que se le debe aplicar la transformación tiene una transferencia de primer orden:

$$H(s) = \frac{K c_0}{s + c_0}$$

Donde  $K$  es la *ganancia* para  $s=0$ , es decir, la que corresponde al *centro* de la banda de paso del filtro pasa bajos.

Entonces, la función del pasa banda resultante será:

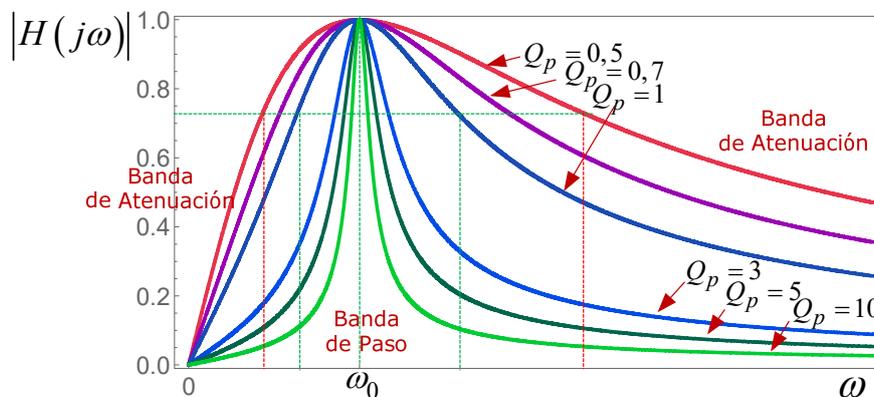
$$H(s) = \frac{K c_0}{\frac{s^2 + \omega_0^2}{\Delta\omega \cdot s} + c_0} = \frac{K c_0 \Delta\omega s}{s^2 + c_0 \Delta\omega s + \omega_0^2} \quad (9-10)$$

Y teniendo en cuenta que  $Q_p = \omega_0/\Delta\omega$  (relación que se demuestra en el apartado siguiente) resulta:

$$H(s) = \frac{K \frac{\omega_0}{Q_p} s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q_p} s + \omega_0^2} = \frac{K \frac{1}{Q_p} \left(\frac{s}{\omega_0}\right)}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{Q_p} \left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} \quad (9-11)$$

Donde ahora  $K$  es la *ganancia* para  $s = j\omega_0$ , es decir, la que corresponde al *centro* de la banda de paso del filtro pasa banda, y  $Q_p$  es el *factor de mérito* del par de polos.

En la **Fig. 9.3** se muestra el efecto de  $Q_p$  sobre  $|H(j\omega)|$ . Se puede observar que a mayor  $Q_p$ , más selectivo resulta el filtro, porque la transición desde la banda de paso a la banda de atenuación resulta más abrupta.



**Fig. 9.3.** Efecto del factor  $Q_p$  del par de polos sobre  $|H(j\omega)|$  del filtro pasa banda.

Otra vez puede comprobarse que la transferencia presenta máxima planicidad en la banda de paso cuando  $Q_p = 1/\sqrt{2}$ , ya que corresponde a la aproximación de Butterworth de orden 2, tal como se demostró en el

apartado 9.2.1. para el filtro pasa bajos. Expresado en términos del factor de amortiguamiento  $\xi$  que probablemente resulte más familiar al lector, esta situación correspondería al valor:

$$\xi = \frac{1}{2Q_p} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$$

### Relación entre $Q_p$ y el ancho de banda de mitad de potencia

El factor  $Q_p$  guarda relación con el ancho de banda de *mitad de potencia*  $\Delta\omega$ , el cual está determinado por las pulsaciones para las cuales  $|H(j\omega)|^2$  es la mitad del cuadrado del valor pico, es decir las frecuencias tales que:

$$\left| \frac{H(j\omega)}{H(j\omega_0)} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

Es decir, para la función  $H(s)$  que se está analizando esto resulta en:

$$\frac{1}{2} = \frac{(\omega_0/Q_p)^2 \omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega \cdot \omega_0/Q_p)^2} = \frac{1}{\left[ \frac{Q_p}{\omega \cdot \omega_0} (\omega^2 - \omega_0^2) \right]^2 + 1} = \frac{1}{\left[ \frac{Q_p \cdot \omega_0^2}{\omega \cdot \omega_0} \left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right) \right]^2 + 1}$$

Haciendo el cambio de variables:

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} \tag{9-12}$$

Resulta

$$\frac{1}{\left[ \frac{Q_p}{x} (x^2 - 1) \right]^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

Debiendo ser:

$$\left[ \frac{Q_p}{x} (x^2 - 1) \right]^2 = 1 \Rightarrow \frac{Q_p}{x} (x^2 - 1) = \pm 1$$

Es decir:

$$x^2 \mp \frac{1}{Q_p} x - 1 = 0$$

Resultando las soluciones:

$$x_{1,2,3,4} = \pm \frac{1}{2Q_p} \pm \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_p^2}}$$

Volviendo a la variable  $\omega$ , reemplazando  $x$  por (9-12) y considerando de las 4 soluciones las dos que corresponden a pulsaciones positivas:

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left[ \pm \frac{1}{2Q_p} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_p^2}} \right]$$

Resulta simple comprobar que para valores de  $Q_p \gg 1$

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left( 1 \pm \frac{1}{2Q_p} \right)$$

Y el ancho de banda comprendido entre las dos pulsaciones de mitad de potencia resulta:

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \frac{\omega_0}{Q_p}$$

Es decir:

$$Q_p = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (9-13)$$

Expresión que resulta muy útil en la práctica ya que establece, para una función de transferencia del tipo pasa banda, la relación que existe entre el factor de calidad del polo  $Q_p$ , la frecuencia natural del polo  $\omega_0$  (que corresponde a la ubicación del pico de la función de transferencia) y el ancho de banda  $\Delta\omega$  de potencia mitad, para valores de  $Q_p \gg 1$ .

#### Filtro pasa banda de cuarto orden

Como caso de análisis ejemplificativo y de aplicación a síntesis de filtros con pendientes mayores en la banda de atenuación, se presenta aquí el caso de la transferencia de un filtro pasabanda de cuarto orden, el cual tendrá una pendiente de 40 dB/década en la banda de atenuación.

La función de transferencia de un filtro pasabanda de orden 4 siempre podrá descomponerse como el producto de dos funciones de transferencia de orden 2.

Dependiendo del ancho de la banda de paso  $\Delta\omega$  en relación con la frecuencia central  $\omega_0$ , es decir del factor de mérito  $Q$  del filtro, esa descomposición será diferente.

Si  $Q < 1$ , el ancho de la banda de paso ( $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ ) es mayor que la pulsación central  $\omega_0$  y la descomposición puede hacerse como el producto de una función pasa bajos de orden 2 con frecuencia de corte  $\omega_2$  y una función pasa altos de orden 2 con frecuencia de corte  $\omega_1$ . La síntesis de cada componente del producto puede efectuarse de manera independiente dado que ambas pulsaciones de corte se encuentran bien separadas.

Los casos de  $Q \gg 1$  (lo cual puede admitirse que se cumple si  $Q > 10$ ) se consideran casos de elevado  $Q$ , lo cual es equivalente a ancho de banda estrecho, por lo cual la descomposición ya no puede hacerse como en el caso anterior. Ahora la descomposición estará dada por el producto de dos funciones de transferencia pasa banda orden 2. La síntesis de cada componente del producto requiere una estrategia diferente, razón por la cual se tratará en este apartado.

Para obtener la función de transferencia de un filtro pasa banda de orden 4 se adopta como punto de partida la función de transferencia pasa bajos de segundo orden:

$$\overline{H(s)} = \frac{K}{1 + a_i s + b_i s^2}$$

En la cual  $K$  es la ganancia para  $\omega=0$  y los coeficientes  $a_i$  y  $b_i$  del denominador, a diferencia de la notación empleada en las **Tablas 8-1, 8-3 y 8-5**, corresponden al factor de segundo orden *no normalizado* (coeficiente de la mayor potencia distinto de 1).

Entonces, aplicando la función de transformación dada por (9-9) resulta la función de transferencia del filtro pasa banda de ancho de banda  $\Delta\Omega$  normalizado respecto de  $\omega_0$ :

$$H(s) = \frac{K(\Delta\Omega)^2}{b_i \left(s + \frac{1}{s}\right)^2 + a_i \cdot \Delta\Omega \left(s + \frac{1}{s}\right) + (\Delta\Omega)^2} = \frac{K \frac{(\Delta\Omega)^2}{b_i} s^2}{(s^2 + 1)^2 + \frac{a_i}{b_i} \cdot \Delta\Omega \cdot s (s^2 + 1) + \frac{(\Delta\Omega)^2}{b_i} s^2}$$

Es decir:

$$H(s) = \frac{K \frac{(\Delta\Omega)^2}{b_i} s^2}{s^4 + \frac{a_i}{b_i} \cdot \Delta\Omega \cdot s^3 + \left(2 + \frac{(\Delta\Omega)^2}{b_i}\right) s^2 + \frac{a_i}{b_i} \cdot \Delta\Omega \cdot s + 1} \quad (9-14)$$

Se considera importante volver a mencionar que en esta expresión,  $K$  es la ganancia del pasa bajos prototipo para  $\omega=0$ , y  $\Delta\Omega$  es el ancho de banda normalizado respecto de  $\omega_0$ . En este punto conviene destacar que en el caso de filtros Butterworth, puede ser el ancho de banda de 3 dB ó de  $x$  dB, dependiendo

de la forma de la aproximación que se empleó para obtener la función de transferencia del pasa bajos normalizado ( $\varepsilon=1$  ó  $\varepsilon<1$ ).

El paso siguiente consiste en lograr que esta expresión se corresponda con el *producto* de dos funciones de transferencia *pasa banda de segundo orden*, con pulsaciones centrales de las respectivas bandas de paso  $\omega_{01}$  y  $\omega_{02}$  tales que:

$$\omega_0^2 = \omega_{01} \cdot \omega_{02}$$

haciendo

$$\omega_{01} = \alpha \omega_0$$

$$\omega_{02} = \frac{1}{\alpha} \omega_0$$

Siendo  $\alpha$  un *factor de desintonía* que se define mayor que 1, lo que determina que  $\omega_{01} > \omega_{02}$ . Esto se denomina estrategia de *sintonía escalonada (staggered tuning)*, que consiste en sintonizar a cada etapa a una frecuencia ligeramente diferente, alrededor de la frecuencia central de la banda de paso del filtro, lo que permite lograr que la banda de paso resulte más plana.

Entonces, la función de transferencia de cuarto orden se divide en dos términos *pasa banda de segundo orden* ya vistos (9-11):

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) = \frac{K_1 \cdot \frac{1}{\omega_{01} \cdot Q_{p1}} \cdot s}{\left(\frac{s}{\omega_{01}}\right)^2 + \frac{1}{Q_{p1}} \cdot \left(\frac{s}{\omega_{01}}\right) + 1} \cdot \frac{K_2 \cdot \frac{1}{\omega_{02} \cdot Q_{p2}} \cdot s}{\left(\frac{s}{\omega_{02}}\right)^2 + \frac{1}{Q_{p2}} \cdot \left(\frac{s}{\omega_{02}}\right) + 1}$$

Reemplazando  $\omega_{01}$  y  $\omega_{02}$  y normalizando respecto de  $\omega_0$  ( $\omega_0=1$ ):

$$H(s) = \frac{\frac{K_1 \cdot s}{Q_{p1} \cdot \alpha}}{\left(\frac{s}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{Q_{p1}} \cdot \left(\frac{s}{\alpha}\right) + 1} \cdot \frac{\frac{K_2 \cdot \alpha \cdot s}{Q_{p2}}}{(\alpha \cdot s)^2 + \frac{1}{Q_{p2}} \cdot (\alpha \cdot s) + 1} \quad (9-15)$$

Operando con esta expresión se llega a:

$$H(s) = \frac{\frac{K_1 \cdot K_2 \cdot s^2}{Q_{p1} \cdot Q_{p2}}}{s^4 + \left(\frac{\alpha}{Q_{p1}} + \frac{1}{\alpha Q_{p2}}\right) \cdot s^3 + \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{Q_{p1} Q_{p2}}\right) \cdot s^2 + \left(\frac{1}{\alpha Q_{p1}} + \frac{\alpha}{Q_{p2}}\right) \cdot s + 1} \quad (9-16)$$

En la expresión (9-14) se observa que los coeficientes de  $s^3$  y  $s$  son idénticos y por comparación con (9-16), tiene que ocurrir que:

$$\frac{\alpha}{Q_{p1}} + \frac{1}{\alpha Q_{p2}} = \frac{1}{\alpha Q_{p1}} + \frac{\alpha}{Q_{p2}} \quad (9-17)$$

Lo cual sólo es posible si:

$$Q_{p1} = Q_{p2} = Q_{pi} \quad (9-18)$$

Es decir, los factores de mérito de ambos pares de polos son idénticos, pero *no deben confundirse* con el factor de mérito  $Q$  del filtro, que está dado por:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta\Omega} \quad (9-19)$$

Donde tanto  $\Delta\omega$  como  $\Delta\Omega$  deben corresponder a los puntos de potencia mitad (3 dB).

Igualando los coeficientes en  $s$  de las expresiones (9-14) y (9-16) e introduciendo (9-18) resulta:

$$\frac{a_i \cdot \Delta\Omega}{b_i} = \frac{1}{\alpha Q_{pi}} + \frac{\alpha}{Q_{pi}} = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha Q_{pi}}$$

Con lo cual:

$$Q_{pi} = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} \frac{b_i}{a_i \cdot \Delta\Omega} \quad (9-20)$$

Igualando las constantes del numerador de las expresiones (9-14) y (9-16) e introduciendo (9-18) y (9-20) resulta:

$$K \frac{(\Delta\Omega)^2}{b_i} = \frac{K_1 K_2}{Q_{pi}^2} = K_1 K_2 \left[ \frac{\alpha \cdot a_i \cdot \Delta\Omega}{(\alpha^2 + 1) \cdot b_i} \right]^2 \Rightarrow K_1 K_2 = K \cdot b_i \left[ \frac{(\alpha^2 + 1)}{\alpha \cdot a_i} \right]^2$$

Con lo cual, si se adopta  $K_1 = K_2 = K_i$ , resulta:

$$K_i = K_1 = K_2 = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha \cdot a_i} \sqrt{K \cdot b_i} \quad (9-21)$$

Igualando los coeficientes en  $s^2$  de las expresiones (9-14) y (9-16) e introduciendo (9-18) y (9-20), resulta:

$$\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\left( \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} \frac{b_i}{a_i \cdot \Delta\Omega} \right)^2} = 2 + \frac{(\Delta\Omega)^2}{b_i}$$

Igualando a cero:

$$\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} + \left[ \frac{\alpha \cdot \Delta\Omega \cdot a_i}{(\alpha^2 + 1) b_i} \right]^2 - 2 - \frac{(\Delta\Omega)^2}{b_i} = 0 \quad (9-22)$$

Luego de operar y reagrupar convenientemente se llega a la expresión:

$$\alpha^8 - \frac{(\Delta\Omega)^2}{b_i} \alpha^6 - 2 \left[ 1 + \frac{(\Delta\Omega)^2}{b_i} - \frac{1}{2} \left( \frac{a_i}{b_i} \Delta\Omega \right)^2 \right] \alpha^4 - \frac{(\Delta\Omega)^2}{b_i} \alpha^2 + 1 = 0 \quad (9-23)$$

De las 8 soluciones de esta expresión, que se pueden determinar por algún procedimiento numérico o mediante alguna aplicación matemática, 4 son reales y 4 son complejas conjugadas. El valor de  $\alpha$  buscado tiene que ser real positivo mayor que la unidad.

Entonces el procedimiento a seguir para determinar todos los parámetros de las dos funciones de transferencia de segundo orden que componen la transferencia de 4 orden deseada, es el siguiente:

- 1) Determinar el valor de  $\alpha$  a partir de (9-23)
- 2) Determinar el factor de mérito  $Q_{pi}$  mediante (9-20), que es el mismo para ambos polos
- 3) Adoptar las ganancias de centro de banda individuales  $K_1$  y  $K_2$  iguales evaluadas mediante (9-21).

#### 9.2.4. Filtro supresor de banda

De manera similar al caso anterior, para obtener la función de transferencia de un filtro supresor de banda de ancho de banda suprimida  $B$  centrado en  $\omega_0$ , se aplica la transformación:

$$s = \frac{B \cdot s}{s^2 + \omega_0^2} \quad (9-24)$$

Para obtener la función transferencia de un filtro supresor de banda de segundo orden, hay que tener en cuenta que el prototipo pasa bajos al que se le debe aplicar la transformación tiene una transferencia de primer orden:

$$H(s) = \frac{K c_0}{s + c_0}$$

Donde  $K$  es la ganancia para  $s=0$ , es decir, la que corresponde al *centro* de la banda de paso del filtro pasa bajos.

Entonces:

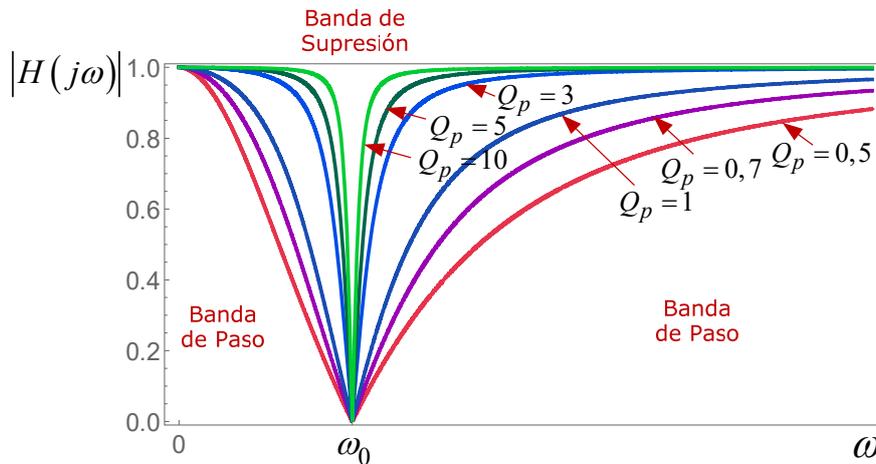
$$H(s) = \frac{K c_0}{\frac{B \cdot s}{s^2 + \omega_0^2} + c_0} = \frac{K c_0 (s^2 + \omega_0^2)}{c_0 s^2 + B \cdot s + c_0 \omega_0^2} = \frac{K (s^2 + \omega_0^2)}{s^2 + \frac{B}{c_0} \cdot s + \omega_0^2} \tag{9-25}$$

Y renombrando adecuadamente los coeficientes resulta:

$$H(s) = \frac{K (s^2 + \omega_0^2)}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q_p} s + \omega_0^2} \tag{9-26}$$

Donde, en este caso,  $K$  es la ganancia para  $s = \infty$ ; es decir, la que corresponde al *centro* de la banda de paso del filtro supresor de banda.

En la **Fig. 9.4** se muestra el efecto de  $Q_p$  sobre  $|H(j\omega)|$ . Se puede observar que a mayor  $Q_p$ , más selectivo resulta el filtro, por ser cada vez más abrupta la transición desde la banda de paso a la banda de supresión.



**Fig. 9.4.** Efecto del factor  $Q_p$  del par de polos sobre  $|H(j\omega)|$  del filtro supresor de banda.

### 9.3. Filtros pasivos RC

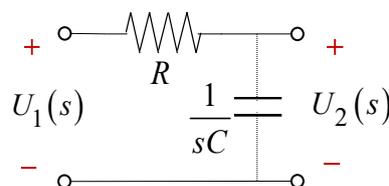
Si las exigencias para la atenuación son poco rigurosas se pueden emplear filtros pasivos *RC* (filtros *RCP*). Una ventaja de los filtros *RCP* es que no necesitan fuentes de tensión como los filtros activos y se componen de elementos simples: capacitores y resistores. Otra ventaja importante es que los filtros *RCP* se pueden fabricar en forma integrada. La desventaja de los filtros *RCP* es, que no se pueden realizar los polos complejos de la función de transferencia  $H(s)$ .

En el cálculo de los filtros *RCP* habitualmente se *eligen* los valores de los capacitores y se *calculan* los resistores, por lo tanto, el valor de los resistores de los filtros *RCP* depende del valor de  $C$  que se adopte y de la frecuencia de corte  $\omega_c$  del filtro.

Existen celdas elementales *RCP* que son las que realizan las funciones de transferencia de menor orden vistas en el apartado **9.2**.

#### 9.3.1. Filtro *RCP* pasa bajos elemental

La función de transferencia (9-3) es la que corresponde al filtro pasa bajos de orden 1, que es el menor orden posible, y puede implementarse mediante la celda *RC* que se muestra en la **Fig. 9.5**.

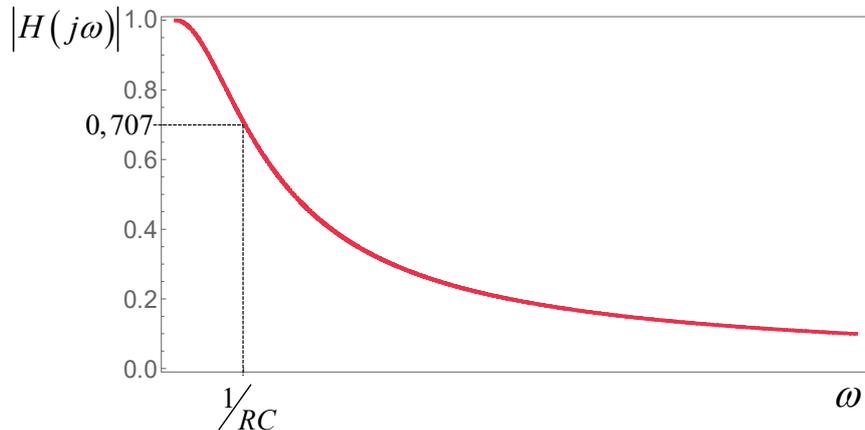


**Fig. 9.5.** Celda *RC* pasa bajos elemental (de primer orden).

En efecto, para dicha celda resulta:

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{RCs + 1} \quad (9-27)$$

Cuya representación para  $s=j\omega$  se muestra en la **Fig. 9.6**, en la cual se indica la pulsación  $\omega_c=1/RC$  para la cual el módulo de  $H(j\omega)$  cae al 70,7% del valor que tiene en  $\omega=0$ ; y en la transferencia de potencia  $\omega_c$  corresponde al punto de *potencia mitad*, es decir, al punto en que la curva llega al 50% del valor que tiene en  $\omega=0$ .



**Fig. 9.6.** Función  $|H(j\omega)|$  de la celda RC pasa bajos elemental.

La frecuencia de corte de la banda de paso resulta entonces:

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} \quad (9-28)$$

El procedimiento de diseño consiste en adoptar un valor de capacidad conveniente para el capacitor  $C$  y a partir de la frecuencia de corte especificada, se calcula el valor de  $R$  con la siguiente expresión:

$$R = \frac{1}{2\pi f_c C} \quad (9-29)$$

### Ejemplo 9.1.

Diseñar un filtro pasa bajos RC pasivo de primer orden con frecuencia de corte  $f_c=20$  kHz.

### Resolución

Se procede al diseño del filtro y se enumeran los pasos requeridos a fin de tipificar el procedimiento.

1. Se adopta un valor de  $C$  adecuado, que se corresponda con la serie de valores E24 del Apéndice D.  $C$  será uno de los valores de la lista E24 multiplicado por una potencia de 10, que se denominará  $CMult$ . Para definir  $CMult$  se debe tener en cuenta que:

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi R f_c}$$

Es decir que la potencia de 10 que afecta a la capacidad  $C$  puede adoptarse como *la suma* de las potencias de 10 *cambiadas de signo* de  $R$ , de  $f_c$  y del producto de  $2\pi$  por las mantisas de  $R$  y  $f_c$ . Por ejemplo, si  $f_c$  fuera  $2,5 \cdot 10^4$  y se pretendieran valores de  $R$  en  $k\Omega$ , es decir,  $x \cdot 10^3$ , y asumiendo que la potencia de 10 de  $(2\pi \cdot 2,5 \cdot x)$  es 1, se debería considerar:  $CMult = 10^{-(4+3+1)} = 10^{-8}$ .

2. Se comienza por el *primer* valor de la lista E24:
3. Calcular el valor de  $C$

$$C = CMult \cdot 1 = 10^{-8} \quad \Rightarrow \quad C = 10 \text{ nF}$$

4. Se determina  $R$  con (9-29) y el valor se redondea en correspondencia con la lista E24:

$$R = \frac{1}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 10^{-8}} = 795,75 \quad \Rightarrow \quad R = 820 \Omega$$

5. Calcular la frecuencia  $f_C$  que resulta con (9-28) empleando los valores adoptados en los pasos 3 y 4:

$$f_C = \frac{1}{2\pi \cdot 820 \cdot 1 \cdot 10^{-8}} = 19,409 \text{ kHz}$$

6. Determinar el error de la frecuencia de corte determinada en el paso 5 respecto de  $f_C$  especificada:

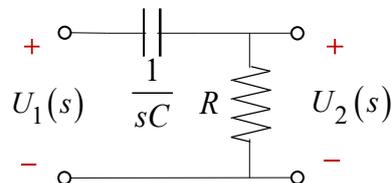
$$\text{error} = 100 \frac{19,409 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^4}{10^4} = -0,03\%$$

7. Si el error superara la tolerancia admitida, se adopta para  $C$  el siguiente valor de la serie E24 y se vuelve a repetir el procedimiento a partir del paso 3.

En este caso no es necesario efectuar otro ciclo de cálculo dado que el error que se produce en el valor de la frecuencia de corte es  $-0,03\%$ .

### 9.3.2. Filtro RCP pasa altos elemental

La función de transferencia (9-6) es la que corresponde al filtro pasa altos de orden 1, que es el menor orden posible, y puede implementarse mediante la celda RC que se muestra en la **Fig. 9.7**.

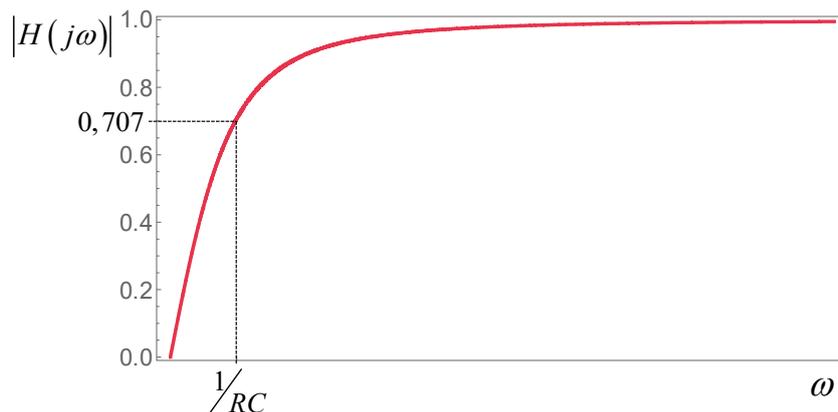


**Fig. 9.7.** Celda RC pasa altos elemental (de primer orden).

En efecto, para dicha celda resulta:

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}} \quad (9-30)$$

Cuya representación para  $s=j\omega$  se muestra en la **Fig. 9.8**, en la cual se indica la pulsación  $\omega_C=1/RC$  para la cual el módulo de  $H(j\omega)$  cae al 70,7% del valor que tiene en  $\omega=\infty$ ; y en la transferencia de potencia  $\omega_C$  corresponde al punto de *potencia mitad*, es decir, al punto en que la curva llega al 50% del valor que tiene en  $\omega=\infty$ .



**Fig. 9.8.** Función  $|H(j\omega)|$  de la celda RC pasa altos elemental.

La frecuencia de corte de la banda de paso resulta entonces:

$$f_C = \frac{1}{2\pi RC} \quad (9-31)$$

El procedimiento de diseño consiste en adoptar un valor de capacidad conveniente para el capacitor  $C$  y a partir de la frecuencia de corte especificada, se calcula el valor de  $R$  con la siguiente expresión:

$$R = \frac{1}{2\pi f_C C} \quad (9-32)$$

**Ejemplo 9.2.**

Diseñar un filtro pasa altos RC pasivo de primer orden con frecuencia de corte  $f_c=10$  kHz.

**Resolución**

Se procede al diseño del filtro y se enumeran los pasos requeridos a fin de tipificar el procedimiento.

1. Se adopta un valor de  $C$  adecuado, que se corresponda con la serie de valores E24 del Apéndice D.  $C$  será uno de los valores de la lista E24 multiplicado por una potencia de 10, que se denominará  $CMult$ . Para definir  $CMult$  se debe tener en cuenta que:

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi R f_c}$$

Es decir que la potencia de 10 que afecta a la capacidad  $C$  puede adoptarse como la suma de las potencias de 10 cambiadas de signo de  $2\pi$ ,  $R$  y  $f_c$ . En este caso, como la potencia de 10 de  $f_c$  es 4, si se desean valores de resistencias del orden de  $10^3$  (es decir  $x \cdot 10^3$ ) y asumiendo que la potencia de 10 de  $(2\pi \cdot 1 \cdot x)$  es 1, resulta:  $CMult = 10^{-(4+3+1)} = 10^{-8}$

2. Comenzar por el primer valor de la lista E24:
3. Calcular el valor de  $C$

$$C = CMult \cdot 1 = 10^{-8} \quad \Rightarrow \quad C = 10 \text{ nF}$$

4. Se determina  $R$  con (9-32) y el valor se redondea en correspondencia con la lista E24:

$$R = \frac{1}{2\pi \cdot 10^4 \cdot 10^{-8}} = 1591,5 \quad \Rightarrow \quad R = 1,6 \text{ k}\Omega$$

5. Calcular la frecuencia  $f_c$  que resulta con (9-31) empleando los valores adoptados en los pasos 3 y 4:

$$f_c = \frac{1}{2\pi \cdot 1,6 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-8}} = 9,947 \text{ kHz}$$

6. Determinar el error de la frecuencia de corte determinada en el paso 5 respecto de  $f_c$  especificada:

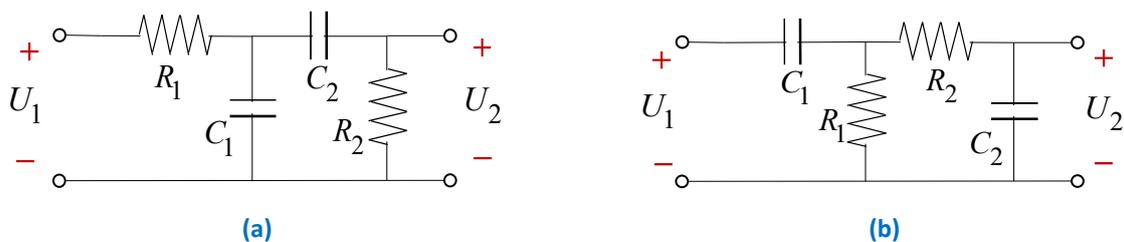
$$error = 100 \frac{9,947 \cdot 10^3 - 10^4}{10^4} = -0,53\%$$

7. Si el error superara la tolerancia admitida, se adopta para  $C$  el siguiente valor de la serie E24 y se vuelve a repetir el procedimiento a partir del paso 3.

En este caso no es necesario efectuar otro ciclo de cálculo dado que el error que se produce en el valor de la frecuencia de corte es -0,53%.

**9.3.3. Filtro RCP pasa banda elemental**

El filtro pasa banda elemental es de orden 2, y puede considerarse como una celda pasa bajos de primer orden en cascada con una celda pasa altos de primer orden, o viceversa, como se muestra respectivamente en **Fig. 9.9a** y **Fig. 9.9b**. Cabe destacar que este filtro si bien tiene la ventaja de no emplear inductores, tiene como desventaja el efecto de carga de una de las celdas sobre la otra, por lo cual el máximo  $Q$  que puede conseguirse es 0,5 es decir, es un filtro de banda ancha.



**Fig. 9.9.** Celda RC pasa banda elemental (de segundo orden): (a) topología I; (b) topología II.

La función de transferencia de esta celda pasa banda elemental resulta:

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{sC_a R_a}{s^2 C_1 R_1 C_2 R_2 + s(C_1 R_1 + C_2 R_1 + C_2 R_2) + 1} \tag{9-33}$$

Que tiene la forma de la expresión (9-11) obtenida a partir de la transformación pasa bajos-pasa banda. Cuando se considera el circuito de la **Fig. 9.9a** en la expresión (9-33) se debe hacer  $R_a=R_2$  y  $C_a=C_2$ ; y cuando se considera el circuito de la **Fig. 9.9b** en la expresión (9-33) se debe hacer  $R_a=R_1$  y  $C_a=C_1$ . Para ambas topologías de la **Fig. 9.9**, la frecuencia central de la banda de paso resulta:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_1R_2C_1C_2}} \quad (9-34)$$

En ambos casos, el diseño se basa en la definición de dos parámetros:

$$m = \sqrt{2Q} \quad A = \frac{1 + \sqrt{1 - m^3}}{2} \quad (9-35)$$

Las ecuaciones de diseño para el circuito de la **Fig. 9.9a** son:

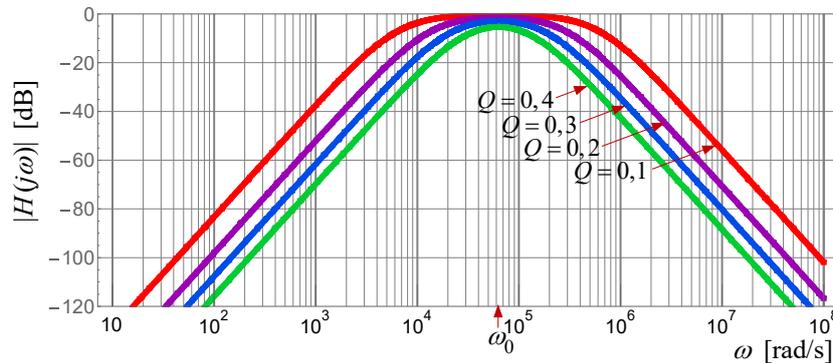
$$R_1 = \frac{A}{2\pi f_0 Q C_1} \quad R_2 = \frac{m}{1-m} R_1 \quad C_2 = \frac{Q}{2\pi f_0 A R_2} \quad (9-36)$$

Las ecuaciones de diseño para el circuito de la **Fig. 9.9b** son:

$$R_1 = \frac{Q}{2\pi f_0 A C_1} \quad C_2 = \frac{1-m}{m} C_1 \quad R_2 = \frac{A}{2\pi f_0 Q C_2} \quad (9-37)$$

El procedimiento de diseño consiste en adoptar un valor conveniente de capacidad para el capacitor  $C_1$  y un valor adecuado de  $Q$ , teniendo en cuenta que el valor máximo posible es 0,5 y que cuanto más próximo a ese valor se adopte, menor será la ganancia del filtro para la frecuencia  $f_0$ .

Para la configuración de la **Fig. 9.9a**, se emplean las expresiones (9-35) y (9-36), y para la configuración de la **Fig. 9.9b** se emplean las expresiones (9-35) y (9-37). De este modo, adoptando un valor de  $C_1$  de  $1 \mu\text{F}$ , se puede evaluar  $|H(j\omega)|$  para diferentes valores de  $Q$ . Procediendo de este modo, para cualquiera de las dos configuraciones, se obtienen las curvas de la **Fig. 9.10**.



**Fig. 9.10.** Función  $|H(j\omega)|$  de la celda RC pasa banda elemental.

### Ejemplo 9.3.

Diseñar un filtro pasa banda RC pasivo con banda de paso centrada en  $f_0=10$  kHz.

### Resolución

Se procederá a diseñar el filtro, con la topología de la **Fig. 9.9a**, y se enumeran los pasos requeridos a fin de tipificar el procedimiento.

1. Se ve de la **Fig. 9.10** que adoptando un valor de  $Q=0,3$  resulta una selectividad satisfactoria.
2. Se determinan los parámetros  $m$  y  $A$  con (9-35):

$$m = \sqrt{2 \cdot 0,3} = 0,7746 \quad A = \frac{1 + \sqrt{1 - 0,7746^3}}{2} = \frac{1 + 0,7316}{2} = 0,8658$$

3. Se adoptará un valor de  $C_1$  adecuado, que se corresponda con la serie de valores E24 del Apéndice D.  $C_1$  será uno de los valores de la lista E24 multiplicado por una potencia de 10, que se denominará  $CMult$ . Para definir  $CMult$  se debe tener en cuenta que:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi R f_0}$$

Donde  $R$  y  $C$  son elementos *equivalentes*. Entonces la potencia de 10 que afecta a la capacidad  $C$  puede adoptarse como la suma de las potencias de 10 cambiadas de signo de  $2\pi$ ,  $R$  y  $f_0$ . Por ejemplo, si  $f_0$  fuera  $10^4$  y asumiendo que la potencia de 10 de  $2\pi$  es 1, si se pretendiera que  $R$  sea del orden de  $10^3$ , se debería considerar:  $CMult = 10^{-(4+1+3)} = 10^{-8}$ .

Comenzar por el *primer* valor de la lista E24.

4. Calcular el valor de  $C_1$

$$C_1 = CMult \cdot 1 = 10^{-8} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 10 \text{ nF}$$

5. Se determinan  $R_1$ ,  $R_2$  y  $C_2$  con (9-36) y los valores se redondean en correspondencia con la lista E24:

$$R_1 = \frac{0,8658}{2\pi 10^4 \cdot 0,3 \cdot 10^{-8}} = 4593,2 \quad \Rightarrow \quad R_1 = 4,7 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = \frac{0,7746}{1 - 0,7746} 4700 = 1158,8 \quad \Rightarrow \quad R_2 = 1,2 \text{ k}\Omega$$

$$C_2 = \frac{0,3}{2\pi 10^4 \cdot 0,8658 \cdot 1,2 \cdot 10^3} = 4,6 \cdot 10^{-9} \quad \Rightarrow \quad C_2 = 4,7 \text{ nF}$$

6. Calcular la frecuencia  $f_0$  que resulta con (9-34) empleando los valores adoptados en los pasos 4 y 5:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{4,7 \cdot 10^3 \cdot 1,2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-8} \cdot 4,7 \cdot 10^{-9}}} = 9,775 \text{ kHz}$$

7. Determinar el error de la frecuencia central determinada en el paso 6 respecto de  $f_0$  especificada:

$$error = 100 \frac{9,775 \cdot 10^3 - 10^4}{10^4} = -2,25\%$$

8. Si el error fuera inaceptable, se adopta para  $C_1$  el siguiente valor de la serie E24 y se vuelve a repetir el procedimiento a partir del paso 4. Mediante un sencillo algoritmo se puede recorrer toda la lista de valores de la lista E24 hasta lograr el mínimo error en la frecuencia  $f_0$  obtenida.

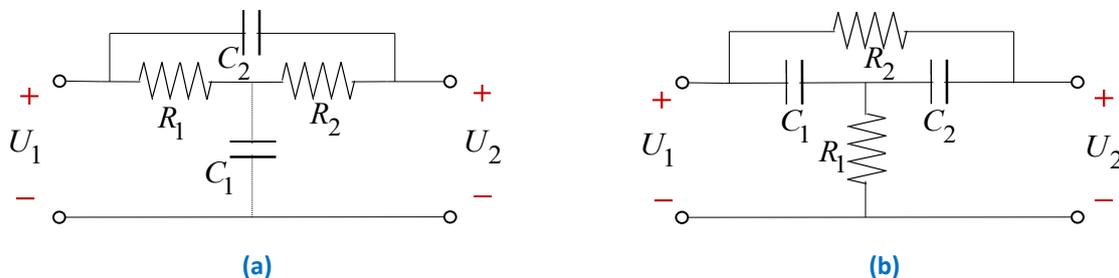
Procediendo de este modo se arribó a los siguientes valores con los cuales resulta el mínimo error en la frecuencia  $f_0$  obtenida:

$$C_1 = 30 \text{ nF} \quad R_1 = 1,5 \text{ k}\Omega \quad C_2 = 1,1 \text{ nF} \quad R_2 = 5,1 \text{ k}\Omega$$

Y con estos valores el error en la frecuencia  $f_0$  obtenida es 0,17%.

### 9.3.4. Filtro RCP supresor de banda elemental

El filtro supresor de banda elemental es de orden 2, y puede considerarse como una celda pasa bajos de primer orden en paralelo con una celda pasa altos de primer orden, o viceversa, como se muestra respectivamente en **Fig. 9.11a** y **Fig. 9.11b**.



**Fig. 9.11.** Celda RC supresor de banda elemental (de segundo orden): (a) topología I; (b) topología II.

Para obtener la expresión de la transferencia de tensión  $U_2/U_1$  se partirá de la expresión obtenida en el Ejemplo 1.7 (pág.43):

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Z_P Z_2 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_P Z_1 + Z_P Z_2 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3} \quad (9-38)$$

En la cual, para la celda de la **Fig. 9.11a** hay que hacer:

$$Z_P = \frac{1}{sC_2} \quad Z_1 = R_1 \quad Z_2 = \frac{1}{sC_1} \quad Z_3 = R_2$$

resultando

$$H(s) = \frac{s^2 C_1 R_1 C_2 R_2 + s C_2 (R_1 + R_2) + 1}{s^2 C_1 R_1 C_2 R_2 + s (C_1 R_1 + C_2 R_1 + C_2 R_2) + 1} \quad (9-39)$$

y para el circuito de la **Fig. 9.11b**, reemplazando en (9-38) con:

$$Z_P = R_2 \quad Z_1 = \frac{1}{sC_1} \quad Z_2 = R_1 \quad Z_3 = \frac{1}{sC_2}$$

$$H(s) = \frac{s^2 C_1 R_1 C_2 R_2 + s (C_1 + C_2) R_1 + 1}{s^2 C_1 R_1 C_2 R_2 + s (C_1 R_1 + C_2 R_1 + C_2 R_2) + 1} \quad (9-40)$$

Resultando tanto (9-39) como (9-40) de la forma de la expresión (9-26) obtenida a partir de la transformación pasa bajos-suprime banda.

Si ahora en el circuito de la **Fig. 9.11a**, es decir en la expresión en (9-39), se hace:

$$R_1 = R_2 = R \quad C_1 = \frac{C}{\alpha} \quad C_2 = \alpha C \quad \therefore \alpha = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \quad (9-41)$$

Y del mismo modo, para el circuito de la **Fig. 9.11b**, es decir en la expresión en (9-40), se hace:

$$R_1 = \frac{R}{\alpha} \quad R_2 = \alpha R \quad C_1 = C_2 = C \quad \therefore \alpha = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \quad (9-42)$$

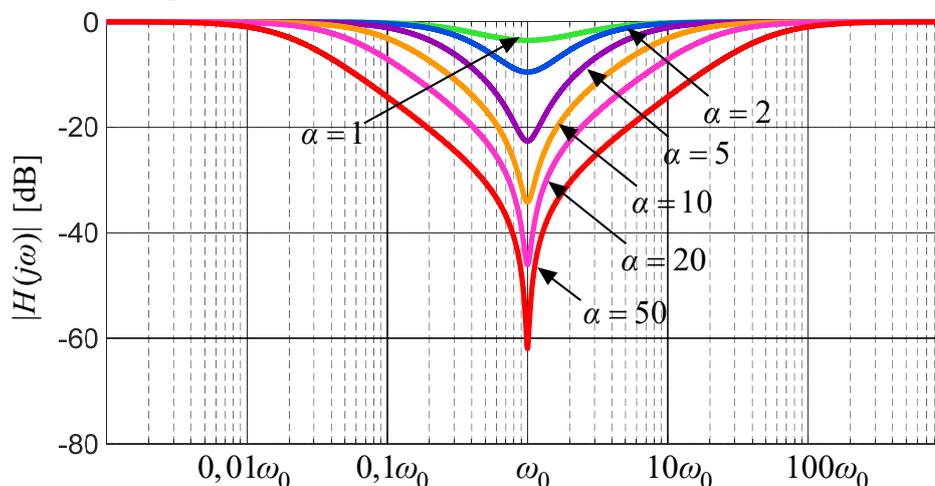
Con lo cual, para ambas topologías de la **Fig. 9.11**, la frecuencia central de la banda suprimida resulta:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C} \quad (9-43)$$

Ambas expresiones (9-39) y (9-40) resultan idénticas a:

$$H(s) = \frac{s^2 R^2 C^2 + s RC \left(\frac{2}{\alpha}\right) + 1}{s^2 R^2 C^2 + s RC \left(\frac{\alpha^2 + 2}{\alpha}\right) + 1} \quad (9-44)$$

En la **Fig. 9.12** muestra la gráfica de  $|H(j\omega)|$  en dB, con  $\omega$  en escala logarítmica, para distintos valores de  $\alpha$ . Se observa que la banda suprimida está centrada en  $\omega_0 = 1/RC$ .



**Fig. 9.12.** Función  $|H(j\omega)|$  de la celda RC supresor de banda elemental.

Se considera importante destacar que existe un compromiso entre el (deseable, desde el punto de vista del desempeño) mayor nivel de rechazo que se consigue con valores cada vez más elevados de  $\alpha$ , y la (indeseable, desde el punto de vista constructivo) mayor diferencia entre los valores de  $R_1$  y  $R_2$  (para el

circuito de la **Fig. 9.11a**) o entre los valores de  $C_1$  y  $C_2$  (para el circuito de la **Fig. 9.11b**). Por este motivo, por lo general, los valores de  $\alpha$  que se adoptan son inferiores a 50.

**Ejemplo 9.4.**

Diseñar un filtro supresor de banda RC en configuración T puenteada con banda de supresión centrada en  $f_0=300$  Hz.

**Resolución**

Se procederá a diseñar el filtro, con la topología de la **Fig. 9.11b**, y se enumeran los pasos requeridos a fin de tipificar el procedimiento.

1. Adoptar un valor de  $\alpha$ . Observando la **Fig. 9.12** se considera que, por un lado, el nivel de rechazo que se logra con  $\alpha=10$  (33 dB) resulta satisfactorio; y por otro lado, una separación entre los valores de  $R_1$  y  $R_2$  tal que  $R_2/R_1=100$  es aceptable.
2. Adoptar un valor de  $C$ . Teniendo en cuenta que para la topología de la **Fig. 9.11b**  $C_1=C_2=C$ , el valor a adoptar corresponderá a la lista E24 del Apéndice D. Para que resulten valores prácticos de resistencia y de capacidad, y teniendo en cuenta (9-43), se adopta  $C=100$  nF (compatible con el primer valor de la lista E24)

3. Determinar el valor de  $R$  a partir de la expresión (9-43):

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \Rightarrow R = \frac{1}{2\pi \cdot f_0 \cdot C} = \frac{1}{2\pi \cdot 300 \cdot 100 \cdot 10^{-9}} = 5305 \Omega$$

4. Calcular los valores de  $R_1, R_2, C_1$  y  $C_2$  mediante (9-42):

$$C_1 = C_2 = 100 \text{ nF} \quad R_1 = 5305/10 = 530,5 \Omega \quad R_2 = 10 \cdot 5305 = 53,05 \text{ k}\Omega$$

5. Adoptar los valores de los componentes en correspondencia con la lista de valores E24 del Apéndice D:

$$C_1 = C_2 = 100 \text{ nF} \quad R_1 = 510 \Omega \quad R_2 = 51 \text{ k}\Omega$$

6. Calcular la frecuencia central que resulta con (9-43) empleando los valores adoptados en el paso 5:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} = \frac{1}{2\pi \sqrt{510 \cdot 51 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-9} \cdot 100 \cdot 10^{-9}}} = 312,1 \text{ Hz}$$

7. Determinar el error con respecto a la frecuencia  $f_0$  especificada, de la frecuencia central determinada en el paso 6:

$$error = 100 \frac{312,1 - 300}{300} = +4,02\%$$

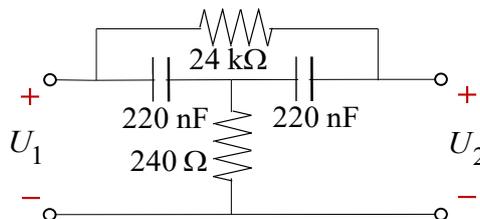
8. Si el error supera la tolerancia admitida, se adopta para  $C$  el siguiente valor de la serie E24 y se vuelve a repetir el procedimiento a partir del paso 2. Mediante un sencillo algoritmo se puede recorrer toda la lista de valores de la lista E24 hasta lograr que el error en la frecuencia  $f_0$  obtenida resulte mínimo.

Procediendo de este modo se arribó a los siguientes valores con los cuales resulta el mínimo error en la frecuencia  $f_0$  obtenida:

$$C_1 = 220 \text{ nF} \quad R_1 = 240 \Omega \quad C_2 = 220 \text{ nF} \quad R_2 = 24 \text{ k}\Omega$$

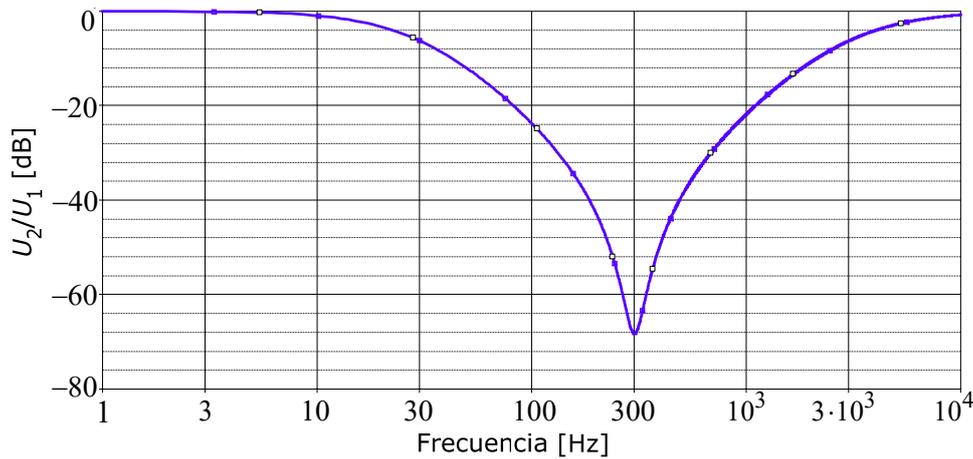
Y con estos valores el error en la frecuencia  $f_0$  obtenida es 0,47%.

El circuito resultante con los valores finales adoptados se muestra en la **Fig. 9.13**.



**Fig. 9.13.** Circuito resultante.

La simulación del circuito obtenido permite graficar el módulo de la relación  $U_2/U_1$  en función de la frecuencia tal como se muestra en la **Fig. 9.14**.

Fig. 9.14. Característica  $|H(j\omega)|$  sintetizada.

### 9.3.5. Filtro RCP de muesca doble T en paralelo

Es la configuración de filtro de muesca RCP más difundida, que también se conoce por su denominación en inglés filtro *notch twin-T*, y su topología es la que se muestra en la Fig. 9.15.

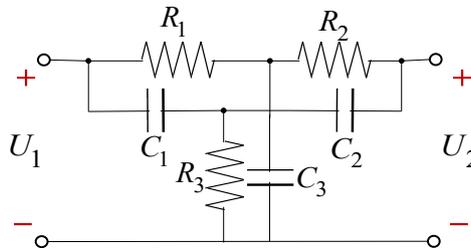


Fig. 9.15. Filtro de muesca doble T en paralelo.

La celda T superior formada por  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  constituye la sección de filtro pasa bajos; mientras que la celda T inferior formada por los elementos  $C_1$ ,  $C_2$  y  $R_3$  constituye la sección de filtro pasa altos del diseño.

La función  $H(s)=U_2(s)/U_1(s)|_{I_2(s)=0}$  ya fue obtenida en el Ejemplo 1.8. (página 43) resultando:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC_3} \cdot \left( \frac{1}{s^2 C_1 C_2} + \frac{1}{sC_1} R_3 + \frac{1}{sC_2} R_3 \right) + R_3 \cdot \left( R_1 R_2 + R_1 \frac{1}{sC_3} + R_2 \frac{1}{sC_3} \right)}{\left( R_1 + \frac{1}{sC_3} \right) \cdot \left( \frac{1}{s^2 C_1 C_2} + \frac{1}{sC_1} R_3 + \frac{1}{sC_2} R_3 \right) + \left( \frac{1}{sC_1} + R_3 \right) \cdot \left( R_1 R_2 + R_1 \frac{1}{sC_3} + R_2 \frac{1}{sC_3} \right)}$$

Evidentemente, existen demasiadas variables de ajuste para una única ecuación. Por ello es necesario simplificar las expresiones aplicando algún criterio práctico, de manera de reducir la cantidad de incógnitas.

Un primer criterio consiste en hacer que el cuadripolo resulte *simétrico*, haciendo:

$$R_1 = R_2 = R \quad \text{y} \quad C_1 = C_2 = C \tag{9-45}$$

Lo que permite obtener:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC_3} \cdot \left( \frac{1}{s^2 C^2} + \frac{2R_3}{sC} \right) + R_3 \cdot \left( R^2 + \frac{2R}{sC_3} \right)}{\left( R + \frac{1}{sC_3} \right) \cdot \left( \frac{1}{s^2 C^2} + \frac{2R_3}{sC} \right) + \left( \frac{1}{sC} + R_3 \right) \cdot \left( R^2 + \frac{2R}{sC_3} \right)}$$

Realizando los productos, reagrupando y normalizando numerador y denominador se llega a:

$$H(s) = \frac{s^3 + s^2 \left( \frac{2C^2 R R_3}{C^2 C_3 R^2 R_3} \right) + s \left( \frac{2C R_3}{C^2 C_3 R^2 R_3} \right) + \frac{1}{C^2 C_3 R^2 R_3}}{s^3 + s^2 \left( \frac{2C^2 R R_3 + 2C C_3 R R_3 + C C_3 R^2}{C^2 C_3 R^2 R_3} \right) + s \left( \frac{2C R_3 + 2C R + C_3 R}{C^2 C_3 R^2 R_3} \right) + \frac{1}{C^2 C_3 R^2 R_3}}$$

$$H(s) = \frac{s^3 + s^2 \left( \frac{2}{C_3 R} \right) + s \left( \frac{2}{CC_3 R^2} \right) + \frac{1}{C^2 C_3 R^2 R_3}}{s^3 + s^2 \left( \frac{2}{C_3 R} + \frac{2}{CR} + \frac{1}{CR_3} \right) + s \left( \frac{2}{CC_3 R^2} + \frac{2}{CC_3 RR_3} + \frac{1}{C^2 RR_3} \right) + \frac{1}{C^2 C_3 R^2 R_3}} \quad (9-46)$$

Pero aún existen más incógnitas (o variables de ajuste) que ecuaciones. Por ello es necesario efectuar una nueva parametrización de las expresiones, de manera que resulten dos parámetros de ajuste cuyos valores se puedan adoptar por algún criterio práctico. Esta simplificación consiste en hacer esta vez:

$$R_3 = n \cdot R \quad \text{y} \quad C_3 = m \cdot C \quad (9-47)$$

Y reemplazando en (9-46):

$$H(s) = \frac{s^3 + s^2 \left( \frac{2}{mCR} \right) + s \left( \frac{2}{mC^2 R^2} \right) + \frac{1}{mnC^3 R^3}}{s^3 + s^2 \left( \frac{2}{mCR} + \frac{2}{CR} + \frac{1}{nCR} \right) + s \left( \frac{2}{mC^2 R^2} + \frac{2}{mnC^2 R^2} + \frac{1}{nC^2 R^2} \right) + \frac{1}{mnC^3 R^3}} \quad (9-48)$$

La similitud entre el numerador  $N(s)$  y el denominador  $D(s)$  indica la probabilidad de que ambos compartan un factor común correspondiente a una raíz real simple de la forma  $(s+\alpha)$ . Para determinar el valor  $\alpha$  se aplica el teorema del resto, que establece que un polinomio  $P(s)$  es divisible por  $(s+\alpha)$  si  $P(-\alpha)=0$ . El valor  $\alpha$  correcto será uno de los divisores del término independiente, es decir alguno de los valores:

$$\alpha_i = \pm 1, \quad \pm \frac{1}{(mn)^{1/3} CR}, \quad \pm \frac{1}{mnC^3 R^3}$$

Evaluando el denominador  $D(s)$ :

$$D(s) = s^3 + s^2 \left( \frac{2}{mCR} + \frac{2}{CR} + \frac{1}{nCR} \right) + s \left( \frac{2}{mC^2 R^2} + \frac{2}{mnC^2 R^2} + \frac{1}{nC^2 R^2} \right) + \frac{1}{mnC^3 R^3}$$

y teniendo en cuenta las potencias de  $s$  y los signos en juego, claramente el valor buscado de  $\alpha$  resulta:

$$\alpha = \frac{1}{(mn)^{1/3} CR}$$

Con lo cual, para que  $D(s)$  sea divisible por este valor de  $\alpha$  se debe cumplir que  $D(-\alpha)=0$ , es decir:

$$-\frac{1}{mnC^3 R^3} + \frac{1}{(mn)^{5/3} C^3 R^3} (2n + 2mn + m) - \frac{1}{(mn)^{2/3} C^3 R^3} (2n + 2 + m) + \frac{1}{mnC^3 R^3} = 0$$

Por consiguiente:

$$\frac{2n + 2mn + m}{(mn)^{5/3}} = \frac{2n + 2 + m}{(mn)^{2/3}} \Rightarrow 2n + 2mn + m = mn(2n + 2 + m) \quad \therefore mn = 1 \quad (9-49)$$

Es decir:

$$n = 1/m \quad (9-50)$$

Y reemplazando con (9-50) en (9-48):

$$H(s) = \frac{s^3 + s^2 \left( \frac{2}{mCR} \right) + s \left( \frac{2}{mC^2 R^2} \right) + \frac{1}{C^3 R^3}}{s^3 + s^2 \left( \frac{2}{m} + 2 + m \right) \frac{1}{CR} + s \left( \frac{2}{m} + 2 + m \right) \frac{1}{C^2 R^2} + \frac{1}{C^3 R^3}}$$

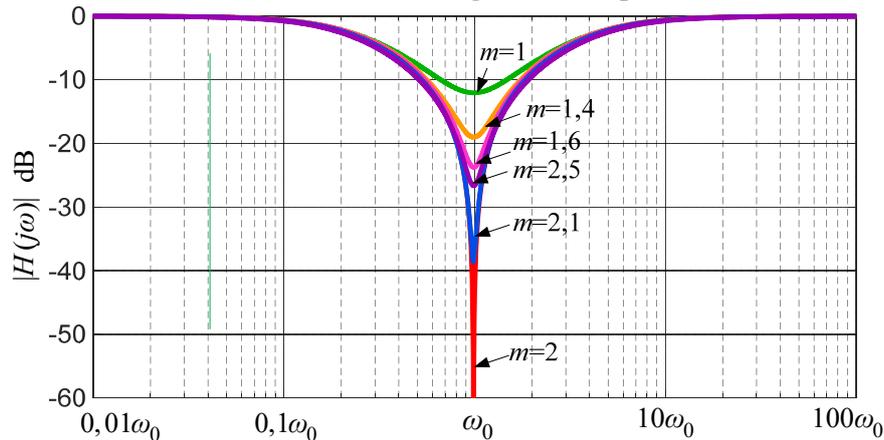
Puede comprobarse, aplicando el teorema del resto, que tanto el numerador  $N(s)$  como el denominador  $D(s)$  tienen un factor común  $(s+1/CR)$ , pudiéndose factorizar a ambos:

$$H(s) = \frac{\left( s + \frac{1}{CR} \right) \left[ s^2 + s \left( \frac{2}{m} - 1 \right) \frac{1}{CR} + \frac{1}{C^2 R^2} \right]}{\left( s + \frac{1}{CR} \right) \left[ s^2 + s \left( \frac{2}{m} + 1 + m \right) \frac{1}{CR} + \frac{1}{C^2 R^2} \right]}$$

$$H(s) = \frac{s^2 + s\left(\frac{2}{m}-1\right)\frac{1}{CR} + \frac{1}{C^2R^2}}{s^2 + s\left(\frac{2}{m}+1+m\right)\frac{1}{CR} + \frac{1}{C^2R^2}} \quad (9-51)$$

En esta expresión se observa que los valores de  $m$  determinan la ubicación en el plano  $s$  del par de ceros complejos conjugados. En efecto,  $m=2$  es un valor singular para el cual el par de ceros de  $H(s)$  se encuentran sobre el eje  $j\omega$ ; para valores de  $m<2$  los ceros son complejos conjugados y están ubicados en el semiplano izquierdo; mientras que para valores de  $m>2$  los ceros son complejos conjugados y están ubicados en el semiplano derecho.

Por otra parte, el efecto sobre  $|H(j\omega)|$  de los valores de  $m$  alrededor de 2 puede apreciarse en la **Fig. 9.16**, destacándose que el mayor rechazo a la frecuencia  $f_0$  se consigue con  $m=2$ . Por ello  $m=2$  es el valor que se adopta siempre para el diseño del filtro de muesca de T gemelas en paralelo.



**Fig. 9.16.** Función  $|H(j\omega)|$  del filtro de muesca doble T en paralelo.

Adoptando entonces el valor  $m=2$ , la expresión (9-51) resulta:

$$H(s) = \frac{s^2 + \frac{1}{C^2R^2}}{s^2 + \frac{4}{CR}s + \frac{1}{C^2R^2}} \quad (9-52)$$

Pudiendo reconocerse la forma de la expresión (9-26), según la cual:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{CR} \quad (9-53)$$

$$\frac{\omega_0}{Q_p} = \frac{4}{CR} \Rightarrow Q_p = \frac{CR}{4} \omega_0 = 0,25 \quad (9-54)$$

Es decir que el factor  $Q_p$  del filtro es 0,25 y no es ajustable; para obtener un factor  $Q_p$  mayor, es necesario diseñar un filtro activo.

### Procedimiento de diseño

1. Adoptar una lista de valores normalizados, por ejemplo, E12, E24 ó E48.
2. Seleccionar un valor de capacidad  $C$  compatible con la lista adoptada en el paso 1.  
 $C$  será uno de los valores de la lista de valores normalizados multiplicado por una potencia de 10, que se denominará  $CMult$ . Para definir  $CMult$  se debe tener en cuenta (9-53) y por lo tanto:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi R f_0}$$

Donde  $R$  y  $C$  son elementos *equivalentes*. Entonces la potencia de 10 que afecta a la capacidad  $C$  puede adoptarse como *la suma* de las potencias de 10 *cambiadas de signo* de  $R$ , de  $f_0$  y del producto de  $2\pi$  por las mantisas de  $R$  y  $f_0$ . Por ejemplo, si  $f_0$  fuera  $2,5 \cdot 10^4$  y se pretendieran valores de  $R$  en  $k\Omega$ , es decir,  $x \cdot 10^3$ , y asumiendo que la potencia de 10 de  $(2\pi \cdot 2,5 \cdot x)$  es 1, resultaría:  $CMult = 10^{-(4+3+1)} = 10^{-8}$ .

3. Determinar  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ , considerando (9-45) y (9-47), con el valor de  $C$  seleccionado en el paso 2:

$$C_1 = C_2 = C \quad \text{y} \quad C_3 = 2C$$

Y elegir para  $C_3$  un valor compatible con la lista de valores normalizados adoptada en el paso 1.

4. Calcular el valor de  $R$  a partir de la expresión (9-53) y empleando el valor  $C$  adoptado en el paso 2:

$$R = \frac{1}{2\pi f_0 C}$$

5. Determinar  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ , considerando (9-45) y (9-47), con el valor de  $R$  calculado en el paso 4:

$$R_1 = R_2 = R \quad \text{y} \quad R_3 = R/2$$

Y elegir valores compatibles con la lista de valores normalizados adoptada.

6. Determinar el valor de la frecuencia  $f_0$  sintetizado que se consigue con los valores adoptados. Para ello se debe tener en cuenta que el término independiente tanto del numerador como del denominador de la expresión (9-46) es  $\omega_0^3$ . Por lo tanto:

$$f_{0s} = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt[3]{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2 C_3}}$$

7. Determinar el error cometido mediante:

$$\text{error} = 100(f_{0s} - f_0)/f_0$$

8. Si el error fuera inaceptable, se adopta para  $C_1$  el siguiente valor de la serie adoptada en el paso 1 y se repite el procedimiento a partir del paso 3. Mediante un sencillo algoritmo se puede recorrer toda la lista de valores adoptada en el paso 1 hasta lograr que el error en la frecuencia  $f_0$  obtenida resulte mínimo.

### Ejemplo 9.5.

Diseñar un filtro de muesca *RCP* en configuración doble T paralelo para suprimir la frecuencia  $f_0=350$  Hz.

### Resolución

- Se adopta la lista de valores normalizados E24.
- Se determina la potencia de 10 *CMult* a aplicar a los valores de la lista E24 a fin de obtener valores de capacidad adecuados. En este caso, como la potencia de 10 de  $f_0$  es 2, si se desean valores de resistencias del orden de  $10^3$  (es decir  $x \cdot 10^3$ ) y asumiendo que la potencia de 10 de  $(2\pi \cdot 3,5 \cdot x)$  es 1, resulta:

$$CMult = 10^{-(2+3+1)} = 10^{-6}$$

Entonces se adopta un valor de capacidad  $C=1\mu\text{F}$  (compatible con el 1er valor de la lista E24)

- Determinar mediante el valor de  $C$  obtenido con el valor de la lista E24 considerado:

$$C_1 = C_2 = 1\mu\text{F} \quad \text{y} \quad C_3 = 2C = 2\mu\text{F}$$

Y también  $C_3$  resulta un valor compatible con la lista de valores normalizados E24.

- Calcular el valor de  $R$  a partir de la expresión (9-53) y empleando el valor  $C$  adoptado en el paso 2:

$$R = \frac{1}{2\pi f_0 C} = \frac{1}{2\pi \cdot 350 \cdot 10^{-6}} = 454,7 \Omega$$

- Determinar  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  con el valor de  $R$  calculado, eligiendo valores compatibles con la lista de valores normalizados E24:

$$R_1 = R_2 = R = 454,7 \Omega \quad R_3 = \frac{R}{2} = \frac{454,7}{2} = 227,4 \Omega$$

Por lo tanto se adoptan los valores:

$$R_1 = R_2 = 470 \Omega \quad R_3 = 220 \Omega$$

- Determinar el valor de la frecuencia  $f_0$  sintetizado que se consigue con los valores adoptados:

$$f_{0s} = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt[3]{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2 C_3}} = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt[3]{470 \cdot 470 \cdot 220 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}} = 346,2$$

7. Determinar el error cometido mediante:

$$error = 100 \left( \frac{f_{0s} - f_0}{f_0} \right) = 100 \left( \frac{346,2 - 350}{350} \right) = -1,1\%$$

Recorriendo todos los valores de la lista E24 mediante un sencillo algoritmo se puede recalcular a partir del paso 3 hasta lograr que el error en la frecuencia  $f_0$  obtenida resulte mínimo.

De este modo resultan los siguientes valores optimizados:

$$C_1 = C_2 = 3 \mu\text{F} \quad \text{y} \quad C_3 = 6,2 \mu\text{F}$$

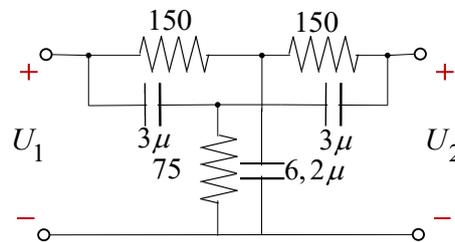
$$R_1 = R_2 = 150 \Omega$$

$$R_3 = 75 \Omega$$

$$f_{0s} = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt[3]{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2 C_3}} = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt[3]{150 \cdot 150 \cdot 75 \cdot 3 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{-6} \cdot 6,2 \cdot 10^{-6}}} = 349,8$$

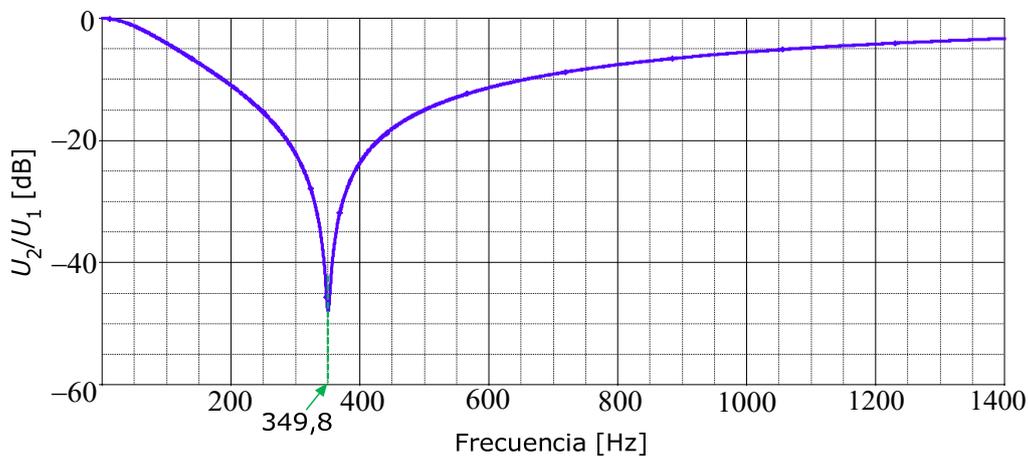
$$error = 100 \left( \frac{f_{0s} - f_0}{f_0} \right) = 100 \left( \frac{349,8 - 350}{350} \right) = -0,05\%$$

El circuito resultante con los valores finales adoptados se muestra en la **Fig. 9.17**.



**Fig. 9.17.** Circuito resultante.

La simulación del circuito obtenido permite graficar el módulo de la relación  $U_2/U_1$  en función de la frecuencia tal como se muestra en la **Fig. 9.18**.



**Fig. 9.18.** Característica  $|H(j\omega)|$  sintetizada.

#### 9.4. Filtros pasivos LC

Los filtros *LC* aún juegan un papel importante en sistemas de comunicaciones, especialmente en aplicaciones en alta frecuencia, donde la operación de los dispositivos activos se aleja mucho de su comportamiento ideal.

Constituyen un capítulo muy importante en el diseño de filtros porque ofrecen varias ventajas: (a) transmiten las señales sin disipar energía y favorecen buenas relaciones señal/ruido; (b) se logran rápidas transiciones en la curva de magnitud, lo cual es muy adecuado para la acción de filtrado que se pretende; (c) pueden transmitir señales afectando únicamente la fase; (d) los cuadripolos *LC* doblemente cargados pueden hacerse bastante insensibles a variaciones de los componentes.

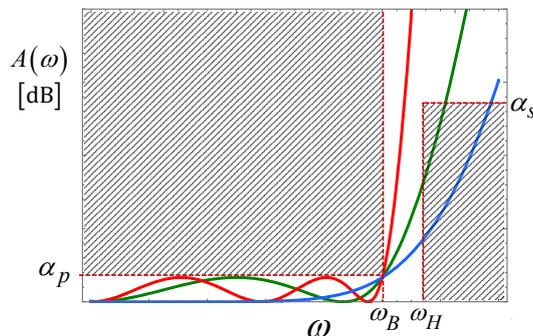
El procedimiento de diseño a emplear consiste en una generalización del método de pérdidas de inserción que se desarrolló en el apartado 6.3, mediante el cual se sintetizará un cuadripolo  $LC$  cargado con un generador de resistencia interna  $R_g$  y terminado en una resistencia de carga  $R_C$ . Esta síntesis realizará una función de transferencia aproximada a las especificaciones de ancho de banda y atenuación, mediante la función de aproximación que se desee adoptar: Butterworth, Chebyshev, etc.

#### 9.4.1. Especificación del diseño

Las especificaciones o requerimientos del filtro, normalmente se dan en términos de atenuación *máxima* admitida en la *banda de paso* y de atenuación *mínima* admitida en la *banda de supresión*. Dichas especificaciones, transformadas al dominio del pasa bajos, determinan el patrón de requerimientos del prototipo pasa bajos que se muestra en la **Fig. 9.19**, caracterizado por los pares de valores  $\omega_p, \alpha_p$  (que delimita la banda de paso) y  $\omega_s, \alpha_s$  (que define la banda de supresión).

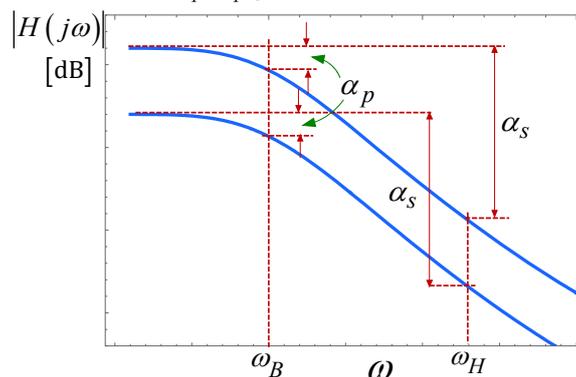
La curva de atenuación  $A(\omega)$  del prototipo pasa bajos que satisface las especificaciones no debe pasar por las zonas sombreadas de la figura. Así, las tres curvas de atenuación representadas cumplen los requisitos en la banda de paso; pero sólo una de ellas cumple, además, con los requisitos de la banda de supresión.

Un aspecto a tener en cuenta siempre, es que cuando la especificación se hace mediante pares de valores  $\omega$ -atenuación,  $\alpha_p$  y  $\alpha_s$  no son valores *absolutos*, sino *relativos* al valor de atenuación en la banda de paso.



**Fig. 9.19.** Patrón de especificaciones para la curva de atenuación de un filtro pasa bajos.

Esto es muy importante cuando se aplica este patrón de requerimientos sobre la curva de  $|H(j\omega)|$  en dB, porque puede ocurrir que  $|H(j\omega)|$  tenga ganancia distinta de 1 (0 dB) en la banda de paso. Pero en tal caso, se debe razonar que el efecto de la ganancia es subir o bajar la curva, sin afectar los niveles relativos en dB referidos al nivel en el centro de la banda de paso. Esto se ilustra en la **Fig. 9.20** en la cual, las dos curvas de transferencia ejemplificadas tienen diferente ganancia en la banda de paso, pero cumplen igualmente con las especificaciones de los pares de valores  $\omega_p$ - $\alpha_p$  y  $\omega_s$ - $\alpha_s$ .



**Fig. 9.20.** Efecto de un cambio de ganancia independiente de la frecuencia para  $|H(j\omega)|$  de un filtro pasa bajos.

Es decir, cuando se especifica un filtro mediante los pares de valores  $\omega_p$ - $\alpha_p$  y  $\omega_s$ - $\alpha_s$  la ganancia en la banda de paso de  $|H(j\omega)|$  queda librada a la conveniencia del diseñador. Esto es de aplicación completamente general, y será de gran utilidad en el diseño de filtros activos.

#### 9.4.2. Generalización del método de pérdidas de inserción

El método de síntesis que se desarrolló en el apartado 6.3.2 está basado en la especificación de la pérdida de inserción  $P_i(\omega)$  a partir de la cual se obtiene la ganancia de inserción  $\Phi(s)$ .

En el diseño de filtros también puede resultar de interés emplear otras relaciones para especificar las características deseadas del cuadripolo:

$$\left| \frac{U_2(\omega)}{U_{20}(\omega)} \right|^2 \qquad \left| \frac{U_2(\omega)}{U_g(\omega)} \right|^2$$

que también pueden relacionarse con  $Pi(\omega)$ , y por lo tanto será posible emplear el mismo procedimiento de síntesis.

En el apartado 0 se encontró la equivalencia entre las siguientes expresiones:

$$|\rho_1(s)|^2 = 1 - t \left| \frac{P_2}{P_{20}} \right|^2 \qquad (9-55)$$

$$|\rho_1(s)|^2 = 1 - t \left| \frac{U_2}{U_{20}} \right|^2 \qquad (9-56)$$

$$|\rho_1(s)|^2 = 1 - t \cdot k \left| \frac{U_2}{U_g} \right|^2 \qquad (9-57)$$

Siendo:

$$t = \frac{4R_1R_2}{(R_1 + R_2)^2} \qquad \text{y} \qquad k = \left( \frac{R_1 + R_2}{R_2} \right)^2 \qquad (9-58)$$

Se destaca la semejanza de las expresiones (9-56) y (9-57).

Pero es importante observar que,  $t$  se encuentra acotado al intervalo  $0 < t \leq 1$  (el valor límite 0 corresponde al caso de un generador de tensión ideal con  $R_1=0$ , y el valor 1 corresponde a la situación  $R_1=R_2$ ) y  $k$  puede adoptar cualquier valor real positivo. Por lo tanto cuando  $k > 1/t$  no se cumpliría para todo  $\omega$ :

$$0 \leq |\rho_1(s)|^2 \leq 1 \qquad (9-59)$$

Pero si se adopta un valor  $k=1$ , lo cual es equivalente a *escalar* o *normalizar*  $|U_2(s)/U_g|$ , la condición de contorno de  $\rho_1(s)$  se cumplirá para todo  $\omega$ , y además la característica en frecuencia de la transferencia especificada no resulta alterada.

También se podría querer usar la relación  $|U_2(s)/U_1(s)|$  para especificar la característica deseada, pero esta forma de especificar el problema deriva en una complicación adicional en el proceso de síntesis que no permite ser tratada por el procedimiento que se desarrollará, debido a que  $U_1(s)$  depende no sólo de  $U_g(s)$  sino también de  $R(s)$  que es la parte real de la impedancia de entrada del cuadripolo cargado con  $R_2$ .

Este caso se encuentra más allá de los objetivos de este curso y puede encontrarse tratado en <sup>[1]</sup>.

Es decir que para determinar  $\rho_1(s)$  se deberá emplear (9-55), (9-56) ó (9-57), según el caso.

En primer lugar,  $|\rho_1(s)|^2$  no sólo debe cumplir con la condición (9-59) sino que además debe satisfacer las condiciones de contorno correspondientes a un filtro pasa bajos, es decir:

- en la banda de atenuación ( $s \rightarrow \infty$ ) no se transmite energía a la carga, toda la energía se refleja hacia el generador:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} |\rho_1(s)|^2 = 1$$

Esta condición es satisfecha siempre por todas las expresiones (9-55), (9-56) y (9-57) independientemente de los valores de  $t$  y de  $k$ , dado que, tratándose de un filtro pasa bajos, tanto  $|P_2/P_{20}|$ ,  $|U_2/U_{20}|^2$  como  $|U_2/U_g|^2$  tienden a 0 cuando  $s \rightarrow \infty$ .

- en la banda de paso ( $s \rightarrow 0$ )  $P_2=P_{20}$  y por lo tanto según (9-55):

$$\lim_{s \rightarrow 0} |\rho_1(s)|^2 = 1 - t$$

<sup>[1]</sup> Hernan J. Blinichoff and Anatol I. Zverev. *Filtering in the time and frequency domains*. John Wiley & Sons, Inc. NY 1976. Cap. 3. Ap. 3.4.2.

Sólo en el caso de  $t=1$ , es decir, para  $R_1=R_2$ ,  $P_{20}$  (energía transferida a la carga sin el cuadripolo insertado) será máxima y no habrá energía reflejada.

Pero la condición (9-59) no puede ser cumplida por la expresión (9-56) para cualquier valor de  $k$ , sino solamente para el valor  $k=1$ . Por lo tanto, cuando se desea emplear la aproximación a  $|U_2/U_g|^2$  debe efectuarse una normalización

$$|\rho_1(s)|^2 = 1 - t \cdot \frac{k}{k} \left| \frac{U_2}{U_g}(\omega) \right|_{s=\frac{\omega}{j}}^2$$

Dado que los requerimientos se especifican para la relación  $|U_2/U_g|^2$  en términos de atenuación máxima en la banda de paso y de atenuación mínima en la banda de atenuación, estando estos valores expresados *en forma relativa* al valor correspondiente a  $\omega=0$  (centro de la banda de paso del filtro pasa bajos), considerar:

$$|\rho_1(s)|^2 = 1 - t \cdot \left| \frac{U_2}{U_g}(\omega) \right|_{s=\frac{\omega}{j}}^2$$

en lugar de:

$$|\rho_1(s)|^2 = 1 - t \cdot k \left| \frac{U_2}{U_g}(\omega) \right|_{s=\frac{\omega}{j}}^2$$

no va en contra de los requerimientos especificados, y puede interpretarse como una normalización de la relación  $|U_2/U_g|^2$ .

Entonces ya sea que la aproximación de Butterworth o de Chebyshev se aplican a  $|U_2/U_{20}|$  como  $|U_2/U_g|$  en cualquier caso será ésta la función  $|H(j\omega)|$  a considerar, y por lo tanto, las expresiones para el diseño serán:

$$|\rho_1(s)|^2 = 1 - t \cdot |H(j\omega)|_{\omega=\frac{s}{j}}^2$$

$$t = \frac{4R_1R_2}{(R_1 + R_2)^2}$$

### 9.4.3. Procedimiento de diseño

Entonces, el procedimiento de diseño de cualquier filtro pasivo  $LC$  aplicando las aproximaciones a la característica de amplitud de  $|H(j\omega)|$  puede efectuarse mediante la siguiente secuencia de pasos:

1. Transformar las especificaciones al dominio del pasa bajos (aplicando la transformación PasaX - Pasa Bajos sin normalizar ni desnormalizar, a cada frecuencia para la que se indica un requisito de atenuación).
2. Calcular los parámetros de diseño  $\varepsilon$  y  $n$  del filtro pasa bajos *equivalente*.

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1\alpha_p} - 1}$$

Aproximación de Butterworth:

$$n \geq \frac{\log \left[ \frac{10^{0,1\alpha_s} - 1}{10^{0,1\alpha_p} - 1} \right]}{2 \log \left( \frac{\omega_s}{\omega_p} \right)}$$

Aproximación de Chebyshev:

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{0,1\alpha_s} - 1}{10^{0,1\alpha_p} - 1}}}{\cosh^{-1} \left( \frac{\omega_s}{\omega_p} \right)} \quad \text{o} \quad n \geq \frac{\log \left[ 2 \sqrt{\frac{10^{0,1\alpha_s} - 1}{10^{0,1\alpha_p} - 1}} \right]}{\log \left( \frac{2\omega_s}{\omega_p} \right)}$$

3. Obtener  $\rho_1(s)$  para un filtro pasa bajos *normalizado* con los parámetros  $\varepsilon$  y  $n$ . Se conforma la expresión de  $|\rho_1(s)|^2$  aplicando la aproximación de  $|H(j\omega)|$  que corresponda, y se obtienen las dos expresiones del coeficiente de reflexión  $\rho_1(s)$ .

a. Aproximación de Butterworth

Para el diseño del filtro pasa bajos normalizado respecto de la pulsación de corte en  $X$  dB ( $\omega_B$ ), se emplea:

$$|\rho_1(s)|^2 = 1 - t \cdot |H(j\omega)|_{\omega=s/j}^2 = 1 - t \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \omega^{2n}} \Big|_{\omega=s/j}$$

O el filtro pasa bajos normalizado respecto de la pulsación de corte de 3 dB ( $\omega_C$ ), empleando:

$$|\rho_1(s)|^2 = 1 - t \cdot |H(j\omega)|_{\omega=s/j}^2 = 1 - t \cdot \frac{1}{1 + \omega^{2n}} \Big|_{\omega=s/j}$$

Se obtienen dos soluciones  $\rho_{1a}(s)$  y  $\rho_{1b}(s)$ .  $\rho_{1a}(s)$  se obtiene con las raíces del denominador y del numerador ubicadas en el SPI y  $\rho_{1b}(s)$  con las raíces del denominador en el SPI y las del numerador en el SPD.

Es decir:

$$\rho_{1a}(s) = \frac{\prod_i (s + s_{Z_{SPI i}})}{\prod_i (s + s_{P_{SPI i}})} \quad \rho_{1b}(s) = \frac{\prod_i (s + s_{Z_{SPD i}})}{\prod_i (s + s_{P_{SPI i}})} \quad (9-60)$$

b. Aproximación de Chebyshev

En este caso la pulsación de corte de 3 dB carece de sentido. Sólo se puede obtener un filtro pasa bajos normalizado respecto de la pulsación de corte en  $X$  dB ( $\omega_B$ ), empleando:

$$|\rho_1(s)|^2 = 1 - t \cdot |H(j\omega)|_{\omega=s/j}^2 = 1 + t \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon^2 V_n^2(\omega)} \Big|_{\omega=s/j}$$

dado que  $0 < t \leq 1$ , y resulta más conveniente emplear la siguiente forma:

$$|\rho_1(s)|^2 = \frac{1 + \varepsilon^2 V_n^2(s) - t}{1 + \varepsilon^2 V_n^2(s)} = \frac{(1-t) + \varepsilon^2 V_n^2(s)}{1 + \varepsilon^2 V_n^2(s)}$$

A partir de esta expresión se obtienen dos soluciones  $\rho_{1a}(s)$  y  $\rho_{1b}(s)$ , empleando las expresiones (7-48) y (7-49) para determinar los polos y ceros de  $|\rho_1(s)|^2$ .  $\rho_{1a}(s)$  se obtiene con las raíces del denominador y del numerador ubicadas en el SPI y  $\rho_{1b}(s)$  con las raíces del denominador en el SPI y las del numerador en el SPD, mediante las expresiones (9-60).

4. Obtener las expresiones para la inmitancia de entrada del cuadripolo alimentado por un generador con una  $R_g = 1 \Omega$ , aplicando las expresiones de  $\rho_{1a}$  y  $\rho_{1b}$ :

$$Z(s) = \left( \frac{1 - \rho_1(s)}{1 + \rho_1(s)} \right)^{\pm 1} \quad Y(s) = \left( \frac{1 + \rho_1(s)}{1 - \rho_1(s)} \right)^{\pm 1}$$

5. Sintetizar las cuatro configuraciones posibles del filtro (dos realizadas como impedancia y otras dos como admitancia), por alguna de las formas canónicas como filtro *pasa bajos* (todos los ceros de transmisión en infinito). Lo más sencillo es aplicar Cauer I, realizando  $n$  pasos de división continua, considerando el signo del exponente que haga que la expresión tenga un polo en infinito.
6. Transformar cada componente del circuito pasa bajos normalizado obtenido aplicando la transformación Pasa Bajos - PasaX normalizando o desnormalizando, para obtener el circuito pasa altos, pasa banda, etc., el cual todavía estará normalizado en impedancia al valor de  $R_g$ .
7. Desnormalizar cada componente en impedancia, multiplicando cada valor de  $R$  y de  $L$  por  $R_g$  y dividiendo cada valor de  $C$  por  $R_g$ .

#### 9.4.4. Ejemplos de diseño

En este apartado se presentan los siguientes ejemplos de aplicación del procedimiento que se describió.

- **Ejemplo 9.6.** Filtro Butterworth pasa banda
- **Ejemplo 9.7.** Filtro Chebyshev pasa bajos
- **Ejemplo 9.8.** Filtro Chebyshev pasa altos
- **Ejemplo 9.9.** Filtro Butterworth supresor de banda

#### Ejemplo 9.6.

Diseñar un filtro *pasa banda* aplicando la aproximación de *Butterworth* a la relación  $|U_2/U_{20}|$ , para cumplir con las siguientes especificaciones, empleando el menor número de componentes:

- Resistencia del generador  $R_1 = 50 \Omega$  y resistencia de carga  $R_2 = 50 \Omega$ .
- Frecuencia central de la banda de paso  $f_0 = 450 \text{ kHz}$ .
- La banda dentro de la cual la relación  $|U_2/U_{20}|$  no debe apartarse en más de 1,2 dB respecto de su valor para  $f_0$  es  $\Delta f = 35 \text{ kHz}$ .
- Para la frecuencia 550 kHz la atenuación debe ser  $\geq 20 \text{ dB}$ .

#### Resolución:

**(1)** Transformar las especificaciones al dominio del filtro *pasa bajos equivalente*

Obtención de las frecuencias que definen el ancho de banda de 1,2 dB:

$$\Delta f|_{1,2 \text{ dB}} = 35 \cdot 10^3 \quad f_{p2} - f_{p1} = 35 \cdot 10^3 \quad f_{p2} = f_{p1} + 35 \cdot 10^3 \quad (1)$$

$$f_0 = 450 \cdot 10^3 \quad f_{p1} \cdot f_{p2} = 2,025 \cdot 10^{11} \quad (2)$$

Con (1) en (2)

$$f_{p1}^2 + 35 \cdot 10^3 f_{p1} - 2,025 \cdot 10^{11} = 0$$

$$f_{p1a,b} = -\frac{35}{2} \cdot 10^3 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(35 \cdot 10^3\right)^2 + 4 \cdot 2,025 \cdot 10^{11}} \Rightarrow \begin{aligned} f_{p1a} &= 432,84 \cdot 10^3 \\ f_{p1b} &= -467,84 \cdot 10^3 \end{aligned} \quad (3)$$

Con (3) en (1):

$$f_{p2a} = f_{p1a} + 35 \cdot 10^3 = 432,84 \cdot 10^3 + 35 \cdot 10^3 = 467,84 \cdot 10^3$$

$$f_{p2b} = f_{p1b} + 35 \cdot 10^3 = -467,84 \cdot 10^3 + 35 \cdot 10^3 = -432,84 \cdot 10^3$$

Entonces, considerando ambas bandas (sobre las frecuencias positivas y las negativas):

$$f_{p1}|_{1,2 \text{ dB}} = \pm 432,84 \cdot 10^3 \quad f_{p2}|_{1,2 \text{ dB}} = \pm 467,84 \cdot 10^3$$

Por ser  $\Delta f_{1,2 \text{ dB}} \ll f_0$  las frecuencias de corte resultaron aproximadamente aritméticamente simétricas alrededor de  $f_0$ .

Aplicando la transformación pasa banda-pasa bajos conservando el ancho de banda, siendo  $\bar{\omega}$  en el dominio del pasa bajos equivalente:

$$\bar{s} = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s} \Rightarrow j\bar{\omega} = \frac{-\omega^2 + \omega_0^2}{j\omega} \quad \therefore \bar{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega}$$

Es decir:

$$\bar{\omega}_{p1} = 2\pi \cdot \frac{\left(\pm 432,84 \cdot 10^3\right)^2 - \left(450 \cdot 10^3\right)^2}{\pm 432,84 \cdot 10^3} = \mp 2\pi \cdot 35 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$$

$$\overline{\omega}_{p2} = 2\pi \cdot \frac{(\pm 467,84 \cdot 10^3)^2 - (450 \cdot 10^3)^2}{\pm 467,84 \cdot 10^3} = \pm 2\pi \cdot 35 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$$

Entonces para el pasa bajos equivalente:  $\overline{\omega}_p = 2\pi \cdot 35 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$

Por otra parte, como el dato de la especificación en la banda de atenuación es 550 kHz que es mayor que  $f_0=450 \text{ kHz}$ , corresponde a la frecuencia  $f_{s2}$  que delimita el ancho de banda de 20 dB. Y sabiendo que, para el filtro pasa banda se cumple:

$$f_0 = \sqrt{f_{s1} f_{s2}} \Rightarrow f_{s1} = \frac{f_0^2}{f_{s2}} = \frac{(450 \cdot 10^3)^2}{550 \cdot 10^3} = 368,18 \cdot 10^3$$

Con lo cual:

$$\Delta f = f_2 - f_1 = 550 \cdot 10^3 - 368,18 \cdot 10^3 = 181,82 \cdot 10^3$$

Por lo tanto, de acuerdo a la observación la frecuencia correspondiente al ancho de banda  $\Delta f|_{20 \text{ dB}}$  en el dominio del pasa bajos equivalente resulta:

$$\overline{\omega}_s = 2\pi \cdot 181,82 \text{ krad/s} \quad \text{y} \quad \alpha_s = 20 \text{ dB}$$

Este paso del proceso fue implementado en Matlab mediante las siguientes líneas de código:

```

01 function Butterworth_Pasa_Banda
02 %% Bloque Principal
03 clc
04 ZFmt=[' L1=%g\n C1=%g\n L2=%g\n C2=%g\n L3=%g\n C3=%g\n' ...
05 ' L4=%g\n C4=%g\n L5=%g\n C5=%g\n L6=%g\n C6=%g\n' ...
06 ' L7=%g\n C7=%g\n L8=%g\n C8=%g\n L9=%g\n C9=%g\n'];
07 YFmt=[' C1=%g\n L1=%g\n C2=%g\n L2=%g\n C3=%g\n L3=%g\n' ...
08 ' C4=%g\n L4=%g\n C5=%g\n L5=%g\n C6=%g\n L6=%g\n' ...
09 ' C7=%g\n L7=%g\n C8=%g\n L8=%g\n C9=%g\n L9=%g\n'];
10 R2Fmt=' R2=%g\n';
11 % Datos del caso
12 R1=50; R2=50;
13 f0 = 450E3;
14 Dfp=35E3; fs2=550E3;
15 alfa_p=1.2; alfa_s=20;
16 fs1=f0^2/fs2;
17 Dfs=fs2-fs1;
18 % Transformar la especificación al dominio del pasa bajos equivalente
19 % - Determinar primero las frecuencias que delimitan los anchos de banda
20 [fp1, fp2] = BP_Deltaf2f(f0, Dfp);
21 [fs1, fs2] = BP_Deltaf2f(f0, Dfs);
22 % - luego se transforman estas frecuencias al dominio del pasa bajos
23 wLP = Bp2Lp(2*pi*[fp1, fp2, fs1, fs2], 2*pi*f0);
24 wlp = max(wLP(1:2));
25 wslp = max(wLP(3:4));

```

En las líneas 4 a 10 se definen formatos usados para mostrar los resultados en la ventana de comandos de Matlab.

La función `BP_Deltaf2f` empleada en las líneas 20 y 21 retorna el par de frecuencias que delimitan el ancho de banda centrado en  $\omega_0$ .

La función `Bp2Lp` empleada en la línea 23 retorna las pulsaciones  $\overline{\omega}$  en el dominio del filtro pasa bajos equivalente aplicando la transformación pasa banda – pasa bajos, conservando el ancho de banda, a las pulsaciones  $\omega_1$  y  $\omega_2$  que delimitan cierto ancho de banda de interés centrado en  $\omega_0$  del filtro pasa banda. El código de `BP_Deltaf2f` y `Bp2Lp` es el siguiente:

```

70 %% ===== Funciones Internas =====
71 function [f1,f2] = BP_Deltaf2f(f0, Deltaf)
72 % Retorna las dos frecuencias que delimitan el ancho de banda Deltaf
73 % centrado en f0, en una curva de transferencia de pasa banda
74 x = sqrt(1+(2*f0/Deltaf)^2);
75 f1 = 0.5*Deltaf*(-1+x);
76 f2 = 0.5*Deltaf*(1+x);

```

```

77 end
78 function wLP = Bp2Lp(wBP, w0)
79     wLP = (w0^2-wBP.^2) ./wBP;
80 end
    
```

**(2) Calcular los parámetros de diseño  $\epsilon$  y  $n$  del pasa bajos equivalente con la aproximación de Butterworth**  
 El coeficiente de ondulación  $\epsilon$  se obtiene a partir de la especificación de la máxima atenuación admitida en la banda de paso:

$$\epsilon^2 = 10^{0,1 \cdot \alpha_p} - 1 \quad \epsilon^2 = 10^{0,1 \cdot 1,2} - 1 = 0,3183 \quad \therefore \quad \epsilon = 0,564$$

Por otra parte la *atenuación mínima* admitida a la pulsación  $\omega_s$  en la banda de atenuación, permite determinar el orden  $n$  requerido:

$$n \geq \frac{\log \left[ \frac{10^{0,1 \cdot \alpha_s} - 1}{\epsilon^2} \right]}{2 \log \left( \frac{\omega_s}{\omega_p} \right)} = \frac{\log \left[ \frac{10^{0,1 \cdot 20} - 1}{0,3183} \right]}{2 \log \left( \frac{2\pi \cdot 181,82 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 35 \cdot 10^3} \right)} = 1,742$$

Es decir con la aproximación de Butterworth el  $n$  que se debería adoptar es 2, y por lo tanto los componentes requeridos para implementar el filtro pasa banda serían 4.

Verificación del obtenido  $n$  con la aproximación de Butterworth

En la banda de atenuación se debe cumplir:

$$A(\omega_s) = 10 \log \left( 1 + \epsilon^2 \left( \frac{\omega_s}{\omega_p} \right)^{2n} \right) \geq \alpha_s \quad A(\omega_s) = 10 \log \left( 1 + 0,3183 \left( \frac{181,82 \cdot 10^3}{35 \cdot 10^3} \right)^4 \right) = 23,67 \geq 20$$

Con lo cual el valor de  $n=2$  es satisfactorio y la función de transferencia del filtro pasa bajos normalizado será:

$$|H(j\omega)|^2 = \left| \frac{1}{1 + \epsilon^2 \omega^4} \right| \Rightarrow [H(s)]^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \omega^4} \Big|_{\omega=s/j} = \frac{1}{1 + \epsilon^2 s^4}$$

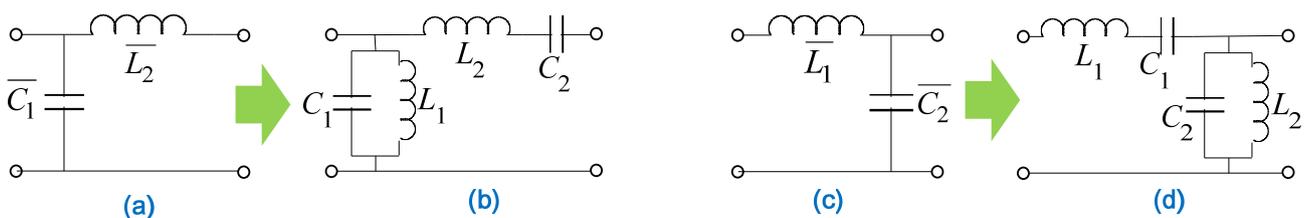
```

26 % Calcular los parámetros del diseño
27 if alfa_p ==3, eps=1; else eps=sqrt(10^(alfa_p/10)-1); end
28 n_real=log10((10^(alfa_s/10)-1)/(10^(alfa_p/10)-1))/2/log10(wslp/wplp);
29 n=ceil(n_real);
30 % --- Verificación del n obtenido. Se debe cumplir A(wp)>alfa_s
31 At = 10*log10(1+eps^2*(wslp/wplp)^2^n)
    
```

**(3) Obtener  $\rho_1(s)$  para un filtro pasa bajos normalizado equivalente.**

Habría 4 realizaciones posibles: 2 como impedancia (una con  $\rho_{1a}(s)$  y otra con  $\rho_{1b}(s)$ ) y 2 como admitancia (una con  $\rho_{1a}(s)$  y otra con  $\rho_{1b}(s)$ ).

El filtro pasa bajos de orden 2, desarrollado como admitancia tendrá la topología indicada en la **Fig. 9.21a** y el pasa banda resultante la indicada en la **Fig. 9.21b**. Desarrollado como impedancia tendrá la topología indicada en la **Fig. 9.21c**, y el pasa banda resultante la indicada en la **Fig. 9.21d**.



**Fig. 9.21.** Topologías posibles: **(a)** PBN sintetizado como admitancia; **(b)** pasa banda transformado a partir de (a); **(c)** PBN sintetizado como impedancia; **(d)** pasa banda transformado a partir de (c).

En cualquier caso, el número de elementos necesarios para el filtro pasa banda es 4 (2 capacitores y 2 inductores). En un diseño real, los valores obtenidos para estos componentes determinarán el circuito más adecuado.

Entonces ahora se puede escribir la expresión de  $|\rho_1(s)|^2$  para lo cual se requiere determinar:

$$t = \frac{4R_1R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{4 \cdot 50 \cdot 50}{(50 + 50)^2} = 1$$

Y aplicando la aproximación de Butterworth de orden 2 para el filtro pasa bajos normalizado respecto de  $\omega_p = 2\pi 35 \cdot 10^3$  rad/s resulta:

$$|\rho_1(s)|^2 = 1 - t \left| \frac{U_2}{U_{20}}(s) \right|^2 = 1 - t \frac{1}{1 + \varepsilon^2 s^4} = \frac{1 + \varepsilon^2 s^4 - 1}{1 + \varepsilon^2 s^4} = \frac{0,3183 s^4}{1 + 0,3183 s^4}$$

- Los polos de  $|\rho_1(s)|^2$  son 4, y se encuentran ubicados sobre una circunferencia de radio 1,3313:  $\pm 0,94141 \pm j 0,94141$
- Los ceros de  $|\rho_1(s)|^2$  también son 4, y se encuentran ubicados en el origen.

Determinación de las raíces de las singularidades de  $|\rho_1(s)|^2$

Las dos soluciones posibles para las raíces de  $|\rho_1(s)|^2$  resultan iguales porque los cuatro ceros de  $|\rho_1(s)|^2$  se encuentran en el origen:

$$\rho_{1a}(s) = \rho_{1b}(s) = \frac{s^2}{[s - (-0,9414 + j0,9414)][s - (-0,9414 - j0,9414)]} = \frac{s^2}{s^2 + 1,883s + 1,773}$$

Este paso del proceso se puede efectuar en Matlab mediante las siguientes líneas de código:

```
32 % --- Obtención de las 2 expresiones de rho1(s)
33 P = zeros(2*n+1, 1); P(1)=(-1)^n*eps^2; P(2*n+1)=1; % Den. de rho1(s)^2
34 r = roots(P); % Polos de rho1(s)^2
35 sPs= r(real(r)<0)'; % Polos del SPI
36 sZa= zeros(n, 1); sZb= zeros(n, 1); % Ceros de rho1(s)^2
37 [Ns1a, Ds1a]=zp2tf(sZa, sPs, 1);
38 rho1a=tf(Ns1a, Ds1a)
39 [Ns1b, Ds1b]=zp2tf(sZb, sPs, 1);
40 rho1b=tf(Ns1b, Ds1b)
```

#### (4) Obtener las Impedancias y Admitancias de entrada

Como  $\rho_{1a}(s) = \rho_{1b}(s)$  resulta:

$$Z_{1a}(s) = Z_{1b}(s) = R_1 \left( \frac{1 - \rho_{1a}(s)}{1 + \rho_{1a}(s)} \right)^{\pm 1} \quad Y_{1a}(s) = Y_{1b}(s) = G_1 \left( \frac{1 + \rho_{1a}(s)}{1 - \rho_{1a}(s)} \right)^{\pm 1}$$

y normalizando impedancias respecto de  $R_1$  y admitancias respecto de  $G_1$ , resulta

$$Z_{1a}(s) = Z_{1b}(s) = \left( \frac{1 - \rho_{1a}(s)}{1 + \rho_{1a}(s)} \right)^{\pm 1} \quad Y_{1a}(s) = Y_{1b}(s) = \left( \frac{1 + \rho_{1a}(s)}{1 - \rho_{1a}(s)} \right)^{\pm 1}$$

Como se está sintetizando un filtro pasa bajos de orden 2, es necesario realizar 2 ceros de transmisión en infinito, lo que se consigue removiendo 2 polos de  $Z_{1a}$  o  $Y_{1a}$  en infinito (Cauer I).

Es decir que con esta alternativa de ubicación de los ceros de  $\rho_1(s)$  para  $Z_{1a}$  hay que considerarlo (-1) y para  $Y_{1a}$  hay que considerarlo (+1). Entonces resulta:

$$Z_{1a}(s) = Z_{1b}(s) = Y_{1a}(s) = Y_{1b}(s) = \frac{1 + \rho_{1a}(s)}{1 - \rho_{1a}(s)} = \frac{1 + \frac{s^2}{s^2 + 1,883s + 1,773}}{1 - \frac{s^2}{s^2 + 1,883s + 1,773}} = \frac{2s^2 + 1,883s + 1,773}{1,883s + 1,773}$$

Es decir que de las 4 realizaciones posibles sólo 2 serán diferentes, una como impedancia  $Z_{1a} = Z_{1b}$  y otra como admitancia:  $Y_{1a} = Y_{1b}$ .

```
41 % --- Obtención del Z1a(s)=Y1a(s) normalizadas respecto de R1
42 NZ1a=Ds1a+Ns1a; NZ1a=NZ1a(find(abs(NZ1a)>1e-4,1):end);
```

```

43  DZ1a=Ds1a-Ns1a; DZ1a=DZ1a(find(abs(DZ1a)>1e-4,1):end);
44  Z1a=tf(NZ1a, DZ1a)
45  % --- Obtención del Z1b(s)=Y1b(s) normalizadas respecto de R1
46  NZ1b=Ds1b+Ns1b; NZ1b=NZ1b(find(abs(NZ1b)>1e-4,1):end);
47  DZ1b=Ds1b-Ns1b; DZ1b=DZ1b(find(abs(DZ1b)>1e-4,1):end);
48  Z1b=tf(NZ1b, DZ1b)
    
```

El propósito de la segunda asignación en las líneas 42, 43, 46 y 47 es eliminar en los vectores NZ1a, DZ1a, NZ1b y DZ1b los elementos de valor 0 (para no considerar en los respectivos polinomios los términos con coeficiente nulo).

**(5) Sintetizar las Impedancias y Admitancias de entrada**

Como los ceros de transmisión se encuentran en infinito, se requiere remover polos en infinito (3ª forma canónica o 1ª forma de Cauer).

Aplicando Cauer I y resolviendo por división continua, para  $Z_{1a} = Z_{1b} = Y_{1a} = Y_{1b}$  resulta:

$$Z_{1a}(s) = Z_{1b}(s) = Y_{1a}(s) = Y_{1b}(s) = 1,0622 s + \frac{1}{1,0622 s + 1}$$

Cuya síntesis conduce a los circuitos pasa bajos normalizados indicados en la Fig. 9.22.

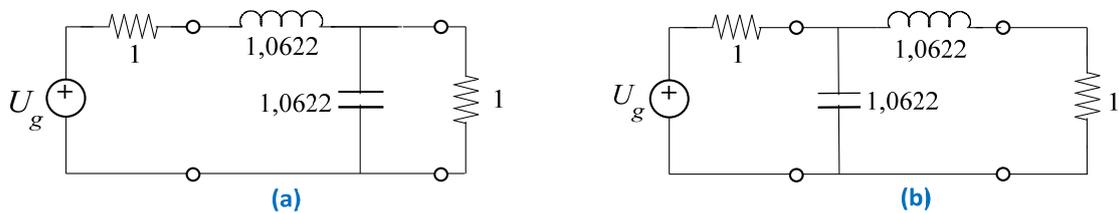


Fig. 9.22. (a) PBN sintetizado como impedancia; (b) PBN sintetizado como admitancia.

**(6) Transformar y desnormalizar**

Aplicando la transformación pasa bajos normalizado - pasa banda de ancho de banda de paso  $\Delta\omega$  (con  $\Delta\omega \neq 1$ ), no será necesario denormalizar en frecuencia. Los valores resultantes a su vez deben desnormalizarse respecto de  $R_1$ .

El circuito pasa banda correspondiente se muestra en la Fig. 9.23.

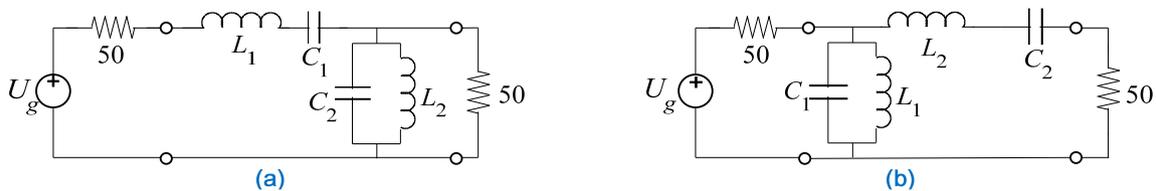


Fig. 9.23. Circuitos pasa banda sintetizados (a) transformando el PBN sintetizado como impedancia; (b) transformando el PBN sintetizado como admitancia.

$$R_1=50 \Omega \quad R_2=50 \Omega \quad \Delta\omega = 2\pi \cdot 35 \cdot 10^3 = 219,9 \cdot 10^3 \quad \omega_0 = 2\pi \cdot 450 \cdot 10^3 = 2,827 \cdot 10^6$$

Para la Fig. 9.23a

$$L_1 = \frac{\bar{L}}{\Delta\omega} \cdot R_1 = \frac{1,0622}{2\pi \cdot 35 \cdot 10^3} \cdot 50 = 241,5 \mu\text{H}$$

$$C_1 = \frac{\Delta\omega}{\omega_0^2 \bar{L} \cdot R_1} = \frac{2\pi \cdot 35 \cdot 10^3}{(2\pi \cdot 450 \cdot 10^3)^2 \cdot 1,0622 \cdot 50} = 517,9 \text{ pF}$$

$$L_2 = \frac{\Delta\omega \cdot R_1}{\omega_0^2 \bar{C}} = \frac{2\pi \cdot 35 \cdot 10^3 \cdot 50}{(2\pi \cdot 450 \cdot 10^3)^2 \cdot 1,0622} = 1,295 \mu\text{H}$$

$$C_2 = \frac{\bar{C}}{\Delta\omega \cdot R_1} = \frac{1,0622}{2\pi \cdot 35 \cdot 10^3 \cdot 50} = 96,6 \text{ nF}$$

Para la Fig. 9.23b

$$L_1 = \frac{\Delta\omega \cdot R_1}{\omega_0^2 \bar{C}} = \frac{2\pi \cdot 35 \cdot 10^3 \cdot 50}{(2\pi \cdot 450 \cdot 10^3)^2 \cdot 1,0622} = 1,295 \mu\text{H}$$

$$C_1 = \frac{\bar{C}}{\Delta\omega \cdot R_1} = \frac{1,0622}{2\pi \cdot 35 \cdot 10^3 \cdot 50} = 96,6 \text{ nF}$$

$$L_2 = \frac{\bar{L}}{\Delta\omega} \cdot R_1 = \frac{1,0622}{2\pi \cdot 35 \cdot 10^3} \cdot 50 = 241,5 \mu\text{H}$$

$$C_2 = \frac{\Delta\omega}{\omega_0^2 \bar{L} \cdot R_1} = \frac{2\pi \cdot 35 \cdot 10^3}{(2\pi \cdot 450 \cdot 10^3)^2 \cdot 1,0622 \cdot 50} = 517,9 \text{ pF}$$

La síntesis de  $Z_{1a}$ ,  $Y_{1a}$ ,  $Z_{1b}$  e  $Y_{1b}$  se puede efectuar en Matlab mediante las siguientes líneas de código:

```

49 % --- Síntesis de Z1a(s) y de Y1a(s) por Cauer I
50 LPelems_1a = Cauer_I(NZ1a, DZ1a);
51 fprintf('Elementos de Z1a(s)=Y1a(s) del pasa bajos normalizado:\n')
52 fprintf(' %g', LPelems_1a)
53 BPelems_Z1a = Lp2Bp(LPelems_1a, R1, f0, Dfp, 'Z');
54 BPelems_Y1a = Lp2Bp(LPelems_1a, R1, f0, Dfp, 'Y');
55 fprintf('\nElementos de Z1a(s) del pasa banda:\n')
56 fprintf([ZFmt(1:20*n), R2Fmt], BPelems_Z1a)
57 fprintf('Elementos de Y1a(s) del pasa banda:\n')
58 fprintf([YFmt(1:20*n), R2Fmt], BPelems_Y1a)
59 % --- Síntesis de Z1b(s) y de Y1b(s) por Cauer I
60 LPelems_1b = Cauer_I(NZ1b, DZ1b);
61 fprintf('Elementos de Z1b(s)=Y1b(s) del pasa bajos normalizado:\n')
62 fprintf(' %g', LPelems_1b)
63 BPelems_Z1b = Lp2Bp(LPelems_1b, R1, f0, Dfp, 'Z');
64 BPelems_Y1b = Lp2Bp(LPelems_1b, R1, f0, Dfp, 'Y');
65 fprintf('\nElementos de Z1b(s) del pasa banda:\n')
66 fprintf([ZFmt(1:20*n), R2Fmt], BPelems_Z1b)
67 fprintf('Elementos de Y1b(s) del pasa banda:\n')
68 fprintf([YFmt(1:20*n), R2Fmt], BPelems_Y1b)
69 fprintf('FIN\n')

```

La función `Cauer_I` empleada en las líneas 50 y 60, realiza el proceso de división continua de la división polinómica  $P/Q$  siendo  $P$  el polinomio cuyos coeficientes se pasan como primer parámetro (vector fila) y  $Q$  el polinomio cuyos coeficientes se pasan como segundo parámetro (vector fila). Invocándola con  $P$  igual al vector de coeficientes del numerador de  $Z$  ó  $Y$  y  $Q$  igual al vector de coeficientes del denominador de  $Z$  ó  $Y$ , el parámetro de retorno será el vector fila con los valores de los componentes del filtro pasa bajos normalizado.

La función `Lp2Bp` empleada en las líneas 53, 54, 63 y 64 permite transformar los elementos del prototipo pasa bajos normalizado al filtro pasa banda, desnormalizado respecto del ancho de banda  $DfB$  que delimita la banda de paso.

El primer parámetro es el vector fila con los valores de los elementos del pasa bajos normalizado. El segundo parámetro es el valor de resistencia del generador que se empleará para desnormalizar en impedancia. El tercero es la frecuencia central de la banda de paso especificada (en Hz). El cuarto es el ancho de banda del límite de la banda de paso del pasa banda. El quinto parámetro es 'Z' o 'Y' para indicar si se trata de una impedancia o una admitancia.

El parámetro de retorno es un vector fila con los valores de los componentes del pasa bajos resultante.

El código de `Cauer_I` y de `Lp2Bp` es el siguiente:

```

81 function Elem_values = Cauer_I(P, Q)
82 % Desarrollo en división continua de la división polinómica P/Q
83 % El grado de P debe ser mayor que el grado de Q, con lo cual
84 % Elem_values, al contener el primer coeficiente del cociente en cada
85 % paso de la división, es un vector fila donde cada elemento es el
86 % valor de un componente del pasa bajos normalizado, desarrollado por
87 % la 3ª forma canónica o Cauer I.

```

```

88     q=length(P);
89     Elem_values=zeros(1, q);
90     for i=1:q-1
91         [Ci, R]=deconv(P,Q);      %División polinómica
92         Elem_values(i)=Ci(1);    % Se agrega el 1er coef. del cociente
93         P=Q;                    % El divisor pasa a ser dividendo
94         Q=R(find(abs(R)>1e-4,1):end); % El resto pasa a ser divisor
95     end
96     Elem_values(q)=Ci(2);        % El 2° coef del último cociente será R2
97                                 % ó G2, correspondiendo a la misma
98                                 % instancia (Z o Y) del ultimo elemento
99     end

100 function BPvalues = Lp2Bp(LPvalues, Rg, f0, DfB, ZY)
101     len=length(LPvalues);
102     elem=zeros(1, 2*len-1);
103     % --- Transformar y desnormalizar en frecuencia cada elemento
104     if strcmpi(ZY, 'Y')
105         for q=1 : len-1
106             if rem(q, 2)==1 % si q es impar es una C del pasa bajos
107                 elem(2*q-1)=LPvalues(q) / (2*pi*DfB) / Rg; % C del BP
108                 elem(2*q)=DfB / (2*pi*f0^2*LPvalues(q)) * Rg; % L del BP
109             else % si q es par es una L del pasa bajos
110                 elem(2*q-1)=DfB / (2*pi*f0^2*LPvalues(q)) / Rg; % C del BP
111                 elem(2*q)=LPvalues(q) / (2*pi*DfB) * Rg; % L del BP
112             end
113         end
114         if rem(len-1, 2)==1 % si el último elemento del pasa bajos
115                             % es un capacitor, el último valor es una
116                             % conductancia
117             elem(end)=Rg/LPvalues(end);
118         else
119             elem(end)=LPvalues(end) * Rg;
120         end
121     else
122         for q=1 : len-1
123             if rem(q, 2)==1 % si q es impar es una L del pasa bajos
124                 elem(2*q-1)=LPvalues(q) / (2*pi*DfB) * Rg; % L del BP
125                 elem(2*q)=DfB / (2*pi*f0^2*LPvalues(q)) / Rg; % C del BP
126             else % si q es par es una C del pasa bajos
127                 elem(2*q-1)=DfB / (2*pi*f0^2*LPvalues(q)) * Rg; % L del BP
128                 elem(2*q)=LPvalues(q) / (2*pi*DfB) / Rg; % C del BP
129             end
130         end
131         if rem(len-1, 2)==1 % si el último elemento del pasa bajos
132                             % es un inductor, el último valor es una
133                             % resistencia
134             elem(end)=LPvalues(end) * Rg;
135         else
136             elem(end)=Rg/LPvalues(end);
137         end
138     end
139     BPvalues=elem;
140
141 end
142 end

```

### Simulación:

Empleando los valores finales obtenidos para los componentes (desnormalizados), se obtiene la curva de transferencia en decibeles en función de la frecuencia (transferencia de tensión de salida a tensión de entrada) que se muestra en la **Fig. 9.24**, en la cual el eje de frecuencias es lineal y se abarca el rango de frecuencias que permite corroborar el cumplimiento de la especificación en la banda de paso.

En la misma **Fig. 9.24** se indican las lecturas frecuencia-magnitud en dB de puntos de la curva obtenidos con los cursores sobre la salida de la simulación, que corresponden al centro de la banda de paso y a las frecuencias de corte para la cual se especificó la máxima atenuación admitida.

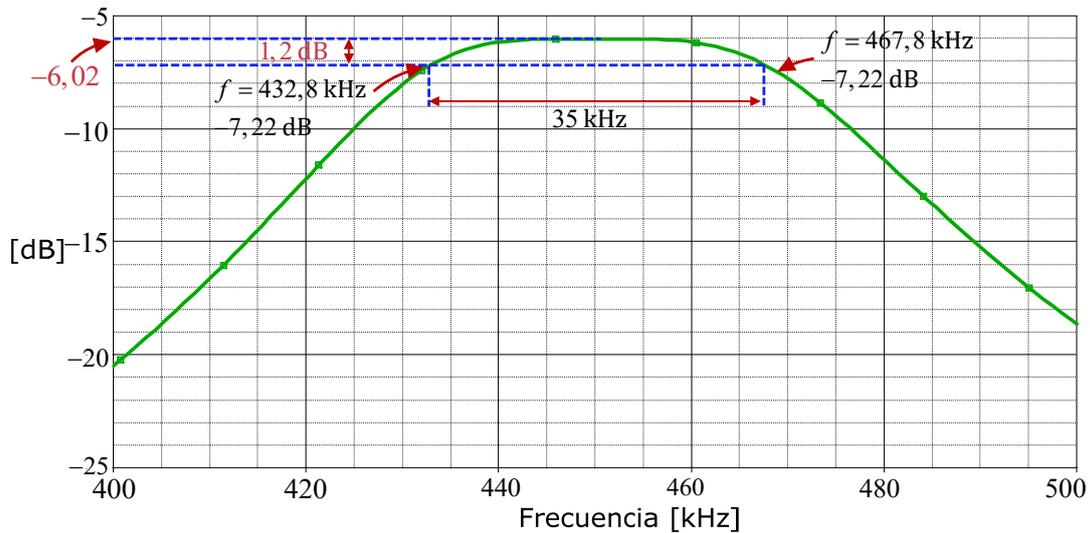


Fig. 9.24. Característica  $|H(j\omega)|$  sintetizada.

**Ejemplo 9.7.**

Diseñar un filtro *pasa bajos* para ser alimentado por un generador de resistencia  $R_g=75 \Omega$  y cargado con una resistencia  $R_c=300 \Omega$ . La relación  $|U_2/U_{20}|$  debe responder a la aproximación de *Chebyshev*.

En la banda de paso, delimitada por la pulsación angular  $\omega_p=100 \text{ krad/s}$ , el rizado no debe superar 1,34 dB. Se requiere que la atenuación a 300 krad/s sea mayor a 20 dB, y una década arriba de  $\omega_p$  mayor a 60 dB.

**Resolución:**

**(1) Especificaciones del pasa bajos:**

- Banda de paso:  $\omega_p = 10^5 \text{ rad/s}$  y  $\alpha_p = 1,34 \text{ dB}$
- Banda de atenuación:  $\omega_{s1} = 3 \cdot 10^5 \text{ rad/s}$ ;  $\alpha_{s1} = 20 \text{ dB}$        $\omega_{s2} = 10^6 \text{ rad/s}$ ;  $\alpha_{s2} = 60 \text{ dB}$

**(2) Calcular los parámetros de diseño  $\epsilon$  y  $n$  del pasa bajos equivalente con la aproximación de *Chebyshev***

El coeficiente de ondulación  $\epsilon$  se obtiene a partir de la especificación de la máxima atenuación admitida en la banda de paso, que resulta para el valor máximo de  $V_n(\omega)$  en la banda de paso, es decir:  $V_n(\omega)=1$ :

$$\alpha_p = 20 \log \sqrt{1 + \epsilon^2} = 10 \log (1 + \epsilon^2)$$

de donde resulta:

$$\epsilon^2 = 10^{0,1 \cdot \alpha_p} - 1 \quad \epsilon^2 = 10^{0,1 \cdot 1,34} - 1 = 0,3614 \quad \therefore \quad \epsilon = 0,601$$

Por otra parte la *atenuación mínima* admitida a la pulsación  $\omega_s$  en la banda de spresión, permite determinar el orden  $n$  requerido:

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{0,1 \cdot \alpha_p} - 1}{10^{0,1 \cdot \alpha_s} - 1}}}{\cosh^{-1} \left( \frac{\omega_s}{\omega_p} \right)} \quad \text{o} \quad n \geq \frac{\log \left[ 2 \sqrt{\frac{10^{0,1 \cdot \alpha_s} - 1}{10^{0,1 \cdot \alpha_p} - 1}} \right]}{\log \left( \frac{2\omega_s}{\omega_p} \right)}$$

Como en este caso existen dos pares de valores  $\omega_s$  y  $\alpha_s$ , se obtienen dos valores posibles de  $n$ :

$$n_1 \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{0,1 \cdot 20} - 1}{10^{0,1 \cdot 1,34} - 1}}}{\cosh^{-1} \left( \frac{3 \cdot 10^5}{10^5} \right)} = 1,985 \quad n_1 \geq \frac{\log \left[ 2 \sqrt{\frac{10^{0,1 \cdot 20} - 1}{10^{0,1 \cdot 1,34} - 1}} \right]}{\log \left( \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^5}{10^5} \right)} = 1,953$$

$$n_2 \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{0.1 \cdot 60} - 1}{10^{0.1 \cdot 1.34} - 1}}}{\cosh^{-1} \left( \frac{10^6}{10^5} \right)} = 2,709$$

$$n_2 \geq \frac{\log \left[ 2 \sqrt{\frac{10^{0.1 \cdot 60} - 1}{10^{0.1 \cdot 1.34} - 1}} \right]}{\log \left( \frac{2 \cdot 10^6}{10^5} \right)} = 2,707$$

Es decir con la aproximación de *Chebyshev* el  $n$  que se debería adoptar es 3, y por lo tanto los componentes requeridos para implementar el filtro pasa bajos serán 3.

Esto pasos del procedimiento se pueden efectuar en Matlab mediante las siguientes líneas de código:

```

01 function Chebyshev_Pasa_Bajos
02 %% Bloque Principal
03 clc
04 % Definición de formatos de impresión de valores obtenidos
05 YFmt=[' C1=%g\n L1=%g\n C2=%g\n L2=%g\n C3=%g\n L3=%g\n' ...
06 ' C4=%g\n L4=%g\n C5=%g\n L5=%g\n C6=%g\n L6=%g\n'];
07 ZFmt=[' L1=%g\n C1=%g\n L2=%g\n C2=%g\n L3=%g\n C3=%g\n' ...
08 ' L7=%g\n C7=%g\n L8=%g\n C8=%g\n L9=%g\n C9=%g\n'];
09 R2Fmt=' R2=%g\n';
10 % Datos del caso
11 R1=75; R2=300;
12 wp=100*10^3; ws1=3*10^5; ws2=10^6;
13 alfa_p=1.34; alfa_s1=20; alfa_s2=60;
14 % Frecuencias características del pasa bajos
15 fp=wp/2/pi; fsl=ws1/2/pi; fs2=ws2/2/pi;
16 % Calcular los parámetros del diseño
17 eps=sqrt(10^(alfa_p/10)-1);
18 n_real_1=acosh(sqrt(10^(alfa_s1/10)-1)/ ...
19 sqrt(10^(alfa_p/10)-1))/acosh(ws1/wp);
20 n_real_2=acosh(sqrt(10^(alfa_s1/12)-1)/ ...
21 sqrt(10^(alfa_p/10)-1))/acosh(ws2/wp);
22 n=ceil(max(n_real_1, n_real_2));
    
```

En las líneas 5 a 9 se definen formatos para mostrar los resultados en la ventana de comandos de Matlab.

**(3)** Obtener  $\rho_1(s)$  para un filtro pasa bajos *normalizado* con los parámetros  $\varepsilon$  y  $n$ .

Habría 4 realizaciones posibles: 2 como impedancia (una con  $\rho_{1a}(s)$  y otra con  $\rho_{1b}(s)$ ) y 2 como admitancia (una con  $\rho_{1a}(s)$  y otra con  $\rho_{1b}(s)$ ).

El filtro pasa bajos de orden 3, desarrollado como admitancia tendrá la topología indicada en la **Fig. 9.25a** y desarrollado como impedancia tendrá la topología indicada en la **Fig. 9.25b**.



**Fig. 9.25.** Topologías posibles del filtro PBN: **(a)** sintetizado como admitancia; **(b)** sintetizado como impedancia.

En cualquier caso, el número de elementos necesarios es 3. En un caso de diseño real, serán los valores obtenidos para estos componentes los que determinen el circuito más adecuado.

Entonces ahora se puede escribir la expresión de  $|\rho_1(s)|^2$  para lo cual se requiere determinar:

$$t = \frac{4R_1R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{4 \cdot 75 \cdot 300}{(75 + 300)^2} = 0,64$$

Y aplicando la aproximación de Chebyshev de orden 3 para el filtro PBN respecto de  $\omega_{Bx}=10^5$  rad/s resulta:

$$|\rho_1(s)|^2 = 1 - t \left| \frac{U_2}{U_{20}}(s) \right|^2 = 1 - t \frac{1}{1 + \varepsilon^2 V_n^2(\omega)} \Big|_{\omega=s/j} = \frac{1 + \varepsilon^2 V_n^2(s) - t}{1 + \varepsilon^2 V_n^2(s)} = \frac{(1-t) + \varepsilon^2 V_n^2(s)}{1 + \varepsilon^2 V_n^2(s)}$$

Observar que tanto numerador como denominador tienen la misma forma ( $t < 1$ ). En este caso tanto los polos como los ceros de  $|\rho_1(s)|^2$  serán complejos de la forma:

$$s_k = \alpha_k + j\beta_k$$

Donde  $\alpha_k$  está dada por (7-48) y  $\beta_k$  por (7-49), con lo cual los polos se obtienen considerando  $A=1$ :

$$\alpha_{kp} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left( k \frac{\pi}{6} \right) \left[ \left( \sqrt{\frac{1}{0,601^2} + 1} + \frac{1}{0,601} \right)^{1/3} - \left( \sqrt{\frac{1}{0,601^2} + 1} + \frac{1}{0,601} \right)^{-1/3} \right]$$

$$\beta_{kp} = \frac{1}{2} \operatorname{cos} \left( k \frac{\pi}{6} \right) \left[ \left( \sqrt{\frac{1}{0,601^2} + 1} + \frac{1}{0,601} \right)^{1/3} + \left( \sqrt{\frac{1}{0,601^2} + 1} + \frac{1}{0,601} \right)^{-1/3} \right]$$

$$k = 1, 3, 5, 4n-1$$

Y para determinar los ceros, se considera

$$A=1-t=1-0,64=0,36 \quad \text{y} \quad \sqrt{A}=0,6$$

Por lo tanto:

$$\alpha_{kz} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left( k \frac{\pi}{6} \right) \left[ \left( \sqrt{\frac{0,36}{0,601^2} + 1} + \frac{0,6}{0,601} \right)^{1/3} - \left( \sqrt{\frac{0,36}{0,601^2} + 1} + \frac{0,6}{0,601} \right)^{-1/3} \right]$$

$$\beta_{kz} = \frac{1}{2} \operatorname{cos} \left( k \frac{\pi}{6} \right) \left[ \left( \sqrt{\frac{0,36}{0,601^2} + 1} + \frac{0,6}{0,601} \right)^{1/3} + \left( \sqrt{\frac{0,36}{0,601^2} + 1} + \frac{0,6}{0,601} \right)^{-1/3} \right]$$

$$k = 1, 3, 5, 4n-1$$

Es decir

- Los polos de  $|\rho_1(s)|^2$  son 6:  
 $\pm 0,4405$  ;  $-0,2202 \pm j 0,9463$  ;  $+0,2202 \pm j 0,9463$   
 y se encuentran ubicados sobre una elipse de semieje menor 0,4405 sobre el eje real.
- Los ceros de  $|\rho_1(s)|^2$  también son 6:  
 $\pm 0,2975$  ;  $-0,1488 \pm j 0,9035$  ;  $+0,1488 \pm j 0,9035$   
 y se encuentran ubicados sobre una elipse de semieje menor 0,2975 sobre el eje real.

#### Determinación de las raíces de las singularidades de $|\rho_1(s)|^2$

Se obtienen dos soluciones posibles:

a) Considerando los polos de  $|\rho_1(s)|^2$  ubicados en el SPI y los ceros de  $|\rho_1(s)|^2$  ubicados en el SPI.

$$\rho_{1a}(s) = \frac{[s - (-0,2975)][s - (-0,1488 + j0,9035)][s - (-0,1488 - j0,9035)]}{[s - (-0,4405)][s - (-0,2202 + j0,9463)][s - (-0,2202 - j0,9463)]}$$

$$\rho_{1a}(s) = \frac{s^3 + 0,595087s^2 + 0,927064s + 0,2495}{s^3 + 0,88975s^2 + 1,13806s + 0,415833}$$

b) Considerando los polos de  $|\rho_1(s)|^2$  ubicados en el SPI y los ceros de  $|\rho_1(s)|^2$  ubicados en el SPD.

$$\rho_{1b}(s) = \frac{[s - (-0,2975)][s - (-0,1488 + j0,9035)][s - (-0,1488 - j0,9035)]}{[s - (-0,4405)][s - (-0,2202 + j0,9463)][s - (-0,2202 - j0,9463)]}$$

$$\rho_{1b}(s) = \frac{s^3 - 0,595087s^2 + 0,927064s - 0,2495}{s^3 + 0,880975s^2 + 1,13806s + 0,415833}$$

Este paso del proceso se puede efectuar en Matlab mediante las siguientes líneas de código:

```
23 % --- Obtención de las 2 expresiones de rho1(s)
24 t=4*R1*R2/(R1+R2)^2;
25 sZa=Roots_Cheby(1-t, eps, n, 'SPI')
26 sZb=Roots_Cheby(1-t, eps, n, 'SPD')
27 sPs=Roots_Cheby(1, eps, n, 'SPI')
```

```

28 [Nsla, Dsla]=zp2tf(sZa, sPs, 1);
29 rhola=tf(Nsla, Dsla)
30 [Nslb, Dslb]=zp2tf(sZb, sPs, 1);
31 rholb=tf(Nslb, Dslb)

```

La función `Roots_Cheby` es una función que permite obtener las raíces  $s_k = \alpha + j\beta_k$  mediante las expresiones (7-48) y (7-49), tanto para el numerador de  $|\rho_1(s)|^2$  como para el denominador. El primer parámetro es 1-t para las raíces del numerador y 1 para las del denominador. El cuarto parámetro es 'SPI' o 'SPD' para indicar que se desean las raíces del semiplano izquierdo o del semiplano derecho. El código de `Roots_Cheby` es el siguiente:

```

61 %% ===== Funciones Internas =====
62 function Roots_Array = Roots_Cheby(A, eps, n, SP)
63 % Obtención de las raíces de la expresión
64 % A + eps^2 Vn(s)^2 = 0
65 % A = 1-t para los ceros de |rho1(s)|^2 y A=1 para los polos
66 % SP es el semiplano para las raíces buscadas ('SPI' ó 'SPD')
67 % Roots_Array es el vector con las n raíces ubicadas en SP
68 k=1:n;
69 if strcmpi(SP, 'SPI'), k=n+1:2*n; end
70 alfa_Array = 0.5*sin((2*k-1)*pi/2/n)* ...
71 ( sqrt(A/eps^2+1)+sqrt(A)/eps)^(1/n) - ...
72 ( sqrt(A/eps^2+1)+sqrt(A)/eps)^(-1/n) );
73 beta_Array = 0.5*cos((2*k-1)*pi/2/n)* ...
74 ( sqrt(A/eps^2+1)+sqrt(A)/eps)^(1/n) + ...
75 ( sqrt(A/eps^2+1)+sqrt(A)/eps)^(-1/n) );
76 Roots_Array=(alfa_Array+1i*beta_Array)';
77 end

```

#### (4) Obtener las Impedancias y Admitancias de entrada

a) Considerando los polos de  $|\rho_1(s)|^2$  ubicados en el SPI y los ceros de  $|\rho_1(s)|^2$  ubicados en el SPI, y normalizando impedancias respecto de  $R_1$  y admitancias respecto de  $G_1$ , resulta:

$$Z_{1a}(s) = R_1 \left( \frac{1 - \rho_{1a}(s)}{1 + \rho_{1a}(s)} \right)^{\pm 1} \Rightarrow Z_{1a}(s) = \left( \frac{1 - \rho_{1a}(s)}{1 + \rho_{1a}(s)} \right)^{\pm 1}$$

$$Y_{1a}(s) = G_1 \left( \frac{1 + \rho_{1a}(s)}{1 - \rho_{1a}(s)} \right)^{\pm 1} \Rightarrow Y_{1a}(s) = \left( \frac{1 + \rho_{1a}(s)}{1 - \rho_{1a}(s)} \right)^{\pm 1}$$

Como se está sintetizando un filtro pasa bajos de orden 3, es necesario realizar 3 ceros de transmisión en infinito, lo que se consigue removiendo 3 polos de  $Z_{1a}$  o  $Y_{1a}$  en infinito (Cauer I).

Es decir que con esta alternativa de ubicación de los ceros de  $\rho_1(s)$  para  $Z_{1a}$  hay que considerar el exponente (-1) y para  $Y_{1a}$  hay que considerarlo (+1). Entonces resulta:

$$Z_{1a}(s) = Y_{1a}(s) = \frac{1 + \rho_{1a}(s)}{1 - \rho_{1a}(s)} = \frac{1 + \frac{s^3 + 0,595087s^2 + 0,927064s + 0,2495}{s^3 + 0,88975s^2 + 1,13806s + 0,415833}}{1 - \frac{s^3 + 0,595087s^2 + 0,927064s + 0,2495}{s^3 + 0,88975s^2 + 1,13806s + 0,415833}}$$

$$Z_{1a}(s) = Y_{1a}(s) = \frac{s^3 + 0,738031s^2 + 1,03256s + 0,332667}{0,142944s^2 + 0,105498s + 0,0831665}$$

b) Considerando los polos de  $|\rho_1(s)|^2$  ubicados en el SPI y los ceros de  $|\rho_1(s)|^2$  ubicados en el SPD, y normalizando impedancias respecto de  $R_1$  y admitancias respecto de  $G_1$ , resulta:

$$Z_{1b}(s) = R_1 \left( \frac{1 - \rho_{1b}(s)}{1 + \rho_{1b}(s)} \right)^{\pm 1} \Rightarrow Z_{1b}(s) = \left( \frac{1 - \rho_{1b}(s)}{1 + \rho_{1b}(s)} \right)^{\pm 1}$$

$$Y_{1b}(s) = G_1 \left( \frac{1 + \rho_{1b}(s)}{1 - \rho_{1b}(s)} \right)^{\pm 1} \Rightarrow Y_{1b}(s) = \left( \frac{1 + \rho_{1b}(s)}{1 - \rho_{1b}(s)} \right)^{\pm 1}$$

Otra vez, como se está sintetizando un filtro pasa bajos de orden 3, es necesario realizar 3 ceros de transmisión en infinito, lo que se consigue removiendo 3 polos de  $Z_{1a}$  o  $Y_{1a}$  en infinito (Cauer I).

Es decir que con esta alternativa de ubicación de los ceros de  $\rho_1(s)$  para  $Z_{1b}$  hay que considerar el exponente (+1) y para  $Y_{1b}$  hay que considerarlo (-1). Entonces resulta:

$$Z_{1b}(s) = Y_{1b}(s) = \frac{1 - \rho_{1b}(s)}{1 + \rho_{1b}(s)} = \frac{1 - \frac{s^3 + 0,595087s^2 + 0,927064s + 0,2495}{s^3 + 0,88975s^2 + 1,13806s + 0,415833}}{1 + \frac{s^3 + 0,595087s^2 + 0,927064s + 0,2495}{s^3 + 0,88975s^2 + 1,13806s + 0,415833}}$$

$$Z_{1b}(s) = Y_{1b}(s) = \frac{s^3 + 0,142944s^2 + 1,03256s + 0,0831665}{0,332667s^2 + 0,105498s + 0,738031}$$

Esta determinación se puede efectuar en Matlab mediante las siguientes líneas de código:

```

32 % --- Obtención del Z1a(s)=Y1a(s) normalizadas respecto de R1
33 NZ1a=Ds1a+Ns1a; NZ1a=NZ1a(find(abs(NZ1a)>1e-4,1):end);
34 DZ1a=Ds1a-Ns1a; DZ1a=DZ1a(find(abs(DZ1a)>1e-4,1):end);
35 Z1a=tf(NZ1a, DZ1a)
36 % --- Obtención del Z1b(s)=Y1b(s) normalizadas respecto de R1
37 NZ1b=Ds1b+Ns1b; NZ1b=NZ1b(find(abs(NZ1b)>1e-4,1):end);
38 DZ1b=Ds1b-Ns1b; DZ1b=DZ1b(find(abs(DZ1b)>1e-4,1):end);
39 Z1b=tf(NZ1b, DZ1b)
    
```

El propósito de la segunda asignación en las líneas 33, 34, 37 y 38 es eliminar en los vectores NZ1a, DZ1a, NZ1b y DZ1b los elementos de valor 0 (para no considerar en los respectivos polinomios los términos con coeficiente nulo).

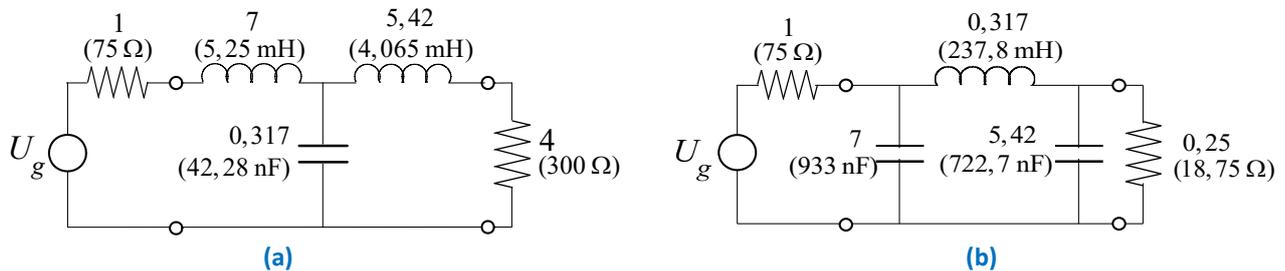
**(5) Sintetizar las Impedancias y Admitancias de entrada**

Como los ceros de transmisión se encuentran en infinito, se deben remover polos en infinito (3ª forma canónica o 1ª forma de Cauer) y existen 4 formas posibles de configuración, dos como impedancias  $Z_{1a}$  y  $Z_{1b}$  y otras dos como admitancias:  $Y_{1a}$  y  $Y_{1b}$ .

Aplicando Cauer I y resolviendo por división continua, para  $Z_{1a} = Y_{1a}$  resulta:

$$Z_{1a}(s) = Y_{1a}(s) = 7s + \frac{1}{0,32s + \frac{1}{5,42s + 4}}$$

Las cuales sintetizadas resultan en los circuitos pasa bajos de la **Fig. 9.26**, en la cual indican los valores normalizados de los componentes y entre paréntesis los valores desnormalizados.



**Fig. 9.26.** Valores normalizados (y desnormalizados) de los elementos resultantes a partir de  $\rho_{1a}$ : (a) síntesis como impedancia; (b) síntesis como admitancia.

Los valores desnormalizados se obtienen desnormalizando en frecuencia respecto de  $\omega_C$ , y desnormalizando en impedancia respecto de  $R_1$  cada elemento del PBN, tal como se indica a continuación:

**Realización de  $Z_{1a}$  (Fig. 9.26a)**

$$R_1=75 \Omega \quad R_2=300 \Omega$$

$$L_1 = \frac{R_1}{\omega_C} 7,0 = \frac{75 \cdot 7,0}{10^5} = 5,25 \text{ mH}$$

**Realización de  $Y_{1a}$  (Fig. 9.26b)**

$$R_1=75 \Omega \quad R_2=18,75 \Omega$$

$$C_1 = \frac{1}{\omega_C \cdot R_1} 7,0 = \frac{7,0}{10^5 \cdot 75} = 933 \text{ nF}$$

$$C_1 = \frac{1}{\omega_C \cdot R_1} 0,317 = \frac{0,317}{10^5 \cdot 75} = 42,28 \text{ nF}$$

$$L_2 = \frac{R_1}{\omega_C} 5,42 = \frac{75 \cdot 5,42}{10^5} = 4,065 \text{ mH}$$

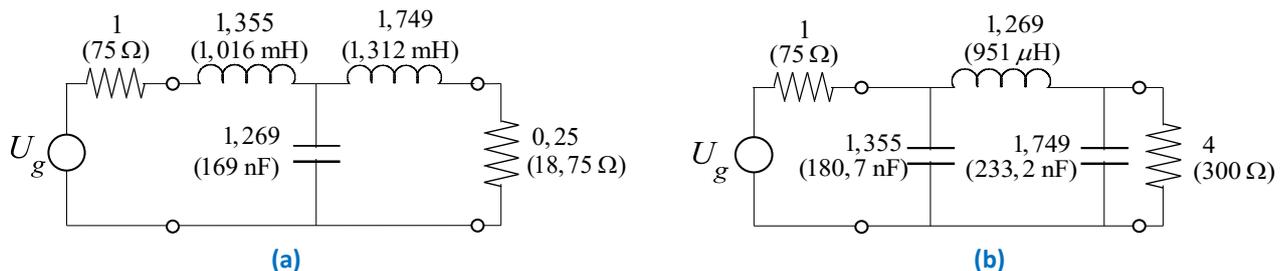
$$L_1 = \frac{R_1}{\omega_C} 0,317 = \frac{75 \cdot 0,317}{10^5} = 237,8 \mu\text{H}$$

$$C_1 = \frac{1}{\omega_C \cdot R_1} 5,42 = \frac{5,42}{10^5 \cdot 75} = 722,7 \text{ nF}$$

Y sintetizando por división continua (Cauer I) a  $Z_{1b} = Y_{1b}$  resulta:

$$Z_{1b}(s) = Y_{1b}(s) = 1,355 s + \frac{1}{1,269 s + \frac{1}{1,749 s + \frac{1}{4}}}$$

Las cuales sintetizadas resultan en los circuitos pasa bajos de la **Fig. 9.27**, en la cual indican los valores normalizados de los componentes y entre paréntesis los valores desnormalizados.



**Fig. 9.27.** Valores normalizados (y desnormalizados) de los elementos resultantes a partir de  $\rho_{1b}$ : (a) síntesis como impedancia; (b) síntesis como admitancia.

Los valores desnormalizados se obtienen desnormalizando en frecuencia respecto de  $\omega_C$ , y desnormalizando en impedancia respecto de  $R_1$  cada elemento del PBN, tal como se indica a continuación:

#### Realización de $Z_{1b}$ (Fig. 9.27a)

$$R_1 = 75 \Omega \quad R_2 = 18,75 \Omega$$

$$L_1 = \frac{R_1}{\omega_C} 1,355 = \frac{75 \cdot 1,355}{10^5} = 1,016 \text{ mH}$$

$$C_1 = \frac{1}{\omega_C \cdot R_1} 1,269 = \frac{1,269}{10^5 \cdot 75} = 169 \text{ nF}$$

$$L_2 = \frac{R_1}{\omega_C} 1,749 = \frac{75 \cdot 1,749}{10^5} = 1,312 \text{ mH}$$

#### Realización de $Y_{1b}$ (Fig. 9.27b)

$$R_1 = 75 \Omega \quad R_2 = 300 \Omega$$

$$C_1 = \frac{1}{\omega_C \cdot R_1} 1,355 = \frac{1,355}{10^5 \cdot 75} = 180,7 \text{ nF}$$

$$L_1 = \frac{R_1}{\omega_C} 1,269 = \frac{75 \cdot 1,269}{10^5} = 951 \mu\text{H}$$

$$C_1 = \frac{1}{\omega_C \cdot R_1} 1,749 = \frac{1,749}{10^5 \cdot 75} = 233,2 \text{ nF}$$

La síntesis de  $Z_{1a}$ ,  $Y_{1a}$ ,  $Z_{1b}$  e  $Y_{1b}$  se puede efectuar en Matlab mediante las siguientes líneas de código:

```

40 % --- Síntesis de Z1a(s) y de Y1a(s) por Cauer I
41 LPelems_1a = Cauer_I(NZ1a, DZ1a);
42 fprintf('Elementos de Z1a(s)=Y1a(s) del pasa bajos normalizado:\n')
43 fprintf(' %g', LPelems_1a)
44 LPelems_Z1a = Lpn2Lp(LPelems_1a, R1, fp, 'Z');
45 LPelems_Y1a = Lpn2Lp(LPelems_1a, R1, fp, 'Y');
46 fprintf('\nElementos de Z1a(s) del pasa bajos:\n')
47 fprintf([ZFmt(1:10*n), R2Fmt], LPelems_Z1a)
48 fprintf('\nElementos de Y1a(s) del pasa bajos:\n')
49 fprintf([YFmt(1:10*n), R2Fmt], LPelems_Y1a)
50 % --- Síntesis de Z1b(s) y de Y1b(s) por Cauer I
51 LPelems_1b = Cauer_I(NZ1b, DZ1b);
52 fprintf('\nElementos de Z1b(s)=Y1b(s) del pasa bajos normalizado:\n')
53 fprintf(' %g', LPelems_1b)
54 LPelems_Z1b = Lpn2Lp(LPelems_1b, R1, fp, 'Z');
55 LPelems_Y1b = Lpn2Lp(LPelems_1b, R1, fp, 'Y');
56 fprintf('\nElementos de Z1b(s) del pasa bajos:\n')
57 fprintf([ZFmt(1:10*n), R2Fmt], LPelems_Z1b)
58 fprintf('\nElementos de Y1b(s) del pasa bajos:\n')

```

```

59 fprintf([YFmt(1:10*n), R2Fmt], LPelems_Y1b)
60 fprintf('FIN\n')

```

La función `Cauer_I` empleada en las líneas 41 y 51, realiza el proceso de división polinómica continua de  $P/Q$  siendo  $P$  el polinomio cuyos coeficientes se pasan como primer parámetro (vector fila) y  $Q$  el polinomio cuyos coeficientes se pasan como segundo parámetro (vector fila). Invocándola con  $P$  igual al vector de coeficientes del numerador de  $Z$  ó  $Y$  y  $Q$  igual al vector de coeficientes del denominador de  $Z$  ó  $Y$ , retorna el vector fila con los valores de los componentes del filtro pasa bajos normalizado.

La función `Lpn2Lp` empleada en las líneas 44, 45, 54 y 55 permite transformar los elementos del prototipo pasa bajos normalizado al filtro pasa bajos desnormalizado respecto de la pulsación  $\omega_B$ .

El primer parámetro es el vector fila con los valores de los elementos del pasa bajos normalizado. El segundo parámetro es el valor de resistencia del generador que se empleará para desnormalizar en impedancia. El tercero es la frecuencia especificada (en Hz) del límite de la banda de paso del pasa bajos. El cuarto parámetro es 'Z' o 'Y' para indicar si se trata de una impedancia o una admitancia.

El parámetro de retorno es un vector fila con los valores de los componentes del pasa bajos resultante.

El código de `Cauer_I` y de `Lpn2Lp` es el siguiente:

```

78 function Elem_values = Cauer_I(P, Q)
79 % Desarrollo en división continua de la división polinómica P/Q
80 % El grado de P debe ser mayor que el grado de Q, con lo cual
81 % Elem_values, al contener el 1er coeficiente del cociente en cada
82 % paso de la división, es un vector fila donde cada elemento es el
83 % valor de un componente del pasa bajos normalizado, desarrollado
84 % por la 3ª forma canónica o Cauer I.
85 q=length(P);
86 Elem_values=zeros(1, q);
87 for i=1:q-1
88     [Ci, R]=deconv(P,Q); %División polinómica
89     Elem_values(i)=Ci(1); % Se agrega el 1er coef. del cociente
90     P=Q; % El divisor pasa a ser dividendo
91     Q=R(find(abs(R)>1e-4,1):end); % El resto pasa a ser divisor
92 end
93 Elem_values(q)=Ci(2); % El 2º coef del último cociente será R2
94 % ó G2, correspondiendo a la misma
95 % instancia (Z o Y) del ultimo elemento
96 end
97 function LPvalues = Lpn2Lp(LPNvalues, Rg, fB, ZY)
98 len=length(LPNvalues);
99 elem = zeros(1, len);
100 % --- Desnormalizar en frecuencia y en impedancia cada elemento
101 if strcmpi(ZY, 'Y')
102     for q=1 : len-1
103         if rem(q, 2)==1 % si q es impar es una C del pasa bajos
104             elem(q)=LPNvalues(q)/(2*pi*fB)/Rg;
105         else % si q es par es una L del pasa bajos
106             elem(q)=LPNvalues(q)/(2*pi*fB)*Rg;
107         end
108     end
109     if rem(len-1, 2)==1 % si el último elemento del pasa bajos
110         % es un capacitor, el último valor es una
111         % conductancia
112         elem(end)=Rg/LPNvalues(end);
113     else
114         elem(end)=LPNvalues(end)*Rg;
115     end
116 else
117     for q=1 : len-1
118         if rem(q, 2)==1 % si q es impar es una L del pasa bajos
119             elem(q)=LPNvalues(q)/(2*pi*fB)*Rg;
120         else % si q es par es una C del pasa bajos
121             elem(q)=LPNvalues(q)/(2*pi*fB)/Rg; % C del BR
122         end
123     end

```

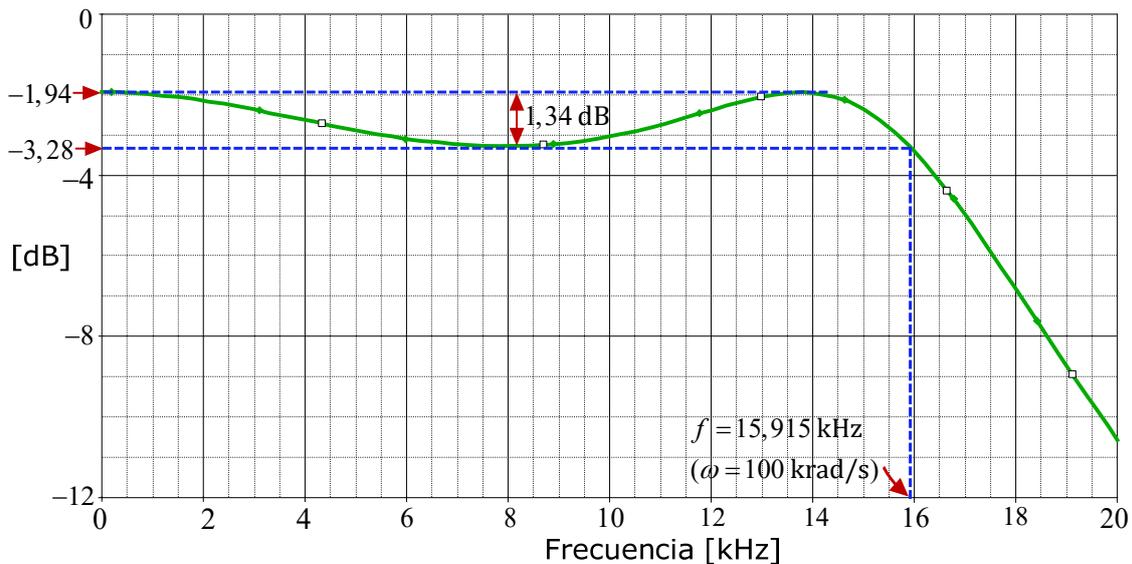
```

124     if rem(len-1, 2)==1 % si el último elemento del pasa bajos
125         % es un inductor, el último valor es una
126         % resistencia
127         elem(end)=LPNvalues(end)*Rg;
128     else
129         elem(end)=Rg/LNPvalues(end);
130     end
131 end
132 LPvalues=elem;
133 end
134 end % Chebyshev_Pasa_Bajos

```

### Simulación:

Empleando los valores finales obtenidos para los componentes (desnormalizados), se obtiene la curva de transferencia que se muestra en la **Fig. 9.28**.



**Fig. 9.28.** Característica  $|H(j\omega)|$  sintetizada: cumplimiento de las especificaciones en la banda de paso.

Cabe destacar que la curva de transferencia dibujada es  $|U_2/U_g|$  y no  $|U_2/U_{20}|$ . Por lo tanto hay que tener en cuenta que la relación entre ambas (por simple inspección de los circuitos) resulta:

$$\left| \frac{U_2}{U_{20}} \right| = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \left| \frac{U_2}{U_g} \right|$$

Es decir, la corrección que hay que aplicarle a la gráfica para obtener la relación  $|U_2/U_{20}|$  sería:

$$20 \log \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 20 \log \frac{375}{300} = +1,94 \text{ dB}$$

El valor para frecuencia cero de  $|U_2/U_g|$  es:

$$\left| \frac{U_2}{U_g} \right|_{\omega \rightarrow 0} = 20 \log \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 20 \log \frac{300}{375} = -1,94 \text{ dB}$$

y como las variaciones dentro de la banda de paso ( $f \leq 15,915 \text{ kHz}$ ;  $\omega \leq 100 \text{ krad/s}$ ) llegan hasta  $-3,28 \text{ dB}$ , queda comprobado que la atenuación en la banda de paso especificada no se aparta en más de  $1,34 \text{ dB}$  respecto de su valor para frecuencias bajas, tal como se requería.

El cumplimiento de los requisitos para la banda de atenuación se verifica en la **Fig. 9.29**.

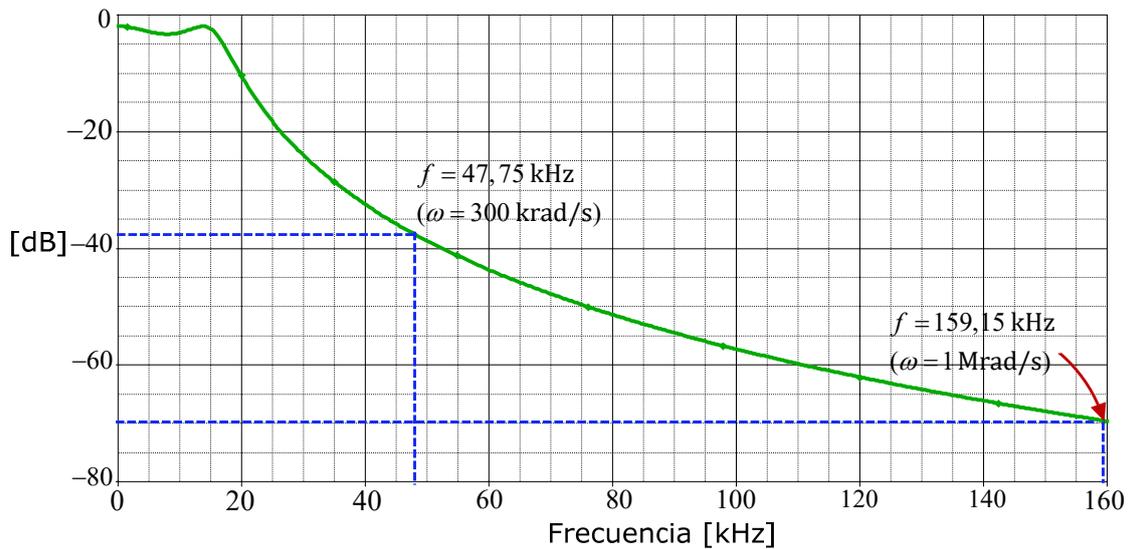


Fig. 9.29. Característica  $|H(j\omega)|$  sintetizada: cumplimiento de las especificaciones en la banda de atenuación.

### Ejemplo 9.8.

Diseñar un filtro *pasa altos* que estará alimentado por un generador de resistencia  $R_1=50 \Omega$  y cargado con una resistencia  $R_2=300 \Omega$ . La relación  $|U_2/U_{20}|$  debe responder a la aproximación de *Chebyshev*, no debiendo apartarse en más de 1,4 dB respecto de su valor para frecuencias muy elevadas en el intervalo  $f \geq f_B$  siendo  $f_B=5 \text{ kHz}$ . Se requiere que la atenuación a 2 kHz sea mayor a 30 dB.

### Resolución:

#### (1) Transformar las especificaciones al dominio del filtro *pasa bajos equivalente*

Se aplica la transformación pasa altos-pasa bajos:

$$\bar{s} = \frac{1}{s}$$

donde  $\bar{s}$  es la frecuencia compleja en el dominio del pasa bajos y  $s$  la frecuencia compleja en el dominio del pasa altos. En el prototipo pasa bajos equivalente resulta:

$$\bar{\omega}_p = \frac{1}{2\pi f_p} = \frac{1}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^3} = 3,183 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

$$\bar{\omega}_s = \frac{1}{2\pi f_s} = \frac{1}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^3} = 7,958 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

Entonces las especificaciones en el dominio del pasa bajos equivalente resultan:

- Banda de paso:  
 $\bar{\omega}_p = 3,183 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$     y     $\alpha_p = 1,4 \text{ dB}$
- Banda de atenuación:  
 $\bar{\omega}_s = 7,958 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$     y     $\alpha_s = 30 \text{ dB}$

Este paso del proceso se puede efectuar en Matlab mediante las siguientes líneas de código:

```
01 function Chebyshev_Pasa_Altos
02 %% Bloque Principal
03 clc
04 ZFmt=[ '   C1=%g\n   L1=%g\n   C2=%g\n   L2=%g\n   C3=%g\n   L3=%g\n' ...
05       '   C4=%g\n   L4=%g\n   C5=%g\n   L5=%g\n   C6=%g\n   L6=%g\n' ...
06       '   C7=%g\n   L7=%g\n   C8=%g\n   L8=%g\n   C9=%g\n   L9=%g\n'];
07 YFmt=[ '   L1=%g\n   C1=%g\n   L2=%g\n   C2=%g\n   L3=%g\n   C3=%g\n' ...
08       '   L4=%g\n   C4=%g\n   L5=%g\n   C5=%g\n   L6=%g\n   C6=%g\n' ...
09       '   L7=%g\n   C7=%g\n   L8=%g\n   C8=%g\n   L9=%g\n   C9=%g\n'];
10 R2Fmt='   R2=%g\n';
11 % Datos del caso
12 R1=50; R2=300;
13 wpHP=2*pi*5*10^3; wsHP=2*pi*2*10^3;
```

```

14  alfa_p=1.4;  alfa_s=30;
15  % Transformar la especificación al dominio del pasa bajos equivalente
16  wsLP=1/wsHP;  wpLP=1/wpHP;
    
```

En las líneas 4 a 10 se definen formatos usados para mostrar los resultados en la ventana de comandos de Matlab.

**(2) Calcular los parámetros de diseño  $\epsilon$  y  $n$  del pasa bajos equivalente con la aproximación de *Chebyshev***

El coeficiente de ondulación  $\epsilon$  se obtiene a partir de la especificación de la máxima atenuación admitida en la banda de paso. La *atenuación máxima* en la banda de paso expresada en dB se corresponderá con los valores máximos de  $V_n(\omega)$  en la banda de paso, es decir:  $V_n(\omega)=1$ . En consecuencia:

$$\alpha_p = 10 \log(1 + \epsilon^2) \quad \Rightarrow \quad \epsilon = \sqrt{10^{0,1 \cdot \alpha_p} - 1} = \sqrt{10^{0,1 \cdot 1,4} - 1} = 0,6168$$

Por otra parte, a partir de la *atenuación mínima* admitida a una determinada frecuencia  $\omega_H$  en la banda de atenuación:

$$A\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right) = 10 \log \left\{ 1 + \left[ \epsilon \cosh \left( n \cosh^{-1} \frac{\omega_s}{\omega_p} \right) \right]^2 \right\} \geq \alpha_s$$

Puede obtenerse:

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{0,1 \cdot \alpha_s} - 1}{10^{0,1 \cdot \alpha_p} - 1}}}{\cosh^{-1} \left( \frac{\omega_s}{\omega_p} \right)} = \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{0,1 \cdot 30} - 1}{10^{0,1 \cdot 1,4} - 1}}}{\cosh^{-1} \left( \frac{7,958 \cdot 10^{-5}}{3,183 \cdot 10^{-5}} \right)} = 2,955$$

Es decir con la aproximación de *Chebyshev* el  $n$  que se debería adoptar es 3, y por lo tanto los componentes requeridos para implementar el filtro pasa altos serían 3.

Este paso del proceso se puede efectuar en Matlab mediante las siguientes líneas de código:

```

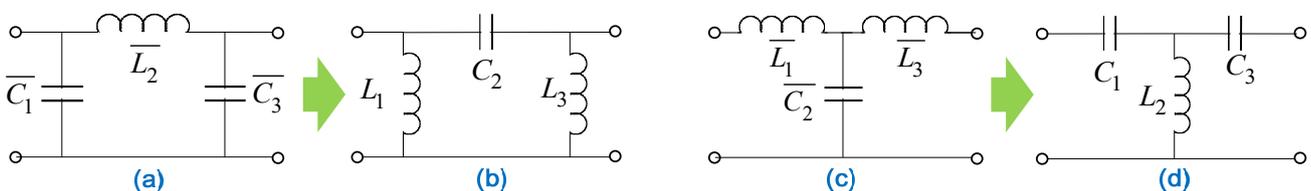
17  % Calcular los parámetros del diseño
18  eps=sqrt(10^(alfa_p/10)-1);
19  n_real=acosh(sqrt(10^(alfa_s/10)-1)/sqrt(10^(alfa_p/10)-1))/acosh(wsLP/wpLP);
20  n=ceil(n_real);
    
```

**(3) Obtener  $\rho_1(s)$  para un filtro pasa bajos *normalizado* con los parámetros  $\epsilon$  y  $n$ .**

Habría 4 realizaciones posibles: 2 como impedancia (una con  $\rho_{1a}(s)$  y otra con  $\rho_{1b}(s)$ ) y 2 como admitancia (una con  $\rho_{1a}(s)$  y otra con  $\rho_{1b}(s)$ ).

El filtro pasa bajos de orden 3, desarrollado como admitancia tendrá la topología indicada en la **Fig. 9.30a** y el pasa altos resultante la indicada en la **Fig. 9.30b**. Desarrollado como impedancia tendrá la topología indicada en la **Fig. 9.30c**, y el pasa altos resultante la indicada en la **Fig. 9.30d**.

En cualquier caso, el número de elementos necesarios es 3. En un caso de diseño real, serán los valores obtenidos para estos componentes los que determinen el circuito más adecuado.



**Fig. 9.30.** Topologías posibles: **(a)** PBN sintetizado como admitancia; **(b)** pasa altos transformado a partir de (a); **(c)** PBN sintetizado como impedancia; **(d)** pasa altos transformado a partir de (c).

Entonces ahora se puede escribir la expresión de  $|\rho_1(s)|^2$  para lo cual se requiere determinar:

$$t = \frac{4R_1R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{4 \cdot 50 \cdot 300}{(50 + 300)^2} = 0,49$$

Y aplicando la aproximación de Chebyshev de orden 3 para el filtro pasa bajos normalizado respecto de  $\omega_p = 3,183 \cdot 10^{-5}$  rad/s resulta:

$$|\rho_1(s)|^2 = 1 - t \left| \frac{U_2}{U_{20}}(s) \right|^2 = 1 - t \frac{1}{1 + \varepsilon^2 V_n^2(\omega)} \Big|_{\omega=s/j} = \frac{1 + \varepsilon^2 V_n^2(s) - t}{1 + \varepsilon^2 V_n^2(s)} = \frac{(1-t) + \varepsilon^2 V_n^2(s)}{1 + \varepsilon^2 V_n^2(s)}$$

Observar que tanto numerador como denominador tienen la misma forma ( $t < 1$ ). En este caso tanto los polos como los ceros de  $|\rho_1(s)|^2$  serán complejos de la forma:

$$s_k = \alpha_k + j\beta_k$$

Donde  $\alpha_k$  está dada por (7-48) y  $\beta_k$  por (7-49), con lo cual los polos se obtienen considerando  $A=1$ :

$$\alpha_{kp} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left( k \frac{\pi}{6} \right) \left[ \left( \sqrt{\frac{1}{0,617^2} + 1} + \frac{1}{0,617} \right)^{1/3} - \left( \sqrt{\frac{1}{0,617^2} + 1} + \frac{1}{0,617} \right)^{-1/3} \right]$$

$$\beta_{kp} = \frac{1}{2} \operatorname{cos} \left( k \frac{\pi}{6} \right) \left[ \left( \sqrt{\frac{1}{0,617^2} + 1} + \frac{1}{0,617} \right)^{1/3} + \left( \sqrt{\frac{1}{0,617^2} + 1} + \frac{1}{0,617} \right)^{-1/3} \right]$$

$$k = 1, 3, 5, 4n-1$$

Y para obtener los ceros, se considera:

$$A = 1 - t = 1 - 0,49 = 0,51 \quad \text{y} \quad \sqrt{A} = 0,714$$

$$\alpha_{kz} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left( k \frac{\pi}{6} \right) \left[ \left( \sqrt{\frac{0,51}{0,617^2} + 1} + \frac{0,714}{0,617} \right)^{1/3} - \left( \sqrt{\frac{0,51}{0,617^2} + 1} + \frac{0,714}{0,617} \right)^{-1/3} \right]$$

$$\beta_{kz} = \frac{1}{2} \operatorname{cos} \left( k \frac{\pi}{6} \right) \left[ \left( \sqrt{\frac{0,51}{0,617^2} + 1} + \frac{0,714}{0,617} \right)^{1/3} + \left( \sqrt{\frac{0,51}{0,617^2} + 1} + \frac{0,714}{0,617} \right)^{-1/3} \right]$$

$$k = 1, 3, 5, 4n-1$$

Es decir

- Los polos de  $|\rho_1(s)|^2$  son 6:  
 $\pm 0,432555$  ;  $-0,216277 \pm j 0,943572$  ;  $+0,216277 \pm j 0,943572$   
 y se encuentran ubicados sobre una elipse de semieje menor 0,43255 sobre el eje real.
- Los ceros de  $|\rho_1(s)|^2$  también son 6:  
 $\pm 0,335634$  ;  $-0,167817 \pm j 0,913503$  ;  $+0,167817 \pm j 0,913503$   
 y se encuentran ubicados sobre una elipse de semieje menor 0,335634 sobre el eje real.

Determinación de las raíces de las singularidades de  $|\rho_1(s)|^2$

Se obtienen dos soluciones posibles:

a) Considerando los polos de  $|\rho_1(s)|^2$  ubicados en el SPI y los ceros de  $|\rho_1(s)|^2$  ubicados en el SPI.

$$\rho_{1a}(s) = \frac{[s - (-0,335634)][s - (-0,167817 + j0,913503)][s - (-0,167817 - j0,913503)]}{[s - (-0,432555)][s - (-0,216277 + j0,943572)][s - (-0,216277 - j0,943572)]}$$

$$\rho_{1a}(s) = \frac{s^3 + 0,671268s^2 + 0,9753s + 0,289535}{s^3 + 0,86511s^2 + 1,12421s + 0,405349}$$

b) Considerando los polos de  $|\rho_1(s)|^2$  ubicados en el SPI y los ceros de  $|\rho_1(s)|^2$  ubicados en el SPD.

$$\rho_{1b}(s) = \frac{(s - 0,335634)[s - (0,167817 + j0,913503)][s - (0,167817 - j0,913503)]}{[s - (-0,432555)][s - (-0,216277 + j0,943572)][s - (-0,216277 - j0,943572)]}$$

$$\rho_{1b}(s) = \frac{s^3 - 0,671268s^2 + 0,9753s - 0,289535}{s^3 + 0,86511s^2 + 1,12421s + 0,405349}$$

Este paso del proceso se puede efectuar en Matlab mediante las siguientes líneas de código:

```
21 % --- Obtención de las 2 expresiones de rho1(s)
22 t=4*R1*R2/(R1+R2)^2;
23 sZa=Roots_Cheby(1-t, eps, n, 'SPI')
```

```

24 sZb=Roots_Cheby(1-t, eps, n, 'SPD')
25 sPs=Roots_Cheby(1, eps, n, 'SPI')
26 [Ns1a, Ds1a]=zp2tf(sZa, sPs, 1);
27 rho1a=tf(Ns1a, Ds1a)
28 [Ns1b, Ds1b]=zp2tf(sZb, sPs, 1);
29 rho1b=tf(Ns1b, Ds1b)

```

La función `Roots_Cheby` permite obtener las raíces  $s_k = \alpha_k + j\beta_k$  mediante las expresiones (7-48) y (7-49), tanto para el numerador de  $|\rho_1(s)|^2$  como para el denominador. El primer parámetro es  $1-t$  para las raíces del numerador y 1 para las del denominador. El cuarto parámetro es 'SPI' o 'SPD' para indicar que se desean las raíces del semiplano izquierdo o del semiplano derecho. El código de `Roots_Cheby` es el siguiente:

```

59 %% ===== Funciones Internas =====
60 function Roots_Array = Roots_Cheby(A, eps, n, SP)
61 % Obtención de las raíces de la expresión
62 % A + eps^2 Vn(s)^2 = 0
63 % A = 1-t para los ceros de |rho1(s)|^2 y A=1 para los polos
64 % SP es el semiplano donde están las raíces (puede ser 'SPI' ó 'SPD')
65 % Roots_Array es el vector con las n raíces ubicadas en SP
66 k=1:n;
67 if strcmp(SP, 'SPI'), k=n+1:2*n; end
68 alfa_Array = 0.5*sin((2*k-1)*pi/2/n)* ...
69 ( sqrt(A/eps^2+1)+sqrt(A)/eps)^(1/n) - ...
70 ( sqrt(A/eps^2+1)+sqrt(A)/eps)^(-1/n) );
71 beta_Array = 0.5*cos((2*k-1)*pi/2/n)* ...
72 ( sqrt(A/eps^2+1)+sqrt(A)/eps)^(1/n) + ...
73 ( sqrt(A/eps^2+1)+sqrt(A)/eps)^(-1/n) );
74 Roots_Array=(alfa_Array+1i*beta_Array)';
75 end

```

#### (4) Obtener las Impedancias y Admitancias de entrada

a) Considerando los polos de  $|\rho_1(s)|^2$  ubicados en el SPI y los ceros de  $|\rho_1(s)|^2$  ubicados en el SPI, y normalizando impedancias respecto de  $R_1$  y admitancias respecto de  $G_1$ , resulta:

$$Z_{1a}(s) = R_1 \left( \frac{1 - \rho_{1a}(s)}{1 + \rho_{1a}(s)} \right)^{\pm 1} \Rightarrow Z_{1a}(s) = \left( \frac{1 - \rho_{1a}(s)}{1 + \rho_{1a}(s)} \right)^{\pm 1}$$

$$Y_{1a}(s) = G_1 \left( \frac{1 + \rho_{1a}(s)}{1 - \rho_{1a}(s)} \right)^{\pm 1} \Rightarrow Y_{1a}(s) = \left( \frac{1 + \rho_{1a}(s)}{1 - \rho_{1a}(s)} \right)^{\pm 1}$$

Como se está sintetizando un filtro pasa bajos de orden 3, es necesario realizar 3 ceros de transmisión en infinito, lo que se consigue removiendo 3 polos de  $Z_{1a}$  o  $Y_{1a}$  en infinito (Cauer I).

Es decir que con esta alternativa de ubicación de los ceros de  $\rho_1(s)$  para  $Z_{1a}$  hay que considerar el exponente (-1) y para  $Y_{1a}$  hay que considerarlo (+1). Entonces resulta:

$$Z_{1a}(s) = Y_{1a}(s) = \frac{1 + \rho_{1a}(s)}{1 - \rho_{1a}(s)} = \frac{1 + \frac{s^3 + 0,671268s^2 + 0,9753s + 0,289535}{s^3 + 0,86511s^2 + 1,12421s + 0,405349}}{1 - \frac{s^3 + 0,671268s^2 + 0,9753s + 0,289535}{s^3 + 0,86511s^2 + 1,12421s + 0,405349}}$$

$$Z_{1a}(s) = Y_{1a}(s) = \frac{s^3 + 0,768189s^2 + 1,04976s + 0,347442}{0,096921s^2 + 0,074455s + 0,057907}$$

b) Considerando los polos de  $|\rho_1(s)|^2$  ubicados en el SPI y los ceros de  $|\rho_1(s)|^2$  ubicados en el SPD, y normalizando impedancias respecto de  $R_1$  y admitancias respecto de  $G_1$ , resulta:

$$Z_{1b}(s) = R_1 \left( \frac{1 - \rho_{1b}(s)}{1 + \rho_{1b}(s)} \right)^{\pm 1} \Rightarrow Z_{1b}(s) = \left( \frac{1 - \rho_{1b}(s)}{1 + \rho_{1b}(s)} \right)^{\pm 1}$$

$$Y_{1b}(s) = G_1 \left( \frac{1 + \rho_{1b}(s)}{1 - \rho_{1b}(s)} \right)^{\pm 1} \Rightarrow Y_{1b}(s) = \left( \frac{1 + \rho_{1b}(s)}{1 - \rho_{1b}(s)} \right)^{\pm 1}$$

Como se está sintetizando un filtro pasa bajos de orden 3, es necesario realizar 3 ceros de transmisión en infinito, lo que se consigue removiendo 3 polos de  $Z_{1b}$  o  $Y_{1b}$  en infinito (Cauer I).

Es decir que con esta alternativa de ubicación de los ceros de  $\rho_1(s)$  para  $Z_{1b}$  hay que considerarlo el exponente (-1) y para  $Y_{1b}$  hay que considerarlo (+1). Entonces resulta:

$$Z_{1b}(s) = Y_{1b}(s) = \frac{1 + \rho_{1b}(s)}{1 - \rho_{1b}(s)} = \frac{1 + \frac{s^3 - 0,671268s^2 + 0,9753s - 0,289535}{s^3 + 0,86511s^2 + 1,12421s + 0,405349}}{1 - \frac{s^3 - 0,671268s^2 + 0,9753s - 0,289535}{s^3 + 0,86511s^2 + 1,12421s + 0,405349}}$$

$$Z_{1b}(s) = Y_{1b}(s) = \frac{s^3 + 0,096921s^2 + 1,04976s + 0,057907}{0,768189s^2 + 0,074455s + 0,347442}$$

Esta determinación se puede efectuar en Matlab mediante las siguientes líneas de código:

```

30 % --- Obtención del Z1a(s)=Y1a(s) normalizadas respecto de R1
31 NZ1a=Ds1a+Nsls; NZ1a=NZ1a(find(abs(NZ1a)>1e-4,1):end);
32 DZ1a=Ds1a-Nsls; DZ1a=DZ1a(find(abs(DZ1a)>1e-4,1):end);
33 Z1a=tf(NZ1a, DZ1a)
34 % --- Obtención del Z1b(s)=Y1b(s) normalizadas respecto de R1
35 NZ1b=Ds1b+Nslb; NZ1b=NZ1b(find(abs(NZ1b)>1e-4,1):end);
36 DZ1b=Ds1b-Nslb; DZ1b=DZ1b(find(abs(DZ1b)>1e-4,1):end);
37 Z1b=tf(NZ1b, DZ1b)
    
```

El propósito de la segunda asignación en las líneas 31, 32, 35 y 36 es eliminar en los vectores NZ1a, DZ1a, NZ1b y DZ1b los elementos de valor 0 (para no considerar en los respectivos polinomios los términos con coeficiente nulo).

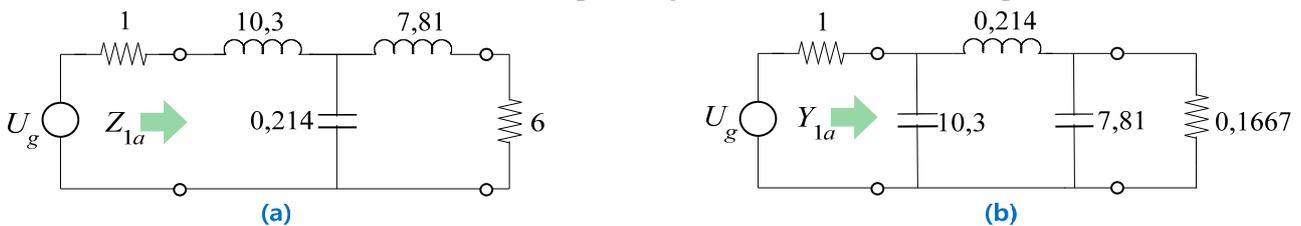
**(5) Sintetizar las Impedancias y Admitancias de entrada**

Como los ceros de transmisión se encuentran en infinito, se requiere remover polos en infinito (3ª forma canónica o 1ª forma de Cauer). Es decir que resultarán 4 formas posibles de configuración, dos como impedancias  $Z_{1a}$  y  $Z_{1b}$  y otras dos como admitancias:  $Y_{1a}$  y  $Y_{1b}$ .

Aplicando Cauer I y resolviendo por división continua, para  $Z_{1a} = Y_{1a}$  resulta:

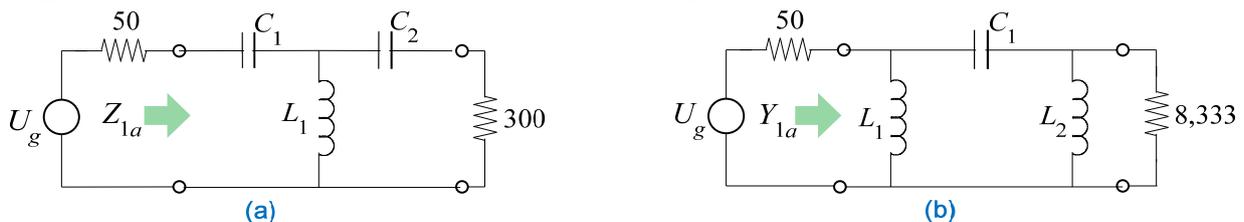
$$Z_{1a}(s) = Y_{1a}(s) = 10,3 s + \frac{1}{0,21 s + \frac{1}{7,8 s + 6}}$$

Las cuales sintetizadas resultan en los circuitos pasa bajos normalizados de la **Fig. 9.31**.



**Fig. 9.31.** Circuitos PBN resultantes a partir de  $\rho_{1a}$ : (a) síntesis como impedancia; (b) síntesis como admitancia.

En la **Fig. 9.32** se muestran los correspondientes circuitos pasa altos.



**Fig. 9.32.** Filtro pasa altos transformando el PBN obtenido a partir de  $\rho_{1a}$ : (a) síntesis como impedancia; (b) síntesis como admitancia.

Los valores desnormalizados se obtienen aplicando la transformación pasa bajos normalizado-pasa altos, y desnormalizando en impedancia respecto de  $R_1$  cada elemento del PBN, tal como se indica a continuación:

**Realización de  $Z_{1a}$  (Fig. 9.32a)**

$$R_1=50 \Omega \quad R_2=300 \Omega$$

$$C_1 = \frac{1}{\omega_c \cdot R_1 \cdot 10,3} = \frac{1}{\pi \cdot 10^4 \cdot 50 \cdot 10,3} = 61,71 \text{ nF}$$

$$L_1 = \frac{R_1}{\omega_c \cdot 0,214} = \frac{50}{\pi \cdot 10^4 \cdot 0,214} = 7,43 \text{ mH}$$

$$C_2 = \frac{1}{\omega_c \cdot R_1 \cdot 7,81} = \frac{1}{\pi \cdot 10^4 \cdot 50 \cdot 7,81} = 81,5 \text{ nF}$$

**Realización de  $Y_{1a}$  (Fig. 9.32b)**

$$R_1=50 \Omega \quad R_2=8,333 \Omega$$

$$L_1 = \frac{R_1}{\omega_c \cdot 10,3} = \frac{50}{\pi \cdot 10^4 \cdot 10,3} = 154,3 \text{ mH}$$

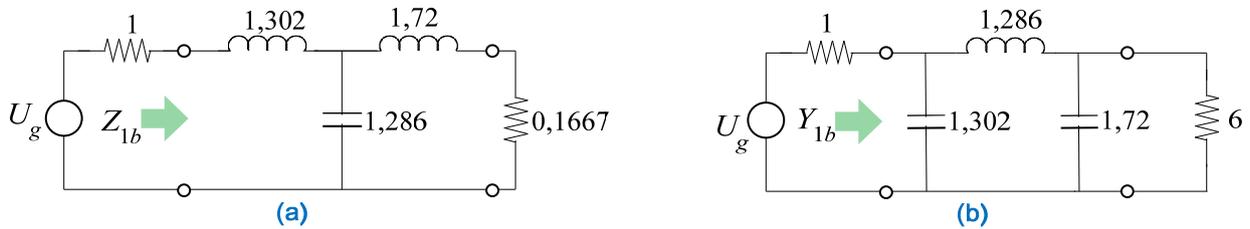
$$C_1 = \frac{1}{\omega_c \cdot R_1 \cdot 0,214} = \frac{1}{\pi \cdot 10^4 \cdot 50 \cdot 0,214} = 2,97 \mu\text{F}$$

$$L_2 = \frac{R_1}{\omega_c \cdot 7,81} = \frac{50}{\pi \cdot 10^4 \cdot 7,81} = 20,38 \text{ mH}$$

Y sintetizando por división continua (Cauer I) a  $Z_{1b} = Y_{1b}$  resulta:

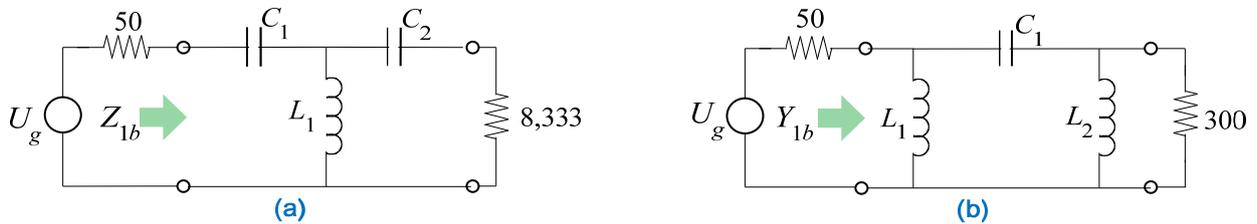
$$Z_{1b}(s) = Y_{1b}(s) = 1,30176 s + \frac{1}{1,28574 s + \frac{1}{1,71962 s + \frac{1}{6}}}$$

Cuya síntesis resultan en los circuitos pasa bajos normalizados que se muestran en la Fig. 9.33.



**Fig. 9.33.** Valores de los elementos del PBN resultantes a partir de  $\rho_{1b}$ : (a) síntesis como impedancia; (b) síntesis como admitancia.

En la Fig. 9.34 se muestran los correspondientes circuitos pasa altos,



**Fig. 9.34.** Filtro pasa altos transformando el PBN obtenido a partir de  $\rho_{1b}$ : (a) síntesis como impedancia; (b) síntesis como admitancia.

Los valores desnormalizados se obtienen aplicando la transformación pasa bajos normalizado-pasa altos, y desnormalizando en impedancia respecto de  $R_1$  cada elemento del PBN, tal como se indica a continuación:

**Realización de  $Z_{1b}$  (Fig. 9.34-a)**

$$R_1=50 \Omega \quad R_2=8,333 \Omega$$

$$C_1 = \frac{1}{\omega_c \cdot R_1 \cdot 1,302} = \frac{1}{\pi \cdot 10^4 \cdot 50 \cdot 1,302} = 489 \text{ nF}$$

$$L_1 = \frac{R_1}{\omega_c \cdot 1,286} = \frac{50}{\pi \cdot 10^4 \cdot 1,286} = 1,24 \text{ mH}$$

$$C_2 = \frac{1}{\omega_c \cdot R_1 \cdot 1,72} = \frac{1}{\pi \cdot 10^4 \cdot 50 \cdot 1,72} = 370 \text{ nF}$$

**Realización de  $Y_{1b}$  (Fig. 9.34-b)**

$$R_1=50 \Omega \quad R_2=300 \Omega$$

$$L_1 = \frac{R_1}{\omega_c \cdot 1,302} = \frac{50}{\pi \cdot 10^4 \cdot 1,302} = 1,223 \text{ mH}$$

$$C_1 = \frac{1}{\omega_c \cdot R_1 \cdot 1,286} = \frac{1}{\pi \cdot 10^4 \cdot 50 \cdot 1,286} = 495 \text{ nF}$$

$$L_2 = \frac{R_1}{\omega_c \cdot 1,72} = \frac{50}{\pi \cdot 10^4 \cdot 1,72} = 925 \mu\text{H}$$

La síntesis de  $Z_{1a}$ ,  $Y_{1a}$ ,  $Z_{1b}$  e  $Y_{1b}$  se puede efectuar en Matlab mediante las siguientes líneas de código:

```
38 % --- Síntesis de Z1a(s) y de Y1a(s) por Cauer I
39 LPelems_1a = Cauer_I(NZ1a, DZ1a);
```

```

40 fprintf('Elementos de Z1a(s)=Y1a(s) del pasa bajos:\n')
41 fprintf('  %g', LPelems_1a)
42 HPelems_Z1a = Lp2Hp(LPelems_1a, R1, fpHP, 'Z');
43 HPelems_Y1a = Lp2Hp(LPelems_1a, R1, fpHP, 'Y');
44 fprintf('\nElementos de Z1a(s) del pasa altos:\n')
45 fprintf([ZFmt(1:10*n), R2Fmt], HPelems_Z1a)
46 fprintf('\nElementos de Y1a(s) del pasa altos:\n')
47 fprintf([YFmt(1:10*n), R2Fmt], HPelems_Y1a)
48 % --- Síntesis de Z1b(s) y de Y1b(s) por Cauer I
49 LPelems_1b = Cauer_I(NZ1b, DZ1b);
50 fprintf('\nElementos de Z1b(s)=Y1b(s) del pasa bajos:\n')
51 fprintf('  %g', LPelems_1b)
52 HPelems_Z1b = Lp2Hp(LPelems_1b, R1, fpHP, 'Z');
53 HPelems_Y1b = Lp2Hp(LPelems_1b, R1, fpHP, 'Y');
54 fprintf('\nElementos de Z1b(s) del pasa altos:\n')
55 fprintf([ZFmt(1:10*n), R2Fmt], HPelems_Z1b)
56 fprintf('\nElementos de Y1b(s) del pasa altos:\n')
57 fprintf([YFmt(1:10*n), R2Fmt], HPelems_Y1b)
58 fprintf('FIN\n')

```

La función `Cauer_I` empleada en las líneas 39 y 49, realiza el proceso de división polinómica continua de  $P/Q$  siendo  $P$  el polinomio cuyos coeficientes se pasan como primer parámetro (vector fila) y  $Q$  el polinomio cuyos coeficientes se pasan como segundo parámetro (vector fila). Invocándola con  $P$  igual al vector de coeficientes del numerador de  $Z$  ó  $Y$  y  $Q$  igual al vector de coeficientes del denominador de  $Z$  ó  $Y$ , retorna el vector fila con los valores de los componentes del filtro pasa bajos normalizado.

El código de `Cauer_I` es el siguiente:

```

76 function Elem_values = Cauer_I(P, Q)
77 % Desarrollo en división continua de la división polinómica P/Q
78 % El grado de P debe ser mayor que el grado de Q, con lo cual
79 % Elem_values, al contener el primer coeficiente del cociente en cada
80 % paso de la división, es un vector fila donde cada elemento es el
81 % valor de un componente del pasa bajos normalizado, desarrollado por
82 % la 3ª forma canónica o Cauer I.
83 q=length(P);
84 Elem_values=zeros(1, q);
85 for i=1:q-1
86     [Ci, R]=deconv(P,Q); %División polinómica
87     Elem_values(i)=Ci(1); % Se agrega el 1er coef. del cociente
88     P=Q; % El divisor pasa a ser dividendo
89     Q=R(find(abs(R)>1e-4,1):end); % El resto pasa a ser divisor
90 end
91 Elem_values(q)=Ci(2); % El 2º coef del último cociente será R2
92 % ó G2, correspondiendo a la misma
93 % instancia del ultimo elemento
94 end

```

La función `Lp2Hp` empleada en las líneas 42, 43, 52 y 53 permite transformar los elementos del prototipo pasa bajos normalizado al filtro pasa altos desnormalizado, aplicando la transformación pasa bajos – pasa altos con desnormalización  $\bar{s} = \omega_p/s$ .

El primer parámetro es el vector fila con los valores de los elementos del pasa bajos normalizado. El segundo parámetro es el valor de resistencia del generador que se empleará para desnormalizar en impedancia. El tercero es la frecuencia del límite de la banda de paso del pasa altos. El cuarto parámetro es 'Z' o 'Y' para indicar si se trata de una impedancia o una admitancia.

El parámetro de retorno es un vector fila con los valores de los componentes del pasa altos desnormalizado.

El código de `Lp2Hp` es el siguiente:

```

95 function HPvalues = Lp2Hp(LPvalues, Rg, fBhp, ZY)
96     len=length(LPvalues);
97     elem=zeros(1, len);
98     % --- Desnormalizar en frecuencia y en impedancia cada elemento
99     if strcmpi(ZY, 'Y')
100         for q=1 : len-1

```

```

102         if rem(q, 2)==1 % si q es impar es una C del pasa bajos
103             elem(q)=LPvalues(q)^(-1)/(2*pi*fBhp)*Rg; % L del PA
104         else % si q es par es una L del pasa bajos
105             elem(q)=LPvalues(q)^(-1)/(2*pi*fBhp)/Rg; % C del PA
106         end
107     end
108     if rem(len-1, 2)==1 % si el último elemento del pasa bajos
109         % es un capacitor, el último valor es una
110         % conductancia
111         elem(end)=Rg/LPvalues(end);
112     else
113         elem(end)=LPvalues(end)*Rg;
114     end
115 else
116     for q=1 : len-1
117         if rem(q, 2)==1 % si q es impar es una L del pasa bajos
118             elem(q)=LPvalues(q)^(-1)/(2*pi*fBhp)/Rg; % C del PA
119         else % si q es par es una C del pasa bajos
120             elem(q)=LPvalues(q)^(-1)/(2*pi*fBhp)*Rg; % L del PA
121         end
122     end
123     if rem(len-1, 2)==1 % si el último elemento del pasa bajos
124         % es un inductor, el último valor es una
125         % resistencia
126         elem(end)=LPvalues(end)*Rg;
127     else
128         elem(end)=Rg/LPvalues(end);
129     end
130 end
131 HPvalues=elem;
132 end
133 end % Chebyshev_Pasa_Altos

```

### Conclusiones:

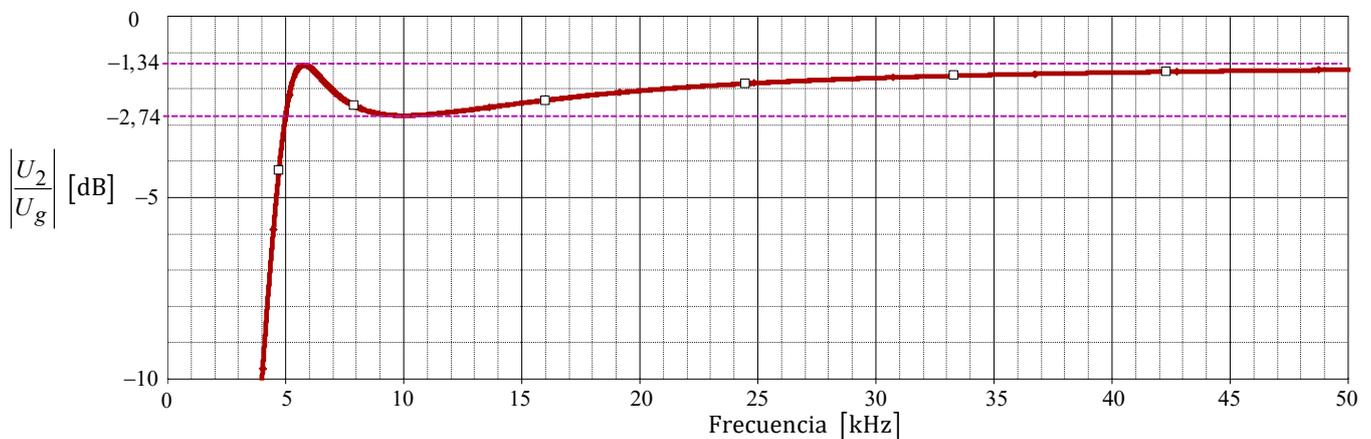
Se observa que sólo dos de las realizaciones  $Z_{1a}$  e  $Y_{1b}$  cumplen con las especificaciones de pérdidas de inserción y las impedancias de generador y de carga especificadas.

Las realizaciones  $Y_{1a}$  y  $Z_{1b}$  cumplen con la especificación de las pérdidas de inserción pero no cumplen con la especificación de la resistencia de carga  $R_2$ , a no ser que se disponga de un transformador para adaptar la resistencia de carga  $R_2$ .

Si hubiese sido  $R_1=R_2$ , las cuatro realizaciones hubieran cumplido con los datos especificados, sin necesidad de transformador.

### Simulación:

Empleando los valores finales obtenidos para los componentes (desnormalizados), se obtiene la curva de transferencia que se muestra en la **Fig. 9.35**.



**Fig. 9.35.** Característica  $|H(j\omega)|$  sintetizada: cumplimiento de las especificaciones en la banda de paso.

Otra vez la curva de transferencia dibujada es  $|U_2/U_g|$  y no  $|U_2/U_{20}|$ . Entonces hay que tener en cuenta que la relación entre ambas es:

$$\left| \frac{U_2}{U_{20}} \right| = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \left| \frac{U_2}{U_g} \right|$$

Es decir, la corrección que hay que aplicarle a la gráfica para obtener la relación  $|U_2/U_{20}|$  sería:

$$20 \log \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 20 \log \frac{350}{300} = +1,34 \text{ dB}$$

El valor asintótico para altas frecuencias de  $|U_2/U_g|$  es:

$$\left| \frac{U_2}{U_g} \right|_{\omega \rightarrow \infty} = 20 \log \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 20 \log \frac{300}{350} = -1,34 \text{ dB}$$

y como las variaciones dentro de la banda de paso ( $f \geq 5 \text{ kHz}$ ) llegan hasta  $-2,74 \text{ dB}$ , queda comprobado que la atenuación en el intervalo  $f \geq 5 \text{ kHz}$  no se aparta en más de  $1,4 \text{ dB}$  respecto de su valor para frecuencias muy elevadas, tal como se requería.

### Ejemplo 9.9.

Diseñar un filtro *supresor de banda* (o filtro de muesca, o *notch*) aplicando la aproximación de *Butterworth* a la relación  $|U_2/U_{20}|$ , para atenuar el acoplamiento indeseado de la señal de  $50 \text{ Hz}$  proveniente de la instalación eléctrica ("zumbido de alterna") de una señal de audio. El filtro debe cumplir con las siguientes especificaciones, empleando el menor número de componentes:

- Resistencia del generador  $R_1 = 50 \Omega$  y resistencia de carga  $R_2 = 50 \Omega$ .
- Frecuencia central de la banda de atenuación  $f_0 = 50 \text{ Hz}$ .
- La banda de supresión alrededor de  $f_0$  debe ser tal que para  $\Delta f = 10 \text{ Hz}$  el valor de  $|U_2/U_{20}|$  debe ser *por lo menos*  $20 \text{ dB}$  inferior al valor correspondiente a  $f=0$  y a  $f=\infty$ , y para  $\Delta f = 100 \text{ Hz}$  alrededor  $f_0$ , el valor de  $|U_2/U_{20}|$  debe ser *a lo sumo* de  $3 \text{ dB}$  inferior al valor correspondiente a  $f=0$  y a  $f=\infty$ .

### Resolución:

#### (1) Transformar las especificaciones al dominio del filtro *pasa bajos equivalente*

- Obtención de las frecuencias que definen el ancho de la *banda de paso* de  $3 \text{ dB}$ :

$$\Delta f|_{3 \text{ dB}} = 100 \quad f_{p2} - f_{p1} = 100 \quad f_{p2} = f_{p1} + 100 \quad (1)$$

$$f_0 = 50 \quad f_{p1} \cdot f_{p2} = 2500 \quad (2)$$

Con (1) en (2)

$$f_{p1}^2 + 100f_{p1} - 2500 = 0 \quad f_{p1a,b} = -\frac{100}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{100^2 + 4 \cdot 2500} \Rightarrow \begin{aligned} f_{p1a} &= 20,71 \text{ Hz} \\ f_{p1b} &= -120,71 \text{ Hz} \end{aligned} \quad (3)$$

Con (3) en (1):

$$f_{p2a} = f_{p1a} + 10 = 20,71 + 10 = 120,71 \text{ Hz}$$

$$f_{p2b} = f_{p1b} + 10 = -120,71 + 10 = -110,71 \text{ Hz}$$

Entonces, considerando ambas bandas (sobre las frecuencias positivas y las negativas):

$$f_{p1}|_{3 \text{ dB}} = \pm 20,71 \text{ Hz} \quad f_{p2}|_{3 \text{ dB}} = \pm 120,71 \text{ Hz}$$

Por ser  $\Delta f_{3 \text{ dB}}$  mayor que  $f_0$  las frecuencias de corte resultaron notablemente asimétricas alrededor de  $f_0$ .

Aplicando la transformación suprime banda-pasa bajos conservando el ancho de banda:

$$\bar{s} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \Rightarrow j\bar{\omega} = \frac{j\omega}{-\omega^2 + \omega_0^2} \quad \therefore \bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \Rightarrow \bar{f} = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{f}{f_0^2 - f^2}$$

Es decir:

$$\bar{f}_{p1} = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{\pm 20,71}{(\pm 20,71)^2 - 50^2} = \mp \frac{1}{4\pi^2 \cdot 100} = \mp 2,533 \cdot 10^{-4} \text{ Hz}$$

$$\overline{f_{p2}} = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{\pm 120,71}{(\pm 120,71)^2 - 50^2} = \pm \frac{1}{4\pi^2 \cdot 100} = \pm 2,533 \cdot 10^{-4} \text{ Hz}$$

Entonces para el pasa bajos equivalente:  $\overline{f_p} = 1/(4\pi^2 \cdot 100) = 2,533 \cdot 10^{-4} \text{ Hz}$

Nótese que la transformación suprime banda-pasa bajos *conservando el ancho de banda*, transforma el ancho de banda *de paso*  $\Delta f_p = 100 \text{ Hz}$  en un ancho de banda *de paso* equivalente  $\overline{f_p} = 1/(4\pi^2 \cdot 100) \text{ Hz}$ .

- Obtención de las frecuencias que definen el ancho de la *banda suprimida* de 20 dB:

$$\Delta f|_{20\text{dB}} = 10 \quad f_{s2} - f_{s1} = 10 \quad f_{s2} = f_{s1} + 10 \quad (4)$$

$$f_0 = 50 \quad f_{s1} \cdot f_{s2} = 2500 \quad (5)$$

Con (4) en (5)

$$f_{s1}^2 + 10f_{s1} - 2500 = 0 \quad f_{s1a,b} = -\frac{10}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{10^2 + 4 \cdot 2500} \Rightarrow \begin{matrix} f_{s1a} = 45,25 \text{ Hz} \\ f_{s1b} = -55,25 \text{ Hz} \end{matrix} \quad (6)$$

Con (6) en (4):

$$f_{s2a} = f_{s1a} + 10 = 45,25 + 10 = 55,25 \text{ Hz}$$

$$f_{s2b} = f_{s1b} + 10 = -55,25 + 10 = -45,25 \text{ Hz}$$

Entonces, considerando ambas bandas (sobre las frecuencias positivas y las negativas):

$$f_{s1}|_{20 \text{ dB}} = \pm 45,25 \text{ Hz} \quad f_{s2}|_{20 \text{ dB}} = \pm 55,25 \text{ Hz}$$

Esta vez  $\Delta f_{20\text{dB}}$  es apenas menor que  $f_0$  lo cual determina que las frecuencias de corte resulten levemente asimétricas alrededor de  $f_0$ .

Aplicando la transformación suprime banda-pasa bajos conservando el ancho de banda, siendo  $\overline{\omega}$  en el dominio del pasa bajos equivalente:

$$\overline{s} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \Rightarrow j\overline{\omega} = \frac{j\omega}{-\omega^2 + \omega_0^2} \therefore \overline{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \Rightarrow \overline{f} = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{f}{f_0^2 - f^2}$$

Es decir:

$$\overline{f_{s1}} = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{\pm 45,25}{(\pm 45,25)^2 - 50^2} = \mp \frac{1}{4\pi^2 \cdot 10} = \mp 2,533 \cdot 10^{-3} \text{ Hz}$$

$$\overline{f_{s2}} = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{\pm 55,25}{(\pm 55,25)^2 - 50^2} = \pm \frac{1}{4\pi^2 \cdot 10} = \pm 2,533 \cdot 10^{-3} \text{ Hz}$$

Entonces para el pasa bajos equivalente:  $\overline{f_s} = 1/(4\pi^2 \cdot 10) = 2,533 \cdot 10^{-3} \text{ Hz}$

Se hace notar que la transformación rechaza banda-pasa bajos *conservando el ancho de banda*, transforma el ancho de banda *de supresión*  $\Delta f_s = 10 \text{ Hz}$  en un ancho de banda *de paso* equivalente  $\overline{f_s} = 1/(4\pi^2 \cdot 10) \text{ Hz}$ .

Por lo tanto, la especificación del pasa bajos equivalente resultó:

$$\overline{f_p} = 2,533 \cdot 10^{-4} \text{ Hz} \quad \text{y} \quad \alpha_p = 3 \text{ dB}$$

$$\overline{f_s} = 2,533 \cdot 10^{-3} \text{ Hz} \quad \text{y} \quad \alpha_s = 20 \text{ dB}$$

Este paso del proceso fue implementado en Matlab mediante las siguientes líneas de código:

```
01 function Butterworth Suprime Banda
02 %% Bloque Principal
03 clc
04 ZFmt=[ ' L1=%g\n C1=%g\n L2=%g\n C2=%g\n L3=%g\n C3=%g\n' ...
05 ' L4=%g\n C4=%g\n L5=%g\n C5=%g\n L6=%g\n C6=%g\n' ...
06 ' L7=%g\n C7=%g\n L8=%g\n C8=%g\n L9=%g\n C9=%g\n'];
07 YFmt=[ ' C1=%g\n L1=%g\n C2=%g\n L2=%g\n C3=%g\n L3=%g\n' ...
08 ' C4=%g\n L4=%g\n C5=%g\n L5=%g\n C6=%g\n L6=%g\n' ...
09 ' C7=%g\n L7=%g\n C8=%g\n L8=%g\n C9=%g\n L9=%g\n'];
```

```

10 R2Fmt=' R2=%g\n';
11 % Datos del caso
12 R1=50; R2=50;
13 f0 = 50;
14 Dfp=100; Dfs=10;
15 alfa_p=3; alfa_s=20;
16 % Transformar la especificación al dominio del pasa bajos equivalente
17 % - Determinar primero las frecuencias que delimitan los anchos de banda
18 [fp1, fp2] = BR_Deltaf2f(f0, Dfp);
19 [fs1, fs2] = BR_Deltaf2f(f0, Dfs);
20 % - luego se transforman estas frecuencias al dominio del pasa bajos
21 wLP = Br2Lp(2*pi*[fp1, fp2, fs1, fs2], 2*pi*f0);
22 wLP = max(wLP(1:2));
23 wsLP = max(wLP(3:4));

```

En las líneas 4 a 10 se definen formatos para mostrar los resultados en la ventana de comandos de Matlab. La función `BR_Deltaf2f` empleada en las líneas 18 y 19 retorna el par de frecuencias que delimitan el ancho de banda centrado en  $f_0$ .

La función `Br2Lp` empleada en la línea 21 retorna las pulsaciones  $\bar{\omega}$  en el dominio del filtro pasa bajos equivalente aplicando la transformación rechaza banda – pasa bajos, conservando el ancho de banda, a las pulsaciones  $\omega_1$   $\omega_2$  que delimitan cierto ancho de banda de interés centrado en  $\omega_0$  del filtro rechaza banda.

El código de `BR_Deltaf2f` y `Br2Lp` es el siguiente:

```

68 %% ===== Funciones Internas =====
69 function [f1,f2] = BR_Deltaf2f(f0, Deltaf)
70 % Retorna las dos frecuencias que delimitan el ancho de banda Deltaf
71 % centrado en f0, en la curva de transferencia del supresor de banda
72 x = sqrt(1+(2*f0/Deltaf)^2);
73 f1 = 0.5*Deltaf*(-1+x);
74 f2 = 0.5*Deltaf*(1+x);
75 end
76 function wLP = Br2Lp(wBR, w0)
77 wLP = wBR./(w0^2-wBR.^2);
78 end

```

**(2) Calcular los parámetros de diseño  $\varepsilon$  y  $n$  del pasa bajos equivalente con la aproximación de *Butterworth***

$$\varepsilon^2 = 10^{0,1 \cdot \alpha_p} - 1 \quad \varepsilon^2 = 10^{0,1 \cdot 3} - 1 = 1 \quad \therefore \varepsilon = 1$$

La *atenuación mínima* requerida a la frecuencia  $f_s$  en la banda de supresión, determina el orden  $n$  necesario:

$$n \geq \frac{\log \left[ \frac{10^{0,1 \cdot \alpha_s} - 1}{\varepsilon^2} \right] \log \left[ \frac{10^{0,1 \cdot 20} - 1}{1} \right]}{2 \log \left( \frac{f_s}{f_p} \right) \log \left( \frac{2,533 \cdot 10^{-3}}{2,533 \cdot 10^{-4}} \right)} = 0,9978$$

Es decir con la aproximación de *Butterworth* el  $n$  que se debería adoptar es 1, y por lo tanto los componentes requeridos para implementar el filtro suprime banda son 2.

Verificación del obtenido  $n$  con la aproximación de *Butterworth*

En la banda de atenuación se debe cumplir:

$$A(f_s) = 10 \log \left( 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{f_s}{f_p} \right)^{2n} \right) \geq \alpha_s \quad A(f_s) = 10 \log \left( 1 + 1 \cdot \left( \frac{2,532 \cdot 10^{-3}}{2,532 \cdot 10^{-4}} \right)^2 \right) = 20,04 \geq 20$$

Con lo cual el valor de  $n=2$  es satisfactorio y la transferencia del filtro pasa bajos normalizado resulta:

$$|H(j\omega)|^2 = \left| \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \omega^2} \right|^2 \Rightarrow [H(s)]^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \omega^2} \Big|_{\omega=s/j} = \frac{1}{1 - s^2} \quad \therefore H(s) = \frac{1}{1 + s}$$

Este paso del proceso se puede efectuar en Matlab mediante las siguientes líneas de código:

```

24 % Calcular los parámetros del diseño

```

```

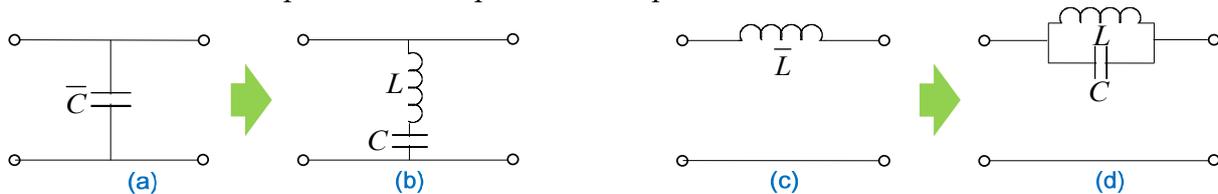
25 if alfa_p==3, eps=1; else eps=sqrt(10^(alfa_p/10)-1); end
26 n_real=log10((10^(alfa_s/10)-1)/(10^(alfa_p/10)-1))/2/log10(wsLP/wpLP);
27 n=ceil(n_real);
28 % --- Verificación del n obtenido. Se debe cumplir A(ws)>alfa_s
29 At = 10*log10(1+eps^2*(wsLP/wpLP)^2^n)
    
```

**(3) Obtener  $\rho_1(s)$  para un filtro pasa bajos *normalizado* con los parámetros  $\varepsilon$  y  $n$ .**

Habría 4 realizaciones posibles: 2 como impedancia (una con  $\rho_{1a}(s)$  y otra con  $\rho_{1b}(s)$ ) y 2 como admitancia (una con  $\rho_{1a}(s)$  y otra con  $\rho_{1b}(s)$ ).

El filtro pasa bajos de orden 1, desarrollado como admitancia tendrá la topología indicada en la **Fig. 9.36-a** y el supresor de banda resultante la indicada en la **Fig. 9.36-b**. Desarrollado como impedancia tendrá la topología indicada en la **Fig. 9.36-c**, y el supresor de banda resultante la indicada en la **Fig. 9.36-d**.

En cualquier caso, el número de elementos necesarios es 2 (1 capacitor y 1 inductor). En un diseño real, serán los valores obtenidos para estos componentes los que determinen el circuito más adecuado.



**Fig. 9.36.** Topologías posibles: **(a)** PBN sintetizado como admitancia; **(b)** notch transformado a partir de (a); **(c)** PBN sintetizado como impedancia; **(d)** notch transformado a partir de (c).

Entonces ahora se puede escribir la expresión de  $|\rho_1(s)|^2$  para lo cual se requiere determinar:

$$t = \frac{4R_1R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{4 \cdot 50 \cdot 50}{(50 + 50)^2} = 1$$

Y aplicando la aproximación de Butterworth de orden 1 para el filtro pasa bajos normalizado respecto de  $\omega_p=1/(200 \pi)$  rad/s resulta:

$$|\rho_1(s)|^2 = 1 - t \left| \frac{U_2}{U_{20}}(s) \right|^2 = 1 - t \frac{1}{1 - \varepsilon^2 s^2} = \frac{1 + \varepsilon^2 s^2 - 1}{1 - \varepsilon^2 s^2} = \frac{s^2}{1 - s^2}$$

- Los polos de  $|\rho_1(s)|^2$  son 2, y se encuentran ubicados sobre el eje real en  $\pm 1$ .
- Los ceros de  $|\rho_1(s)|^2$  también son 2, y se encuentran ubicados en el origen.

Determinación de las raíces de las singularidades de  $|\rho_1(s)|^2$

Las dos soluciones posibles para las raíces de  $|\rho_1(s)|^2$  resultan iguales porque los dos ceros de  $|\rho_1(s)|^2$  se encuentran en el origen:

$$\rho_{1a}(s) = \rho_{1b}(s) = \frac{s}{s + 1}$$

Este paso del proceso se puede efectuar en Matlab mediante las siguientes líneas de código:

```

30 % --- Obtención de las 2 expresiones de rho1(s)
31 P = zeros(2*n+1, 1); P(1)=(-1)^n*eps^2; P(2*n+1)=1; % Denom. de rho1(s)^2
32 r = roots(P); % Polos de rho1(s)^2
33 sPs= r(real(r)<0)'; % Polos en el SPI
34 sZa= zeros(n, 1); sZb= zeros(n, 1); % Ceros de rho1(s)^2
35 [Ns1a, Ds1a]=zp2tf(sZa, sPs, 1);
36 rho1a=tf(Ns1a, Ds1a)
37 [Ns1b, Ds1b]=zp2tf(sZb, sPs, 1);
38 rho1b=tf(Ns1b, Ds1b)
    
```

**(4) Obtener las Impedancias y Admitancias de entrada**

Como  $\rho_{1a}(s) = \rho_{1b}(s)$  resulta:

$$Z_{1a}(s) = Z_{1b}(s) = R_1 \left( \frac{1 - \rho_{1a}(s)}{1 + \rho_{1a}(s)} \right)^{\pm 1} \quad Y_{1a}(s) = Y_{1b}(s) = G_1 \left( \frac{1 + \rho_{1a}(s)}{1 - \rho_{1a}(s)} \right)^{\pm 1}$$

y normalizando impedancias respecto de  $R_1$  y admitancias respecto de  $G_1$ , resulta

$$Z_{1a}(s) = Z_{1b}(s) = \left( \frac{1 - \rho_{1a}(s)}{1 + \rho_{1a}(s)} \right)^{\pm 1} \quad Y_{1a}(s) = Y_{1b}(s) = \left( \frac{1 + \rho_{1a}(s)}{1 - \rho_{1a}(s)} \right)^{\pm 1}$$

Como se está sintetizando un filtro pasa bajos de orden 1, es necesario realizar 1 cero de transmisión en infinito, lo que se consigue removiendo 1 polo de  $Z_{1a}$  o  $Y_{1a}$  en infinito (Cauer I).

Es decir que con esta alternativa de ubicación de los ceros de  $\rho_1(s)$  para  $Z_{1a}$  hay que considerar el exponente (-1) y para  $Y_{1a}$  hay que considerarlo (+1). Entonces resulta:

$$Z_{1a}(s) = Z_{1b}(s) = Y_{1a}(s) = Y_{1b}(s) = \frac{1 + \rho_{1a}(s)}{1 - \rho_{1a}(s)} = \frac{1 + \frac{s}{s+1}}{1 - \frac{s}{s+1}} = \frac{2s+1}{1}$$

Es decir que de las 4 realizaciones posibles sólo 2 serán diferentes, una como impedancia  $Z_{1a} = Z_{1b}$  y otra como admitancia:  $Y_{1a} = Y_{1b}$ .

```

39 % --- Obtención del Z1a(s)=Y1a(s) normalizadas respecto de R1
40 NZ1a=Ds1a+Ns1a; NZ1a=NZ1a(find(abs(NZ1a)>1e-4,1):end);
41 DZ1a=Ds1a-Ns1a; DZ1a=DZ1a(find(abs(DZ1a)>1e-4,1):end);
42 Z1a=tf(NZ1a, DZ1a)
43 % --- Obtención del Z1b(s)=Y1b(s) normalizadas respecto de R1
44 NZ1b=Ds1b+Ns1b; NZ1b=NZ1b(find(abs(NZ1b)>1e-4,1):end);
45 DZ1b=Ds1b-Ns1b; DZ1b=DZ1b(find(abs(DZ1b)>1e-4,1):end);
46 Z1b=tf(NZ1b, DZ1b)
    
```

El propósito de la segunda asignación en las líneas 40, 41, 44 y 45 es eliminar en los vectores NZ1a, DZ1a, NZ1b y DZ1b los elementos de valor 0 (para no considerar en los respectivos polinomios los términos con coeficiente nulo).

**(5) Sintetizar las Impedancias y Admitancias de entrada**

Como los ceros de transmisión se encuentran en infinito, se requiere remover polos en infinito (3ª forma canónica o 1ª forma de Cauer).

Aplicando Cauer I y resolviendo por división continua, para  $Z_{1a} = Z_{1b} = Y_{1a} = Y_{1b}$  resulta:

$$Z_{1a}(s) = Z_{1b}(s) = Y_{1a}(s) = Y_{1b}(s) = 2s$$

Cuya síntesis conduce a los circuitos pasa bajos normalizados indicados en la Fig. 9.37.



Fig. 9.37. Valores de los elementos del PBN resultantes a partir de  $\rho_{1a}=\rho_{1b}$ : (a) síntesis como impedancia; (b) síntesis como admitancia.

**(6) Transformar y desnormalizar**

Aplicando la transformación pasa bajos normalizado - suprime banda de ancho de banda de supresión  $\Delta\omega$  (con  $\Delta\omega \neq 1$ ), no será necesario denormalizar en frecuencia. Los valores resultantes a su vez deben desnormalizarse respecto de  $R_1$ .

El circuito supresor de banda correspondiente se muestra en la Fig. 9.38.

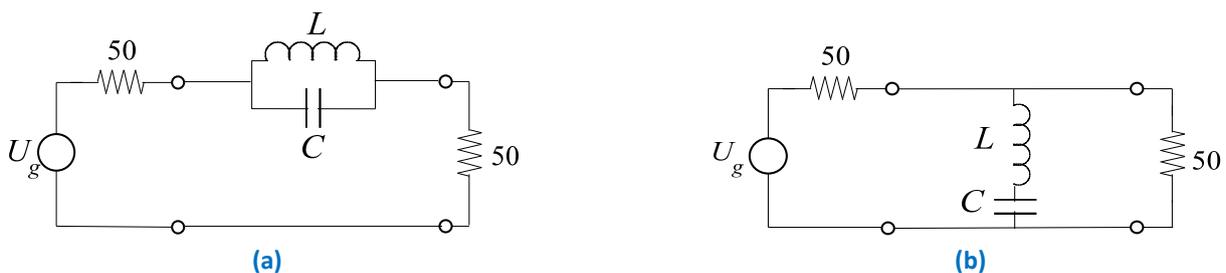


Fig. 9.38. Filtro de muesca transformando el PBN obtenido a partir de  $\rho_{1a}=\rho_{1b}$ : (a) síntesis como impedancia; (b) síntesis como admitancia.

$$R_1=50 \Omega \quad R_2=50 \Omega$$

$$\Delta\omega = 2\pi \cdot 100 = 628,32$$

$$\omega_0 = 2\pi \cdot 50 = 314,16$$

Para la **Fig. 9.38a**

$$C = \frac{1}{\Delta\omega \cdot \bar{L} \cdot R_1} = \frac{1}{2\pi \cdot 100 \cdot 2 \cdot 50} = 15,92 \mu\text{F}$$

$$L = \frac{\Delta\omega \cdot \bar{L}}{\omega_0^2} \cdot R_1 = \frac{2\pi \cdot 100 \cdot 2}{(2\pi \cdot 50)^2} \cdot 50 = 636,6 \text{ mH}$$

Para la **Fig. 9.38b**

$$L = \frac{1}{\Delta\omega \cdot \bar{C}} \cdot R_1 = \frac{1}{2\pi \cdot 100 \cdot 2} \cdot 50 = 39,79 \text{ mH}$$

$$C_2 = \frac{\Delta\omega \cdot \bar{C}}{\omega_0^2 \cdot R_1} = \frac{2\pi \cdot 100 \cdot 2}{(2\pi \cdot 50)^2 \cdot 50} = 254,65 \mu\text{F}$$

La síntesis de  $Z_{1a}$ ,  $Y_{1a}$ ,  $Z_{1b}$  e  $Y_{1b}$  se puede efectuar en Matlab mediante las siguientes líneas de código:

```

47 % --- Síntesis de Z1a(s) y de Y1a(s) por Cauer I
48 LPelems_1a = Cauer_I(NZ1a, DZ1a);
49 fprintf('Elementos de Z1a(s)=Y1a(s) del pasa bajos normalizado:\n')
50 fprintf(' %g', LPelems_1a)
51 BRelems_Z1a = Lp2Br(LPelems_1a, R1, f0, Dfp, 'Z');
52 BRelems_Y1a = Lp2Br(LPelems_1a, R1, f0, Dfp, 'Y');
53 fprintf('\nElementos de Z1a(s) del supresor de banda:\n')
54 fprintf([ZFmt(1:20*n), R2Fmt], BRelems_Z1a)
55 fprintf('Elementos de Y1a(s) del supresor de banda:\n')
56 fprintf([YFmt(1:20*n), R2Fmt], BRelems_Y1a)
57 % --- Síntesis de Z1b(s) y de Y1b(s) por Cauer I
58 LPelems_1b = Cauer_I(NZ1b, DZ1b);
59 fprintf('Elementos de Z1b(s)=Y1b(s) del pasa bajos normalizado:\n')
60 fprintf(' %g', LPelems_1b)
61 BRelems_Z1b = Lp2Br(LPelems_1b, R1, f0, Dfp, 'Z');
62 BRelems_Y1b = Lp2Br(LPelems_1b, R1, f0, Dfp, 'Y');
63 fprintf('\nElementos de Z1b(s) del supresor de banda:\n')
64 fprintf([ZFmt(1:20*n), R2Fmt], BRelems_Z1b)
65 fprintf('Elementos de Y1b(s) del supresor de banda:\n')
66 fprintf([YFmt(1:20*n), R2Fmt], BRelems_Y1b)
67 fprintf('FIN\n')

```

La función `Cauer_I` empleada en las líneas 48 y 58, realiza el proceso de división continua de la división polinómica  $P/Q$  siendo  $P$  el polinomio cuyos coeficientes se pasan como primer parámetro (vector fila) y  $Q$  el polinomio cuyos coeficientes se pasan como segundo parámetro (vector fila). Invocándola con  $P$  igual al vector de coeficientes del numerador de  $Z$  ó  $Y$  y  $Q$  igual al vector de coeficientes del denominador de  $Z$  ó  $Y$ , el parámetro de retorno será el vector fila con los valores de los componentes del filtro pasa bajos normalizado.

La función `Lp2Br` empleada en las líneas 51, 52, 61 y 62 permite transformar los elementos del prototipo pasa bajos normalizado al filtro rechaza banda, desnormalizado respecto del ancho de banda  $DfB$  que delimita la *banda de paso*.

El primer parámetro es el vector fila con los valores de los elementos del pasa bajos normalizado. El segundo parámetro es el valor de resistencia del generador que se empleará para desnormalizar en impedancia. El tercero es la frecuencia central de la banda suprimida especificada (en Hz). El cuarto es el ancho de banda del límite de la banda de paso del rechaza banda. El quinto parámetro es 'Z' o 'Y' para indicar si se trata de una impedancia o una admitancia.

El parámetro de retorno es un vector fila con los valores de los componentes del pasa bajos resultante.

El código de `Cauer_I` y de `Lp2Br` es el siguiente:

```

79 function Elem_values = Cauer_I(P, Q)
80 % Desarrollo en división continua de la división polinómica P/Q
81 % El grado de P debe ser mayor que el grado de Q, con lo cual
82 % Elem_values, al contener el primer coeficiente del cociente en cada

```

```

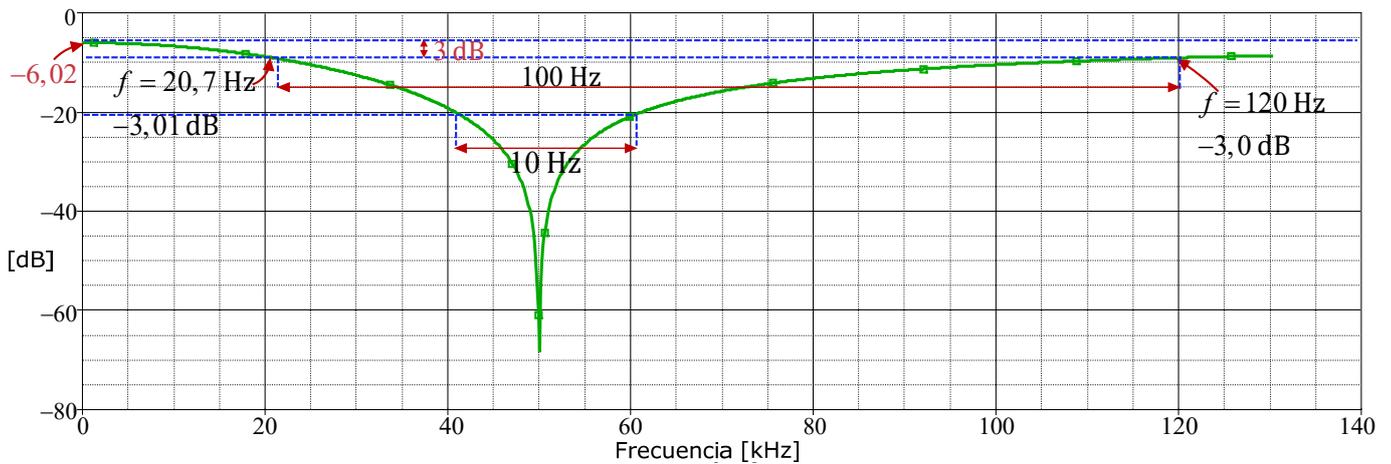
83 % paso de la división, es un vector fila donde cada elemento es el
84 % valor de un componente del pasa bajos normalizado, desarrollado
85 % por la 3ª forma canónica o Causer I.
86 q=length(P);
87 Elem_values=zeros(1, q);
88 for i=1:q-1
89     [Ci, R]=deconv(P,Q); %División polinómica
90     Elem_values(i)=Ci(1); % Se agrega el 1er coef. del cociente
91     P=Q; % El divisor pasa a ser dividendo
92     Q=R(find(abs(R)>1e-4,1):end); % El resto pasa a ser divisor
93 end
94 Elem_values(q)=Ci(2); % El 2º coef del último cociente será R2
95 % ó G2, correspondiendo a la misma
96 % instancia (Z o Y) del ultimo elemento
97 end
98 function BRvalues = Lp2Br(LPvalues, Rg, f0, DfB, ZY)
99     len=length(LPvalues);
100     elem=zeros(1, 2*len-1);
101     % --- Transformar y desnormalizar en frecuencia cada elemento
102     if strcmpi(ZY, 'Y')
103         for q=1 : len-1
104             if rem(q, 2)==1 % si q es impar es una C del pasa bajos
105                 elem(2*q-1)=LPvalues(q)*DfB/(2*pi*f0^2)/Rg; % C del BR
106                 elem(2*q)=1/(2*pi*DfB*LPvalues(q))*Rg; % L del BR
107             else % si q es par es una L del pasa bajos
108                 elem(2*q-1)=1/(2*pi*DfB*LPvalues(q))/Rg; % C del BR
109                 elem(2*q)=LPvalues(q)*DfB/(2*pi*f0^2)*Rg; % L del BR
110             end
111         end
112         if rem(len-1, 2)==1 % si el último elemento del pasa bajos
113             % es un capacitor, el último valor es una
114             % conductancia
115             elem(end)=Rg/LPNvalues(end);
116         else
117             elem(end)=LPNvalues(end)*Rg;
118         end
119     else
120         for q=1 : len-1
121             if rem(q, 2)==1 % si q es impar es una L del pasa bajos
122                 elem(2*q-1)=LPvalues(q)*DfB/(2*pi*f0^2)*Rg; % L del BR
123                 elem(2*q)=1/(2*pi*DfB*LPvalues(q))/Rg; % C del BR
124             else % si q es par es una C del pasa bajos
125                 elem(2*q-1)=1/(2*pi*DfB*LPvalues(q))*Rg; % L del BR
126                 elem(2*q)=LPvalues(q)*DfB/(2*pi*f0^2)/Rg; % C del BR
127             end
128         end
129         if rem(len-1, 2)==1 % si el último elemento del pasa bajos
130             % es un inductor, el último valor es una
131             % resistencia
132             elem(end)=LPNvalues(end)*Rg;
133         else
134             elem(end)=Rg/LNPvalues(end);
135         end
136     end
137     BRvalues=elem;
138 end
139 end % Butterworth_Suprime_Banda

```

### Simulación:

Empleando los valores finales obtenidos para los componentes (desnormalizados), se obtiene la curva de transferencia en decibeles en función de la frecuencia (transferencia de tensión de salida a tensión de entrada) que se muestra en la **Fig. 9.39**, en la cual el eje de frecuencias es lineal y se abarca el rango de frecuencias que permite corroborar el cumplimiento de la especificación en la banda de paso.

En la misma **Fig. 9.39** se indican las lecturas frecuencia-magnitud en dB de puntos de la curva obtenidos con los cursores sobre la salida de la simulación, que corresponden al centro de la banda suprimida y a las frecuencias de corte para las cuales se especificaron los niveles de atenuación requeridos.



**Fig. 9.39.** Característica  $|H(j\omega)|$  sintetizada: cumplimiento de las especificaciones.

## 9.5. Bibliografía

- [1] W. Warzanskyj Poliscuk. *Métodos de Síntesis de Redes Lineales*. Capítulo XI: “Síntesis de Filtros por el método de aproximación”. Universidad Politécnica de Madrid. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicaciones. 1977. ISBN 978-84-740-2054-9.
- [2] Wai-Kai Chen. *Passive, Active and Digital Filters (3<sup>rd</sup>. Ed)*. CRC Press. Boca Raton. FL. 2009. ISBN 978-1-4200-5885-7.
- [3] L. Wanhammar. *Analog Filters Using MATLAB*. Chapter 3: “Passive Filters”. Springer. New York, 2009. ISBN 978-0-387-92766-4

---

# Capítulo 10

## Filtros Activos. Aspectos Generales y Síntesis.

---

### 10.1. Introducción

Los filtros pasivos funcionan bien a altas frecuencias; sin embargo, en las aplicaciones de baja frecuencia (debajo de 100 kHz), los inductores requeridos son grandes y físicamente voluminosos, y sus características se apartan bastante de la ideal. Además, tales inductores son imposibles de fabricar en forma monolítica y son incompatibles con cualquiera de las técnicas modernas para ensamblar sistemas electrónicos. Por lo tanto, ha habido un considerable interés en encontrar realizaciones de filtros que no requieran inductores. De los diversos tipos posibles de filtros sin inductor, estudiaremos los *filtros RC activos*.

Los filtros *RC* activos se caracterizan por la presencia de uno o varios amplificadores operacionales que están realimentados con resistores y capacitores, evitando el uso de inductores.

El hecho de que los filtros activos puedan implementar polos complejos sin el uso de inductores es un punto clave a su favor. Los inductores tienen las desventajas de ser grandes, pesados, costosos y generadores de campos magnéticos espurios. Por lo tanto, poder implementar un filtro activo con componentes que se puedan miniaturizar es una gran ventaja.

Sin embargo, la ganancia a lazo abierto del amplificador operacional limita el uso a frecuencias por debajo del MHz. Para frecuencias por encima de este valor, se emplean circuitos pasivos *RLC*, dado que en frecuencias elevadas, disminuyen las dimensiones de los inductores, y por lo tanto su peso.

Este capítulo estará dedicado a los filtros *RC* activos que sobresalen por las siguientes características:

- Peso y dimensiones reducidos

- Componentes (resistencias y capacitores) de valores razonables

- Aislación elevada entre la entrada y la salida.

- Capacidad de proveer ganancia si fuera requerido.

Existen configuraciones básicas que permiten realizar funciones como las descritas en el apartado 9.2, con ventajas e inconvenientes adicionales. En lo que sigue se desarrolla la base teórica de los filtros activos a fin de comprender el procedimiento de diseño y las consideraciones a tener en cuenta en cada caso.

### 10.2. Diseño mediante celdas en cascada

Esta técnica se basa en la factorización de la función de transferencia  $H(s)$  expresándola como producto de términos de menor orden:

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot H_3(s) \dots \cdot H_n(s)$$

Si el orden  $n$  es par la descomposición consistirá en  $n/2$  términos de segundo orden. Si  $n$  es impar la factorización incluye también un término de primer orden. A veces, este término de primer orden se lo combina con uno de segundo orden para crear una etapa de filtro de tercer orden.

El diseño mediante celdas en cascada ofrece algunas ventajas:

- El diseño de cada sección es relativamente simple y no requiere una cantidad de componentes que lo haga más costoso.
- La baja impedancia de salida de las secciones individuales hace que la carga entre etapas sea despreciable, de modo que cada sección puede considerarse aislada de las restantes y puede ser diseñada aisladamente.
- La modularidad inherente de esta técnica de diseño también es atractiva desde un punto de vista económico, ya que se pueden emplear unos pocos bloques básicos para diseñar una variedad de filtros de mayor complejidad.

El orden en que se encadenan las distintas secciones del filtro no tiene relevancia desde el punto de vista de las matemáticas, pero sí la tiene desde el punto de vista circuital. Para evitar la pérdida de rango dinámico debido al recorte producido en secciones de  $Q_p$  más elevado y mejorar la exactitud del filtro, las secciones se deberían encadenar en orden de  $Q_p$  crecientes, siendo la sección de más bajo  $Q_p$  la primera en el camino de la señal. Sin embargo este ordenamiento no toma en cuenta la presencia de ruido interno, que puede ser de interés considerar en las etapas con valores de  $Q_p$  elevados, en las cuales cualquier componente de ruido que se encuentre cerca del pico de resonancia puede resultar magnificada significativamente. Entonces, para minimizar el ruido, las etapas de  $Q_p$  más elevados deberían ubicarse al principio de la cascada. Por lo tanto, en general, el ordenamiento óptimo dependerá del espectro de la señal de entrada, del tipo de filtro y de las características de ruido de los componentes.

### 10.3. Celdas de primer orden con amplificadores operacionales

Tal como se desprende de lo visto en el apartado 9.2, los filtros de primer orden o de un único polo tienen un único capacitor. Por ello existen únicamente dos celdas posibles de primer orden: pasa bajos (Fig. 9.5) y pasa altos (Fig. 9.7).

Las etapas de primer orden sólo implementan respuestas de Butterworth, debido a que no pueden realizar pares de polos complejos conjugados requeridos por otras aproximaciones como la de Chebyshev. Esto es debido a que al no tener frecuencia de resonancia no pueden producir el pico que provoca el rizado de la banda pasante. Con ello se deduce que todas las etapas de primer orden son máximamente planas y monotónicas en la banda pasante, y se atenúan a una razón de 20 dB por década.

#### 10.3.1. Celdas pasa bajos de primer orden

La Fig. 10.1 muestra la forma más simple de construir un filtro pasa bajos activo de primer orden. No tiene nada más que una celda pasiva RC pasa bajos de primer orden y un seguidor de tensión o buffer de ganancia unitaria.

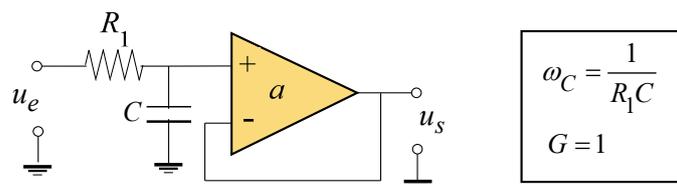


Fig. 10.1. Celda pasa bajos de primer orden con ganancia unitaria.

Por lo tanto, este circuito es *no inversor* y la ganancia en lazo cerrado aportada por el AO es unitaria (dado que por ser  $a \gg 1$ ,  $u^+ \cong u^-$  y  $u^- = u_s$ ), entonces:

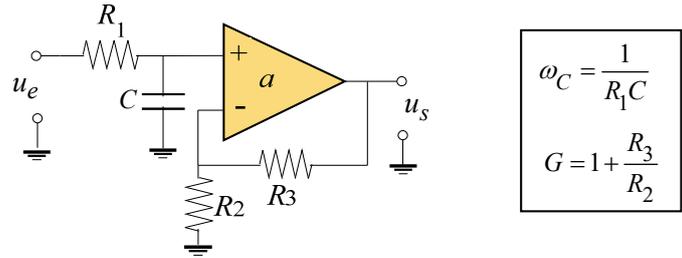
$$H(s) = \frac{U_s(s)}{U_e(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R_1 + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{1}{R_1 C}}{s + \frac{1}{R_1 C}} \tag{10-1}$$

La pulsación de corte de 3 dB está dada por:

$$\omega_c = \frac{1}{R_1 C}$$

Para valores superiores a  $\omega_c$ , a medida que aumenta  $\omega$  la reactancia capacitiva disminuye y reduce la tensión en la entrada no inversora y por consiguiente la tensión de salida decae. Cuando  $\omega$  tiende a infinito, el capacitor se aproxima a un cortocircuito, con lo que la tensión de salida se anula.

La **Fig. 10.2** muestra otro filtro pasa bajos de primer orden *no inversor*.



**Fig. 10.2.** Celda pasa bajos de primer orden no inversor.

Por ser  $a \gg 1$ ,  $u^+ \cong u^-$  con lo cual:

$$U_s(s) \frac{R_2}{R_2 + R_3} = U_e(s) \frac{\frac{1}{sC}}{R_1 + \frac{1}{sC}} = U_e(s) \frac{\frac{1}{R_1 C}}{s + \frac{1}{R_1 C}}$$

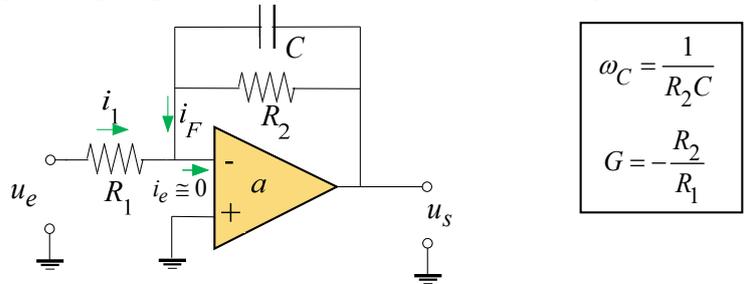
Por lo tanto:

$$H(s) = \frac{U_s(s)}{U_e(s)} = \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) \frac{\frac{1}{R_1 C}}{s + \frac{1}{R_1 C}} \tag{10-2}$$

Este circuito, si bien requiere dos resistencias adicionales, tiene como ventaja una ganancia en tensión por debajo de la frecuencia de corte ( $\omega_C=1/R_1C$ ) que resulta dada por:

$$G = 1 + \frac{R_3}{R_2}$$

El circuito integrador con AO de la **Fig. 10.3** que se analiza en el **Apéndice E**, también tiene una función de transferencia del tipo pasa bajos, pero en este caso *con inversión de fase*.



**Fig. 10.3.** Celda pasa bajos de primer orden con inversión de fase.

En efecto, analizando directamente en el dominio de Laplace, considerando condiciones iniciales nulas, dado que se desea obtener la función de transferencia, y además que  $a$  es muy grande,  $U_d \cong 0$ , con lo cual

$U^- \cong U^+$ , y en consecuencia  $I_e \cong 0$ , puede plantearse:

$$I_1(s) = \frac{U_e(s)}{R_1}$$

Por lo tanto

$$I_e = I_1 + I_F = 0 \Rightarrow I_F = -I_1 \quad \therefore \quad I_F(s) = -\frac{U_e(s)}{R_1}$$

Además:

$$U_s(s) = I_F(s) \frac{R_2 \frac{1}{sC}}{R_2 + \frac{1}{sC}} = -\frac{U_e(s)}{R_1} \frac{R_2 \frac{1}{sC}}{R_2 + \frac{1}{sC}}$$

Con lo cual la transferencia a lazo cerrado resulta:

$$H(s) = \frac{U_s(s)}{U_e(s)} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{\frac{1}{sC}}{R_2 + \frac{1}{sC}} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{\frac{1}{R_2C}}{s + \frac{1}{R_2C}}$$

Que evaluada para  $s$  considerado sobre el eje  $j\omega$  resulta:

$$H(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{\frac{1}{R_2C}}{j\omega + \frac{1}{R_2C}} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{j\omega R_2C + 1}$$

El diagrama de Bode del módulo de la transferencia a lazo cerrado (en decibeles) puede obtenerse por medio de las asíntotas dadas por las expresiones que se obtienen de las siguientes consideraciones:

- Para frecuencias  $\omega < 0,1/ R_2C$

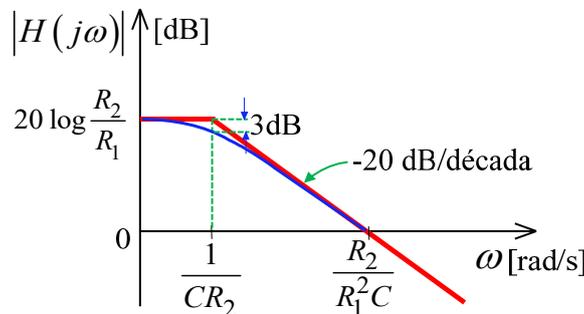
$$\left|H(j\omega)\right|_{\omega \rightarrow 0} = 20 \log \left|-\frac{R_2}{R_1}\right| \qquad \text{Fase} \left\{H(j\omega)\right\}_{\omega \rightarrow 0} = 180^\circ$$

- Para frecuencias  $\omega > 10/R_2C$

$$\left|H(j\omega)\right|_{\omega \rightarrow \infty} = 20 \log \left|-\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{j\omega CR_2}\right| = 20 \log \left|-\frac{R_2}{R_1}\right| - 20 \log(C \cdot R_2) - 20 \log \omega$$

$$\text{Fase} \left\{H(j\omega)\right\}_{\omega \rightarrow \infty} = \text{Fase} \left\{-\frac{1}{j\omega CR_2}\right\} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

En la **Fig. 10.4** se muestra el diagrama de  $|H(j\omega)|$  resultante.



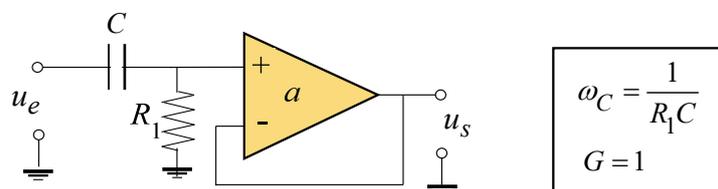
**Fig. 10.4.** Diagrama de Bode del filtro pasa bajos.

Como observación final, se puede señalar que la banda de paso de este circuito está determinada por la pulsación de corte de 3 dB que corresponde al punto de quiebre de las asíntotas de la **Fig. 10.4** ( $\omega = 1/R_2C$ ). En esta zona de frecuencias la fase será  $+180^\circ$ .

Los circuitos presentados en este apartado (**Fig. 10.1**, **Fig. 10.2** y **Fig. 10.3**) son las tres únicas configuraciones posibles para una etapa activa de filtro pasa bajos de primer orden.

### 10.3.2. Celdas pasa altos de primer orden

La **Fig. 10.5** muestra la forma más simple de construir un filtro pasa altos activo de primer orden. No tiene nada más que una celda pasiva RC pasa altos de primer orden y un seguidor de tensión o buffer de ganancia unitaria.



**Fig. 10.5.** Celda pasa altos de primer orden con ganancia unitaria.

Por lo tanto, este circuito es *no inversor* y la ganancia en lazo cerrado aportada por el AO es unitaria (dado que por ser  $a \gg 1$ ,  $u^+ \cong u^-$  y  $u^- = u_s$ ), entonces:

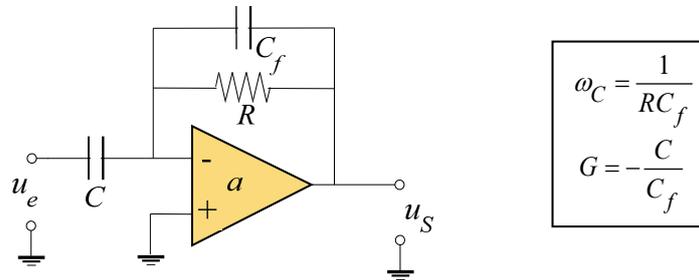
$$H(s) = \frac{U_s(s)}{U_e(s)} = \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{sC}} = \frac{sR_1C}{sR_1C + 1} = \frac{s}{s + \frac{1}{R_1C}} \quad (10-3)$$

La pulsación de corte de 3 dB está dada por:

$$\omega_c = \frac{1}{R_1C}$$

Para valores de  $\omega$  inferiores a  $\omega_c$ , a medida que  $\omega$  disminuye, la reactancia capacitiva aumenta y reduce la tensión aplicada en la entrada no inversora y por consiguiente la tensión de salida decae. Por el contrario, cuando  $\omega$  aumenta por encima de  $\omega_c$  y tiende a infinito, el capacitor tiende a un cortocircuito, con lo que la tensión de salida se hace igual a la tensión de entrada.

El circuito derivador con AO de la **Fig. 10.6** que se analiza en el **Apéndice F**, también tiene una función de transferencia del tipo pasa altos.



**Fig. 10.6.** Celda pasa altos de primer orden.

En efecto, analizando directamente en el dominio de Laplace, considerando condiciones iniciales nulas, dado que se desea obtener la función de transferencia, y además que  $a$  es muy grande,  $U_d \cong 0$ , con lo cual

$U^- \cong U^+$ , y en consecuencia  $I_e \cong 0$ , puede plantearse:

$$U_s(s) = -\frac{U_e(s)}{\frac{1}{sC}} \cdot \frac{R \frac{1}{sC_f}}{R + \frac{1}{sC_f}} = -U_e(s) \cdot \frac{sRC}{1 + sRC_f}$$

Con lo cual:

$$H(s) = \frac{U_s(s)}{U_e(s)} = -\frac{sRC}{1 + sRC_f} = -\frac{C}{C_f} \cdot \frac{s}{s + \frac{1}{RC_f}} \quad (10-4)$$

Expresión con un cero en el origen ( $s=0$ ) y un polo en  $s = -RC_f$ .

El diagrama de Bode del módulo de la transferencia a lazo cerrado (en decibelios) puede obtenerse por medio de las asíntotas dadas por las expresiones que se obtienen de las siguientes consideraciones:

- Para frecuencias  $\omega < 0,1/RC_f$

$$\left| H(j\omega) \right|_{\omega \rightarrow 0} = 20 \log |-RC| + 20 \log |j\omega| \quad \text{Fase} \left\{ H(j\omega) \right\}_{\omega \rightarrow 0} = 180^\circ + 90^\circ = 270^\circ = -90^\circ$$

- Para frecuencias  $\omega > 10/RC_f$

$$\left| H(j\omega) \right|_{\omega \rightarrow \infty} = 20 \log \left| -\frac{C}{C_f} \right| \quad \text{Fase} \left\{ H(j\omega) \right\}_{\omega \rightarrow \infty} = \text{Fase} \left\{ -\frac{C}{C_f} \right\} = 180^\circ$$

El diagrama de Bode resultante de  $|H(j\omega)|$  se muestra en la **Fig. 10.7**.

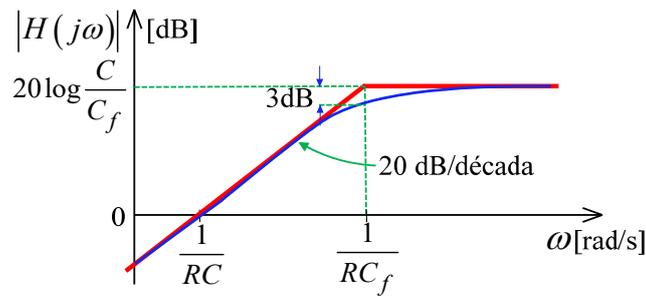


Fig. 10.7. Diagrama de Bode del filtro pasa altos.

Cabe señalar que la característica “derivadora” de este circuito está determinada por la recta de pendiente de +20dB/déc, y lo que ocurre para pulsaciones por debajo de  $0,1/RC_f$ , que corresponde a la denominada *banda de atenuación* del filtro pasa altos. En este rango de pulsaciones la fase será  $-90^\circ$  en lugar de  $+90^\circ$  que corresponde a la acción derivadora propiamente dicha, y esto es debido a la inversión de fase aportada por el AO.

### 10.4. Celdas de segundo orden con amplificadores operacionales

Las secciones de segundo orden son bloques básicos utilizados para realizar filtros de orden superior (cuando se hace una síntesis en cascada) y en determinadas ocasiones pueden ser por si mismas la estructura final del filtro (como en el caso del filtro supresor de banda de segundo orden para suprimir una banda de frecuencias interferente).

Para obtener una sección de segundo orden se pueden utilizar diferentes técnicas, que conducen a:

- Estructuras con un único A.O.
- Estructuras con varios AA.OO.
- Estructuras basadas en simulación de inductores.

El hecho de utilizar más de un A.O. por lo general hace que la implementación resulte más costosa, de mayor consumo y que empeore su desempeño en alta frecuencia. Por eso, añadir algún A.O. al circuito debe tener como objetivo mejorar alguna otra característica específica o aumentar la flexibilidad del mismo. Las estructuras de segundo orden con más de un A.O. están más allá de los objetivos de este texto, y por lo tanto, en lo que sigue se estudiarán las celdas de segundo orden con un único amplificador operacional.

Las configuraciones generales de las estructuras de este tipo son las que se muestran en la Fig. 10.8 y se denominan, dependiendo del terminal de entrada del A.O. por el que se realiza la realimentación a través de la red RC, *configuración con realimentación positiva* (Fig. 10.8-a) y *configuración con realimentación negativa* (Fig. 10.8-b).

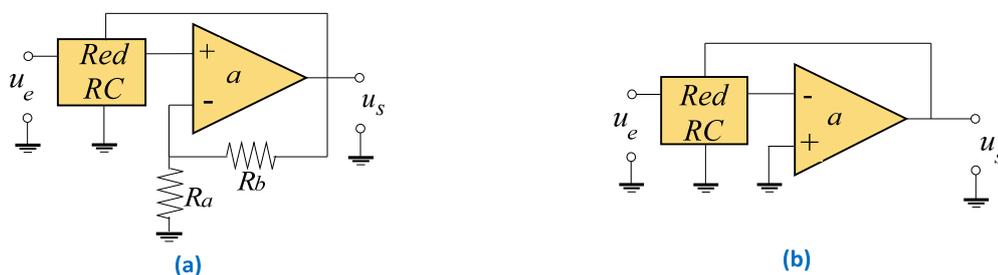


Fig. 10.8. Configuraciones con un único amplificador operacional. (a) Realimentación positiva. (b) Realimentación negativa.

Dos estructuras ampliamente utilizadas como son las denominadas topología *Sallen-Key* y topología *Rauch* o también denominada *MFB* (siglas del inglés, *multiple feedback - de realimentación múltiple*) corresponden, respectivamente, a cada tipo de realimentación.

Ambas estructuras están basadas en un único amplificador operacional. La topología *Sallen-Key* es muy empleada para implementar filtros activos de segundo orden y es muy valorada por su simplicidad ya que presenta un único camino de realimentación. Mientras que la topología *Rauch* o de realimentación múltiple presenta dos caminos de realimentación.

Para hacer una comparación entre ambas topologías con respecto a las sensibilidades a las variaciones de los valores del circuito respecto a los nominales, conviene distinguir entre: la *sensibilidad pasiva*, que es la

sensibilidad a la tolerancia de los componentes, y la *sensibilidad activa*, que es la sensibilidad a la característica de ganancia no ideal del AO.

Los filtros Sallen-Key tienen mayor sensibilidad pasiva y menor sensibilidad activa que los filtros Rauch o MFB, con lo cual son menos flexibles con la tolerancia de los componentes, y si bien es posible obtener circuitos con  $Q$  elevado, se requieren componentes con valores muy grandes, lo cual a su vez implica una mayor dispersión de valores.

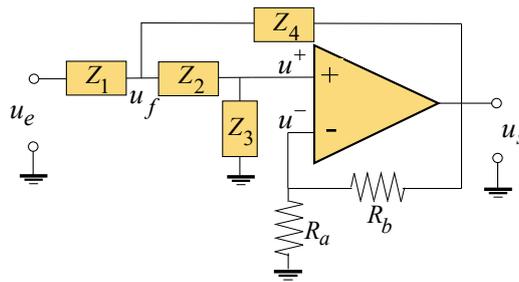
En la década de 1970, cuando era más fácil disponer de elementos pasivos de alta calidad a costos más razonables frente a los de un AO de alto rendimiento, la topología de Sallen-Key fue la más empleada.

En la actualidad hay decenas de AO de muy alto rendimiento; en cambio, los capacitores de alta calidad que son componentes extremadamente importantes en los filtros, son cada vez más escasos y relativamente más caros. Por ello ahora la elección comienza a inclinarse hacia la topología Rauch o MFB.

Sin embargo, no es posible tratar el campo completo del diseño de filtros activos en un capítulo. Por tal motivo, para implementar las funciones de transferencia rqueridas, se aplicará un enfoque tradicional utilizando una única forma de filtro activo: la topología Sallen-Key, que tiene la ventaja de implementar un factor de segundo orden con una única etapa de amplificador operacional. Hay muchas otras topologías que podrían elegirse, pero Sallen-Key es una configuración de probada efectividad.

### 10.5. Celdas con topología Sallen Key

La forma generalizada de la topología propuesta en 1955 por R. P. Sallen y E. L. Key es la que se muestra en la **Fig. 10.9**, en la cual los componentes pasivos del filtro se representan genéricamente por impedancias  $Z_i$  y los resistores  $R_a$  y  $R_b$  determinan la ganancia en la banda de paso del filtro.



**Fig. 10.9.** Topología generalizada de una celda Sallen-Key.

Para obtener la función de transferencia de este circuito generalizado, se aplica la primera ley de Kirchoff en los nodos  $u_f$ ,  $u^+$  y  $u^-$ . De este modo resulta:

Para el nodo  $u^-$ :

$$\left( \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} \right) u^- - \frac{1}{R_b} u_s = 0 \Rightarrow u^- = \frac{R_a}{R_a + R_b} u_s \tag{10-5}$$

para el nodo  $u^+$ :

$$\left( \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) u^+ - \frac{1}{Z_2} u_f = 0 \Rightarrow u_f = \left( 1 + \frac{Z_2}{Z_3} \right) u^+ \tag{10-6}$$

Para el nodo  $u_f$ :

$$\left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_4} \right) u_f - \frac{1}{Z_1} u_e - \frac{1}{Z_2} u^+ - \frac{1}{Z_4} u_s = 0 \tag{10-7}$$

Reemplazando con (10-6) en (10-7) y resolviendo para  $u^+$  resulta:

$$\left[ \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_4} \right) \left( 1 + \frac{Z_2}{Z_3} \right) - \frac{1}{Z_2} \right] u^+ - \frac{1}{Z_1} u_e - \frac{1}{Z_4} u_s = 0$$

$$u^+ = \frac{Z_2 Z_3 Z_4}{Z_2 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_3 + Z_2 Z_2 Z_4 + Z_2 Z_2 Z_1} u_e + \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{Z_2 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_3 + Z_2 Z_2 Z_4 + Z_2 Z_2 Z_1} u_s \tag{10-8}$$

Entonces observando que las expresiones (10-5) y (10-8) tienen la siguiente forma:

$$u^+ = b \cdot u_e + c \cdot u_s \tag{10-9}$$

$$u^- = d \cdot u_s \tag{10-10}$$

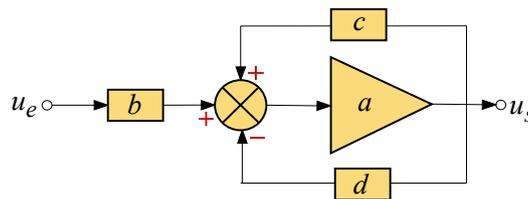
Siendo:

$$b = \frac{Z_2 Z_3 Z_4}{Z_2 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_3 + Z_2 Z_2 Z_4 + Z_2 Z_2 Z_1}$$

$$c = \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{Z_2 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_3 + Z_2 Z_2 Z_4 + Z_2 Z_2 Z_1}$$

$$d = \frac{R_a}{R_a + R_b}$$

La transferencia de tensión  $u_s/u_e$  del circuito realimentado puede plantearse directamente representando las expresiones (10-9) y (10-10) mediante el diagrama en bloques de la **Fig. 10.10**.



**Fig. 10.10.** Diagrama de flujo para resolver el sistema de ecuaciones planteadas para obtener  $H(s)$  de la celda Sallen-Key genérica.

Ahora por simple inspección de la **Fig. 10.10** puede obtenerse la expresión de la función de transferencia de la celda genérica Sallen Key:

$$u_s = a[(c-d)u_s + b u_e] \Rightarrow u_s [1 - a(c-d)] = a b u_e \Rightarrow \frac{u_s}{u_e} = \frac{a b}{1 - a(c-d)}$$

$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{b}{d} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{a \cdot d} - \frac{c}{d}} \tag{10-11}$$

Operación en condiciones ideales

Considerando que el AO tiene una respuesta en frecuencia adecuada aún en frecuencias bien por arriba de la frecuencia de corte del filtro, el producto  $a \cdot d$  en (10-11) es muy grande, y la función de transferencia dada por (10-11) resulta:

$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{b}{d} \cdot \frac{1}{1 - \frac{c}{d}} \tag{10-12}$$

Haciendo ahora

$$G = \frac{1}{d} = \frac{R_a + R_b}{R_a} = 1 + \frac{R_b}{R_a}$$

$$b = \frac{N_1}{D} = \frac{Z_2 Z_3 Z_4}{Z_2 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_3 + Z_2 Z_2 Z_4 + Z_2 Z_2 Z_1}$$

$$c = \frac{N_2}{D} = \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{Z_2 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_3 + Z_2 Z_2 Z_4 + Z_2 Z_2 Z_1}$$

Queda:

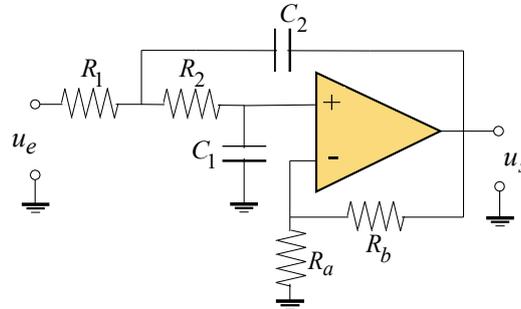
$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{G}{\frac{D}{N_1} - G \frac{N_2}{N_1}}$$

Resultando finalmente la función de transferencia *ideal* para la celda Sallen Key *genérica*:

$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{G}{\frac{Z_1 Z_2}{Z_3 Z_4} + \frac{Z_1}{Z_3} + \frac{Z_2}{Z_3} + (1-G) \frac{Z_1}{Z_4} + 1} \quad (10-13)$$

### 10.5.1. Filtro Sallen Key pasa bajos

El circuito Sallen Key configurado para una transferencia pasa bajos se muestra en la **Fig. 10.11**.



**Fig. 10.11.** Celda Sallen-Key pasa bajos.

Para esta configuración, comparando con la **Fig. 10.9** resulta:

$$Z_1 = R_1 \quad Z_2 = R_2 \quad Z_3 = \frac{1}{sC_1} \quad Z_4 = \frac{1}{sC_2} \quad G = 1 + \frac{R_b}{R_a}$$

Reemplazando con estos valores en (10-13) resulta la función de transferencia *ideal* para el filtro Sallen Key *pasa bajos*:

$$H(s) = \frac{U_s(s)}{U_e(s)} = \frac{G}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + [R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_1 C_2 (1-G)] s + 1} \quad (10-14)$$

Recordando la expresión (9-4) de la transferencia genérica de un filtro pasa bajos de segundo orden:

$$H(s) = \frac{K \omega_c^2}{s^2 + \frac{\omega_c}{Q_p} s + \omega_c^2} = \frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + \frac{1}{Q_p} \left(\frac{s}{\omega_c}\right) + 1} \quad (9-4)$$

en la cual  $\omega_c$  es la pulsación natural correspondiente al factor de segundo orden, y  $K = |H(j\omega)|_{\omega=0}$ , es decir, es la ganancia a la frecuencia central de la banda de paso, entonces comparando con (10-14) se deduce que:

$$K = G \quad (10-15)$$

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (10-16)$$

Lo que indica que  $\omega_c$  es la media geométrica de las pulsaciones de corte de las etapas individuales:

$$\omega_{c1} = 1/\sqrt{R_1 C_2} \quad \text{y} \quad \omega_{c2} = 1/\sqrt{R_2 C_1} \quad (10-17)$$

Y el factor de mérito del par de polos:

$$Q_p = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_1 C_2 (1-G)} \quad (10-18)$$

### Estrategias de diseño

El objetivo de diseño consiste en lograr que la celda de la **Fig. 10.11** tenga una transferencia con los valores de  $\omega_c$  y  $Q_p$ , los cuales deben ajustarse mediante las resistencias de  $R_1$  y  $R_2$  y las capacidades de  $C_1$  y  $C_2$  y mediante la ganancia  $G$  (a través de las resistencias de  $R_a$  y  $R_b$ ).

Aquí es muy importante tener en cuenta lo mencionado en el apartado **9.4.1** para comprender que, más allá de lo indicado por (10-15), la ganancia  $G$  de la celda *puede ser adoptada a conveniencia* sin la necesidad de hacerla igual a la constante  $K$  de la función  $H(s)$  obtenida analíticamente.

Evidentemente, son demasiadas variables de ajuste para solamente dos ecuaciones. Por ello existen diferentes estrategias para proceder en el cumplimiento de los objetivos, pero todas ellas consisten en aplicar una nueva parametrización de las expresiones, de manera que resulten *tres* parámetros de ajuste.

Esta simplificación consiste en hacer:

$$R_1 = mR \quad R_2 = R \quad C_1 = C \quad C_2 = nC \quad (10-19)$$

Siendo  $m$  y  $n$  factores de proporcionalidad (reales positivos), cuyos valores se deben adoptar convenientemente de manera tal que los valores de los componentes resulten disponibles en el mercado.

Con lo cual de (10-16) y (10-18) resulta:

$$\omega_C = \frac{1}{R C \sqrt{mn}} \quad (10-20)$$

$$Q_p = \frac{\sqrt{mn}}{m+1+mn(1-G)} \quad (10-21)$$

Con esta simplificación los parámetros de ajuste resultan ser  $m$ ,  $n$  y  $G$ . El uso de la ganancia  $G$  como variable de ajuste de  $Q_p$  puede hacerse sin conflictos dado que las especificaciones se hacen mediante pares de valores *frecuencia-atenuación* (y la atenuación es *relativa* al centro de la banda de paso), y por lo tanto la ganancia de la celda no afecta el cumplimiento de los objetivos de diseño, tal como se mencionó en el apartado 9.4.1.

Se observa que en la expresión de  $Q_p$  intervienen  $m$ ,  $n$  y  $G$  y en la expresión de  $\omega_C$  sólo intervienen  $m$  y  $n$ . Por lo tanto, adoptando el valor de dos de ellos con algún criterio, el tercero puede determinarse de la expresión de  $Q_p$  (con lo cual, esos tres valores ajustan el  $Q_p$  requerido). En cuanto al ajuste de  $\omega_C$  se logra mediante el valor de  $R$  que resulta de la expresión (10-20), adoptando un valor de  $C$  adecuado y los valores de  $m$  y  $n$  ya conocidos.

El valor de  $C$  se adopta y el valor de  $R$  se calcula, porque existe una mayor limitación de valores comerciales de capacidad; siendo mayor la variedad de valores de resistencias disponibles en el mercado. Ambos valores se harán corresponder, con el mejor ajuste posible, a una de las series Exx (E12, E24, E48, etc.) de valores normalizados (ver Apéndice D).

De manera que las alternativas serían:

- Estrategia I: *componentes proporcionales*. Adoptar  $m \neq 1$  y  $n \neq 1$ , y determinar a partir de (10-21) el valor de la ganancia  $G$  que se debe ajustar:

$$G = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{mn} - \frac{1}{Q_p \sqrt{mn}} \quad (10-22)$$

- Estrategia II: *componentes iguales*. Si bien puede analizarse como un caso particular de la Estrategia I muchos autores la consideran como un caso distinto. Consiste en adoptar  $m=1$  y  $n=1$  resultando entonces:

$$G = 3 - \frac{1}{Q_p} \quad (10-23)$$

- Estrategia III: *resistores iguales*. En este caso siempre se hace  $m=1$ , y se adopta algún valor conveniente de  $n$ . Entonces con  $m=1$  y  $n \neq 1$  en (10-22) se determina  $G$  y resulta:

$$G = 1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{Q_p \sqrt{n}} \quad (10-24)$$

Para adoptar un valor adecuado de  $n$ , hay que tener en cuenta que debe resultar  $G \geq 1$  y por lo tanto debe ocurrir que:

$$\frac{2}{n} - \frac{1}{\sqrt{n} Q_p} \geq 0 \quad (10-25)$$

Es decir:

$$n \leq 4Q_p^2 \quad (10-26)$$

El valor particular  $n = 4Q_p^2$  corresponde a  $G=1$ , que es un caso muy utilizado porque por un lado hace innecesarios los resistores  $R_a$  y  $R_b$  de la Fig. 10.11, pero además y lo más importante es que con los valores de  $R_1=R_2$  y  $C_1$  y  $C_2$  que resultan con este valor particular de  $n$ , la sensibilidad de  $Q_p$  a las variaciones de los valores de  $R$  resulta nula (ver Apartado 10.6.2).

- Estrategia IV: *capacitores iguales*. En este caso siempre se hace  $n=1$ , y se adopta algún valor conveniente de  $m$ . Entonces con  $m \neq 1$  y  $n=1$  en (10-22) se determina  $G$  y resulta:

$$G = 2 + \frac{1}{m} - \frac{1}{Q_p \sqrt{m}} \quad (10-27)$$

Nuevamente, para adoptar un valor adecuado de  $m$ , hay que tener en cuenta que debe resultar  $G \geq 1$  y por lo tanto debe ocurrir que:

$$1 + \frac{1}{m} - \frac{1}{Q_p \sqrt{m}} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad m - \frac{1}{Q_p} \sqrt{m} + 1 \geq 0 \quad (10-28)$$

Claramente si  $Q_p \geq 1$  esta condición se cumple para todos los valores reales positivos de  $m$ ; pero si  $Q_p < 1$  no se puede asegurar de manera tan categórica. De hecho, si se hallan las raíces de la expresión (10-28), con el signo de igualdad, resultan:

$$m_{1,2} = \left[ \frac{1}{2Q_p} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4Q_p^2} \right) \right]^2 \quad (10-29)$$

Entonces la expresión (10-29) da las soluciones de (10-28) con el signo de igualdad, que a su vez corresponde a (10-27) para  $G=1$ . Y en (10-29) se observa que si  $Q_p > 0,5$  no existen valores reales de esas soluciones. Es decir que para ningún valor real positivo de  $m$  se alcanza el signo de igualdad en (10-28), lo cual significa que  $G$  siempre será mayor que 1, no existe ningún valor real de  $m$  que consiga hacer  $G=1$ .

En consecuencia siempre que:

$$Q_p > \frac{1}{2} \quad (10-30)$$

la constante  $G$  de (10-27) será mayor que 1 para cualquier valor real positivo de  $m$ .

Para adoptar los mejores valores de  $m$  y  $n$ , un criterio a seguir puede ser considerar los valores más frecuentes de la relación entre dos valores de la serie Exx elegida para resistencias y capacidades. Estos valores pueden obtenerse de la Tabla D-IV del Apéndice D. Así, para las series E12 y E24 conviene considerar un factor de proporcionalidad 1,5; para la serie E48 un factor 1,4; etc.

Una vez determinados los valores de  $m$ ,  $n$  y  $G$ , se pueden determinar los valores de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $R_a$  y  $R_b$ . Todos estos valores se deberán corresponder con la serie de valores normalizados Exx (E12, E24, E48, etc.) que se adopte para los resistores y para los capacitores (Apéndice D). Lograr esta correspondencia podría requerir varios intentos con distintos valores de  $C$ . Pero también podría ocurrir que al cabo de varios intentos no se consiga esa correspondencia. En tal caso se debería reanudar el proceso volviendo e intentar con un valor diferente de  $m$  y ó  $n$ , según el caso.

### Ejemplo 10.1.

Sintetizar un filtro pasa bajos activo para el cual la relación  $|U_2/U_1|$  debe responder a la aproximación de *Chebyshev*, con una banda de paso de 1 kHz, dentro de la cual la atenuación no supere 0,5 dB, logrando que en la banda de supresión, para la frecuencia 5 kHz la atenuación sea 40 dB ó más por encima del valor correspondiente a  $\omega=0$ . Emplear la configuración Sallen Key.

### Resolución

Las especificaciones del pasa bajos son:

- Banda de paso:  
 $f_p = 10^3$  Hz       $\omega_p = 6,283 \cdot 10^3$  rad/s      y       $\alpha_p = 0,5$  dB
- Banda de atenuación:  
 $f_s = 5 \cdot 10^3$  Hz       $\omega_s = 31,46 \cdot 10^3$  rad/s      y       $\alpha_s = 40$  dB

### Cálculo del factor de rizado $\varepsilon$ y del orden $n$ del filtro con la aproximación de *Chebyshev*

El coeficiente de ondulación  $\varepsilon$  se obtiene a partir de la especificación de la máxima atenuación admitida en la banda de paso. La *atenuación máxima* en la banda de paso expresada en dB es igual a  $\alpha_p$  y se corresponderá con los valores máximos de  $V_n(\omega)$  en la banda de paso, es decir:  $V_n(\omega)=1$ . En consecuencia:

$$\alpha_p = 10 \log(1 + \varepsilon^2) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \sqrt{10^{0,1\alpha_p} - 1} = \sqrt{10^{0,1 \cdot 0,5} - 1} = 0,349$$

Para la especificación de la banda de supresión corresponde considerar:

$$A(\omega_s) = 10 \cdot \log \left\{ 1 + \varepsilon^2 \left[ \cosh \left( n \cosh^{-1} \left( \frac{\omega_s}{\omega_p} \right) \right) \right]^{2n} \right\} \geq \alpha_s \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{0,1\alpha_s} - 1}{10^{0,1\alpha_p} - 1}}}{\cosh^{-1} \left( \frac{\omega_s}{\omega_p} \right)}$$

Para los datos de este caso:

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{0,1 \cdot 40} - 1}{10^{0,1 \cdot 0,5} - 1}}}{\cosh^{-1} \left( \frac{6,283 \cdot 10^3}{31,46 \cdot 10^3} \right)} = \frac{6,35}{2,29} = 2,77$$

Es decir con la aproximación de *Chebyshev* el  $n$  que se debe adoptar es 3.

Función de transferencia que realiza la aproximación de *Chebyshev*

Los polos de  $|H(s)|^2$  resultan las 6 raíces de:

$$1 + \varepsilon^2 V_n^2(\omega) \Big|_{\omega=s/j} = 0$$

Y dado que en esta expresión  $\omega$  está normalizada respecto a  $\omega_p = 2\pi \cdot 10^3$  Hz, las raíces también lo estarán, y resultan dadas por (7-47), (7-48) y (7-49) para  $A=1$ :

$$s_k = \alpha_k + j\beta_k$$

con:

$$\alpha_k = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left( \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right) \left[ \left( \sqrt{\frac{1}{0,349^2} + 1} + \frac{1}{0,349} \right)^{1/3} - \left( \sqrt{\frac{1}{0,349^2} + 1} + \frac{1}{0,349} \right)^{-1/3} \right]$$

$$\beta_k = \frac{1}{2} \operatorname{cos} \left( \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right) \left[ \left( \sqrt{\frac{1}{0,349^2} + 1} + \frac{1}{0,349} \right)^{1/3} + \left( \sqrt{\frac{1}{0,349^2} + 1} + \frac{1}{0,349} \right)^{-1/3} \right]$$

$$k=1, 2, \dots, 6$$

De este modo resultan:

$$s_{1,4} = \pm 0,626456 \quad s_{2,3} = +0,313228 \pm j1,02193 \quad s_{5,6} = -0,313228 \pm j1,02193$$

Las cuales tienen simetría cuadrantal y se encuentran sobre una elipse.

Ahora  $H(s)$  se puede determinar mediante (7-43) considerando las raíces del semiplano izquierdo:

$$H(s) = \frac{1 / (2^{n-1} \cdot \varepsilon)}{\prod_{\forall s_k \in SPI} (s + s_k)} = \frac{1 / (2^{3-1} \cdot 0,349)}{(s + 0,6265)(s + 0,3132 - j1,0219)(s + 0,3132 + j1,0219)}$$

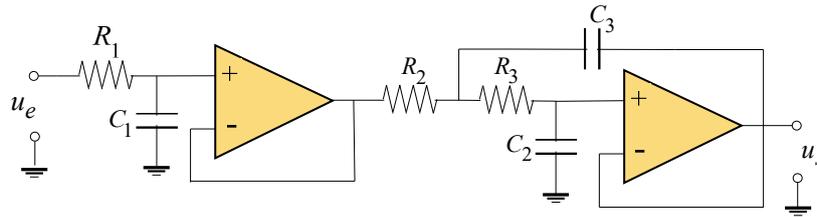
$$H(s) = \frac{0,7163}{(s + 0,6265)(s^2 + 0,6265s + 1,1425)}$$

Téngase en cuenta que esta expresión de  $H(s)$  está normalizada respecto de la pulsación  $\omega_p = 2\pi \cdot 10^3$  rad/s.

La expresión anterior de  $H(s)$  se reescribe convenientemente de manera de poner en evidencia la realización mediante dos celdas en cascada: una celda de primer orden y la otra, una celda Sallen Key de segundo orden:

$$H(s) = \frac{1}{\frac{s}{0,6265} + 1} \cdot \frac{0,7163 \cdot \frac{1}{1,1425}}{\left( \frac{s}{1,0689} \right)^2 + \frac{0,6265}{1,0689} \left( \frac{s}{1,0689} \right) + 1} = \frac{1}{\frac{s}{0,6265} + 1} \cdot \frac{1}{\left( \frac{s}{1,0689} \right)^2 + \frac{0,6265}{1,0689} \left( \frac{s}{1,0689} \right) + 1}$$

En este caso, la función de transferencia obtenida debe sintetizarse con ganancia unitaria de ambas celdas, lo cual además minimiza el número de componentes. De este modo, la síntesis a realizar requiere la determinación de los elementos del circuito que se muestra en la **Fig. 10.12**.



**Fig. 10.12.** Topología del filtro pasa bajos de tercer orden a sintetizar.

Para la celda de primer orden:

La función de transferencia normalizada respecto de  $\omega_p=2\pi 10^3$  para la celda de primer orden es:

$$H_1(s) = \frac{1}{\frac{s}{0,6265} + 1}$$

En la cual se ha considerado ganancia unitaria para frecuencia 0 (centro de la banda de paso).

Y por comparación con la transferencia que resulta para la celda de primer orden de ganancia unitaria:

$$H_1(s) = \frac{U_s(s)}{U_e(s)} = \frac{\frac{1}{sC_1}}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} = \frac{1}{s R_1 C_1 + 1}$$

Donde  $(R_1 C_1)^{-1}$  es la pulsación de corte de 3 dB ( $\omega_c$ ) correspondiente a la celda individual (que no es la pulsación de corte de 3 dB del filtro). Entonces:

$$K = 1$$

$$R_1 C_1 = \frac{1}{0,6265}$$

Expresando  $R_1$  en función de  $C_1$  y desnormalizando respecto de  $\omega_p=2\pi 10^3$  resulta el valor real:

$$R_1 = \frac{1}{0,6265 \cdot C_1 \cdot \omega_p}$$

Con la cual se procede dando valores a  $C_1$  en correspondencia con lista de valores normalizada E24 (Apéndice D), hasta obtener el mejor ajuste de  $R_1$  en este caso también con la lista de valores normalizada E24 (Apéndice D). El mejor ajuste se logra con los valores:

$R_1 = 16 \text{ k}\Omega;$	$C_1 = 16 \text{ nF}$
-----------------------------	-----------------------

Para la celda de segundo orden:

La función de transferencia normalizada respecto de  $\omega_p=2\pi 10^3$  para la celda de segundo orden es:

$$H_2(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{1,0689}\right)^2 + \frac{0,6265}{1,0689} \left(\frac{s}{1,0689}\right) + 1}$$

Y comparada con la expresión (9-4) de la transferencia genérica de un filtro pasa bajos de segundo orden:

$$H(s) = \frac{K \omega_c^2}{s^2 + \frac{\omega_c}{Q_p} s + \omega_c^2} = \frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + \frac{1}{Q_p} \left(\frac{s}{\omega_c}\right) + 1}$$

Por simple inspección de la función  $H(s)$  a sintetizar, se deducen los siguientes valores:

$$\omega_c = \sqrt{1,1425} = 1,0689 \qquad Q_p = \frac{1,0689}{0,6265} = 1,706$$

Empleando la *Estrategia III* (resistores iguales,  $m=1$ ) y considerando el caso de adoptar la ganancia  $G=1$ , el tercer factor de diseño  $n$  resulta:

$$n = 4Q_p^2 = 4 \cdot 1,706^2 = 11,64$$

Se adopta un valor de  $C$  que se corresponda con la serie de valores normalizados E24 (Apéndice D):

$$C = 11 \text{ nF}$$

Con el valor de  $n$  calculado, y teniendo en cuenta (10-19), los valores de los capacitores  $C_2$  y  $C_3$  resultan:

$$C_2 = 11 \text{ nF}$$

$$C_3 = 11,64 \cdot 11 \cdot 10^{-9} = 128 \text{ nF}$$

Ahora de (10-20) se determina  $R$  y desnormalizando respecto de  $\omega_p = 2\pi \cdot 10^3$  resulta:

$$R = \frac{1}{\omega_c C \sqrt{mn}} = \frac{1}{1,0689 \cdot 2\pi \cdot 10^3 \cdot 11 \cdot 10^{-9} \sqrt{11,64}} = 3967,5 \Omega$$

Habiéndose adoptado  $m=1$ , y teniendo en cuenta (10-19), los valores de los resistores  $R_2$  y  $R_3$  resultan:

$$R_2 = R_3 = 3967,5 \Omega$$

Los valores de los componentes adoptados finalmente dentro de la serie E24 de valores normalizados, tanto para resistores como para capacitores (Apéndice D), son:

$$R_2 = R_3 = 3,9 \text{ k}\Omega \quad C_2 = 11 \text{ nF} \quad C_3 = 130 \text{ nF}$$

Con todos los valores obtenidos se efectúa la simulación en PSpice, utilizando el amplificador operacional TL082 (Fig. 10.13). La simulación se configuró para efectuar el barrido en frecuencia mediante el generador de tensión de 1 V de amplitud y frecuencia variable entre 10 Hz y 10 kHz.

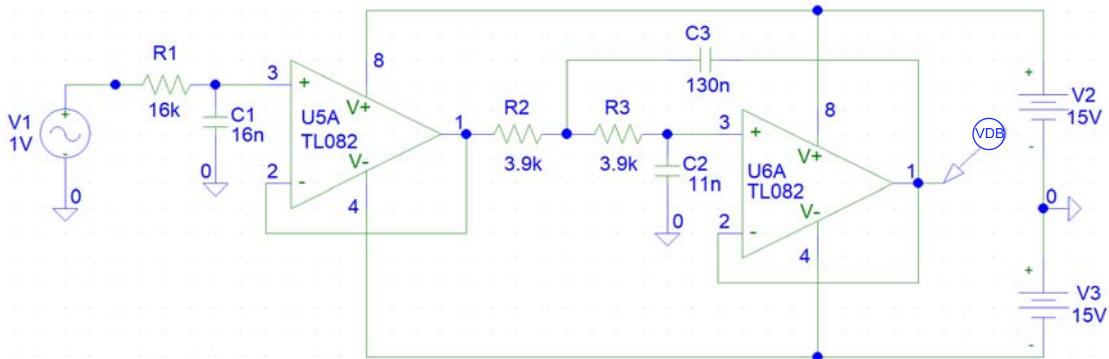


Fig. 10.13. . Circuito simulado con PSpice.

De este modo, la salida de la celda de segundo orden en decibeles en función de la frecuencia corresponde a la curva de transferencia de tensión de salida a tensión de entrada que se muestra en la Fig. 10.14, en la cual el eje de frecuencias es logarítmico y se abarca el rango de frecuencias que permite corroborar el cumplimiento de la especificación.

En la misma Fig. 10.14 se indican las lecturas frecuencia-magnitud en dB de puntos de la curva obtenidos con los cursores sobre la salida de la simulación, que corresponden al centro de la banda de paso especificada y a la frecuencia de la banda de atenuación para la cual se especificó la mínima atenuación admitida.

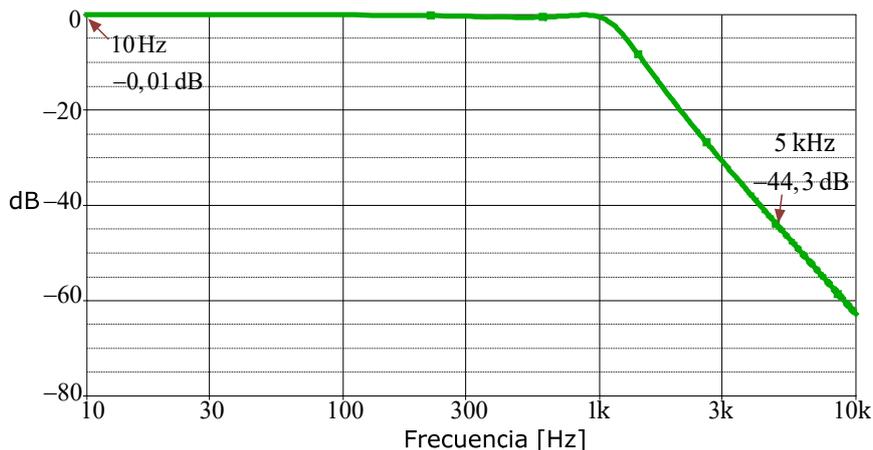
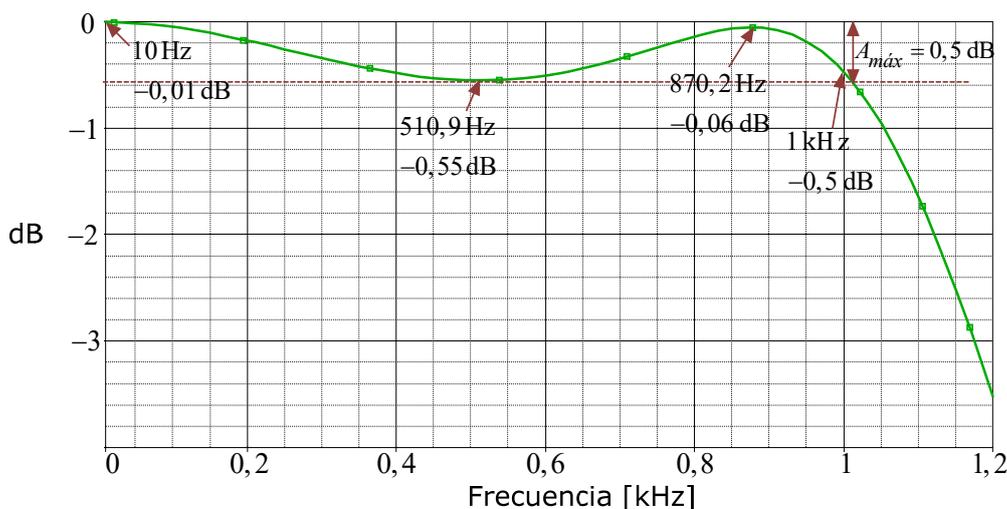


Fig. 10.14. Respuesta en frecuencia obtenida con la simulación.

En la **Fig. 10.15** se muestra el detalle correspondiente a la banda de paso, en este caso, con el eje de frecuencias en escala lineal.



**Fig. 10.15.** Respuesta en frecuencia obtenida con la simulación. Cumplimiento de las especificaciones en la banda de paso.

En la misma **Fig. 10.15** se indican las lecturas frecuencia-magnitud en dB de puntos de la curva obtenidos con los cursores sobre la salida de la simulación. Esos puntos corresponden al centro de la banda de paso (aproximadamente), al mínimo y máximo de la ondulación en la banda de paso y al ancho de la banda de paso especificada.

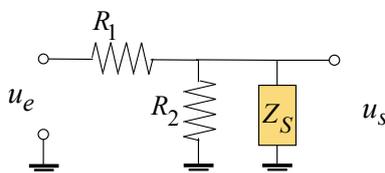
Se observa que hasta 1,01 kHz,  $\alpha_p=0,5$  dB y que para 5 kHz la curva pasa 44 dB por debajo del valor para frecuencia 0, es decir que se cumple con el requisito de  $A_{min}=40$  dB. Estos valores permiten comprobar que el diseño satisface correctamente los requisitos especificados.

Operación en condiciones no ideales

Hasta aquí, todos los razonamientos se basaron en un amplificador operacional ideal, pero hay una frecuencia límite por encima de la cual esto ya no es una suposición válida.

Existen tres modos básicos de operación: por debajo del límite, por encima del límite, y en el área de la frecuencia de corte. Si el amplificador tiene una respuesta en frecuencia adecuada más allá de la frecuencia de corte del filtro, la operación del filtro será correcta.

Para mostrar el funcionamiento esperado del circuito en frecuencias muy por encima del límite, se debe emplear, para la celda pasa bajos de la **Fig. 10.11**, el modelo válido para altas frecuencias que se muestra en la **Fig. 10.16**.



**Fig. 10.16.** Circuito equivalente para altas frecuencias.

La suposición que se hace aquí es que, para frecuencias muy elevadas,  $C_1$  y  $C_2$  son cortocircuitos efectivos cuando se comparan con las resistencias  $R_1$  y  $R_2$ , de modo que la entrada del amplificador se encuentra a tierra para CA. En respuesta, el amplificador genera en su salida una conexión a tierra para CA limitada solo por su impedancia de salida  $Z_S$ . La función de transferencia para este modelo resulta:

$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{Z_S} + 1} \tag{10-31}$$

Y teniendo en cuenta que  $Z_S \ll R_1$

$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{Z_S}{R_1} \tag{10-32}$$

$Z_S$  es la impedancia de lazo cerrado que depende de la transferencia del lazo  $a.d$  en la **Fig. 10.10**, y de la impedancia a lazo abierto  $z_S$ :

$$Z_S = \frac{z_S}{1 + a \cdot d} \tag{10-33}$$

El factor de realimentación  $d$  es constante y está determinado por  $R_a$  y  $R_b$ , pero la ganancia a lazo abierto  $a$  depende de la frecuencia. Con el modelo del polo dominante, la ganancia de bucle abierto del amplificador disminuye en 20 dB/dec para las frecuencias de operación utilizables. Suponiendo que  $z_S$  es principalmente resistivo (generalmente una suposición válida hasta 100 MHz),  $Z_S$  aumenta a razón de 20 dB/dec. La función de transferencia parece un paso alto de primer orden. En frecuencias superiores a aproximadamente 100 MHz, la inductancia parásita en la salida comienza a ser importante y la función de transferencia pasa a comportarse como un paso altos de segundo orden. Debido a la capacitancia parásita en el circuito, a cierta frecuencia más alta, la función de transferencia pasa altos también se desactivará.

10.5.2. Filtro Sallen Key pasa altos

El circuito Sallen Key configurado para una transferencia pasa altos se muestra en la **Fig. 10.17**.

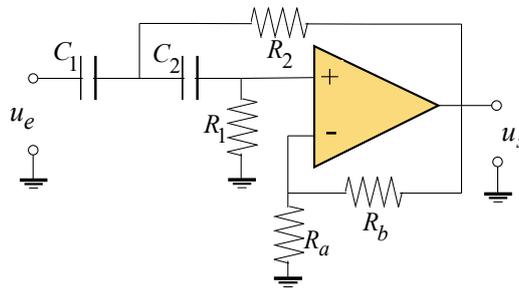


Fig. 10.17. Celda Sallen-Key pasa altos.

Para esta configuración, comparando con la **Fig. 10.9** resulta:

$$Z_1 = \frac{1}{sC_1} \quad Z_2 = \frac{1}{sC_2} \quad Z_3 = R_1 \quad Z_4 = R_2 \quad G = 1 + \frac{R_b}{R_a}$$

Reemplazando con estos valores en (10-13) resulta la función de transferencia *ideal* para el filtro Sallen Key *pasa altos*:

$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{G}{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2} + \left[ \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{(1-G)}{R_1 C_2} \right] \frac{1}{s} + 1} \tag{10-34}$$

Operando convenientemente resulta:

$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{G R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + [R_2 C_2 + R_2 C_1 + R_1 C_2 (1-G)] s + 1} \tag{10-35}$$

Recordando la expresión (9-7) de la transferencia genérica de un filtro pasa altos de segundo orden:

$$H(s) = \frac{K \left( \frac{s}{\omega_c} \right)^2}{\left( \frac{s}{\omega_c} \right)^2 + \frac{1}{Q_p} \left( \frac{s}{\omega_c} \right) + 1} = \frac{K s^2}{s^2 + \frac{\omega_c}{Q_p} s + \omega_c^2} \tag{9-7}$$

en la cual  $\omega_c$  es la pulsación natural correspondiente al factor de segundo orden, y  $K = |H(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty}$ , es decir, es la ganancia a la frecuencia central de la banda de paso, entonces comparando con (10-35) se deduce que:

$$K = G \tag{10-36}$$

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \tag{10-37}$$

Y el factor de mérito del par de polos:

$$Q_p = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{R_2 C_2 + R_2 C_1 + R_1 C_2 (1-G)} \quad (10-38)$$

### Estrategias de diseño

El objetivo de diseño consiste en lograr que la celda de la **Fig. 10.17** tenga una transferencia con los valores de  $\omega_C$  y  $Q_p$ , los cuales deben ajustarse mediante las resistencias de  $R_1$  y  $R_2$  y las capacidades de  $C_1$  y  $C_2$  y mediante la ganancia  $G$  (a través de las resistencias de  $R_a$  y  $R_b$ ).

Nuevamente es muy importante tener en cuenta lo mencionado en el apartado **9.4.1** para comprender que, más allá de lo indicado por (10-36), la ganancia  $G$  de la celda *puede ser adoptada a conveniencia* sin la necesidad de hacerla igual a la constante  $K$  de la función  $H(s)$  obtenida analíticamente.

Evidentemente, son demasiadas variables de ajuste para solamente dos ecuaciones. Por ello existen diferentes estrategias para proceder en el cumplimiento de los objetivos, pero todas ellas consisten en aplicar una nueva parametrización de las expresiones, de manera que resulten *tres* parámetros de ajuste.

Esta simplificación consiste en hacer otra vez:

$$R_1 = mR \quad R_2 = R \quad C_1 = C \quad C_2 = nC \quad (10-39)$$

Siendo  $m$  y  $n$  factores de proporcionalidad (reales positivos), cuyos valores se adoptan convenientemente de manera tal que los valores de los componentes resulten disponibles en el mercado.

Con lo cual de (10-37) y (10-38) resulta:

$$\omega_C = \frac{1}{R C \sqrt{mn}} \quad (10-40)$$

$$Q_p = \frac{\sqrt{mn}}{n+1+mn(1-G)} \quad (10-41)$$

Con esta simplificación los parámetros de ajuste resultan ser  $m$ ,  $n$  y  $G$ . El uso de la ganancia  $G$  como variable de ajuste puede hacerse sin conflictos dado que las especificaciones se hacen mediante pares de valores *frecuencia-atenuación* (y la atenuación es *relativa* al centro de la banda de paso), y por lo tanto la ganancia de la celda no afecta el cumplimiento de los objetivos de diseño, tal como se mencionó en el apartado **9.4.1**.

Se observa que en la expresión de  $Q_p$  intervienen  $m$ ,  $n$  y  $G$  y en la expresión de  $\omega_C$  sólo intervienen  $m$  y  $n$ . Por lo tanto, adoptando el valor de dos de ellos con algún criterio, el tercero puede determinarse de la expresión de  $Q_p$  (con lo cual, esos tres valores ajustan el  $Q_p$  requerido). En cuanto al ajuste de  $\omega_C$  se logra mediante el valor de  $R$  que resulta de la expresión (10-40), adoptando un valor de  $C$  adecuado y los valores de  $m$  y  $n$  ya conocidos.

El valor de  $C$  se adopta y el valor de  $R$  se calcula, porque los valores comerciales de capacidad son limitados; siendo mayor la variedad de valores de resistencias disponibles en el mercado. Ambos valores se harán corresponder, con el mejor ajuste posible, a una de las series Exx (E12, E24, E48, etc.) de valores normalizados (ver Apéndice D).

De manera que las alternativas serían:

- Estrategia I: *componentes proporcionales*. Adoptar  $m \neq 1$  y  $n \neq 1$ , y determinar a partir de (10-41) el valor de la ganancia  $G$  que se debe ajustar:

$$G = 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{mn} - \frac{1}{Q_p \sqrt{mn}} \quad (10-42)$$

- Estrategia II: *componentes iguales*. Si bien puede analizarse como un caso particular de la Estrategia I muchos autores la consideran como un caso distinto. Consiste en adoptar  $m=1$  y  $n=1$  resultando entonces:

$$G = 3 - \frac{1}{Q_p} \quad (10-43)$$

- Estrategia III: *resistores iguales*. En este caso siempre se hace  $m=1$ . y se adopta algún valor conveniente de  $n$ . Entonces con  $m=1$  y  $n \neq 1$  en (10-22) se determina  $G$  y resulta:

$$G = 2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{Q_p \sqrt{n}} \quad (10-44)$$

Que, por la similitud con la expresión (10-27) vale el mismo análisis, y por lo tanto el valor de  $n$  a adoptar puede ser *cualquier valor real positivo* siempre que:

$$Q_p > \frac{1}{2} \quad (10-45)$$

- Estrategia IV: *capacitores iguales*. En este caso siempre se hace  $n=1$ , y se adopta algún valor conveniente de  $m$ . Entonces con  $m \neq 1$  y  $n=1$  en (10-22) se determina  $G$  y resulta:

$$G = 1 + \frac{2}{m} - \frac{1}{Q_p \sqrt{m}} \quad (10-46)$$

Que, por la similitud con la expresión (10-24) vale el mismo análisis, y por lo tanto el valor de  $m$  a adoptar debe cumplir la condición:

$$m \leq 4Q_p^2 \quad (10-47)$$

Para adoptar los valores de  $m$  y  $n$ , un criterio a seguir puede ser considerar los valores más frecuentes de la relación entre dos valores de la serie Exx elegida para resistencias y capacidades. Estos valores pueden obtenerse de la Tabla D-IV del Apéndice D. Así, para las series E12 y E24 conviene considerar un factor de proporcionalidad 1,5; para la serie E48 un factor 1,4; etc.

Una vez determinados los valores de  $m$ ,  $n$  y  $G$ , se pueden determinar los valores de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $R_a$  y  $R_b$ . Todos estos valores se deberán corresponder con la serie de valores normalizados Exx (E12, E24, E48, etc.) que se adopte para los resistores y para los capacitores (Apéndice D). Lograr esta correspondencia podría requerir varios intentos con distintos valores de  $C$ . Pero también podría ocurrir que al cabo de varios intentos no se consiga esa correspondencia. En tal caso se debería reanudar el proceso volviendo e intentar con un valor diferente de  $m$  y ó  $n$ , según el caso.

### Ejemplo 10.2.

Sintetizar un filtro pasa altos activo configuración Sallen Key para lograr una transferencia  $|U_2/U_1|$  que responda a la aproximación de *Butterworth*. Esta función de transferencia para frecuencias superiores a  $f_p = 100$  kHz debe encontrarse dentro de una cota máxima de 1 dB (banda de paso). En la banda de supresión, para  $f_s = 10$  kHz,  $|U_2/U_1|$  debe ser 60 dB ó más por debajo del valor correspondiente a  $\omega = \infty$ .

### Resolución

Las especificaciones del pasa altos son:

- Banda de paso:

$$f_p = 10^5 \text{ Hz} \quad \omega_p = 6,283 \cdot 10^5 \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad \alpha_p = 1 \text{ dB}$$

- Banda de atenuación:

$$f_s = 10^4 \text{ Hz} \quad \omega_s = 6,283 \cdot 10^4 \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad \alpha_s = 60 \text{ dB}$$

### Transformación de las especificaciones al dominio del pasa bajos equivalente

- Banda de paso:

$$\overline{\omega}_p = 1,592 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad \alpha_p = 1 \text{ dB}$$

- Banda de atenuación:

$$\overline{\omega}_s = 1,592 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad \alpha_s = 60 \text{ dB}$$

### Cálculo del factor de rizado $\varepsilon$ y del orden $n$ del pasa bajos equivalente con la aproximación de *Butterworth*

Para cumplir con la especificación de la máxima atenuación admitida en la banda de paso, debe ser:

$$10 \cdot \log [1 + \varepsilon^2] = \alpha_p \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \sqrt{10^{0,1 \cdot \alpha_p} - 1} = \sqrt{10^{0,1} - 1} = \sqrt{0,2589} = 0,5088$$

Para cumplir con la mínima atenuación admitida en la banda de atenuación corresponde considerar:

$$n \geq \frac{\log \left[ \frac{10^{0,1 \cdot \alpha_s} - 1}{10^{0,1 \cdot \alpha_p} - 1} \right]}{2 \log \left( \frac{\overline{\omega}_s}{\overline{\omega}_p} \right)} = \frac{\log \left[ \frac{10^{0,1 \cdot 60} - 1}{10^{0,1} - 1} \right]}{2 \log \left( \frac{1,592 \cdot 10^{-5}}{1,592 \cdot 10^{-6}} \right)} = 3,29$$

Es decir con la aproximación de *Butterworth* el  $n$  que se debe adoptar es 4.

Función de transferencia que realiza la aproximación de *Butterworth*

La forma más simple de obtener una expresión polinómica de la función de transferencia  $H(s)$  del filtro pasa altos normalizado, es procediendo de la siguiente manera (este procedimiento se aplica tanto para la aproximación de *Butterworth* como de *Chebyshev*, aplicando las expresiones adecuadas a cada caso):

- 1) Conocidos  $\varepsilon$  y  $n$ , aplicar la aproximación de *Butterworth* para obtener la expresión de  $|H(j\omega)|$  del filtro *pasa bajos normalizado*:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 \omega^{2n}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0,5088^2 \omega^8}}$$

- 2) reemplazar en la expresión anterior a  $\omega$  por  $s/j$  y obtener la expresión de  $\overline{H(s)}$ ;

$$\overline{H(s)}^2 = \frac{1}{1+0,2589 s^8} = \frac{3,8625}{s^8 + 3,8625}$$

- 3) determinar los  $2n$  polos y los  $2n$  ceros de  $\overline{H(s)}$

- Los ceros de  $\overline{H(s)}$  son 8 y se encuentran todos en infinito.
- Los polos de  $\overline{H(s)}$  también son 8 y serán las raíces de:

$$s^8 + 3,8625 = 0 \Rightarrow s_k = \sqrt[8]{-3,8625} = \sqrt[8]{3,8625} \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{8}\right)} = 1,184 \cdot e^{j(2k+1)\frac{\pi}{8}} \quad k=0, 1, 2, \dots, 7$$

Entonces los 8 polos resultan:

$$\pm 1,0939 \pm j0,4531 \quad \pm 0,4531 \pm j1,0939$$

Los cuales tienen simetría cuadrantal y se encuentran ubicados sobre una circunferencia de radio  $\sqrt[8]{3,8625} = 1,184$ .

- 4) Confeccionar  $\overline{H(s)}$  empleando (7-21), es decir, con la mitad de los polos de  $\overline{H(s)}$  (los del semiplano izquierdo) y la mitad de los ceros los ceros de  $\overline{H(s)}$  (los que se encuentran en el semiplano izquierdo y/o la mitad de los que eventualmente se encuentren en el origen)

$$\overline{H(s)} = \frac{\sqrt{3,8625}}{(s+1,0939-j0,4531)(s+1,0939+j0,4531)(s+0,4531-j1,0939)(s+0,4531+j1,0939)}$$

$$\overline{H(s)} = \frac{1,9653}{(s^2 + 2,1878s + 1,4019)(s^2 + 0,9062s + 1,4019)}$$

- 5) aplicar la transformación  $\bar{s} = 1/s$  a  $\overline{H(s)}$  para obtener la expresión de  $H(s)$  del pasa altos normalizado

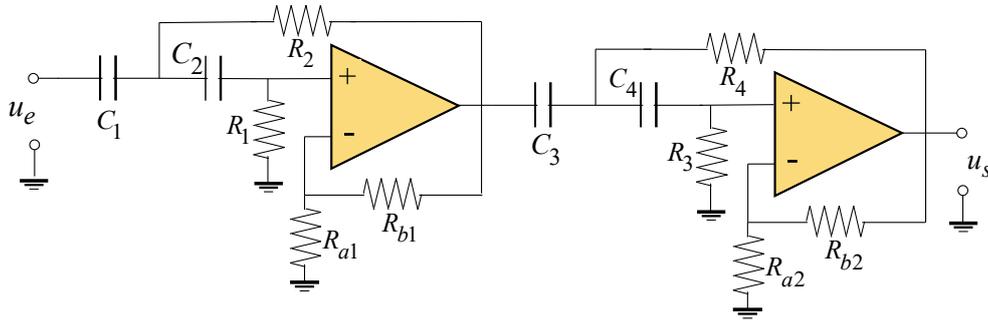
$$H(s) = \frac{1,9653}{\left[\left(\frac{1}{s}\right)^2 + 2,1878 \frac{1}{s} + 1,4019\right] \left[\left(\frac{1}{s}\right)^2 + 0,9062 \frac{1}{s} + 1,4019\right]}$$

$$H(s) = \frac{1,9653 s^4}{(1,4019)^2} \frac{1}{\left[\frac{1}{1,4019} + \frac{2,1878}{1,4019} s + s^2\right] \left[\frac{1}{1,4019} + \frac{0,9062}{1,4019} s + s^2\right]}$$

$$H(s) = \frac{s^4}{(s^2 + 1,5606s + 0,7133)(s^2 + 0,6464s + 0,7133)}$$

Se considera importante tener en cuenta que esta es la expresión de  $H(s)$  del filtro pasa altos y que está normalizada respecto de la pulsación  $\omega_p = 2\pi 10^5$  rad/s.

La expresión anterior de  $H(s)$  pone en evidencia que la síntesis puede efectuarse mediante dos celdas de segundo orden, por lo tanto la síntesis a realizar requiere la determinación de los elementos del circuito que se muestra en la **Fig. 10.18**.



**Fig. 10.18.** Topología del filtro pasa altos de cuarto orden a sintetizar.

Primera celda de segundo orden:

La función de transferencia normalizada respecto de  $\omega_p=2\pi \cdot 10^5$  para la celda de segundo orden es:

$$H_1(s) = \frac{s^2}{s^2 + 1,5606s + 0,7133} = \frac{\frac{1}{0,7133}s^2}{\frac{s^2}{0,7133} + \frac{1,5606}{0,7133}s + 1} = \frac{1,4019 s^2}{\left(\frac{s}{0,8446}\right)^2 + \frac{1,5606}{0,8446}\left(\frac{s}{0,8446}\right) + 1}$$

Y por comparación con la expresión (9-7) de la transferencia genérica de un filtro pasa altos de segundo orden:

$$H(s) = \frac{K s^2}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + \frac{1}{Q_p}\left(\frac{s}{\omega_c}\right) + 1}$$

Se deducen los siguientes valores:

$$\omega_c = \sqrt{0,7133} = 0,8446 \qquad Q_p = \frac{0,8446}{1,5606} = 0,5412$$

Como ya se ha visto (apartado 9.4.1), se puede prescindir de la ganancia  $K$  de la  $H(s)$  ya que cualquier valor que se sintetice no altera el cumplimiento de las especificaciones.

Esta etapa se sintetizará aplicando la *Estrategia IV* (capacitores iguales,  $n=1$ ) con  $G=1$ . Ahora se comienza el proceso descrito en 10.5.2 que puede requerir algunas iteraciones para obtener valores de capacitores y resistores compatibles con la lista de valores normalizados E24 (Apéndice D) que es la que se empleará.

Entonces se determina el tercer parámetro de diseño  $m$ :

$$m = 4Q_p^2 = 4 \cdot (0,5412)^2 = 1,1716$$

Luego de algunas iteraciones repitiendo la secuencia de adoptar un valor de  $C$  (compatible con la lista de valores normalizados E24) y determinar  $R$  para calcular  $R_1$  y  $R_2$  (que también resulten valores compatibles con la lista de valores normalizados E24), se llegó a los valores que arrojaron el menor apartamiento de valores adoptados respecto de los calculados.

Se adopta:

$$C = 1,1 \text{ nF}$$

De (10-40) se obtiene, ya desnormalizando  $\omega_c$  respecto de  $\omega_p$ :

$$R = \frac{1}{\omega_c \cdot \omega_p \cdot C \cdot \sqrt{m}} = \frac{1}{0,8446 \cdot 2\pi \cdot 10^5 \cdot 1,1 \cdot 10^{-9} \cdot \sqrt{1,1716}} = 1582,66 \Omega$$

Ahora, con los valores de  $C$  y  $R$  se determinan los valores de los componentes  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $C_1$  y  $C_2$ , resultando los siguientes valores:

$$C_1 = C_2 = C = 1,1 \text{ nF}$$

$$R_1 = m \cdot R = 1,1716 \cdot 1582,66 = 1854,23 \Omega \quad R_2 = R = 1582,66 \Omega$$

Finalmente para la primera etapa se adoptan los valores de los componentes de manera que resulten dentro de la serie E24 de valores normalizados (Apéndice D):

$R_{a1} = \infty$	$R_{b1} = 0$	$R_1 = 1,8 \text{ k}\Omega$	$R_2 = 1,6 \text{ k}\Omega$	$C_1 = 1,1 \text{ nF}$	$C_2 = 1,1 \text{ nF}$
-------------------	--------------	-----------------------------	-----------------------------	------------------------	------------------------

Segunda celda de segundo orden:

La función de transferencia normalizada respecto de  $\omega_p = 2\pi \cdot 10^5$  para la celda de segundo orden es:

$$H_2(s) = \frac{s^2}{s^2 + 0,6464s + 0,7133} = \frac{\frac{1}{0,7133}s^2}{\frac{s^2}{0,7133} + \frac{0,6464}{0,7133}s + 1} = \frac{1,4019 s^2}{\left(\frac{s}{0,8446}\right)^2 + \frac{0,6464}{0,8446}\left(\frac{s}{0,8446}\right) + 1}$$

Procediendo de manera enteramente similar a la celda anterior, se deducen los siguientes valores:

$$K = 1,4019 \quad \omega_c = \sqrt{0,7133} = 0,8446 \quad Q_p = \frac{0,8446}{0,6464} = 1,3066$$

Prescindiendo nuevamente de la ganancia  $K$  de  $H(s)$  ya que cualquier valor que se sintetice no altera el cumplimiento de las especificaciones.

Esta etapa se sintetizará aplicando la *Estrategia III* (resistores iguales,  $m=1$ ), que en este caso resulta aplicable por ser  $Q_p > 0,5$ . Se hará que la etapa introduzca una ganancia ( $G \neq 1$ ) que resultará como consecuencia de adoptar el parámetro  $n$ , como la relación de valores más frecuente en la lista E24, que es la que se empleará. De la Tabla D-4 del Apéndice D puede adoptarse como valor más conveniente  $n=1,5$ .

Entonces se determina el tercer parámetro de diseño  $G$  mediante (10-44):

$$G = 2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{Q_p \sqrt{n}} = 2 + \frac{1}{1,5} - \frac{1}{1,3066 \sqrt{1,5}} = 2,0418$$

La ganancia  $K$  requerida puede lograrse mediante los siguientes valores de  $R_{a2}$  y  $R_{b2}$ , obtenidos por sucesivos intentos de prueba y error, tomando pares de valores de la serie E24 (ver Apéndice D):

$R_{a2} = 1,5 \text{ k}\Omega$	$R_{b2} = 1,6 \text{ k}\Omega$
--------------------------------	--------------------------------

Estos valores determinan una ganancia sintetizada:

$$G_S = 1 + \frac{R_{b2}}{R_{a2}} = 1 + \frac{1,6}{1,5} = 2,067$$

Con lo cual el error cometido en la ganancia resulta 1,2%.

A los fines de ejemplificar más ampliamente, en este caso se empleará la *estrategia III* (resistores iguales). Ahora se comienza el proceso descrito en 10.5.2 para la *estrategia III* que puede requerir algunas iteraciones para obtener valores de capacitores y resistores compatibles con la lista de valores normalizados E24 (Apéndice D).

Finalmente el último paso de dicha iteración corresponde a los siguientes valores:

El valor de  $C$  compatible con la lista E24 que se adoptó resultó:

$$C = 1,2 \cdot 10^{-9}$$

Con este valor, con los valores  $m=1$  y  $n=1,5$  y con  $\omega_c = 0,8446$  (que se debe desnormalizar respecto de  $\omega_p = 2\pi \cdot 100 \text{ krad/s}$ ) reemplazando en (10-40) se obtiene:

$$R = \frac{1}{\omega_c \cdot \omega_p \cdot C \cdot \sqrt{mn}} = \frac{1}{0,8446 \cdot 2\pi \cdot 10^5 \cdot 1,2 \cdot 10^{-9} \cdot \sqrt{1,5}} = 1282,16 \Omega$$

Ahora, con los valores de  $C$  y  $R$ , empleando (10-39), se determinan los valores de los componentes  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $C_3$  y  $C_4$ , resultando los siguientes valores:

$$R_3 = m \cdot R = 1 \cdot 1282,16 = 1282,16 \Omega \quad R_4 = R = 1282,16 \Omega$$

$$C_3 = C = 1,2 \text{ nF} \quad C_4 = n \cdot C = 1,5 \cdot 1,2 \cdot 10^{-9} = 1,8 \text{ nF}$$

Finalmente para la segunda etapa se adoptan los valores de los componentes de manera que resulten dentro de la serie E24 de valores normalizados (Apéndice D):

$R_{a2} = 1,5 \text{ k}\Omega$	$R_{b2} = 1,6 \text{ k}\Omega$	$R_3 = 1,3 \text{ k}\Omega$	$R_4 = 1,3 \text{ k}\Omega$	$C_3 = 1,2 \text{ nF}$	$C_4 = 1,8 \text{ nF}$
--------------------------------	--------------------------------	-----------------------------	-----------------------------	------------------------	------------------------

Con todos los valores obtenidos se efectúa la simulación en PSpice, utilizando el amplificador operacional TL082 (Fig. 10.19). La simulación se configuró para efectuar el barrido en frecuencia mediante el generador de tensión de 1 V de amplitud y frecuencia variable entre 1 kHz y 1 MHz.

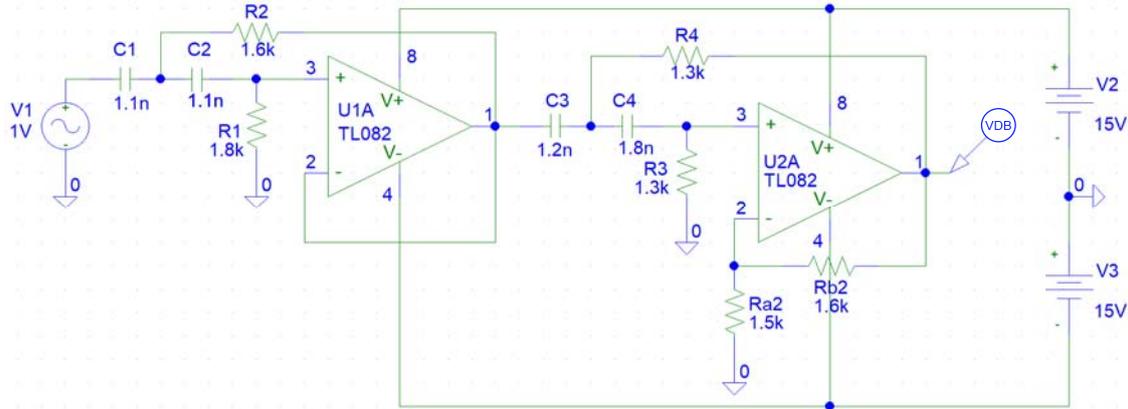


Fig. 10.19. Circuito simulado con PSpice.

De este modo, la salida de la segunda celda (en decibeles) en función de la frecuencia corresponde a la curva de transferencia de tensión de salida a tensión de entrada que se muestra en la Fig. 10.20.

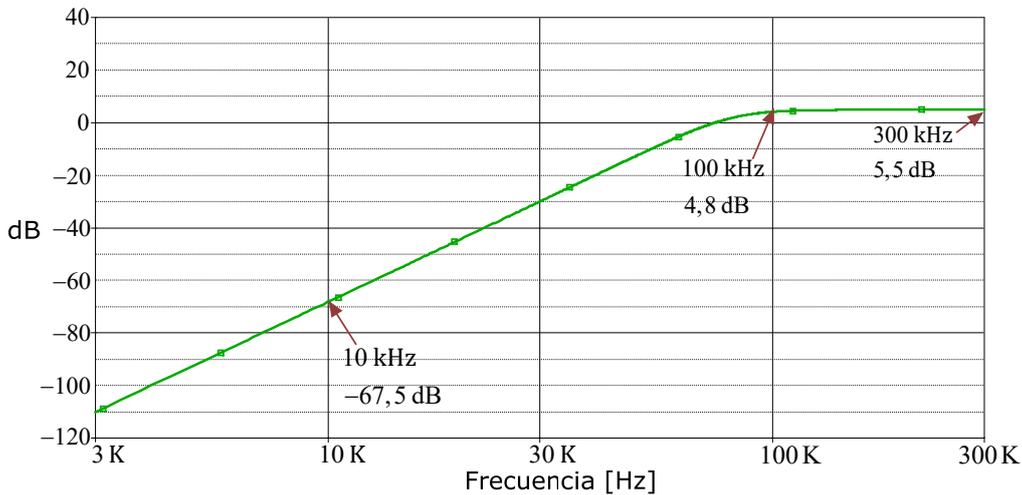


Fig. 10.20. Respuesta en frecuencia obtenida con la simulación: cumplimiento de las especificaciones.

En esta figura el eje de frecuencias es logarítmico y se abarca el rango de frecuencias que permite corroborar el cumplimiento de la especificación.

En la misma Fig. 10.20 se han indicado los valores de puntos de la curva obtenidos con los cursores sobre la salida de la simulación. Esos puntos corresponden a la atenuación en la banda de paso, al ancho de banda de 1 dB especificado para la banda de paso y a la frecuencia de la banda de atenuación para la cual se especificó la mínima atenuación admitida. Estos valores permiten comprobar que el diseño satisface correctamente los requisitos especificados.

Operación en condiciones no ideales

Hasta aquí, todos los razonamientos se basaron un amplificador operacional ideal, pero hay una frecuencia límite por encima de la cual que esto ya no es una suposición válida.

Existen tres modos básicos de operación: por debajo del límite, por encima del límite, y en el área de la frecuencia de corte. Si el amplificador tiene una respuesta en frecuencia adecuada más allá del corte, la operación del filtro será correcta.

Para mostrar el funcionamiento esperado del circuito en frecuencias muy por encima del límite, se debe emplear el modelo de alta frecuencia que se muestra en la Fig. 10.21.

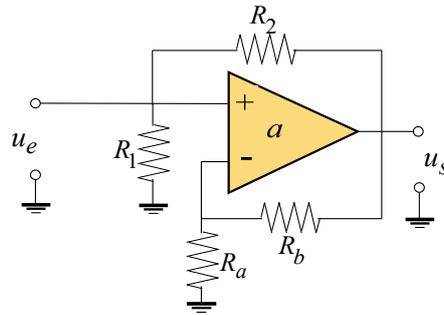


Fig. 10.21. Circuito equivalente para altas frecuencias.

La suposición se hace aquí es que, para estas frecuencias muy elevadas,  $C_1$  y  $C_2$  son cortocircuitos efectivos en comparación con las resistencias  $R_1$  y  $R_2$ . La función de transferencia obtenida a partir de (10-11) introduciendo el comportamiento para este modelo resulta:

$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{a \cdot d}} \tag{10-48}$$

El factor de realimentación  $d$  es constante y está determinado por  $R_a$  y  $R_b$ , pero la ganancia a lazo abierto  $a$  depende de la frecuencia.

El circuito funciona como se espera que lo haga hasta que deja de valer:

$$\frac{1}{a \cdot d} \ll 1$$

A partir de entonces, la transferencia del circuito decae con la ganancia de lazo abierto  $a$  del amplificador. Debido a estas limitaciones prácticas, el diseño de un filtro Sallen Key pasa altos resulta en un filtro pasa banda en el cual la frecuencia de corte superior está determinada por la respuesta a lazo abierto del amplificador.

### 10.5.3. Filtro Sallen Key pasa banda

En caso de requerirse un filtro de bajo  $Q$ , es decir, de ancho de banda  $\Delta f$  comparable con la frecuencia central  $f_0$  ( $f_0 < 10 \Delta f$ ) la mejor solución es utilizar un filtro pasa altos en cascada con un filtro pasa bajos (en esa secuencia), con los órdenes adecuados para cada uno. Se prefiere disponer primero la etapa de paso alto, porque el ruido de alta frecuencia generado por la misma, será atenuado en la etapa de paso bajo final. Pero en caso de requerirse un estrecho ancho de banda de paso  $\Delta f$  en relación a la frecuencia central  $f_0$  (o elevado  $Q$ ), corresponde emplear la celda Sallen Key pasa banda, la cual es de segundo orden. Teniendo en cuenta que una transferencia pasa banda puede lograrse con una combinación en cascada de un circuito pasa altos y otro pasa bajos, podría pensarse que la característica deseada se puede lograr con la configuración mostrada en la Fig. 10.22.

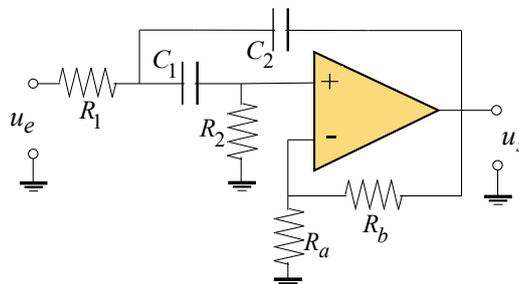


Fig. 10.22. Celda pasa banda.

Para esta configuración, por comparación con la Fig. 10.9 resulta:

$$Z_1 = R_1 \quad Z_2 = \frac{1}{sC_1} \quad Z_3 = R_2 \quad Z_4 = \frac{1}{sC_2} \quad G = 1 + \frac{R_b}{R_a}$$

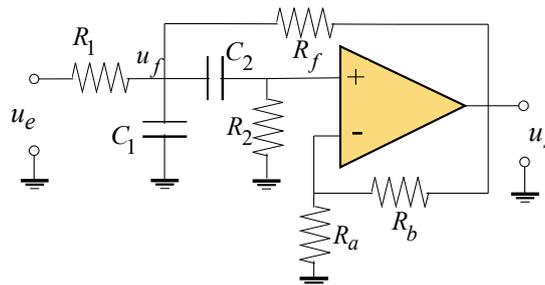
Reemplazando con estos valores en (10-13) se puede llegar, de manera enteramente análoga a los casos anteriores, a la siguiente función de transferencia:

$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{\frac{G s}{(1-G)R_1C_2}}{s^2 + \frac{1}{1-G} \left( \frac{1}{R_1C_2} + \frac{1}{R_2C_1} + \frac{1}{R_2C_2} \right) s + \frac{1}{(1-G)R_1R_2C_1C_2}}$$

Que tiene la forma de la expresión (9-11) obtenida a partir de la transformación pasa bajos-pasa banda. Sin embargo esta función no es de aplicación práctica porque para valores de  $K > 1$  resultan coeficientes negativos en el denominador, lo cual indica que los polos complejos conjugados están en el semiplano derecho y la consecuencia de ello es que el circuito resulta inestable.

Celda Sallen Key pasa banda (Topología I)

Para salvar esta dificultad, se efectúa la modificación que se muestra en la **Fig. 10.23** que corresponde a una configuración Sallen Key pasa banda utilizada en aplicaciones prácticas.



**Fig. 10.23.** Celda Sallen-Key pasa banda topología I.

La función de transferencia de este circuito se puede obtener aplicando la primera ley de Kirchoff en los nodos  $u_f$ ,  $u^+$  y  $u^-$ , de manera similar a como se procedió en relación a la **Fig. 10.9**. De este modo resulta:

Para el nodo  $u^-$ :

$$\left( \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} \right) u^- - \frac{1}{R_b} u_s = 0 \Rightarrow u^- = \frac{R_a}{R_a + R_b} u_s \tag{10-49}$$

para el nodo  $u^+$ :

$$\left( \frac{1}{R_2} + sC_2 \right) u^+ - sC_2 u_f = 0 \Rightarrow u_f = \left( 1 + \frac{1}{sC_2R_2} \right) u^+ \tag{10-50}$$

Para el nodo  $u_f$ :

$$\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_f} + sC_1 + sC_2 \right) u_f - sC_2 u^+ - \frac{1}{R_1} u_e - \frac{1}{R_f} u_s = 0 \tag{10-51}$$

Reemplazando con (10-50) en (10-51) y resolviendo para  $u^+$  resulta:

$$u^+ = \frac{sC_2R_2R_f}{s^2 \left( C_1C_2R_1R_2R_f \right) + s \left[ C_2R_f \left( R_1 + R_2 \right) + R_1 \left( C_1R_f + C_2R_2 \right) \right] + R_1R_f} u_e + \frac{sC_2R_1R_2}{s^2 \left( C_1C_2R_1R_2R_f \right) + s \left[ C_2R_f \left( R_1 + R_2 \right) + R_1 \left( C_1R_f + C_2R_2 \right) \right] + R_1R_f} u_s \tag{10-52}$$

Ahora, teniendo en cuenta las expresiones (10-49) y (10-52) puede dibujarse el diagrama en bloques para plantear la transferencia de tensión  $u_s/u_e$  del circuito realimentado, y resultará el mismo que se obtuvo anteriormente presentado en la **Fig. 10.10**, pero en este caso, las transferencias de cada bloque resultan:

$$b = \frac{sC_2R_2R_f}{s^2 \left( C_1C_2R_1R_2R_f \right) + s \left[ C_2R_f \left( R_1 + R_2 \right) + R_1 \left( C_1R_f + C_2R_2 \right) \right] + R_1R_f} \tag{10-53}$$

$$c = \frac{sC_2R_1R_2}{s^2 \left( C_1C_2R_1R_2R_f \right) + s \left[ C_2R_f \left( R_1 + R_2 \right) + R_1 \left( C_1R_f + C_2R_2 \right) \right] + R_1R_f} \tag{10-54}$$

$$d = \frac{1}{G} = \frac{R_a}{R_a + R_b} \quad (10-55)$$

Y la función de transferencia (10-11) obtenida a partir del diagrama en bloques **Fig. 10.10** también será aplicable a este caso, reemplazando en ella ahora con (10-53), (10-54) y (10-55), se puede llegar a:

$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{\frac{G}{R_1 C_1} s}{s^2 + \left( \frac{1-G}{R_f C_1} + \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) s + \frac{R_1 + R_f}{R_1 R_2 R_f C_1 C_2}} \quad (10-56)$$

Recordando la expresión (9-11) de la transferencia genérica de un filtro pasa banda de segundo orden:

$$H(s) = \frac{K \frac{\omega_0}{Q_p} s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q_p} s + \omega_0^2} \quad (9-11)$$

en la cual  $\omega_0$  es la pulsación natural correspondiente al factor de segundo orden (que corresponde al centro de la banda de paso), y  $K = H(s)|_{s=j\omega_0}$ , es decir, es la ganancia a la frecuencia central de la banda de paso.

Entonces, comparando (9-11) y (10-56) se puede escribir:

$$K \frac{\omega_0}{Q_p} = \frac{G}{R_1 C_1} \Rightarrow G = K \frac{\omega_0}{Q_p} R_1 C_1 \quad (10-57)$$

Por lo tanto, a diferencia de lo que ocurre con los filtros pasa bajos y pasa altos, la ganancia  $G$  del amplificador operacional no es igual a la ganancia del filtro a la frecuencia central de la banda de paso.

Además:

$$\frac{\omega_0}{Q_p} = \frac{1-G}{R_f C_1} + \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2}$$

$$K \frac{\omega_0}{Q_p} = \frac{G}{R_1 C_1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_1 + R_f}{R_1 R_2 R_f C_1 C_2}} \quad (10-58)$$

$$Q_p = \frac{\sqrt{R_1 R_2 R_f C_1 C_2} (R_1 + R_f)}{(1-G) R_1 R_2 C_2 + R_2 R_f C_2 + R_1 R_f C_2 + R_1 R_f C_1} \quad (10-59)$$

$$G = 1 + \frac{R_b}{R_a} \quad (10-60)$$

Como se puede comprobar, existen más incógnitas que ecuaciones; por lo tanto será necesario adoptar algunos valores y calcular los restantes, satisfaciendo las relaciones anteriores. Si hubiera otras imposiciones para el diseño, habría que tenerlas en cuenta en este paso.

### Procedimiento de diseño (Topología I)

El objetivo de diseño consiste en lograr que la celda de la **Fig. 10.23** tenga una transferencia con los valores de  $\omega_0$  y  $Q_p$ , los cuales deben ajustarse mediante las resistencias de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_f$  y las capacidades de  $C_1$  y  $C_2$  y mediante la ganancia  $G$  (a través de las resistencias de  $R_a$  y  $R_b$ ).

Evidentemente, son demasiadas variables de ajuste para solamente dos ecuaciones. Por ello es necesario efectuar una nueva parametrización de las expresiones, basada en algún criterio práctico, de manera que resulten *tres* parámetros de ajuste.

Esta simplificación consiste en hacer esta vez:

$$R_1 = R_f = R \quad R_2 = mR \quad C_1 = C_2 = C \quad (10-61)$$

Con estas igualdades en (10-58) y (10-59) resulta:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{1}{RC} \quad (10-62)$$

$$Q_p = \frac{\sqrt{2mR^4C^2}}{(1-G)mR^2C + mR^2C + R^2C + R^2C} = \frac{\sqrt{2m}R^2C}{R^2C[(1-G)m + m + 2]} = \frac{\sqrt{2m}}{(2-G)m + 2} \quad (10-63)$$

Se considera importante destacar que en esta configuración tanto  $\omega_0$  como  $Q_p$  dependen de los valores de  $R$ ,  $C$  y del factor de proporcionalidad  $m$ . Esto dificulta independizar los ajustes de  $\omega_0$  y  $Q_p$ , como se hizo en los filtros pasa bajos y pasa altos, ajustando por un lado  $\omega_0$  mediante los valores de  $R$  y  $C$  de la red pasiva  $RC$ ; y por otro lado  $Q_p$  por medio de la ganancia  $G$  de la celda. Sin embargo, tomando ciertos recaudos, aún es posible.

Los parámetros de diseño de la celda a sintetizar son  $\omega_0$  y  $Q_p$  que se obtienen directamente de los coeficientes de la expresión de  $H(s)$ . La constante  $K$  de  $H(s)$  no será tenida en cuenta dado que las especificaciones se hacen mediante pares de valores *frecuencia-atenuación* (y la atenuación es *relativa* al centro de la banda de paso), y por lo tanto la ganancia de la celda no afecta el cumplimiento de los objetivos de diseño, tal como se mencionó en el apartado 9.4.1.

En primer lugar hay que ajustar  $\omega_0$  mediante la red pasiva  $RC$ , procediendo de la siguiente manera:

- a1. Adoptar una lista de valores normalizados para capacitores y otra, eventualmente, diferente para resistores, por ejemplo, E12, E24, E48 ó E96.
- a2. Adoptar un valor de  $m$  no demasiado grande, de manera que no resulten valores de  $R$  muy dispares. Un criterio a seguir puede ser, adoptar el valor más frecuente de la relación entre dos valores de la serie Exx adoptada en el paso (a1), a la que se harán corresponder los valores de los resistores. Estas relaciones pueden obtenerse de la Tabla D-IV del Apéndice D.

Así, para la serie E12 y E24 conviene tomar  $m=1,5$ , para la serie E48  $m=1,4$  y para la serie E96  $m=4/3$ .

- a3. Seleccionar un valor de capacidad  $C$  compatible con uno de los items de la lista de valores normalizados adoptada en el paso (a1). Se recomienda comenzar por el primer ítem.

$C$  será el ítem seleccionado multiplicado por una potencia de 10 que se denominará  $CMult$ . Para definir  $CMult$  se debe tener en cuenta (10-62) y por lo tanto:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{1}{RC} \Rightarrow C = \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{1}{\omega_0 R} \quad (10-64)$$

Donde  $R$  y  $C$  son los valores considerados en (10-61). Entonces, asumiendo que  $\sqrt{2/m}$  es del orden de  $10^0$ , la potencia de 10 que afecta a la capacidad  $C$  puede adoptarse como  $1+$  la suma de las potencias de 10 cambiadas de signo de  $R$  y  $\omega_0$ . Por ejemplo, si  $\omega_0$  fuera  $10^5$  y se pretendiera que  $R$  sea del orden de  $10^3$  se debería considerar:  $CMult = 10^{-(1+0+5+3)} = 10^{-9}$ .

De este modo, quedan definidos los valores de  $C_1$  y  $C_2$  considerando las relaciones (10-61):

$$C_1 = C_2 = C$$

- a4. Determinar el valor de  $R$  a partir de (10-62) con los valores establecidos en los pasos (a2) y en (a3):

$$R = \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{1}{\omega_0 C} \quad (10-65)$$

De este modo, quedan definidos los valores de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_f$  considerando las relaciones (10-61):

$$R_1 = R_f = R \quad R_2 = mR$$

- a5. Adoptar los valores normalizados más cercanos de todos los componentes  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_f$ ,  $C_1$  y  $C_2$  teniendo en cuenta las correspondientes listas.

Como el valor de  $C$  se adopta y el de  $R$  resulta calculado a partir de  $C$ , si fuera necesario aumentar la precisión de los ajustes para lograr el  $\omega_0$  especificado, bastaría con aumentar el orden de la lista de valores E para los resistores. Por ejemplo, los capacitores se pueden adoptar sobre la lista E24 y los resistores sobre la lista E48 ó E96.

- a6. Determinar el valor sintetizado de la pulsación  $\omega_{0S}$  que se consigue con los valores *adoptados* aplicando la expresión (10-62):

$$\omega_{0S} = \sqrt{\frac{2}{m_S}} \frac{1}{RC} \quad (10-66)$$

Donde  $m_S$  es el valor de  $m$  sintetizado, obtenido con los valores adoptados en el paso (a5):

$$m_S = \frac{R_2}{R_1} \quad (10-67)$$

a7. Determinar el error cometido en  $\omega_{0S}$  evaluado como:

$$e_{\omega_{0S}} = 100(\omega_{0S} - \omega_0)/\omega_0$$

a8. Si la magnitud del error fuera inaceptable, adoptar para  $C$  el siguiente ítem de la serie de valores normalizados adoptada en el paso (a1) y se repite el procedimiento a partir del paso (a3). Mediante un sencillo algoritmo se puede recorrer toda la lista de valores normalizados y determinar el conjunto de valores de los componentes que permita obtener el valor de  $\omega_{0S}$  con el mínimo error.

A continuación, y según lo dicho, se debe ajustar  $Q_p$  mediante la ganancia  $G$  procediendo como sigue:

b1. Emplear la misma lista de valores normalizados para resistores, adoptada en el paso (a1) para el ajuste de  $\omega_0$ .

b2. Determinar el valor de la ganancia  $G$  requerido que resulta de (10-63) como:

$$G = 2 + \frac{2}{m_S} - \sqrt{\frac{2}{m_S}} \cdot \frac{1}{Q_p} \quad (10-68)$$

b3. Adoptar un valor del resistor  $R_a$  compatible con el primer ítem de la lista de valores normalizados adoptada en el paso (b1).

b4. Calcular el valor de resistencia  $R_b$  a partir de la expresión (10-60), empleando el valor de  $G$  determinado en el paso (b2) y el valor de  $R_a$  adoptado en el paso (b3), y elegir un valor compatible con la lista de valores normalizados adoptada en el paso (b1).

b5. Determinar el valor sintetizado de la ganancia  $G_S$  aplicando la expresión (10-60) y empleando los valores  $R_a$  y  $R_b$  adoptados en los pasos (b3) y (b4).

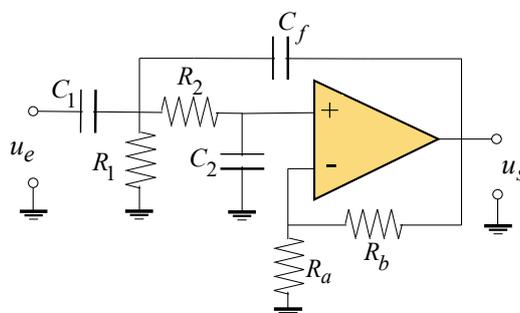
b6. Determinar el error cometido con  $G_S$  respecto del valor requerido  $G$  determinado en el paso (b2):

$$error = 100(G_S - G)/G$$

b7. Si el error fuera inaceptable, adoptar para  $R_a$  el siguiente ítem de la serie de valores normalizados adoptada en el paso (b1) y repetir el procedimiento a partir del paso (b3). Mediante un sencillo algoritmo se puede recorrer toda la lista de valores normalizados hasta lograr que el error en la constante  $G_S$  obtenida resulte mínimo.

### Celda Sallen Key pasa banda (Topología II)

Existe otra forma posible de obtener una característica pasa banda que se muestra en la **Fig. 10.24** y que corresponde a otra configuración Sallen Key pasa banda.



**Fig. 10.24.** Celda Sallen-Key pasa banda topología II.

También en este caso la función de transferencia se puede obtener de manera análoga a la configuración anterior, pudiendo llegarse a:

$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{\frac{GC_1}{R_2 C_2 (C_1 + C_f)} s}{s^2 + \left( \frac{C_1 + (1-G)C_f}{R_2 C_2 (C_1 + C_f)} + \frac{1}{R_1 (C_1 + C_f)} + \frac{1}{R_2 (C_1 + C_f)} \right) s + \frac{1}{R_1 R_2 C_2 (C_1 + C_f)}} \quad (10-69)$$

Que por comparación de (10-69) con la expresión (9-11) se puede escribir:

$$\frac{\omega_0}{Q_p} = \frac{C_1 + (1-G)C_f}{R_2 C_2 (C_1 + C_f)} + \frac{1}{R_1 (C_1 + C_f)} + \frac{1}{R_2 (C_1 + C_f)}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_2 (C_1 + C_f)}} \quad (10-70)$$

$$Q_p = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_2 (C_1 + C_f)}}{(1-G)R_1 C_f + R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2} \quad (10-71)$$

$$G = 1 + \frac{R_b}{R_a} \quad (10-72)$$

Y nuevamente existen más incógnitas que ecuaciones; por lo tanto será necesario adoptar algunos valores y calcular los restantes, satisfaciendo las relaciones anteriores. Si hubiera otras imposiciones para el diseño, habría que tenerlas en cuenta en este paso.

### Procedimiento de diseño (Topología II)

El objetivo de diseño consiste en lograr que la celda de la **Fig. 10.24** tenga una transferencia con los valores de  $\omega_0$  y  $Q_p$ , los cuales deben ajustarse mediante las resistencias de  $R_1$  y  $R_2$  y las capacidades de  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_f$  y mediante la ganancia  $G$  (a través de las resistencias de  $R_a$  y  $R_b$ ).

Evidentemente, son demasiadas variables de ajuste para solamente dos ecuaciones. Por ello es necesario efectuar una nueva parametrización de las expresiones, basada en algún criterio práctico, de manera que resulten *tres* parámetros de ajuste.

Esta simplificación consiste en hacer esta vez:

$$R_1 = R_2 = R \quad C_1 = C_f = C \quad C_2 = m \cdot C \quad (10-73)$$

Con estas igualdades en (10-58) y (10-59) resulta:

$$\omega_0 = \frac{1}{RC\sqrt{2m}} \quad (10-74)$$

$$Q_p = \frac{\sqrt{2mR^2C^2}}{(1-G)RC + RC + mRC + mRC} = \frac{\sqrt{2m}RC}{RC[1-G+2m+1]} = \frac{\sqrt{2m}}{2(m+1)-G} \quad (10-75)$$

Otra vez, se considera importante destacar que en esta configuración tanto  $\omega_0$  como  $Q_p$  dependen de los valores de  $R$ ,  $C$  y del factor de proporcionalidad  $m$ . Esto dificulta independizar los ajustes de  $\omega_0$  y  $Q_p$ , como se hizo en los filtros pasa bajos y pasa altos, ajustando por un lado  $\omega_0$  mediante los valores de  $R$  y  $C$  de la red pasiva  $RC$ ; y por otro lado  $Q_p$  por medio de la ganancia  $G$  de la celda. Sin embargo, tomando ciertos recaudos, aún es posible.

Los parámetros de diseño de la celda a sintetizar son  $\omega_0$  y  $Q_p$  que se obtienen directamente de los coeficientes de la expresión de  $H(s)$ . La constante  $K$  de  $H(s)$  no será tenida en cuenta dado que las especificaciones se hacen mediante pares de valores *frecuencia-atenuación* (y la atenuación es *relativa* al centro de la banda de paso), y por lo tanto la ganancia de la celda no afecta el cumplimiento de los objetivos de diseño, tal como se mencionó en el apartado **9.4.1**.

En primer lugar hay que ajustar  $\omega_0$  mediante la red pasiva  $RC$ , procediendo de la siguiente manera:

- a1. Adoptar una lista de valores normalizados para capacitores y otra, eventualmente, diferente para resistores, por ejemplo, E12, E24, E48 ó E96.

- a2. Adoptar un valor de  $m$  no demasiado grande, de manera que no resulten valores de  $R$  muy dispares. Un criterio a seguir puede ser, adoptar el valor más frecuente de la relación entre dos valores de la serie Exx adoptada en el paso (a1), a la que se harán corresponder los valores de los resistores. Estas relaciones pueden obtenerse de la Tabla D-IV del Apéndice D.

Así, para la serie E12 y E24 conviene tomar  $m=1,5$ , para la serie E48  $m=1,4$  y para la serie E96  $m=4/3$ .

- a3. Seleccionar un valor de capacidad  $C$  compatible con uno de los items de la lista de valores normalizados adoptada en el paso (a1). Se recomienda comenzar por el primer ítem.

$C$  será el ítem seleccionado multiplicado por una potencia de 10 que se denominará  $CMult$ . Para definir  $CMult$  se debe tener en cuenta (10-74) y por lo tanto:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2m} RC} \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2m} \omega_0 R} \quad (10-76)$$

Donde  $R$  y  $C$  son los valores considerados en (10-73). Entonces la potencia de 10 que afecta a la capacidad  $C$  puede adoptarse como 1 + la suma de las potencias de 10 cambiadas de signo de  $R$  y  $\omega_0$ .

Por ejemplo, si  $\omega_0$  fuera  $10^5$  y se pretendiera que  $R$  sea del orden de  $10^3$ , asumiendo que  $\sqrt{2m}$  es del orden de  $10^0$ , se debería considerar:  $CMult = 10^{-(1+0+5+3)} = 10^{-9}$ .

De este modo, quedan definidos los valores de  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_f$  considerando las relaciones (10-73):

$$C_1 = C_f = C \quad C_2 = mC$$

- a4. Determinar el valor de  $R$  a partir de (10-74) con los valores establecidos en los pasos (a2) y en (a3):

$$R = \frac{1}{\sqrt{2m} \omega_0 C} \quad (10-77)$$

De este modo, quedan definidos los valores de  $R_1$  y  $R_2$  considerando las relaciones (10-73):

$$R_1 = R_2 = R$$

- a5. Adoptar los valores normalizados más cercanos de todos los componentes  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_f$  teniendo en cuenta las correspondientes listas.

Como el valor de  $C$  se adopta y el de  $R$  resulta calculado a partir de  $C$ , si fuera necesario aumentar la precisión de los ajustes para lograr el  $\omega_0$  especificado, bastaría con aumentar el orden de la lista de valores E para los resistores. Por ejemplo, los capacitores se pueden adoptar sobre la lista E24 y los resistores sobre la lista E48 ó E96.

- a6. Determinar el valor sintetizado de la pulsación  $\omega_{0S}$  que se consigue con los valores *adoptados* aplicando la expresión (10-62):

$$\omega_{0S} = \frac{1}{\sqrt{2m_S} RC}$$

Donde  $m_S$  es el valor de  $m$  sintetizado, obtenido con los valores adoptados en el paso (a5):

$$m_S = \frac{C_2}{C_1} \quad (10-78)$$

- a7. Determinar el error cometido en  $\omega_{0S}$  evaluado como:

$$e_{\omega_{0S}} = 100 \left( \frac{\omega_{0S} - \omega_0}{\omega_0} \right)$$

- a8. Si la magnitud del error fuera inaceptable, adoptar para  $C$  el siguiente ítem de la serie de valores normalizados adoptada en el paso (a1) y se repite el procedimiento a partir del paso (a3). Mediante un sencillo algoritmo se puede recorrer toda la lista de valores normalizados y determinar el conjunto de valores de los componentes que permita obtener el valor de  $\omega_{0S}$  con el mínimo error.

A continuación, y según lo dicho, se debe ajustar  $Q_p$  mediante la ganancia  $G$  procediendo como sigue:

- b1. Emplear la misma lista de valores normalizados para resistores, adoptada en el paso (a1) para el ajuste de  $\omega_0$ .

- b2. Determinar el valor de la ganancia  $G$  requerido que resulta de (10-63) como:

$$G = 2 + 2m_S - \frac{\sqrt{2m_S}}{Q_p} \quad (10-79)$$

- b3. Adoptar un valor del resistor  $R_a$  compatible con el primer ítem de la lista de valores normalizados adoptada en el paso (b1).
- b4. Calcular el valor de resistencia  $R_b$  a partir de la expresión (10-60), empleando el valor de  $G$  determinado en el paso (b2) y el valor de  $R_a$  adoptado en el paso (b3), y elegir un valor compatible con la lista de valores normalizados adoptada en el paso (b1).
- b5. Determinar el valor sintetizado de la ganancia  $G_S$  aplicando la expresión (10-60) y empleando los valores  $R_a$  y  $R_b$  adoptados en los pasos (b3) y (b4).
- b6. Determinar el error cometido con  $G_S$  respecto del valor requerido  $G$  determinado en el paso (b2):
- $$\text{error} = 100(G_S - G)/G$$
- b7. Si el error fuera inaceptable, adoptar para  $R_a$  el siguiente ítem de la serie de valores normalizados adoptada en el paso (b1) y repetir el procedimiento a partir del paso (b3). Mediante un sencillo algoritmo se puede recorrer toda la lista de valores normalizados hasta lograr que el error en la constante  $G_S$  obtenida resulte mínimo.

### Ejemplo 10.3.

Se requiere sintetizar un filtro pasa banda activo configuración Sallen Key para lograr una transferencia  $|U_2/U_1|$  que responda a la aproximación de *Butterworth*, que cumpla con las siguientes especificaciones:

- Frecuencia central de la banda de paso  $f_0 = 450$  kHz.
- Para un ancho de banda  $\Delta f = 35$  kHz “centrado” en  $f_0$ , la relación  $|U_2/U_1|$  no debe apartarse en más de 1,2 dB respecto de su valor para  $f_0$ .
- Para la frecuencia 575 kHz la atenuación debe ser  $\geq 25$  dB.

### Resolución

Las especificaciones del pasa banda son:

- Banda de paso:

$$\Delta f_p = 35 \cdot 10^3 \text{ Hz} \quad \Delta \omega_p = 219,9 \cdot 10^3 \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad \alpha_p = 1,2 \text{ dB}$$

- Banda de atenuación:

De la banda de atenuación se conoce la frecuencia  $f_{s2}$  (porque es mayor que  $f_0$ ). Se requiere determinar  $f_{s1}$  para poder obtener  $\Delta f_s = f_{s2} - f_{s1}$ :

$$f_{s1} = \frac{f_0^2}{f_{s2}} = \frac{(450 \cdot 10^3)^2}{575 \cdot 10^3} = 352,17 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

Con lo cual:

$$\Delta f_s = f_{s2} - f_{s1} = 575 \cdot 10^3 - 352,17 \cdot 10^3 = 222,83 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

Entonces:

$$\Delta f_s = 222,83 \cdot 10^3 \text{ Hz} \quad \Delta \omega_s = 14 \cdot 10^5 \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad \alpha_s = 25 \text{ dB}$$

Como este caso  $f_0 > 10\Delta f$ , la síntesis no se podrá realizar poniendo en cascada un filtro pasa altos y un filtro pasa bajos. Se deberá realizar disponiendo en cascada celdas Sallen Key pasa banda.

Para lograr esto, se deben transformar las especificaciones al dominio del pasa bajos para determinar  $\varepsilon$  y el orden  $n$  requerido para el prototipo pasa bajos.

Procediendo así, se transforman los datos de las especificaciones al dominio del pasa bajos equivalente:

- Banda de paso:

$$\overline{\omega}_p = 219,9 \cdot 10^3 \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad \alpha_p = 1,2 \text{ dB}$$

- Banda de atenuación:

$$\overline{\omega}_s = 14 \cdot 10^5 \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad \alpha_s = 25 \text{ dB}$$

### Cálculo del factor de rizado $\varepsilon$

Para cumplir con la máxima atenuación admitida en la banda de paso, debe ser:

$$10 \cdot \log[1 + \varepsilon^2] = \alpha_p \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \sqrt{10^{0,1\alpha_p} - 1} = \sqrt{10^{0,1 \cdot 1,2} - 1} = 0,564$$

Cálculo del orden  $n$  del filtro con la aproximación de *Butterworth*

Para cumplir con la mínima atenuación admitida en la banda de atenuación corresponde considerar:

$$n \geq \frac{\log \left[ \frac{10^{0,1\alpha_s} - 1}{\varepsilon^2} \right]}{2 \log \left( \frac{\omega_s}{\omega_p} \right)} = \frac{\log \left[ \frac{10^{0,1\cdot 25} - 1}{10^{0,1\cdot 1,2} - 1} \right]}{2 \log \left( \frac{14 \cdot 10^5}{219,9 \cdot 10^3} \right)} = 1,86$$

Es decir con la aproximación de *Butterworth* el  $n$  que se debe adoptar es 2 y el pasa banda será de orden 4.

Función de transferencia que realiza la aproximación de *Butterworth*

La forma más simple de obtener una expresión polinómica de la función de transferencia  $H(s)$  del filtro pasa banda normalizado, es procediendo de la siguiente manera:

- 1) Conocidos  $\varepsilon$  y  $n$ , aplicar la aproximación de *Butterworth* para obtener la expresión de  $|H(j\omega)|$  del filtro *pasa bajos normalizado* (el cual estará normalizado respecto de  $\omega_p = 2 \pi 35 10^3$ , dado que se emplea la aproximación de Butterworth con  $\varepsilon \neq 1$ ).

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \omega^{2n}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,564^2 \omega^4}}$$

- 2) reemplazar en la expresión anterior a  $\omega$  por  $s/j$  y obtener la expresión de  $\overline{H(s)}^2$ ;

$$\overline{T(s)}^2 = \frac{1}{1 + 0,3181 s^4} = \frac{3,1437}{s^4 + 3,1437}$$

- 3) determinar los  $2n$  polos y los  $2n$  ceros de  $\overline{T(s)}^2$

- Los ceros de  $\overline{H(s)}^2$  son 4 y se encuentran todos en infinito.
- Los polos de  $\overline{H(s)}^2$  también son 4 y serán las raíces de:

$$s^4 + 3,1437 = 0 \Rightarrow s_k = \sqrt[4]{-3,1437} = \sqrt[4]{3,1437} \cdot e^{j\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)} = 1,3314 \cdot e^{j(2k+1)\frac{\pi}{4}} \quad k=0, 1, 2, 3, 4$$

Entonces los 4 polos resultan:  $\pm 0,9414 \pm j0,9414$

Los cuales tienen simetría cuadrantal y se encuentran ubicados sobre una circunferencia de radio  $\sqrt[4]{3,1437} = 1,3314$ .

- 4) Confeccionar  $\overline{H(s)}$  empleando (7-21), es decir, con la mitad de los polos de  $\overline{H(s)}^2$  (los del semiplano izquierdo) y la mitad de los ceros de  $\overline{H(s)}^2$  (los que se encuentran en el semiplano izquierdo y/o la mitad de los que eventualmente se encuentren en el origen)

$$\overline{H(s)} = \frac{\sqrt{3,1437}}{(s + 0,941 - j0,941)(s + 0,941 + j0,941)} = \frac{1,774}{s^2 + 1,8829s + 1,7726} = \frac{1}{0,5641s^2 + 1,0622s + 1}$$

Esta es la función de transferencia del prototipo pasa bajos que cumple con la aproximación de Butterworth, el cual está normalizado respecto a la pulsación  $\omega_p$  correspondiente a 1,2 dB.

Aquí conviene identificar los coeficientes  $a_i$  y  $b_i$  que se emplearán más adelante:

$$a_i = 1,0622 \quad b_i = 0,5641$$

- 5) La transformación pasa bajo – pasa banda a aplicar en este caso es la que permite obtener un filtro pasa banda de ancho de banda normalizado respecto de  $\omega_0$  (9-9):

$$s = \frac{1}{\Delta\Omega} \left( s + \frac{1}{s} \right)$$

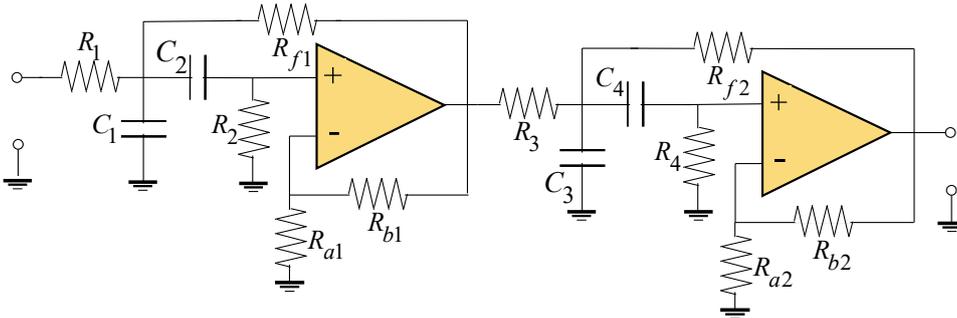
Siendo  $\Delta\Omega$  el ancho de banda correspondiente al ancho de banda que se utilizó para normalizar la transferencia del filtro pasa bajos normalizado, es decir, en este ejemplo corresponde a

$\omega_p = 2\pi 35$  krad/s y además, está normalizado respecto de  $\omega_0$ . Es decir, para los valores especificados para el diseño:

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega|_{1,2\text{dB}}}{\omega_0} = \frac{2\pi \cdot 35 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 450 \cdot 10^3} = 0,07778$$

### Diseño del filtro

En este caso, para lograr un filtro pasa banda de cuarto orden, se emplearán dos etapas de segundo orden en cascada, ambas pasa banda topología I, como se indica en la **Fig. 10.25**, cuyas frecuencias  $\omega_{01}$  y  $\omega_{02}$  estarán ligeramente desplazadas alrededor de la pulsación central de la banda de paso del filtro  $\omega_0$ . Esta estrategia de diseño se denomina de *sintonía escalonada*.



**Fig. 10.25.** Topología del filtro pasa banda de cuarto orden a sintetizar con dos celdas Sallen-Key pasa banda topología I.

Si se adoptan  $\omega_{01}$  y  $\omega_{02}$  de manera tal que  $\omega_{01} > \omega_{02}$  y además:

$$\omega_{01} = \alpha \cdot \omega_0 \quad \omega_{02} = \frac{1}{\alpha} \cdot \omega_0$$

Siendo  $\alpha$  un *factor de desintonía* mayor que la unidad que resulta de (9-23), empleando los valores de los coeficientes  $a_i$  y  $b_i$  determinados en 4) y el valor de  $\Delta\Omega$  determinado en 5), adoptando la solución real positiva mayor que 1:

$$\alpha^8 - \frac{(0,07778)^2}{0,5641} \alpha^6 - 2 \left[ 1 + \frac{(0,07778)^2}{0,5641} - \frac{1}{2} \left( \frac{1,0622}{0,5641} 0,07778 \right)^2 \right] \alpha^4 - \frac{(0,07778)^2}{0,5641} \alpha^2 + 1 = 0$$

$$\alpha^8 - 0,01072 \cdot \alpha^6 - 2 \cdot \alpha^4 - 0,01072 \cdot \alpha^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1,037$$

Los factores de mérito  $Q_p$  de ambos pares de polos de las transferencias de segundo orden son iguales entre sí y resultan de evaluar (9-20):

$$Q_{pi} = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} \frac{b_i}{a_i \cdot \Delta\Omega} = \frac{1,037^2 + 1}{1,037} \cdot \frac{0,5641}{1,0622 \cdot 0,07778} = 13,67$$

Las pulsaciones centrales de la banda de paso de cada etapa serán:

$$\omega_{01} = \alpha \cdot \omega_0 = 1,037 \cdot 2\pi 450 \cdot 10^3 = 2,932 \cdot 10^6$$

$$\omega_{02} = \frac{1}{\alpha} \cdot \omega_0 = \frac{1}{1,037} \cdot 2\pi 450 \cdot 10^3 = 2,727 \cdot 10^6$$

Ya se cuenta con los dos datos que se requieren para diseñar cada una de las dos etapas del filtro: una etapa se diseñará con  $Q_p=13,67$ ;  $\omega_0=2,932 \cdot 10^6$  rad/s y  $\Delta\omega=2\pi 35 \cdot 10^3$  rad/s. Mientras que la segunda etapa se diseñará con  $Q_p=13,67$ ;  $\omega_0=2,727 \cdot 10^6$  rad/s y  $\Delta\omega=2\pi 35 \cdot 10^3$  rad/s.

Algunos aspectos relevantes a tener en cuenta en este diseño son los siguientes.

- El  $Q_p$  de ambas celdas debe ser el mismo, y esto es mucho más importante que su valor. Esto significa que un error aún del orden del 20% en el valor de  $Q_p$  puede ser perfectamente admisible, pero una *diferencia* entre ambos  $Q_p$  superior al 5% es completamente inadmisibles.
- La forma de conseguir que ambos  $Q_p$  sean tan idénticos como sea posible, es hacer que los factores de proporcionalidad  $m$  resultantes de ambas etapas sean tan iguales como sea posible. Ello conducirá a que las ganancias  $G$  de ambas etapas resulten iguales. Por ello, encontrar el valor de  $m$  que resulte satisfactorio para ambas etapas, puede requerir varios intentos de síntesis y simulación de las dos

etapas, siempre comenzando por adoptar para  $m$  (que para la topología I es una relación de resistencias) la relación de valores más frecuente de la lista de valores normalizados seleccionada para resistores. Si con ese valor no se logra satisfacer los requerimientos, se vuelve a intentar con el valor que sigue en orden decreciente de frecuencia de ocurrencia, y así sucesivamente.

El diseño se realizará con valores de capacitores compatibles con la lista de valores normalizados E24 y resistores compatibles con la lista E48. Esto se hace así porque el ancho de banda es mucho menor que la frecuencia central de la banda, lo cual requiere mayor precisión en los valores. En este caso, con aumentar la precisión de los resistores resulta suficiente, por cuanto el proceso descrito en 10.5.3. que se aplicará, parte de *adoptar* un valor de  $C$  y *calcular* el valor de  $R$ .

#### Primera celda Sallen Key pasa banda:

Los datos de diseño para la primera celda son  $\omega_{01}=2,932 \cdot 10^6$  rad/s y  $Q_p=13,67$ .

1. Se adopta la lista de valores E24 para capacitores y E48 para resistores.
2. Con base en la Tabla D-IV para la lista E48 adoptada para resistores, se adopta  $m=1,4$ .
3. El factor de escala  $CMult$  a aplicar a los items de la lista seleccionada para capacitores resulta, si se desean resistencias en  $k\Omega$ :

$$CMult = 10^{-(1+6+3)} = 10^{-10}$$

Entonces para el item 17 de la lista de valores E24 adoptada para capacitores, resulta:

$$C = CMult \cdot 4,7 = 4,7 \cdot 10^{-10}$$

De este modo, quedan definidos los valores de  $C_1$  y  $C_2$  considerando las relaciones (10-61):

$$C_1 = C_2 = 470 \text{ pF}$$

4. Determinar el valor de  $R$ :

$$R = \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{2}{1,4}} \cdot \frac{1}{2,932 \cdot 10^6 \cdot 4,7 \cdot 10^{-10}} = 867,34$$

De este modo, quedan definidos los valores de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_{f1}$  considerando las relaciones (10-61):

$$R_1 = R_f = 867,34 \Omega \quad R_2 = mR = 1,4 \cdot 867,34 = 1214,3 \Omega$$

5. Adoptar los valores normalizados más cercanos de todos los componentes  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_{f1}$ ,  $C_1$  y  $C_2$  teniendo en cuenta las correspondientes listas.

Los valores de capacidad ya corresponden a la lista E24:

$$C_1 = C_2 = 470 \text{ pF}$$

Los valores de resistencia correspondientes a la lista E48 que más se aproximen a los valores calculados en el paso 4 serían:

$$R_1 = R_{f1} = 866 \Omega \quad R_2 = 1210 \Omega$$

Con estos valores para  $R_1$  y  $R_2$  el valor de  $m$  sintetizado ajusta satisfactoriamente al valor adoptado en el paso 2:

$$m_S = \frac{R_2}{R_1} = \frac{1210}{866} = 1,3972 \quad (\text{error} < 0,2\%)$$

Siempre es conveniente verificar este ajuste porque, eventualmente, podría mejorarse adoptando para  $R_2$  el valor anterior o posterior en la lista de valores normalizados. Pero no es este el caso.

#### Realización de la ganancia $G$ :

Con el factor de proporcionalidad  $m_S = 1,3972$  y con el valor de  $Q_p=13,67$  requerido, se determina mediante (10-68) la ganancia  $G$  para la primera celda:

$$G = 2 + \frac{2}{m_S} - \sqrt{\frac{2}{m_S}} \frac{1}{Q_p} = 2 + \frac{2}{1,3972} - \sqrt{\frac{2}{1,3972}} \frac{1}{13,67} = 3,3439$$

La ganancia  $G$  requerida para la primera etapa se consigue mediante los valores de  $R_{a1}$  y  $R_{b1}$ .

El mejor ajuste para el valor  $G=3,3439$  se encuentra asignando a  $R_{a1}$  un valor compatible con el item 34 de la lista E48, calculando  $R_{b1}=(G-1) R_{a1}$  y asignándole a  $R_{b1}$  un valor compatible con la serie E48 (ver Apéndice D):

$$R_{a1} = 4870 \Omega \quad R_{b1} = 11500 \Omega$$

Estos valores determinan una ganancia sintetizada:

$$G_S = 1 + \frac{R_{b1}}{R_{a1}} = 1 + \frac{11500}{4870} = 3,3614$$

Con lo cual el error cometido en la ganancia resulta menor al 0,6%.

### Segunda celda Sallen Key pasa banda:

Los datos de diseño para la primera celda son  $\omega_{02} = 2,727 \cdot 10^6$  rad/s y  $Q_p = 13,67$ .

1. Se adopta la lista de valores E24 para capacitores y E48 para resistores.
2. Con base en la Tabla D-IV para la lista E48 adoptada para resistores, se adopta  $m = 1,4$ .
3. El factor de escala  $CMult$  a aplicar a los items de la lista seleccionada para capacitores resulta, si se desean resistencias en  $k\Omega$ :

$$CMult = 10^{-(1+6+3)} = 10^{-10}$$

Entonces para el item 6 de la lista de valores E24 adoptada para capacitores, resulta:

$$C = CMult \cdot 1,6 = 1,6 \cdot 10^{-10}$$

De este modo, quedan definidos los valores de  $C_3$  y  $C_4$  considerando las relaciones (10-61):

$$C_3 = C_4 = 160 \text{ pF}$$

4. Determinar el valor de  $R$

$$R = \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{2}{1,4}} \cdot \frac{1}{2,727 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-10}} = 2739,34$$

De este modo, quedan definidos los valores de  $R_3$ ,  $R_4$  y  $R_{f2}$  considerando las relaciones (10-61):

$$R_3 = R_{f2} = 2739,34 \Omega \quad R_4 = mR = 1,4 \cdot 2739,34 = 3835,08 \Omega$$

5. Adoptar los valores normalizados más cercanos de todos los componentes  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $R_{f2}$ ,  $C_3$  y  $C_4$  teniendo en cuenta las correspondientes listas.

Los valores de capacidad ya corresponden a la lista E24:

$$C_3 = C_4 = 160 \text{ pF}$$

Los valores de resistencia correspondientes a la lista E48 que más se aproximen a los valores calculados en el paso 4 serían:

$$R_3 = R_{f2} = 2740 \Omega \quad R_4 = 3830 \Omega$$

Con estos valores para  $R_3$  y  $R_4$  el valor de  $m$  sintetizado ajusta satisfactoriamente al valor adoptado en el paso 2:

$$m_S = \frac{R_4}{R_3} = \frac{3830}{2740} = 1,3978 \quad (\text{error} < 0,2\%)$$

Tal como ya se mencionó, siempre conviene verificar este ajuste porque, eventualmente, podría mejorarse adoptando para  $R_4$  el valor anterior o posterior en la lista de valores normalizados. Pero no es este el caso.

### Realización de la ganancia $G$ :

Con el factor de proporcionalidad  $m_S = 1,3978$  y con el valor de  $Q_p = 13,67$  requerido, se determina mediante (10-68) la ganancia  $G$  para la segunda celda:

$$G = 2 + \frac{2}{m_S} - \sqrt{\frac{2}{m_S}} \frac{1}{Q_p} = 2 + \frac{2}{1,3978} - \sqrt{\frac{2}{1,3978}} \frac{1}{13,67} = 3,3433$$

La ganancia  $G$  requerida para la segunda etapa se consigue mediante los valores de  $R_{a2}$  y  $R_{b2}$ .

El mejor ajuste para el valor  $G = 3,3433$  se encuentra asignando a  $R_{a2}$  un valor compatible con el item 34 de la lista E48, calculando  $R_{b2} = (G-1) R_{a2}$  y asignándole a  $R_{b2}$  un valor compatible con la serie E48 (ver Apéndice D):

$$R_{a2} = 4870 \Omega \quad R_{b2} = 11500 \Omega$$

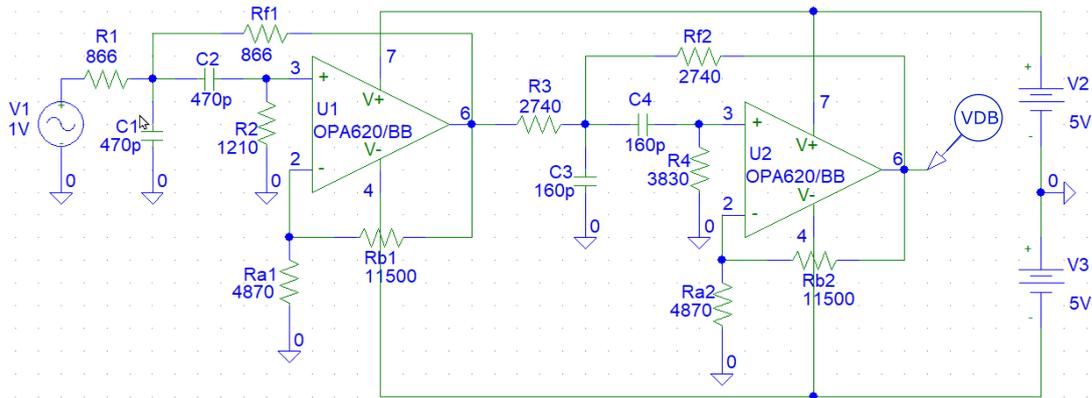
Estos valores determinan una ganancia sintetizada:

$$G_S = 1 + \frac{R_{b2}}{R_{a2}} = 1 + \frac{11500}{4870} = 3,3614$$

Con lo cual el error cometido en la ganancia resulta menor al 0,6%.

Con todos los valores obtenidos se efectúa la simulación en PSpice. El circuito simulado se muestra en la **Fig. 10.26**.

En este caso hay que tener la precaución de emplear un AO de ancho de banda mucho mayor que la mayor frecuencia involucrada en la especificación (en este caso, 575 kHz). Por ello se utiliza el amplificador operacional OPA620, cuyo producto ganancia por ancho de banda es 200 MHz.

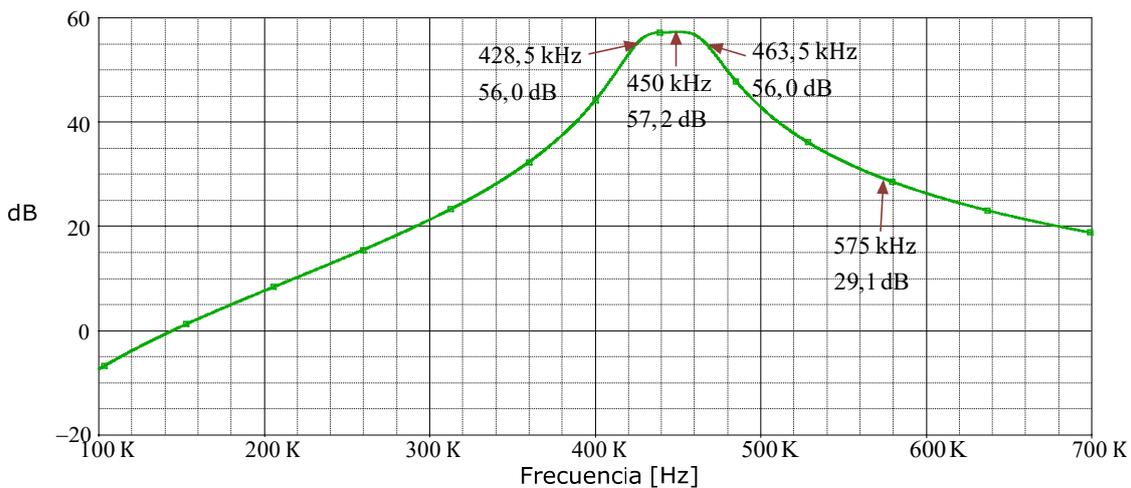


**Fig. 10.26.** Circuito simulado con PSpice.

La simulación se configuró para efectuar el barrido en frecuencia mediante el generador de tensión de 1 V de amplitud y frecuencia variable entre 1 kHz y 1 MHz.

De este modo, la tensión de salida del filtro en decibeles en función de la frecuencia corresponde a la curva de transferencia de tensión de salida a tensión de entrada que se muestra en la **Fig. 10.27**.

En la misma **Fig. 10.27** se han indicado los valores de puntos de la curva obtenidos con los cursores sobre la salida de la simulación. Esos puntos corresponden a la atenuación en la banda de paso, al ancho de banda de 1 dB especificado para la banda de paso y a la frecuencia de la banda de atenuación para la cual se especificó la mínima atenuación admitida. Estos valores permiten comprobar que el diseño satisface correctamente los requisitos especificados.



**Fig. 10.27.** Respuesta en frecuencia obtenida con la simulación: cumplimiento de las especificaciones.

Teniendo en cuenta que la zona plana de la banda de paso es de 57,2 dB, la banda de paso de nivel 1,2 dB corresponderá al nivel 56,0 dB y las frecuencias que delimitan ese ancho de banda de 1,2 dB resultan  $f_1 = 428.5$  kHz (56,0 dB) y  $f_2 = 463.5$  kHz (56,0 dB), con lo cual:

$$\Delta f = f_2 - f_1 = 463,5 - 428,5 = 35 \text{ kHz}$$

Además también se verifica el cumplimiento del requisito en la banda de atenuación que establecía una atenuación superior a 25 dB respecto de la zona plana en  $f_s=575$  kHz, y resultó  $57,2 - 29,1 = 28,1$  dB.

10.5.4. Filtro Sallen Key supresor de banda

La celda supresora de banda de segundo orden propuesta en 1955 por R. P. Sallen y E. L. Key está basada en la celda RC pasiva twin-T ya estudiada y tiene dos topologías, tal como se muestra en la Fig. 10.28, en la cual los elementos de la red RC pasiva del filtro, que están expresados en función de los parámetros R y C, ya fueron discutidos en profundidad en el apartado 0 y los resistores  $R_a$  y  $R_b$  determinan la ganancia G de la celda.

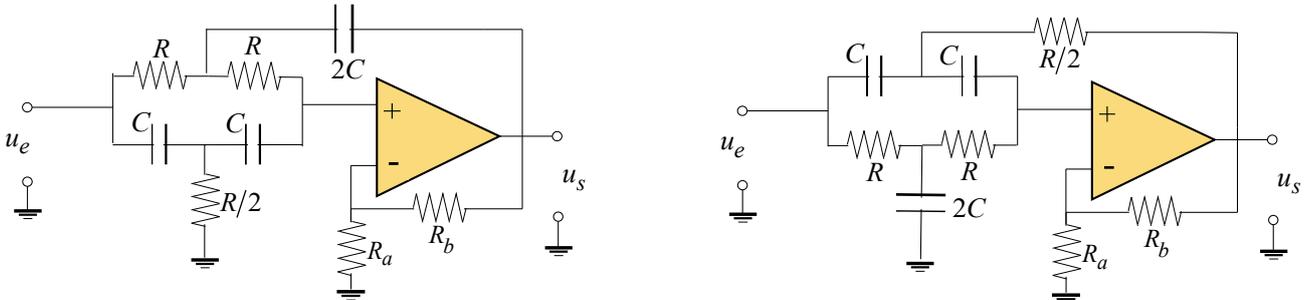


Fig. 10.28. Celda Sallen-Key supresora de banda. (a) Topología 1. (b) Topología 2.

Para analizar genéricamente ambas topologías se representa a los elementos de la red RC pasiva del filtro por impedancias  $Z_X$  tal como se muestra en la Fig. 10.29.

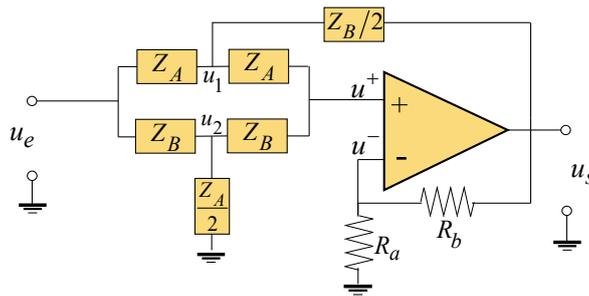


Fig. 10.29. Topología genérica Sallen-Key supresor de banda.

Por comparación de las denominaciones empleadas en las Fig. 10.28 y Fig. 10.29 resulta:

$$Z_A = R \quad Z_B = \frac{1}{sC} \quad \text{para la Topología 1} \tag{10-80}$$

$$Z_A = \frac{1}{sC} \quad Z_B = R \quad \text{para la Topología 2} \tag{10-81}$$

Para obtener la función de transferencia de este circuito generalizado, se aplica la primera ley de Kirchoff en los nodos  $u_1, u_2, u^+$  y  $u^-$ . De este modo resulta:

Para el nodo  $u^-$ :

$$\left( \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} \right) u^- - \frac{1}{R_b} u_s = 0 \Rightarrow u^- = \frac{R_a}{R_a + R_b} u_s \tag{10-82}$$

para el nodo  $u^+$ :

$$\left( \frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} \right) u^+ - \frac{1}{Z_A} u_1 - \frac{1}{Z_B} u_2 = 0 \tag{10-83}$$

Para el nodo  $u_1$ :

$$\left( \frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_A} + \frac{2}{Z_B} \right) u_1 - \frac{1}{Z_A} u_e - \frac{1}{Z_A} u^+ - \frac{2}{Z_B} u_s = 0$$

$$u_1 = \frac{\frac{1}{Z_A}u_e + \frac{1}{Z_A}u^+ + \frac{2}{Z_B}u_s}{\left(\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_A} + \frac{2}{Z_B}\right)} = \frac{Z_B \cdot u_e + Z_B \cdot u^+ + 2Z_A \cdot u_s}{2(Z_A + Z_B)} \quad (10-84)$$

Para el nodo  $u_2$ :

$$\left(\frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_B} + \frac{2}{Z_A}\right)u_2 - \frac{1}{Z_B}u_e - \frac{1}{Z_B}u^+ = 0$$

$$u_2 = \frac{\frac{1}{Z_B}u_e + \frac{1}{Z_B}u^+}{\left(\frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_B} + \frac{2}{Z_A}\right)} = \frac{Z_A \cdot u_e + Z_A \cdot u^+}{2(Z_A + Z_B)} \quad (10-85)$$

Reemplazando con (10-84) y (10-85) en (10-83) y resolviendo para  $u^+$  resulta:

$$\left(\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B}\right)u^+ - \frac{1}{Z_A} \frac{Z_B \cdot u_e + Z_B \cdot u^+ + 2Z_A \cdot u_s}{2(Z_A + Z_B)} - \frac{1}{Z_B} \frac{Z_A \cdot u_e + Z_A \cdot u^+}{2(Z_A + Z_B)} = 0$$

$$\left(\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} - \frac{Z_B}{2Z_A(Z_A + Z_B)} - \frac{Z_A}{2Z_B(Z_A + Z_B)}\right)u^+ =$$

$$= \left(\frac{Z_B}{2Z_A(Z_A + Z_B)} + \frac{Z_A}{2Z_B(Z_A + Z_B)}\right) \cdot u_e + \frac{1}{Z_A + Z_B} \cdot u_s$$

$$u^+ = \frac{\left(\frac{Z_B}{2Z_A(Z_A + Z_B)} + \frac{Z_A}{2Z_B(Z_A + Z_B)}\right) \cdot u_e + \frac{1}{Z_A + Z_B} \cdot u_s}{\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} - \frac{Z_B}{2Z_A(Z_A + Z_B)} - \frac{Z_A}{2Z_B(Z_A + Z_B)}}$$

$$u^+ = \frac{\frac{Z_A^2 + Z_B^2}{2Z_A Z_B(Z_A + Z_B)} \cdot u_e + \frac{2Z_A Z_B}{2Z_A Z_B(Z_A + Z_B)} \cdot u_s}{\frac{2Z_B(Z_A + Z_B) + 2Z_A(Z_A + Z_B) - Z_B^2 - Z_A^2}{2Z_A Z_B(Z_A + Z_B)}} = \frac{(Z_A^2 + Z_B^2) \cdot u_e + (2Z_A Z_B) \cdot u_s}{2Z_B(Z_A + Z_B) + 2Z_A(Z_A + Z_B) - Z_B^2 - Z_A^2}$$

$$u^+ = \frac{Z_A^2 + Z_B^2}{Z_A^2 + 4Z_A Z_B + Z_B^2} \cdot u_e + \frac{2Z_A Z_B}{Z_A^2 + 4Z_A Z_B + Z_B^2} \cdot u_s \quad (10-86)$$

Entonces observando que las expresiones (10-82) y (10-86) tienen la siguiente forma:

$$u^+ = b \cdot u_e + c \cdot u_s \quad (10-87)$$

$$u^- = d \cdot u_s \quad (10-88)$$

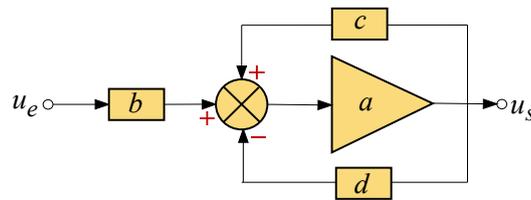
Siendo:

$$b = \frac{N_1}{D} = \frac{Z_A^2 + Z_B^2}{Z_A^2 + 4Z_A Z_B + Z_B^2}$$

$$c = \frac{N_2}{D} = \frac{2 \cdot Z_A Z_B}{Z_A^2 + 4Z_A Z_B + Z_B^2}$$

$$d = \frac{1}{G} = \frac{R_a}{R_a + R_b}$$

La transferencia de tensión  $u_s/u_e$  del circuito realimentado puede plantearse directamente representando las expresiones (10-87) y (10-88) mediante el diagrama en bloques de la **Fig. 10.30**.



**Fig. 10.30.** Diagrama de flujo para resolver el sistema de ecuaciones planteadas para obtener  $H(s)$  de la celda Sallen-Key supresora de banda.

Ahora por simple inspección de la **Fig. 10.30** puede obtenerse la expresión de la función de transferencia de la celda genérica supresora de banda Sallen-Key:

$$u_s = a[(c-d)u_s + b u_e] \Rightarrow u_s [1 - a(c-d)] = a b u_e \Rightarrow \frac{u_s}{u_e} = \frac{a b}{1 - a(c-d)}$$

$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{b}{d} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{a \cdot d} - \frac{c}{d}} \quad (10-89)$$

### Operación en condiciones ideales

Considerando que el AO tiene una respuesta en frecuencia adecuada aún en frecuencias bien por arriba de la frecuencia de corte del filtro, el producto  $a \cdot d$  en (10-89) es muy grande, y la función de transferencia dada por (10-89) resulta:

$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{b}{d} \cdot \frac{1}{1 - \frac{c}{d}} \quad (10-90)$$

Con lo cual:

$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{G}{\frac{D}{N_1} - G \frac{N_2}{N_1}} = \frac{G \cdot N_1}{D - G \cdot N_2}$$

Finalmente la función de transferencia *ideal* para la celda genérica supresora de banda Sallen Key resulta:

$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{G \cdot (Z_A^2 + Z_B^2)}{Z_A^2 + 4Z_A Z_B + Z_B^2 - 2G \cdot Z_A Z_B} = \frac{G \cdot (Z_A^2 + Z_B^2)}{Z_A^2 + 2 \cdot Z_A Z_B \cdot (2 - G) + Z_B^2} \quad (10-91)$$

### Topología I.

$$Z_A = R \quad Z_B = \frac{1}{sC}$$

$$H(s) = \frac{G \cdot (Z_A^2 + Z_B^2)}{Z_A^2 + 2 \cdot Z_A Z_B \cdot (2 - G) + Z_B^2} = \frac{G \left( R^2 + \frac{1}{s^2 C^2} \right)}{R^2 + 2 \frac{R}{sC} \cdot (2 - G) + \frac{1}{s^2 C^2}} = \frac{G \left( s^2 + \frac{1}{C^2 R^2} \right)}{s^2 + \frac{2}{CR} \cdot (2 - G) s + \frac{1}{C^2 R^2}}$$

$$H(s) = \frac{G \left( s^2 + \frac{1}{C^2 R^2} \right)}{s^2 + \frac{2}{CR} \cdot (2 - G) s + \frac{1}{C^2 R^2}} \quad (10-92)$$

### Topología II.

$$Z_A = \frac{1}{sC} \quad Z_B = R$$

$$H(s) = \frac{G \cdot (Z_A^2 + Z_B^2)}{Z_A^2 + 2 \cdot Z_A Z_B \cdot (2 - G) + Z_B^2} = \frac{G \left( \frac{1}{s^2 C^2} + R^2 \right)}{\frac{1}{s^2 C^2} + 2 \frac{R}{sC} \cdot (2 - G) + R^2} = \frac{G \left( s^2 + \frac{1}{C^2 R^2} \right)}{s^2 + \frac{2}{CR} \cdot (2 - G)s + \frac{1}{C^2 R^2}}$$

$$H(s) = \frac{G \left( s^2 + \frac{1}{C^2 R^2} \right)}{s^2 + \frac{2}{CR} \cdot (2 - G)s + \frac{1}{C^2 R^2}} \quad (10-93)$$

Por lo tanto, ambas topologías de la celda supresora de banda Sallen-Key poseen la misma función de transferencia, caracterizada por:

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (10-94)$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \quad (10-95)$$

$$\frac{\omega_0}{Q_p} = \frac{2}{RC} \cdot (2 - G) \Rightarrow Q_p = \frac{\omega_0 RC}{2(2 - G)} = \frac{1}{2(2 - G)} \quad (10-96)$$

Por lo general los parámetros que se especifican para la síntesis son la frecuencia central  $f_0$  y el factor  $Q_p$  de la celda. Por consiguiente, la ganancia  $G$  requerida puede obtenerse de la expresión (10-96):

$$G = 2 - \frac{1}{2Q_p} \quad (10-97)$$

Y este valor de  $G$  se sintetizará mediante los resistores  $R_a$  y  $R_b$ :

$$G = 1 + \frac{R_b}{R_a} \quad (10-98)$$

La expresión (10-96) indica que la ganancia de tensión de un filtro de muesca Sallen-Key debe ser inferior a 2 para evitar oscilaciones. Por ello y debido a la tolerancia de los resistores  $R_a$  y  $R_b$ , el factor  $Q_p$  de la celda debe ser mucho menor que 10, ya que con valores de  $Q_p$  mayores (es decir, valores de  $G$  muy cercanos a 2), la tolerancia de  $R_a$  y  $R_b$  puede producir una ganancia  $G$  mayor que 2.

Este circuito se valora por su simplicidad, ya que emplea un único amplificador operacional, cinco resistores y tres capacitores.

Por un lado, una ventaja desde el punto de vista constructivo de este circuito es que, tanto para resistencias como para capacidades, la relación entre el mayor valor y el menor valor es pequeña.

Por otro lado, esta celda tiene serios inconvenientes para implementar filtros supresores de banda de mayor orden (4, 6, etc.) conectando en cascada celdas de segundo orden. En efecto, las dificultades en la sintonía en la frecuencia central  $f_0$  debido a la interacción de los valores de los componentes, causa un corrimiento de las muescas producidas por las distintas etapas. Además la interacción de los valores de los componentes en el factor  $Q_p$  reduce la atenuación dentro de la muesca de cada etapa.

Como consecuencia de estas deficiencias, el filtro de muesca Sallen-Key es una topología poco empleada para la construcción de filtros supresores de banda.

Debido a las interacciones entre los valores de los componentes de la red  $RC$  pasiva con la frecuencia central  $f_0$  y con el factor  $Q_p$ , en el proceso de diseño que se desarrolla en lo que sigue se sugiere efectuar un cálculo iterativo buscando minimizar el error cometido en ambos parámetros ( $f_0$  y  $Q_p$ ) simultáneamente.

### Procedimiento de diseño

En este procedimiento, los elementos de ambas celdas  $RC$  pasivas de la **Fig. 10.28** serán referidos como  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  y  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ , siendo  $R_3$  el resistor designado como  $R/2$  y  $C_3$  el capacitor designado como  $2C$ .

Los datos del diseño son la frecuencia  $f_0$  o la pulsación  $\omega_0$  correspondiente a la ubicación de la muesca en la respuesta en frecuencia, y el factor de mérito  $Q_p$  del par de polos de la celda.

En primer lugar hay que sintetizar la red  $RC$  pasiva con la que se consigue la pulsación  $\omega_0$ , procediendo como sigue:

- a1. Adoptar una lista de valores normalizados para capacitores y otra, eventualmente, diferente para resistores, por ejemplo, E12, E24, E48 ó E96.
- a2. Seleccionar un valor de capacidad  $C$  compatible con uno de los items de la lista de valores normalizados adoptada en el paso (a1). Se recomienda comenzar por el primer ítem.

$C$  será el ítem seleccionado multiplicado por una potencia de 10 que se denominará  $CMult$ . Para definir  $CMult$  se debe tener en cuenta (10-95) y por lo tanto:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi R f_0}$$

Donde  $R$  y  $C$  son los valores considerados en la **Fig. 10.28**. Entonces la potencia de 10 que afecta a la capacidad  $C$  puede adoptarse como 1 + la suma de las potencias de 10 cambiadas de signo de  $2\pi$ ,  $R$  y  $f_0$ . Por ejemplo, si  $f_0$  fuera  $10^4$  y asumiendo que la potencia de 10 de  $2\pi$  es 1, si se pretendiera que  $R$  sea del orden de  $10^3$ , se debería considerar:  $CMult = 10^{-(1+4+1+3)} = 10^{-9}$ .

De este modo, quedan definidos los valores de  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ :

$$C_1 = C_2 = C \quad C_3 = 2C$$

- a3. Calcular el valor de resistencia  $R$  a partir de la expresión (10-95) y empleando el valor  $C$  adoptado en el paso (a2):

$$R = \frac{1}{2\pi f_0 C}$$

De este modo, quedan definidos los valores de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ :

$$R_1 = R_2 = R \quad R_3 = R/2$$

- a4. Adoptar los valores normalizados más cercanos de todos los componentes  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  teniendo en cuenta las correspondientes listas.

Como el valor de  $C$  se adopta y el de  $R$  resulta calculado a partir de  $C$ , si fuera necesario aumentar la precisión de los ajustes para lograr el  $\omega_0$  especificado, bastaría con aumentar el orden de la lista de valores E para los resistores. Por ejemplo, los capacitores se pueden adoptar sobre la lista E24 y los resistores sobre la lista E48 ó E96.

- a5. Determinar el valor sintetizado de la frecuencia  $f_{0S}$  que se consigue con los valores *adoptados* aplicando la expresión (10-95):

$$f_{0S} = \frac{1}{2\pi R_1 C_1}$$

- a6. Determinar el error cometido evaluado como:

$$error = 100(f_{0S} - f_0)/f_0$$

- a7. Si el error fuera inaceptable, adoptar para  $C$  el siguiente ítem de la serie de valores normalizados adoptada en el paso (a1) y se repite el procedimiento a partir del paso (a2). Mediante un sencillo algoritmo se puede recorrer toda la lista de valores normalizados y determinar el conjunto de valores de los componentes que satisfaga la especificación con el mínimo error.

A continuación hay que sintetizar la ganancia  $G$  requerida para obtener el factor  $Q_p$  especificado. Para ello se procede así:

- b1. Emplear la misma lista de valores normalizados para resistores, adoptada en el paso (a1) para el ajuste de  $\omega_0$ .
- b2. Determinar el valor de la ganancia  $G$  requerido aplicando la expresión (10-97).
- b3. Adoptar un valor del resistor  $R_a$  compatible con el primer ítem de la lista de valores normalizados adoptada en el paso (a1).
- b4. Calcular el valor de resistencia  $R_b$  a partir de la expresión (10-98), empleando el valor de  $G$  determinado en el paso (b2) y el valor de  $R_a$  adoptado en el paso (b3), y elegir un valor compatible con la lista de valores normalizados adoptada en el paso (b1).
- b5. Determinar el valor sintetizado de la ganancia  $G_S$  aplicando la expresión (10-98) y empleando los valores  $R_a$  y  $R_b$  adoptados en los pasos (b3) y (b4).
- b6. Determinar el error cometido con  $G_S$  respecto del valor requerido  $G$  determinado en el paso (b2):

$$error = 100(G_S - G)/G$$

b7. Si el error fuera inaceptable, adoptar para  $R_a$  el siguiente ítem de la serie de valores normalizados adoptada en el paso (b1) y repetir el procedimiento a partir del paso (b3). Mediante un sencillo algoritmo se puede recorrer toda la lista de valores normalizados hasta lograr que el error en la ganancia  $G_S$  obtenida resulte mínimo. Claramente, la expresión (10-96) indica que la minimización del error cometido en la ganancia  $G$  conlleva minimizar el error cometido en  $Q_p$ .

#### Ejemplo 10.4.

Sintetizar un filtro de muesca activo configuración Sallen Key para suprimir un tono espúreo de 12,5 kHz, con un factor  $Q_p=2,5$ . Se desea que la atenuación de dicha frecuencia supere los 25 dB.

#### Resolución

La atenuación que se desea lograr a la frecuencia de la muesca puede conseguirse con una única celda Sallen Key.

En primer lugar se sintetiza la celda pasiva  $RC$  que ajusta la frecuencia  $f_0$ .

1. Se adopta la lista de valores E24 para capacitores y E48 para resistores.
2. El factor de escala  $CMult$  a aplicar a los ítems de la lista seleccionada para capacitores resulta, si se desean resistencias en  $k\Omega$ :

$$CMult = 10^{-(1+4+1+3)} = 10^{-9}$$

Entonces para el ítem 24 de la lista de valores E24 adoptada para capacitores, resulta:

$$C = CMult \cdot 9,1 = 9,1 \cdot 10^{-9}$$

De este modo, quedan definidos los valores de  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ :

$$C_1 = C_2 = 9,1 \text{ nF} \quad C_3 = 2C_1 = 18,2 \text{ nF}$$

3. Determinar el valor de  $R$ :

$$R = \frac{1}{2\pi f_0 C} = \frac{1}{2\pi \cdot 12,5 \cdot 10^3 \cdot 9,1 \cdot 10^{-9}} = 1399,16$$

De este modo, quedan definidos los valores de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ :

$$R_1 = R_2 = 1399,16 \quad R_3 = 1399,16/2 = 699,58$$

4. Adoptar los valores normalizados más cercanos de todos los componentes  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  teniendo en cuenta las correspondientes listas:

$$C_1 = C_2 = 9,1 \text{ nF} \quad C_3 = 18 \text{ nF}$$

$$R_1 = R_2 = 1400 \Omega \quad R_3 = 715 \Omega$$

5. El valor sintetizado de la frecuencia  $f_{0S}$  que se consigue con los valores *adoptados* resulta:

$$f_{0S} = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} = \frac{1}{2\pi \cdot 1400 \cdot 9,1 \cdot 10^{-9}} = 12492,5 \text{ Hz}$$

Resultando un error inferior al 0,1%.

A continuación se ajusta el valor de  $Q_p$  por medio de la ganancia  $G$  de la celda la cual se consigue mediante los resistores  $R_a$  y  $R_b$ .

Con el valor de  $Q_p=2,5$  requerido, se determina mediante (10-97) la ganancia  $G$  para la segunda celda:

$$G = 2 - \frac{1}{2Q_p} = 2 - \frac{1}{2 \cdot 2,5} = 1,8$$

La ganancia  $G$  requerida para la segunda etapa se consigue mediante los valores de  $R_a$  y  $R_b$ .

El mejor ajuste para el valor  $G=1,8$  se encuentra asignando a  $R_a$  un valor compatible con el ítem 4 de la lista E48, calculando  $R_b=(G-1) R_a$  y asignándole a  $R_b$  un valor compatible con la serie E48 (ver Apéndice D):

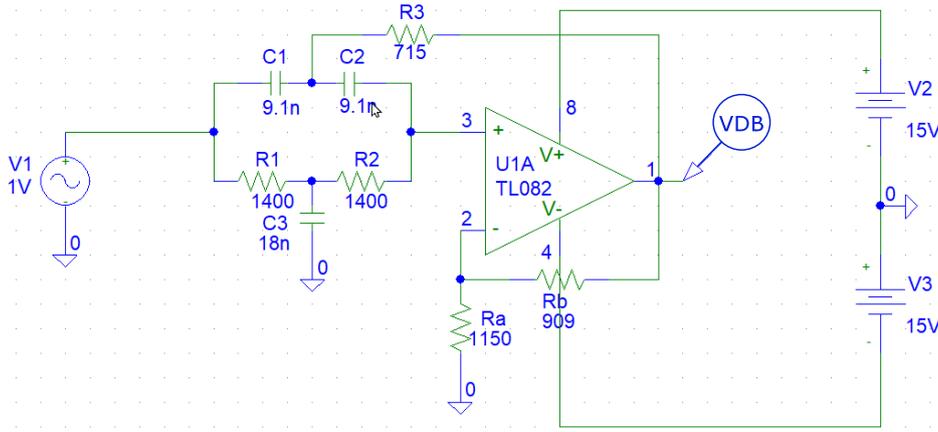
$$R_a = 1150 \Omega \quad R_b = 909 \Omega$$

Estos valores determinan una ganancia sintetizada:

$$G_S = 1 + \frac{R_b}{R_a} = 1 + \frac{909}{1150} = 1,7904$$

Con lo cual el error cometido en la ganancia resulta menor al 0,6%.

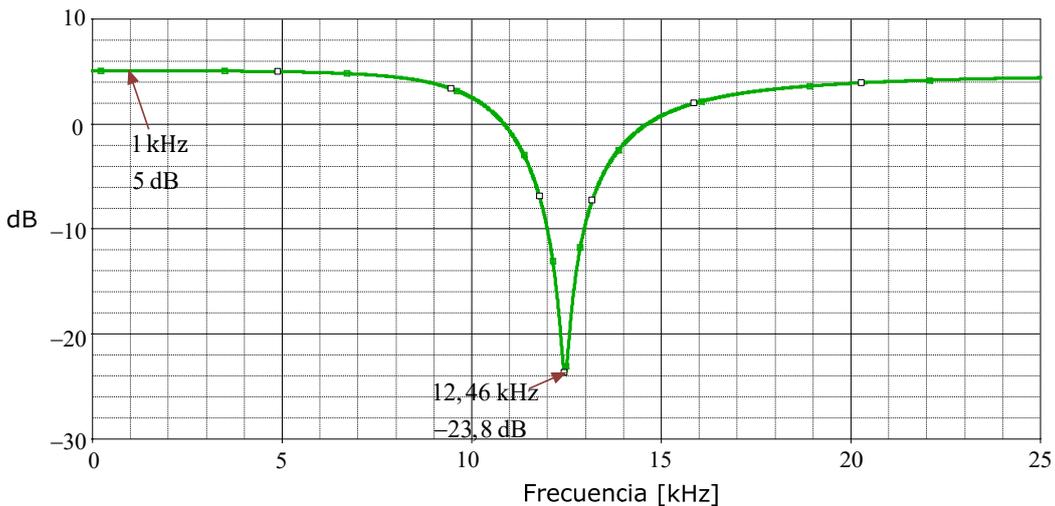
Con todos los valores obtenidos se efectúa la simulación en PSpice. El circuito simulado se muestra en la **Fig. 10.31**. En este caso no hay grandes exigencias de ancho de banda, y se puede emplear perfectamente el amplificador operacional TL082, cuyo producto ganancia por ancho de banda es 3 MHz.



**Fig. 10.31.** Circuito simulado con PSpice.

La simulación se configuró para efectuar el barrido en frecuencia mediante el generador de tensión de 1 V de amplitud y frecuencia variable entre 1 Hz y 25 kHz.

De este modo, la tensión de salida del filtro en decibelios en función de la frecuencia corresponde a la curva de transferencia de tensión de salida a tensión de entrada que se muestra en la **Fig. 10.32**.



**Fig. 10.32.** Respuesta en frecuencia obtenida con la simulación: cumplimiento de las especificaciones.

En la misma **Fig. 10.32** se han indicado los valores de puntos de la curva obtenidos con los cursores sobre la salida de la simulación. Esos puntos corresponden al valor del módulo de la transferencia en la banda de paso, a la frecuencia de 1 kHz que en este caso es una ganancia de 5 dB; y a la frecuencia de la muesca y el correspondiente valor del módulo de la transferencia. Estos valores permiten comprobar que el diseño satisface correctamente los requisitos especificados.

Teniendo en cuenta que la zona plana de la banda de paso es de 5 dB, y que el punto de mayor profundidad de la muesca ocurre en la frecuencia 12,46 kHz llegando a un nivel de -23,8 dB, la atenuación a esa frecuencia resulta: 28,8 dB y se verifica el cumplimiento del requisito de atenuación establecido en la especificación.

### 10.6. Aspectos acerca de la implementación de filtros activos

En las secciones anteriores, se determinaron los valores de los componentes necesarios para implementar los diseños de filtros activos, sin atender demasiado al hecho de que los componentes electrónicos que se emplean son fabricados con una precisión finita; es decir, los componentes no son perfectos y además pueden cambiar su valor debido al envejecimiento o a la exposición al calor, a productos químicos y/o a la humedad. Por lo tanto, es importante seleccionar el mejor tipo de componente para cada propósito. Aunque

en la actualidad se pueden adquirir componentes de precisión que resisten los cambios, el costo de dichos componentes puede encarecer mucho el diseño.

Desde el punto de vista de los costos, resulta más eficiente especificar componentes de precisión solo para aquellos elementos que realmente lo requieran; y para determinar cuáles son los elementos críticos se debe realizar un *análisis de sensibilidad*.

### 10.6.1. Selección de componentes

Cada etapa de un filtro activo está compuesta por una combinación de resistencias, capacitores y amplificadores operacionales. Tanto en el diseño como en la implementación del filtro es muy importante tener presente la incidencia que puede tener en el desempeño del filtro, el empleo de componentes reales en lugar de los ideales. En primer lugar se debe seleccionar adecuadamente el tipo de componente más adecuado para la aplicación que se le dará al filtro, y emplearlo correctamente. En tal sentido, los aspectos más destacables a considerar son los siguientes.

#### El amplificador operacional

La respuesta del filtro se basa en la suposición de que el amplificador operacional es *ideal*, lo cual involucra considerar impedancia de entrada infinita (cuando en el caso real está entre  $1\text{ M}\Omega$  –  $100\text{ M}\Omega$ , dependiendo del dispositivo), impedancia de salida cero (cuando en el caso real está entre  $100\ \Omega$  –  $1,000\ \Omega$ ), y que el amplificador operacional puede amplificar frecuencias hasta infinito (cuando en el caso real el límite de banda es generalmente  $1\text{ MHz}$  –  $10\text{ MHz}$ ). Esta última característica está especificada por el *producto ganancia por ancho de banda* (GBP por las siglas del inglés: *gain-bandwidth product*) del amplificador operacional. Este número proporciona una referencia que sirve para determinar la ganancia de lazo abierto del AO a cualquier frecuencia. Por ejemplo, el GBP de un amplificador operacional TL082 es  $3 \cdot 10^6$ , lo que indica que este AO tiene una ganancia de lazo abierto de 3000 a una frecuencia de 1000 Hz, o una ganancia de lazo abierto de 1 a una frecuencia de  $3 \cdot 10^6$  Hz. Por esta última interpretación, algunos fabricantes suelen denominar al GBP como *ancho de banda de ganancia unitaria* (unity-gain bandwidth). Alternativamente, se podría usar este valor de GBP para predecir que el TL082 se puede emplear con una ganancia de lazo abierto de 50 hasta una frecuencia de 60 kHz.

Pero además es muy importante destacar que las funciones de transferencia de los filtros activos se derivaron suponiendo que las ganancias de los amplificadores operacionales utilizados son muy grandes para todas las frecuencias de interés en el diseño. Por lo tanto, cualquiera sea la característica el filtro activo (pasa bajos, pasa altos, pasa banda, etc.), la ganancia de lazo abierto del amplificador operacional debe ser grande para todas las frecuencias de interés. Estas frecuencias de interés incluyen no solo las bandas de paso, sino también las bandas de atenuación. Afortunadamente, hay muchas opciones cuando se trata de seleccionar el dispositivo activo que se utilizará.

Debido a las características reales de los AO utilizados, los valores de resistencia utilizados en los filtros activos deben encontrarse, preferentemente de ser posible, entre  $1\text{ k}\Omega$  y  $100\text{ k}\Omega$ ; y, obligatoriamente, entre  $100\ \Omega$  y  $1\text{ M}\Omega$ . De lo contrario, las suposiciones efectuadas en todas las deducciones de las funciones de transferencia acerca de que las impedancias del amplificador operacional son ideales, ya no serán válidas y la respuesta del filtro podría no ser la esperada.

#### Capacitores

Los capacitores son los elementos reactivos del filtro activo porque tienen una reactancia que cambia con la frecuencia (a diferencia de las resistencias). En la actualidad se fabrican muchos tipos de capacitores: electrolíticos, cerámicos, poli, de película y otros. Cada tipo de capacitor tiene un lugar y se fabrica para cumplir un propósito específico en las aplicaciones electrónicas. Por ejemplo, los capacitores electrolíticos se usan generalmente en aplicaciones de potencia donde son importantes valores grandes de capacidad (hasta  $10000\ \mu\text{F}$ ) y las variaciones en el valor no son el criterio más importante para la selección. Entre todos los tipos de capacitores son los más alejados del ideal y no deben emplearse en el diseño de filtros activos. Los capacitores de cerámica generalmente tienen valores muy pequeños (en el rango de los pF) y se usan frecuentemente en aplicaciones que operan en el rango de los MHz. En general, los filtros activos no funcionarán a esa frecuencia debido a la limitación del amplificador operacional. Los capacitores más utilizados para filtros activos son referidos como capacitores "poli". Hay varios tipos que entran en esta categoría (poliestireno, polipropileno, policarbonato y poliéster), donde los diferentes nombres indican el

dieléctrico utilizado en su construcción. Hay compensaciones con respecto a la tolerancia, el costo y las características, pero en general encontrará que estos tipos son efectivos en el diseño de filtros activos.

### Resistores

En el caso de los resistores existen diversos tipos, que incluyen composición de carbono, película de carbono, película de metal, bobinado de alambre y otros. Los resistores enrollados de alambre rara vez se usan en filtros, excepto en aplicaciones de potencia, y los resistores de composición de carbono generan cantidades excesivas de ruido. En el diseño de filtros activos generalmente se emplean resistores de película metálica o de película de carbono. En el mercado existe disponibilidad de resistores de película de carbono utilizados para valores de tolerancia del 5% (lo que significa que el valor de resistencia podría ser  $\pm 5\%$  de su valor nominal). Los resistores de película metálica tienen un coeficiente de temperatura más bajo (lo que significa que presentan menores variaciones con los cambios de temperatura) y también se fabrican con una tolerancia del 1%. Los valores típicamente disponibles están comprendidos entre 10  $\Omega$  y 10 M $\Omega$ .

#### 10.6.2. Análisis de sensibilidad

Después de seleccionar los componentes más adecuados para el filtro activo, es importante identificar cuál de estos componentes tiene el mayor efecto en el desempeño general del filtro. Desde el inicio, todos los componentes tendrán valores distintos de los nominales debido a las inevitables *tolerancias* en los procesos de fabricación; y además, todos experimentarán variaciones debidas a factores ambientales como *temperatura y humedad*, y cambios químicos debidos al *envejecimiento* y otras influencias.

Ya que todos los coeficientes, y por tanto los polos y ceros, de una dada función de sistema  $F(s)$  dependen de los elementos del circuito, es de esperar que el comportamiento del filtro sufra desviaciones respecto de su comportamiento ideal. La magnitud del apartamiento dependerá de las variaciones de los elementos y de la *sensibilidad* del comportamiento del circuito, es decir de  $F(s)$ , a dichas variaciones.

El concepto de sensibilidad es uno de los criterios más importantes para comparar configuraciones de circuitos y para establecer su utilidad práctica para satisfacer determinadas especificaciones. El cálculo de la sensibilidad o *análisis de sensibilidad* no sólo permite al diseñador seleccionar la mejor topología entre todas las disponibles; también permite saber si una dada topología satisface las especificaciones y si continuará satisfaciéndolas en el futuro, conocidas las tolerancias de los elementos componentes y su estabilidad a largo plazo; y además permite determinar los componentes más críticos en un diseño, es decir, cuáles son los componentes del filtro que al variar su magnitud afectan en mayor medida a cada una de sus características.

Sea  $x$  la magnitud de cierto componente cuyo valor nominal es  $x_0$  y  $F(s, x)$  cualquier función del circuito que depende de la frecuencia compleja  $s$  y de  $x$ . La desviación de  $F$  debida a un apartamiento  $dx = x - x_0$  del elemento puede obtenerse mediante un desarrollo en serie de Taylor de  $F(s, x)$  alrededor del punto nominal:

$$F(s, x) = F(s, x_0) + \left. \frac{\partial}{\partial x} F(s, x) \right|_{x_0} dx + \left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(s, x) \right|_{x_0} (dx)^2 \dots$$

Si  $dx \ll x_0$  y además si la curvatura de  $F(s, x)$  alrededor de  $x_0$  no es muy grande se pueden despreciar las derivadas de orden superior, con lo cual:

$$F(s, x) = F(s, x_0) + \left. \frac{\partial}{\partial x} F(s, x) \right|_{x_0} dx$$

Pudiendo escribirse:

$$\Delta F(s, x_0) = F(s, x) - F(s, x_0) = \left. \frac{\partial}{\partial x} F(s, x) \right|_{x_0} dx$$

Pero en general los cambios relativos interesan más que los cambios absolutos, razón por la cual es habitual normalizar esta ecuación:

$$\frac{\Delta F(s, x_0)}{F(s, x_0)} = \frac{x_0}{F(s, x_0)} \left. \frac{\partial}{\partial x} F(s, x) \right|_{x_0} \frac{dx}{x_0} \quad (10-99)$$

De donde surge la definición de la sensibilidad de la función  $F$  a las pequeñas desviaciones del parámetro  $x$ :

$$S_x^F = \frac{x}{F(s, x)} \frac{\partial}{\partial x} F(s, x) \Big|_{x=x_0}$$

Que suele escribirse de la siguiente forma abreviada:

$$S_x^F = \frac{x}{F} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial [\ln(F)]}{\partial [\ln(x)]} \quad (10-100)$$

Hay que tener en cuenta que en la sensibilidad no solo considera el cambio en  $F$  como una función de  $x$ , sino también los valores nominales de  $F$  y  $x$ . Por lo tanto, la sensibilidad considera la variación relativa (o cambio por unidad) de la función con respecto a la variación relativa (o cambio por unidad) del parámetro. Entonces, la variación relativa, también llamada *variabilidad*, de cualquier función del circuito o característica  $F$  puede escribirse, a partir de (10-99), como:

$$\frac{\Delta F}{F} \cong S_x^F \frac{dx}{x} \quad (10-101)$$

Un buen diseño debería tener sensibilidades pequeñas de modo tal que, para una variabilidad  $\Delta F/F$  considerada aceptable, se pueden emplear elementos con tolerancias  $dx/x$  mayores y por tanto más económicos. Además, si los componentes sufren variaciones durante la operación del circuito es menos probable que salgan de la región de aceptabilidad.

Sin embargo, en rigor, no es el valor de la *sensibilidad* de  $F$ , sino el de la *variabilidad* de  $F$ , el parámetro que finalmente interesa. En efecto, un valor de sensibilidad elevado con elementos muy estables y de tolerancia muy pequeña puede ser aceptable; mientras que un valor de sensibilidad moderado con elementos de gran tolerancia puede hacer inútil un diseño.

Aunque la sensibilidad siempre puede calcularse directamente usando la definición de (10-100), pueden encontrarse otras relaciones de sensibilidad muy útiles, que pueden facilitar su cómputo:

$$S_x^{cx} = 1 \quad (10-102)$$

$$S_x^{1/F} = -S_x^F \quad (10-103)$$

$$S_x^{FG} = S_x^F + S_x^G \quad (10-104)$$

En estas expresiones  $c$  es una constante y  $G$  es otra función de  $x$ .

En las secciones previas se obtuvieron las expresiones de la función de transferencia de los distintos tipos de filtros activos, en función de los valores de resistencia y capacidad empleados en los correspondientes circuitos. Así, para el filtro pasa bajos resultaron las expresiones de  $H(s)$ ,  $Q_p$  y  $\omega_c$  que se reescriben convenientemente reordenadas a continuación:

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (10-105)$$

$$Q_p = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_1 C_2 (1-G)} \quad (10-106)$$

A modo de ejemplo, se puede determinar la sensibilidad de  $\omega_c$  a las variaciones de  $R_2$ :

$$S_{R_2}^{\omega_c} = \frac{R_2}{\omega_c} \cdot \frac{\partial}{\partial R_2} \left( \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \right) = \frac{R_2}{\omega_c} \cdot \frac{-0,5 \cdot (R_1 R_2 C_1 C_2)^{-\frac{1}{2}} R_1 C_1 C_2}{R_1 R_2 C_1 C_2} = -0,5 \quad (10-107)$$

Teniendo en cuenta la expresión (10-101), este resultado indica que un aumento de  $R_2$  del 5% respecto de su valor nominal, provoca una reducción de  $\omega_c$  de 2,5% respecto del valor nominal.

Para determinar la sensibilidad de  $Q_p$  a las variaciones de  $R_2$  se procede de manera similar:

$$S_{R_2}^{Q_p} = \frac{R_2}{Q_p} \cdot \frac{\partial}{\partial R_2} \left( \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_1 C_2 (1-G)} \right)$$

$$S_{R_2}^{Q_p} = \frac{R_2}{Q_p} \cdot \frac{0,5 \cdot (R_1 R_2 C_1 C_2)^{-\frac{1}{2}} R_1 C_1 C_2 \cdot [R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_1 C_2 (1-G)] - C_1 \cdot \sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{[R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_1 C_2 (1-G)]^2}$$

$$S_{R_2}^{Q_p} = 0,5 - \frac{R_2 C_1}{[R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_1 C_2 (1-G)]} = 0,5 - Q_p \frac{R_2 C_1}{(R_1 R_2 C_1 C_2)^{\frac{1}{2}}} = 0,5 - Q_p \sqrt{\frac{R_2 C_1}{R_1 C_2}} \quad (10-108)$$

Y para el caso de componentes iguales (Estrategia II, en el Apartado 10.5.1) la expresión (10-108) resulta:

$$S_{R_2}^{Q_p} = 0,5 - Q_p \quad (10-109)$$

La cual indica que esta estrategia de diseño no resulta adecuada para valores de  $Q_p$  elevados, dado que la sensibilidad de  $Q_p$  a las variaciones de  $R_2$  también sería elevada.

En cambio, de acuerdo a (10-108), si se adoptan valores adecuados de resistencias y capacidades, podría reducirse la sensibilidad de  $Q_p$  a las variaciones de  $R_2$ . Y mejor aún, desde este punto de vista, resulta la Estrategia III del Apartado 10.5.1, que corresponde a  $R_1=R_2=R$  y  $C_1=n C_2$  cuando se considera el valor particular de  $n=4Q_p^2$  para el que se obtienen los valores:

$$R_1 = R_2 = R \quad C_1 = \frac{2Q_p}{R \omega_C} \quad C_2 = \frac{1}{2R Q_p \omega_C}$$

Con estos valores en la expresión (10-106) se puede comprobar que  $Q_p$  ya no es función de  $R$  y, por lo tanto, tendrá una sensibilidad nula con respecto a los cambios en el valor de resistencia.

Si bien un tratamiento completo del análisis de sensibilidad de todos los parámetros y todas las configuraciones vistas en este capítulo (que son sólo las más elementales) se encuentra más allá del alcance pretendido en este curso, estos ejemplos permiten apreciar cómo la adopción de los valores de resistores y capacitores puede tener una importante incidencia en la sensibilidad general del circuito.

Un análisis de sensibilidad proporciona información valiosa sobre los valores de los componentes adoptados para la implementación. A partir de sus resultados se puede determinar cuáles son los componentes críticos para mantener acotada la variación de los parámetros que caracterizan al filtro.

Como complemento, también es muy útil efectuar un análisis *del peor de los casos* en el circuito. Este análisis se efectúa a partir de las sensibilidades, que se han de calcular previamente, para establecer el valor de cada componente en el límite extremo de su tolerancia, y así poder determinar el efecto en el desempeño general del circuito. Por ejemplo, a todos los componentes con sensibilidades negativas se les asigna el valor correspondiente al límite inferior de su tolerancia, mientras que a todos los componentes con sensibilidades positivas se les asigna el valor correspondiente al límite superior de su tolerancia. De este modo se efectúa el análisis del circuito para ver si aún cumple con las especificaciones. A continuación, a todos los componentes se les asignan los valores en el límite opuesto y la prueba se repite. Si el circuito pasa esta prueba, también cumplirá con las especificaciones cuando los valores sean elegidos al azar al momento del ensamble.

Otro tipo de prueba estadística que es menos rigurosa que una prueba del peor de los casos, pero probablemente más representativa de lo que sucede en la realidad, es la simulación de Monte Carlo. En esta prueba, los valores de los componentes se seleccionan aleatoriamente dentro de su rango de tolerancia y el circuito se prueba para ver si cumple con las especificaciones requeridas. En la mayoría de las aplicaciones informáticas, los valores se pueden caracterizar por tener una distribución gaussiana o uniforme. Por lo general, se ejecutan varias pruebas de Monte Carlo para simular la variación de los valores de los componentes que ocurriría en un proceso de ensamblaje típico.

## 10.7. Bibliografía

- [1] M.E. Van Valkenburg. *Analog Filter Design*. Holt-Saunders International Edition. Japan, 1982. ISBN 4-8338-0091-3.

- [2] Texas Instruments Inc. *Analysis of the Sallen-Key Architecture*. Application Report SLOA024B, July 1999, Revised September 2002.
- [3] Sedra, Adel S. and Smith, Kenneth C. *Microelectronic Circuits*. Oxford University Press, New York, 2010. ISBN 978-0-19-532303-0. Chap. 16 – Filters and Tuned Amplifiers.
- [4] Zumbahlen, Hank. *Basic Linear Design*. Analog Devices Inc., 2007. ISBN 0-916550-28-1. Chap. 8: Analog Filters.
- [5] Franco, Sergio. *Design with operational amplifiers and analog integrated circuits*. Mc Graw Hill Education, New York, 2015. ISBN 978-0-07-802816-8. Chap. 3 – Active Filters. Part I; Chap. 4: Active Filters. Part II.
- [6] Les Thede. *Practical Analog and Digital Filter Design*. Artech House, Inc. 2004. ISBN 978-1-58-053915-9.
- [7] S.A. Pactitis. *Active Filters. Theory and Design*. CRC Press, US. 2011. ISBN 978-1-42-005477-4.
- [8] T. Deliyannis, Yichuang Sun and J.K. Fidler. *Continuous-Time Active Filter Design*. CRC Press. 1999. ISBN 0-8493-2573-0.
- [9] K.L. Su. *Analog Filters*. Springer, US. 2013. ISBN 978-1-47-577585-3.



---

# Capítulo 11

## *Filtros Digitales. Introducción al Diseño.*

---

### 11.1. Introducción

En los dos capítulos precedentes se estudiaron los filtros analógicos pasivos y activos, y se definieron los procedimientos de diseño para cada caso, que fueron ampliamente ejemplificados.

Los filtros analógicos son económicos, rápidos y tienen un gran rango dinámico tanto para la amplitud como para la frecuencia.

En este capítulo se presentarán, con objetivos similares, los filtros digitales que, en comparación con los analógicos, son ampliamente superiores en lo que se refiere a la eficacia que se puede lograr. Esto es así porque un filtro digital actúa sobre señales digitales y es, en último análisis, una “operación matemática” que toma una secuencia de números (la señal de entrada) y la modifica produciendo otra secuencia de números (la señal de salida) con el objetivo de resaltar o atenuar ciertas características. Por lo tanto puede implementarse como un código de programa que se ejecuta en una computadora, o en un circuito dedicado integrado en un chip.

Los filtros digitales tienen varias ventajas sobre los analógicos, que pueden resumirse mencionando las siguientes:

- No sufren los problemas causados por la dispersión de parámetros.
- Pueden implementarse de manera muy simple filtros de orden muy alto y de mucha complejidad pudiéndose lograr gran selectividad.
- Pueden trabajar a frecuencias arbitrariamente bajas.
- Excepto por la cuantización en la conversión A/D y D/A, no tienen componentes que agreguen ruido.

Sin embargo, los filtros digitales también presentan algunas desventajas:

- No pueden trabajar a frecuencias muy altas. El límite lo impone la máxima velocidad de muestreo que se puede lograr en la práctica.
- En casos simples, tienen un costo más elevado que los analógicos.
- Introducen retardos que en algunas aplicaciones pueden ser inadmisibles.

Cada filtro lineal, como cualquier cuadripolo en general, tiene una *respuesta al impulso*, una *respuesta al escalón* y una *respuesta en frecuencia*. Cada una de estas respuestas contiene información completa sobre el filtro, pero en una forma diferente. Si se especifica una de las tres, las otras dos quedan determinadas y se pueden calcular directamente.

Las tres respuestas son importantes, porque describen cómo reaccionará el filtro en diferentes circunstancias.

La forma más sencilla de implementar un filtro digital es mediante la *convolución* de la señal de entrada con la respuesta al impulso del filtro digital. Todos los filtros lineales se pueden realizar de esta manera.

Cuando la respuesta al impulso se usa de esta manera, recibe el nombre de *núcleo* del filtro (*filter kernel* en inglés). También existe otra forma de realizar filtros digitales, llamada *recursión*.

Cuando se implementa un filtro por convolución, cada muestra en la salida se calcula ponderando las muestras en la entrada y sumándolas.

Los filtros recursivos son una extensión de esto utilizando, además de valores de las muestras de entrada, valores de la *salida* calculados previamente. En lugar de usar un núcleo de filtro, los filtros recursivos están definidos por un conjunto de *coeficientes de recursión*.

El método se verá en detalle más adelante, pero por ahora, lo importante es tener presente que todos los filtros lineales tienen una respuesta al impulso, aún cuando no haya sido utilizada para implementar el filtro.

Para encontrar la respuesta al impulso de un filtro recursivo simplemente hay que excitar con un impulso y obtener la respuesta. Las respuestas al impulso de los filtros recursivos están compuestas por sinusoides cuyas amplitudes decaen exponencialmente. En principio, esto haría que sus respuestas al impulso resulten de duración infinita; pero al cabo de cierto tiempo la amplitud cae por debajo del ruido de redondeo del sistema, y a partir de entonces las muestras restantes se pueden ignorar. Los filtros recursivos también se denominan filtros de *respuesta al impulso infinita* o filtros IIR (por las siglas del inglés: *infinite impulse response*). Por contraposición, los filtros realizados por convolución se denominan filtros de *respuesta al impulso finita* o filtros FIR (por las siglas del inglés: *finite impulse response*).

Los filtros FIR y los filtros IIR constituyen las dos grandes categorías de los sistemas discretos en general, los cuales requieren estudiarse por separado debido a sus características particulares y a los métodos de análisis y diseño que son propios de cada uno de ellos.

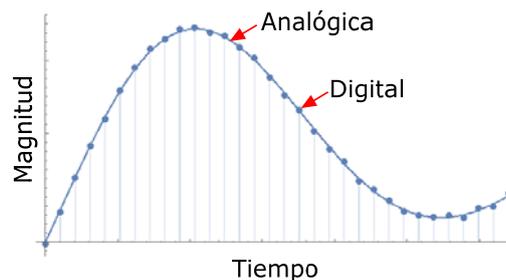
## 11.2. Procesamiento de señales digitales

La comprensión tanto de la teoría como de los procedimientos de diseño de los filtros digitales requiere la revisión de algunos aspectos fundamentales del procesamiento de señales digitales (DSP por sus siglas en inglés), los cuales serán desarrollados en este apartado.

### 11.2.1. Conversión analógico-digital

La mayoría de las señales que se emplean de manera cotidiana son *analógicas* o de tiempo continuo por tener una variación continua tanto en tiempo como en amplitud.

Para convertir esta señal analógica en una señal *digital* de tiempo discreto y amplitud discreta, como se muestra en la **Fig. 11.1** se deben tener en cuenta distintos aspectos.



**Fig. 11.1.** Representación de una señal en formato analógico y digital.

En primer lugar, el espectro de frecuencia de la señal analógica debe estar estrictamente limitado en banda. En segundo lugar, la señal debe muestrearse a la frecuencia de muestreo adecuada. Tercero, el valor muestreado debe cuantificarse a un nivel aceptable de precisión, lo cual dependiendo del caso, puede requerir emplear una cuantificación de alta resolución.

Cuando llega el momento de volver a convertir la señal digital al formato analógico, se pueden emplear distintos métodos, pero una forma simple de hacerlo requiere solo dos pasos. El primer paso es poner el valor digital de la señal y mantenerlo durante el período de muestreo. El segundo paso es pasar esa señal a través de un filtro paso bajos.

Para comprender las razones por las cuales son necesarios estos pasos para la conversión analógica y digital, se requiere estudiar el espectro de frecuencia de una señal muestreada y los requisitos para la frecuencia de muestreo.

### 11.2.2. Muestreo de señales analógicas

Cuando se muestrea una señal analógica  $x(t)$ , como se muestra en la **Fig. 11.1**, las muestras generalmente se toman a intervalos de tiempo iguales. Este período de muestreo  $T_S$  es la inversa de la frecuencia de muestreo  $f_{Mues}$ . La forma de onda digitalizada resultante  $x(nT_S)$  se puede especificar con un argumento que indica el período de muestreo  $T_S$ , de la siguiente forma:

$$x_S(nT_S) = x(t)|_{t=nT_S} \tag{11-1}$$

Como el período de muestreo  $T_S$  no varía y además no será necesario tenerlo en cuenta hasta que la forma de onda digitalizada se vuelva a convertir a analógica, en las expresiones para tiempo discreto es habitual suprimir  $T_S$  resultando:

$$x[n] = x_S(nT_S) = x(t)|_{t=nT_S} \tag{11-2}$$

Donde, para formalizar la consideración implícita de  $T_S$ , suele emplearse corchetes en lugar de paréntesis en la representación simbólica de la señal muestreada, lo cual también denota que se trata de una *secuencia* de valores numéricos.

En la mayoría de las aplicaciones, las señales de entrada a los filtros digitales provendrán del muestreo de una señal analógica. La **Fig. 11.2** muestra un esquema típico del filtrado digital de una señal analógica.

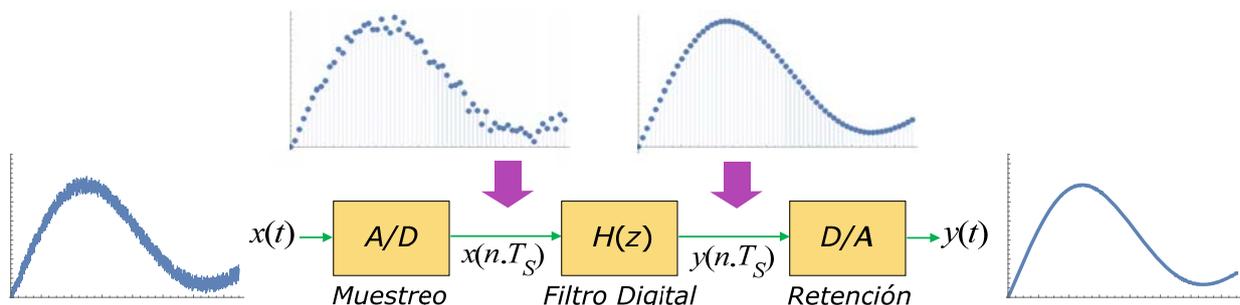
Las características de la respuesta en frecuencia que serán requeridas para el filtro guardan relación con el contenido espectral de la señal analógica  $x(t)$ , por lo tanto hay tener en cuenta la relación entre los espectros de  $x(t)$  y de  $x[n] = x(nT_S)$ , donde  $T_S$  es el período de muestreo.

Para una señal analógica sinusoidal:

$$x(t) = A \cos(\omega t) = A \cos(2\pi f t) \tag{11-3}$$

Muestreada con un período de muestreo  $T_S$  resulta:

$$x[n] = x(n \cdot T_S) = A \cos(\omega n \cdot T_S) = A \cos(2\pi f n \cdot T_S) \tag{11-4}$$



**Fig. 11.2.** Esquema de filtrado digital de una señal analógica.

Aquí es muy importante comprender que la frecuencia  $f$  en (11-3) no es estrictamente la misma que en (11-4). La primera corresponde a un sistema de tiempo continuo para el cual el rango de frecuencias analógicas se extiende desde cero hasta infinito. En cambio, la segunda corresponde a un sistema de tiempo discreto y por lo tanto, según el criterio de Nyquist, el límite superior es  $f_{Mues}/2$ ; por ello, es habitual referir a esta frecuencia como la *frecuencia digital* o *frecuencia del sistema discreto*  $f_d$ . Aplicando esta notación a (11-4) resulta:

$$x[n] = x(n \cdot T_S) = A \cos(2\pi f_d n \cdot T_S) = A \cos(\Omega \cdot n) \tag{11-5}$$

Donde se ha introducido una nueva variable  $\Omega$  que es la pulsación del sistema discreto, normalizada respecto de  $f_{Mues}$ , y que se define como<sup>5</sup>:

$$\Omega = \omega \cdot T_S = 2\pi f_d \cdot T_S = \frac{2\pi f_d}{f_S} \tag{11-6}$$

Dado que

$$0 \leq f_d < \frac{f_S}{2} \tag{11-7}$$

el rango de variación de  $\Omega$  resulta:

<sup>5</sup> Teniendo en cuenta su definición, resulta comprensible que algunos autores la denominan como *variable angular normalizada*.

$$0 \leq \Omega < \pi \quad (11-8)$$

Y teniendo en cuenta (11-6):

$$f_d = \frac{\Omega}{2\pi} f_s \quad (11-9)$$

Entonces, es importante tener en cuenta que una pulsación  $\omega$  rad/s del espectro de la señal analógica se traduce en una pulsación de  $\omega T_s$  en el espectro de la señal digital.

Tanto la función coseno de la expresión (11-4) como la función seno puede describirse mediante exponenciales complejas, como se muestra a continuación:

$$\cos(\Omega \cdot n) = \frac{e^{j\Omega n} + e^{-j\Omega n}}{2} \quad \text{sen}(\Omega \cdot n) = \frac{e^{j\Omega n} - e^{-j\Omega n}}{2j}$$

Por lo tanto, todas las funciones periódicas pueden representarse mediante exponenciales de este tipo, también denominadas *exponenciales discretas*; e incluso las constantes pueden representarse como exponenciales discretas con pulsación cero.

### 11.2.3. Cuantización de muestras

Una vez muestreada la señal analógica, es una señal de tiempo discreto ya que los valores de la señal existen solo en momentos particulares de tiempo, pero la amplitud de la señal sigue siendo continua. Luego, el siguiente paso en la conversión de analógico a digital (dentro del bloque A/D de la **Fig. 11.2**) es *cuantificar* la señal de amplitud continua a uno de los muchos valores discretos de amplitud. El número de posibles valores permitidos para la amplitud está determinado por el tamaño de la variable elegida para almacenar los valores. Por ejemplo, si se elige un solo byte de memoria (8 bits) para almacenar la información, entonces la amplitud puede tomar uno de  $2^8$  valores diferentes. Si la señal original tuviera un rango de amplitudes de +1 V a -1 V, entonces la diferencia entre los niveles de cuantización adyacentes sería de aproximadamente  $7,8 \cdot 10^{-3}$  V. En cambio, si se usaran dos bytes de memoria (16 bits) para almacenar cada muestra, habría  $2^{16}$  valores diferentes para representar la señal, con lo cual, la señal de  $\pm 1$  V tendría niveles de cuantización adyacentes separados por solo  $3,05 \cdot 10^{-5}$  V.

Obviamente, cuanto mayor sea la variable utilizada para almacenar los datos muestreados, mejor será la aproximación de la señal analógica con la representación digital. Sin embargo, el inconveniente de utilizar variables cada vez mayores es doble. Primero, aumentan los requisitos de almacenamiento para almacenar la forma de onda digitalizada por resultar proporcionales al número de bits utilizados para cuantificar las muestras. El segundo inconveniente es la velocidad de conversión de analógico a digital, ya que obtener más precisión requiere más tiempo para la conversión. Eventualmente, se podría alcanzar un límite en la precisión porque la conversión no se puede realizar en el intervalo de muestreo adoptado. Esta limitación es más común cuando se procesan señales de video que tienen anchos de banda del orden de los MHz.

Es importante señalar en este punto que, en teoría, el muestreo de una forma de onda analógica normalmente no produce ningún error; esto supone que el reloj de muestreo no introduce error debido a fluctuaciones del período (*timing jitter* en inglés). El error en un sistema digital es producido por la cuantificación de la muestra. Si las muestras pudieran almacenarse en su forma original de amplitud continua, la señal original se podría regenerar sin errores (asumiendo que se cumple el criterio de Nyquist). El error máximo introducido en el sistema por la cuantificación es igual a *la mitad* de la diferencia entre los niveles de cuantización. En conclusión, la adopción de un método para digitalizar una señal analógica es un compromiso entre la velocidad de conversión, la precisión de la forma de onda y el tamaño de almacenamiento o transmisión.

### 11.2.4. Propiedad de periodicidad de las exponenciales discretas

Así como existen muchas similitudes entre las señales continuas y las discretas, también hay importantes diferencias. Una de éstas concierne a la señal exponencial discreta  $e^{j\omega T_s n}$ . En señales continuas,  $e^{j\omega t}$ , mientras más grande sea la magnitud de  $\omega$ , mayor será la velocidad de oscilación de la señal, en cambio, las señales discretas  $e^{j\omega T_s n}$  son periódicas cada  $2\pi$ :

$$e^{j(\omega T_s + 2\pi)n} = e^{j2\pi n} e^{j\omega T_s n} = e^{j\omega T_s n}$$

Con lo cual, y teniendo en cuenta (11-6), la exponencial de pulsación discreta  $\Omega + 2\pi$  es idéntica a aquella con pulsación discreta  $\Omega$ . Por tanto, al considerar las exponenciales complejas, se tomará en cuenta para  $\Omega$  un intervalo de  $2\pi$ . Y como cualquier rango de longitud  $2\pi$  sería adecuado, en la mayoría de las ocasiones

se suele usar el intervalo;

$$-\pi \leq \Omega < \pi \tag{11-10}$$

Por lo tanto, el rango de frecuencias de un sistema discreto, no se extiende desde cero hasta infinito (o, si se consideran las frecuencias negativas, desde  $-\infty$  a  $+\infty$ ) como en un sistema analógico.

11.2.5. Solapamiento de frecuencias o “aliasing”

En la **Fig. 11.3a** se muestra el espectro de una señal analógica  $x(t)$  y en la **Fig. 11.3b** el espectro de la señal muestreada correspondiente  $x[n]$  con una frecuencia de muestreo que satisface el criterio de Nyquist. El espectro de la señal muestreada siempre será periódico con período  $2\pi$ ; esto significa que el espectro de la señal original es replicado a intervalos  $2\pi$ .

Cuando la frecuencia de muestreo no satisface el criterio de Nyquist, como se muestra en la **Fig. 11.3c**, la replicación del espectro original puede producir una superposición entre las componentes de frecuencia de la señal original y las de la señal replicada, como se muestra en la **Fig. 11.3d**, lo que da lugar a la aparición de componentes que no se encuentran en la señal original, fenómeno conocido como *solapamiento de frecuencias* o *aliasing*.

Puede apreciarse que si la señal analógica no tiene componentes de frecuencias por encima de  $f_{Mues}/2$  no se produce *solapamiento* o *aliasing* y el espectro de la señal muestreada se corresponde con el de la señal analógica original.

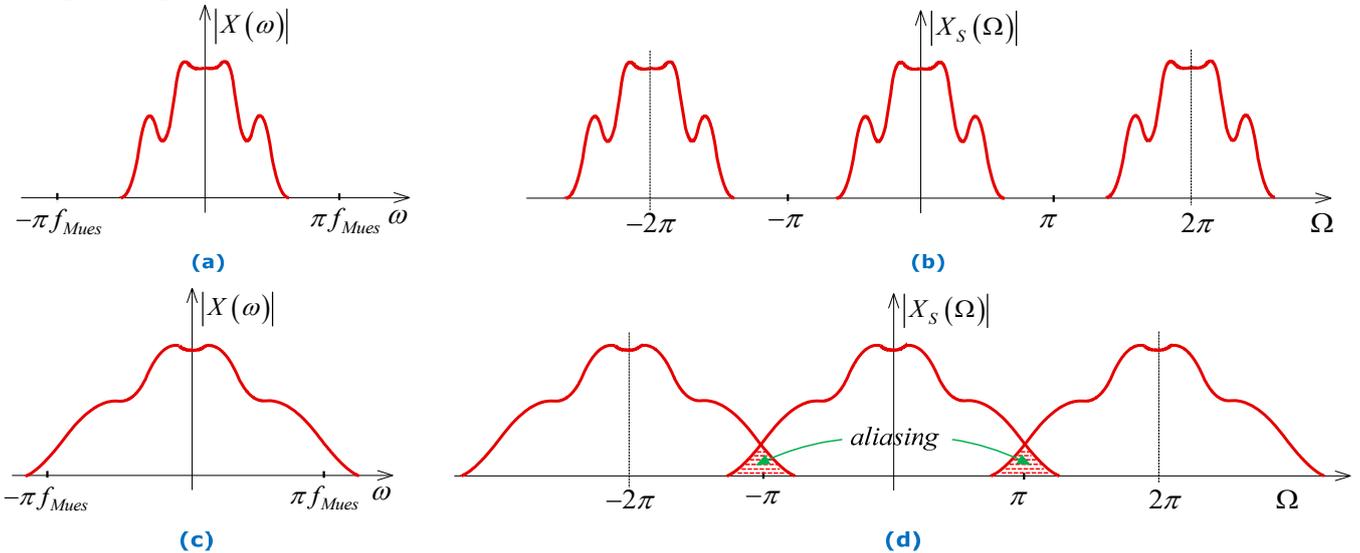


Fig. 11.3. Espectro de una señal analógica y su versión muestreada.

Para asegurar que se cumpla esta condición, es necesario agregar un filtro pasa bajos *antes de muestrear* la señal, cuya finalidad es suprimir el contenido espectral que esté por encima de la mitad de la frecuencia de muestreo. Por lo tanto, este filtro tiene que ser analógico y se denomina filtro *antialiasing*.

11.2.6. Caracterización de los sistemas discretos

Existen diversas formas para caracterizar a los sistemas discretos *lineales invariantes al desplazamiento temporal* (LID) como el que se representa en la **Fig. 11.4**.



Fig. 11.4. Representación de un sistema *lineal invariante al desplazamiento temporal*.

En lo que sigue se describen las formas más empleadas para caracterizar a los sistemas LID, que son: la respuesta al impulso, la respuesta en frecuencia y la función del sistema.

Respuesta al impulso

La función que *caracteriza* a los sistemas LID en el dominio del tiempo es la *respuesta al impulso*  $h[n]$  porque permite obtener la señal de salida del sistema cuando a la entrada se aplica una señal cualquiera. La respuesta al impulso se define como la respuesta del sistema cuando a su entrada se aplica una función impulso  $\delta[n]$  siendo  $n$  el índice de tiempo discreto.

La respuesta al impulso recibe diferentes denominaciones según el campo de aplicación, pero todas tienen el mismo significado. En el caso de los filtros digitales, las denominaciones más empleadas son: *núcleo del filtro*, *núcleo de convolución*, *secuencia de ponderación* del filtro o, simplemente *núcleo* o *kernel*.

### Respuesta en frecuencia de un sistema discreto

Para determinar la respuesta en frecuencia de un sistema discreto, se puede considerar como función de excitación la exponencial compleja:

$$x[n] = e^{j\Omega n}$$

La señal de salida puede obtenerse efectuando la convolución discreta entre esta señal de entrada y la respuesta al impulso, resultando:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot e^{j\Omega(n-k)} = e^{j\Omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot e^{-j\Omega k} \quad (11-11)$$

La expresión (11-11) puede reescribirse como:

$$y[n] = x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot e^{-j\Omega k} = x[n] \cdot H_d(\Omega) \quad (11-12)$$

Donde el operador  $H_d(\Omega)$  es la denominada *respuesta en frecuencia* del sistema discreto la cual queda definida por:

$$H_d(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot e^{-j\Omega k} \quad (11-13)$$

Que, por otra parte, no es otra cosa que la transformada de Fourier de tiempo discreto (TDFT o DTFT, por las siglas del inglés) de la respuesta al impulso  $h[n]$ .

La respuesta en frecuencia  $H_d(\Omega)$  es una función compleja del parámetro real  $\Omega$  y periódica, de período  $2\pi$  de acuerdo a lo demostrado en la sección 11.2.3. Además por ser función compleja, para representarla son suficientes dos gráficos bidimensionales (uno para el módulo y otro para el argumento).

Al igual que ya se vio en los sistemas continuos, la utilidad más importante que se va a hacer de la transformada de Fourier es la que se deriva de la relación:

$$Y(\Omega) = H_d(\Omega) X(\Omega) \quad (11-14)$$

La relación (11-14) permite tratar a los sistemas discretos de manera análoga a la forma en que se procedía con los continuos; dando un procedimiento para determinar la secuencia de salida a partir de la respuesta en frecuencia. En efecto, si

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot e^{-j\Omega k}$$

$$Y(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k] \cdot e^{-j\Omega k}$$

son las transformadas de Fourier de las secuencias de entrada y de salida (señales de entrada y de salida), entonces, si una señal discreta de entrada  $x[n]$  se procesa con un filtro digital de respuesta al impulso  $h[n]$  para generar una señal discreta de salida  $y[n]$ , el *espectro* de la señal de salida  $Y(\Omega)$  se obtiene multiplicando el *espectro* de la entrada  $X(\Omega)$  por la *función de transferencia* del filtro  $H_d(\Omega)$ .

En el dominio del tiempo la relación (11-14) equivale a una operación de convolución:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k] \quad (11-15)$$

Con lo cual conocida la función  $h[n]$ , se puede obtener la respuesta  $y[n]$  del sistema ante cualquier señal entrada  $x[n]$  mediante la suma de convolución (11-15).

La convolución es una operación matemática formal, como lo son la multiplicación, la suma y la integración. La suma toma dos números y produce un tercer número, mientras que la convolución toma dos señales y produce una tercera señal.

Se dice del sistema que:

- es *causal* si su respuesta al impulso cumple que  $h[n]=0$  para  $n < 0$
- es *estable*, es decir una entrada acotada da una salida acotada (BIBO, de las siglas del inglés para *bounded input, bounded output*), si la respuesta al impulso es *sumable* en valor absoluto, es decir si:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

- es *invertible* cuando existe otro sistema (también LID), denominado inverso, cuya respuesta al impulso  $h_i[n]$  satisface que  $h[n]*h_i[n] = \delta[n]$ .

### Función del sistema

Operar en el dominio del tiempo muchas veces puede resultar excesivamente laborioso, por ejemplo, en la suma de convolución, cuando hay que obtener una de las funciones que se convolucionan; otro caso que se puede citar es el problema en el que dado un sistema  $h[n]$ , se intenta obtener el sistema inverso  $h_i[n]$ ; o el caso en el que, conocida la respuesta al impulso del sistema  $h[n]$  y la señal de salida  $y[n]$ , se trata de calcular la secuencia de entrada  $x[n]$  que la originó.

Algunas de estas dificultades pueden superarse operando en otro dominio transformado. Por ello, los sistemas LID también se caracterizan mediante la *función del sistema*, que se define como:

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z^{-k} \quad (11-16)$$

Es decir, la transformada  $z$  de la respuesta al impulso, que es una función continua compleja de variable continua compleja, con lo que para su representación es necesario emplear dos gráficos tridimensionales.

La función del sistema es una función de transferencia, y por lo tanto puede expresarse como:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (11-17)$$

y en el caso de ser una función racional, es posible determinar las propiedades del sistema a partir de su región de convergencia. En este caso, cuando el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador, el sistema es *causal* si la región de convergencia se extiende desde el polo que presente el mayor módulo hasta infinito (inclusive) y el sistema es *estable* si la región de convergencia *incluye* la circunferencia de radio unidad.

La función del sistema simplifica el cálculo en determinados problemas en los que aparece involucrada la operación suma de convolución. Sin embargo, caben destacar los siguientes inconvenientes:

- la variable  $z$  no tiene un sentido físico claro
- es difícil la representación tridimensional de las dos funciones asociadas a  $H(z)$  (módulo y argumento, o parte real y parte imaginaria)
- es necesario determinar la región de convergencia que va asociada a la expresión en  $z$ , y operar correctamente con la misma.

Cuando la región de convergencia de la función del sistema  $H(z)$  incluye a la circunferencia de radio unidad, la respuesta en frecuencia del sistema discreto  $H_d(\Omega)$  se puede determinar teniendo en cuenta (11-13) y (11-16), como:

$$H_d(\Omega) = H(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}} = H(e^{j\Omega}) \quad (11-18)$$

Es habitual, incluso en este capítulo, que se haga referencia a  $H_d(\Omega)$  como  $H(\Omega)$ , sin mayores aclaraciones. Siempre deberá entenderse que  $H(\Omega)$  es una notación abreviada de  $H(e^{j\Omega})$ .

#### 11.2.7. Señales causales y no causales

Esta caracterización de las señales se basa en el principio fundamental del mundo real que establece que todo efecto debe ocurrir *después* de la causa que lo produce.

En el caso de un circuito electrónico analógico, la aplicación de una dada señal a la entrada, producirá una respuesta en la salida.

Ahora considerando un sistema de procesamiento de señales digitales, que *transforma* una señal de entrada en una señal de salida, ambas almacenadas en matrices en una computadora, si forma parte de un sistema del mundo real (procesamiento en tiempo real o procesamiento en línea), debe seguir el mismo principio de causalidad que el mundo real.

Por ejemplo, el valor de la muestra número ocho en la señal de entrada solo puede afectar la muestra número ocho y siguientes en la señal de salida. Se dice que los sistemas que operan de esta manera son causales.

Entonces, partiendo del concepto de que todo efecto es posterior a su causa, un sistema se define causal si su respuesta al impulso tiene valor nulo para todas las muestras numeradas negativas. En otras palabras, el efecto del sistema es posterior a la primera y única muestra no nula de la señal de entrada (la muestra de índice cero).

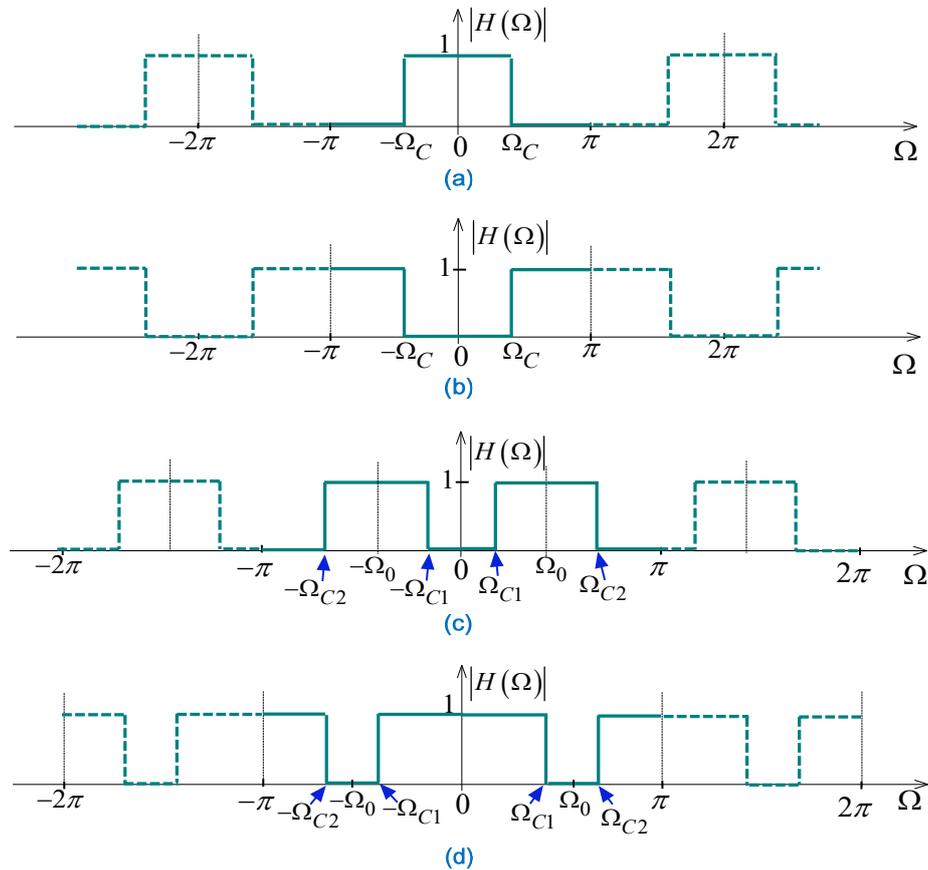
Es habitual aplicar el término *causal* no sólo a los sistemas, sino también a *cualquier* señal (aunque no se trate de una respuesta al impulso) en las que todas las muestras numeradas negativas tienen valor cero.

Sin embargo, el procesamiento digital que no se realiza en tiempo real, puede ser *no causal*, dado que tanto la señal de entrada como la de salida son secuencias de números almacenados en una computadora, y cualquiera de los valores de la señal de entrada puede afectar a cualquiera de los valores de la señal de salida.

### 11.2.8. Características de los filtros ideales

Los filtros en general, tanto analógicos como digitales, se suelen caracterizar en función de los rangos de frecuencia, ya sea de la banda pasante, o bien, de la banda de supresión. Los cuatro tipos básicos de filtros se ilustran en la **Fig. 11.5**. Por tratarse de sistemas discretos, sus respuestas en frecuencia son periódicas de período  $2\pi$ , por lo que sólo se debe considerar el intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

En la **Fig. 11.5** sólo se muestra la amplitud de las respuestas en frecuencia. En lo que se refiere a la fase de las respuestas en frecuencia, lo deseable es que en la banda pasante no se introduzcan desfases, es decir, o bien que la variación de fase sea nula o que varíe en forma lineal con  $\Omega$ .



**Fig. 11.5.** Respuestas en frecuencia de los filtros ideales. (a) Pasa bajos, (b) pasa altos, (c) pasa banda y (d) supresor de banda

Entonces la característica ideal de un filtro con variación lineal de fase respecto a la frecuencia producirá sobre las componentes de la señal que correspondan a la banda pasante, un desfase del tipo  $\varphi(\Omega) = -\lambda \Omega$ , donde  $\lambda$  es una constante. El caso particular para el cual el filtro introduce un desfase nulo, corresponde a  $\lambda$  igual a cero. Luego ante una señal de entrada periódica de pulsación  $\Omega$ , que puede descomponerse en suma de sinusoides del tipo  $\sin(n \Omega)$ , cada una de dichas componentes producirá una respuesta del tipo:  $H(\Omega) \sin[(n-\lambda) \Omega]$ . Por lo tanto, cada armónico de la señal de entrada estará desfasado  $-\lambda \Omega$  veces, de forma tal que en la salida se obtendrá una versión no distorsionada de la señal de entrada, en el rango de frecuencias correspondiente a la banda pasante.

Filtro pasa bajos ideal

Para el caso de un filtro paso bajos, el diseño deberá tener como objetivo la respuesta en frecuencia ideal descrita por:

$$H_{LP}(\Omega) = \begin{cases} 1 \cdot e^{-j\lambda\Omega} & |\Omega| \leq \Omega_C \\ 0 & \Omega_C < |\Omega| < \pi \end{cases} \quad (11-19)$$

Es decir, el módulo es de valor constante igual a 1 en la banda pasante y nulo en la banda de supresión; mientras la fase tiene una variación lineal con la frecuencia.

La forma más sencilla de implementar un filtro digital es mediante la *convolución* de la señal de entrada con la respuesta al impulso del filtro digital. Todos los filtros lineales se pueden realizar de esta manera.

Cuando la respuesta al impulso se emplea de esta manera, recibe el nombre de *núcleo del filtro* (*filter kernel* en inglés) o *secuencia de ponderación* del filtro. Por ello resulta importante determinar la respuesta al impulso de los filtros ideales básicos de la **Fig. 11.5**.

La secuencia de ponderación o respuesta al impulso discreta del filtro pasa bajos ideal se puede determinar aplicando la transformada inversa de Fourier a la expresión (11-19):

$$h_{LP}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot e^{j(n-\lambda)\Omega} \cdot d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_C}^{\Omega_C} 1 \cdot e^{j(n-\lambda)\Omega} \cdot d\Omega = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{j(n-\lambda)\Omega}}{j(n-\lambda)} \Big|_{-\Omega_C}^{\Omega_C}$$

$$h_{LP}[n] = \frac{1}{j2\pi(n-\lambda)} \left\{ \cos[(n-\lambda)\Omega_C] + j \operatorname{sen}[(n-\lambda)\Omega_C] \right\} \Big|_{-\Omega_C}^{\Omega_C} = \frac{j2 \operatorname{sen}[(n-\lambda)\Omega_C]}{j2\pi(n-\lambda)}$$

Resultando finalmente:

$$h_{LP}[n] = \frac{\Omega_C}{\pi} \frac{\operatorname{sen}[(n-\lambda)\Omega_C]}{(n-\lambda)\Omega_C} = \frac{\Omega_C}{\pi} \operatorname{sinc}[(n-\lambda)\Omega_C] \quad (11-20)$$

Y para el caso particular para el cual el filtro introduce un desfase nulo ( $\lambda=0$ ):

$$h_{LP}[n] = \frac{\Omega_C}{\pi} \operatorname{sinc}(n \Omega_C) \quad (11-21)$$

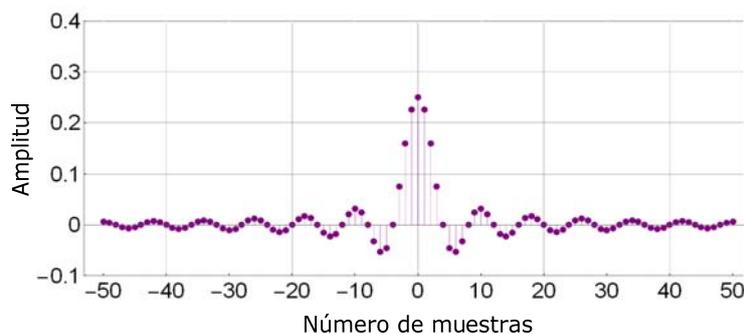
Ejemplo 11.1.

Obtener la respuesta al impulso de un filtro pasa bajos de desfase nulo cuya banda pasante sea un octavo de la frecuencia de muestreo.

Que el desfase introducido por el filtro sea nulo, significa que  $\lambda=0$  en la expresión (11-20) y por lo tanto se aplica la expresión (11-21). Por otra parte, el dato de la banda pasante permite determinar, mediante la expresión (11-6):

$$\Omega_C = 2\pi \frac{f_C}{f_S} = 2\pi \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

En la **Fig. 11.6** se muestran 101 muestras ( $-50 \leq n \leq 50$ ) de la secuencia correspondiente a la respuesta al impulso  $h_{LP}[n]$ .



**Fig. 11.6.** Respuesta al Impulso de un filtro pasa bajos ideal.

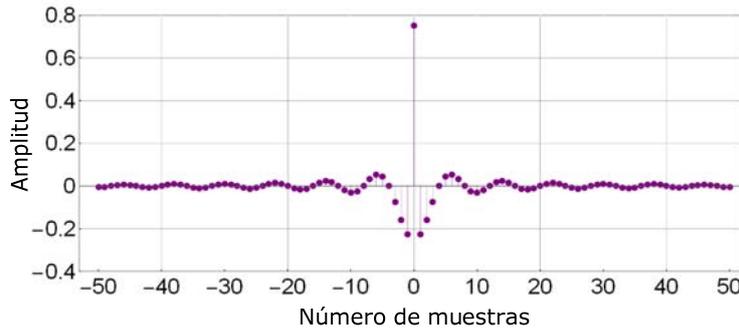
Pueden apreciarse dos características muy importantes: en primer lugar, que la respuesta es de duración infinita; y en segundo lugar, que existe respuesta *antes* de la aparición del impulso (que ocurre en el instante correspondiente a la muestra 0).

### Filtro pasa altos ideal

Para un pasa altos ideal, la respuesta en frecuencia se puede determinar, tal como lo sugiere la comparación entre las **Fig. 11.5a** y **Fig. 11.5b**, como  $H_{HP}(\Omega)=1-H_{LP}(\Omega)$ , y por lo tanto la respuesta al impulso resulta:

$$h_{HP}[n] = \delta[n] - \frac{\Omega_C}{\pi} \text{sinc}(n \Omega_C) \quad (11-22)$$

En la **Fig. 11.7** se muestran 101 muestras ( $-50 \leq n \leq 50$ ) de la secuencia correspondiente a la respuesta al impulso  $h_{HP}[n]$  considerando  $\Omega_C = \pi/4$ .



**Fig. 11.7.** Respuesta al Impulso de un filtro pasa altos ideal.

Nuevamente se observa que la respuesta es de duración infinita y que existe respuesta *antes* de la aparición del impulso (que ocurre en el instante correspondiente a la muestra 0).

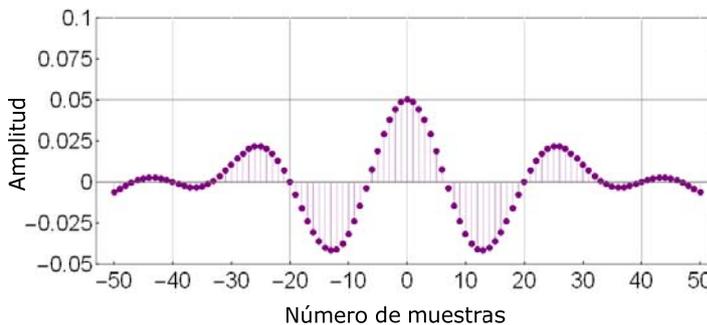
### Filtro pasa banda ideal

De forma similar, la respuesta en frecuencia de un filtro pasa banda ideal se puede pensar, tal como lo sugiere la comparación entre las **Fig. 11.5a** y **Fig. 11.5c**, como la diferencia entre las respuestas en frecuencia de dos pasa bajos. Por lo tanto:

$$h_{BP}[n] = \frac{\Omega_{C2}}{\pi} \text{sinc}(n \Omega_{C2}) - \frac{\Omega_{C1}}{\pi} \text{sinc}(n \Omega_{C1}) \quad (11-23)$$

Siendo  $\Omega_{C1} < \Omega_{C2}$ .

En la **Fig. 11.8** se muestran 101 muestras ( $-50 \leq n \leq 50$ ) de la secuencia correspondiente a la respuesta al impulso  $h_{BP}[n]$  considerando  $\Omega_{C1} = \pi/20$  y  $\Omega_{C2} = \pi/10$ .



**Fig. 11.8.** Respuesta al Impulso de un filtro pasa banda Ideal.

Otra vez se observa que la respuesta es de duración infinita y que existe respuesta *antes* de la aparición del impulso (que ocurre en el instante correspondiente a la muestra 0).

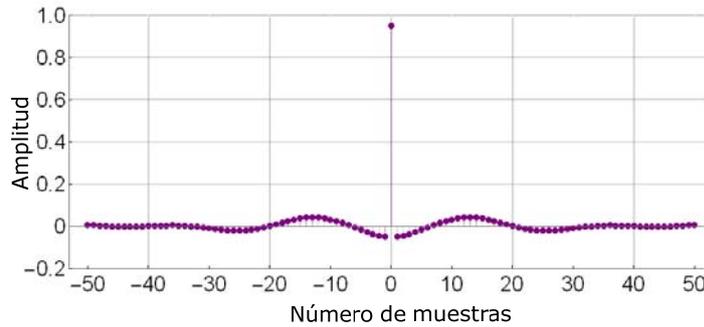
### Filtro supresor de banda ideal

Razonando de manera análoga, tal como lo sugiere la comparación entre las **Fig. 11.5d** y **Fig. 11.5e**, la respuesta en frecuencia de un filtro supresor de banda ideal se puede obtener como  $H_{BS}(\Omega)=1-H_{BP}(\Omega)$ . Por lo tanto:

$$h_{BS}[n] = \delta[n] - \frac{\Omega_{C2}}{\pi} \text{sinc}(n \Omega_{C2}) + \frac{\Omega_{C1}}{\pi} \text{sinc}(n \Omega_{C1}) \quad (11-24)$$

Siendo  $\Omega_{C1} < \Omega_{C2}$ .

En la **Fig. 11.9** se muestran 101 muestras ( $-50 \leq n \leq 50$ ) de la secuencia correspondiente a la respuesta al impulso  $h_{HP}[n]$  considerando  $\Omega_{C1} = \pi/20$  y  $\Omega_{C2} = \pi/10$ .



**Fig. 11.9.** Respuesta al Impulso de un filtro supresor de banda Ideal.

Nuevamente se observa que la respuesta es de duración infinita y que existe respuesta *antes* de la aparición del impulso (que ocurre en el instante correspondiente a la muestra 0).

Como conclusiones del análisis realizado en este apartado cabe mencionar que los cuatro filtros ideales analizados (**Fig. 11.5**) poseen respectivamente respuestas al impulso de *simetría par*, es decir  $h[n]=h[-n]$ . Además *ninguno* de estos filtros *ideales* puede ser implementado en *tiempo real*. En primer lugar, por ser *no causales*, dado que hay respuesta antes de la aparición del impulso que ocurre en el instante correspondiente a la muestra 0. En segundo lugar, en todos los casos la respuesta al impulso es infinita, esto significa que demandaría un tiempo infinito calcular la respuesta del filtro. De estos aspectos, se concluye que la realización de un filtro ideal es físicamente imposible y se deberán establecer criterios de compromiso para el diseño. Por ejemplo, si se trunca la respuesta al impulso se tendrá un filtro digital realizable físicamente, pero éste sólo será una aproximación al comportamiento ideal.

### 11.3. Filtros digitales no recursivos o filtros FIR

La respuesta de un filtro no recursivo, lineal e invariante al desplazamiento temporal, en el instante  $n \cdot T_S$  tiene la siguiente forma:

$$y(n \cdot T_S) = \dots + b_{-2} \cdot x(n \cdot T_S + 2 \cdot T_S) + b_{-1} \cdot x(n \cdot T_S + T_S) + b_0 \cdot x(n \cdot T_S) + b_1 \cdot x(n \cdot T_S - T_S) + b_2 \cdot x(n \cdot T_S - 2 \cdot T_S) + \dots$$

Es decir:

$$y[n] = \dots + b_{-2} \cdot x[n+2] + b_{-1} \cdot x[n+1] + b_0 \cdot x[n] + b_1 \cdot x[n-1] + b_2 \cdot x[n-2] + \dots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \cdot x[n-k]$$

Y teniendo en cuenta la expresión (11-15) los coeficientes  $b_k$  se deben corresponder con la secuencia  $h[n]$  de la respuesta al impulso. Por lo tanto:

$$y[n] = h_{ideal}[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{ideal}[k] \cdot x[n-k] \quad (11-25)$$

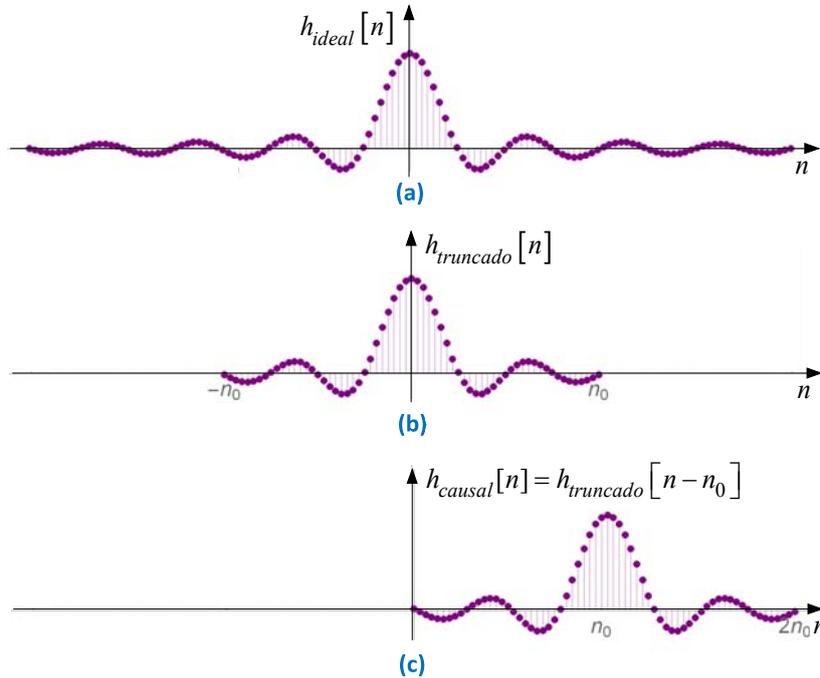
Esta correspondencia indica que la respuesta de un filtro de estas características en cada instante  $n \cdot T_S$ , depende del valor de la señal de entrada en ese mismo instante y además de los valores todas las muestras *precedentes* y *futuras* de la señal de entrada, con lo cual el filtro resultante será *no causal*.

Pero además, como  $h_{ideal}[n]$  tiene infinitos coeficientes (**Fig. 11.10a**), esto requeriría evaluar un número infinito de términos de la sumatoria. Para evitar esto, lo que suele hacerse es truncar  $h_{ideal}[n]$ , limitando la cantidad de coeficientes no nulos, y consecuentemente la cantidad de términos de la sumatoria (11-25), a un número finito  $N+1$  (**Fig. 11.10b**). De aquí surge que los filtros no recursivos también reciban la denominación de filtros de respuesta al impulso *finita* o filtros FIR. De este modo (11-25) resulta:

$$y[n] = h_{truncado}[n] * x[n] = \sum_{k=-n_0}^{+n_0} h_{truncado}[k] \cdot x[n-k] \quad \text{con} \begin{cases} n_0 = N/2 & \text{si } N \text{ es par} \\ n_0 = (N+1)/2 & \text{si } N \text{ es impar} \end{cases} \quad (11-26)$$

Y para lograr que el filtro sea *causal*, como se requiere para su empleo en aplicaciones en tiempo real, se desplaza  $h_{truncado}[k]$  en  $n_0$  muestras, lo que equivale a efectuar un retardo  $n_0 \cdot T_S$  (**Fig. 11.10c**) resultando así:

$$y[n] = h_{truncado}[n - n_0] * x[n] = h_{causal}[n] * x[n] = \sum_{k=0}^N h_{causal}[k] \cdot x[n - k] \quad (11-27)$$



**Fig. 11.10.** Truncamiento y desplazamiento temporal de la respuesta al impulso del filtro pasa bajos ideal para obtener la respuesta al impulso de un filtro pasa bajos causal.

Aquí se considera conveniente destacar que el desplazamiento en  $n_0$  muestras, que se aplicó a  $h_{truncado}[n]$  para lograr la causalidad del filtro, *no se aplicó a la secuencia de entrada*, que es la misma para ambos casos causal y no causal.

Entonces según (11-27) la muestra  $n$  de la secuencia de salida del filtro depende del valor de la muestra  $n$  de la secuencia de entrada (que corresponde a  $k=0$ ) y además de los valores de las  $N$  muestras *precedentes* de la señal de entrada. Por lo tanto, en este tipo de filtros cada valor de la secuencia de salida dependerá de un número finito de  $(N+1)$  valores de la secuencia de entrada solamente, siendo  $N$  el *orden* del filtro.

Entonces el objetivo del diseño de los filtros FIR es obtener la secuencia de coeficientes  $h_{causal}[n]$ , dado que con ellos, puede determinarse la respuesta  $y[n]$  a cualquier señal  $x[n]$  mediante la expresión (11-27).

Aplicando la transformada  $z$  a la expresión (11-27) resulta:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^N h_{causal}[k] \cdot z^{-k} \cdot X(z) \quad (11-28)$$

Donde  $z^{-1}$  es el operador de retardo unitario (en el dominio de la frecuencia compleja  $z^{-1} = e^{-sT_S}$ ).

Ahora puede obtenerse la denominada función de transferencia del filtro FIR causal como la relación *salida a entrada* que resulta:

$$H_{causal}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^N h_{causal}[k] \cdot z^{-k} \quad (11-29)$$

Entonces, la respuesta en frecuencia para un FIR *causal* de orden  $N$  (con  $N+1$  coeficientes), teniendo en cuenta (11-18) y (11-29), resulta dada por:

$$H_{d(causal)}(\Omega) = \sum_{k=0}^N h_{causal}[k] \cdot e^{-j\Omega \cdot k} \quad (11-30)$$

Y de manera completamente análoga, para un filtro FIR no causal:

$$H_{no\ causal}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=-n_0}^{n_0} h_{truncado}[k] \cdot z^{-k} \quad (11-31)$$

$$H_{d(\text{no causal})}(\Omega) = \sum_{k=-n_0}^{n_0} h_{\text{truncado}}[k] \cdot e^{-j\Omega \cdot k} \tag{11-32}$$

Si se modifica ligeramente la expresión de la respuesta en frecuencia para un FIR causal (11-29) para expresarla en función de  $h_{\text{truncado}}[k]$ , cuyo punto de simetría está en  $k=0$ , resulta:

$$H_{\text{causal}}(z) = \sum_{k=0}^N h_{\text{causal}}[k] \cdot z^{-k} = z^{-n_0} \sum_{k=-n_0}^{n_0} h_{\text{truncado}}[k] \cdot z^{-k} \tag{11-33}$$

Es decir:

$$H_{\text{causal}}(z) = z^{-n_0} \cdot H_{\text{no causal}}(z) \tag{11-34}$$

Con lo cual, la relación entre las respuestas en frecuencia de un FIR *causal* y de un FIR *no causal*, teniendo en cuenta (11-18) resulta dada por:

$$H_{\text{causal}}(\Omega) = e^{-j\Omega \cdot n_0} \cdot H_{\text{no causal}}(\Omega) \tag{11-35}$$

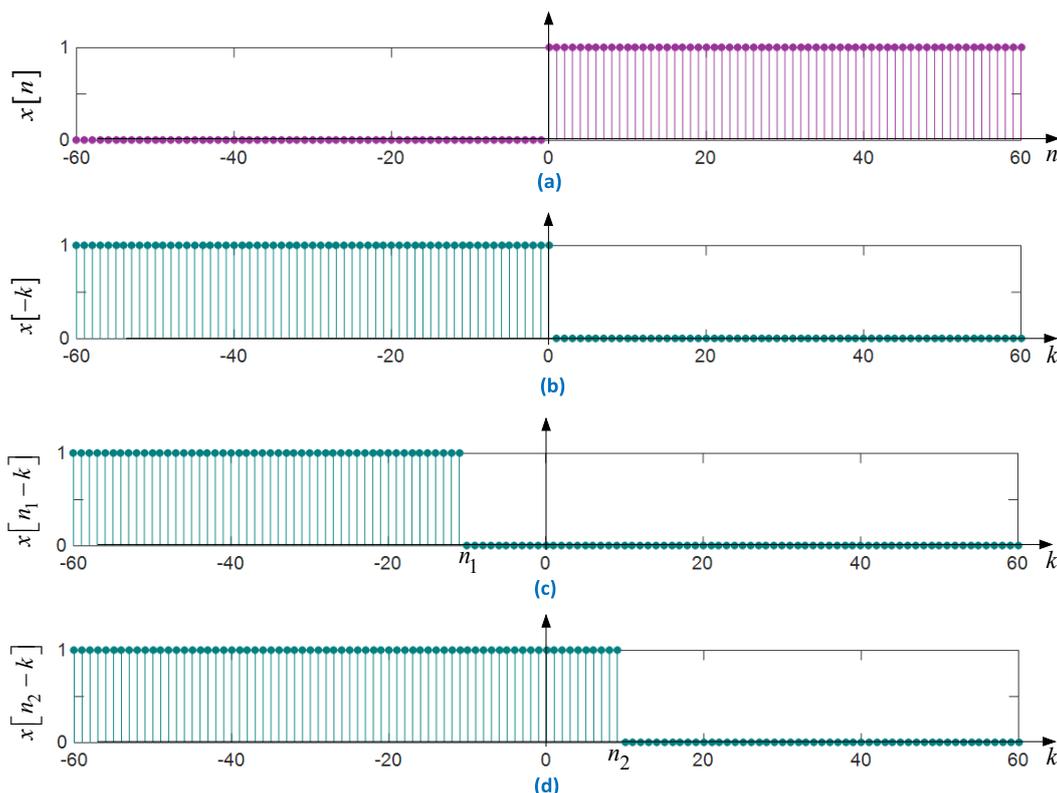
En este apartado se ha indicado la causalidad o no causalidad del filtro, tanto en la notación de  $h[n]$  como en la de  $H(z)$  y  $H_d(\Omega)=H(e^{j\Omega})$ . Esto se encuentra muy pocas veces en otros libros, por ser una información redundante que está implícitamente contenida en los límites del índice de la sumatoria. En este texto fue adoptada porque se considera la mejor forma de poner en evidencia la importante relación (11-35).

Sin embargo se recomienda enfáticamente que esta redundancia sea comprendida revisando las expresiones anteriores, puesto que en los apartados siguientes dicha notación será evitada, a fin de simplificar las expresiones.

Los procedimientos de diseño de un filtro FIR causal parten de *imponer* que la función de transferencia discreta resultante tenga una fase lineal en la banda de paso. Es así que para lograr que la fase de  $H_d(\Omega)=H(e^{j\Omega})$  sea lineal, la respuesta al impulso  $h_{\text{causal}}[n]$  deberá cumplir ciertos requerimientos basados en sus características de simetría.

### 11.3.1. Causalidad vs. no causalidad

Para efectuar un análisis comparativo entre un filtro causal y uno no causal, la mejor forma de proceder es aplicando a ambos una secuencia de entrada  $x[n]$  que corresponda a un escalón unitario cuyo flanco se encuentra en  $n=0$ , **Fig. 11.11a**, y comparar las respuestas obtenidas.



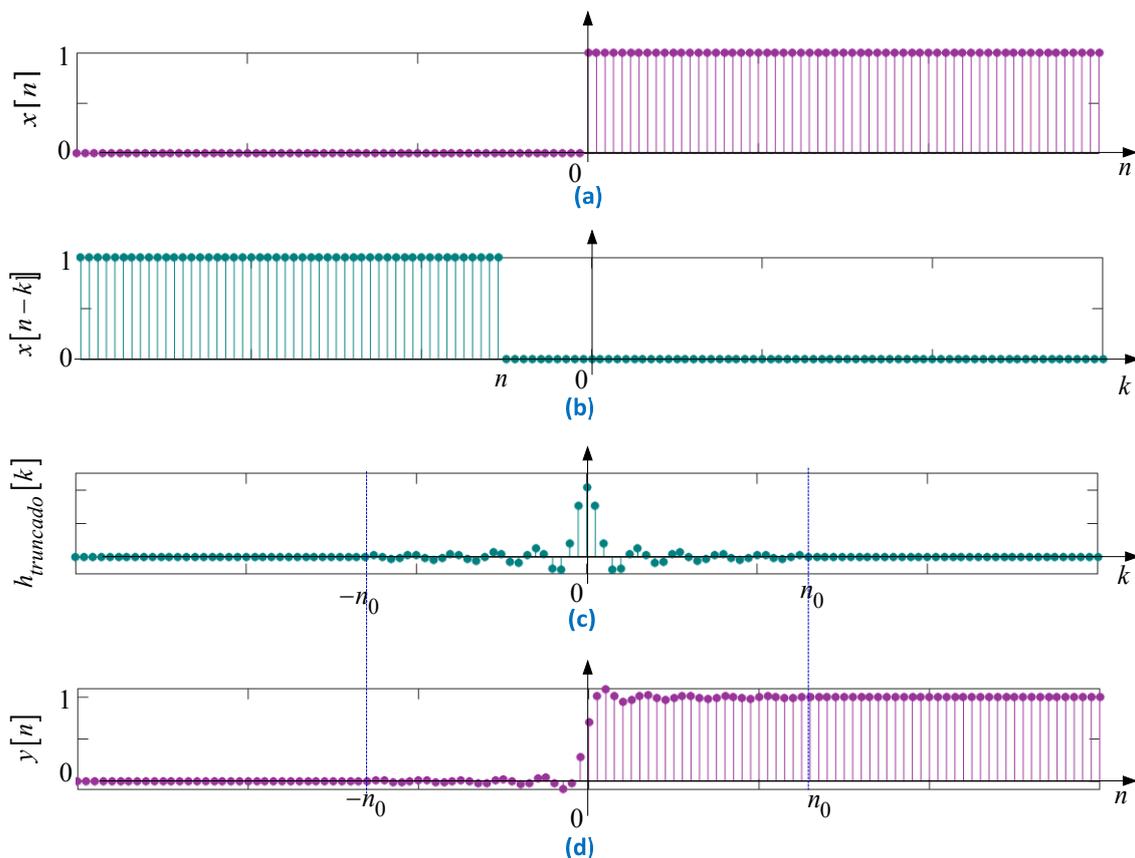
**Fig. 11.11.** Rebatimiento de  $x[n-k]$  respecto de  $x[n]$  debido al cambio de signo de la nueva variable  $k$  y efecto del parámetro  $n$  ( $n_1 < n_2$ ) en la convolución discreta

La secuencia de salida  $y[n]$  se puede obtener con (11-26) para el filtro no causal y (11-27) para el filtro causal. En ambos casos, la secuencia de entrada  $x[n]$  es la misma y aparece como  $x[n-k]$  siendo  $k$  la variable y  $n$  el número de muestra que se está evaluando de la secuencia de salida, que para ambas sumatorias es un parámetro constante.

Es muy útil hacer un análisis cualitativo para ambas expresiones (11-26) y (11-27) para determinar la respuesta resultante. Para ello, es importante razonar gráficamente el efecto de pasar de  $x[n]$  vs.  $n$  a  $x[n-k]$  vs.  $k$ . En primer lugar, existe un cambio de variables  $n$  por  $-k$ , lo cual produce el rebatimiento de  $x[-k]$  con respecto a  $x[n]$ , siendo el eje de dicho rebatimiento la muestra de índice 0, como se muestra en la **Fig. 11.11b**.

El efecto de los distintos valores de  $n$  en la representación gráfica de  $x[n-k]$  vs.  $k$  se muestra en las **Fig. 11.11c** y **Fig. 11.11d**. Así, cuando  $n$  adopta valores  $n_j$  entre  $-\infty$  y  $+\infty$  el flanco de la secuencia de entrada rebatida se desplaza al valor  $k=n_j$ .

El análisis cualitativo de la expresión (11-26) para el filtro no causal, se realiza con base en la **Fig. 11.12**. En la **Fig. 11.12a** se representa la secuencia de entrada  $x[n]$  vs.  $n$  que es un escalón unitario y será considerada colmo referencia. La **Fig. 11.12b** muestra la secuencia calculada  $x[n-k]$  vs.  $k$ , que si bien se ha representado para un dado valor de  $n$ , debe entenderse que  $n$  adopta todos los valores correspondientes a los números de muestra que se deben evaluar para la secuencia de salida  $y[n]$  vs.  $n$ . La **Fig. 11.12c** muestra la respuesta al impulso truncada de un filtro pasa bajos causal  $h_{truncado}[k]$  vs.  $k$ . Finalmente, la **Fig. 11.12d** muestra la secuencia de salida resultante  $y[n]$  vs.  $n$ , la cual se obtiene muestra a muestra, ubicando el flanco de  $x[n-k]$  vs.  $k$  (**Fig. 11.12b**) en la posición  $k=n$  y efectuando la sumatoria de todos los productos entre las muestras de  $x[n-k]$  y de  $h_{truncado}[k]$  alineadas entre  $k=-n_0$  y  $k=n_0$ .



**Fig. 11.12.** Respuesta  $y[n]$  a un escalón unitario de un filtro pasa bajos no causal.

De manera completamente similar, puede efectuarse el análisis cualitativo de la expresión (11-27) para el filtro no causal, que en este caso se realiza con base en la **Fig. 11.13**. En la **Fig. 11.13a** se representa la secuencia de entrada  $x[n]$  vs.  $n$  que es un escalón unitario y será considerada como referencia. La **Fig. 11.13b** muestra la secuencia calculada  $x[n-k]$  vs.  $k$ , que si bien se ha representado para un dado valor de  $n$ , debe entenderse que  $n$  adopta todos los valores correspondientes a los números de muestra que se deben evaluar para la secuencia de salida  $y[n]$  vs.  $n$ . La **Fig. 11.13c** muestra la respuesta al impulso de un filtro pasa bajos causal  $h_{causal}[k]$  vs.  $k$ . Finalmente, la **Fig. 11.13d** muestra la secuencia de salida resultante  $y[n]$  vs.  $n$ , la cual se obtiene muestra a muestra, ubicando el flanco de  $x[n-k]$  vs.  $k$  (**Fig. 11.13b**) en la

posición  $k=n$  y efectuando la sumatoria de todos los productos entre las muestras de  $x[n-k]$  y de  $h_{causal}[k]$  alineadas entre  $k=0$  y  $k=2n_0$ .

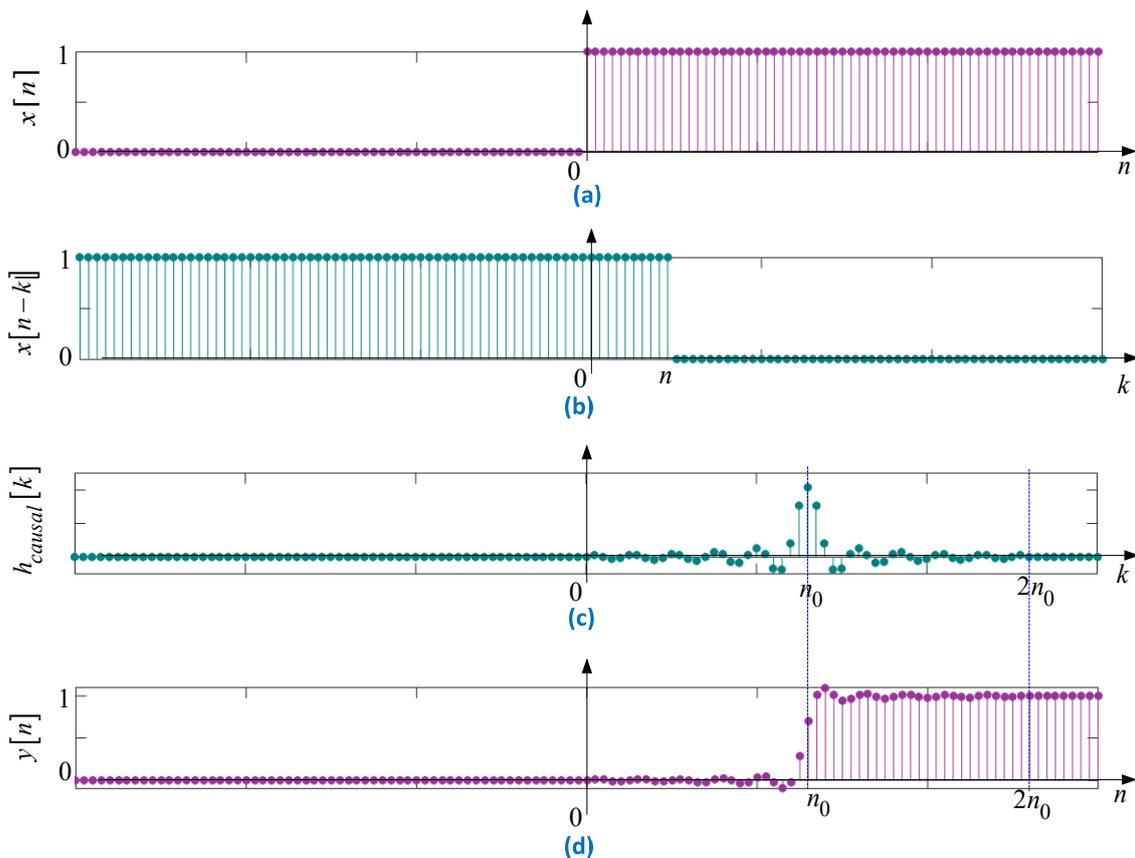


Fig. 11.13. Respuesta  $y[n]$  a un escalón unitario de un filtro pasa bajos causal.

Como resultado comparativo de ambos análisis puede afirmarse que los filtros causales producen un retardo de la salida respecto a la entrada que, para una respuesta al impulso simétrica, corresponde a la muestra del centro de simetría.

Los filtros no causales son irrealizables en la práctica. No es posible construir un filtro no causal que opere en tiempo real o *en línea*.

Sin embargo, cuando se trabaja en una computadora, *fuera de línea*, tanto la señal de entrada como la señal de salida del filtro son secuencias de números *almacenadas en memoria* y, por lo tanto, en tales casos sí pueden usarse filtros no causales. Y de hecho se emplean en todas aquellas aplicaciones que requieran filtrado de retardo nulo. Esto es algo muy empleado en el campo del procesamiento de imágenes.

### 11.3.2. Características de simetría de la respuesta al impulso

Se considera adecuado subrayar que en este texto se emplea  $N$  para denotar el *orden* del filtro; en algunos libros se usa  $N$  para la *longitud* del filtro, así es que se debe tener cuidado con las diferencias debidas a esta notación. Un filtro de orden  $N$  tiene una respuesta al impulso con  $N + 1$  coeficientes distintos de cero, por lo que su *longitud* es  $N + 1$ . Por tanto, si el orden es par, la longitud es impar y viceversa.

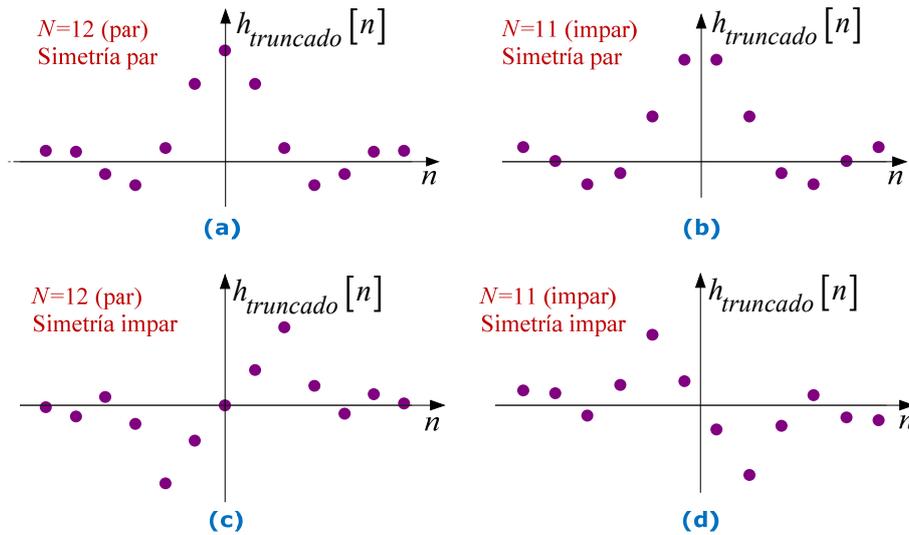
Por otra parte, la respuesta al impulso puede ser *simétrica* (cuando tiene simetría par) o *antisimétrica* (cuando tiene simetría impar).

En consecuencia, la combinación de la paridad de  $N$  con la simetría de la respuesta al impulso da lugar a cuatro casos que se ejemplifican en la Fig. 11.14.

Estos cuatro casos determinan cuatro tipos de filtros FIR, a saber:

- **Tipo 1.** Corresponden a las condiciones de simetría representadas en la Fig. 11.14a:  $h_{truncado}[n]$  posee simetría par y un número de coeficientes  $(N+1)$  impar, es decir, el orden  $N$  del filtro es par.
- **Tipo 2.** Corresponden a las condiciones de simetría representadas en la Fig. 11.14b:  $h_{truncado}[n]$  posee simetría par y un número de coeficientes  $(N+1)$  par, es decir, el orden  $N$  del filtro es impar.
- **Tipo 3.** Corresponden a las condiciones de simetría representadas en la Fig. 11.14c:  $h_{truncado}[n]$  posee simetría impar y un número de coeficientes  $(N+1)$  par, es decir, el orden  $N$  del filtro es impar.

- **Tipo 4.** Corresponden a las condiciones de simetría representadas en la **Fig. 11.14d**:  $h_{truncado}[n]$  posee simetría impar y un número de coeficientes  $(N+1)$  impar, es decir, el orden  $N$  del filtro es par.



**Fig. 11.14.** Condiciones de simetría de la respuesta al impulso no causal. (a) Filtros tipo 1; (b) Filtros tipo 2; (c) Filtros tipo 3; (d) Filtros tipo 4;

Aquí resulta conveniente observar que para los casos con un orden  $N$  impar, es decir el número de coeficientes par (ejemplificados en la **Fig. 11.14b** y **Fig. 11.14d**), la primera muestra de  $h_{truncado}[n]$  corresponde al instante  $-N \cdot T_s/2$ , es decir no corresponde a un número entero de períodos de muestreo.

Tal como se concluye en el apartado **11.2.8**, las características de los filtros ideales de interés para este curso, que son las representadas en la **Fig. 11.5**, poseen respectivamente respuestas al impulso de *simetría par*, con lo cual sirven para implementar filtros pasa bajos, pasa altos, pasa banda y supresor de banda tipo 1 o filtros pasa bajos y pasa banda tipo 2.

Filtros Tipo 1.

Este tipo de filtros corresponden a las condiciones de simetría representadas en la **Fig. 11.14a**:  $h_{truncado}[n]$  posee simetría par y el orden  $N$  del filtro es par y por lo tanto:

$$N = 2 \cdot n_0$$

$$h_{truncado}[n] = h_{truncado}[-n] \tag{11-36}$$

El punto de simetría es la muestra central  $h_{truncado}[0]$ , que es única (no tiene réplica simétrica). Las sumatorias de la expresión (11-33) pueden desarrollarse en forma genérica sobre la base de las relaciones entre los  $(N+1)$  coeficientes de  $h_{truncado}[n]$  que impone su simetría.

$$H_{causal}(z) = z^{-n_0} \left\{ h_{truncado}[0] + \sum_{k=-n_0}^{-1} h_{truncado}[k] \cdot z^{-k} + \sum_{k=1}^{n_0} h_{truncado}[k] \cdot z^{-k} \right\}$$

$$H_{causal}(z) = z^{-n_0} \left\{ h_{truncado}[0] + \sum_{k=1}^{n_0} h_{truncado}[-k] \cdot z^k + \sum_{k=1}^{n_0} h_{truncado}[k] \cdot z^{-k} \right\} \tag{11-37}$$

Por la condición (11-36) de simetría de  $h_{truncado}[n]$ , para  $z=e^{j\Omega}$  resulta:

$$H_{causal}(\Omega) = e^{-j\Omega n_0} \left\{ h_{truncado}[0] + \sum_{k=1}^{n_0} h_{truncado}[k] \cdot (e^{j\Omega k} + e^{-j\Omega k}) \right\}$$

$$H_{causal}(\Omega) = e^{-j\Omega n_0} \left\{ h_{truncado}[0] + 2 \sum_{k=1}^{n_0} h_{truncado}[k] \cdot \cos(\Omega k) \right\} \tag{11-38}$$

Que resulta equivalente a:

$$H_{causal}(\Omega) = e^{-j\Omega n_0} \left\{ h_{causal}[n_0] + 2 \sum_{k=0}^{n_0-1} h_{causal}[k] \cdot \cos[\Omega(k - n_0)] \right\} \tag{11-39}$$

En ambas expresiones (11-38) y (11-39) la evaluación de los términos entre llaves resulta un número real  $H_0(\Omega)$ , y la respuesta en frecuencia será:

$$H_{causal}(\Omega) = H_0(\Omega) \cdot e^{-j\Omega n_0} \quad (11-40)$$

Expresión que tiene la forma:

$$H_{causal}(\Omega) = H_0(\Omega) \cdot e^{j\theta(\Omega)} \quad (11-41)$$

Esta forma de expresar la respuesta en frecuencia  $H_{causal}(\Omega)$  permite identificar claramente lo que se define como la *amplitud* y la *fase* de  $H_{causal}(\Omega)$ : la amplitud es  $H_0(\Omega)$  que puede tener cambios de signo, lo cual hace que no sea igual a  $|H_{causal}(\Omega)|$ .

En este caso, en lo que se refiere a la amplitud de  $H_{causal}(\Omega)$ , de la expresión (11-39) se deduce que, para los filtros tipo 1, en  $\Omega=0$  como en  $\Omega=\pi$  resulta que  $H_0(\Omega)$  puede ser cero o distinto de cero, dependiendo del valor de  $h_{causal}[n_0]$ . Esto implica que con filtros de este tipo se pueden realizar filtros de todo tipo de banda de paso: pasa bajos, pasa altos, pasa banda y supresor de banda.

Por otra parte, la fase  $\theta(\Omega)$  resulta  $-n_0\Omega$ , que es lineal con la frecuencia y no debe confundirse con  $\text{Arg}[H_{causal}(\Omega)]$ , que es lineal por tramos, debido a los cambios de signo de  $H_0(\Omega)$ .

### Filtros Tipo 2.

Este tipo de filtros corresponden a las condiciones de simetría representadas en la **Fig. 11.14b**:  $h_{truncado}[n]$  posee simetría par y el orden  $N$  del filtro es impar y por lo tanto:

$$N = 2n_0 - 1$$

$$h_{truncado}[n] = h_{truncado}[-n] \quad (11-42)$$

En este caso, la muestra central  $h_{truncado}[0]$  no existe. Es decir el punto de simetría no corresponde a una muestra.

Las sumatorias de la expresión (11-33) pueden desarrollarse en forma genérica sobre la base de las relaciones entre los  $(N+1)$  coeficientes de  $h_{truncado}[n]$  que impone su simetría.

$$H_{causal}(z) = z^{-n_0+0,5} \left\{ \sum_{k=-n_0}^{-1} h_{truncado}[k] \cdot z^{-k+0,5} + \sum_{k=1}^{n_0} h_{truncado}[k] \cdot z^{-k+0,5} \right\}$$

$$H_{causal}(z) = z^{-n_0+0,5} \left\{ \sum_{k=1}^{n_0} h_{truncado}[-k] \cdot z^{k-0,5} + \sum_{k=1}^{n_0} h_{truncado}[k] \cdot z^{-k+0,5} \right\} \quad (11-43)$$

Por la condición (11-42) de simetría de  $h_{truncado}[n]$ , para  $z=e^{j\Omega}$  resulta:

$$H_{causal}(\Omega) = e^{-j\Omega(n_0-0,5)} \left\{ \sum_{k=1}^{n_0} h_{truncado}[k] \cdot \left( e^{j\Omega(k-0,5)} + e^{-j\Omega(k-0,5)} \right) \right\}$$

$$H_{causal}(\Omega) = e^{-j\Omega(n_0-0,5)} \left\{ 2 \sum_{k=1}^{n_0} h_{truncado}[k] \cdot \cos \left[ \Omega \left( k - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \quad (11-44)$$

Que resulta equivalente a:

$$H_{causal}(\Omega) = e^{-j\Omega(n_0-0,5)} \left\{ 2 \sum_{k=0}^{n_0-1} h_{causal}[k] \cdot \cos \left[ \Omega \left( k - \frac{1}{2} + n_0 \right) \right] \right\} \quad (11-45)$$

Otra vez, en ambas expresiones (11-44) y (11-45) la evaluación de los términos entre llaves resulta un número real  $H_0(\Omega)$ , y la respuesta en frecuencia será:

$$H_{causal}(\Omega) = H_0(\Omega) \cdot e^{-j\Omega(n_0-0,5)} \quad (11-46)$$

Expresión que tiene la forma:

$$H_{causal}(\Omega) = H_0(\Omega) \cdot e^{j\theta(\Omega)} \quad (11-47)$$

En este caso, en lo que se refiere a la amplitud de  $H_{causal}(\Omega)$ , una característica interesante de los filtros tipo 2, que puede deducirse de la expresión (11-44), es que  $H_0(\pi)=0$ . Esto implica que con filtros de este tipo no pueden realizarse las características de los filtros pasa altos ni supresor de banda.

Por otra parte, la fase  $\theta(\Omega)$  resulta  $-(n_0-0,5)\Omega$ , que también es lineal con la frecuencia y no debe confundirse con  $\text{Arg}[H_{causal}(\Omega)]$ , que es lineal por tramos, debido a los cambios de signo de  $H_0(\Omega)$ .

### Filtros Tipo 3.

Este tipo de filtros corresponden a las condiciones de simetría representadas en la **Fig. 11.14c**: el orden  $N$  del filtro es par y  $h_{truncado}[n]$  posee simetría impar. Estas condiciones determinan que:

$$N = 2 \cdot n_0$$

$$h_{truncado}[n] = -h_{truncado}[-n]$$

El punto de simetría es la muestra central  $h_{truncado}[0]$ , que otra vez es única (no tiene réplica simétrica), pero en este caso siempre tiene valor nulo.

Las sumatorias de la expresión (11-33) pueden desarrollarse en forma genérica sobre la base de las relaciones entre los  $(N+1)$  coeficientes de  $h_{truncado}[n]$  que impone su simetría.

$$H_{causal}(z) = z^{-n_0} \left\{ h_{truncado}[0] + \sum_{k=-n_0}^{-1} h_{truncado}[k] \cdot z^{-k} + \sum_{k=1}^{n_0} h_{truncado}[k] \cdot z^{-k} \right\}$$

$$H_{causal}(z) = z^{-n_0} \left\{ \sum_{k=1}^{n_0} h_{truncado}[-k] \cdot z^k + \sum_{k=1}^{n_0} h_{truncado}[k] \cdot z^{-k} \right\} \quad (11-48)$$

Por la condición (11-36) de simetría de  $h_{truncado}[n]$ , para  $z=e^{j\Omega}$  resulta:

$$H_{causal}(\Omega) = e^{-j\Omega n_0} \left\{ \sum_{k=1}^{n_0} h_{truncado}[k] \cdot (e^{j\Omega k} - e^{-j\Omega k}) \right\} = e^{-j\Omega n_0} \left\{ 2j \sum_{k=1}^{n_0} h_{truncado}[k] \cdot \text{sen}(\Omega k) \right\}$$

$$H_{causal}(\Omega) = e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \Omega n_0\right)} \left\{ 2 \sum_{k=1}^{n_0} h_{truncado}[k] \cdot \text{sen}(\Omega k) \right\} \quad (11-49)$$

Que resulta equivalente a:

$$H_{causal}(\Omega) = e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \Omega n_0\right)} \left\{ 2 \sum_{k=0}^{n_0-1} h_{causal}[k] \cdot \text{sen}[\Omega(k - n_0)] \right\} \quad (11-50)$$

Otra vez, en ambas expresiones (11-49) y (11-50) la evaluación de los términos entre llaves resulta un número real  $H_0(\Omega)$ , y la respuesta en frecuencia será:

$$H_{causal}(\Omega) = H_0(\Omega) \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \Omega n_0\right)} \quad (11-51)$$

Expresión que tiene la forma:

$$H_{causal}(\Omega) = H_0(\Omega) \cdot e^{j\theta(\Omega)} \quad (11-52)$$

En este caso en lo que se refiere a la amplitud de  $H_{causal}(\Omega)$ , la expresión (11-49) indica que tanto para  $\Omega=0$  como para  $\Omega=\pi$  resulta  $H_0(\Omega)=0$ . Esto implica los filtros tipo 3 sólo resultan aplicables a filtros pasa banda. Por otra parte, la fase  $\theta(\Omega)$  resulta  $-n_0\Omega + \pi/2$ , que también es lineal con la frecuencia y no debe confundirse con  $\text{Arg}[H_{causal}(\Omega)]$ , que es lineal por tramos, debido a los cambios de signo de  $H_0(\Omega)$ .

### Filtros Tipo 4.

Este tipo de filtros corresponden a las condiciones de simetría representadas en la **Fig. 11.14d**: el orden  $N$  del filtro es impar y  $h_{truncado}[n]$  posee simetría impar. Estas condiciones determinan que:

$$N = 2n_0 - 1$$

$$h_{truncado}[n] = -h_{truncado}[-n]$$

En este caso, la muestra central  $h_{truncado}[0]$  no existe. Es decir el punto de simetría no corresponde a una muestra.

Las sumatorias de la expresión (11-33) pueden desarrollarse en forma genérica sobre la base de las relaciones entre los  $(N+1)$  coeficientes de  $h_{truncado}[n]$  que impone su simetría.

$$H_{causal}(z) = z^{-n_0+0,5} \left\{ \sum_{k=-n_0}^{-1} h_{truncado}[k] \cdot z^{-k+0,5} + \sum_{k=1}^{n_0} h_{truncado}[k] \cdot z^{-k+0,5} \right\}$$

$$H_{causal}(z) = z^{-n_0+0,5} \left\{ \sum_{k=1}^{n_0} h_{truncado}[-k] \cdot z^{k-0,5} + \sum_{k=1}^{n_0} h_{truncado}[k] \cdot z^{-k+0,5} \right\} \quad (11-53)$$

Por la condición (11-42) de simetría de  $h_{truncado}[n]$ , para  $z=e^{j\Omega}$  resulta:

$$\begin{aligned} H_{causal}(\Omega) &= e^{-j\Omega(n_0-0,5)} \left\{ \sum_{k=1}^{n_0} h_{truncado}[k] \cdot \left( e^{j\Omega(k-0,5)} - e^{-j\Omega(k-0,5)} \right) \right\} \\ H_{causal}(\Omega) &= e^{-j\Omega(n_0-0,5)} \left\{ 2j \sum_{k=1}^{n_0} h_{truncado}[k] \cdot \text{sen} \left[ \Omega \left( k - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \\ H_{causal}(\Omega) &= e^{j\left[\frac{\pi}{2}-\Omega(n_0-0,5)\right]} \left\{ 2 \sum_{k=1}^{n_0} h_{truncado}[k] \cdot \text{sen} \left[ \Omega \left( k - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (11-54)$$

Que resulta equivalente a:

$$H_{causal}(z\Omega) = e^{j\left[\frac{\pi}{2}-\Omega(n_0-0,5)\right]} \left\{ 2 \sum_{k=0}^{n_0-1} h_{causal}[k] \cdot \text{sen} \left[ \Omega \left( k - \frac{1}{2} - n_0 \right) \right] \right\} \quad (11-55)$$

Otra vez, en ambas expresiones (11-54) y (11-55) la evaluación de los términos entre llaves resulta un número real  $H_0(\Omega)$ , y la respuesta en frecuencia será:

$$H_{causal}(\Omega) = H_0(\Omega) \cdot e^{j\left[\frac{\pi}{2}-\Omega(n_0-0,5)\right]} \quad (11-56)$$

Expresión que tiene la forma:

$$H_{causal}(\Omega) = H_0(\Omega) \cdot e^{j\theta(\Omega)} \quad (11-57)$$

En este caso, en lo que se refiere a la amplitud de  $H_{causal}(\Omega)$  la expresión (11-54) indica que para  $\Omega=0$  resulta  $H_{causal}(\Omega)=0$ . Por lo tanto los filtros de este tipo sólo resultan aplicables a filtros pasa altos y pasa banda

En lo que se refiere a la fase  $\theta(\Omega)$  resulta  $-(n_0-0,5)\Omega+\pi/2$ , que también es lineal con la frecuencia y no debe confundirse con  $\text{Arg}[H_{causal}(\Omega)]$ , que es lineal por tramos, debido a los cambios de signo de  $H_0(\Omega)$ .

### 11.3.3. Diseño de filtros FIR

Los filtros no recursivos tienen ventajas muy interesantes por las que resultan profusamente utilizados en múltiples aplicaciones, pero la característica más destacable es la posibilidad de realizar respuestas en frecuencia de fase lineal. Los FIR son por su propia constitución estables. Aunque el diseño de los FIR requiera de una gran cantidad de operaciones de sumas y multiplicaciones, tanto su estructura de programación como su realización en soporte físico resultan fácil y escalable.

El diseño de filtros FIR se basa en lograr una aproximación de la magnitud de la respuesta especificada en el dominio de la frecuencia, mediante una determinada respuesta al impulso unitario en el dominio temporal. Entre los métodos de diseño se cuentan el de aplicación de ventanas y el de muestreo en frecuencia. Otros métodos se basan en técnicas iterativas de optimización para minimizar el error entre la respuesta en frecuencia deseada y la implementación en computadora del filtro.

En el presente curso se desarrollará el método de aplicación de ventanas (*windowing*, en inglés), en el cual se toma como punto de partida una respuesta en frecuencia deseada ideal.

Además, dado que los filtros FIR Tipo 1 se pueden emplear para implementar cualquiera de los filtros de interés para este curso, a partir de aquí se considerará solamente a ese tipo de filtro.

### 11.3.4. Diseño empleando ventanas

El método más sencillo de diseño de filtros FIR se llama método de ventanas. Este método empieza definiendo una respuesta en frecuencia ideal deseada del sistema en tiempo discreto, que si se considera la pulsación normalizada  $\Omega$ , debe abarcarse el intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

$$H_{ideal}(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{ideal}[n] \cdot e^{-j\Omega n} \quad (11-58)$$

La secuencia de respuesta al impulso deseada  $h_{ideal}[n]$  es no causal de longitud infinita (**Fig. 11.15a**). La forma inmediata de obtener una aproximación FIR causal es tomar la respuesta al impulso de un filtro ideal

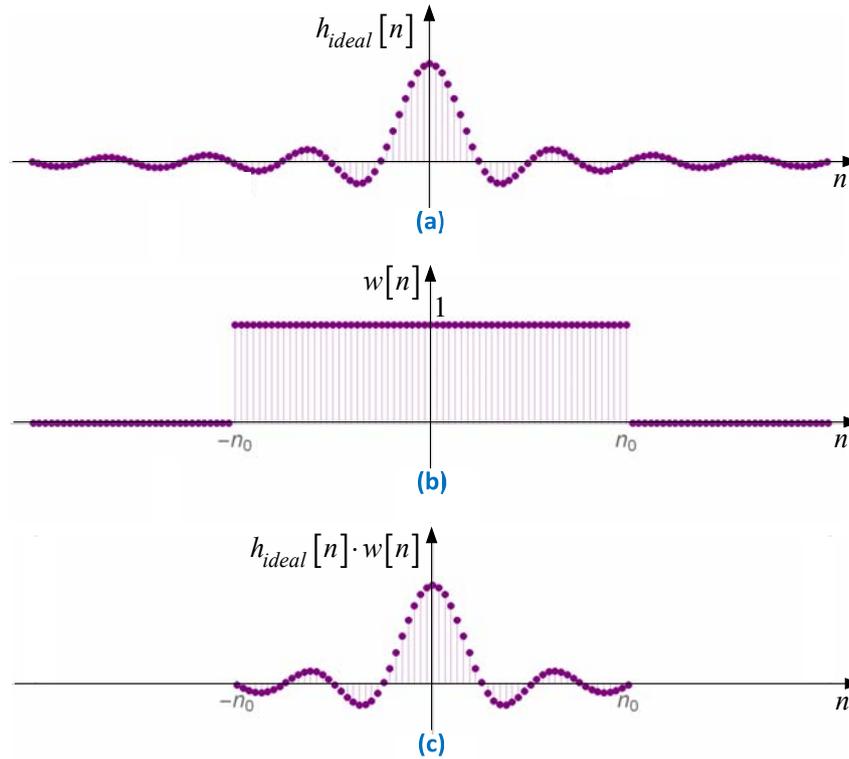
y multiplicarla por una función ventana de duración finita, para luego retrasar el resultado de este producto de manera de obtener una respuesta al impulso causal.

El truncamiento de la respuesta al impulso se logra multiplicando la respuesta al impulso  $h_{ideal}[n]$  de longitud infinita por una secuencia ventana  $w[n]$  de duración finita que, para el caso de una *ventana rectangular* y un filtro de orden  $N$  se define como (**Fig. 11.15b**):

$$w[n] = \begin{cases} 1 & \text{para } |n| \leq n_0 \\ 0 & \text{para } |n| > n_0 \end{cases} \tag{11-59}$$

Siendo:

$$n_0 = \begin{cases} N/2 & \text{si } N \text{ es par} \\ (N+1)/2 & \text{si } N \text{ es impar} \end{cases} \tag{11-60}$$



**Fig. 11.15.** Truncamiento de la respuesta al impulso ideal (*windowing*).

Claramente, si  $N_m$  es el número de muestras de la secuencia ventana  $w[n]$  entonces:

$$N_m = N + 1 \tag{11-61}$$

Con lo cual:

$$n_0 = \begin{cases} (N_m - 1)/2 & \text{si } N_m \text{ es impar} \\ N_m/2 & \text{si } N_m \text{ es par} \end{cases} \tag{11-62}$$

El truncamiento mediante la ventana  $w[n]$ , que también suele denominarse *ventaneo* (en inglés *windowing*), se expresa mediante (**Fig. 11.15c**):

$$h[n] = h_{ideal}[n] \cdot w[n] \tag{11-63}$$

La transformada de Fourier de una ventana temporal rectangular discreta de  $N_m$  muestras, todas de valor 1, simétrica alrededor de la muestra  $k=0$ , resulta:

$$\begin{aligned} W(\Omega) &= \sum_{n=-n_0}^{+n_0} 1 \cdot e^{-j\Omega n} = e^{-j\Omega(-n_0)} + e^{-j\Omega(-n_0+1)} + e^{-j\Omega(-n_0+2)} + \dots + e^{-j\Omega(-n_0+2n_0)} \\ W(\Omega) &= e^{-j\Omega(-n_0)} \cdot e^{-j0 \cdot \Omega} + e^{-j\Omega(-n_0)} \cdot e^{-j1 \cdot \Omega} + e^{-j\Omega(-n_0)} \cdot e^{-j2 \cdot \Omega} + \dots + e^{-j\Omega(-n_0)} \cdot e^{-j2n_0 \cdot \Omega} \\ W(\Omega) &= e^{jn_0 \cdot \Omega} \cdot \left[ 1 + e^{-j\Omega} + e^{-j2 \cdot \Omega} + \dots + e^{-j2n_0 \cdot \Omega} \right] \end{aligned} \tag{11-64}$$

Con  $n_0$  dado por (11-62).

En la expresión (11-64) la serie entre corchetes se puede identificar con el desarrollo en serie de Taylor para la serie de infinitos términos:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Que converge para  $x$  complejo tal que  $|x| \leq 1$ , y éste es el caso, cuando se considera a  $x=e^{-j\Omega}$ . Entonces teniendo en cuenta la longitud finita de la serie entre corchetes, es fácil comprobar que puede escribirse como:

$$\begin{aligned} W(\Omega) &= e^{jn_0 \cdot \Omega} \cdot \left[ \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} - \frac{e^{-j\Omega(2n_0+1)}}{1-e^{-j\Omega}} \right] = e^{jn_0 \cdot \Omega} \cdot \left[ \frac{1-e^{-j\Omega(2n_0+1)}}{1-e^{-j\Omega}} \right] \\ &= e^{jn_0 \cdot \Omega} \cdot \frac{e^{-j\Omega(2n_0+1)/2}}{e^{-j\Omega/2}} \cdot \frac{e^{j\Omega(2n_0+1)/2} - e^{-j\Omega(2n_0+1)/2}}{e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}} = e^{jn_0 \cdot \Omega} e^{-j\Omega \cdot 2n_0/2} \cdot \frac{e^{j\Omega(2n_0+1)/2} - e^{-j\Omega(2n_0+1)/2}}{e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}} \end{aligned}$$

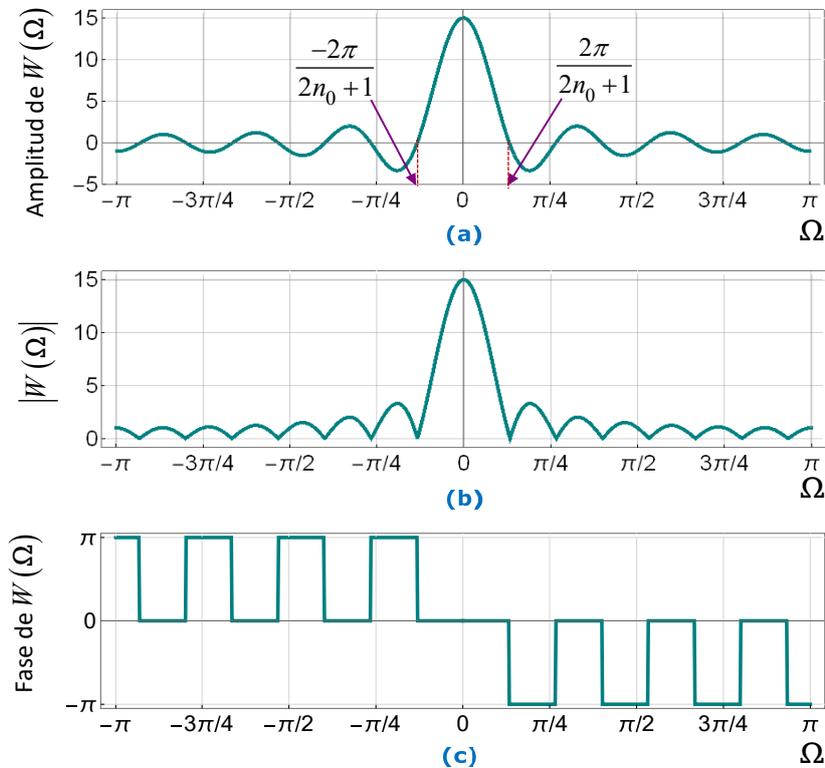
Es decir

$$W(\Omega) = \frac{\text{sen}[(2n_0 + 1) \cdot \Omega/2]}{\text{sen}[\Omega/2]} \tag{11-65}$$

Este es el resultado para la ventana rectangular no causal centrada en la muestra de índice 0.

En la **Fig. 11.16** se muestran las gráficas de amplitud, del módulo y de la fase de  $W(\Omega)$ , para el caso de una ventana rectangular de 15 muestras, todas igual a 1, centrada en  $n=0$ .

El lóbulo principal de  $W(\Omega)$ , centrado en  $\Omega = 0$ , tiene un ancho definido por los primeros cruces a cero a ambos lados de  $\Omega = 0$ , los cuales ocurren cuando  $[(2n_0 + 1) \Omega/2] = \pm \pi$ , es decir, cuando  $\Omega = 2\pi / (2n_0 + 1)$ . Esto determina que el ancho del lóbulo principal sea  $4\pi / (2n_0 + 1)$ , con  $n_0$  dado por (11-62). A medida que  $n_0$  aumenta, disminuye el ancho del lóbulo principal y los lóbulos laterales, dando lugar a más lóbulos laterales. Al mismo tiempo, las amplitudes máximas del lóbulo principal y los lóbulos laterales aumentan de tal manera que el área debajo de cada lóbulo permanece constante.



**Fig. 11.16.** Transformada de Fourier de una ventana rectangular no causal centrada en  $n=0$ , de 15 muestras, todas de valor 1. (a) amplitud de  $W(\Omega)$ ; (b) valor absoluto  $|W(\Omega)|$ ; (c) fase de  $W(\Omega)$ .

Por otra parte, para lograr que la respuesta al impulso truncada del filtro resulte causal se debe retrasar en  $n_0$  muestras, siendo  $n_0$  dado por (11-60), con lo cual, efectuando simultáneamente el truncamiento y el desplazamiento resulta:

$$h[n] = h_{ideal}[n-n_0] \cdot w[n-n_0] \quad \text{con } n=0, 1, 2, \dots, N \tag{11-66}$$

Las ventanas siempre tienen simetría par, es decir:

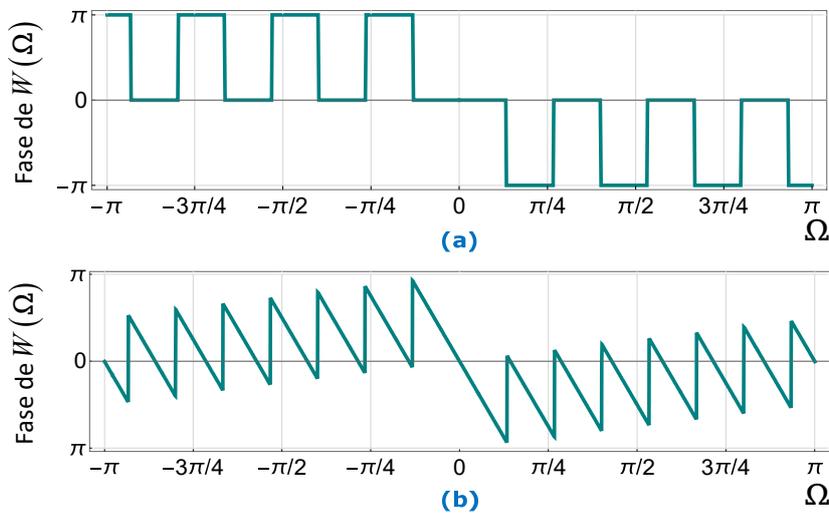
$$w[n] = w[N_m - n]$$

De modo tal que independientemente de la paridad de  $N_m$ , la simetría de la respuesta al impulso truncada  $h[n]$  concuerda con la de  $h_{ideal}[n]$ . Por lo tanto el filtro FIR resultante tendrá fase lineal y la ventana no afectará la simetría.

Para el caso causal, es decir para la ventana centrada en  $n_0$ , se puede comprobar que aparece un término de fase lineal:

$$W(\Omega) = e^{-jn_0\Omega} \cdot \frac{\text{sen}[(2n_0 + 1) \cdot \Omega/2]}{\text{sen}[\Omega/2]} \tag{11-67}$$

Por lo tanto la única diferencia que existe entre el caso no causal y el caso causal reside en el diagrama de fase. En la **Fig. 11.17** se muestran las gráficas de la fase de la transformada de Fourier de una ventana rectangular de 15 muestras, todas de valor 1. La **Fig. 11.17a** corresponde al caso no causal, es decir, la ventana se considera centrada en la muestra de índice  $n=0$ ; en cambio, la **Fig. 11.17b** corresponde al caso causal, es decir con la ventana centrada en la muestra de índice  $n=n_0$ , con  $n_0$  dado por (11-62).



**Fig. 11.17.** Fase de la Transformada de Fourier de una ventana rectangular  $w[n]$  de 15 muestras, todas de valor 1. (a)  $w[n]$  no causal (centrada en  $n=0$ ); (b)  $w[n]$  causal (centrada en  $n=7$ ).

De las expresiones (11-60) y (11-63) se infiere que aumentando el número de coeficientes, es decir, la longitud de la ventana, la respuesta de un filtro FIR tiende a la forma ideal. Entonces, con infinitos coeficientes se lograría la característica ideal; pero por razones prácticas, no se puede trabajar con un número infinito de coeficientes y por ello resulta necesario truncar o limitar dicho número.

Para apreciar el efecto de la ventana aplicada a la respuesta al impulso ideal del filtro que se pretende diseñar, se debe modificar la expresión (11-58) para obtener la respuesta en frecuencia  $H(\Omega)$  resultante:

$$H(\Omega) = \sum_{n=-n_0}^{+n_0} h[n] \cdot e^{-j\Omega n} \tag{11-68}$$

Donde  $n_0$  está dado por (11-60) y  $h[n]$  es la respuesta al impulso afectada por la ventana.

Procediendo con (11-68) se evalúa la amplitud de  $H(\Omega)$ , es decir,  $H_0(\Omega)$ , para un filtro pasa bajos, para diferentes valores de  $N$  (es decir, de  $n_0$ ) a fin de apreciar el efecto de aumentar el número de coeficientes  $h[n]$ . El resultado se muestra en la **Fig. 11.18** observándose que, a medida que se aumenta el número de coeficientes, por un lado la región de transición se hace cada vez más estrecha, y por otro que las oscilaciones en las regiones de transición se localizan cada vez más cerca de las discontinuidades de  $H_{ideal}(\Omega)$ , pero persisten.

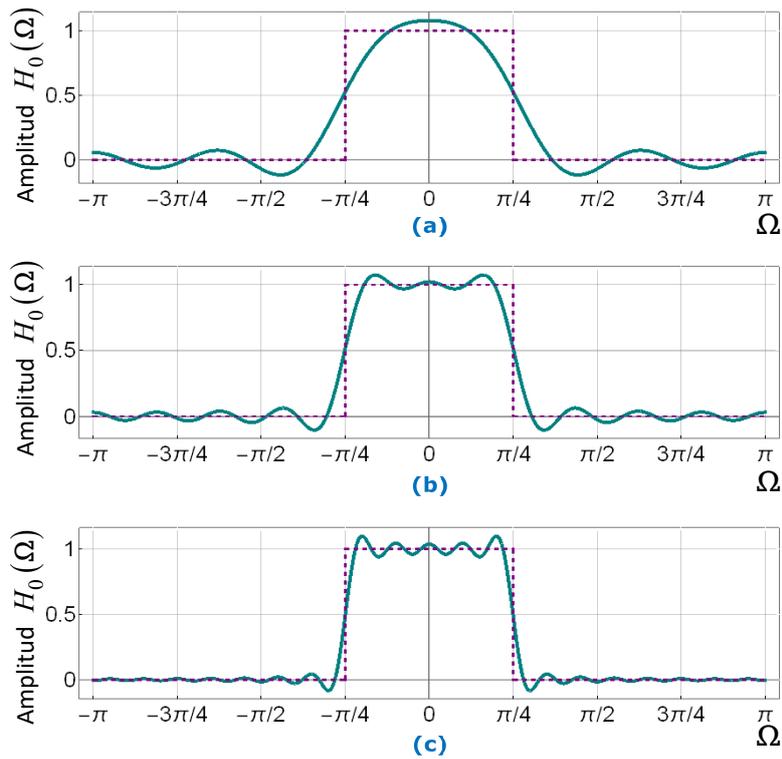


Fig. 11.18. Efecto del truncamiento de la respuesta al impulso sobre la amplitud de la respuesta en frecuencia, para un filtro pasa bajos con  $\Omega_c = \pi/4$ . (a)  $N=10$ ; (b)  $N=20$ ; (c)  $N=40$ .

El truncamiento de la respuesta al impulso no se considera un buen método, debido a las oscilaciones de la respuesta en frecuencia en las proximidades de las discontinuidades de  $H_{ideal}(\Omega)$ . A medida que  $N$  aumenta, las oscilaciones de la *amplitud* de  $H(\Omega)$ , es decir de  $H_0(\Omega)$  se vuelven más localizadas, pero su magnitud en relación con el tamaño de la discontinuidad no disminuye a cero, sino que tiende a un límite finito.

El rizado que aparece tanto en la banda pasante como en la banda de supresión se debe al denominado *fenómeno de Gibbs*. Este fenómeno resulta aún más evidente cuando se efectúa la representación de la *magnitud* de  $H(\Omega)$  expresada en [dB], es decir  $20 \log |H(\Omega)|$ . En la Fig. 11.19 se muestran las gráficas de  $|H(\Omega)|$  en [dB] que se corresponden con los casos de Fig. 11.18.

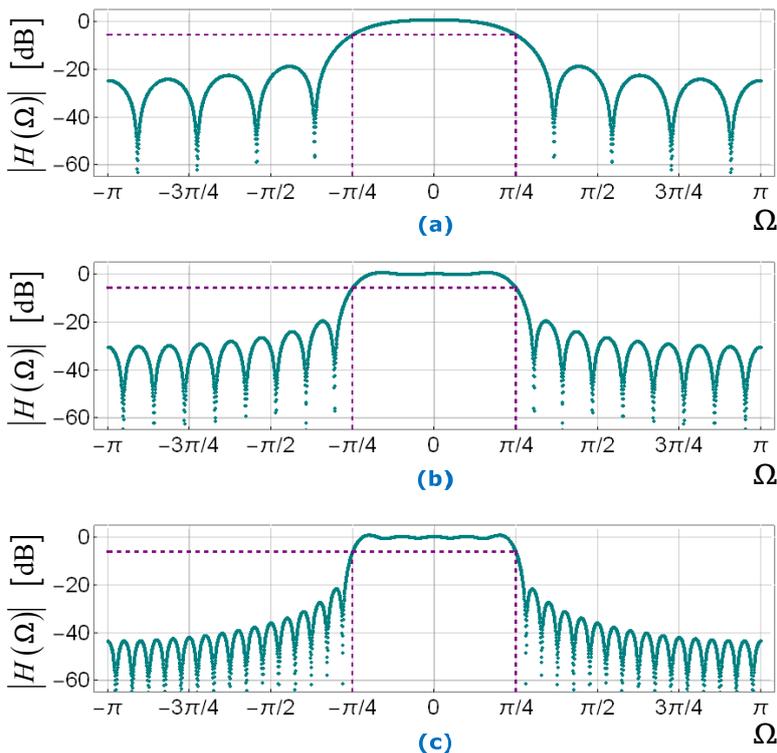


Fig. 11.19. Magnitud de la respuesta en frecuencia en dB, para un filtro pasa bajos con  $\Omega_c = \pi/4$ . (a)  $N=10$ ; (b)  $N=20$ ; (c)  $N=40$ .

Razonando en el dominio de la frecuencia también se arriba a los mismos resultados.

En efecto de la relación temporal (11-63) se infiere que la respuesta en frecuencia  $H(\Omega)$  del filtro FIR es la *convolución* de la respuesta en frecuencia  $H_{ideal}(\Omega)$  del filtro ideal con la transformada de Fourier de la ventana  $W(\Omega)$  (núcleo o *kernel* de la ventana), es decir:

$$H(\Omega) = H_{ideal}(\Omega) * W(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{ideal}(\lambda) \cdot W(\Omega - \lambda) d\lambda \tag{11-69}$$

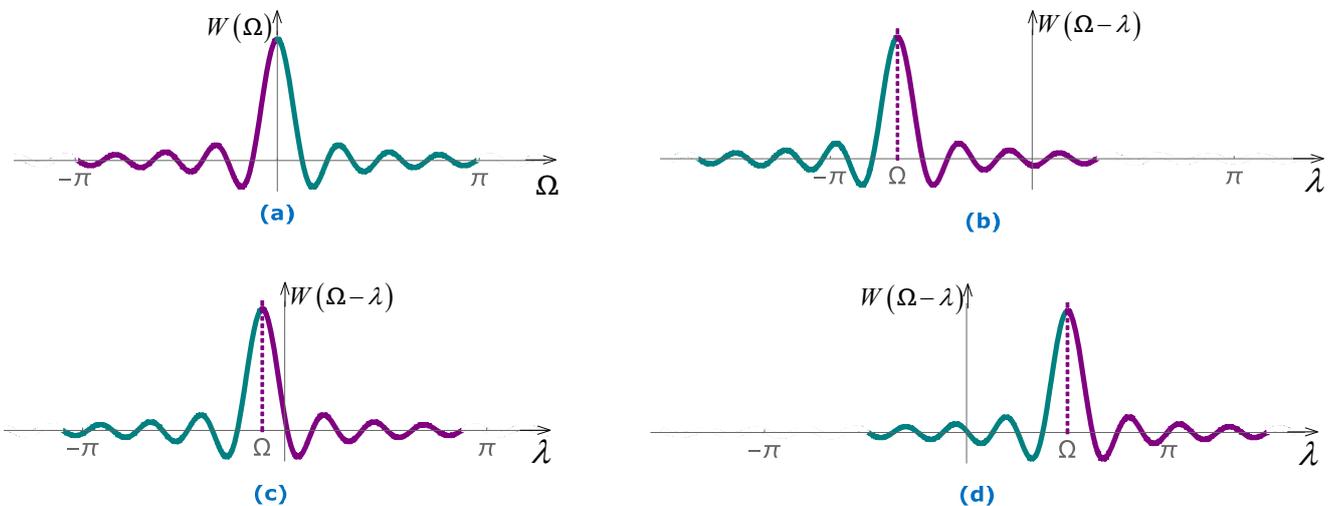
La interpretación gráfica de esta integración ayudará a consolidar los conceptos.

En primer lugar, la variable de integración es  $\lambda$ , y por lo tanto las dos funciones que se multiplican dentro de la integral, se deben considerar representadas en función de  $\lambda$ .

La representación de  $H_{ideal}(\lambda)$  vs.  $\lambda$  será idéntica a la representación de  $H_{ideal}(\Omega)$  vs.  $\Omega$  dado que el cambio de variables es trivial. Pero la representación de  $W(\Omega - \lambda)$  en función de  $\lambda$  en relación a la gráfica de  $W(\Omega)$  estará *espejada* respecto del eje de ordenadas (debido al signo negativo de  $\lambda$ ) y *desplazada* en ordenadas hacia la derecha, en la magnitud  $\lambda = \Omega$  (a medida que aumenta  $\Omega$  se desplaza cada vez más, hacia la derecha).

En la **Fig. 11.20a** se muestra la gráfica de  $W(\Omega)$  realizada en dos colores diferentes para poner en evidencia el espejamiento respecto al eje de ordenadas, que es debido al signo negativo de  $\lambda$  debido al reemplazo de  $\Omega$  por  $(\Omega - \lambda)$ . En cuanto a la presencia de  $\Omega$  en la función de  $\lambda$   $W(\Omega - \lambda)$ , se comporta como un parámetro, que puede adoptar valores en  $[-\pi, \pi]$ . En las **Fig. 11.20b**, **Fig. 11.20c** y **Fig. 11.20d** se muestran las gráficas de  $W(\Omega - \lambda)$  en función de  $\lambda$ , donde se pone en evidencia el desplazamiento que producen los distintos valores de  $\Omega$ , para  $-\pi \leq \Omega \leq \pi$ .

Entonces, en la resolución de la integral (11-69) se debe tener en cuenta que se está integrando *el producto* entre  $H_{ideal}(\lambda)$  y  $W(\Omega - \lambda)$  y que la integral dará resultado no nulo solamente en los intervalos en que dicho producto sea distinto de cero.



**Fig. 11.20.** Intervalos en que puede dividirse la integral de (11-69) y resultado de la integral para cada uno.

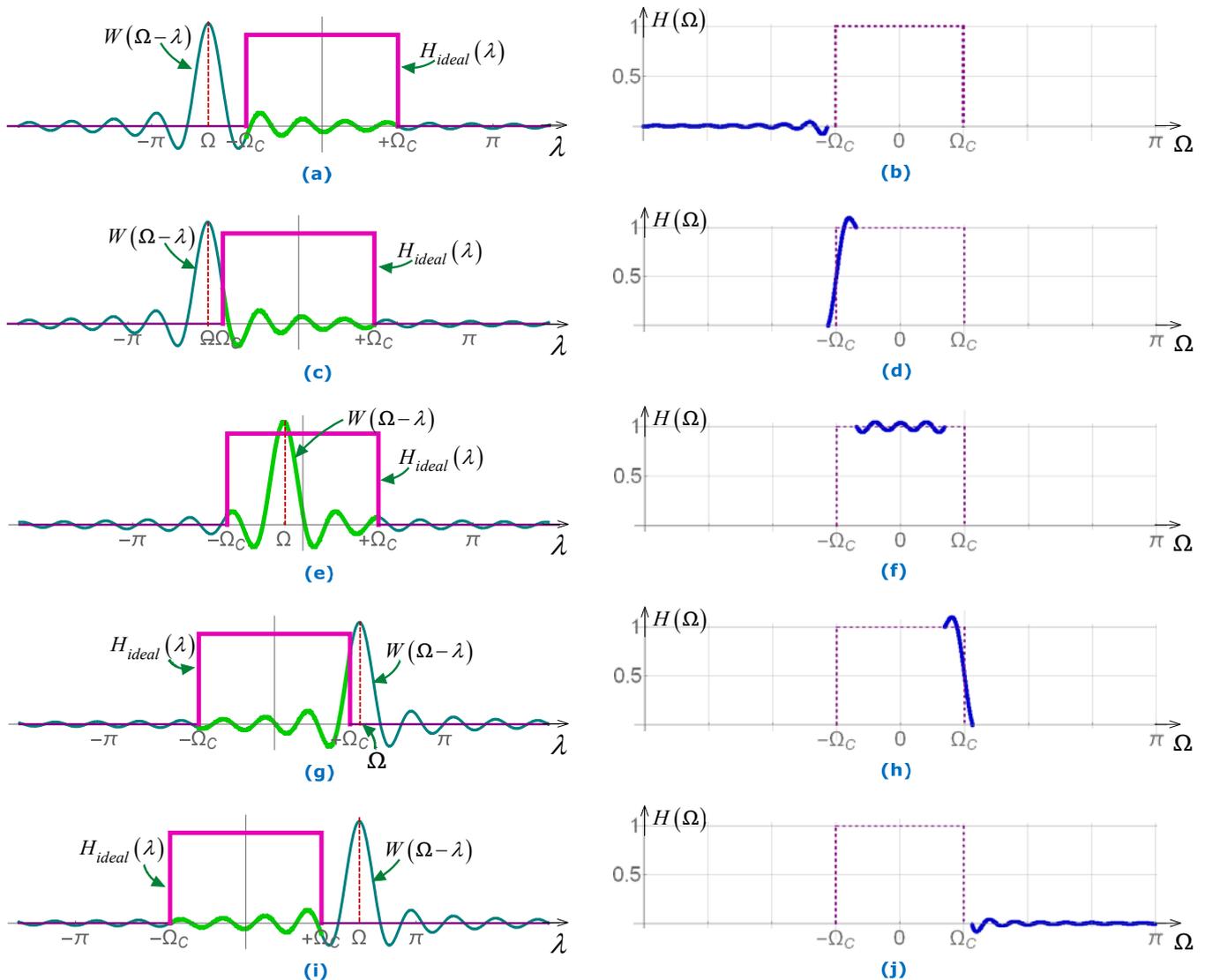
En la **Fig. 11.21** se ilustran los intervalos que pueden identificarse para los cuales ocurren cambios en el producto no nulo, originados por el desplazamiento de  $W(\Omega - \lambda)$  al variar  $\Omega$  en el rango  $-\pi \leq \Omega \leq \pi$ .

La **Fig. 11.21a** corresponde a valores de  $\Omega$  tales que el lóbulo principal de  $W(\Omega - \lambda)$  aún no interviene en el producto con la parte no nula de  $H_{ideal}(\lambda)$ , de manera que sólo los lóbulos laterales de color púrpura de la **Fig. 11.20** contribuyen al producto no nulo. De este modo,  $H(\Omega)$  que es el resultado de la integral para estos valores de  $\Omega$  tendrá esa misma forma, y se muestra en la **Fig. 11.21b**.

De manera enteramente similar, la **Fig. 11.21c** abarca el flanco  $-\Omega_C$  de  $H(\Omega)$ . En este caso el resultado será, tal como lo muestra la **Fig. 11.21d**, la transición hacia la banda de paso de  $H(\Omega)$ . Claramente la duración de esa transición dependerá del ancho del lóbulo principal que es  $4\pi / (2n_0 + 1)$ , con  $n_0$  dado por (11-62).

Siguiendo el mismo razonamiento no ha de resultar difícil comprender las relaciones que existen entre la **Fig. 11.21e** y la **Fig. 11.21f** correspondientes al rango de valores de  $\Omega$  para los cuales el lóbulo principal de  $W(\Omega - \lambda)$  abarca la zona plana de  $H(\Omega)$ ; entre la **Fig. 11.21g** y la **Fig. 11.21h** correspondientes al rango de

valores de  $\Omega$  para los cuales el lóbulo principal de  $W(\Omega-\lambda)$  abarca el flanco  $-\Omega_C$  de  $H(\Omega)$ ; y entre la **Fig. 11.21i** y la **Fig. 11.21j** correspondientes al rango de valores de  $\Omega$  para los cuales el lóbulo principal de  $W(\Omega-\lambda)$  ya no participa en el producto no nulo dentro de la integral de (11-69).



**Fig. 11.21.** Intervalos en que puede dividirse la integral de (11-69) y resultado de la integral para cada uno

Entonces, el truncamiento abrupto de los coeficientes del filtro mediante el empleo de una ventana rectangular conlleva un efecto indeseado en la respuesta en frecuencia del filtro resultante, que es el fenómeno de Gibbs. A fin de mitigarlo, se han propuesto una serie de otras funciones de ventana que reducen *suavemente* los coeficientes a cero. Por ejemplo, una ventana triangular simple (también llamada ventana de Bartlett) como se muestra en la **Fig. 11.22** suavizaría el proceso de truncamiento. Los coeficientes de esta ventana se determinan mediante la siguiente expresión:

$$w_{Bartlett} [n] = \begin{cases} \frac{n_0 - |n|}{n_0} & \text{para } |n| \leq n_0 \\ 0 & \text{para } |n| > n_0 \end{cases} \quad (11-70)$$

con  $n_0$  dado por (11-62).

Muchas funciones de ventana están basadas en la función *coseno elevado*, incluidas las ventanas von Hann (o *hanning*), Hamming y Blackman. La determinación de los coeficientes para cada una de estas funciones de ventana se realiza mediante las siguientes expresiones, siendo en todos los casos  $n_0$  dado por (11-62):

$$w_{Hann} [n] = \begin{cases} 0,5 - 0,5 \cos\left(\pi \frac{n_0 - |n|}{n_0}\right) & \text{para } |n| \leq n_0 \\ 0 & \text{para } |n| > n_0 \end{cases} \quad (11-71)$$

$$w_{Hamming}[n] = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cdot \cos\left(\pi \frac{n_0 - |n|}{n_0}\right) & \text{para } |n| \leq n_0 \\ 0 & \text{para } |n| > n_0 \end{cases} \quad (11-72)$$

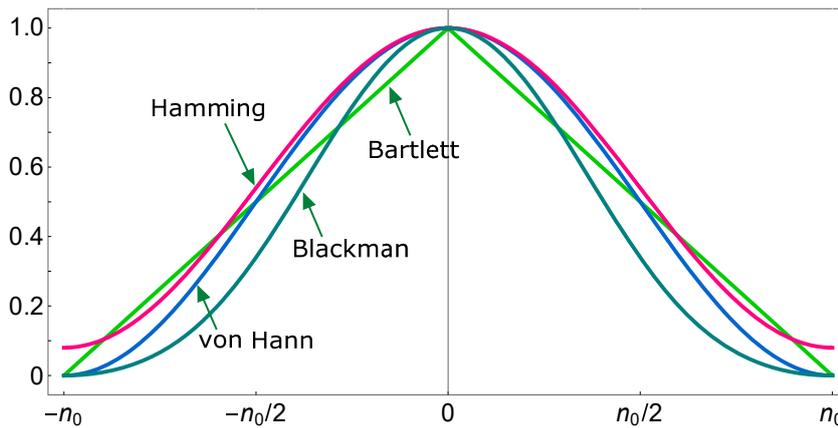
$$w_{Blackman}[n] = \begin{cases} 0,42 - 0,5 \cdot \cos\left(\pi \frac{n_0 - |n|}{n_0}\right) + 0,08 \cdot \cos\left(2\pi \frac{n_0 - |n|}{n_0}\right) & \text{para } |n| \leq n_0 \\ 0 & \text{para } |n| > n_0 \end{cases} \quad (11-73)$$

Los gráficos de esas ventanas también se muestran en la **Fig. 11.22**.

Cabe señalar que existen muchas más funciones ventana que aparecen en la literatura. Las ventanas que se muestran en la **Fig. 11.22** son sólo algunas de las más populares, representantes de la clase de ventanas de *coeficientes fijos*. De hecho Matlab, por ejemplo, admite las siguientes funciones de ventana reconocidas: Barlett, Blackman, Blackman–Harris, Bohman, Chebyshev, Flat top, Gaussian, Hamming, Hann, Nuttall, Parzen, Rectangular, Taylor, Tukey.

Se observa que todas las ventanas, excepto la ventana rectangular, tienen valores de muestra cero o aproximadamente cero en los extremos de su intervalo. Esto elimina o reduce las discontinuidades en los extremos de la ventana, y por consiguiente también reduce el fenómeno de Gibbs.

También hay varias ventanas parametrizables que aumentan la lista de ventanas de coeficientes fijos que se han enumerado. Una ventana parametrizada muy popular es la ventana de Kaiser.



**Fig. 11.22.** Ventanas de Bartlett, von Hann, Hamming y Blackman.

### Ventana de Kaiser

A medida que se fueron mejorando las funciones de ventana utilizadas en el diseño de los filtros FIR, se fue haciendo más evidente que, para una dada longitud del filtro había una relación de compromiso entre el ancho de la banda de transición y la atenuación en la banda de rechazo. Este fue el origen de la función ventana de Kaiser, que permite controlar la interacción contrapuesta entre las características de la banda de transición y de la banda de rechazo.

La ventana de Kaiser se basa en la función  $I_0$  (función de Bessel modificada de primer tipo y de orden 0), y la expresión que se emplea para determinar los coeficientes es la siguiente:

$$w_{Kaiser}[n] = \begin{cases} I_0\left(\beta \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n_0}\right)^2}\right) / I_0(\beta) & \text{para } |n| \leq n_0 \\ 0 & \text{para } |n| > n_0 \end{cases} \quad (11-74)$$

El valor  $\beta$  generalmente se adopta entre 3 y 9 (**Fig. 11.23**). El valor particular de  $\beta = 0$  da por resultado la ventana rectangular y el valor particular de  $\beta = 5,14$  da la ventana de Hamming.

Una estimación razonable del valor de  $\beta$  a emplear en la expresión (11-74) fue obtenida empíricamente por Kaiser:

$$\beta = \begin{cases} 0,1102 \cdot (A - 8,7) & \text{para } A > 50 \\ 0,5842 \cdot (A - 21)^{0,4} + 0,07886 \cdot (A - 21) & \text{para } 21 \leq A \leq 50 \\ 0 & \text{para } A < 21 \end{cases} \quad (11-75)$$

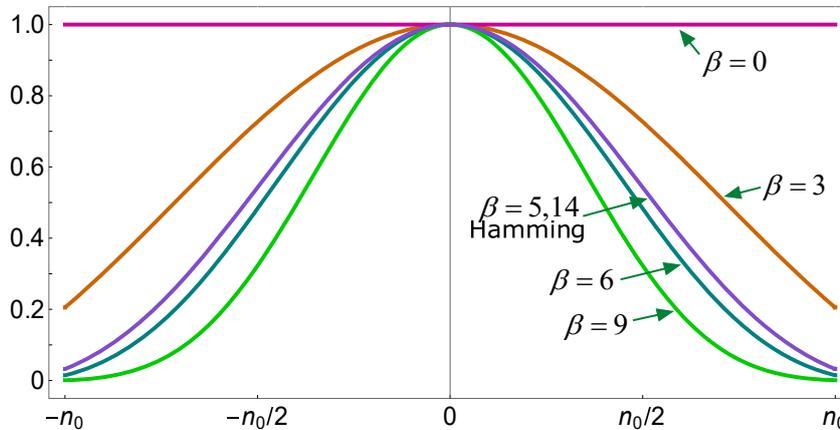


Fig. 11.23. Ventana de Kaiser con distintos valores de  $\beta$ .

Siempre es posible encontrar un valor adecuado del parámetro  $\beta$  que permita satisfacer los requisitos de atenuación en la banda de supresión con valores de  $N$  menores que con los otros tipos de ventana. Por tal razón la ventana de Kaiser será la elección más indicada toda vez que se requiera optimizar al máximo el orden  $N$  del filtro.

En la expresión (11-75) la variable  $A$  corresponde a la mayor banda de error (en dB) entre la banda de paso ( $\delta_p$ ) y la banda de rechazo ( $\delta_s$ ) expresada como atenuación (Fig. 11.24):

$$A = -20 \log[\min(\delta_p, \delta_s)] \quad (11-76)$$

Además, Kaiser desarrolló la estimación empírica de la longitud  $N$  del filtro requerida para satisfacer un conjunto dado de especificaciones de filtro, dada por:

$$N = \begin{cases} \frac{A - 7,95}{2,285 \cdot \Delta\Omega} & \text{para } A > 21 \\ \frac{5,794}{\Delta\Omega} & \text{para } A < 21 \end{cases} \quad (11-77)$$

En la expresión (11-77)  $\Delta\Omega$  representa, para filtros pasa bajos y pasa altos, el ancho de la banda de transición y, para filtros pasa banda y rechaza banda, el menor de las dos bandas de transición.

### 11.3.5. Estimación del orden de filtros FIR

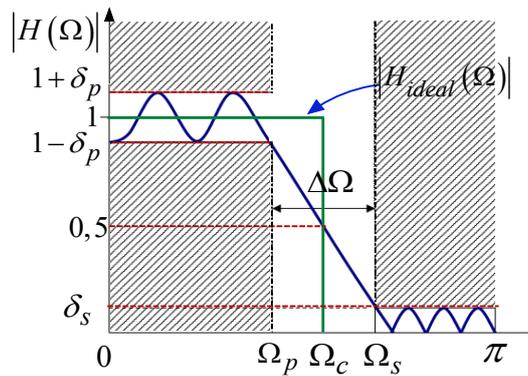
En general, las técnicas de diseño tienen por objetivo determinar la secuencia  $h[n]$  tal que la magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro digital  $|H(\Omega)|$  se encuentre dentro de bandas de tolerancia especificadas, es decir, que cumpla con los requisitos particulares de la banda de paso, la banda de rechazo y la banda de transición.

Para los filtros digitales el borde de la banda de paso se designa como  $\Omega_p$ , el borde de la banda de supresión como  $\Omega_s$  y ambas definen el ancho de banda de transición ( $\Delta\Omega = \Omega_s - \Omega_p$ ), mientras que  $\delta_p$  y  $\delta_s$  son las amplitudes del rizado o ripple en la banda de paso y en la banda de supresión, respectivamente, como se muestra en Fig. 11.24 para el caso de un filtro pasa bajos.

Para el diseño de un filtro FIR existen varias fórmulas para estimar el valor mínimo de la longitud (orden) del filtro  $N$  a partir de las especificaciones; la que se adopte, dependerá del grado de detalle de las especificaciones, es decir, del grado de detalle con que el diseñador quiera acotar la característica de la magnitud de la respuesta en frecuencia.

Si bien pueden existir muchas opciones para satisfacer las condiciones de diseño, lo más habitual es adoptar la frecuencia de corte del filtro pasa bajos ideal como:

$$\Omega_C = \frac{1}{2}(\Omega_s + \Omega_p) \quad (11-78)$$



**Fig. 11.24.** Especificaciones de la magnitud de la respuesta en frecuencia para un filtro FIR pasa bajos.

Entonces, si se especifica  $\Omega_p$  y  $\Omega_s$  lo primero que hay que determinar es la característica ideal, es decir  $\Omega_c$ . Para los filtros FIR la magnitud de la respuesta en frecuencia en la banda de paso se encuentra entre  $(1+\delta_p)$  y  $(1-\delta_p)$  y por lo tanto la excursión del rizado o ripple en dB  $\alpha_p$  en la banda de paso es:

$$\alpha_p = 20 \log(1 + \delta_p) - 20 \log(1 - \delta_p) = 20 \log\left(\frac{1 + \delta_p}{1 - \delta_p}\right)$$

Despejando  $\delta_p$  en función de  $\alpha_p$  se obtiene:

$$\delta_p = \frac{10^{0,05 \cdot \alpha_p} - 1}{10^{0,05 \cdot \alpha_p} + 1} \tag{11-79}$$

Por otra parte, en la banda de rechazo, la magnitud de la respuesta en frecuencia se encuentra por debajo de  $\delta_s$ , entonces la excursión del rizado en dB coincidirá con la atenuación mínima en la banda de atenuación que está dada por  $\alpha_s = 20 \cdot \log(1) - 20 \cdot \log(\delta_s)$ , de donde resulta:

$$\delta_s = 10^{-0,05 \cdot \alpha_s} \tag{11-80}$$

Las relaciones (11-79) y (11-80) se utilizan para encontrar los valores de  $\delta_p$  y  $\delta_s$  en caso que se especifiquen las atenuaciones ó el máximo rizado admitido  $\alpha_p$  y  $\alpha_s$  en dB, correspondientes respectivamente a la banda de paso y la banda de atenuación.

En la bibliografía se brindan fórmulas aproximadas para estimar el valor de  $N$  para cada tipo de ventana y en función del ancho de la banda de transición  $\Delta\Omega$ . La siguiente, una de ellas, es aplicable a la ventana rectangular y sólo requiere la especificación del ancho de banda de transición  $\Delta\Omega = \Omega_s - \Omega_p$ .

$$N \approx \frac{1,8\pi}{\Omega_s - \Omega_p}$$

Otras expresiones similares, para otros tipos de ventanas de uso frecuente pueden deducirse por analogía a la anterior de las expresiones de la columna “Ancho de transición  $\Delta\Omega$ ”, de las **Tabla 11-1** o **Tabla 11-2**, ó con la expresión (11-77). Tener presente que emplear (11-77) puede requerir también (11-79), (11-80) y (11-76).

Es importante observar que  $N$  es inversamente proporcional al ancho de la banda de transición, y dado que el tiempo requerido de procesamiento es proporcional a la longitud de las señales, existe un compromiso entre el tiempo de cálculo y la *nitidez* o resolución del filtro (que es inversamente proporcional a  $\Delta\Omega$ ).

Existen otras fórmulas que tratan de ser más precisas, sin embargo nunca brindan una solución exacta. Los resultados de las estimaciones son solo eso: estimaciones, y pueden variar ampliamente dependiendo de los parámetros generales de diseño. La forma de proceder es estimar el orden  $N$ , diseñar el filtro con ese orden, inspeccionar el resultado y aumentar o disminuir el orden  $N$  para lograr un mejor ajuste.

### 11.3.6. Comentarios sobre las funciones de ventana.

Ya se mencionó que el objetivo que se persigue debe ser una función ventana con un lóbulo principal estrecho y lóbulos laterales pequeños. El nivel máximo de los lóbulos laterales es más o menos fijo para cada tipo de ventana. Sin embargo, el ancho del lóbulo principal se reduce a medida que aumenta la longitud de la ventana. Por lo tanto, lo habitual es elegir una ventana basada en las características del lóbulo lateral y luego ajustar la longitud de la ventana para lograr un ancho de lóbulo principal adecuado. Aquí es necesario tener en cuenta que la complejidad (orden  $N$ ) de un filtro FIR con ventana depende de la longitud

de la ventana ( $N_m=N+1$ ). Particularmente para aplicaciones de filtrado en tiempo real, es crucial minimizar la complejidad computacional del filtro. Por lo tanto, se debe elegir la ventana lo más corta posible, es decir con el menor  $N_m$  posible.

En la **Tabla 11-1** se resumen las funciones de ventana de tiempo discreto más populares, aunque como ya se mencionó existen muchas otras.

**Tabla 11-1.** Características aproximadas de las funciones discretas de ventana más comunes.

Ventana	Ancho del lóbulo principal	Nivel relativo del lóbulo lateral [dB]	Ancho de transición $\Delta\Omega$	Pendiente de transición [dB/déc]	Atenuación en la banda de rechazo [dB]
Rectangular	$4\pi/N_m$	-13,3	$1,8 \cdot \pi / N$	-20	21
Bartlett (Triangular)	$8\pi/N_m$	-25	$6,1 \cdot \pi / N$	-40	25
Von Hann	$8\pi/N_m$	-31,5	$6,2 \cdot \pi / N$	-60	44
Hamming	$8\pi/N_m$	-42,7	$6,6 \cdot \pi / N$	-20	53
Blackman	$12\pi/N_m$	-58	$11 \cdot \pi / N$	-60	74

Para una longitud dada  $N_m$ , la ventana rectangular tiene baja dispersión espectral con el menor ancho de lóbulo principal ( $4\pi/N_m$ ), pero la amplitud del lóbulo lateral es la más alta (-13.3 dB respecto del pico del lóbulo principal). Este aspecto indeseable es el resultado del truncamiento abrupto y da como resultado el fenómeno de Gibbs.

La ventana Bartlett o triangular es una de las ventanas más simples, pero rara vez empleada ya que sus características son en gran medida inferiores a otros tipos de ventanas.

La ventana de von Hann, relativamente simple (también llamada ventana de Hanning), con dispersión modesta ( $8\pi/N_m$ ), lóbulo lateral de pico razonable (-31.5 dB) y una gran pendiente de transición, es muy utilizada, particularmente para aplicaciones de análisis espectral.

La ventana de Hamming tiene un ancho de lóbulo principal razonable de  $8\pi/N_m$  (igual que las ventanas triangular y von Hann), pero su relativamente bajo nivel del lóbulo lateral (-42.7 dB), logrado a costa de una lenta caída, la convierte en una opción frecuente para aplicaciones de filtrado donde sea más importante el bajo nivel del lóbulo lateral que una gran pendiente de transición.

La ventana Blackman logra lóbulos laterales bajos y una gran pendiente de transición a expensas de una mayor complejidad y ancho del lóbulo principal ( $12\pi/N_m$ ).

La ventana de Kaiser es una ventana ajustable con el parámetro  $\beta$ , mediante el cual se puede controlar la suavidad de la ventana. Comenzando en 0, el aumento de  $\beta$  tiende a aumentar la suavidad de la ventana de Kaiser, reduce el nivel máximo del lóbulo lateral y aumenta el ancho del lóbulo principal.

En la **Tabla 11-2** se resumen las funciones de ventana de Kaiser, para valores particulares del parámetro  $\beta$ .

**Tabla 11-2.** Características de la ventana Kaiser en función del parámetro  $\beta$ .

$\beta$	Nivel relativo del lóbulo lateral [dB]	Ancho de transición $\Delta\Omega$	Atenuación en la banda de rechazo [dB]
2	-19	$3 \cdot \pi / N$	29
3	-24	$4 \cdot \pi / N$	37
4	-30	$5,2 \cdot \pi / N$	45
5	-37	$6,4 \cdot \pi / N$	54
6	-44	$7,6 \cdot \pi / N$	63
7	-51	$9 \cdot \pi / N$	72
8	-59	$10,2 \cdot \pi / N$	81
9	-67	$11,4 \cdot \pi / N$	90
10	-74	$12,8 \cdot \pi / N$	99

La ventana de Kaiser es quizás la ventana más utilizada en el procesamiento de señales debido a que se puede ajustar para cumplir con casi cualquier conjunto de especificaciones de filtro. En efecto, siempre es posible encontrar un valor adecuado del parámetro  $\beta$  que permita satisfacer los requisitos de atenuación en la banda de supresión con valores de  $N$  menores que con los otros tipos de ventana.

Cada tipo de ventana tiene características propias especiales que la hacen adecuada para aplicaciones particulares y en la lista bibliográfica del final del capítulo se podrán encontrar mayores detalles de cada una.

### 11.3.7. Procedimiento de diseño

No existen reglas para elegir el tipo de ventana. A modo de referencia, se puede emplear la **Tabla 11-1**. Tampoco existe una expresión para determinar de manera confiable el valor de  $N$ . Ambos parámetros de diseño se adoptan mediante prueba y error hasta que se cumplan las especificaciones. Por lo tanto se debe resaltar que el diseño de filtros FIR no es preciso; el truncamiento y la modificación de coeficientes da como resultado respuestas que pueden, o no, cumplir con los requisitos. Por lo tanto, el valor  $N$  obtenido con las expresiones (11-77) o bien, la que se obtenga de alguna de las expresiones de la columna “Ancho de transición  $\Delta\Omega$ ”, de las **Tabla 11-1** o **Tabla 11-2** es solo una estimación y la respuesta del filtro obtenido debe verificarse cuidadosamente para determinar si se cumplen todos los requisitos. En caso de que no se cumplan, el valor de  $N$  debe ajustarse teniendo presente el efecto de aumentarlo o reducirlo, que se puede apreciar en la **Fig. 11.19**.

Además debe tenerse en cuenta que si bien el enfoque del estudio se hizo sobre la realización de filtros pasa bajos, las conclusiones se mantienen en general para todos los filtros selectivos, siendo suficiente emplear la secuencia  $h_{ideal}[n]$  ideal correspondiente, dada por las expresiones (11-21), (11-22), (11-23) ó (11-24).

Por lo tanto, se puede resumir un procedimiento de diseño para los filtros FIR de fase lineal, que es muy directo y consiste en la siguiente secuencia de pasos.

- 1 Especificar una respuesta ideal  $H_{ideal}(\Omega)$  estableciendo la frecuencia de corte  $\Omega_C$  en el medio de la banda de transición empleando la expresión (11-78). En el caso de múltiples bandas de transición, como en el caso de filtros pasa banda, se deben establecer las frecuencias de corte  $\Omega_C$  para cada una.
- 2 Adoptar una función de ventana (Bartlett, Hamming, Hann, Kaiser u otra ventana) con la guía de la columna “Atenuación en la banda de rechazo”, de las **Tabla 11-1** o **Tabla 11-2**.
- 3 Estimar un valor de la longitud del filtro  $N$  a partir de alguna de las expresiones de la columna “Ancho de transición  $\Delta\Omega$ ”, de las **Tabla 11-1** o **Tabla 11-2** o con la expresión (11-77). Tener presente que emplear (11-77) puede requerir también (11-79), (11-80) y (11-76).
- 4 Determinar el número de muestras  $N_m$  de la ventana con (11-61) y  $n_0$  mediante (11-62).
- 5 Calcular los valores de los coeficientes de la respuesta al impulso ideal  $h_{LP}[n]$ ,  $h_{HP}[n]$ ,  $h_{BP}[n]$  o  $h_{BS}[n]$ , dependiendo de la naturaleza de la magnitud de la respuesta en frecuencia ideal, para  $-n_0 \leq n \leq n_0$  mediante (11-21), (11-22), (11-23) o (11-24), respectivamente.
- 6 Calcular los coeficientes correspondientes a la ventana adoptada  $w[k]$  para  $-n_0 \leq k \leq n_0$ .
- 7 Multiplicar los coeficientes  $h_{XX}[n]$  calculados en el paso 5 con los de  $w[n]$  calculados en el paso 6 para obtener los valores de  $h[n]$ .
- 8 Obtener  $H(\Omega)$  mediante (11-68) y representar  $|H(\Omega)|$  en dB para verificar el cumplimiento de las especificaciones. En caso de no cumplir, considerar otro valor de  $N$  diferente y repetir el procedimiento a partir del paso 2. En la adopción del nuevo valor, resultará útil tener presente el efecto de aumentarlo o bajarlo, lo cual se puede apreciar en la **Fig. 11.19**.
- 9 Si se cumplen satisfactoriamente las especificaciones, retardar en  $n_0$  la secuencia  $h[n]$  obtenida en el paso 7. En definitiva, el resultado del diseño es la secuencia de coeficientes  $h[n-n_0]$ , dado que con ellos, puede obtenerse la respuesta  $y[n]$  a cualquier señal  $x[n-n_0]$  mediante la expresión (11-27).

### 11.3.8. Ejemplos de diseño

En este apartado se presentan los siguientes ejemplos de aplicación del procedimiento que se describió para el diseño de filtros FIR mediante ventanas.

- **Ejemplo 11.2.** Filtro FIR pasa altos.
- **Ejemplo 11.3.** Filtro FIR pasa banda.
- **Ejemplo 11.4.** Filtro FIR supresor de banda.

**Ejemplo 11.2.**

Diseñar un filtro pasa altos que permita el paso de frecuencias superiores a 300 Hz con una ondulación que no supere 0,2 dB y que para frecuencias inferiores a 200 Hz la atenuación sea como mínimo 40 dB. La frecuencia de muestreo es de 1200 Hz.

**Resolución**

A partir de las especificaciones se obtienen los datos necesarios para el diseño:

$$\alpha_p = 0,2 \text{ dB} \qquad \alpha_s = 40 \text{ dB}$$

Banda de transición

$$\Omega_s = 2\pi \cdot \frac{200}{1200} = 0,333\pi \qquad \Omega_p = 2\pi \cdot \frac{300}{1200} = 0,5\pi$$

Ahora se está en condiciones de iniciar la secuencias de pasos indicados en el procedimiento de diseño.

1. Determinación de la frecuencia de corte de la característica ideal del filtro pasa altos.

$$\Omega_C = \frac{1}{2}(\Omega_s + \Omega_p) = \frac{1}{2}(0,333\pi + 0,5\pi) = 0,4167\pi$$

2. Se adopta la ventana de von Hann, que según la columna “Atenuación en la banda de rechazo” de la **Tabla 11-1**, se tendría que lograr sin dificultad los 40 dB que se requieren como mínimo en la banda de rechazo.
3. Estimar el valor de  $N$  de la expresión de la columna “Ancho de transición  $\Delta\Omega$ ” de la **Tabla 11-1** para la ventana von Hann. Con los datos de la banda de transición se obtiene:

$$N \approx \frac{6,2\pi}{\Omega_p - \Omega_s} = \frac{6,2\pi}{0,5\pi - 0,333\pi} = 38$$

es decir, según (11-61), el número de muestras de la ventana será  $N_m=39$ , el cual debería resultar adecuado aplicando la ventana de von Hann.

4. Se determina  $n_0$  con (11-62):

$$n_0 = \frac{N_m - 1}{2} = \frac{39 - 1}{2} = 19$$

5. Determinar la secuencia  $h_{HP}[n]$  empleando (11-22).

Esta determinación y todos los cálculos llevados a cabo hasta aquí, pueden efectuarse mediante las siguientes líneas de código de Matlab:

```

01 % ===== Diseño de un Filtro FIR pasa altos =====
02 clc
03 close all
04 % Datos del caso
05 alfa_p = 0.2; %atenuacion maxima en dB
06 alfa_s = 40; %atenuacion minima dB
07 fp=300; % Límite de la banda de paso [Hz]
08 fs=200; % Límite de la banda de rechazo [Hz]
09 fMues=1200; % Frecuencia de muestreo [Hz]
10 % Cálculo de las frecuencias características
11 Wp=2*fp/fMues; % Límite de la banda de paso (veces pi)
12 Ws=2*fs/fMues; % Límite de la banda de rechazo (veces pi)
13 Wc=(Wp+Ws)/2;
14 % Estimación de N para la ventana de von Hann
15 N=ceil(6.2/(Wp-Ws));
16 n0=floor(N/2);
17 %Calculo de la ventana ideal del filtro pasa altos
18 n=-n0:n0;
19 hHP= -Wc*sinc(Wc*n); % Por ser los índices de hHP>0, hHP ya es causal
20 hHP(n0+1)=1-Wc;

```

Es importante destacar que la definición de la función  $\text{sinc}(x)$  para Matlab es en realidad  $\text{sinc}(\pi x)$ . De este modo, los primeros 20 coeficientes de la secuencia  $h_{HP}[n]$  obtenida resultan:

```
{0.00433603, 0.01768388, 0.00484616, -0.01722903, -0.01500527, 0.01136821, 0.02365106, -1.62E-17, -0.02795125, -0.01591549, 0.02500879, 0.03445806, -0.01176924, -0.05305165, -0.01647693, 0.06891611, 0.07502636, -0.07957747, -0.30746374, 0.58333333}
```

6. Calcular los coeficientes de la ventana adoptada  $w[n]$  para  $-n_0 \leq n \leq n_0$  empleando (11-71).

Esto se realiza en forma simple en Matlab con la siguiente línea de código:

```
21 w=0.5-0.5*cos(pi*(n0-abs(n))/n0); % Ventana de von Hann
```

Los primeros 20 coeficientes resultan:

```
{0, 0.00681935, 0.02709138, 0.06026312, 0.10542975, 0.16135921, 0.22652592, 2.99E-01, 0.37725726, 0.45871033, 0.54128967, 0.62274274, 0.70084771, 0.77347408, 0.83864079, 0.89457025, 0.93973688, 0.97290862, 0.99318065, 1}
```

7. Multiplicar los coeficientes  $h_{HP}[n]$  calculados en el paso 5 con los de  $w[n]$  calculados en el paso 6 para obtener los valores de  $h[n]$ .

Esto puede obtenerse mediante la siguiente línea de código en Matlab:

```
22 h=hHP.*w; % Respuesta al impulso del filtro real
```

Los primeros 20 coeficientes resultan:

```
{0, 0.00012059, 0.00013129, -0.00103828, -0.001582, 0.00183437, 0.00535758, -4.86E-18, -0.01054481, -0.0073006, 0.013537, 0.0214585, -0.00824844, -0.04103407, -0.01381823, 0.0616503, 0.07050504, -0.07742161, -0.30536704, 0.58333333}
```

8. Verificación. Se obtiene  $H(\Omega)$  mediante (11-68) se representa  $|H(\Omega)|$  en dB para verificar el cumplimiento de las especificaciones.

Aquí ya resulta imprescindible utilizar Matlab o aplicación similar que permita calcular y graficar  $|H(\Omega)|$  en dB. Con las siguientes líneas de código se evalúa  $|H(\Omega)|$  en dB y se realiza una gráfica con  $\Omega$  expresado en unidades de  $\pi$  en el eje de abscisas, que se muestra en la **Fig. 11.25** con el agregado de algunos detalles con fines didácticos mediante herramientas de edición.

```
23 % Obtención de la respuesta en frecuencia con resolución fMues/1000 Hz
24 K=fMues/1000;
25 qLim=fMues/2/K;
26 for q=-qLim:qLim % Se obtendrá un vector |H(?)| de fMues/K puntos
27     H(q+qLim+1)=abs(sum(h.*exp(-1j.*n*pi*q/qLim)));
28 end
29 %% Gráfica de la Magnitud de H(W) en dB entre -pi y pi
30 min_dBplot=-80; max_dBplot=5;
31 x=(-qLim:qLim)/qLim; % Se genera el eje de abscisas de fMues+1 puntos
32 figure('Color',[1,1,1]);
33 plot(x, 20*log10(H), 'LineWidth', 5, 'Color', [0,0.5,0.5]);
34 hold on
35 % Plantilla de la especificación para la banda de paso
36 Xp=[-1 -Wp -Wp -Wp Wp Wp Wp 1];
37 Yp1=[-alfa_p -alfa_p min_dBplot NaN NaN min_dBplot -alfa_p -alfa_p];
38 Yp2=[alfa_p alfa_p max_dBplot NaN NaN max_dBplot alfa_p alfa_p];
39 % Plantilla de la especificación para la banda de atenuación
40 Xs=[-Ws -Ws Ws Ws];
41 Ys=[max_dBplot -alfa_s -alfa_s max_dBplot];
42 plot(Xp, Yp1, 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '--', 'Color', [0.8,0.2,0.6]);
43 plot(Xp, Yp2, 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '--', 'Color', [0.8,0.2,0.6]);
44 plot(Xs, Ys, 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '--', 'Color', [0.8,0.2,0.6]);
45 grid on
46 ax1 = gca;
47 set(ax1, 'FontName','Arial', 'FontSize',26)
48 axis([-1 1 min_dBplot max_dBplot])
49 xlabel('\Omega [veces \pi]', 'FontName','Arial', 'FontSize',26);
50 ylabel('|H(\Omega)| [dB]', 'FontName','Arial', 'FontSize',26);
```

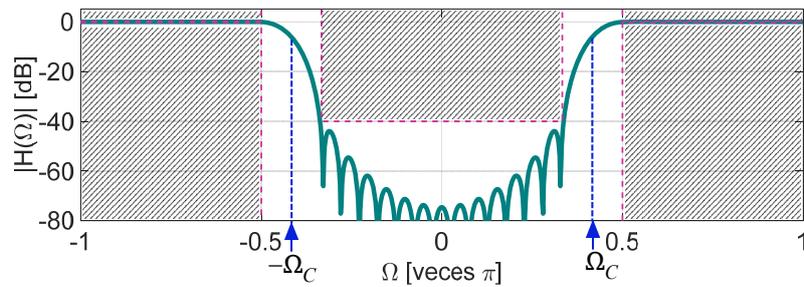


Fig. 11.25.  $|H(\Omega)|$  resultante para el filtro pasa altos con ventana de von Hann, empleando el código indicado.

En la Fig. 11.26 se muestran gráficos de  $|H(\Omega)|$  con el eje de abscisas graduado en kHz.

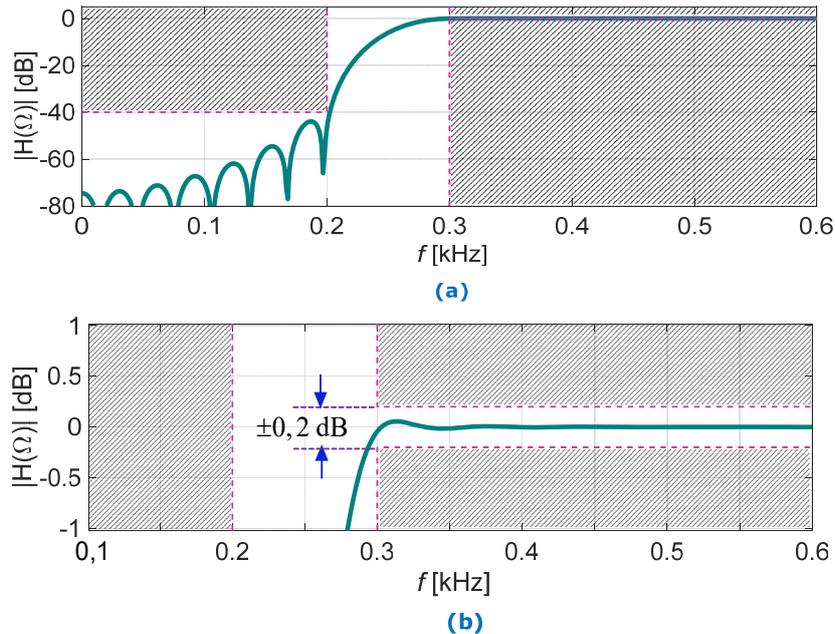


Fig. 11.26. Filtro pasa altos con ventana de von Hann. (a)  $|H(\Omega)|$  para frecuencias positivas. (b) Detalle de la banda de paso.

La Fig. 11.26a se obtuvo mediante las siguientes líneas de código de Matlab (las áreas sombreadas se han agregado con fines didácticos mediante herramientas de edición):

```

51 %% Gráfica de la Magnitud de H(W) en dB entre 0 y fMues/2
52 x=(0:qLim)/qLim*fMues/2E3; % Se genera el eje de abscisas en kHz
53 figure('Color',[1,1,1]);
54 plot(x, 20*log10(H(qLim+1:end)), 'LineWidth', 5, 'Color', [0,0.5,0.5]);
55 hold on
56 % Plantilla de la especificación para la banda de paso
57 Xp=[Wp Wp 1];
58 Yp1=[min_dBplot -alfa_p -alfa_p];
59 Yp2=[max_dBplot alfa_p alfa_p];
60 % Plantilla de la especificación para la banda de atenuación
61 Xs=[0 Ws Ws];
62 Ys=[-alfa_s -alfa_s max_dBplot];
63 Xp=Xp*fMues/2E3; % Frecuencias en kHz
64 Xs=Xs*fMues/2E3; % Frecuencias en kHz
65 plot(Xp, Yp1, 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '--', 'Color',
66 [0.8,0.2,0.6]);
67 plot(Xp, Yp2, 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '--', 'Color',
68 [0.8,0.2,0.6]);
69 plot(Xs, Ys, 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '--', 'Color',
70 [0.8,0.2,0.6]);
71 grid on
72 ax1 = gca;
73 set(ax1, 'FontName','Arial', 'FontSize',26)
74 axis([0 fMues/2E3 min_dBplot max_dBplot])
75 xlabel('\it f \rm[kHz]', 'FontName','Arial', 'FontSize',26);
76 ylabel('|H(\Omega)| [dB]', 'FontName','Arial', 'FontSize',26);

```

La **Fig. 11.26b** se obtuvo con las herramientas de visualización que ofrece Matlab para apreciar con mayor detalle el cumplimiento de la especificación para la banda de paso.

Se observa que  $|H(\Omega)|$  satisface los requisitos de la especificación, dado que la curva no ingresa a las regiones sombreadas. Por lo tanto, la secuencia  $h[n]$  obtenida en el paso 7 es adecuada para efectuar el filtrado requerido, sobre cualquier señal  $x(t)$  muestreada a una frecuencia de muestreo de 1200 Hz.

### Ejemplo 11.3.

Diseñar un filtro pasa banda que permita el paso de frecuencias entre 4 kHz y 6 kHz, con bandas de transición de 3-4 kHz y de 6-8 kHz. La frecuencia de muestreo es de 20 kHz. La atenuación mínima deseada de la banda de rechazo es de 40 dB, y se requiere que la ondulación de la banda de paso no sea mayor a 0.1 dB.

### Resolución

A partir de las especificaciones se obtienen los datos necesarios para el diseño:

$$\alpha_p = 0,1 \text{ dB}$$

$$\alpha_s = 40 \text{ dB}$$

Frecuencias normalizadas límites de la banda de transición inferior

$$\Omega_{p1} = 2\pi \cdot \frac{4 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^3} = 0,4\pi$$

$$\Omega_{s1} = 2\pi \cdot \frac{3 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^3} = 0,3\pi$$

Frecuencias normalizadas límites de la banda de transición superior

$$\Omega_{p2} = 2\pi \cdot \frac{6 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^3} = 0,6\pi$$

$$\Omega_{s2} = 2\pi \cdot \frac{8 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^3} = 0,8\pi$$

Ahora se está en condiciones de iniciar la secuencias de pasos indicados en el procedimiento de diseño.

1. Determinar las frecuencias de corte de la característica ideal. Las dos frecuencias de corte del pasa banda resultan:

$$\Omega_{C1} = \frac{\Omega_{s1} + \Omega_{p1}}{2} = \frac{0,3\pi + 0,4\pi}{2} = 0,35\pi$$

$$\Omega_{C2} = \frac{\Omega_{p2} + \Omega_{s2}}{2} = \frac{0,6\pi + 0,8\pi}{2} = 0,7\pi$$

Y la frecuencia central de la banda de paso:

$$\Omega_0 = \frac{\Omega_{C1} + \Omega_{C2}}{2} = \frac{0,35\pi + 0,7\pi}{2} = 0,525\pi$$

Los cálculos llevados a cabo hasta aquí, pueden efectuarse mediante las siguientes líneas de código de Matlab:

```
01 % ===== Diseño de un Filtro FIR pasa banda =====
02 clc;
03 close all;
04 % Datos del caso
05 fp1=4E3; fp2=6E3;
06 fs1=3E3; fs2=8E3;
07 alfa_p=0.1; %dB
08 alfa_s=40; %dB
09 fMues=20000; % Frecuencia de muestreo (Hz)
10 % Cálculo de las frecuencias características
11 Wp1=2*fp1/fMues; % Lím. inf. de la banda de paso (veces pi)
12 Wp2=2*fp2/fMues; % Lím. sup. de la banda de paso (veces pi)
13 Ws1=2*fs1/fMues; % Lím. inf. de la banda de paso (veces pi)
14 Ws2=2*fs2/fMues; % Lím. sup. de la banda de paso (veces pi)
15 % Determinación de las frecuencias normalizadas de corte
16 Wc1=(Ws1+Wp1)/2; % Frec. normalizada de corte inferior (veces pi)
17 Wc2=(Ws2+Wp2)/2; % Frec. normalizada de corte superior (veces pi)
```

2. Se adopta la ventana Kaiser que, para  $\beta=4$ , según la **Tabla 11-2** (columna “Atenuación en la banda de rechazo”), permite lograr los 40 dB que se requieren como mínimo en la banda de rechazo.
3. Para estimar  $N$  empleando la ventana de Kaiser, es necesario calcular con (11-79) y (11-80):

$$\delta_p = \frac{10^{0,05 \cdot 0,1} - 1}{10^{0,05 \cdot 0,1} + 1} = 5,76 \cdot 10^{-3}$$

$$\delta_s = 10^{-0,05 \cdot \alpha_s} = 10^{-0,05 \cdot 40} = 0,01$$

Y determinar con (11-76):

$$A = -20 \log[\min(\delta_p; \delta_s)] = -20 \log[\min(5,76 \cdot 10^{-3}; 0,01)] = 44,8$$

Entonces con la expresión (11-77) se obtienen dos valores, uno con cada banda de transición:

$$N_1 = \frac{A-7,95}{2,285 \cdot \Delta\Omega} = \frac{44,8-7,95}{2,285 \cdot (0,4\pi-0,3\pi)} = 51,3$$

$$N_2 = \frac{A-7,95}{2,285 \cdot \Delta\Omega} = \frac{44,8-7,95}{2,285 \cdot (0,8\pi-0,6\pi)} = 25,7$$

Se adopta el valor de  $N=52$ , es decir, según (11-61), un número de muestras de la ventana  $N_m=53$ , el cual debería resultar adecuado aplicando la ventana de Kaiser.

Y con la expresión (11-75) se determina  $\beta$ , en este caso:

$$\beta = 0,5842 \cdot (A-21)^{0,4} + 0,07886 \cdot (A-21) = 0,5842 \cdot (44,8-21)^{0,4} + 0,07886 \cdot (44,8-21)$$

$$\beta = 3,95$$

Que resulta aproximadamente igual a 4, tal como se anticipó en el paso 2.

Estas determinaciones se efectuaron mediante las siguientes líneas de código de Matlab:

```

18 % Estimación del orden del filtro para ventana de Kaiser
19 delta_p=(10^(0.05*alfa_p)-1)/(10^(0.05*alfa_p)+1);
20 delta_s=10^(-0.05*alfa_s);
21 A=-20*log10(min(delta_p, delta_s));
22 if A>21
23     N1=(A-7.95)/(2.285*((Wp1-Ws1)*pi));
24     N2=(A-7.95)/(2.285*((Ws2-Wp2)*pi));
25     if A>50
26         Beta=0.1150*(A-8.7);
27     else
28         Beta=0.5842*(A-21)^0.4+0.07886*(A-21);
29     end
30 else
31     N1=5.794/((Wp1-Ws1)*pi);
32     N2=5.794/((Ws2-Wp2)*pi);
33     Beta=0;
34 end
35 N=ceil(max(N1,N2));

```

4. Se determina  $n_0$  con (11-62):

$$n_0 = \frac{N_m-1}{2} = \frac{53-1}{2} = 26$$

```

36 n0=floor(N/2);

```

5. Determinar la secuencia  $h_{BP}[n]$  empleando (11-23).

Esto puede obtenerse mediante un script muy sencillo en Matlab, teniendo en cuenta que la definición de la función sinc(x) para Matlab es en realidad sinc( $\pi x$ ):

```

37 %Calculo de la ventana ideal del filtro pasa banda
38 n=-n0:n0;
39 hBP=Wc2*sinc(Wc2*n) - Wc1*sinc(Wc1*n);

```

De este modo, los primeros 20 coeficientes de la secuencia  $h_{BP}[n]$  obtenida resultan:

```

{0.01097927, -0.02173556, -0.00481803, 0.00211168, -0.00205512, 0.0257683, -4.09E-17, -
0.02848075, 0.00251181, -0.00285697, 0.00722705, 0.03622593, -0.02039007, -0.03175032,
0.00963607, -0.01027349, 0.03183099, 0.04466975, -0.06122857, -0.03086111}

```

6. Calcular los coeficientes correspondientes a la ventana adoptada  $w[n]$  para  $-n_0 \leq n \leq n_0$  empleando (11-74). Esto se realiza en forma simple en Matlab con la siguiente línea de código:

```

40 % Función ventana adoptada Kaiser
41 w=besseli(0,Beta*sqrt(1-(n/n0).^2))/besseli(0, Beta);

```

Los primeros 20 coeficientes resultan:

```

{0.09219252, 0.12142257, 0.15365668, 0.18876126, 0.22655616, 0.26681567, 3.09E-01,
0.35360927, 0.39948386, 0.44651125, 0.49427919, 0.54235112, 0.59027178, 0.6375733,
0.68378153, 0.72842257, 0.77102943, 0.81114871, 0.84834705, 0.88221748}

```

7. Multiplicar los coeficientes  $h_{BP}[n]$  calculados en el paso 5 con los de  $w[n]$  calculados en el paso 6 para obtener los valores de  $h[k]$ . Esto puede obtenerse mediante la siguiente línea de código en Matlab:

```
42 h=hBP.*w; % Respuesta al impulso del filtro real
```

Los primeros 20 coeficientes resultan:

```
{0.001010221,-0.00263919,-0.00074032,0.0003986,-0.0004656,0.00687539,-1.27E-17,-
0.01007106,0.00100343,-0.00127567,0.00357218,0.01964717,-0.01203568,-
0.02024315,0.00658897,-0.00748345,0.02454263,0.03623381,-0.05194308,-0.02722621}
```

8. Verificación. Se obtiene  $H(\Omega)$  mediante (11-68) y se representa  $|H(\Omega)|$  en dB para verificar el cumplimiento de las especificaciones.

Aquí ya resulta imprescindible utilizar Matlab o aplicación similar que permita calcular y graficar  $|H(\Omega)|$  en dB. Con las siguientes líneas de código se evalúa  $|H(\Omega)|$  en dB y se realiza una gráfica con  $\Omega$  expresado en unidades  $\pi$  de en el eje de abscisas.

```
43 % Obtención de la respuesta en frecuencia con resolución fMues/1000 Hz
44 K=fMues/1000;
45 qLim=Mues2/K;
46 for q=-qLim:qLim % Se obtendrá un vector |H(W)| de 1+fMues/1000 puntos
47     H(q+qLim+1)=abs(sum(h.*exp(-1j.*n*pi*q/qLim)));
48 end
49 %% Gráfica de la Magnitud de H(W) en dB entre -1 y 1 (veces pi)
50 min_dBplot=-80; max_dBplot=5;
51 x=(-qLim:qLim)/qLim; % Generar eje de abscisas de 1+fMues/1000 puntos
52 figure('Color',[1,1,1]);
53 plot(x, 20*log10(H), 'LineWidth', 5, 'Color',[0,0.5,0.5]);
54 hold on
55 % Plantilla de la especificación para la banda de paso
56 Xp=[-Wp2 -Wp2 -Wp1 -Wp1 NaN NaN Wp1 Wp1 Wp2 Wp2];
57 Yp1=[min_dBplot -alfa_p -alfa_p min_dBplot min_dBplot min_dBplot min_dBplot
min_dBplot -alfa_p -alfa_p min_dBplot];
58 Yp2=[max_dBplot alfa_p alfa_p max_dBplot max_dBplot max_dBplot max_dBplot
max_dBplot alfa_p alfa_p max_dBplot];
59 % Plantilla de la especificación para la banda de atenuación
60 Xs=[-1 -Ws2 -Ws2 -Ws2 -Ws1 -Ws1 -Ws1 Ws1 Ws1 Ws1 Ws2 Ws2 Ws2 1];
61 Ys=[-alfa_s -alfa_s max_dBplot NaN NaN max_dBplot -alfa_s -alfa_s
max_dBplot NaN NaN max_dBplot -alfa_s -alfa_s];
62 plot(Xp, Yp1, 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '--', 'Color',
[0.8,0.2,0.6]);
63 plot(Xp, Yp2, 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '--', 'Color',
[0.8,0.2,0.6]);
64 plot(Xs, Ys, 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '--', 'Color',
[0.8,0.2,0.6]);
65 grid on
66 ax1 = gca;
67 set(ax1, 'FontName','Arial', 'FontSize',26)
68 axis([-1 1 min_dBplot max_dBplot])
69 xlabel('\Omega [veces \pi]', 'FontName','Arial', 'FontSize',26);
70 ylabel('|H(\Omega)| [dB]', 'FontName','Arial', 'FontSize',26);
```

En la Fig. 11.27 se muestra la gráfica de  $|H(\Omega)|$  obtenida con el código Matlab indicado (las áreas sombreadas se han agregado con fines didácticos mediante herramientas de edición).

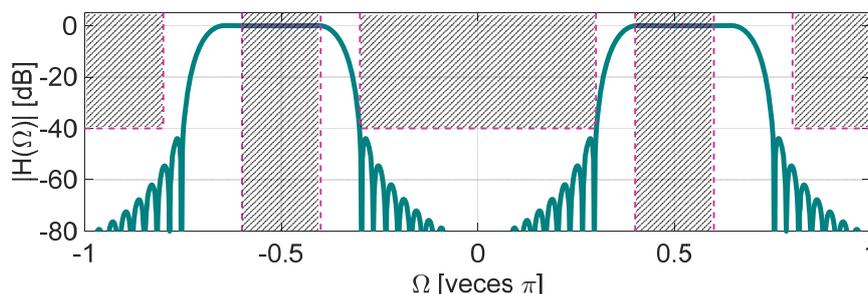


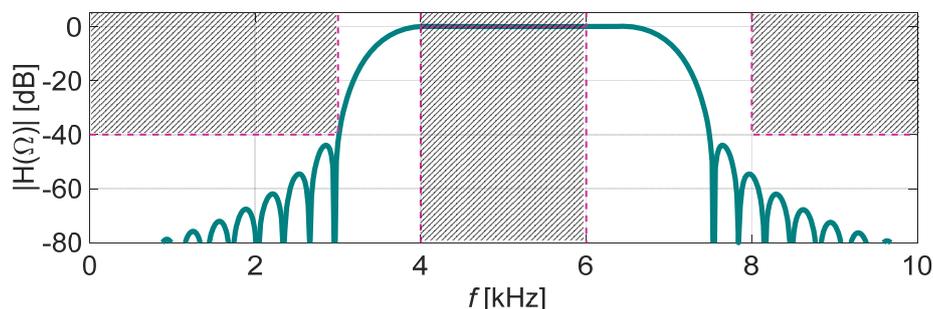
Fig. 11.27.  $|H(\Omega)|$  resultante con ventana de Kaiser con  $\beta=4$ , empleando el código indicado.

La **Fig. 11.28** muestra la gráfica de  $|H(\Omega)|$  con el eje de abscisas graduado en kHz y se obtuvo mediante las siguientes líneas de código de Matlab (las áreas sombreadas se han agregado con fines didácticos mediante herramientas de edición) :

```

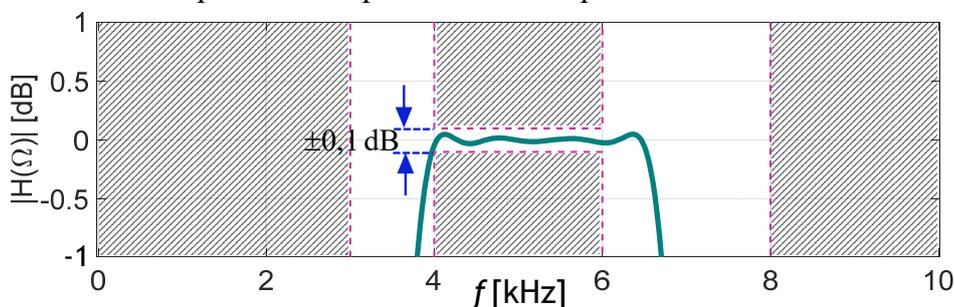
71 % Gráfica de la Magnitud de H(W) en dB entre 0 y fMues/2
72 x=(0:qLim)/qLim*fMues/2E3; % Abscisas en Hz con 1+fMues/2000 puntos
73 figure('Color',[1,1,1]);
74 plot(x, 20*log10(H(qLim+1:end)), 'LineWidth', 5, 'Color', [0,0.5,0.5]);
75 hold on
76 % Plantilla de la especificación para la banda de paso
77 Xp=[Wp1 Wp1 Wp2 Wp2];
78 Yp1=[min_dBplot -alfa_p -alfa_p min_dBplot];
79 Yp2=[max_dBplot alfa_p alfa_p max_dBplot];
80 % Plantilla de la especificación para la banda de atenuación
81 Xs=[0 Ws1 Ws1 Ws1 Ws2 Ws2 Ws2 1];
82 Ys=[-alfa_s -alfa_s max_dBplot NaN NaN max_dBplot -alfa_s -alfa_s];
83 Xp=Xp*fMues/2E3; % Frecuencias en kHz
84 Xs=Xs*fMues/2E3; % Frecuencias en kHz
85 plot(Xp, Yp1, 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '--', 'Color',
86 [0.8,0.2,0.6]);
87 plot(Xp, Yp2, 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '--', 'Color',
88 [0.8,0.2,0.6]);
89 plot(Xs, Ys, 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '--', 'Color',
90 [0.8,0.2,0.6]);
91 grid on
92 ax1 = gca;
93 set(ax1, 'FontName','Arial', 'FontSize',26)
94 axis([0 fMues/2E3 min_dBplot max_dBplot])
95 xlabel('\it f \rm[kHz]', 'FontName','Arial', 'FontSize',26);
96 ylabel('|H(\Omega)| [dB]', 'FontName','Arial', 'FontSize',26);

```



**Fig. 11.28.** Ventana de Kaiser con  $\beta=3,95$ .  $|H(\Omega)|$  resultante para frecuencias positivas con el eje de abscisas tarado en kHz, empleando el código indicado

La **Fig. 11.29** se obtuvo con las herramientas de visualización que ofrece Matlab para apreciar con mayor detalle el cumplimiento de la especificación para la banda de paso.



**Fig. 11.29.** Ventana de Kaiser con  $\beta=3,95$ . Detalle de la banda de paso (obtenida mediante las herramientas de visualización de Matlab).

Se observa que  $|H(\Omega)|$  satisface los requisitos de la especificación, dado que la curva no ingresa a las regiones sombreadas. Por lo tanto, la secuencia  $h[n]$  obtenida en el paso 7 es adecuada para efectuar el filtrado requerido, sobre cualquier señal  $x(t)$  muestreada a una frecuencia de muestreo de 20 kHz.

**Ejemplo 11.4.**

En aplicaciones de comunicaciones móviles utilizando celulares, suele presentarse una fuente de ruido íntimamente relacionada con la tecnología de las centrales de comunicaciones digitales que intercambian la información con los dispositivos móviles. Dicha interferencia se presenta en una banda de frecuencia centrada en 217 Hz y con un ancho de banda de 40 Hz. Se requiere sintetizar un filtro digital de tipo FIR tal que la curva de atenuación tenga una característica supprime banda o de filtro *notch* que cumpla con las siguientes especificaciones.

- Banda de supresión de ancho 40 Hz, frecuencia central de 217 Hz y atenuación mayor a 40 dB.
- Banda de paso de ancho 150 Hz, con atenuación menor a 0,1 dB.

La frecuencia de muestreo es 1 kHz.

**Resolución**

A partir de las especificaciones se obtienen los datos necesarios para el diseño:

$$\alpha_p = 0,1 \text{ dB}$$

$$\alpha_s = 40 \text{ dB}$$

Frecuencias normalizadas límites de la banda de transición inferior

$$\Omega_{p1} = 2\pi \cdot \frac{(217-150/2)}{1 \cdot 10^3} = 0,284\pi$$

$$\Omega_{s1} = 2\pi \cdot 2\pi \cdot \frac{(217-40/2)}{1 \cdot 10^3} = 0,394\pi$$

Frecuencias normalizadas límites de la banda de transición superior

$$\Omega_{p2} = 2\pi \cdot \frac{(217+150/2)}{1 \cdot 10^3} = 0,584\pi$$

$$\Omega_{s2} = 2\pi \cdot 2\pi \cdot \frac{(217+40/2)}{1 \cdot 10^3} = 0,474\pi$$

Ahora se está en condiciones de iniciar la secuencias de pasos indicados en el procedimiento de diseño.

1. Determinar las frecuencias de corte de la característica ideal. Las dos frecuencias de corte del supresor de banda resultan:

$$\Omega_{C1} = \frac{\Omega_{p1} + \Omega_{s1}}{2} = \frac{0,284\pi + 0,394\pi}{2} = 0,339\pi$$

$$\Omega_{C2} = \frac{\Omega_{p2} + \Omega_{s2}}{2} = \frac{0,584\pi + 0,424\pi}{2} = 0,529\pi$$

Y la frecuencia central de la banda de supresión:

$$\Omega_0 = \frac{\Omega_{C1} + \Omega_{C2}}{2} = \frac{0,339\pi + 0,529\pi}{2} = 0,434\pi$$

Como comprobación, se puede determinar la frecuencia central de la banda de supresión expresada en Hz, que resulta:

$$f_0 = \Omega_0 \frac{f_S}{2\pi} = 0,434\pi \frac{1 \cdot 10^3}{2\pi} = 217 \text{ Hz}$$

Que como cabía esperar, corresponde a la frecuencia central especificada.

2. Se adopta la ventana de von Hann la cual según la **Tabla 11-2** (columna “Atenuación en la banda de rechazo”), permite lograr los 40 dB que se requieren como mínimo en la banda de rechazo.
3. Estimar el valor de  $N$  de la expresión de la columna “Ancho de transición  $\Delta\Omega$ ” de la **Tabla 11-1** para la ventana von Hann. Con los datos de ambas bandas de transición se obtiene:

$$N_1 \approx \frac{6,2 \cdot \pi}{\Omega_{s1} - \Omega_{p1}} = \frac{6,2 \cdot \pi}{0,394 \cdot \pi - 0,284 \cdot \pi} = 57$$

$$N_2 \approx \frac{6,2 \cdot \pi}{\Omega_{s2} - \Omega_{p2}} = \frac{6,2 \cdot \pi}{0,584 \cdot \pi - 0,474 \cdot \pi} = 57$$

Dado que  $N_1=N_2=57$ , se adopta el valor de  $N=58$  (filtro tipo 1), y según (11-61) el número de muestras de la ventana será  $N_m=59$ , el cual debería resultar adecuado aplicando la ventana de von Hann.

4. Se determina  $n_0$  con (11-62):

$$n_0 = \frac{N_m - 1}{2} = \frac{59 - 1}{2} = 29$$

Las siguientes líneas de código de Matlab permiten efectuar las determinaciones hasta aquí realizadas:

```

01 % ===== Diseño de un Filtro FIR suprime banda =====
02 clc;
03 close all;
04 % Datos del caso
05 f0=217; %Hz
06 Delta_fs=40; %Hz
07 alfa_p=0.1; %dB
08 Delta_fp=150; %Hz
09 alfa_s=40; %dB
10 fMues=1000; % Frecuencia de muestreo (Hz)
11 % Cálculo de las frecuencias características
12 Wp1=2*(f0-Delta_fp/2)/fMues; % Límite inferior de Delta_Wp (veces pi)
13 Wp2=2*(f0+Delta_fp/2)/fMues; % Límite superior de Delta_Wp (veces pi)
14 Ws1=2*(f0-Delta_fs/2)/fMues; % Límite inferior de Delta_Ws (veces pi)
15 Ws2=2*(f0+Delta_fs/2)/fMues; % Límite superior de Delta_Ws (veces pi)
16 N1=ceil(6.2/(Ws1-Wp1));
17 N2=ceil(6.2/(Wp2-Ws2));
18 N=max(N1, N2)+1;
19 n0=floor(N/2);

```

5. Determinar la secuencia  $h_{BS}[n]$  empleando (11-24).

Esto puede obtenerse mediante un script muy sencillo en Matlab, teniendo en cuenta que la definición de la función sinc(x) para Matlab es en realidad sinc( $\pi x$ ):

```

20 Wc1=(Ws1+Wp1)/2; % Frecuencia normaliz. de corte inferior [veces pi]
21 Wc2=(Ws2+Wp2)/2; % Frecuencia normaliz. de corte superior [veces pi]
22 % Cálculo de la ventana ideal del filtro supresor de banda
23 n=-n0:n0;
24 hBS=-Wc2*sinc(Wc2*n) + Wc1*sinc(Wc1*n);
25 hBS(n0+1)=1-Wc2+Wc1;

```

De este modo, los primeros 20 coeficientes de la secuencia  $h_{BS}[n]$  obtenida resultan:

```
{0.00407745, -1.77E-02, -0.01460517, 0.01530105, 0.02096218, -0.00533121, -1.52E-02, -0.00121281, -4.46E-04, -0.00527056, 0.01379345, 0.02321185, -0.01310006, -0.03909727, -0.00129628, 0.03803004, 0.0142199, -0.01793489, -0.00618413, -0.00479775}
```

6. Calcular los coeficientes correspondientes a la ventana adoptada  $w[n]$  para  $-n_0 \leq n \leq n_0$  empleando (11-71). Esto se realiza en forma simple en Matlab con la siguiente línea de código:

```
26 w=0.5-0.5*cos(pi*(n0-abs(n))/n0); % Ventana de von Hann
```

Los primeros 20 coeficientes resultan:

```
{0.0000000, 0.0029310, 0.0116897, 0.0261734, 0.0462123, 0.0715714, 0.1019535, 0.1370023, 0.1763069, 0.2194065, 0.2657958, 0.3149309, 0.3662358, 0.4191090, 0.4729305, 0.5270695, 0.5808910, 0.6337642, 0.6850691, 0.7342042}
```

7. Multiplicar los coeficientes  $h_{BS}[n]$  calculados en el paso 5 con los de  $w[n]$  calculados en el paso 6 para obtener los valores de  $h[k]$ . Esto puede obtenerse mediante la siguiente línea de código en Matlab:

```
27 h=hBS.*w; % Respuesta al impulso del filtro real
```

Los primeros 20 coeficientes resultan:

```
{0.0000000, -0.0000519, -0.0001707, 0.0004005, 0.0009687, -0.0003816, -0.0015469, -0.0001662, -0.0000786, -0.0011564, 0.0036662, 0.0073101, -0.0047977, -0.0163860, -0.0006131, 0.0200445, 0.0082602, -0.0113665, -0.0042366, -0.0035225}
```

8. Verificación. Se obtiene  $H(\Omega)$  mediante (11-68) y se representa  $|H(\Omega)|$  en dB para verificar el cumplimiento de las especificaciones.

Aquí ya resulta imprescindible utilizar Matlab o aplicación similar que permita calcular y graficar  $|H(\Omega)|$  en dB. Con las siguientes líneas de código se evalúa  $|H(\Omega)|$  en dB y se realiza una gráfica con  $\Omega$  expresado en unidades  $\pi$  de en el eje de abscisas.

```

28 % Obtención de la respuesta en frecuencia con resolución fMues/1000 Hz
29 K=fMues/1000;
30 qLim=fMues/2/K;

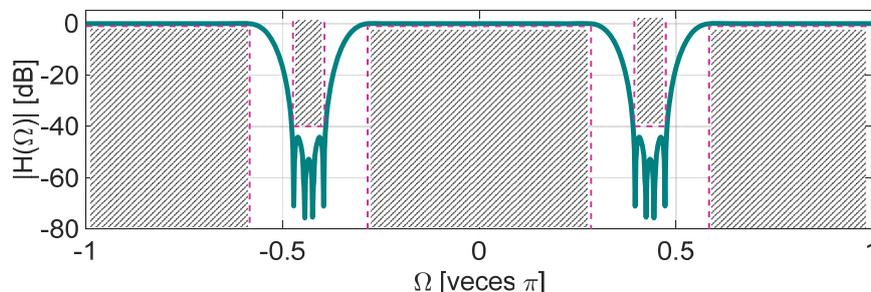
```

```

31 for q=-qLim:qLim % Generar un vector |H(W)| de 1+fMues/1000 puntos
32     H(q+qLim+1)=abs(sum(h.*exp(-1j.*n*pi*q/qLim)));
33 end
34 %% Gráfica de la Magnitud de H(W) en dB entre -pi y pi
35 min_dBplot=-80; max_dBplot=5;
36 x=(-qLim:qLim)/qLim; % Generar eje de abcisas de 1+fMues/1000 puntos
37 figure('Color',[1,1,1]);
38 plot(x, 20*log10(H), 'LineWidth', 5, 'Color', [0,0.5,0.5]);
39 hold on
40 % Plantilla de la especificación para la banda de paso
41 Xp=[-1 -Wp2 -Wp2 -Wp2 -Wp1 -Wp1 -Wp1 Wp1 Wp1 Wp1 Wp2 Wp2 Wp2 1];
42 Yp1=[-alfa_p -alfa_p min_dBplot NaN NaN min_dBplot -alfa_p -alfa_p
min_dBplot NaN NaN min_dBplot -alfa_p -alfa_p];
43 Yp2=[alfa_p alfa_p max_dBplot NaN NaN max_dBplot alfa_p alfa_p
max_dBplot NaN NaN max_dBplot alfa_p alfa_p];
44 % Plantilla de la especificación para la banda de atenuación
45 Xs=[-Ws2 -Ws2 -Ws1 -Ws1 NaN NaN Ws1 Ws1 Ws2 Ws2];
46 Ys=[max_dBplot -alfa_s -alfa_s max_dBplot max_dBplot max_dBplot
max_dBplot -alfa_s -alfa_s max_dBplot];
47 plot(Xp, Yp1, 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '--', 'Color',
[0.8,0.2,0.6]);
48 plot(Xp, Yp2, 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '--', 'Color',
[0.8,0.2,0.6]);
49 plot(Xs, Ys, 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '--', 'Color',
[0.8,0.2,0.6]);
50 grid on
51 ax1 = gca;
52 set(ax1, 'FontName','Arial', 'FontSize',26)
53 axis([-1 1 min_dBplot max_dBplot])
54 xlabel('\Omega [veces \pi]', 'FontName','Arial', 'FontSize',26);
55 ylabel('|H(\Omega)| [dB]', 'FontName','Arial', 'FontSize',26);

```

En la **Fig. 11.30** se muestra la gráfica de  $|H(\Omega)|$  obtenida con el código Matlab indicado (las áreas sombreadas se han agregado con fines didácticos mediante herramientas de edición).



**Fig. 11.30.**  $|H(\Omega)|$  resultante con ventana de von Hann, empleando el código indicado.

En la **Fig. 11.31** se muestran gráficos de  $|H(\Omega)|$  con el eje de abcisas graduado en kHz y se obtuvo mediante las siguientes líneas de código de Matlab (las áreas sombreadas se han agregado con fines didácticos mediante herramientas de edición):

```

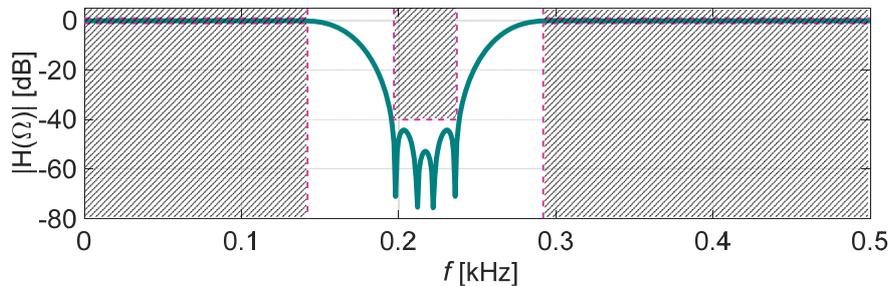
56 %% Gráfica de la Magnitud de H(W) en dB entre 0 y fMues/2
57 x=(0:qLim)/qLim*fMuesw/2E3; % Eje de abcisas de 1+fMues/1000 puntos
58 figure('Color',[1,1,1]);
59 plot(x, 20*log10(H(qLim+1:end)), 'LineWidth', 5, 'Color', [0,0.5,0.5]);
60 hold on
61 % Plantilla de la especificación para la banda de paso
62 Xp=[0 Wp1 Wp1 Wp1 Wp2 Wp2 Wp2 1];
63 Yp1=[-alfa_p -alfa_p min_dBplot NaN NaN min_dBplot -alfa_p -alfa_p];
64 Yp2=[alfa_p alfa_p max_dBplot NaN NaN max_dBplot alfa_p alfa_p];
65 % Plantilla de la especificación para la banda de atenuación
66 Xs=[Ws1 Ws1 Ws2 Ws2];
67 Ys=[max_dBplot -alfa_s -alfa_s max_dBplot];
68 Xp=Xp*fMues/2E3; % Frecuencias en kHz
69 Xs=Xs*fMues/2E3; % Frecuencias en kHz
70 plot(Xp, Yp1, 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '--', 'Color',
[0.8,0.2,0.6]);

```

```

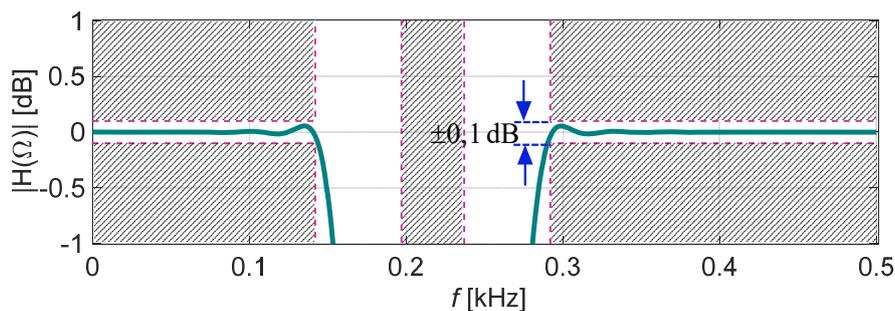
71 plot(Xp, Yp2, 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '--', 'Color',
72 [0.8,0.2,0.6]);
73 plot(Xs, Ys, 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '--', 'Color',
74 [0.8,0.2,0.6]);
75 grid on
76 ax1 = gca;
77 set(ax1, 'FontName','Arial', 'FontSize',26)
78 axis([0 fMues/2E3 min_dBplot max_dBplot])
79 xlabel('\it f \rm[kHz]', 'FontName','Arial', 'FontSize',26);
80 ylabel('|H(\Omega)| [dB]', 'FontName','Arial', 'FontSize',26);

```



**Fig. 11.31.**  $|H(\Omega)|$  resultante con ventana de von Hann para frecuencias positivas con el eje de abscisas tarado en kHz, empleando el código indicado.

La **Fig. 11.32** se obtuvo con las herramientas de visualización que ofrece Matlab para apreciar con mayor detalle el cumplimiento de la especificación para la banda de paso.



**Fig. 11.32.**  $|H(\Omega)|$  resultante con ventana de von Hann. Detalle de la banda de paso (obtenida mediante las herramientas de visualización de Matlab).

Se observa que  $|H(\Omega)|$  satisface los requisitos de la especificación, dado que la curva no ingresa a las regiones sombreadas. Por lo tanto, la secuencia  $h[n]$  obtenida en el paso 7 es adecuada para efectuar el filtrado requerido, sobre cualquier señal  $x(t)$  muestreada a una frecuencia de muestreo de 1 kHz.

#### 11.4. Filtros digitales recursivos o filtros IIR

La respuesta de un filtro recursivo, lineal e invariante al desplazamiento temporal, en el instante  $n \cdot T_S$  tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 y(n \cdot T_S) + a_1 \cdot y(n \cdot T_S - T_S) + a_2 \cdot y(n \cdot T_S - 2 \cdot T_S) + \dots + a_M \cdot y(n \cdot T_S - M \cdot T_S) = \\
 = b_0 \cdot x(n \cdot T_S) + b_1 \cdot x(n \cdot T_S - T_S) + b_2 \cdot x(n \cdot T_S - 2 \cdot T_S) + \dots + b_N \cdot x(n \cdot T_S - N \cdot T_S)
 \end{aligned}$$

Es decir:

$$y[n] + a_1 \cdot y[n-1] + \dots + a_M \cdot y[n-M] = b_0 \cdot x[n] + b_1 \cdot x[n-1] + \dots + b_N \cdot x[n-N]$$

Resultando:

$$y[n] = \sum_{k=0}^N b_k \cdot x[n-k] - \sum_{k=1}^M a_k \cdot y[n-k] \quad (11-81)$$

Si en la expresión (11-81) los coeficientes  $a_k$  con  $k=1, 2, \dots, M$  se hacen cero, resulta idéntica a la expresión (11-27), observación a partir de la cual se derivan dos conclusiones: por un lado, los filtros no recursivos pueden considerarse como un caso particular de los recursivos; y por otro, para que un filtro sea recursivo, al menos uno de los coeficientes  $a_k$  debe ser no nulo.

En los filtros recursivos, la secuencia de salida depende tanto de la entrada como de la salida. Para este tipo de filtros el *orden* del filtro se define como el mayor entre los números de muestras de retardo que posee su parte no recursiva y su parte recursiva, es decir es el máximo entre los valores  $M$  y  $N$ .

Aplicando la transformada  $z$  a la expresión (11-81) resulta:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^N b_k \cdot z^{-k} X(z) - \sum_{k=1}^M a_k \cdot z^{-k} Y(z) \tag{11-82}$$

Y en este caso, reagrupando términos y obteniendo la relación *salida a entrada* resulta la denominada función de transferencia del filtro recursivo:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k \cdot z^{-k}} \tag{11-83}$$

Por lo tanto, el resultado del diseño de los filtros IIR será la expresión de  $H(z)$  en potencias de  $z^{-1}$ , cuyos coeficientes son los mismos de la expresión (11-81), salvo por el cambio de signo. Por lo tanto, identificando los coeficientes de  $H(z^{-1})$  y aplicándolos en la expresión (11-81), se puede determinar la secuencia  $y[n]$  de salida del filtro ante una secuencia de entrada  $x[n]$ .

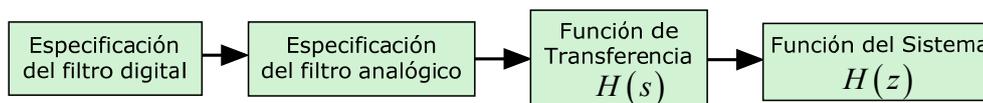
Del análisis de las expresiones (11-27) y (11-81) surgen los siguientes comentarios.

- La respuesta al impulso  $h[n]$  de los filtros recursivos es infinita, aún teniendo un número finito de coeficientes; de allí la denominación de respuesta al impulso infinita (IIR). En efecto, la respuesta al impulso es infinita debido a la recursividad o realimentación en el filtro; si la señal de entrada es un impulso (una sola muestra "1" seguida de muchas muestras "0"), en teoría, dará en la salida un número infinito de valores distintos de cero.
- Cualquier filtro recursivo puede ser reemplazado por otro no recursivo con infinitos coeficientes, sus valores vendrán dados por la respuesta al impulso del filtro IIR. La conclusión inversa no se cumple.
- La implementación de los filtros recursivos involucra una realimentación de la señal de salida, con lo cual podrían resultar inestables, es decir, la secuencia de salida podría resultar no acotada. La condición de estabilidad depende de la función de transferencia, y por lo tanto, se requiere efectuar un análisis de estabilidad. En cambio, los filtros FIR, al no involucrar realimentación, siempre resultan estables; o dicho de otro modo, la secuencia de salida tiene todos sus valores acotados.

### 11.5. Métodos de diseño de filtros IIR

La forma tradicional de diseño de filtros IIR consiste en emplear prototipos analógicos, adoptando las funciones de aproximación de filtros analógicos que ya se han estudiado (Capítulos 8 y 9) y simplemente transformarlas de manera que resulten utilizables para sistemas de tiempo discreto. Este método, denominado *método indirecto*, aprovecha en gran medida los desarrollos de la teoría del diseño de filtros y las tablas de coeficientes de las funciones de transferencia ya presentados.

El procedimiento se resume en la **Fig. 11.33**. La especificación de partida siempre se hará en el dominio discreto; se convierten a especificaciones de un filtro analógico pasa bajos prototipo y se determina la función de transferencia  $H(s)$  en el dominio de Laplace para el filtro analógico que satisfaga dichas especificaciones; finalmente se pasa al dominio del plano  $z$  mediante una transformación apropiada obteniendo la función del sistema  $H(z)$  del filtro digital.



**Fig. 11.33.** Diagrama de proceso del método indirecto.

Como se desprende de lo enunciado, el método indirecto requiere diseñar filtros analógicos como por ejemplo, filtros del tipo Butterworth y Chebyshev.

Aunque no existe un equivalente digital perfecto para un filtro analógico en todas las frecuencias, es posible lograr filtros digitales que coincidan estrechamente con las características importantes del filtro analógico equivalente.

Una vez encontrada la función  $H(s)$  a partir de las especificaciones, es necesario hacer una transformación del plano  $s$  al plano  $z$ . Existen diferentes métodos para transformar la función de transferencia  $H(s)$  del prototipo analógico a la función de transferencia  $H(z)$  del filtro digital. Los más conocidos son: el de la *respuesta al impulso invariante*, el de la *respuesta al escalón invariante* y la *transformación bilineal*. El resultado del diseño será la función  $H(z)$ , expresada en potencias de  $z^{-1}$ .

### 11.5.1. Estimación del orden de filtros IIR

Para el diseño de un filtro IIR pasa bajos basado en un filtro analógico pasa bajos, el orden del filtro digital  $H(z)$  depende del orden del filtro analógico  $H(s)$  en el que se basa. En efecto, el orden de  $H(z)$  queda determinado por la transformación de  $H(s)$  a  $H(z)$ .

El orden de  $H(s)$  depende de las especificaciones del filtro y del tipo de respuesta del filtro deseado, que puede ser Butterworth, Chebyshev, Bessel, Elíptico, etc.

### 11.5.2. Método de la respuesta al impulso invariante

Este método se basa en tomar como respuesta al impulso del filtro digital una versión muestreada de la respuesta al impulso del sistema de tiempo continuo empleando un período de muestreo  $T_S$ :

$$h[n] = k \cdot h(n \cdot T_S)$$

Donde  $k$  es un factor de escala constante. El valor de  $T_S$  es irrelevante cuando la especificación original se da en el dominio discreto. Además, no tiene por qué coincidir con el valor del período  $T_S$  que introduce el convertidor A/D.

Cuando se emplea la transformación de respuesta al impulso invariante para diseñar un sistema de tiempo discreto a partir de una especificación de su respuesta en frecuencia, es especialmente importante la relación entre las respuestas en frecuencia de los sistemas de tiempo continuo y discreto. Prescindiendo del solapamiento (suponiendo espectros limitados en banda muestreados a suficiente velocidad), las frecuencias de los sistemas de tiempo discreto y de tiempo continuo se relacionan de forma lineal según la expresión (11-84):

$$\Omega = \omega \cdot T_S \quad (11-84)$$

El primer problema surge porque no hay sistemas analógicos limitados en banda y el solapamiento será inevitable.

La función del sistema analógico  $H(s)$  es una función racional real, de la forma:

$$H(s) = \frac{\sum_{j=0}^n a_j \cdot s^j}{\sum_{k=0}^m b_k \cdot s^k} = \frac{\prod_{j=1}^m (s + \alpha_j)}{\prod_{k=1}^n (s + \beta_k)} \quad (11-85)$$

Si  $m < n$ , es decir si la fracción es propia, se puede desarrollar directamente en fracciones simples<sup>6</sup>:

$$H(s) = \sum_{k=1}^n \frac{K_k}{(s + \beta_k)} \quad (11-86)$$

Donde las constantes  $K_k$  son los residuos en cada polo  $s = -\beta_k$ :

$$K_k = (s + \beta_k) H(s) \Big|_{s = -\beta_k}$$

La respuesta al impulso del sistema causal de tiempo continuo resultante se obtiene calculando la Transformada Inversa de Laplace:

$$h(t) = \sum_{k=1}^n K_k \cdot e^{-\beta_k t} \cdot u(t) \quad (11-87)$$

La respuesta al impulso del sistema de tiempo discreto será la del sistema analógico muestreada a  $1/T_S$  muestras por segundo:

$$h[n] = h_a(n \cdot T_S) = \sum_{k=1}^n K_k \cdot e^{-\beta_k \cdot n T_S} \cdot u[n] \quad (11-88)$$

<sup>6</sup> En caso contrario habría que hacer un paso de división polinómica para expresarla como  $Ks + R(s)/D(s)$ , siendo  $Ks$  el cociente,  $R(s)$  el resto y  $D(s)$  el denominador de (11-85)

La función del sistema se obtiene calculando la Transformada Z de la respuesta al impulso  $h[n]$ :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] \cdot e^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n K_k \cdot \left( e^{-\beta_k T_s} \right)^n \cdot z^{-n} = \sum_{k=1}^n K_k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( e^{-\beta_k T_s} \cdot z^{-1} \right)^n$$

Es decir:

$$H(z) = \sum_{k=1}^n \frac{K_k}{\left( 1 - e^{-\beta_k T_s} \cdot z^{-1} \right)} \tag{11-89}$$

De las expresiones (11-86) y (11-89) se deduce que un polo en  $s = -\beta_k$  en el plano  $s$  se transforma en un polo en el plano  $z$  ubicado en  $z = e^{-\beta_k T_s}$  y los residuos correspondientes son iguales. Extendiendo esta transformación a todo el plano  $s$ , cada punto  $s_i = \pm\sigma_i \pm j\omega_i$  se transforma en un punto  $z_i = e^{\pm\sigma_i T_s} \cdot e^{\pm j\omega_i T_s}$  del plano  $z$ . Esta correspondencia indica que:

1. Los puntos del plano  $s$  ubicados en el eje imaginario ( $s = \pm j\omega$  ;  $\sigma = 0$ ) resultan en el plano  $z$  en el lugar geométrico:

$$z = e^{\pm j\omega T_s} = \cos(\omega T_s) \pm j \operatorname{sen}(\omega T_s)$$

Que es una circunferencia de radio unidad.

Pero esta correspondencia es uno a uno sólo para  $s = \pm j\omega$  con  $-\pi/T_s \leq \omega \leq \pi/T_s$ , debido a que  $e^{\pm j\omega T_s}$  tiene periodicidad  $2\pi/T_s$ . Es decir:

$$e^{\pm j\omega T_s} = \cos(\omega T_s) \pm j \operatorname{sen}(\omega T_s) = e^{\pm j(\omega T_s \pm 2k\pi)} = \cos(\omega T_s \pm 2k\pi) \pm j \operatorname{sen}(\omega T_s \pm 2k\pi)$$

2. Los puntos del plano  $s$  ubicados en el semiplano izquierdo resultan en el plano  $z$  en la región:

$$z = e^{(-\sigma \pm j\omega) T_s} = e^{-\sigma T_s} \cdot e^{\pm j\omega T_s} = e^{-\sigma T_s} \cdot \left[ \cos(\omega T_s) \pm j \operatorname{sen}(\omega T_s) \right]$$

Que es el círculo de radio unidad:  $\sigma = 0$  corresponde a la circunferencia y  $\sigma = -\infty$  corresponde al centro del círculo.

Pero esta correspondencia es uno a uno sólo para valores de la componente imaginaria  $\pm j\omega$  con  $-\pi/T_s \leq \omega \leq \pi/T_s$ , debido a la periodicidad  $2\pi/T_s$  de la exponencial  $e^{j\omega T_s}$ .

3. Los puntos del plano  $s$  ubicados en el semiplano derecho ( $s = +\sigma \pm j\omega$ ) resultan en el plano  $z$  en el lugar geométrico:

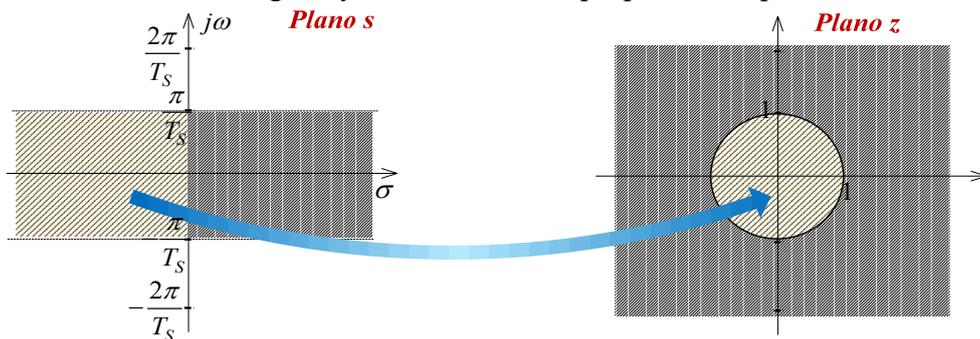
$$z = e^{(+\sigma \pm j\omega) T_s} = e^{+\sigma T_s} \cdot e^{\pm j\omega T_s} = e^{+\sigma T_s} \cdot \left[ \cos(\omega T_s) \pm j \operatorname{sen}(\omega T_s) \right]$$

Que es la región externa a la circunferencia de radio unidad.

La **Fig. 11.34** muestra la transformación del plano  $s$  en el plano  $z$ . Cada banda horizontal del plano  $s$  de ancho  $2\pi/T_s$  se transforma en todo el plano  $z$ . Por tanto, para que el filtro digital se corresponda exactamente con el analógico de partida es necesario que este último sea de banda limitada, es decir, que  $|H(j\omega)| = 0$  para  $|\omega| > \pi/T_s$ .

El filtro diseñado tendrá las siguientes características:

- Tiene el mismo número de polos que el prototipo analógico.
- La transformación de los polos  $s = -\beta_k$  en  $z = e^{-\beta_k T_s}$  garantiza el mantenimiento de la estabilidad en la transformación.
- Si el solapamiento es irrelevante, la respuesta en frecuencia es una versión plegada de la respuesta en frecuencia del filtro analógico, y se conservan las propiedades óptimas de este.



**Fig. 11.34.** Transformación de planos empleando la transformación de respuesta al impulso invariante.

En resumen:

- La respuesta al impulso del filtro discreto es idéntica a la del filtro analógico en los instantes  $t = n \cdot T_s$ .
- La frecuencia de muestreo afecta a la respuesta en frecuencia del filtro de respuesta al impulso invariante. Se requiere muestrear a una frecuencia muy alta para que el sistema discreto sea igual que el analógico.
- El método debe usarse para filtros pasa bajos con banda de transición muy reducida, y empleando una frecuencia de muestreo elevada. No puede emplearse para filtros pasa altos o filtros de supresión de banda, pues el solapamiento en estos es inevitable y presentarán una elevada distorsión por *aliasing*.

#### Ejemplo 11.5.

Supongase que se desea convertir la siguiente función de transferencia de tiempo continuo a una función de transferencia de tiempo discreto utilizando el método de transformación de la respuesta al impulso invariante:

$$H(s) = \frac{12}{(s+2)(s+5)}$$

#### Resolución:

El primer paso consiste en separar la expresión de  $H(s)$  en fracciones simples, de manera de obtener una expresión adecuada para aplicar la transformación inversa de Laplace:

$$H(s) = \frac{4}{(s+2)} - \frac{4}{(s+5)}$$

Que puede fácilmente antitransformarse como:

$$h(t) = (4e^{-2t} - 4e^{-5t}) \cdot u(t)$$

Si ahora se muestrea esta respuesta al impulso a intervalos  $T_s$  se obtendrá la respuesta al impulso discreta. Para ello simplemente se debe reemplazar en la expresión anterior  $t$  por  $n T_s$  para denotar la  $n$ -ésima muestra a intervalos de  $T_s$ .

$$h(n \cdot T_s) = [4e^{-2nT_s} - 4e^{-5nT_s}] \cdot u(n \cdot T_s)$$

Esta expresión puede reescribirse en una forma que indique más claramente la relación exponencial de  $n$ :

$$h(n \cdot T_s) = [4(e^{-2T_s})^n - 4(e^{-5T_s})^n] \cdot u(n \cdot T_s)$$

Y aplicando la transformada  $z$  se puede obtener:

$$H(z) = \frac{4}{1 - e^{-2T_s} \cdot z^{-1}} - \frac{4}{1 - e^{-5T_s} \cdot z^{-1}}$$

Y, finalmente, haciendo un denominador común se obtiene el resultado final, que puede simplificarse una vez que se adopta un valor del período de muestreo  $T_s$ :

$$H(z) = \frac{4 \cdot (e^{-2T_s} - e^{-5T_s}) \cdot z^{-1}}{(1 - e^{-2T_s} \cdot z^{-1})(1 - e^{-5T_s} \cdot z^{-1})}$$

El Ejemplo 11.5 indica claramente los pasos necesarios para transformar una función de transferencia analógica a una función de transferencia digital, y muestra la relación que existe entre  $H(s)$  y  $H(z)$ , lo cual permitiría omitir algunos pasos. Como se puede verificar en el ejemplo, por cada término en la función de transferencia analógica de la forma:

$$H(s) = \frac{K}{s+a} \tag{11-90}$$

aparece un término en la función de transferencia digital de la forma:

$$H(z) = \frac{K}{1 - e^{-\alpha T_s} \cdot z^{-1}} \quad (11-91)$$

Esta correspondencia también se puede aplicar a términos cuadráticos que tienen raíces complejas, donde cada factor simplemente se trata individualmente. Por ejemplo, si tenemos un término cuadrático de la forma:

$$H(s) = \frac{\beta}{(s + \alpha - j\beta) \cdot (s + \alpha + j\beta)} = \frac{K \cdot e^{j\theta}}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K \cdot e^{-j\theta}}{s + \alpha + j\beta} \quad (11-92)$$

el equivalente de tiempo discreto resultante podría escribirse y simplificarse procediendo como sigue:

$$H(z) = \frac{K \cdot e^{j\theta}}{1 - e^{-(\alpha - j\beta)T_s} \cdot z^{-1}} + \frac{K \cdot e^{-j\theta}}{1 - e^{-(\alpha + j\beta)T_s} \cdot z^{-1}} = \frac{K \cdot (e^{j\theta} + e^{-j\theta}) - K \cdot e^{-\alpha T_s} (e^{j(\beta T_s - \theta)} + e^{-j(\beta T_s - \theta)}) \cdot z^{-1}}{(1 - e^{-(\alpha - j\beta)T_s} \cdot z^{-1}) \cdot (1 - e^{-(\alpha + j\beta)T_s} \cdot z^{-1})}$$

Es decir:

$$H(z) = \frac{2 \cdot K \cdot \cos(\theta) - 2 \cdot K \cdot e^{-\alpha T_s} \cdot \cos(\beta T_s - \theta) \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot e^{-\alpha T_s} \cdot \cos(\beta T_s) \cdot z^{-1} + e^{-2\alpha T_s} \cdot z^{-2}} \quad (11-93)$$

### Ejemplo 11.6.

Diseñar un filtro digital aplicando el método de respuesta al impulso invariante para una función de aproximación de Butterworth de segundo orden, como la siguiente:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 1,4142 \cdot s + 1}$$

Analizar las diferencias que resultan de elegir períodos de muestreo de  $T_s = 1.0$  s y  $T_s = 0.1$  s.

### Resolución:

Obsérvese que  $H(s)$  está normalizada y, por lo tanto, el borde de la banda de paso está en la pulsación 1 rad/seg o en la frecuencia de  $(2\pi)^{-1}$  Hz.

Nuevamente, el primer paso consiste en separar la expresión de  $H(s)$  en fracciones simples:

$$H(s) = \frac{j0,7071}{s + 0,7071 - j0,7071} - \frac{j0,7071}{s + 0,7071 + j0,7071}$$

Entonces, la función de transferencia digital se puede obtener teniendo en cuenta que para este caso en (11-92) y (11-93) se debe considerar  $\theta = \pi/2$ :

$$H(z) = \frac{1,4142 \cdot e^{-0,7071 T_s} \cdot \sin(0,7071 \cdot T_s) \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot e^{-0,7071 T_s} \cdot \cos(0,7071 \cdot T_s) \cdot z^{-1} + e^{-1,4142 T_s} \cdot z^{-2}}$$

Y sustituyendo para los dos períodos de muestreo solicitados:

$$H(z) \Big|_{T_s=1} = \frac{0,453 \cdot z^{-1}}{1 - 0,74972 \cdot z^{-1} + 0,24312 \cdot z^{-2}}$$

$$H(z) \Big|_{T_s=0,1} = \frac{0,093096 \cdot z^{-1}}{1 - 1,85881 \cdot z^{-1} + 0,86812 \cdot z^{-2}}$$

Es interesante comparar las dos funciones de transferencia del Ejemplo 11.5. El detalle más evidente es que tanto las ganancias como las ubicaciones de los polos se modifican al cambiar el período (o la frecuencia) de muestreo. Pero además se puede obtener una indicación rápida de las magnitudes de estas funciones de transferencia determinando la respuesta a frecuencia cero que se calcula fácilmente haciendo  $z = e^{j0} = 1$ , con lo cual:

$$H(e^{j0}) \Big|_{T_s=1} = \frac{0,453}{0,4934} = 0,9181$$

$$H(e^{j0}) \Big|_{T_s=0,1} = \frac{9,3096 \cdot 10^{-2}}{9,31 \cdot 10^{-3}} = 9,9996$$

Con esta rápida evaluación se puede comprobar que la respuesta en frecuencia  $H(\Omega)$  para frecuencia cero parecería ser proporcional a  $1/T_s$ .

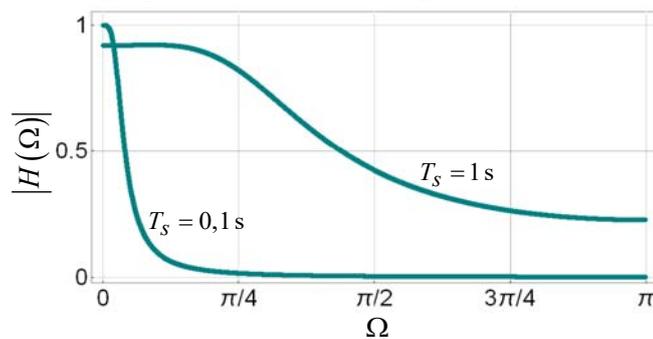
Si bien no sería rigurosa la generalización habiendo considerado solo dos valores de frecuencia de muestreo, resulta cierto que la magnitud es proporcional a  $1/T_s$ . Por esta razón, en la mayoría de los diseños que aplican el método de la respuesta al impulso invariante, a la función de transferencia se le aplica un factor de escala igual al período de muestreo. Como puede comprobarse, si se usara esa escala en el ejemplo anterior resultaría:

$$H(z) = \frac{T_s \cdot e^{-0,7071T_s} \cdot \text{sen}(0,7071 \cdot T_s) \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot e^{-0,7071T_s} \cdot \cos(0,7071 \cdot T_s) \cdot z^{-1} + e^{-1,4142T_s} \cdot z^{-2}}$$

y las respuestas a frecuencia cero estarían muy cerca de la unidad.

En la **Fig. 11.35** se muestran las magnitudes de la respuesta en frecuencia para ambos valores de  $T_s$ , empleando el factor de escala  $T_s$ . Las respuestas son notablemente diferentes, como cabría esperar, ya que las dos funciones de transferencia tienen diferentes ganancias y ubicaciones de polos. Es importante tener en cuenta que esta variación en la forma de la función de transferencia y de la respuesta en frecuencia se debe únicamente al valor del período de muestreo (o frecuencia de muestreo  $f_{Mues}=1/T_s$ ) adoptado.

Para comprender este comportamiento se debe recordar la relación entre las frecuencias analógicas y las digitales equivalentes, expresión (11-6), según la cual  $\Omega = \pm \pi$  corresponde a  $f = \pm f_{Mues}/2$ , según lo dictado por el criterio de Nyquist. Se puede hacer referencia a cada punto en el eje de frecuencia en términos de  $\Omega$ , que se extiende de 0 a  $\pi$ , o en términos de  $f$ , que se extiende de 0 a  $f_{Mues}/2$ .



**Fig. 11.35.** Método de la respuesta al impulso invariante Respuestas en frecuencia para  $T_s = 0,1$  s y  $T_s = 1$  s.

Ahora se comprenderá por qué las respuestas graficadas en la **Fig. 11.35** resultan tan diferentes. Aunque para ambas respuestas el eje de frecuencia normalizada se extiende de 0 a  $\pi$ , ese rango representa diferentes frecuencias analógicas para cada respuesta:

- En el caso de la respuesta para  $T_s = 1$  s ( $f_{Mues} = 1$  Hz), el rango de frecuencia analógica se extiende de 0 a 0,5 Hz, y el borde de la banda de paso correspondiente a la frecuencia de 0,159 Hz se encuentra aproximadamente a un tercio de la escala de abscisas.
- En el caso de la respuesta para  $T_s = 0,1$  s ( $f_{Mues} = 10$  Hz), el rango de frecuencia analógica resulta de 0 a 5 Hz. Por lo tanto, el borde de la banda de paso correspondiente a la frecuencia de 0,159 Hz se encuentra en un punto mucho más cercano al cero de la escala de abscisas.

Este ejemplo demuestra que para un diseño de respuesta al impulso invariante, es muy importante elegir cuidadosamente la frecuencia de muestreo. Se debe considerar el rango de frecuencia de la señal de entrada, así como la respuesta global deseada. En general, el método de diseño de respuesta al impulso invariante es bueno para aproximar respuestas en bajas frecuencias, es decir, puede aplicarse con buenos resultados a filtros pasa bajos y pasa banda, pero no es aplicable a filtros pasa altos y rechaza banda.

### Procedimiento de diseño

De acuerdo a lo expresado hasta aquí, se puede resumir un procedimiento de diseño enumerando la secuencia de pasos a seguir para diseñar filtros IIR basados en un prototipo analógico, aplicando el criterio de respuesta al impulso invariante.

1. Aplicar el procedimiento de diseño detallado en **9.4.3**, para la aproximación de Butterworth o de Chebyshev, según se requiera, hasta obtener la función de transferencia  $H(s)$  que satisfaga las especificaciones.

- Adoptar una frecuencia de muestreo  $f_{Mues}$  adecuada y calcular el período de muestreo  $T_S = 1/f_{Mues}$ .
- Desarrollar  $H(s)$  en fracciones simples para cada polo, resultando:

$$H(s) = \frac{b_N s^N + b_{N-1} s^{N-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_M s^M + a_{M-1} s^{M-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \sum_{k=1}^M \frac{K_k}{s + p_k}$$

Donde los factores  $K_k$  son constantes y el  $k$ -ésimo polo se encuentra ubicado en  $-p_k$  en el plano  $s$ .

- Reemplazar en el desarrollo de fracciones simples anterior el correspondiente denominador  $(s+p_k)$  de cada término por  $(1 - e^{-p_k T_S} z^{-1})$ . De manera que el desarrollo en fracciones simples de la transferencia analógica puede mapearse al plano  $z$  para obtener la transferencia digital, reemplazando cada término  $K_k/(s+p_k)$  por  $K_k/(1 - e^{-p_k T_S} z^{-1})$ .

- Obtener  $H(z)$  combinando todos los términos del desarrollo:  $H(z) = \sum_{k=1}^M \frac{K_k}{1 - e^{-p_k T_S} z^{-1}}$

Y expresarla en la forma de una relación de polinomios, llevándola a la forma más conocida dada por (11-83):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k \cdot z^{-k}}$$

- Multiplicar a la expresión anterior de  $H(z)$  por el período de muestreo  $T_S$  para lograr que la ganancia del filtro digital resulte igual a la ganancia del prototipo analógico.

$$H(z) = \frac{T_S \cdot \sum_{k=0}^N b_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k \cdot z^{-k}}$$

Tener presente que esto equivale a que cada coeficiente  $b_k$  esté multiplicado por  $T_S$ .

- Obtener, según (11-18),  $H_d(\Omega) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}}$  y representar  $|H_d(\Omega)|$  en dB para verificar que se cumplen las especificaciones.
- Obtener la expresión general en el dominio del tiempo del filtro. Esto puede hacerse por simple inspección, considerando (11-81) y (11-83), debiéndose observar el cambio de signo de los coeficientes  $a_k$  entre ambas expresiones:

$$y[n] = \sum_{k=0}^N T_S \cdot b_k \cdot x[n-k] - \sum_{k=1}^M a_k \cdot y[n-k]$$

### Ejemplo 11.7.

Aplicar el método de respuesta al impulso invariante empleando la aproximación de Butterworth, para diseñar un filtro pasa bajos que permita el paso de frecuencias inferiores a 6 kHz con una variación de amplitud que no supere los 3 dB y que para frecuencias superiores a 14 kHz atenúe como mínimo 20 dB. La frecuencia de muestreo es de 100 kHz.

### Resolución:

Dado que la respuesta al impulso del filtro digital es igual a la respuesta al impulso del filtro analógico equivalente, muestreada a  $f_{Mues} = 100$  kHz, es decir a  $T_S = 10 \cdot 10^{-6}$  s, el orden  $n$  del filtro se puede determinar tanto a partir de las especificaciones en el dominio analógico - considerando las especificaciones para  $H(s)$ - como en el dominio digital - considerando las especificaciones para  $H(\Omega)$ -.

Entonces adecuando las especificaciones a la notación empleada:

$$\alpha_p = 3 \text{ dB} \qquad \alpha_s = 20 \text{ dB} \qquad f_p = 6 \text{ kHz} \qquad f_s = 14 \text{ kHz}$$

Se aplicará el procedimiento de diseño que se termina de delinear.

1. Obtener la función de transferencia  $H(s)$  que satisfaga las especificaciones aplicando la aproximación de Butterworth.

Se determinan los parámetros de diseño  $\varepsilon$  y  $n$  del filtro analógico

$$10 \cdot \log[1 + \varepsilon^2] = \alpha_p \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \sqrt{10^{0,1 \cdot \alpha_p} - 1} = \sqrt{10^{0,1 \cdot 3} - 1} = 1$$

$$A(f_H) = 10 \log \left( 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{f_H}{f_B} \right)^{2n} \right) \geq \alpha_s \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{\log \left[ \frac{10^{0,1 \cdot \alpha_s} - 1}{\varepsilon^2} \right]}{2 \log \left( \frac{f_s}{f_p} \right)} = \frac{\log \left[ \frac{10^{0,1 \cdot 20} - 1}{10^{0,1 \cdot 3} - 1} \right]}{2 \log \left( \frac{14 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^3} \right)} = 2,72$$

Entonces resulta  $\varepsilon=1$  y  $n=3$ .

Ahora se puede escribir:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \omega^{2n}} \quad \Rightarrow \quad [H(s)]^2 = \frac{1}{1 - s^6}$$

Esta expresión, que se encuentra normalizada respecto de  $\omega_p = \omega_c = 2\pi \cdot 6 \cdot 10^3$  rad/s, tiene 6 ceros en el origen y seis polos con simetría cuadrantal ubicados sobre una circunferencia de radio 1:

$$s_i = \pm 1; \quad \pm \frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Entonces la  $[H(s)]^2$  desnormalizada que resulta:

$$[H(s)]^2 = \frac{\omega_c^6}{\omega_c^6 - s^6}$$

tendrá los 6 polos con la misma simetría cuadrantal, ubicados ahora sobre un círculo de radio  $\omega_c = 2\pi \cdot 6 \cdot 10^3$  rad/s, es decir:

$$s_i = \pm \omega_c; \quad \left( \pm \frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \omega_c$$

Esta expresión y en las que siguen, no se evalúan y se dejan expresadas de manera simbólica tanto  $\omega_c$  como  $T_s$ , porque se considera didáctico seguirles el rastro a lo largo del ejercicio, aunque en una resolución práctica no sea la mejor manera de hacerlo.

2. La frecuencia de muestreo a emplear en este caso forma parte de la especificación:

$$f_s = 100 \text{ kHz}; \quad T_s = 10^{-5} \text{ s}$$

3. Ahora puede escribirse  $H(s)$  con la mitad de los ceros en el origen y la mitad de los polos (la que se encuentra en el SPI):

$$H(s) = \frac{\omega_c^3}{(s + \omega_c) \left( s + \frac{\omega_c}{2} - j \frac{\sqrt{3} \cdot \omega_c}{2} \right) \left( s + \frac{\omega_c}{2} + j \frac{\sqrt{3} \cdot \omega_c}{2} \right)}$$

$$H(s) = \frac{K_1}{s + \omega_c} + \frac{K_2}{s + \frac{\omega_c}{2} - j \frac{\sqrt{3} \cdot \omega_c}{2}} + \frac{K_3}{s + \frac{\omega_c}{2} + j \frac{\sqrt{3} \cdot \omega_c}{2}}$$

Resultando:

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow -\omega_c} [(s + \omega_c) H(s)] = \frac{\omega_c^3}{\left( -\omega_c + \frac{\omega_c}{2} - j \frac{\sqrt{3} \cdot \omega_c}{2} \right) \left( -\omega_c + \frac{\omega_c}{2} + j \frac{\sqrt{3} \cdot \omega_c}{2} \right)} = \omega_c$$

$$K_2 = \lim_{s \rightarrow \frac{\omega_C + j\sqrt{3}\omega_C}{2}} \left[ \left( s + \frac{\omega_C}{2} - j\frac{\sqrt{3}\omega_C}{2} \right) H(s) \right] =$$

$$\frac{\omega_C^3}{\left( -\frac{\omega_C}{2} + j\frac{\sqrt{3}\omega_C}{2} + \omega_C \right) \left( -\frac{\omega_C}{2} + j\frac{\sqrt{3}\omega_C}{2} + \frac{\omega_C}{2} + j\frac{\sqrt{3}\omega_C}{2} \right)} = \frac{\omega_C}{\sqrt{3}} e^{-\frac{5}{6}\pi}$$

$$K_3 = \lim_{s \rightarrow \frac{\omega_C - j\sqrt{3}\omega_C}{2}} \left[ \left( s + \frac{\omega_C}{2} + j\frac{\sqrt{3}\omega_C}{2} \right) H(s) \right] =$$

$$\frac{\omega_C^3}{\left( -\frac{\omega_C}{2} - j\frac{\sqrt{3}\omega_C}{2} + \omega_C \right) \left( -\frac{\omega_C}{2} - j\frac{\sqrt{3}\omega_C}{2} + \frac{\omega_C}{2} - j\frac{\sqrt{3}\omega_C}{2} \right)} = \frac{\omega_C}{\sqrt{3}} e^{\frac{5}{6}\pi}$$

Entonces resulta:

$$H(s) = \frac{\omega_C}{s + \omega_C} + \frac{\frac{\omega_C}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{5}{6}\pi}}{s + \left( \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \omega_C} + \frac{\frac{\omega_C}{\sqrt{3}} e^{j\frac{5}{6}\pi}}{s + \left( \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \omega_C}$$

4. Teniendo en cuenta (11-91) y (11-92) la expresión equivalente de tiempo discreto resultante podría escribirse y simplificarse como:

$$H(z) = \frac{\omega_C}{1 - e^{-\omega_C T_s} \cdot z^{-1}} + \frac{\frac{\omega_C}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{5}{6}\pi}}{1 - e^{-\left( \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \omega_C T_s} \cdot z^{-1}} + \frac{\frac{\omega_C}{\sqrt{3}} e^{j\frac{5}{6}\pi}}{1 - e^{-\left( \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \omega_C T_s} \cdot z^{-1}}$$

5. Combinar todos los términos del desarrollo para llevarlo a la forma de una relación de polinomios:

$$H(z) = \frac{\omega_C}{1 - e^{-\omega_C T_s} \cdot z^{-1}} + \frac{\frac{2\omega_C}{\sqrt{3}} \cdot \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) - \frac{2\omega_C}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}\omega_C T_s} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_C T_s + \frac{5}{6}\pi\right) \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}\omega_C T_s} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_C T_s\right) \cdot z^{-1} + e^{-2\frac{1}{2}\omega_C T_s} \cdot z^{-2}}$$

6. Obtener el denominador común y escalar a  $T_s$ :

$$H(z) = \omega_C T_s \frac{1 - 2 \cdot e^{-\frac{\omega_C T_s}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_C T_s\right) \cdot z^{-1} + e^{-\omega_C T_s} \cdot z^{-2} + (1 - e^{-\omega_C T_s} \cdot z^{-1}) \left[ \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\omega_C T_s}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_C T_s + \frac{5}{6}\pi\right) \cdot z^{-1} \right]}{\left[ 1 - e^{-\omega_C T_s} \cdot z^{-1} \right] \left[ 1 - 2 \cdot e^{-\frac{\omega_C T_s}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_C T_s\right) \cdot z^{-1} + e^{-\omega_C T_s} \cdot z^{-2} \right]}$$

Para simplificar la revisión y llevarlo a la forma de una relación de polinomios como en (11-83), lo cual permitirá obtener los coeficientes de la expresión de la secuencia  $y[n]$  a la salida del filtro cuando a la entrada se aplica la secuencia  $x[n]$ , se adopta la siguiente notación:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + a_3 \cdot z^{-3}}$$

Siendo:

$$b_0 = \omega_C T_s \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) \right)$$

$$b_1 = -\omega_C T_s \cdot e^{-\frac{\omega_C T_s}{2}} \left[ 2 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_C T_s\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_C T_s + \frac{5}{6}\pi\right) + e^{-\frac{\omega_C T_s}{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) \right]$$

$$b_2 = \omega_c T_s \cdot e^{-\omega_c T_s} \cdot \left[ 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{\omega_c T_s}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \omega_c T_s + \frac{5}{6} \pi\right) \right]$$

$$a_1 = -\omega_c T_s \cdot e^{-\frac{\omega_c T_s}{2}} \left[ 2 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \omega_c T_s\right) + e^{-\frac{\omega_c T_s}{2}} \right]$$

$$a_2 = e^{-\omega_c T_s} \left[ 1 + e^{-\frac{\omega_c T_s}{2}} \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \omega_c T_s\right) \right]$$

$$a_3 = -\omega_c T_s \cdot e^{-2\omega_c T_s}$$

Ahora si se obtienen los valores numéricos para el filtro especificado, con unas pocas líneas de código de Matlab:

```

01 clc
02 close all
03 fc=6*1E3; % Frecuencia de corte de 3 dB [Hz]
04 wc=2*pi*fc; % Pulsación de corte de 3 dB [rad/s]
05 fsampling=1*1E5; % Frecuencia de muestreo [Hz]
06 Ts=1/fsampling; % Período de muestreo [s]
07 %% Trabajando en forma analítica
08 OhmC=wc*Ts;
09 fi=5/6*pi;
10 % Coeficientes del numerador de H(z-1)
11 b0=OhmC*(1+2/sqrt(3)*cos(fi));
12 b1=-OhmC*exp(-OhmC/2)*(2*cos(sqrt(3)/2*OhmC)+ ...
    2/sqrt(3)*cos(sqrt(3)/2*OhmC+fi)+ ...
    exp(-OhmC/2)*2/sqrt(3)*cos(fi));
13 b2=OhmC*exp(-OhmC)*(1+2/sqrt(3)*exp(-OhmC/2)*cos(sqrt(3)/2*OhmC+fi));
14 % Coeficientes del denominador de H(z-1)
15 a1=-exp(-OhmC/2)*(2*cos(sqrt(3)/2*OhmC)+exp(-OhmC/2));
16 a2=exp(-OhmC)*(1+exp(-OhmC/2)*2*cos(sqrt(3)/2*OhmC));
17 a3=-exp(-2*OhmC)

```

Resultando:

$$\begin{array}{lll}
 b_0 = 0 & b_1 = 0,0206672 & b_2 = 0,0160817 \\
 a_1 = -2,25483 & a_2 = 1,76207 & a_3 = -0,470489
 \end{array}$$

Hasta aquí se puede seguir en detalle la secuencia de pasos que deben efectuarse, pero si el filtro requerido tuviera un orden mayor, aumentaría enormemente la complejidad de la formulación simbólica empleada.

Sin embargo, una vez comprendido el procedimiento y habiendo tomado nota del rol de la pulsación  $\omega_c$  y del período de muestreo  $T_s$ , es bueno explotar las funciones disponibles en el paquete de DSP de Matlab, que permiten llegar a los mismos resultados obtenidos hasta aquí, con sólo dos líneas de código:

```

01 clc
02 close all
03 fc=6*1E3; % Frecuencia de corte de 3 dB [Hz]
04 wc=2*pi*fc; % Pulsación de corte de 3 dB [rad/s]
05 fsampling=1*1E5; % Frecuencia de muestreo [Hz]
06 Ts=1/fsampling; % Período de muestreo [s]
07 % Coeficientes de H(s) con la aproximación de Butterworth
08 [Ns,Ds]=butter(3,wc,'s'); % Orden 3 y wc (w de 3 dB)
09 % Coeficientes de H(z-1) para respuesta al impulso invariante
10 [Nz,Dz]=impinvar(Ns,Ds,fsampling);

```

Se pretende que este breve listado de código sea un incentivo para explorar en la ayuda de Matlab disponible en internet para conocer cómo aplicar otras posibilidades de aproximación: Chebyshev, Bessel, elíptico, etc.

7. Verificar el cumplimiento de las especificaciones graficando  $H_d(\Omega)=H(e^{j\Omega})$ , sabiendo que:  $\Omega = \omega T_s$  y por lo tanto  $\Omega_c = \omega_c T_s$

$$H(\Omega) = \frac{b_0 + b_1 \cdot e^{-j\Omega} + b_2 \cdot e^{-j2\Omega}}{1 + a_1 \cdot e^{-j\Omega} + a_2 \cdot e^{-j2\Omega} + a_3 \cdot e^{-j3\Omega}} = \frac{0,206672 \cdot e^{-j\Omega} + 0,0160817 \cdot e^{-j2\Omega}}{1 - 2,25483 \cdot e^{-j\Omega} + 1,76207 \cdot e^{-j2\Omega} - 0,470489 \cdot e^{-j3\Omega}}$$

En la Fig. 11.36 se muestra  $|H(\Omega)|$  en dB en función de  $\Omega$  en unidades de  $\pi$  en el eje de abscisas.

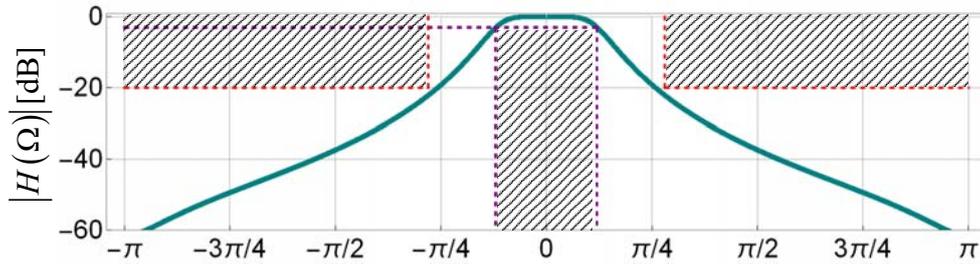


Fig. 11.36. Método de la respuesta al impulso invariante. Magnitud de la respuesta en frecuencia para el filtro pasa bajos especificado.

Con las siguientes líneas de código se evalúa  $|H(\Omega)|$  en veces y se realiza una gráfica con  $\Omega$  expresado en unidades de  $\pi$  en el eje de abscisas y se muestra en la Fig. 11.37.

```

11 %% Gráfica de la Magnitud de H(W) en veces
12 [H,W]=freqz(Nz,Dz,1000); % Obtener 1000 pares de valores de W y |H(W)|
13 figure('Color',[1,1,1]);
14 plot(W,abs(H), 'LineWidth', 5, 'Color', [0,0.5,0.5])
15 grid on
16 ax1 = gca;
17 set(ax1, 'FontName','Arial', 'FontSize',26)
18 axis([0,1, 0,1.02])
19 xlabel('\fontname{Times}\fontsize{26}\fontname{Arial} \Omega [veces \pi]');
20 ylabel('\fontname{Arial}\fontsize{26}|H| [veces]');

```

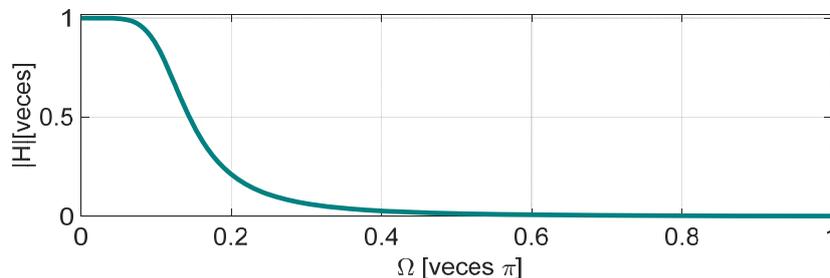


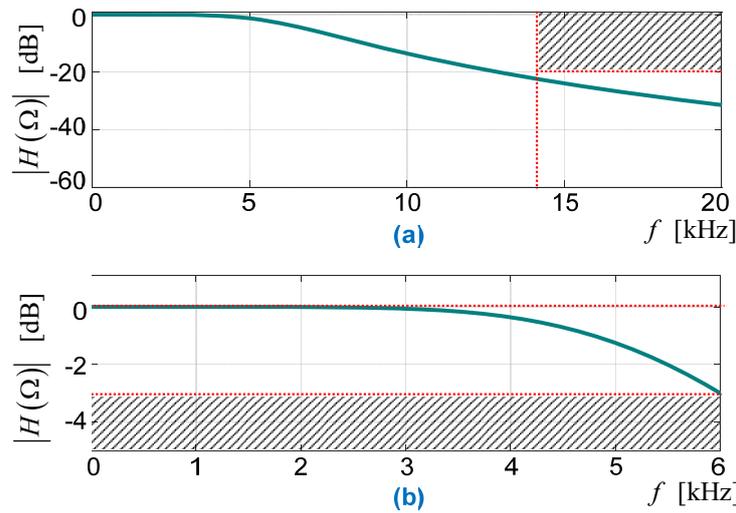
Fig. 11.37. Método de la respuesta al impulso invariante. Respuesta en frecuencia (en veces) para el filtro pasa bajos especificado.

Para verificar el cumplimiento de las atenuaciones especificadas en la banda de paso y en la banda de atenuación, se obtiene  $|H(\Omega)|$  en dB y se grafica seleccionando adecuadamente los límites de frecuencia, como se muestra en la Fig. 11.38 con el agregado con fines didácticos de otros detalles mediante herramientas de edición. El código Matlab para realizarla es el siguiente:

```

21 %% Gráfica de la Magnitud de H(W) en dB entre 0 y 20 kHz
22 figure('Color',[1,1,1]);
23 freq_kHz=w/(2*pi*1000); % magnitud a graficar en abscisas f [kHz]
24 T_dB=20*log10(abs(Tjw)); % magnitud en ordenadas |H(jw)| en dB
25 plot(freq_kHz, T_dB, 'LineWidth', 5, 'Color', [0,0.5,0.5])
26 grid on
27 ax2 = gca;
28 set(ax2, 'FontName','Arial', 'FontSize',26)
29 axis([0,10, -60,1])
30 xlabel('\fontname{Times}\fontsize{26}\it f \rm\fontname{Arial} [kHz]');
31 ylabel('\fontname{Arial}\fontsize{26}|H| [dB]');

```



**Fig. 11.38.** Método de la respuesta al impulso invariante. **(a)** Magnitud de la respuesta en frecuencia para el filtro pasa bajos especificado. **(b)** Detalle de la banda de paso

Se observa que  $|H(\Omega)|$  satisface los requisitos de la especificación, dado que la curva no ingresa a las regiones sombreadas.

- Obtener la expresión de la secuencia de salida  $y[n]$  a una señal de entrada  $x[n]$  aplicada al filtro. Puede escribirse por simple inspección de la expresión de  $H(z)$  obtenida, teniendo en cuenta (11-81) y (11-83) Procediendo de este modo:

$$y[n] + a_1 \cdot y[n-1] + a_2 \cdot y[n-2] + a_3 \cdot y[n-3] = b_0 \cdot x[n] + b_1 \cdot x[n-1] + b_2 \cdot x[n-2]$$

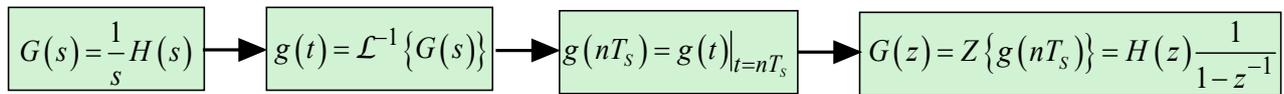
Es decir:

$$y[n] = b_0 \cdot x[n] + b_1 \cdot x[n-1] + b_2 \cdot x[n-2] - a_1 \cdot y[n-1] - a_2 \cdot y[n-2] - a_3 \cdot y[n-3]$$

$$y[n] = 0,0207 \cdot x[n-1] + 0,0161 \cdot x[n-2] + 2,2548 \cdot y[n-1] - 1,7621 \cdot y[n-2] + 0,4705 \cdot y[n-3]$$

### 11.5.3. Método de la respuesta al escalón invariante

Otro método para convertir una función de transferencia analógica al dominio digital es hacer coincidir la respuesta al escalón de ambos sistemas. El procedimiento de diseño de la respuesta al escalón invariante es muy similar al diseño de la respuesta al impulso invariante, excepto que en este caso se debe determinar la respuesta al escalón de la función de transferencia analógica antes de muestrearla y aplicarle la transformada Z. Sea  $G(s)$  la respuesta al escalón analógica, que se puede determinar simplemente multiplicando  $H(s)$  por la transformada de Laplace del escalón unitario ( $1/s$ ) aplicada a la entrada. La secuencia de pasos a dar, queda reflejada en la **Fig. 11.39**.



**Fig. 11.39.** Transformación basada en la la respuesta al escalón invariante.

Si se revisa el procedimiento se puede apreciar que los pasos principales son los mismos que para la transformación basada en la invarianza de la respuesta al impulso, excepto que se ha agregado un paso al principio y un paso al final. El nuevo paso inicial requiere que se divida la función de transferencia analógica por  $s$ , y el nuevo paso final requiere que se multiplique la función de transferencia digital por  $(1-z^{-1})$ .

En este caso también la función de mapeo entre los dominios de  $s$  y  $z$  es  $z=e^{sT_s}$  siendo  $T_s$  el período de muestreo. Por lo tanto esta función de mapeo no es uno a uno y puede producir distorsión por *aliasing*, razón por la cual es menos utilizada.

#### Ejemplo 11.8.

Supongase que se desea convertir la función de transferencia de tiempo continuo del Ejemplo 11.4. a una función de transferencia de tiempo discreto, pero en este caso utilizando el método de transformación de la respuesta al escalón invariante:

$$H(s) = \frac{12}{(s+2)(s+5)}$$

### Resolución:

El primer paso consiste en determinar la respuesta del sistema a una entrada escalón unitario, multiplicando a  $H(s)$  por la transformada de Laplace del escalón unitario  $1/s$ , y desarrollando este producto en fracciones simples, de manera de obtener una expresión adecuada para aplicar la transformación inversa de Laplace:

$$G(s) = H(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{12}{s(s+2)(s+5)} = \frac{1,2}{s} - \frac{2}{s+2} + \frac{0,8}{s+5}$$

Que puede fácilmente antitransformarse para determinar la respuesta al escalón unitario en el dominio del tiempo:

$$g(t) = (1,2 - 2e^{-2t} + 0,8e^{-5t}) \cdot u(t)$$

Ahora muestreando esta respuesta a intervalos de  $T_s$  resulta la siguiente respuesta de tiempo discreto:

$$g(n \cdot T_s) = (1,2 - 2e^{-2nT_s} + 0,8e^{-5nT_s}) \cdot u(n \cdot T_s)$$

Efectuando la transformada  $z$  se obtiene:

$$G(z) = \frac{1,2}{1-z^{-1}} - \frac{2}{1-e^{-2T_s} \cdot z^{-1}} + \frac{0,8}{1-e^{-5T_s} \cdot z^{-1}}$$

Y hallando común denominador se obtiene:

$$G(z) = \frac{(1,2 - 2 \cdot e^{-2T_s} + 0,8 \cdot e^{-5T_s}) \cdot z^{-1} + (0,8 \cdot e^{-2T_s} - 2 \cdot e^{-5T_s} + 1,2 \cdot e^{-7T_s}) \cdot z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-e^{-2T_s} \cdot z^{-1})(1-e^{-5T_s} \cdot z^{-1})}$$

donde  $G(z)$  representa la salida del sistema para una entrada igual al escalón unitario. Para determinar la función de transferencia del sistema, se debe eliminar el efecto de la entrada  $u(t)$ :  $1/(1-z^{-1})$ , es decir:

$$H(z) = \frac{(1,2 - 2 \cdot e^{-2T_s} + 0,8 \cdot e^{-5T_s}) \cdot z^{-1} + (0,8 \cdot e^{-2T_s} - 2 \cdot e^{-5T_s} + 1,2 \cdot e^{-7T_s}) \cdot z^{-2}}{(1-e^{-2T_s} \cdot z^{-1})(1-e^{-5T_s} \cdot z^{-1})}$$

Si bien este resultado parece muy complicado, se debe tener en cuenta que todos los términos exponenciales se convertirán en constantes una vez que se seleccione el período de muestreo  $T_s$ .

### Ejemplo 11.9.

Diseñar un filtro digital aplicando el método de respuesta al escalón invariante para una función de aproximación de Butterworth de segundo orden, como la siguiente:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 1,4142 \cdot s + 1}$$

Analizar las diferencias que resultan de elegir períodos de muestreo de  $T_s = 1.0$  s y  $T_s = 0.1$  s.

### Resolución:

Obsérvese que  $H(s)$  está normalizada y, por lo tanto, el borde de la banda de paso está en la pulsación 1 rad/seg o en la frecuencia de  $(2\pi)^{-1}$  Hz.

Nuevamente, primero se determina la salida del sistema analógico a una función escalón unitario de entrada y luego se desarrolla la expresión en fracciones parciales:

$$G(s) = \frac{1}{s} - \frac{0,5 + j0,5}{s + 0,7071 + j0,7071} - \frac{0,5 - j0,5}{s + 0,7071 - j0,7071}$$

La respuesta al escalón resulta haciendo la antitransformada de Laplace:

$$g(t) = 1 - (0,5 + j0,5) \cdot e^{-(0,7071 + j0,7071)t} - (0,5 - j0,5) \cdot e^{-(0,7071 - j0,7071)t}$$

Luego, muestreando a intervalos de  $T_s$ , se determina la respuesta al escalón para tiempo discreto:

$$g(n \cdot T_s) = 1 - (0,5 + j0,5) \cdot e^{-(0,7071 + j0,7071)nT_s} - (0,5 - j0,5) \cdot e^{-(0,7071 - j0,7071)nT_s}$$

La respuesta de tiempo discreto a la entrada al escalón se puede determinar utilizando la transformación  $z$ :

$$G(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{0,5+j0,5}{1-e^{-(0,7071+j0,7071)T_s} \cdot z^{-1}} - \frac{0,5-j0,5}{1-e^{-(0,7071-j0,7071)T_s} \cdot z^{-1}}$$

Hallando denominador común y realizando una cantidad considerable de álgebra compleja, se obtiene la respuesta del sistema a una entrada escalón unitario:

$$G(z) = \frac{z^{-1} + e^{-0,7071T_s} \cdot [\text{sen}(0,7071 \cdot T_s) - \cos(0,7071 \cdot T_s)] \cdot z^{-1}}{(1-z^{-1}) \left[ 1 - 2 \cdot e^{-0,7071T_s} \cdot \cos(0,7071 \cdot T_s) \cdot z^{-1} + e^{-1,4142T_s} \cdot z^{-2} \right]} + \frac{e^{-1,4142T_s} \cdot z^{-2} - e^{-0,7071T_s} \cdot [\text{sen}(0,7071 \cdot T_s) + \cos(0,7071 \cdot T_s)] \cdot z^{-2}}{(1-z^{-1}) \left[ 1 - 2 \cdot e^{-0,7071T_s} \cdot \cos(0,7071 \cdot T_s) \cdot z^{-1} + e^{-1,4142T_s} \cdot z^{-2} \right]}$$

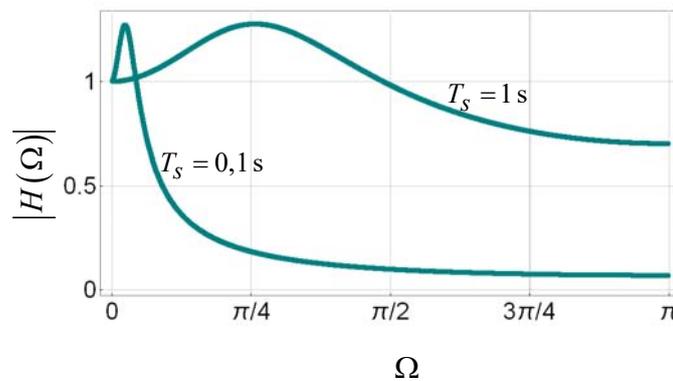
La función de transferencia de tiempo discreto  $H(z)$  se puede determinar ahora eliminando el factor  $(1-z^{-1})$  que es el que corresponde al escalón unitario de entrada:

$$H(z) = \frac{z^{-1} + e^{-0,7071T_s} \cdot [\text{sen}(0,7071 \cdot T_s) - \cos(0,7071 \cdot T_s)] \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot e^{-0,7071T_s} \cdot \cos(0,7071 \cdot T_s) \cdot z^{-1} + e^{-1,4142T_s} \cdot z^{-2}} + \frac{e^{-1,4142T_s} \cdot z^{-2} - e^{-0,7071T_s} \cdot [\text{sen}(0,7071 \cdot T_s) + \cos(0,7071 \cdot T_s)] \cdot z^{-2}}{1 - 2 \cdot e^{-0,7071T_s} \cdot \cos(0,7071 \cdot T_s) \cdot z^{-1} + e^{-1,4142T_s} \cdot z^{-2}}$$

Sustituyendo con los diferentes períodos de muestreo se obtienen los dos distintas funciones de transferencia:

$$H(z) \Big|_{T_s=1} = \frac{0,94546 \cdot z^{-1} - 0,45205 \cdot z^{-2}}{1 - 0,74972 \cdot z^{-1} + 0,24312 \cdot z^{-2}} \quad H(z) \Big|_{T_s=0,1} = \frac{0,136424 \cdot z^{-1} - 0,127107 \cdot z^{-2}}{1 - 1,85881 \cdot z^{-1} + 0,86812 \cdot z^{-2}}$$

Nótese que las ubicaciones de los polos son las mismas que para el diseño de la respuesta al impulso invariante, pero las ubicaciones de los ceros han cambiado. Las respuestas en frecuencia correspondientes a estos dos filtros de tiempo discreto se muestran en la **Fig. 11.40**.



**Fig. 11.40.** Método de la respuesta al escalón invariante. Respuestas en frecuencia para  $T_s = 0,1$  s y  $T_s = 1$  s.

Si bien entre las dos implementaciones hay una diferencia significativa, puede comprobarse que las diferencias residen en que, si se desnormalizara el eje de frecuencias, cada curva tendría escalas diferentes.

En el método de diseño de la respuesta al escalón invariante, no hay necesidad de escalar la magnitud como fue el caso del método de diseño de la respuesta al impulso invariante. Al comparar esta respuesta en frecuencia con la de **Fig. 11.35**, se encuentra una diferencia significativa, causada por los diferentes criterios aplicados en cada caso. En la sección anterior, se hizo hincapié en hacer coincidir un impulso como señal de entrada, mientras que en esta sección el objetivo era hacer coincidir un escalón como señal de entrada. Como se indica en las figuras, los diferentes criterios producen filtros con respuestas en frecuencia bastante diferentes. Como en la sección anterior, este método de diseño de filtro IIR puede aplicarse con buenos resultados a filtros pasa bajos y pasa banda, pero no es aplicable a filtros pasa altos y rechaza banda.

#### 11.5.4. Transformación bilineal

Los métodos de diseño de respuesta al impulso invariante y respuesta al escalón invariante proporcionan buenas aproximaciones para las respuestas de filtros analógicos pasa bajos y algunos pasa banda. Sin

embargo, no pueden proporcionar una buena correspondencia de las respuestas de alta frecuencia, lo que hace que sea imposible usarlas para el diseño de filtros pasa altos o rechaza banda. De hecho, no resultan ser los mejores métodos para hacer coincidir las respuestas del filtro analógico cuando se requiere una buena coincidencia en un amplio rango de frecuencias. Además, sin una selección cuidadosa de la frecuencia de muestreo y una limitación de banda estricta de la señal de entrada, puede producirse distorsión por *aliasing*.

La transformación bilineal intenta hacer una coincidencia razonable en todo el rango de frecuencia del filtro, entre la respuesta en frecuencia de la función de transferencia analógica prototipo y la función de transferencia del filtro digital. Por supuesto, ello supone un desafío ya que el rango de frecuencias analógicas se extiende desde cero hasta el infinito y el rango de frecuencias digitales (normalizadas) se extiende solo desde cero hasta  $\pi$ . Es la transformación más utilizada y consiste en considerar la siguiente función de mapeo entre los dominios de  $s$  y  $z$ :

$$s = \frac{2}{T_s} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) = \frac{2}{T_s} \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) \quad z = \frac{1 + \frac{T_s}{2}s}{1 - \frac{T_s}{2}s} \tag{11-94}$$

Para comprender mejor esta relación conviene representar la variable compleja  $z$  en forma exponencial:  $z = R e^{j\Omega}$ , con lo cual:

$$s = \frac{2}{T_s} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) = \frac{2}{T_s} \left( \frac{R \cdot e^{j\Omega} - 1}{R \cdot e^{j\Omega} + 1} \right) = \frac{2}{T_s} \left( \frac{R \cdot \cos \Omega - 1 + j R \cdot \text{sen} \Omega}{R \cdot \cos \Omega + 1 + j R \cdot \text{sen} \Omega} \right)$$

$$s = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{(R \cdot \cos \Omega - 1) + j R \cdot \text{sen} \Omega}{(R \cdot \cos \Omega + 1) + j R \cdot \text{sen} \Omega} \cdot \frac{(R \cdot \cos \Omega + 1) - j R \cdot \text{sen} \Omega}{(R \cdot \cos \Omega + 1) - j R \cdot \text{sen} \Omega}$$

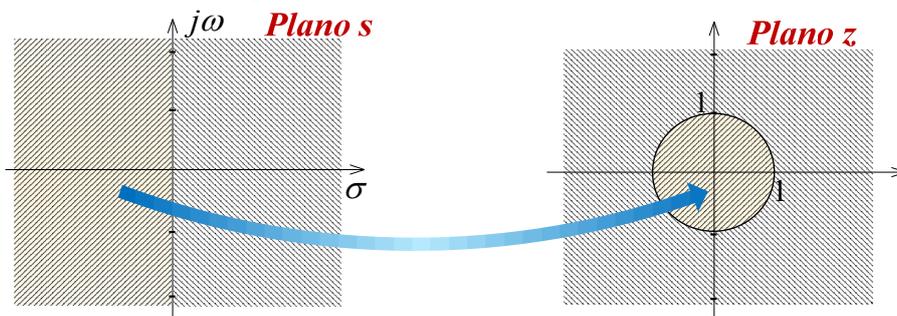
Es decir:

$$s = \frac{2}{T_s} (\sigma + j\omega) = \frac{2}{T_s} \cdot \left( \frac{R^2 - 1}{R^2 + 2R \cdot \cos \Omega + 1} + j \frac{2R \cdot \text{sen} \Omega}{R^2 + 2R \cdot \cos \Omega + 1} \right) \tag{11-95}$$

Al referirnos a (11-95) y observando el plano  $s$  y el plano  $z$  se puede comprobar que hay tres regiones distintas en el dominio  $s$  que se relacionan con tres regiones distintas en el dominio  $z$ :

- 1) cada punto en el dominio  $z$  que se encuentre fuera del círculo unitario ( $R > 1$ ) está asociado con un punto en el semiplano derecho (SPD) del plano  $s$  ( $\sigma > 0$ ).
- 2) cada punto en el dominio  $z$  ubicado en el interior del círculo unitario ( $R < 1$ ) está asociado con un punto en el semiplano izquierdo (SPI) del dominio  $s$  ( $\sigma < 0$ ).
- 3) cada punto sobre el círculo unitario ( $R = 1$ ) está asociado con un punto en el plano  $s$  que se encuentra en el eje  $j\omega$  ( $\sigma = 0$ ). De hecho, en este último caso, el semieje positivo  $j\omega$  se relaciona con la mitad superior del círculo unitario a medida que el ángulo varía entre 0 y  $\pi$ , mientras que el semieje negativo  $-j\omega$  se relaciona con la mitad inferior del círculo unitario con ángulos de 0 a  $-\pi$ .

Por lo tanto, ésta es una transformación uno a uno del plano  $s$  al plano  $z$  y viceversa, lo cual la hace de una gran utilidad en el diseño de filtros digitales. El resultado de la transformación se muestra en la **Fig. 11.41**.



**Fig. 11.41.** Transformación de planos empleando la transformación bilineal.

De esta manera toda función racional en  $s$  se transforma en una función racional en  $z$ . Esto implica que para todo filtro continuo representado por una función racional existe un filtro digital representado también por una función racional y viceversa.

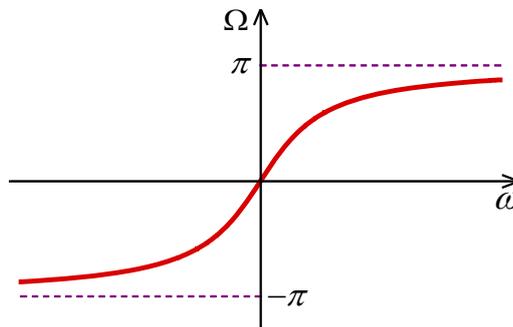
Es decir, existe una relación uno a uno entre el eje positivo  $j\omega$  y la parte superior del círculo unitario, lo cual determina la ausencia de distorsión por solapamiento o aliasing y representa la principal ventaja de la transformación bilineal. Pero dicha relación es no lineal. En efecto, de (11-95) cuando  $R=1$  y  $\sigma = 0$  resulta:

$$\omega = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{\text{sen } \Omega}{1 + \cos \Omega} = \frac{2}{T_s} \cdot \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right) \tag{11-96}$$

O viceversa, para la variable frecuencia del dominio  $z$ :

$$\Omega = 2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) \tag{11-97}$$

Las ecuaciones (11-96) y (11-97) son importantes para el proceso de transformación bilineal porque son necesarias para efectuar el mapeo adecuado entre los dominios analógico (plano  $s$ ) y digital (plano  $z$ ). Esta asignación de frecuencias analógicas a frecuencias digitales es bastante lineal para frecuencias bajas, pero se aleja mucho de la linealidad a medida que se consideran frecuencias más altas, tal como se puede apreciar en la **Fig. 11.42** que muestra la gráfica de la expresión (11-97).

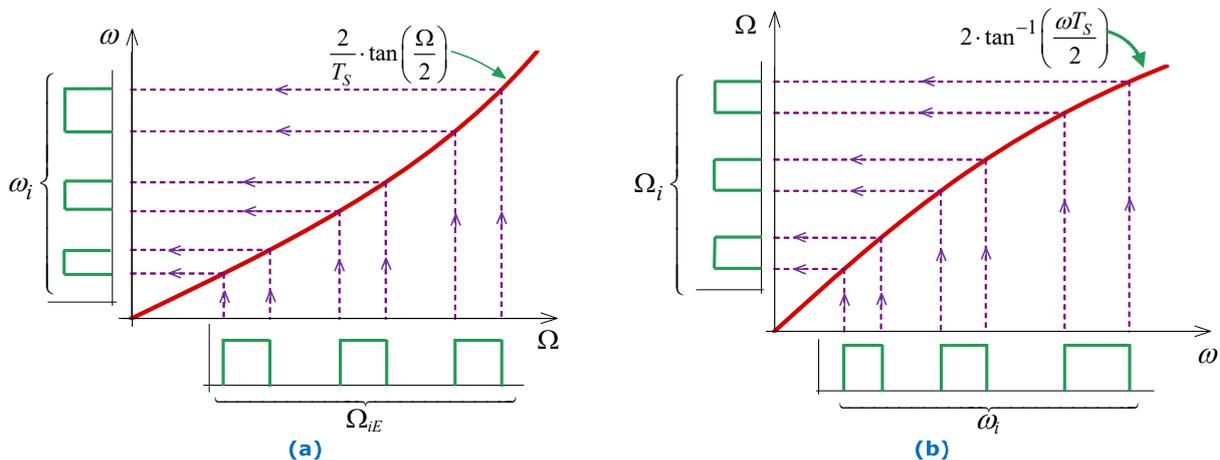


**Fig. 11.42.** Transformación del eje de frecuencias de tiempo continuo en la circunferencia de radio unidad

Este mapeo de frecuencias origina lo que suele denominarse *deformación* o *distorsión* de frecuencia (*warping*, en inglés) para describir cómo las frecuencias más altas se deforman o distorsionan para ubicarse sobre el círculo unitario. La razón por la que esta deformación es tan importante es porque las características de frecuencia del filtro digital se especifican por las frecuencias digitales  $\Omega_{iE}$ , pero el filtro se sintetizará a partir de una función de transferencia de filtro analógico. Por lo tanto, es necesario determinar adecuadamente las frecuencias analógicas  $\omega_i$  que se utilizarán en el diseño analógico *predeformando* mediante (11-96) las frecuencias digitales especificadas  $\Omega_{iE}$  como se muestra en la **Fig. 11.43a**.

Seguidamente se procede a diseñar el prototipo analógico  $H(s)$  usando las frecuencias críticas  $\omega_i$  predeformadas, para luego aplicar a  $H(s)$  la transformación bilineal (11-97) obteniéndose la función de transferencia del filtro digital  $H(z)$ . De este modo, como se infiere de la **Fig. 11.43b** los bordes  $\Omega_i$  de la banda de paso del filtro digital obtenido coincidirán con los valores especificados  $\Omega_{iE}$ .

Entonces, empleando la transformación bilineal por un lado se consigue suprimir la distorsión por solapamiento o aliasing, pero por otro lado se requiere un procesamiento mayor debido a la necesidad de compensar la alinealidad.



**Fig. 11.43.** Efecto de la no linealidad en la aplicación de la transformación bilineal.

### 11.5.5. Incidencia de la predeformación en el orden del filtro

Las relaciones para estimar el orden requerido del filtro que se obtuvieron en 7.6.3 y en 7.7.3 siguen siendo válidas, si en lugar de las frecuencias originales de borde de banda de paso y banda de atenuación, se emplean las correspondientes frecuencias predeformadas obtenidas mediante (11-96).

En estos casos de filtros con una única banda de transición, cuanto más cerca esté la banda de transición de la frecuencia de Nyquist, mayor será la deformación de la banda de transición y consecuentemente la reducción del orden de filtro será más apreciable.

En cambio, en el caso de los filtros con dos ó más bandas de transición como los filtros pasa banda y suprime banda, la banda de transición más cercana al origen resultará más comprimida (transición más abrupta) que la más cercana a la frecuencia de Nyquist. Por lo tanto, si el orden del filtro se determina considerando la especificación de la banda de transición más cercana a la frecuencia de Nyquist, podría ser que no se cumpla la especificación para la banda de transición más cercana al origen.

#### Filtro pasa banda

Dado que la especificación o esquema de tolerancia corresponde al dominio digital, un filtro IIR pasa banda deberá cumplir con lo siguiente:

- En la banda de paso, para  $f_{p1}$  y  $f_{p2}$   $|H(\Omega)|$  debe ser a lo sumo  $\alpha_p$  dB inferior al valor correspondiente a  $f_0$  que es la frecuencia central de la banda de paso.
- En la banda de supresión, para  $f_{s1}$  y  $f_{s2}$   $|H(\Omega)|$  debe ser por lo menos  $\alpha_s$  dB inferior al valor correspondiente a  $f_0$ .

Se considera necesario destacar que  $f_{p1}, f_{p2}, f_{s1}, f_{s2}$  y  $f_0$  corresponden al dominio digital y, por lo tanto, aquí no se impone la relación válida para el dominio analógico  $f_0^2 = f_{p1} f_{p2} = f_{s1} f_{s2}$ .

Si bien pueden existir diferentes criterios para satisfacer las condiciones de diseño, lo habitual es adoptar la frecuencia central  $f_0$  de la banda de paso en el dominio digital como:

$$f_0 = (f_{p1} + f_{p2}) / 2 \quad (11-98)$$

Las respectivas frecuencias normalizadas resultan:

$$\Omega_{p1} = 2\pi \frac{f_{p1}}{f_{Mues}} \quad \Omega_{p2} = 2\pi \frac{f_{p2}}{f_{Mues}} \quad \Omega_{s1} = 2\pi \frac{f_{s1}}{f_{Mues}} \quad \Omega_{s2} = 2\pi \frac{f_{s2}}{f_{Mues}} \quad \Omega_0 = 2\pi \frac{f_0}{f_{Mues}} \quad (11-99)$$

Siendo  $f_{Mues}$  la frecuencia de muestreo, y además  $\Omega_{s1} < \Omega_{p1} < \Omega_0 < \Omega_{p2} < \Omega_{s2}$ .

Cuando se aplica la predeformación mediante la expresión (11-96):

$$\omega_{kd} = 2f_{Mues} \cdot \tan\left(\frac{\Omega_k}{2}\right)$$

tal como lo sugiere la Fig. 11.43a resultará, en el dominio analógico,  $\omega_{s1d} < \omega_{p1d} < \omega_{0d} < \omega_{p2d} < \omega_{s2d}$  y lo que resulta muy importante, es que  $\omega_{0d}$  se obtiene predeformando  $\Omega_0$  y no de la relación  $\omega_{0d}^2 = \omega_{p1d} \omega_{p2d}$ .

Entonces, cuando se aplica a cada frecuencia  $\omega_{kd}$  la transformación pasa banda a pasa bajos conservando el ancho de banda dada por (8-5), según la conclusión a la que se arribó en 0 y en el inciso (a) del Ejemplo 8.2, resultará:

$$\overline{\omega_p} = \Delta\omega_{pd} = \omega_{p2d} - \omega_{p1d} \quad (11-100)$$

$$\overline{\omega_s} = \Delta\omega_{sd} = \omega_{s2d} - \omega_{s1d} \quad (11-101)$$

Ya en el dominio del pasa bajos, al determinar el orden del filtro mediante (7-28) para la aproximación de Butterworth, que adecuando la notación resulta:

$$n \geq \frac{\log\left[\frac{10^{0,1\alpha_p} - 1}{10^{0,1\alpha_s} - 1}\right]}{2 \log\left(\frac{\overline{\omega_s}}{\overline{\omega_p}}\right)} \quad (11-102)$$

O mediante (7-53) para la aproximación de Chebyshev, que adecuando la notación resulta:

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{0,1\alpha_p} - 1}{10^{0,1\alpha_s} - 1}}}{\cosh^{-1} \left( \frac{\overline{\omega_s}}{\omega_p} \right)} \quad (11-103)$$

Por lo tanto, el orden  $n$  resulta disminuido porque al resultar  $\omega_{s2d}$  tan notablemente deformada, según (11-101) resulta  $\overline{\omega_s}$  sensiblemente mayor que el valor de un filtro analógico sin deformación.

Pero es muy probable que ese valor de  $n$  no satisfaga la especificación de  $\alpha_s$  en  $\omega_{s1d}$ .

La importante deformación de  $\omega_{s2d}$  causa que  $\omega_{0d}^2 \neq \omega_{s1d} \omega_{s2d}$ . Entonces una forma de salvar este inconveniente es considerar:

$$\omega_{0d}^2 = \omega_{s1d} \cdot \omega'_{s2d} \Rightarrow \omega'_{s2d} = \frac{\omega_{0d}^2}{\omega_{s1d}} \quad (11-104)$$

Y determinar  $\overline{\omega_s}$  como:

$$\overline{\omega_s} = \omega'_{s2d} - \omega_{s1d} = \frac{\omega_{0d}^2}{\omega_{s1d}} - \omega_{s1d} = \frac{\omega_{0d}^2 - \omega_{s1d}^2}{\omega_{s1d}} \quad (11-105)$$

Con lo cual,  $\overline{\omega_s}$  se estaría determinando adoptando como referencia la frecuencia más cercana al origen. Entonces el orden corregido del filtro pasa banda para la aproximación de Butterworth, resulta reemplazando (11-100) y (11-105) en (11-102):

$$n \geq \frac{\log \left[ \frac{10^{0,1\alpha_p} - 1}{10^{0,1\alpha_s} - 1} \right]}{2 \log \left( \frac{\omega_{0d}^2 - \omega_{s1d}^2}{\omega_{s1d} (\omega_{p2d} - \omega_{p1d})} \right)} \quad (11-106)$$

y el orden corregido para el filtro pasa banda empleando la aproximación de Chebyshev, resulta reemplazando (11-100) y (11-105) en (11-103):

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{0,1\alpha_p} - 1}{10^{0,1\alpha_s} - 1}}}{\cosh^{-1} \left( \frac{\omega_{0d}^2 - \omega_{s1d}^2}{\omega_{s1d} (\omega_{p2d} - \omega_{p1d})} \right)} \quad (11-107)$$

### Filtro supresor de banda

Efectuando una consideración enteramente similar para un filtro IIR supresor de banda cuya especificación o esquema de tolerancia en el dominio digital sería:

- En la banda de paso, para  $f_{p1}$  y  $f_{p2}$   $|H(\Omega)|$  debe ser a lo sumo  $\alpha_p$  dB inferior al valor correspondiente a  $f=0$  y  $f \rightarrow \infty$ .
- En la banda de supresión, para  $f_{s1}$  y  $f_{s2}$   $|H(\Omega)|$  debe ser por lo menos  $\alpha_s$  dB inferior al valor correspondiente a  $f_0$ .

Nuevamente  $f_{p1}, f_{p2}, f_{s1}, f_{s2}$  y  $f_0$  corresponden al dominio digital y, por lo tanto, aquí tampoco se impone la relación válida para el dominio analógico  $f_0^2 = f_{p1} f_{p2} = f_{s1} f_{s2}$ .

Si bien pueden existir diferentes criterios para satisfacer las condiciones de diseño, lo habitual es adoptar la frecuencia central  $f_0$  de la banda de paso en el dominio digital como:

$$f_0 = \frac{1}{2} (f_{s1} + f_{s2}) \quad (11-108)$$

Las respectivas frecuencias normalizadas resultan:

$$\Omega_{p1} = 2\pi \frac{f_{p1}}{f_{Mues}} \quad \Omega_{p2} = 2\pi \frac{f_{p2}}{f_{Mues}} \quad \Omega_{s1} = 2\pi \frac{f_{s1}}{f_{Mues}} \quad \Omega_{s2} = 2\pi \frac{f_{s2}}{f_{Mues}} \quad \Omega_0 = 2\pi \frac{f_0}{f_{Mues}} \quad (11-109)$$

Siendo  $f_{Mues}$  la frecuencia de muestreo, y además  $\Omega_{p1} < \Omega_{s1} < \Omega_0 < \Omega_{s2} < \Omega_{p2}$ .

Cuando se aplica la predeformación mediante la expresión (11-96) a estas frecuencias normalizadas resultará, en el dominio analógico,  $\omega_{p1d} < \omega_{s1d} < \omega_{0d} < \omega_{s2d} < \omega_{p2d}$  y lo que resulta muy importante, es que  $\omega_{0d}$  se obtiene predeformando  $\Omega_0$  y no de la relación  $\omega_{0d}^2 = \omega_{s1d} \cdot \omega_{s2d}$ .

Entonces, cuando en este caso se aplica a cada frecuencia  $\omega_{kd}$  la transformación suprime banda a pasa bajos conservando el ancho de banda dada por (8-7), según la conclusión a la que se arribó en **0** y en el Ejemplo 8.3, resultará:

$$\overline{\omega_p} = \frac{1}{\Delta\omega_{pd}} = \frac{1}{\omega_{p2d} - \omega_{p1d}} \quad (11-110)$$

$$\overline{\omega_s} = \frac{1}{\Delta\omega_{sd}} = \frac{1}{\omega_{s2d} - \omega_{s1d}} \quad (11-111)$$

Ahora, el orden  $n$  resulta disminuido porque al resultar  $\omega_{p2d}$  tan notablemente deformada, según (11-110) resulta  $\overline{\omega_p}$  sensiblemente menor que el valor de un filtro analógico sin deformación.

Pero ese valor de  $n$  muy probablemente no satisfaga la especificación de  $\alpha_s$  en  $\omega_{p1d}$ .

La importante deformación de  $\omega_{p2d}$  causa que  $\omega_{0d}^2 \neq \omega_{p1d} \omega_{p2d}$ . Entonces una forma de salvar este inconveniente es considerar:

$$\omega_{0d}^2 = \omega_{p1d} \cdot \omega'_{p2d} \Rightarrow \omega'_{p2d} = \frac{\omega_{0d}^2}{\omega_{p1d}} \quad (11-112)$$

Con lo cual

$$\overline{\omega_p} = \frac{1}{\omega'_{p2d} - \omega_{p1d}} = \frac{1}{\frac{\omega_{0d}^2}{\omega_{p1d}} - \omega_{p1d}} = \frac{\omega_{p1d}}{\omega_{0d}^2 - \omega_{p1d}^2} \quad (11-113)$$

Entonces el orden corregido del filtro supresor de banda para la aproximación de Butterworth, resulta reemplazando (11-111) y (11-113) en (11-102):

$$n \geq \frac{\log \left[ \frac{10^{0,1\alpha_p} - 1}{10^{0,1\alpha_s} - 1} \right]}{2 \log \left( \frac{\omega_{0d}^2 - \omega_{p1d}^2}{\omega_{p1d} (\omega_{s2d} - \omega_{s1d})} \right)} \quad (11-114)$$

y el orden corregido para el filtro supresor de banda empleando la aproximación de Chebyshev, resulta reemplazando (11-111) y (11-113) en (11-103):

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{0,1\alpha_p} - 1}{10^{0,1\alpha_s} - 1}}}{\cosh^{-1} \left( \frac{\omega_{0d}^2 - \omega_{p1d}^2}{\omega_{p1d} (\omega_{s2d} - \omega_{s1d})} \right)} \quad (11-115)$$

Cabe aclarar que las expresiones (11-106), (11-107), (11-114) y (11-115) también resultan válidas para la determinación del orden de filtros analógicos sin deformación.

### 11.5.6. Procedimiento de diseño

De acuerdo a lo expresado hasta aquí, se puede resumir un procedimiento de diseño enumerando la secuencia de pasos a seguir para diseñar filtros IIR basados en un prototipo analógico, aplicando la transformación bilineal.

1. Determinar las frecuencias digitales normalizadas correspondientes a la especificación del filtro pasa- $X$  digital.
2. Si la frecuencia de muestreo no es dato del problema, adoptar un valor conveniente para  $f_{Mues}$  o  $T_s$ .
3. Predeformar las frecuencias normalizadas de la plantilla de especificaciones del filtro digital pasa- $X$  empleando (11-96):

$$\omega = \frac{2}{T_s} \cdot \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

para obtener las pulsaciones equivalentes necesarias para el diseño del filtro analógico pasa- $X$  equivalente.

4. Aplicar el procedimiento de diseño de filtros analógicos para la aproximación de Butterworth o de Chebyshev, según se requiera, y obtener la función de transferencia  $H(s)$  del pasa bajos normalizado que satisfaga las especificaciones.
5. Determinar la transferencia  $H(s)$  del pasa- $X$  desnormalizado, aplicando la transformación de frecuencias correspondiente.
6. Obtener la función de transferencia en el dominio digital  $H(z)$  aplicando la transformación bilineal, reemplazando a  $s$  por (11-94):

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}$$

7. Expresar  $H(z)$  en potencias de  $z^{-1}$ . La expresión de la secuencia de salida  $y[n]$  a una señal de entrada  $x[n]$  aplicada al filtro puede escribirse por simple inspección de la expresión de  $H(z)$  obtenida, teniendo en cuenta que:

$$y[n] = \sum_{k=0}^N b_k \cdot x[n-k] - \sum_{k=1}^M a_k \cdot y[n-k] \qquad H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k \cdot z^{-k}}$$

8. Obtener  $H(\Omega)$  reemplazando en  $H(z)$  a  $z$  por  $e^{j\Omega}$  y verificar si el filtro cumple las especificaciones.

### 11.5.7. Ejemplos de diseño

En este apartado se presentan los siguientes ejemplos de aplicación del procedimiento que se describió para el diseño de filtros IIR mediante la transformación bilineal.

- **Ejemplo 11.10.** Filtro IIR pasa bajos empleando la aproximación de Butterworth.
- **Ejemplo 11.11.** Filtro IIR pasa altos empleando la aproximación de Chebyshev.
- **Ejemplo 11.12.** Filtro IIR pasa banda empleando la aproximación de Chebyshev.
- **Ejemplo 11.13.** Filtro IIR supresor de banda empleando la aproximación de Butterworth.

#### Ejemplo 11.10.

Se requiere diseñar un filtro digital pasa bajos con una frecuencia de muestreo  $f_{Mues}=20$  kHz basado en un filtro analógico de Butterworth. Las características requeridas del filtro digital son:

$$\alpha_p = 1 \text{ dB} \qquad \alpha_s = 20 \text{ dB} \qquad f_p = 1 \text{ kHz} \qquad f_s = 5 \text{ kHz}$$

Determinar los valores correspondientes de estos parámetros que se deberían emplear en el filtro analógico en el que estará basado el filtro digital.

#### Resolución:

En primer lugar se pueden determinar las frecuencias digitales normalizadas características correspondientes a  $f_p$  y  $f_s$ :

$$\Omega_p = 2\pi \frac{f_p}{f_{Mues}} = 2\pi \frac{10^3}{20 \cdot 10^3} = \frac{\pi}{10}$$

$$\Omega_s = 2\pi \frac{f_s}{f_{Mues}} = 2\pi \frac{5 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^3} = \frac{\pi}{2}$$

Ahora se pueden *predeformar* empleando (11-96) para producir las frecuencias analógicas equivalentes necesarias para el diseño del filtro analógico:

$$\omega_{pd} = \frac{2}{T_s} \cdot \tan\left(\frac{\Omega_p}{2}\right) = 2 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot \tan\left(\frac{0,1\pi}{2}\right) = 6335,4 \text{ rad/s} \qquad \therefore f_{pd} = 1008,3 \text{ Hz}$$

$$\omega_{sd} = \frac{2}{T_s} \cdot \tan\left(\frac{\Omega_s}{2}\right) = 2 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot \tan\left(\frac{0,5\pi}{2}\right) = 40 \text{ Krad/s} \quad \therefore f_{sd} = 6366,2 \text{ Hz}$$

Nótese que la frecuencia correspondiente al borde inferior de la banda de paso sufre una ligera deformación de 1000 a 1008 Hz. Mientras que para la frecuencia correspondiente al borde superior de la banda de paso la deformación es mucho más notable de 5000 a 6366 Hz. Por otra parte, las atenuaciones  $\alpha_p$  y  $\alpha_s$  no cambian y por lo tanto, se dispone de suficiente información para proceder con el diseño del filtro analógico, siguiendo los pasos 1 a 3 del procedimiento indicado en 9.4.3:

$$\alpha_p = 1 \text{ dB} \quad \alpha_s = 20 \text{ dB} \quad f_p = f_{pd} = 1008,3 \text{ Hz} \quad f_s = f_{sd} = 6366,2 \text{ Hz}$$

- Parámetros  $\varepsilon$  y  $n$  del filtro analógico:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1\alpha_p} - 1} = \sqrt{10^{0,1} - 1} = \sqrt{0,2589} = 0,5088$$

$$n \geq \frac{\log\left[\frac{10^{0,1\alpha_p} - 1}{10^{0,1\alpha_s} - 1}\right]}{2 \log\left(\frac{f_s}{f_p}\right)} = \frac{\log\left[\frac{10^{0,1 \cdot 20} - 1}{10^{0,1 \cdot 1} - 1}\right]}{2 \log\left(\frac{6366,2}{1008,3}\right)} = 1,61$$

Entonces resulta  $\varepsilon=0,5088$  y  $n=2$ .

- Obtención de la función de transferencia que realiza la aproximación de Butterworth:

$$\left| \overline{H(j\omega)} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \omega^{2n}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,5088^2 \omega^4}}$$

Reemplazando en la expresión anterior a  $\omega$  por  $s/j$  se puede obtener la expresión de  $\overline{H(s)}^2$ :

$$\overline{H(s)}^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 s^4} = \frac{1/\varepsilon^2}{s^4 + 1/\varepsilon^2} = \frac{3,8625}{s^4 + 3,8625}$$

Se determinan los  $2n$  polos y los  $2n$  ceros de  $\overline{H(s)}^2$

- Los ceros de  $\overline{H(s)}^2$  son 4 y se encuentran todos en infinito.
- Los polos de  $\overline{H(s)}^2$  también son 4 y serán las raíces de:

$$s^4 + 3,8625 = 0 \Rightarrow s_k = \sqrt[4]{-3,8625} = \sqrt[4]{3,8625} \cdot e^{j\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)} = 1,4019 \cdot e^{j(2k+1)\frac{\pi}{4}} \quad k=0, 1, 2, 3$$

Entonces los 4 polos resultan:

$$\sqrt[4]{\frac{1}{\varepsilon^2}} \left( \pm \cos \frac{\pi}{4} \pm j \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt[4]{3,8625} \left( \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \pm 0,9913 \pm j 0,9913$$

Los cuales tienen simetría cuadrantal y se encuentran ubicados sobre una circunferencia de radio  $\sqrt[4]{3,8625} = 1,4019$

Ahora se puede conformar  $\overline{H(s)}$  empleando la mitad de los polos de  $\overline{H(s)}^2$  (los que se encuentran en el semiplano izquierdo) y la mitad de los ceros de  $\overline{H(s)}^2$  (los que se encuentran en el semiplano izquierdo, y la mitad de los que se encuentren en el origen e infinito):

$$\overline{H(s)} = \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\left( s + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \left( \cos \frac{\pi}{4} - j \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) \right) \left( s + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \left( \cos \frac{\pi}{4} + j \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) \right)} = \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{s^2 + \left( 2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \cos \frac{\pi}{4} \right) s + \frac{1}{\varepsilon}}$$

Esta función está normalizada respecto de  $\omega_p=6335,4$  rad/s. Entonces la función de transferencia desnormalizada del filtro analógico resulta:

$$\overline{H(s)} = \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2 + \left(2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \cos \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{s}{\omega_p} + \frac{1}{\varepsilon}} = \frac{\frac{1}{\varepsilon} \omega_p^2}{s^2 + \left(2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \cos \frac{\pi}{4}\right) \omega_p \cdot s + \frac{1}{\varepsilon} \omega_p^2}$$

Es decir:

$$H(s) = \frac{1,9653 \cdot \omega_p^2}{s^2 + 1,9826 \cdot \omega_p \cdot s + 1,9653 \cdot \omega_p^2}$$

$$H(s) = \frac{7,8882 \cdot 10^7}{s^2 + 1,2560 \cdot 10^4 \cdot s + 7,8882 \cdot 10^7}$$

Los coeficientes de  $H(s)$  pueden obtenerse con las siguientes líneas de código en Matlab:

```

01  clc
02  close all
03  % 1) Especificación del filtro pasa bajos digital
04  alfa_p=1; alfa_s=20;
05  fp=1E3; fs=5E3;
06  fMues=20E3;
07  % 2) Frecuencias Digitales características normalizadas
08  Wp=2*fp/fMues; % veces pi
09  Ws=2*fs/fMues; % veces pi
10  % 3) Predeformar las Frecuencias Digitales características
    normalizadas
11  %     obteniendo las Frecuencias analógicas características
12  wpd=2*fMues*tan(Wp*pi/2); fpd=wpd/2/pi;
13  wsd=2*fMues*tan(Ws*pi/2); fsd=wsd/2/pi;
14  % 4) Transformar los datos disponibles al dominio del filtro
    pasa bajos analógico equivalente
15  %     Amax=alfa_p; Amin=alfa_s;
16  Amax=alfa_p; Amin=alfa_s;
17  wp=2*pi*fpd;
18  ws=2*pi*fsd;
19  % 5) Parámetros de diseño del filtro pasa bajos analógico
    equivalente
20  eps=sqrt(10^(0.1*Amax)-1);
21  x=log10((10^(0.1*Amin)-1)/(10^(0.1*Amax)-1))/2;
22  n_real=x/log10(ws/wp);
23  n=ceil(n_real);
24  % 6) Obtener la función H(s) del filtro pasa altos analógico
    aplicando la aproximación de Butterworth.
25  % ---- Una forma de hacerlo:
26  % ---- Una forma de hacerlo:
27  Ns=[0 0 1/eps*wp^2]; % coeficientes del numerador de H(s)
28  Ds=[1 2/sqrt(eps)*cos(pi/4)*wp 1/eps*wp^2]; % Idem denominador
29  Hs=tf(Ns, Ds) % Función H(s) escrita en formato normal
30  % ---- Otra forma de hacerlo:
31  wC=wp/eps^(1/n); % Pulsación de 3 dB
32  [Ns, Ds]=butter(n, wC, 's'); % Coeficientes del num. y den. de H(s)
33  Hs=tf(Ns, Ds) % Escribir H(s) del pasa altos en formato normal

```

Resulta interesante graficar  $H(s)$  para verificar que se obtuvo correctamente. Las siguientes líneas de código permiten hacerlo correctamente, y la gráfica obtenida se muestra en la **Fig. 11.44** (las áreas sombreadas se han agregado con fines didácticos mediante herramientas de edición).

```

34  %% Gráfica de la Magnitud de |H(jw)| en dB vs. f en kHz
35  % Límites de Graficación deseados
36  min_dBplot=-60; max_dBplot=1;
37  min_kHz=0; max_kHz=fMues/2/1000;
38  wi=2*pi* linspace(0, max_kHz*1E3, 2001); % 2001 valores lineales de w
39  [Hjw, w]=freqs(Ns, Ds, wi); % Evaluar H(jw) en los 2001 valores de wi
40  freq_kHz=w/(2*pi*1000); % f [kHz] a graficar en abcisas
41  H_dB=20*log10(abs(Hjw)); % |H(jw)| en dB a graficar en ordenadas

```

```

42 figure('Color',[1,1,1]);
43 plot(freq_kHz, H_dB, 'LineWidth', 3, 'Color', [0.6,0.2,0.6])
44 hold on
45 % Plantilla de la especificación para la banda de paso
46 Xp=[fpd fpd 0];
47 Yp=[min_dBplot -alfa_p -alfa_p];
48 % Plantilla de la especificación para la banda de atenuación
49 Xs=[fsd fsd fMues/2];
50 Ys=[max_dBplot -alfa_s -alfa_s];
51 Xp=Xp/1000; % Frecuencias en kHz
52 Xs=Xs/1000; % Frecuencias en kHz
53 plot(Xp, Yp, 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '--', 'Color',
54 [0.8,0.2,0.6]);
55 plot(Xs, Ys, 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '--', 'Color',
56 [0.8,0.2,0.6]);
57 grid on
58 set(gca, 'FontName', 'Arial', 'FontSize', 26)
59 axis([min_fkHz, max_fkHz, min_dBplot, max_dBplot])
60 xlabel('\fontname{Times}\fontsize{26}\it f \rm\fontname{Arial}
61 [kHz]');
62 ylabel('\fontname{Arial}\fontsize{26}|H(\it j\omega) | [dB]');

```

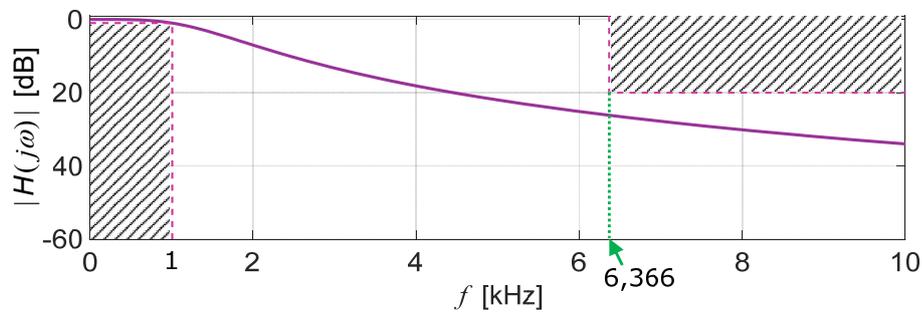


Fig. 11.44. Método de la transformación bilineal. Respuesta en frecuencia para el filtro pasa bajos especificado.

1. Obtener la función de transferencia en el dominio digital aplicando la transformación bilineal, es decir, aplicando (11-94), reemplazando a  $s$  por:

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}$$

$$H(z) = \frac{7,8882 \cdot 10^7}{\left(\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 1,2560 \cdot 10^4 \cdot \left(\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}\right) + 7,8882 \cdot 10^7}$$

Operando para  $T_s = 1/f_{Mues} = 5 \cdot 10^{-5}$  s:

$$H(z) = \frac{0,036163 \cdot (z^{-2} + 2 \cdot z^{-1} + 1)}{0,53934 \cdot z^{-2} - 1,39469 \cdot z^{-1} + 1}$$

2. La función de transferencia  $H(z)$  en potencias de  $z^{-1}$  puede obtenerse mediante las siguientes líneas de código en Matlab:

```

60 %% 7) Obtener H(z) aplicando la transformación bilineal a H(s)
61 [Nz, Dz]=bilinear(Ns, Ds, fMues) % Coeficientes del num. y den. de H(z)
62 Hz=tf(Nz, Dz, 1/fMues, 'variable', 'z^-1') % H(z) en formato normal

```

3. Obtener  $H(\Omega)$  reemplazando en  $H(z)$  a  $z$  por  $e^{j\Omega}$ :

$$H(\Omega) = \frac{0,036163 \cdot (e^{-j2\Omega} + 2 \cdot e^{-j\Omega} + 1)}{0,53934 \cdot e^{-j2\Omega} - 1,39469 \cdot e^{-j\Omega} + 1}$$

Para verificar el cumplimiento de las atenuaciones especificadas en la banda de paso y en la banda de atenuación, se obtiene  $|H(\Omega)|$  en dB y se grafica seleccionando adecuadamente los límites de frecuencia, como se muestra en la Fig. 11.45. El código Matlab para realizarla es el siguiente:

```

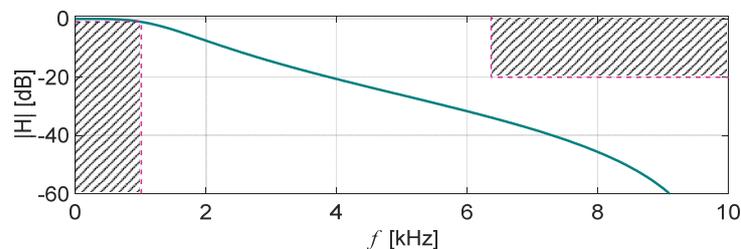
63 %% Gráfica de la Magnitud de H(W) en dB entre 0 y (fMues/2) en kHz

```

```

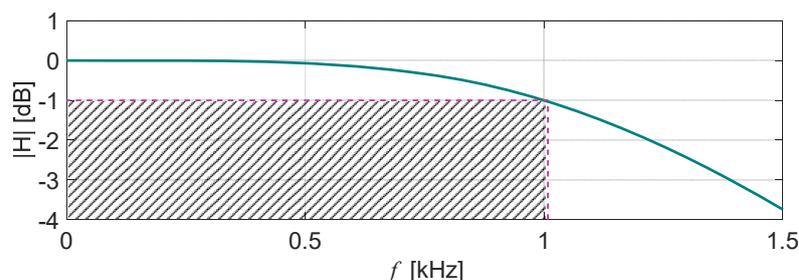
64 [H, W] = freqz(Nz, Dz, 2001); % Evaluar H(W) en 2001 valores de W
65 freq_kHz=W*fMues/(2*pi*1000); % magnitud a graficar en abcisas f [kHz]
66 H_dB=20*log10(abs(H)); % magnitud en ordenadas |H(W)| en dB
67 min_dBplot=-60; max_dBplot=1;
68 min_fkHz=0; max_fkHz=fMues/2/1000;
69 figure('Color',[1,1,1]);
70 plot(freq_kHz, H_dB, 'LineWidth', 3, 'Color', [0,0.5,0.5])
71 hold on
72 % Plantilla de la especificación para la banda de paso
73 Xp=[fpd fpd 0];
74 Yp=[min_dBplot -alfa_p -alfa_p];
75 % Plantilla de la especificación para la banda de atenuación
76 Xs=[fsd fsd fMues/2];
77 Ys=[max_dBplot -alfa_s -alfa_s];
78 Xp=Xp/1000; % Frecuencias en kHz
79 Xs=Xs/1000; % Frecuencias en kHz
80 plot(Xp, Yp, 'LineWidth',2, 'LineStyle', '--', 'Color',[0.8,0.2,0.6]);
81 plot(Xs, Ys, 'LineWidth',2, 'LineStyle', '--', 'Color',[0.8,0.2,0.6]);
82 grid on
83 set(gca, 'FontName','Arial', 'FontSize',26)
84 axis([min_fkHz,max_fkHz, min_dBplot,max_dBplot])
85 xlabel('\fontname{Times}\fontsize{26}\it f \rm\fontname{Arial} [kHz]');
86 ylabel('\fontname{Arial}\fontsize{26}|H| [dB]');

```



**Fig. 11.45.** Método de la transformación bilineal. Magnitud de la respuesta en frecuencia para el filtro pasa bajos especificado.

La **Fig. 11.46.** es el detalle correspondiente a la banda de paso que puede obtenerse fácilmente mediante las herramientas de edición de la gráfica que ofrece Matlab.



**Fig. 11.46.** Magnitud de la respuesta en frecuencia para el filtro pasa bajos especificado. Detalle de la banda de paso

Se observa que  $|H(\Omega)|$  satisface los requisitos de la especificación, dado que la curva no ingresa a las regiones sombreadas.

4. La expresión de la secuencia de salida  $y[n]$  a una señal de entrada  $x[n]$  aplicada al filtro puede escribirse por simple inspección de la expresión de  $H(z)$  obtenida, teniendo en cuenta (11-81) y (11-83). Procediendo de este modo:

$$y[n] - 1,39469 \cdot y[n-1] + 0,53934 \cdot y[n-2] = + 0,036163 \cdot x[n] + 0,072326 \cdot x[n-1] + 0,036163 \cdot x[n-2]$$

Es decir:

$$y[n] = 0,036163 \cdot x[n] + 0,072326 \cdot x[n-1] + 0,036163 \cdot x[n-2] + 1,39469 \cdot y[n-1] - 0,53934 \cdot y[n-2]$$

**Ejemplo 11.11.**

Se requiere diseñar un filtro pasa altos para un sistema de audio, para derivar las componentes de altas frecuencias a un tweeter, y evitar el daño que podrían causarle las componentes de bajas frecuencias. El filtro debe permitir el paso de frecuencias superiores a 12 kHz con una ondulación máxima de 0,5 dB, requiriéndose que las frecuencias de 10 kHz o menores sean atenuadas 40 dB como mínimo. La frecuencia de muestreo a emplear es de 50 kHz.

**Resolución:**

1. Las características requeridas del filtro digital son:

$$\alpha_p = 0,5 \text{ dB} \quad f_p = 12 \text{ kHz}$$

$$\alpha_s = 40 \text{ dB} \quad f_s = 10 \text{ kHz}$$

2. Determinar las frecuencias digitales normalizadas características correspondientes a  $f_p$  y  $f_s$ :

$$\Omega_p = 2\pi \frac{f_p}{f_{Mues}} = 2\pi \frac{12 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^3} = 0,48\pi \quad \Omega_s = 2\pi \frac{f_s}{f_{Mues}} = 2\pi \frac{10 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^3} = 0,4\pi$$

3. *Predeformar* las frecuencias digitales normalizadas empleando (11-96) para producir las frecuencias analógicas equivalentes necesarias para el diseño del filtro analógico:

$$\omega_{pd} = \frac{2}{T_s} \cdot \tan\left(\frac{\Omega_p}{2}\right) = 2 \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot \tan\left(\frac{0,48\pi}{2}\right) = 93,906 \text{ krad/s} \quad \therefore f_{pd} = 14,946 \text{ kHz}$$

$$\omega_{sd} = \frac{2}{T_s} \cdot \tan\left(\frac{\Omega_s}{2}\right) = 2 \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot \tan\left(\frac{0,4\pi}{2}\right) = 72,654 \text{ krad/s} \quad \therefore f_{sd} = 11,563 \text{ kHz}$$

4. Transformación de la especificación (predeformada) del pasa altos analógico al pasa bajos equivalente:

$$\alpha_p = 0,5 \text{ dB} \quad f_p = \frac{1}{f_{pd}} = \frac{1}{14,946 \cdot 10^3} = 6,6909 \cdot 10^{-5} \text{ Hz}$$

$$\alpha_s = 40 \text{ dB} \quad f_s = \frac{1}{f_{sd}} = \frac{1}{11,563 \cdot 10^3} = 8,6481 \cdot 10^{-5} \text{ Hz}$$

Se adopta la aproximación de Chebyshev. Se efectuarán los pasos 1 a 3 del procedimiento indicado en **9.4.3.** para el diseño de los filtros analógicos, obteniendo los parámetros de diseño  $\varepsilon$  y  $n$  del filtro pasa bajos analógico.

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1\alpha_p} - 1} = \sqrt{10^{0,1 \cdot 0,5} - 1} = \sqrt{0,1246} = 0,353$$

$$A(\omega_s) = 10 \log \left\{ 1 + \left[ \varepsilon \cosh \left( n \cosh^{-1} \left( \frac{\omega_s}{\omega_p} \right) \right) \right]^2 \right\} \geq \alpha_s$$

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{0,1\alpha_s} - 1}{10^{0,1\alpha_p} - 1}}}{\cosh^{-1} \left( \frac{f_s}{f_p} \right)} = \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{0,1 \cdot 40} - 1}{10^{0,1 \cdot 0,5} - 1}}}{\cosh^{-1} \left( \frac{8,6481}{6,6909} \right)} = 8,48$$

Entonces resulta  $\varepsilon=0,353$  y  $n=9$ .

Los pasos realizados hasta aquí se han implementado en las siguientes líneas de código de Matlab:

```

1   clc
2   close all
3   % 1) Especificación del filtro pasa banda digital
4   alfa_p=0.51; alfa_s=40;
5   fp=12E3; fs=10E3;
6   fMues=50E3;
7   % 2) Frecuencias Digitales características normalizadas
8   Wp=2*fp/fMues; % veces pi

```

```

9   Ws=2*fs/fMues; % veces pi
10  % 3) Predeformar las Frecuencias Digitales características normalizadas
11  %     obteniendo las Frecuencias analógicas características
12  wpd=2*fMues*tan(Wp*pi/2); fpd=wpd/2/pi;
13  wsd=2*fMues*tan(Ws*pi/2); fsd=wsd/2/pi;
14  % 4) Transformar los datos disponibles al dominio del filtro
15  %     pasa bajos analógico equivalente
16  Amax=alfa_p; Amin=alfa_s;
17  fp=1/fpd;
18  fs=1/fsd;
19  % 5) Parámetros de diseño del filtro pasa bajos analógico equivalente
20  eps=sqrt(10^(0.1*Amax)-1);
21  nreal=acosh(sqrt(10^(0.1*Amin)-1)/eps)/acosh(fs/fp);
22  n=ceil(nreal);

```

5. Obtener la función  $H(s)$  del filtro pasa altos analógico de banda de paso de 0,5 dB de ripple, delimitada por  $f_{pd}=14,946$  kHz.

Se aplica la transformación pasa bajos normalizado a pasa altos, en este caso, desnormalizando para el ancho de banda  $\omega_{pd}$ :

$$\bar{s} = \frac{\omega_{pd}}{s}$$

A la función de transferencia del filtro pasa bajos normalizado de orden 9, la cual se conforma mediante nueve de los dieciocho polos que, para la aproximación de Chebyshev, se encuentran sobre una elipse en el plano  $s$ . Los nueve que se emplean son los que se encuentran en el semiplano izquierdo.

Con Matlab esto puede realizarse de varias maneras. Una de las más directas es la siguiente:

```

23  % 6) Obtener la función H(s) del filtro pasa altos analógico
24  %     aplicando la aproximación de Chebyshev.
25  [Ns, Ds]=cheby1(n, Amax, 2*pi*fpd, 'high', 's');
26  Ts=tf(Ns, Ds) % Escribir H(s) del pasa altos en formato normal

```

Aquí es muy importante notar en la línea 25 que a la función `cheby1()` se le pasa el parámetro de entrada 's', el cual indica que los parámetros de salida, en este caso los coeficientes del numerador y del denominador, corresponden a la función de transferencia  $H(s)$ , es decir, corresponden a un filtro analógico. Y para este caso,  $w_p$  no está normalizada y está en rad/s.

De este modo, el resultado de la línea 26 es la función  $H(s)$  del pasa altos analógico:

$$H(s) = \frac{s^9}{s^9 + c_8 s^8 + c_7 s^7 + c_6 s^6 + c_5 s^5 + c_4 s^4 + c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0}$$

Donde los coeficientes  $c_i$  son:

$c_8$	$c_7$	$c_6$	$c_5$	$c_4$	$c_3$
$7,92 \cdot 10^5$	$2,691 \cdot 10^{11}$	$7,312 \cdot 10^{16}$	$1,123 \cdot 10^{22}$	$1,827 \cdot 10^{27}$	$1,495 \cdot 10^{32}$
$c_2$	$c_1$	$c_0$			
$1,685 \cdot 10^{37}$	$6,208 \cdot 10^{41}$	$5,132 \cdot 10^{46}$			

Resulta interesante graficar  $H(s)$  para verificar que se obtuvo correctamente. Las siguientes líneas de código permiten hacerlo correctamente, y la gráfica obtenida se muestra en la **Fig. 11.47** (las áreas sombreadas se han agregado con fines didácticos mediante herramientas de edición).

```

27  %% Gráfica de la Magnitud de |H(jw)| en dB vs. f en kHz
28  % Límites de Graficación deseados
29  min_dBplot=-60; max_dBplot=1;
30  min_fkHz=0; max_fkHz=fMues/2/1000;
31  wi=2*pi*linspace(0, max_fkHz*1E3, 2001); % 2001 valores lineales de w
32  [Hjw, w]=freqs(Ns, Ds, wi); % Evaluar H(jw) en los 2001 valores de wi
33  freq_kHz=w/(2*pi*1000); % f [kHz] a graficar en abcisas
34  H_dB=20*log10(abs(Hjw)); % |H(jw)| en dB a graficar en ordenadas
35  figure('Color', [1,1,1]);
36  plot(freq_kHz, H_dB, 'LineWidth', 3, 'Color', [0.6,0.2,0.6])
37  hold on
38  % Plantilla de la especificación para la banda de paso

```

```

39 Xp=[fpd fpd fMues/2];
40 Yp=[min_dBplot -alfa_p -alfa_p];
41 % Plantilla de la especificación para la banda de atenuación
42 Xs=[0 fsd fsd];
43 Ys=[-alfa_s -alfa_s max_dBplot];
44 Xp=Xp/1000; % Frecuencias en kHz
45 Xs=Xs/1000; % Frecuencias en kHz
46 plot(Xp, Yp, 'LineWidth',2, 'LineStyle', '--', 'Color',[0.8,0.2,0.6]);
47 plot(Xs, Ys, 'LineWidth',2, 'LineStyle', '--', 'Color',[0.8,0.2,0.6]);
48 grid on
49 set(gca,'FontName','Arial','FontSize',26)
50 axis([min_fkHz, max_fkHz, min_dBplot, max_dBplot])
51 xlabel('\fontname{Times}\fontsize{26}\it f \rm\fontname{Arial} [kHz]');
52 ylabel('\fontname{Arial}\fontsize{26}|H(\it j\omega) | [dB]');

```

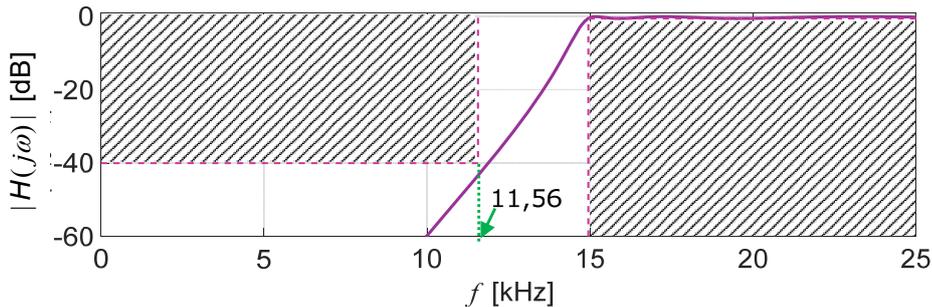


Fig. 11.47. Método de la transformación bilineal. Magnitud de la respuesta en frecuencia para el filtro pasa altos analógico predefinido.

- Obtener la función  $H(z)$  del filtro pasa altos digital aplicando la transformación bilineal a la  $H(s)$  obtenida.

```

53 %% 7) Obtener H(z) aplicando la transformación bilineal a H(s)
54 [Nz, Dz]=bilinear(Ns, Ds, fMues) % Función H(z) discreta
    (coeficientes del numerador y denominador)
55 Hz=tf(Nz, Dz, 1/fMues, 'variable', 'z^-1') % Función H(z) escrita en
    formato normal

```

Como resultado de la línea 69 se obtiene la función  $H(z^{-1})$  del pasa altos IIR:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4} + b_5z^{-5} + b_6z^{-6} + b_7z^{-7} + b_8z^{-8} + b_9z^{-9}}{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3} + a_4z^{-4} + a_5z^{-5} + a_6z^{-6} + a_7z^{-7} + a_8z^{-8} + a_9z^{-9}}$$

Donde los coeficientes  $b_i$  del numerador son:

$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$
$1,197 \cdot 10^{-3}$	$-1,077 \cdot 10^{-2}$	$4,309 \cdot 10^{-2}$	$-1,006 \cdot 10^{-1}$	$1,508 \cdot 10^{-1}$	$-1,508 \cdot 10^{-1}$
$b_6$	$b_7$	$b_8$	$b_9$		
$1,006 \cdot 10^{-1}$	$-4,309 \cdot 10^{-2}$	$1,077 \cdot 10^{-2}$	$-1,197 \cdot 10^{-3}$		

y los coeficientes  $a_i$  del denominador son:

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
1	2,202	4,389	5,806	6,309	5,363
$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$		
3,634	1,891	$7,002 \cdot 10^{-1}$	$1,5767 \cdot 10^{-1}$		

- Verificar que la respuesta en frecuencia  $H_d(\Omega)=H(e^{j\Omega})$  del filtro pasa altos digital cumple con las especificaciones del diseño.

Las siguientes líneas de código permiten graficar la magnitud de  $H(e^{j\Omega})$  en dB, y la gráfica obtenida se muestra en la Fig. 11.48 (las áreas sombreadas se han agregado con fines didácticos mediante herramientas de edición).

```

56 %% Gráfica de la Magnitud de H(W) en dB entre 0 y (fMues/2) en kHz
57 [H, W] = freqz(Nz, Dz, 2001); % Evaluar H(W) en 2001 valores de W
58 freq_kHz=W*fMues/(2*pi*1000);

```

```

59 H_dB=20*log10(abs(H));
60 min_dBplot=-60; max_dBplot=1;
61 min_fkHz=0; max_fkHz=fMues/2/1000;
62 figure('Color',[1,1,1]);
63 plot(freq_kHz, H_dB, 'LineWidth', 3, 'Color', [0,0.5,0.5])
64 hold on
65 % Plantilla de la especificación para la banda de paso
66 Xp=[fp fp fMues/2];
67 Yp=[min_dBplot -alfa_p -alfa_p];
68 % Plantilla de la especificación para la banda de atenuación
69 Xs=[0 fs fs];
70 Ys=[-alfa_s -alfa_s max_dBplot];
71 Xp=Xp/1000; % Frecuencias en kHz
72 Xs=Xs/1000; % Frecuencias en kHz
73 plot(Xp, Yp, 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '--', 'Color',
[0.8,0.2,0.6]);
74 plot(Xs, Ys, 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '--', 'Color',
[0.8,0.2,0.6]);
75 grid on
76 set(gca, 'FontName','Arial', 'FontSize',26)
77 axis([min_fkHz,max_fkHz, min_dBplot,max_dBplot])
78 xlabel('\fontname{Times}\fontsize{26}\it f \rm\fontname{Arial} [kHz]');
79 ylabel('\fontname{Arial}\fontsize{26}|H| [dB]');

```

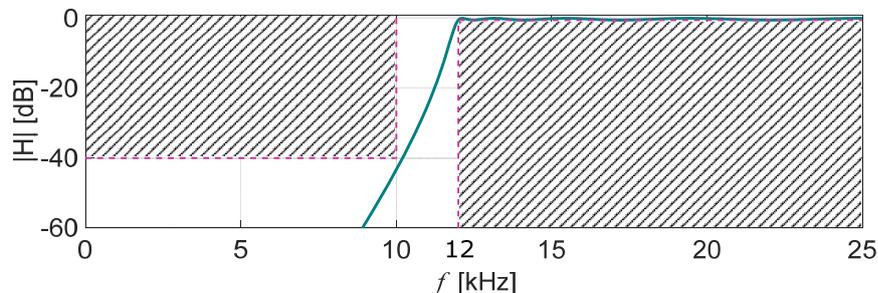


Fig. 11.48. Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro pasa altos especificado.

En la Fig. 11.49 se muestra el detalle de la banda de paso, que puede obtenerse fácilmente mediante las herramientas de edición de la gráfica que ofrece Matlab.

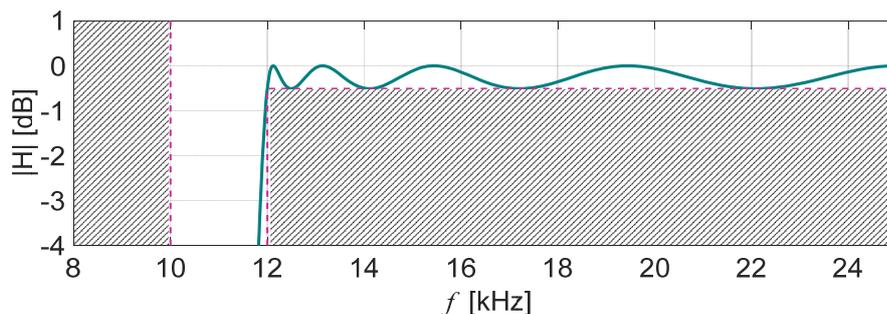


Fig. 11.49. Detalle de la banda de paso.

8. Obtener la expresión de la secuencia de salida  $y[n]$  a una señal de entrada  $x[n]$  aplicada al filtro. Por comparación de la expresión de  $H(z)$  obtenida con (11-81) y (11-83) se deduce que:

$$\begin{aligned}
 & a_0 \cdot y[n] + a_1 \cdot y[n-1] + a_2 \cdot y[n-2] + a_3 \cdot y[n-3] + a_4 \cdot y[n-4] + \\
 & + a_5 \cdot y[n-5] + a_6 \cdot y[n-6] + a_7 \cdot y[n-7] + a_8 \cdot y[n-8] + a_9 \cdot y[n-9] = \\
 & = b_0 \cdot x[n] + b_1 \cdot x[n-1] + b_2 \cdot x[n-2] + b_3 \cdot x[n-3] + b_4 \cdot x[n-4] + \\
 & + b_5 \cdot x[n-5] + b_6 \cdot x[n-6] + b_7 \cdot x[n-7] + b_8 \cdot x[n-8] + b_9 \cdot x[n-9]
 \end{aligned}$$

Es decir:

$$\begin{aligned}
 y[n] = & b_0 \cdot x[n] + b_1 \cdot x[n-1] + b_2 \cdot x[n-2] + b_3 \cdot x[n-3] + b_4 \cdot x[n-4] + b_5 \cdot x[n-5] + b_6 \cdot x[n-6] + \\
 & + b_7 \cdot x[n-7] + b_8 \cdot x[n-8] + b_9 \cdot x[n-9] - a_1 \cdot y[n-1] - a_2 \cdot y[n-2] - a_3 \cdot y[n-3] - \\
 & - a_4 \cdot y[n-4] - a_5 \cdot y[n-5] - a_6 \cdot y[n-6] - a_7 \cdot y[n-7] - a_8 \cdot y[n-8] - a_9 \cdot y[n-9]
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 11.12.**

Diseñar un filtro pasa banda empleando la aproximación de Chebyshev que permita el paso de frecuencias entre 4 kHz y 6 kHz, con bandas de transición de 3-4 kHz y de 6-8 kHz, siendo la atenuación mínima requerida de la banda de supresión de 80 dB, y la ondulación en la banda de paso no debe superar 1 dB. La frecuencia de muestreo es de 20 kHz.

**Resolución:**

1. Las características requeridas del filtro digital son:

$$\alpha_p = 1 \text{ dB} \quad f_{p1} = 4 \text{ kHz} \quad f_{p2} = 6 \text{ kHz}$$

$$f_0 = (f_{p1} + f_{p2})/2 = (4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^3)/2 = 5 \cdot 10^3$$

$$\alpha_s = 80 \text{ dB} \quad f_{s1} = 3 \text{ kHz} \quad f_{s2} = 8 \text{ kHz}$$

2. Determinar las frecuencias digitales normalizadas características correspondientes a  $f_0, f_{p1}, f_{p2}, f_{s1}$  y  $f_{s2}$ :

$$\Omega_0 = 2\pi \frac{f_0}{f_s} = 2\pi \frac{5 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^3} = 0,5\pi$$

$$\Omega_{p1} = 2\pi \frac{f_{p1}}{f_s} = 2\pi \frac{4 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^3} = 0,4\pi \quad \Omega_{p2} = 2\pi \frac{f_{p2}}{f_s} = 2\pi \frac{6 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^3} = 0,6\pi$$

$$\Omega_{s1} = 2\pi \frac{f_{s1}}{f_s} = 2\pi \frac{3 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^3} = 0,3\pi \quad \Omega_{s2} = 2\pi \frac{f_{s2}}{f_s} = 2\pi \frac{8 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^3} = 0,8\pi$$

3. *Predeformar* las frecuencias digitales normalizadas empleando (11-96) para producir las frecuencias analógicas equivalentes necesarias para el diseño del filtro analógico:

$$\omega_{0d} = \frac{2}{T_s} \cdot \tan\left(\frac{\Omega_0}{2}\right) = 2 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot \tan\left(\frac{0,5\pi}{2}\right) = 40 \text{ krad/s} \quad \therefore f_{0d} = 6366,2 \text{ Hz}$$

$$\omega_{p1d} = \frac{2}{T_s} \cdot \tan\left(\frac{\Omega_{p1}}{2}\right) = 2 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot \tan\left(\frac{0,4\pi}{2}\right) = 29,062 \text{ krad/s} \quad \therefore f_{p1d} = 4625,3 \text{ Hz}$$

$$\omega_{p2d} = \frac{2}{T_s} \cdot \tan\left(\frac{\Omega_{p2}}{2}\right) = 2 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot \tan\left(\frac{0,6\pi}{2}\right) = 55,055 \text{ krad/s} \quad \therefore f_{p2d} = 8762,3 \text{ Hz}$$

$$\omega_{s1d} = \frac{2}{T_s} \cdot \tan\left(\frac{\Omega_{s1}}{2}\right) = 2 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot \tan\left(\frac{0,3\pi}{2}\right) = 20,381 \text{ krad/s} \quad \therefore f_{s1d} = 3243,7 \text{ Hz}$$

$$\omega_{s2d} = \frac{2}{T_s} \cdot \tan\left(\frac{\Omega_{s2}}{2}\right) = 2 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot \tan\left(\frac{0,8\pi}{2}\right) = 123,107 \text{ krad/s} \quad \therefore f_{s2d} = 19593,1 \text{ Hz}$$

Es bueno observar que la frecuencia  $f_{s1}$ , que corresponde al borde inferior de la banda de atenuación, sufre una ligera deformación de 3000 a 3243,7 Hz. Mientras que para la frecuencia correspondiente al borde superior de la banda de atenuación la deformación es mucho más notable de 8 kHz a 19,59 kHz. Por otra parte, las atenuaciones  $\alpha_p$  y  $\alpha_s$  no cambian y por lo tanto, se dispone de toda la información necesaria para proceder con el diseño del filtro analógico.

4. Adecuar los datos disponibles a la notación empleada para los filtros analógicos. En consecuencia, la especificación para el filtro pasa banda analógico resulta:

$$\alpha_p = 1 \text{ dB} \quad \Delta f_p = f_{p2d} - f_{p1d} = 8762,3 - 4625,3 = 4137 \text{ Hz}$$

$$\alpha_s = 80 \text{ dB} \quad \Delta f_s = f_{s2d} - f_{s1d} = 19593,1 - 3243,7 = 16349,4 \text{ Hz}$$

Entonces la especificación para el filtro pasa bajos equivalente será:

$$\alpha_p = 1 \text{ dB} \quad f_p = 4137 \text{ Hz}$$

$$\alpha_s = 80 \text{ dB} \quad f_s = 16349,4 \text{ Hz}$$

Efectuar los pasos 1 a 3 del procedimiento indicado en 9.4.3 para el diseño de los filtros analógicos, obteniendo los parámetros de diseño  $\varepsilon$  y  $n$  del filtro pasa bajos analógico.

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1\alpha_p} - 1} = \sqrt{10^{0,1} - 1} = \sqrt{0,2589} = 0,5088$$

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{0,1\alpha_s} - 1}{10^{0,1\alpha_p} - 1}}}{\cosh^{-1} \left( \frac{f_s}{f_p} \right)} = \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{0,180} - 1}{10^{0,1} - 1}}}{\cosh^{-1} \left( \frac{16347,4}{4137} \right)} = 5,16$$

Entonces resulta  $\varepsilon=0,5088$  y  $n=6$ .

Pero si se tiene en cuenta lo que se mencionó en el apartado **11.5.5** para los filtros pasa banda, el orden corregido del filtro debería determinarse mediante (11-107), resultando:

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{0,1\alpha_s} - 1}{10^{0,1\alpha_p} - 1}}}{\cosh^{-1} \left( \frac{\omega_{0d}^2 - \omega_{s1d}^2}{\omega_{s1d}(\omega_{p2d} - \omega_{p1d})} \right)} = \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{0,180} - 1}{10^{0,1} - 1}}}{\cosh^{-1} \left( \frac{40^2 - 20,381^2}{20,381(55,055 - 29,062)} \right)} = 7,33$$

Cabe destacar la diferencia entre ambos valores 7,33 es sustancialmente mayor que 5,16, con lo cual, si se desea cumplir la especificación para la frecuencia más baja de la banda de atenuación, se deberá adaptar  $n=8$ .

Los pasos realizados hasta aquí se han implementado en las siguientes líneas de código de Matlab:

```

1  clc
2  close all
3  % 1) Especificación del filtro pasa banda digital
4  fMues=20E3;
5  alfa_p=1; alfa_s=80;
6  fp1=4E3; fp2=6E3;
7  fs1=3E3; fs2=8E3;
8  f0=(fp1+fp2)/2;
9  % 2) Frecuencias Digitales características normalizadas
10 Wp1=2*fp1/fMues; % veces pi
11 Wp2=2*fp2/fMues; % veces pi
12 Ws1=2*fs1/fMues; % veces pi
13 Ws2=2*fs2/fMues; % veces pi
14 W0=2*f0/fMues; % veces pi
15 % 3) Predeformar las Frecuencias Digitales características normalizadas
16 % obteniendo las Frecuencias analógicas características
17 wp1d=2*fMues*tan(Wp1*pi/2); fp1d=wp1d/2/pi;
18 wp2d=2*fMues*tan(Wp2*pi/2); fp2d=wp2d/2/pi;
19 ws1d=2*fMues*tan(Ws1*pi/2); fs1d=ws1d/2/pi;
20 ws2d=2*fMues*tan(Ws2*pi/2); fs2d=ws2d/2/pi;
21 w0d=2*fMues*tan(W0*pi/2); f0d=w0d/2/pi;
22 %4) Adecuar los datos a la notación empleada para filtros analógicos
23 % Especificación del filtro pasa banda analógico
24 Amax=alfa_p; Amin=alfa_s;
25 Delta_fp=fp2d-fp1d;
26 Delta_fs=fs2d-fs1d;
27 % Transformación al dominio del pasa bajos analógico equivalente
28 fp=Delta_fp;
29 fs=Delta_fs;
30 % 5) Parámetros de diseño del filtro pasa bajos analógico equivalente
31 eps=sqrt(10^(0.1*Amax)-1);
32 wswp_ratio=wp1d/ws1d*(w0d^2-ws1d^2)/(w0d^2-wp1d^2);
33 nreal=acosh(sqrt(10^(0.1*Amin)-1)/eps)/acosh(wswp_ratio);
34 n=ceil(nreal);

```

5. Obtener la función  $H(s)$  del filtro pasa banda analógico de banda de paso de 1 dB de ripple, delimitada por  $f_{p1d} = 4625,3$  Hz y  $f_{p2d} = 8762,3$  Hz. Se aplica la transformación pasa bajos normalizado a pasa banda, en este caso, desnormalizando para el ancho de banda  $\Delta\omega$ :

$$\bar{s} = \frac{1}{\Delta\omega} \left( s + \frac{\omega_0^2}{s} \right) = \frac{1}{\omega_{p2d} - \omega_{p1d}} \left( s + \frac{\omega_{p1d} \cdot \omega_{p2d}}{s} \right)$$

A la función de transferencia del filtro pasa bajos normalizado de orden 8, la cual se conforma mediante ocho de los dieciseis polos que, para la aproximación de Chebyshev, se encuentran sobre una elipse en el plano  $s$ . Los ocho que se emplean son los que se encuentran en el semiplano izquierdo.

Con Matlab esto puede realizarse de varias maneras. La más directa demanda sólo tres líneas de código:

```

35 % 6) Obtener la función H(s) del filtro pasa banda analógico
36 % aplicando la aproximación de Chebyshev.
37 % Primero se obtienen los coeficientes del pasa bajos normalizado
38 % respecto de la pulsación de Amax y luego se transforma al pasa banda
39 % de pulsación central w0d y ancho de banda de Amax dB (wp2d-wp1d)
40 [Nslp, Dslp]=cheby1(n, Amax, 1, 'low', 's');
41 Hs=tf(Nslp, Dslp) % Escribir la H(s)del pasa bajos en formato normal
42 [Ns, Ds]=lp2bp(Nslp, Dslp, w0d, wp2d-wp1d);
43 Hs=tf(Ns, Ds) % Escribir la H(s)del pasabanda en formato normal

```

Aquí es muy importante notar en la línea 38 que a la función `cheby1()` se le pasa el parámetro de entrada `'s'`, el cual indica que los parámetros de salida, en este caso los coeficientes del numerador y del denominador, corresponden a la función de transferencia  $H(s)$ , es decir, corresponden a un filtro analógico. Y para este caso,  $w_{p1d}$  y  $w_{p2d}$  no están normalizadas y están en rad/s.

De este modo, el resultado de la línea 41 es la función  $H(s)$  del pasa banda analógico:

$$H(s) = \frac{b_8 s^8 + b_7 s^7 + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^{16} + c_{15} s^{15} + c_{14} s^{14} + \dots + c_2 s^2 + c_1 s + c_0}$$

Donde los coeficientes  $b_i$  y  $c_i$  son:

$b_8$	$b_7$	$b_6$	$b_5$	$b_4$	$b_3$
$3,2 \cdot 10^{33}$	$-1,768 \cdot 10^{23}$	$-1,269 \cdot 10^{28}$	$1,956 \cdot 10^{31}$	$-1,86 \cdot 10^{37}$	$-5,73 \cdot 10^{40}$
$b_2$	$b_1$	$b_0$			
$-1,731 \cdot 10^{44}$	$-4,895 \cdot 10^{48}$	$1,484 \cdot 10^{54}$			
$c_{15}$	$c_{14}$	$c_{13}$	$c_{12}$	$c_{11}$	$c_{10}$
$2,391 \cdot 10^4$	$1,444 \cdot 10^{10}$	$2,969 \cdot 10^{14}$	$8,824 \cdot 10^{19}$	$1,528 \cdot 10^{24}$	$2,977 \cdot 10^{29}$
$c_9$	$c_8$	$c_7$	$c_6$	$c_5$	$c_4$
$4,221 \cdot 10^{33}$	$6,062 \cdot 10^{38}$	$6,753 \cdot 10^{42}$	$7,622 \cdot 10^{47}$	$6,259 \cdot 10^{51}$	$5,783 \cdot 10^{56}$
$c_3$	$c_2$	$c_1$	$c_0$		
$3,113 \cdot 10^{60}$	$2,422 \cdot 10^{65}$	$6,418 \cdot 10^{68}$	$4,295 \cdot 10^{73}$		

Resulta interesante graficar  $H(s)$  para verificar que se obtuvo correctamente. La gráfica de la **Fig. 11.50** se obtuvo con las siguientes líneas de código (las áreas sombreadas se han agregado con fines didácticos mediante herramientas de edición).

```

44 % Gráfica de la Magnitud de |H(jw)| en dB vs. f en kHz
45 % Límites de Graficación deseados
46 min_dBplot=-120; max_dBplot=0.5;
47 min_kHz=0; max_kHz=20;
48 wi=2*pi*linspace(0, max_kHz*1E3, 2001); % 2001 valores lineales de w
49 [Hjw, w]=freqs(Ns, Ds, wi); % Evaluar H(jw) en los 2001 valores de wi
50 freq_kHz=w/(2*pi*1000); % f [kHz] a graficar en abcisas
51 H_dB=20*log10(abs(Hjw)); % |H(jw)| en dB a graficar en ordenadas
52 figure('Color', [1,1,1]);
53 plot(freq_kHz, H_dB, 'LineWidth', 3, 'Color', [0.6,0.2,0.6])
54 hold on
55 % Plantilla de la especificación para la banda de paso
56 Xp=[fp1d fp1d fp2d fp2d];

```

```

57 Yp=[min_dBplot -alfa_p -alfa_p min_dBplot];
58 % Plantilla de la especificación para la banda de atenuación
59 Xs=[0 fs1d fs1d fs1d fs2d fs2d fs2d fMues];
60 Ys=[-alfa_s -alfa_s max_dBplot NaN NaN max_dBplot -alfa_s -alfa_s];
61 Xp=Xp/1000; % Frecuencias en kHz
62 Xs=Xs/1000; % Frecuencias en kHz
63 plot(Xp, Yp, 'LineWidth',2, 'LineStyle', '--', 'Color',[0.8,0.2,0.6]);
64 plot(Xs, Ys, 'LineWidth',2, 'LineStyle', '--', 'Color',[0.8,0.2,0.6]);
65 grid on
66 set(gca, 'FontName','Arial', 'FontSize',26)
67 axis([min_fkHz, max_fkHz, min_dBplot, max_dBplot])
68 xlabel('\fontname{Times}\fontsize{26}\it f \rm\fontname{Arial} [kHz]');
69 ylabel('\fontname{Arial}\fontsize{26}|H(\it j\omega \rm)| [dB]');

```

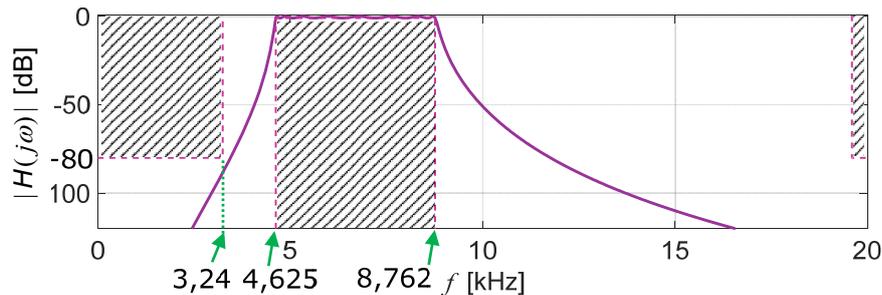


Fig. 11.50. Método de la transformación bilineal. Magnitud de la respuesta en frecuencia para el filtro pasa banda analógico predeformado.

También se considera muy interesante graficar la  $H(s)$  que se obtiene procediendo de manera idéntica pero con el valor de  $n=6$  que se obtuvo sin considerar la corrección por la predeformación. La gráfica obtenida se muestra en la Fig. 11.51.

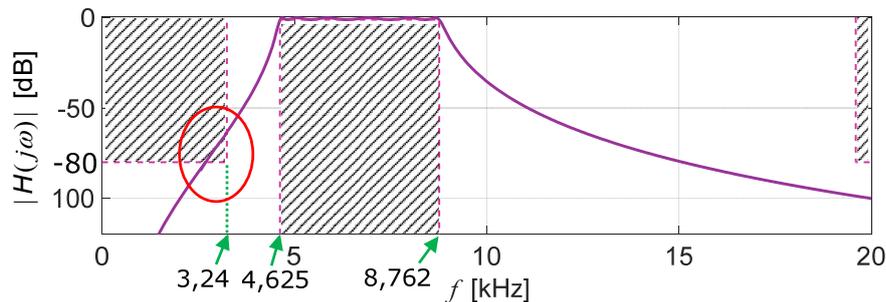


Fig. 11.51. Método de la transformación bilineal. Magnitud de la respuesta en frecuencia para el filtro pasa banda analógico predeformado sin corrección del orden.

Se hace notar que si no se corrigiera el orden del filtro teniendo en cuenta lo que se mencionó en el apartado 11.5.5 para los filtros pasa banda, en la banda de transición más cercana al origen no se cumpliría con la especificación.

- Obtener la función  $H(z)$  del filtro pasa banda digital aplicando la transformación bilineal a  $H(s)$ .

```

70 % 7) Obtener H(z) aplicando la transformación bilineal a H(s)
71 [Nz, Dz]=bilinear(Ns, Ds, fMues); % Coefs. del Num. y Den. de H(z)
72 Hz=tf(Nz, Dz, 1/fMues, 'variable', 'z^-1') % H(z^-1) en formato normal

```

Como resultado de la línea 69 se obtiene la función  $H(z^{-1})$  del pasa banda IIR:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{14} z^{-14} + b_{15} z^{-15} + b_{16} z^{-16}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{14} z^{-14} + a_{15} z^{-15} + a_{16} z^{-16}}$$

Donde los coeficientes  $b_i$  del numerador son:

$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$
$1,166 \cdot 10^{-6}$	$2,748 \cdot 10^{-15}$	$-9,329 \cdot 10^{-6}$	$1,488 \cdot 10^{-14}$	$3,265 \cdot 10^{-5}$	$1,854 \cdot 10^{-14}$	$-6,53 \cdot 10^{-5}$
$b_7$	$b_8$	$b_9$	$b_{10}$	$b_{11}$	$b_{12}$	$b_{13}$
$8,86 \cdot 10^{-14}$	$8,163 \cdot 10^{-5}$	$1,688 \cdot 10^{-13}$	$-6,53 \cdot 10^{-5}$	$3,775 \cdot 10^{-14}$	$3,265 \cdot 10^{-5}$	$1,943 \cdot 10^{-14}$

$b_{14}$	$b_{15}$	$b_{16}$
$-9,329 \cdot 10^{-6}$	$1,631 \cdot 10^{-15}$	$1,166 \cdot 10^{-6}$

y los coeficientes  $a_i$  del denominador son:

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
1	$-1,002 \cdot 10^{-14}$	6,678	$-5,662 \cdot 10^{-14}$	20,18	$-1,44 \cdot 10^{-13}$	35,98

$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$-2,318 \cdot 10^{-13}$	41,31	$-2,518 \cdot 10^{-13}$	31,25	$-1,146 \cdot 10^{-13}$	15,21	$-4,247 \cdot 10^{-14}$

$a_{14}$	$a_{15}$	$a_{16}$
4,354	$-8,334 \cdot 10^{-15}$	0,5613

Se observa que los coeficientes impares son varios órdenes de magnitud menores que los de orden par, y por lo tanto pueden aproximarse a 0.

Entonces se puede simplificar la expresión de  $H(z)$ , expresada como una relación de polinomios como en (11-83), lo cual permitirá identificar los coeficientes de la expresión de la secuencia  $y[n]$  a la salida del filtro cuando a la entrada se aplica la secuencia  $x[n]$ :

$$H(z) = \frac{b_0 + b_2 z^{-2} + b_4 z^{-4} + b_6 z^{-6} + b_8 z^{-8} + b_{10} z^{-10} + b_{12} z^{-12} + b_{14} z^{-14} + b_{16} z^{-16}}{a_0 + a_2 z^{-2} + a_4 z^{-4} + a_6 z^{-6} + a_8 z^{-8} + a_{10} z^{-10} + a_{12} z^{-12} + a_{14} z^{-14} + a_{16} z^{-16}}$$

siendo:

$b_0$	$b_2$	$b_4$	$b_6$	$b_8$	$b_{10}$	$b_{12}$	$b_{14}$	$b_{16}$
$1,166 \cdot 10^{-6}$	$-9,329 \cdot 10^{-6}$	$3,265 \cdot 10^{-5}$	$-6,53 \cdot 10^{-5}$	$8,163 \cdot 10^{-5}$	$-6,53 \cdot 10^{-5}$	$3,265 \cdot 10^{-5}$	$-9,329 \cdot 10^{-6}$	$1,166 \cdot 10^{-6}$

$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$	$a_8$	$a_{10}$	$a_{12}$	$a_{14}$	$a_{16}$
1	6,678	20,18	35,98	41,31	31,25	15,21	4,354	0,5613

7. Verificar que la respuesta en frecuencia  $H_d(\Omega) = H(e^{j\Omega})$  del filtro pasa banda digital cumple con las especificaciones del diseño.

Las siguientes líneas de código permiten graficar la magnitud de  $H(e^{j\Omega})$  en dB, y la gráfica obtenida se muestra en la Fig. 11.52 (las áreas sombreadas se han agregado con fines didácticos mediante herramientas de edición).

```

73 %% Gráfica de la Magnitud de H(W) en dB entre 0 y fMues/2 kHz
74 [H, W] = freqz(Nz, Dz, 2001); % Evaluar H(W) en 2001 valores de W
75 freq_kHz=W*fMues/(2*pi*1000); % magnitud a graficar en abcisas f [kHz]
76 H_dB=20*log10(abs(H)); % magnitud en ordenadas |H(W)| en dB
77 min_dBplot=-90; max_dBplot=1;
78 min_fkHz=0; max_fkHz=fMues/2/1000;
79 figure('Color',[1,1,1]);
80 plot(freq_kHz, H_dB, 'LineWidth', 3, 'Color',[0,0.5,0.5])
81 hold on
82 % Plantilla de la especificación para la banda de paso
83 fp1=Wp1*fMues/2000; fp2=Wp2*fMues/2000; % Frecuencias en kHz
84 fs1=Ws1*fMues/2000; fs2=Ws2*fMues/2000; % Frecuencias en kHz
85 Xp=[fp1 fp1 fp2 fp2];
86 Yp=[min_dBplot -alfa_p -alfa_p min_dBplot];
87 % Plantilla de la especificación para la banda de atenuación
88 Xs=[min_fkHz fs1 fs1 fs1 fs2 fs2 fs2 max_fkHz];
89 Ys=[-alfa_s -alfa_s max_dBplot NaN NaN max_dBplot -alfa_s -alfa_s];
90 plot(Xp, Yp, 'LineWidth', 2, 'LineStyle','--', 'Color',[0.8,0.2,0.6]);
91 plot(Xs, Ys, 'LineWidth', 2, 'LineStyle','--', 'Color',[0.8,0.2,0.6]);
92 grid on
93 set(gca, 'FontName','Arial', 'FontSize',26)
94 axis([min_fkHz,max_fkHz, min_dBplot,max_dBplot])
95 xlabel('\fontname{Times}\fontsize{26}\it f \rm\fontname{Arial} [kHz]');
96 ylabel('\fontname{Arial}\fontsize{26}|H| [dB]');

```

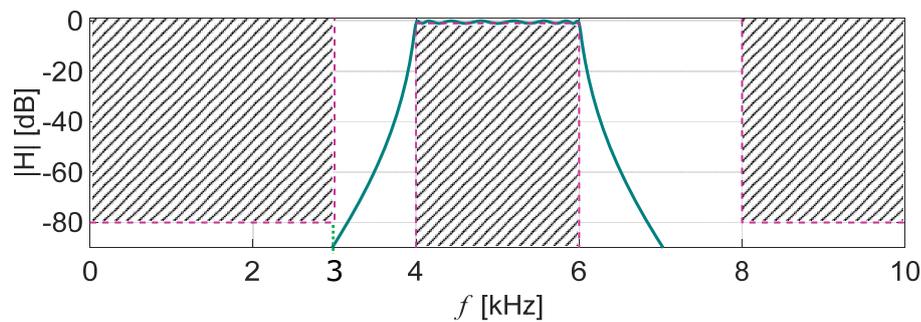


Fig. 11.52. Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro pasa banda especificado.

En la Fig. 11.53 se muestra el detalle de la banda de paso, que puede obtenerse fácilmente mediante las herramientas de edición de la gráfica que ofrece Matlab.

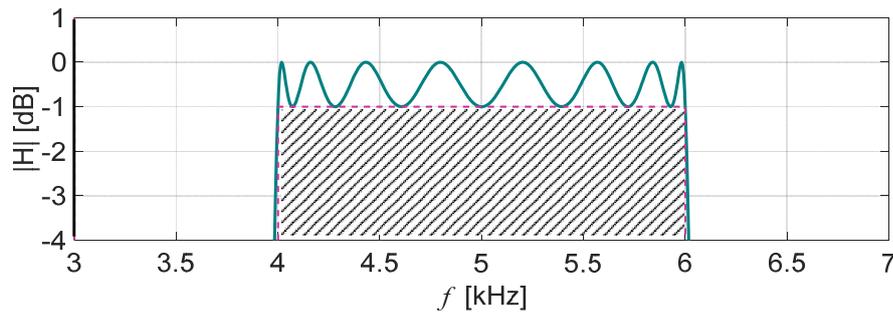


Fig. 11.53. Detalle de la banda de paso.

8. Obtener la expresión de la secuencia de salida  $y[n]$  a una señal de entrada  $x[n]$  aplicada al filtro. Por comparación de la expresión de  $H(z)$  obtenida con (11-81) y (11-83) se deduce que:

$$\begin{aligned} & a_0 \cdot y[n] + a_2 \cdot y[n-2] + a_4 \cdot y[n-4] + a_6 \cdot y[n-6] + a_8 \cdot y[n-8] + \\ & + a_{10} \cdot y[n-10] + a_{12} \cdot y[n-12] + a_{14} \cdot y[n-14] + a_{16} \cdot y[n-16] = \\ & = b_0 \cdot x[n] + b_2 \cdot x[n-2] + b_4 \cdot x[n-4] + b_6 \cdot x[n-6] + b_8 \cdot x[n-8] + \\ & + b_{10} \cdot x[n-10] + b_{12} \cdot x[n-12] + b_{14} \cdot x[n-14] + b_{16} \cdot x[n-16] \end{aligned}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} y[n] = & b_0 \cdot x[n] + b_2 \cdot x[n-2] + b_4 \cdot x[n-4] + b_6 \cdot x[n-6] + b_8 \cdot x[n-8] + b_{10} \cdot x[n-10] + \\ & + b_{12} \cdot x[n-12] + b_{14} \cdot x[n-14] + b_{16} \cdot x[n-16] - a_2 \cdot y[n-2] - a_4 \cdot y[n-4] - a_6 \cdot y[n-6] - \\ & - a_8 \cdot y[n-8] - a_{10} \cdot y[n-10] - a_{12} \cdot y[n-12] - a_{14} \cdot y[n-14] - a_{16} \cdot y[n-16] \end{aligned}$$

### Ejemplo 11.13.

Diseñar un filtro *supresor de banda* (o filtro *notch*) aplicando la aproximación de *Butterworth* a  $|H(j\omega)|$  para atenuar el "zumbido de alterna" de una señal de audio, es decir, para atenuar el acoplamiento indeseado de la señal de 50 Hz proveniente de la instalación eléctrica. El filtro debe cumplir con las siguientes especificaciones, empleando el menor número de componentes:

- Frecuencia central de la banda de supresión  $f_0 = 50$  Hz.
- La banda de supresión alrededor de  $f_0$  debe ser tal que para  $\Delta f = 10$  Hz la atenuación debe ser *por lo menos* 20 dB superior al valor correspondiente a  $f=0$  y a  $f=\infty$ , y para  $\Delta f = 100$  Hz alrededor  $f_0$ , la atenuación debe ser *a lo sumo* de 3 dB superior al valor correspondiente a  $f=0$  y a  $f=\infty$ .
- La frecuencia de muestreo debe ser 800 Hz.

### Resolución:

1. Las características requeridas para el filtro digital son:

$$\alpha_p = 3 \text{ dB} \quad \alpha_s = 20 \text{ dB}$$

Las frecuencias que delimitan las bandas de paso (3 dB) y de supresión (20 dB) fueron calculadas en el Ejemplo 9.9 (pág. 238):

$$f_{p1} = 20,71 \text{ Hz} \quad f_{p2} = 120,71 \text{ Hz} \quad f_{s1} = 45,25 \text{ Hz} \quad f_{s2} = 55,25 \text{ Hz} \quad f_0 = 50 \text{ Hz}$$

2. Determinar las frecuencias digitales normalizadas características correspondientes a  $f_{p1}, f_{p2}, f_{s1}, f_{s2}$  y  $f_0$ :

$$\Omega_{p1} = 2\pi \frac{f_{p1}}{f_s} = 2\pi \frac{20,71}{800} = 0,0518\pi \quad \Omega_{p2} = 2\pi \frac{f_{p2}}{f_s} = 2\pi \frac{120,71}{800} = 0,3018\pi$$

$$\Omega_{s1} = 2\pi \frac{f_{s1}}{f_s} = 2\pi \frac{45,25}{800} = 0,1131\pi \quad \Omega_{s2} = 2\pi \frac{f_{s2}}{f_s} = 2\pi \frac{55,25}{800} = 0,1381\pi$$

$$\Omega_0 = 2\pi \frac{f_0}{f_s} = 2\pi \frac{50}{800} = 0,125\pi$$

3. *Predeformar* las frecuencias digitales normalizadas empleando (11-96) para producir las frecuencias analógicas equivalentes necesarias para el diseño del filtro analógico:

$$\omega_{p1d} = \frac{2}{T_s} \cdot \tan\left(\frac{\Omega_{p1}}{2}\right) = 2 \cdot 800 \cdot \tan\left(\frac{0,0518\pi}{2}\right) = 130,412 \text{ rad/s} \quad \therefore f_{p1d} = 20,756 \text{ Hz}$$

$$\omega_{p2d} = \frac{2}{T_s} \cdot \tan\left(\frac{\Omega_{p2}}{2}\right) = 2 \cdot 800 \cdot \tan\left(\frac{0,3018\pi}{2}\right) = 820,87 \text{ rad/s} \quad \therefore f_{p2d} = 130,64 \text{ Hz}$$

$$\omega_{s1d} = \frac{2}{T_s} \cdot \tan\left(\frac{\Omega_{s1}}{2}\right) = 2 \cdot 800 \cdot \tan\left(\frac{0,1131\pi}{2}\right) = 287,34 \text{ rad/s} \quad \therefore f_{s1d} = 45,732 \text{ Hz}$$

$$\omega_{s2d} = \frac{2}{T_s} \cdot \tan\left(\frac{\Omega_{s2}}{2}\right) = 2 \cdot 800 \cdot \tan\left(\frac{0,1381\pi}{2}\right) = 352,70 \text{ rad/s} \quad \therefore f_{s2d} = 56,134 \text{ Hz}$$

$$\omega_{0d} = \frac{2}{T_s} \cdot \tan\left(\frac{\Omega_0}{2}\right) = 2 \cdot 800 \cdot \tan\left(\frac{0,125\pi}{2}\right) = 318,26 \text{ rad/s} \quad \therefore f_{0d} = 50,653 \text{ Hz}$$

Es bueno observar que la frecuencia  $f_{s1}$ , que corresponde al borde inferior de la banda de atenuación, sufre una ligera deformación de 45,25 a 45,73 Hz. Mientras que para la frecuencia correspondiente al borde superior de la banda de atenuación la deformación es de 55,25 kHz a 56,13 kHz. Por otra parte, las atenuaciones  $\alpha_p$  y  $\alpha_s$  no cambian y por lo tanto, se dispone de toda la información necesaria para proceder con el diseño del filtro analógico.

4. Adecuar los datos disponibles a la notación empleada para los filtros analógicos. En consecuencia, la especificación para el filtro pasa banda analógico resulta:

$$\alpha_p = 3 \text{ dB} \quad \Delta f_p = f_{p2d} - f_{p1d} = 130,74 - 20,756 = 109,89 \text{ Hz}$$

$$\alpha_s = 20 \text{ dB} \quad \Delta f_s = f_{s2d} - f_{s1d} = 56,134 - 45,732 = 10,402 \text{ Hz}$$

Entonces la especificación para el filtro pasa bajos equivalente será:

$$\alpha_p = 3 \text{ dB} \quad \overline{f_p} = 1/\Delta f_p = 1/109,89 = 0,0091 \text{ Hz}$$

$$\alpha_s = 20 \text{ dB} \quad \overline{f_s} = 1/\Delta f_s = 1/10,402 = 0,0961 \text{ Hz}$$

Obtener los parámetros de diseño  $\varepsilon$  y  $n$  del filtro pasa bajos analógico (pasos 1 a 3 del procedimiento indicado en 9.4.3):

$$A(f) = 10 \log \left( 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{f}{f_p} \right)^{2n} \right) \leq A_{\text{máx}}$$

de donde resulta para  $f = f_p$ :

$$\varepsilon^2 = 10^{0,1 \cdot \alpha_p} - 1 \quad \varepsilon^2 = 10^{0,1 \cdot 3} - 1 \quad \therefore \quad \varepsilon = 1$$

Por otra parte la *atenuación mínima* admitida en la banda de atenuación para  $f = f_s$ , permite determinar el orden  $n$  requerido:

$$A(f_p) = 10 \log \left( 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{f_p}{f_p} \right)^{2n} \right) \geq \alpha_s \Rightarrow n \geq \frac{\log \left[ \frac{10^{0,1 \cdot \alpha_s} - 1}{\varepsilon^2} \right] \log \left[ \frac{10^{0,1 \cdot 20} - 1}{1} \right]}{2 \log \left( \frac{f_s}{f_p} \right) 2 \log \left( \frac{0,0961}{0,0091} \right)} = 0,9756$$

Entonces resulta  $\varepsilon=1$  y  $n=1$ .

Pero si se tiene en cuenta lo que se mencionó en el apartado **11.5.5** para los filtros supresores de banda, el orden corregido del filtro debería determinarse mediante (11-114), resultando:

$$n \geq \frac{\log \left[ \frac{10^{0,1 \cdot \alpha_s} - 1}{10^{0,1 \cdot \alpha_p} - 1} \right] \log \left[ \frac{10^{0,1 \cdot 20} - 1}{10^{0,1 \cdot 3} - 1} \right]}{2 \log \left( \frac{\omega_{0d}^2 - \omega_{p1d}^2}{\omega_{p1d}(\omega_{s2d} - \omega_{s1d})} \right) 2 \log \left( \frac{318,26^2 - 130,412^2}{130,412(352,70 - 287,34)} \right)} = 1,0037$$

En este caso resultaron ambos valores de referencia 0,9756 y 1,0037 muy próximos. Si bien uno haría adoptar  $n=1$  y el otro  $n=2$ , se considera que puede adoptarse  $n=1$ , admitiendo que la frecuencia inferior de la banda de supresión de 3 dB no cumplirá la especificación por muy poco, diferencia que no justifica adoptar un  $n$  mayor.

Los pasos realizados hasta aquí se han implementado en las siguientes líneas de código de Matlab:

```

1  clc
2  close all
3  % 1) Especificación del filtro supresor de banda digital
4  alfa_p=3; alfa_s=20;
5  fp1=20.71; fp2=120.71;
6  fs1=45.25; fs2=55.25;
7  f0=50;
8  fMues=800; % Frecuencia de muestreo en Hz
9  % 2) Frecuencias Digitales características normalizadas
10 Wp1=2*fp1/fMues; % veces pi
11 Wp2=2*fp2/fMues; % veces pi
12 Ws1=2*fs1/fMues; % veces pi
13 Ws2=2*fs2/fMues; % veces pi
14 W0=2*f0/fMues; % veces pi
15 % 3) Predeformar las Frecuencias Digitales características normalizadas
16 % obteniendo las Frecuencias analógicas características
17 wp1d=2*fMues*tan(Wp1*pi/2); fp1d=wp1d/2/pi;
18 wp2d=2*fMues*tan(Wp2*pi/2); fp2d=wp2d/2/pi;
19 ws1d=2*fMues*tan(Ws1*pi/2); fs1d=ws1d/2/pi;
20 ws2d=2*fMues*tan(Ws2*pi/2); fs2d=ws2d/2/pi;
21 w0d=2*fMues*tan(W0*pi/2); f0d=w0d/2/pi;
22 % 4) Adecuar los datos disponibles a la notación de filtros analógicos
23 % Especificación del filtro supresor de banda analógico
24 Delta_fp=fp2d-fp1d;
25 Delta_fs=fs2d-fs1d;
26 % Especificación del filtro pasa bajos analógico equivalente
27 Amax=alfa_p; Amin=alfa_s;
28 fp=1/Delta_fp;
29 fs=1/Delta_fs;
30 % 5) Parámetros de diseño del filtro pasa bajos analógico equivalente
31 eps=sqrt(10^(0.1*Amax)-1);
32 x=log10((10^(0.1*Amin)-1)/(10^(0.1*Amax)-1))/2;
33 n_real=x/log10(fs/fp);
34 n_real_corregido=x/log10((w0d^2-wp1d^2)/wp1d/(ws2d-ws1d));
35 n=ceil(n_real); % En este caso se adopta el valor de n sin corrección

```

- Obtener la función  $H(s)$  del filtro supresor de banda analógico de banda de paso de 3 dB de ripple, delimitada por  $f_{p1d} = 20,756$  Hz y  $f_{p2d} = 130,74$  Hz.

Según el procedimiento indicado en **9.4.3**, se requeriría aplicar la transformación pasa bajos normalizado a supresor de banda (8-7), en este caso, desnormalizando para el ancho de banda  $\Delta\omega$ :

$$\bar{s} = \frac{\Delta\omega s}{s^2 + \omega_0^2}$$

La función de transferencia del filtro pasa bajos normalizado de orden 1, se conforma mediante uno de los dos polos que se encuentran sobre el eje real del plano  $s$ . El polo a considerar es el que se encuentra en el semieje real negativo:

$$\overline{H(s)} = \frac{1}{1+s}$$

Y aplicando la transformación entonces resulta

$$H(s) = \frac{1}{1 + \frac{\Delta\omega_{pd} s}{s^2 + \omega_{0d}^2}} = \frac{s^2 + \omega_{0d}^2}{s^2 + \Delta\omega_{pd} s + \omega_{0d}^2} = \frac{s^2 + 318,26^2}{s^2 + (820,87 - 130,412) s + 318,26^2}$$

Con Matlab esto puede realizarse con sólo tres líneas de código:

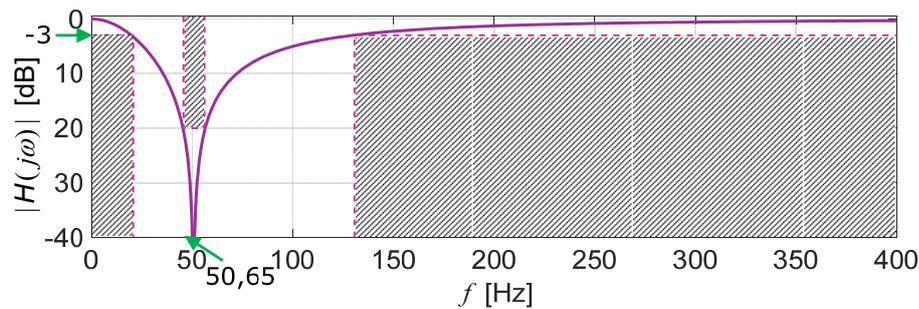
```
36 % 6) Obtener la función H(s) del filtro supresor de banda analógico
37 % aplicando la aproximación de Butterworth.
38 % Primero se obtienen los coeficientes del pasa bajos normalizado
39 % respecto de la pulsación de 3 dB y luego se transforma al supprime
40 % banda de pulsación central w0d y ancho de banda de 3 dB (wp2d-wp1d)
41 Nslp, Dslp]=butter(n, 1, 'low', 's'); % Coeficientes del LPN
42 [Ns, Ds]=lp2bs(Nslp, Dslp, w0d, wp2d-wp1d); % Coeficientes del BS
43 Hs=tf(Ns, Ds) % Escribir la H(s) del BS en formato normal
```

De este modo, el resultado de la línea 41 es la función  $H(s)$  del supprime banda analógico:

$$H(s) = \frac{s^2 + 1,013 \cdot 10^5}{s^2 + 690,5 s + 1,013 \cdot 10^5}$$

Resulta interesante graficar  $H(s)$  para verificar que se obtuvo correctamente. Las siguientes líneas de código permiten hacerlo correctamente, y la gráfica obtenida se muestra en la **Fig. 11.54** (las áreas sombreadas se han agragado con fines didácticos mediante herramientas de edición).

```
44 % Gráfica de la Magnitud de |H(jw)| en dB vs. f en kHz
45 % Límites de Graficación deseados
46 min_dBplot=-40; max_dBplot=0.5;
47 min_freq=0; max_freq=fMues/2;
48 wi=2*pi*linspace(0, max_freq, 2001); % 2001 valores lineales de w
49 [Hjw, w]=freqs(Ns, Ds, wi); % Evaluar H(jw) en los 2001 valores de wi
50 freq_Hz=w/(2*pi); % f [Hz] a graficar en abcisas
51 H_dB=20*log10(abs(Hjw)); % |H(jw)| en dB a graficar en ordenadas
52 figure('Color',[1,1,1]);
53 plot(freq_Hz, H_dB, 'LineWidth', 3, 'Color', [0.6,0.2,0.6])
54 hold on
55 % Plantilla de la especificación para la banda de paso
56 Xp=[0 wp1d wp1d wp1d wp2d wp2d wp2d pi*fMues];
57 Yp=[-alfa_p -alfa_p min_dBplot NaN NaN min_dBplot -alfa_p -alfa_p];
58 % Plantilla de la especificación para la banda de atenuación
59 Xs=[ws1d ws1d ws2d ws2d];
60 Ys=[max_dBplot -alfa_s -alfa_s max_dBplot];
61 Xp=Xp/2/pi; % Frecuencias en Hz
62 Xs=Xs/2/pi; % Frecuencias en Hz
63 plot(Xp, Yp, 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '--', 'Color',
[0.8,0.2,0.6]);
64 plot(Xs, Ys, 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '--', 'Color',
[0.8,0.2,0.6]);
65 grid on
66 set(gca, 'FontName', 'Arial', 'FontSize', 26)
67 axis([min_freq, max_freq, min_dBplot, max_dBplot])
68 xlabel('\fontname{Times}\fontsize{26}\it f \rm\fontname{Arial} [Hz]');
69 ylabel('\fontname{Arial}\fontsize{26}|H(\it j\omega \rm)| [dB]');
```



**Fig. 11.54.** Método de la transformación bilineal. Magnitud de la respuesta en frecuencia para el filtro supresor de banda analógico predeformado

6. Obtener la función  $H(z)$  del filtro supresor de banda digital aplicando la transformación bilineal:

$$s = \frac{2}{T_S} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)$$

a la  $H(s)$  obtenida en el paso anterior. Entonces:

$$H(z) = \frac{\left[ \frac{2}{T_S} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) \right]^2 + 1,013 \cdot 10^5}{\left[ \frac{2}{T_S} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) \right]^2 + 690,5 \frac{2}{T_S} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) + 1,013 \cdot 10^5}$$

$$H(z) = \frac{[2 \cdot f_S (z-1)]^2 + 1,013 \cdot 10^5 (z+1)^2}{[2 \cdot f_S (z-1)]^2 + 2 \cdot 690,5 \cdot f_S (z^2 - 1) + 1,013 \cdot 10^5 (z+1)^2}$$

$$H(z) = \frac{(4 \cdot f_S^2 + 1,013 \cdot 10^5) z^2 + (-8 \cdot f_S^2 + 2,026 \cdot 10^5) z + 4 \cdot f_S^2 + 1,013 \cdot 10^5}{(4 \cdot f_S^2 + 1381 \cdot f_S + 1,013 \cdot 10^5) z^2 + (-8 \cdot f_S^2 + 2,026 \cdot 10^5) z + 4 \cdot f_S^2 - 1381 \cdot f_S + 1,013 \cdot 10^5}$$

$$H(z) = \frac{0,7067 \cdot z^2 - 1,306 \cdot z + 0,7067}{z^2 - 1,306 \cdot z + 0,4133}$$

Y escrita en formato normal:

$$H(z^{-1}) = \frac{0,7067 - 1,306 \cdot z^{-1} + 0,7067 \cdot z^{-2}}{1 - 1,306 \cdot z^{-1} + 0,4133 \cdot z^{-2}}$$

Las siguientes líneas de código permiten llegar a esta expresión de una manera directa:

```
70 % 7) Obtener H(z) aplicando la transformación bilineal a H(s)
71 [Nz, Dz]=bilinear(Ns, Ds, fMues) % Coefs. del Num. y Den. de H(z)
72 Hz=tf(Nz, Dz, 1/fMues, 'variable', 'z') % Ver H(z) en formato normal
73 Hz=tf(Nz, Dz, 1/fMues, 'variable', 'z^-1') % Idem para H(z^-1)
```

7. Verificar que la respuesta en frecuencia  $H_d(\Omega)=H(e^{j\Omega})$  del filtro pasa banda digital cumple con las especificaciones del diseño.

Las siguientes líneas de código permiten graficar la magnitud de  $H(e^{j\Omega})$  en dB, y la gráfica obtenida se muestra en la **Fig. 11.55** (las áreas sombreadas se han agregado con fines didácticos mediante herramientas de edición).

```
74 %% Gráfica de la Magnitud de H(W) en dB entre 0 y fMues/2
75 [H, W] = freqz(Nz, Dz, 2001); % Evaluar H(W) en 2001 valores de W
76 freq_Hz=W*fMues/(2*pi); % f [Hz] a graficar en abcisas
77 H_dB=20*log10(abs(H)); % |H(W)| en dB a graficar en ordenadas
78 min_dBplot=-40; max_dBplot=1;
79 min_freq=0; max_freq=fMues/2;
80 figure('Color', [1,1,1]);
81 plot(freq_Hz, H_dB, 'LineWidth', 3, 'Color', [0,0.5,0.5])
82 hold on
83 % Plantilla de la especificación para la banda de paso
```

```

84 Xp=[0 Wp1 Wp1 Wp1 Wp2 Wp2 Wp2 1];
85 Yp=[-alfa_p -alfa_p min_dBplot NaN NaN min_dBplot -alfa_p -alfa_p];
86 % Plantilla de la especificación para la banda de atenuación
87 Xs=[Ws1 Ws1 Ws2 Ws2];
88 Ys=[max_dBplot -alfa_s -alfa_s max_dBplot];
89 Xp=Xp*fMues/2; % Frecuencias en Hz
90 Xs=Xs*fMues/2; % Frecuencias en Hz
91 plot(Xp, Yp, 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '--', 'Color',
[0.8,0.2,0.6]);
92 plot(Xs, Ys, 'LineWidth', 2, 'LineStyle', '--', 'Color',
[0.8,0.2,0.6]);
93 grid on
94 set(gca, 'FontName','Arial', 'FontSize',26)
95 axis([min_freq,max_freq, min_dBplot,max_dBplot])
96 xlabel('\fontname{Times}\fontsize{26}\it f \rm\fontname{Arial} [Hz]');
97 ylabel('\fontname{Arial}\fontsize{26}|H| [dB]');

```

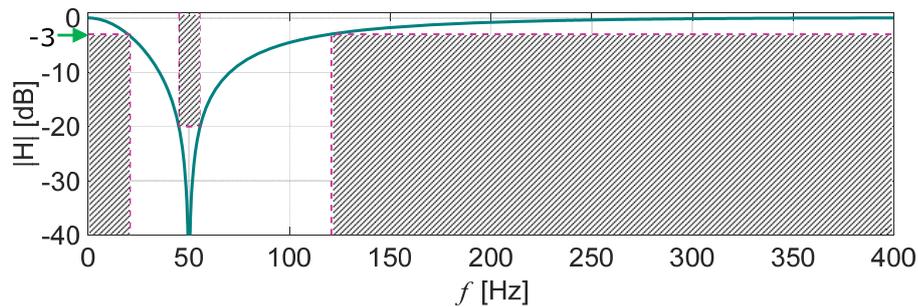


Fig. 11.55. Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro supresor de banda especificado.

Se observa que se cumplen las especificaciones, excepto en la frecuencia 20,79 Hz para la cual la atenuación es de 3,33 dB, en lugar de los 3 dB especificados, diferencia que se considera aceptable frente a la opción de emplear el valor corregido de  $n=2$ .

8. Obtener la expresión de la secuencia de salida  $y[n]$  a una señal de entrada  $x[n]$  aplicada al filtro. Por comparación de la expresión de  $H(z)$  obtenida con (11-81) y (11-83) se deduce que:

$$y[n] - 1,306 \cdot y[n-1] + 0,4133 \cdot y[n-2] = 0,7067 \cdot x[n] - 1,306 \cdot x[n-1] + 0,7067 \cdot x[n-2]$$

Es decir:

$$y[n] = 0,7067 \cdot x[n] - 1,306 \cdot x[n-1] + 0,7067 \cdot x[n-2] + 1,306 \cdot y[n-1] - 0,4133 \cdot y[n-2]$$

## 11.6. Selección entre filtros FIR y filtros IIR

En el dominio de la frecuencia, si la linealidad de la fase es el factor más importante en el comportamiento del filtro que se va a diseñar, un filtro FIR es la opción más adecuada.

El hecho de que la respuesta de fase del filtro  $\theta(\omega)$  sea una función lineal de la frecuencia significa que el retardo de grupo, que se define como  $\tau = -(d\theta/d\omega)$ , es constante. Esto significa que el filtro transmite todas las frecuencias con la misma cantidad de retraso, con lo cual no habrá ninguna distorsión de fase y la señal de entrada se retrasará en una constante al transmitirse a la salida. Un filtro con un retardo de grupo constante es altamente deseable en la transmisión de señales digitales, y un filtro FIR puede diseñarse fácilmente para cumplir con la respuesta de magnitud requerida de tal manera que logre un retardo de grupo constante; y que, además, tiene la ventaja de ser estable con coeficientes cuantificados.

Si, en cambio, la linealidad de la fase no fuera importante conviene usar un filtro IIR, ya que en la mayoría de los casos el orden del filtro será menor que el del FIR equivalente.

En efecto, como regla general, un filtro IIR tiene menos rizado y el corte es más abrupto que un FIR con el mismo grado de polinomio. Por esta razón, si se puede tolerar alguna distorsión de fase o ésta no es importante, se prefiere un IIR, principalmente porque su implementación involucra menos parámetros, requiere menos memoria y tiene menor complejidad computacional.

En líneas generales el diseño de un filtro digital consiste en encontrar una función de transferencia de pulsos  $H(z)$  que satisfaga una dada especificación, lo cual involucra la determinación de los coeficientes que intervienen en la expresión de  $H(z)$ , o coeficientes del filtro.

Tal como ya se ha mostrado, los métodos de diseño de los filtros IIR y de los filtros FIR son diferentes debido a las características de cada uno de ellos. Normalmente, los filtros FIR se diseñan directamente en el dominio discreto mientras los filtros IIR suelen implementarse como aproximaciones a filtros analógicos diseñados previamente.

**11.7. Formas canónicas de realización de filtros digitales**

La realización de un filtro digital consiste en diseñar un algoritmo de computación que lleve a cabo las operaciones indicadas en las expresiones (11-28) ó (11-83), según se trate de un filtro FIR o IIR.

Pero así como estas expresiones admiten escribirse en distintas formas equivalentes, cada una de ellas da lugar a implementaciones que tienen distintas particularidades. Existen tres formas básicas de realización, llamadas también *formas canónicas*, que son las formas de implementación *directa*, *en cascada* y *en paralelo*. La particularidad que tienen estas formas canónicas es que el número de elementos de retardo requeridos es el mismo y depende del orden del sistema. De hecho, se dice que la implementación del filtro es canónica con respecto al retardo, cuando el número de elementos de retardo empleados es igual al orden del filtro. No es posible implementar una dada función de transferencia con menos retardos que el orden de la función de transferencia, pero sí es posible (y a veces deseable) aplicar retardos adicionales.

Por lo tanto, el número de elementos de retardo requeridos no puede ser el criterio para la selección de la topología a emplear, sino que ello dependerá de factores tales como velocidad y precisión deseados.

Las formas canónicas de los filtros aquí presentadas, además, son muy utilizadas en el mundo del diseño digital y el procesamiento de señales, lo cual representa una ventaja de esta forma de implementación de los filtros. En efecto, en diferentes tecnologías de procesamiento digital se encuentran estructuras canónicas de filtros ya implementadas, de manera tal que el usuario sólo debe establecer los valores de los coeficientes. De este modo se pueden usar óptimamente las capacidades de cómputo que ofrece cada tecnología minimizando los esfuerzos requeridos para implementar el filtro.

Los filtros digitales se pueden realizar de dos maneras: por *convolución* (filtros FIR) y por *recursión* (filtros IIR). Los filtros realizados por convolución pueden tener un rendimiento mucho mejor que los filtros que usan recursividad, pero se ejecutan mucho más lentamente.

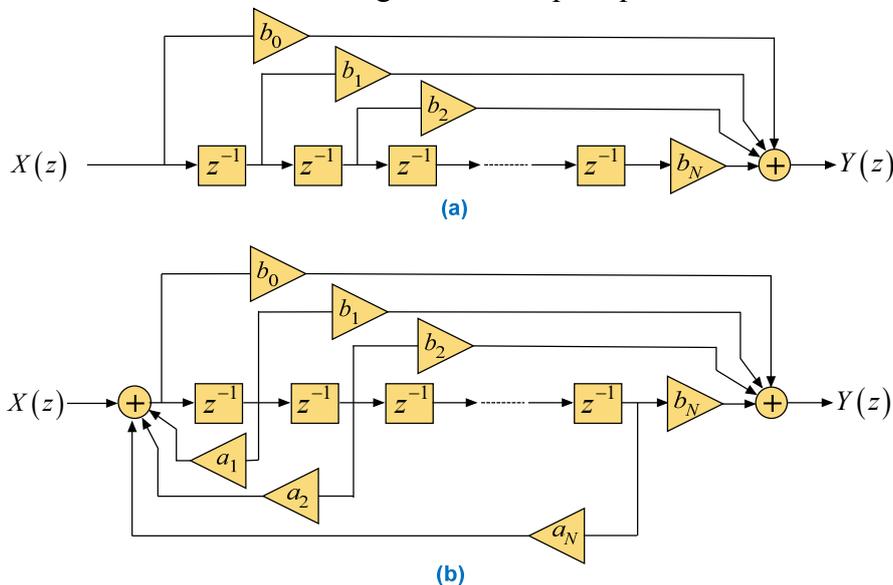
La forma directa se aplica a filtros FIR, mientras que las formas de implementación en cascada o en paralelo se aplica a filtros IIR.

**11.7.1. Forma de implementación directa**

En los diagramas en bloques de la **Fig. 11.56** cada bloque rectangular representa un retardo unitario y cada bloque triangular representa una multiplicación por el factor indicado en cada uno.

El diagrama en bloques que se muestra en la **Fig. 11.56a** corresponde a la implementación directa del desarrollo de la sumatoria de la expresión (11-28).

De manera enteramente similar, el desarrollo de las dos sumatorias de la expresión (11-82) puede implementarse en forma directa mediante el diagrama en bloques que se muestra en la **Fig. 11.56b**.



**Fig. 11.56.** Formas canónicas de realización de filtros digitales. Implementación directa. (a) Filtros FIR. (b) Filtros IIR.

11.7.2. Forma de implementación en cascada

Esta implementación se basa en la factorización de la expresión (11-83) efectuada de manera tal que se pueda expresar a la función  $H(z)$  de la siguiente forma:

$$H(z) = b_0 \cdot H_1(z) \cdot H_2(z) \cdot \dots \cdot H_m(z) = b_0 \cdot \prod_{k=1}^m H_k(z) \tag{11-116}$$

Esta descomposición permite que  $H(z)$  puede implementarse mediante  $m$  bloques *en cascada*, cada uno de los cuales está caracterizado por  $H_k(z)$ . Expresando cada factor en forma racional, puede escribirse:

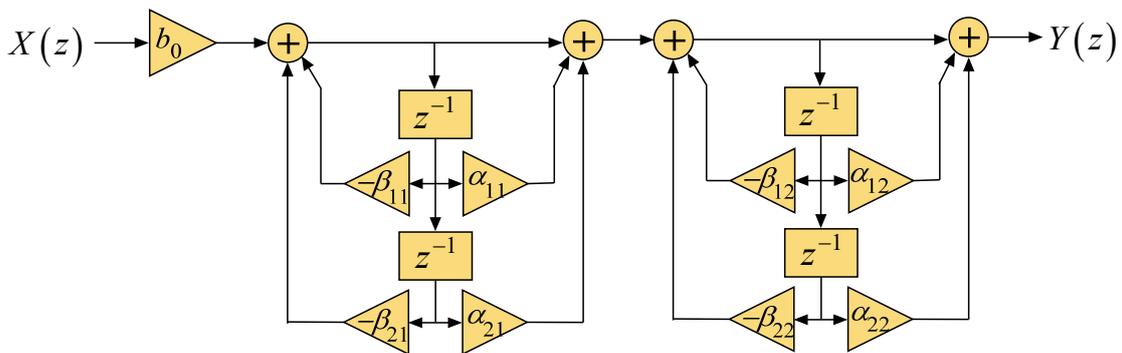
$$H(z) = b_0 \cdot \prod_{k=1}^m \frac{\alpha_{2k} \cdot z^{-2} + \alpha_{1k} \cdot z^{-1} + 1}{\beta_{2k} \cdot z^{-2} + \beta_{1k} \cdot z^{-1} + 1} \tag{11-117}$$

Donde, dado que se han postulado polinomios de grado 2,  $m$  debe adoptarse como la parte entera del mayor entre los valores  $(N+1)/2$  y  $(M+1)/2$  de la expresión (11-83).

Por ejemplo, si  $N=3$ , debe adoptarse  $m=2$ , y resulta según la expresión (11-117), el siguiente desarrollo:

$$H(z) = b_0 \cdot \frac{\alpha_{21} \cdot z^{-2} + \alpha_{11} \cdot z^{-1} + 1}{\beta_{21} \cdot z^{-2} + \beta_{11} \cdot z^{-1} + 1} \cdot \frac{\alpha_{22} \cdot z^{-2} + \alpha_{12} \cdot z^{-1} + 1}{\beta_{22} \cdot z^{-2} + \beta_{12} \cdot z^{-1} + 1}$$

Esto conduce al diagrama en bloques que se muestra en la **Fig. 11.57**, en la cual cada bloque rectangular representa un retardo unitario y cada bloque triangular representa una multiplicación por el factor indicado para cada uno.



**Fig. 11.57.** Formas canónicas de realización de filtros digitales. Implementación en cascada.

11.7.3. Forma de implementación en paralelo

Esta implementación se basa en la descomposición de la expresión (11-83) en una sumatoria de términos de manera tal que se pueda expresar a la función  $H(z)$  de la siguiente forma:

$$H(z) = \alpha_0 \cdot [H_1(z) + H_2(z) + \dots + H_m(z)] = \alpha_0 \cdot \sum_{k=1}^m H_k(z) \tag{11-118}$$

Esta descomposición permite que  $H(z)$  puede implementarse mediante  $m$  bloques *en paralelo*, cada uno de los cuales está caracterizado por  $H_k(z)$ . Expresando cada factor en forma racional, puede escribirse:

$$H(z) = \alpha_0 \cdot \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_{1k} \cdot z^{-1} + 1}{\beta_{2k} \cdot z^{-2} + \beta_{1k} \cdot z^{-1} + 1} \tag{11-119}$$

Esto conduce al diagrama en bloques que se muestra en la **Fig. 11.58**, donde cada bloque rectangular representa un retardo unitario y cada bloque triangular representa una multiplicación por el factor indicado para cada uno.

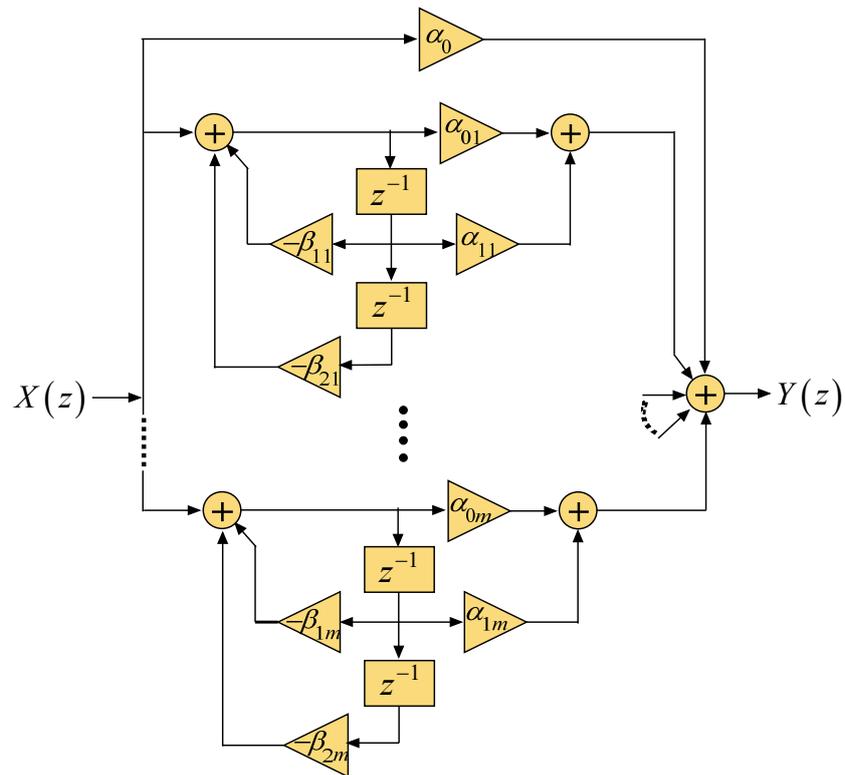


Fig. 11.58. Formas canónicas de realización de filtros digitales. Implementación en paralelo.

## 11.8. Bibliografía

- [1] Dietrich Schlichthärle. *Digital Filters. Basics and Design*. 2<sup>nd</sup>. Ed. Springer-Verlag. Berlin. 2011. ISBN 978-3-642-14324-3
- [2] B.A. Sheno. *Introduction to Digital Signal Processing and Filter Design*. Wiley Interscience. John Wiley & Sons, Inc. New Jersey. 2006. ISBN 978-0-471-46482-2.
- [3] Fred J. Taylor. *Digital Filters. Principles and applications with MATLAB*. IEEE Press - John Wiley & Sons, Inc. New Jersey. 2012. ISBN 978-0-470-77039-9.
- [4] Richard G. Lyons. *Understanding Digital Signal Processing (2nd Edition)*. Prentice Hall. 2004. ISBN 978-0131089891.
- [5] S.M. Bozic and R.J. Chance. *Digital Filters and Signal Processing in Electronic Engineering*. Horwood Publishing. Chichester. England. 1998. ISBN 1-898563-58-6.
- [6] Orhan Gazi. *Understanding Digital Signal Processing*. Springer Nature Singapore Pte Ltd. 2018. ISBN 978-981-10-4961-3.
- [7] Boaz Porat. *A Course in Digital Signal Processing*. John Wiley & Sons, Inc. United States. 1997. ISBN 978-0-471-14961-6.
- [8] Wai-Kai Chen. *Passive, Active and Digital Filters (3<sup>rd</sup>. Ed)*. CRC Press. Boca Raton. FL. 2009. ISBN 978-1-4200-5885-7.
- [9] Les Thede. *Practical Analog and Digital Filter Design*. Artech House Inc. Norwood, MA. 2004. ISBN 978-1-58053-915-9.
- [10] B.P. Lathi and R. Green. *Essentials of Digital Signal Processing*. Cambridge University Press. New York, NY. 2014. ISBN 978-1-107-05932-0
- [11] K.S. Thyagarajan. *Introduction to Digital Signal Processing Using MATLAB with Application to Digital Communications*. Springer. San Diego, CA, USA. 2019. ISBN 978-3-319-76028-5.



---

# Apéndice A

## Modelos del Transformador en bajas frecuencias

---

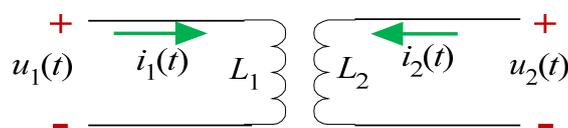
### A.1. Introducción

El transformador es un dispositivo eléctrico que convierte la energía eléctrica alterna de un cierto nivel de tensión, en energía alterna de otro nivel de tensión, por medio de la acción de un campo magnético. Constructivamente, está constituido por dos o más bobinas de material conductor, eléctricamente aisladas entre sí, arrolladas por lo general alrededor de un mismo núcleo de material ferromagnético. El único vínculo entre las bobinas es el flujo magnético común que se establece en el núcleo.

En este Apéndice se presentarán los modelos circuitales galvánicos para bajas frecuencias que permitirán realizar de manera simplificada el análisis de circuitos que emplean transformadores, distinguiéndose tres tipos de transformadores: el transformador ideal, el transformador real y el transformador perfecto.

### A.2. Circuitos magnéticamente acoplados

Consideremos el caso más simple, y no por ello menos importante, de dos arrollamientos de alambre con dos pares de terminales, entre los cuales se concatena parte o la totalidad del flujo magnético originado por las respectivas corrientes (**Fig. A1**).



**Fig. A1.** Arrollamientos de alambre con dos pares de terminales que concatenan flujo magnético.

Para dos arrollamientos muy próximos entre sí, de manera que compartan parte del flujo que genera cada uno, la tensión en bornes de uno de los arrollamientos depende de la corriente que circula por el propio arrollamiento y de la corriente que circula por el otro, y viceversa. Las siguientes ecuaciones describen lo dicho para la situación mostrada en la **Fig. A1**:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= L_1 \frac{d}{dt} i_1(t) + M_{12} \frac{d}{dt} i_2(t) \\ u_2(t) &= L_2 \frac{d}{dt} i_2(t) + M_{21} \frac{d}{dt} i_1(t) \end{aligned} \tag{A-1}$$

Los elementos de red descritos por estas ecuaciones se los denomina técnicamente *transformadores*. Al arrollamiento del lado 1, de  $N_1$  vueltas, se lo denomina *primario* y al arrollamiento del lado 2, de  $N_2$  vueltas, se lo denomina *secundario*.

Las constantes  $L_1$  y  $L_2$  son las autoinductancias del arrollamiento primario y secundario respectivamente, siendo:

$$L_1 = N_1 \frac{\phi_1}{i_1} = \frac{\lambda_{11}}{i_1}$$

$$L_2 = N_2 \frac{\phi_2}{i_2} = \frac{\lambda_{22}}{i_2}$$
(A-2)

donde:

$\lambda_{11}$  los enlaces del arrollamiento 1 con el flujo debido a la corriente  $i_1$ .

$\lambda_{22}$  los enlaces del arrollamiento 2 con el flujo debido a la corriente  $i_2$ .

Las constantes  $M_{12}$  y  $M_{21}$  denotan la influencia cruzada o mutua que existe entre ambos arrollamientos:

$$M_{12} = N_1 \frac{\phi_2}{i_2} = \frac{\lambda_{12}}{i_2}$$

$$M_{21} = N_2 \frac{\phi_1}{i_1} = \frac{\lambda_{21}}{i_1}$$
(A-3)

donde:

$\lambda_{12}$  los enlaces del arrollamiento 1 con el flujo debido a la corriente  $i_2$ .

$\lambda_{21}$  los enlaces del arrollamiento 2 con el flujo debido a la corriente  $i_1$ .

Partiendo de la Ley de Ampere para un arrollamiento de  $N$  espiras, recorrido por una corriente  $i$ , con un núcleo magnético de permeabilidad  $\mu$ , sección transversal  $S$  y longitud media  $l$ , pueden escribirse las siguientes relaciones:

$$N \cdot i = H \cdot l = \frac{B}{\mu} \cdot l = \frac{\phi}{S\mu} l \Rightarrow \phi = \frac{N \cdot i \cdot S \cdot \mu}{l}$$

Y para los dos arrollamientos acoplados resulta:

$$N_1 i_1(t) + N_2 i_2(t) = H(t) l = \frac{B(t) l}{\mu} = \frac{l}{S\mu} \phi(t) = \mathfrak{R} \phi(t)$$
(A-4)

Donde  $H$  es el campo *intensidad magnética*,  $B$  es el campo *inducción magnética*,  $\phi$  es el *flujo magnético*,  $\mu$  es la *permeabilidad magnética absoluta* y  $\mathfrak{R}$  es la *reluctancia magnética*.

Entonces:

$$\phi_1 = N_1 i_1 \frac{\mu S}{l} \quad \phi_2 = N_2 i_2 \frac{\mu S}{l}$$
(A-5)

Por lo tanto:

$$L_1 = N_1^2 \frac{\mu S}{l}$$
(A-6)

$$L_2 = N_2^2 \frac{\mu S}{l}$$
(A-7)

$$M_{12} = M_{21} = N_1 N_2 \frac{\mu S}{l}$$
(A-8)

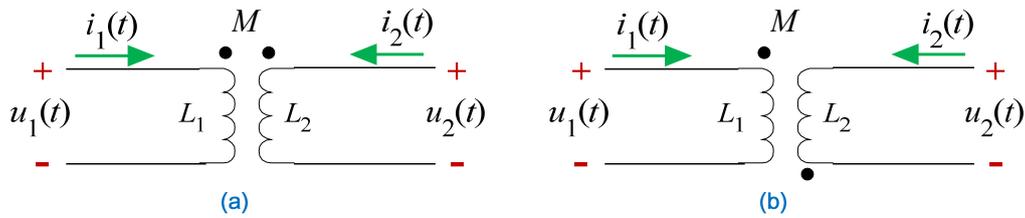
están determinadas exclusivamente por la geometría y por la característica magnética del núcleo.

Como  $M_{12}$  resulta igual a  $M_{21}$ , se denotan con  $M$  que se denomina *inductancia de acoplamiento o mutua*. Este elemento del modelo del transformador refleja el efecto sobre cada arrollamiento, de los flujos inducidos por la corriente que circula en el otro arrollamiento.

En efecto, cuando ambos flujos tienen sentidos iguales se refuerzan, y la tensión en el primer arrollamiento crece al aumentar la corriente en el segundo arrollamiento (acoplamiento positivo). Pero cuando ambos flujos tienen sentidos opuestos existe una cancelación, y la tensión en el primer arrollamiento disminuye al aumentar la corriente en el segundo arrollamiento (acoplamiento negativo).

Por convención se adopta a  $M$  siempre positiva y se indica el refuerzo u oposición de los flujos mediante un signo + o -, respectivamente, delante de  $M$ .

Por otra parte, que los flujos se refuercen o se opongan depende esencialmente de cómo estén arrolladas las bobinas, y al ser sólo dos bobinas, existen sólo dos posibilidades. La distinción entre ambos casos se hace indicando en cada bobina los *puntos homólogos*, con la siguiente convención: cuando ambas corrientes entran o salen por los puntos homólogos, los flujos se refuerzan (**Fig. A2a**); caso contrario, los flujos se cancelan (**Fig. A2b**).



**Fig. A2.** Convención de puntos homólogos: **(a)** refuerzo de flujos; **(b)** cancelación de flujos.

Con las convenciones mencionadas, las relaciones  $u-i$  para el conexionado indicado en la **Fig. A2a** resultan:

$$u_1(t) = L_1 \frac{d}{dt} i_1(t) + M \frac{d}{dt} i_2(t) \tag{A-9-a}$$

$$u_2(t) = L_2 \frac{d}{dt} i_2(t) + M \frac{d}{dt} i_1(t) \tag{A-9-b}$$

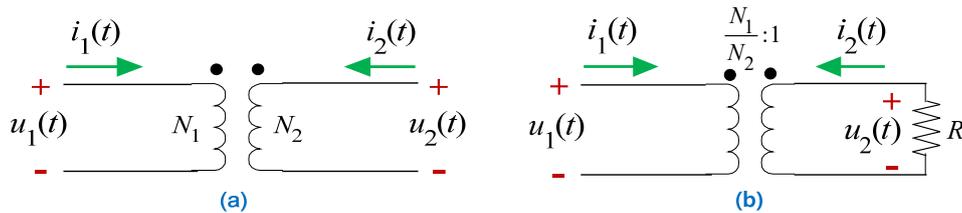
Y las relaciones  $u-i$  para el conexionado indicado en la **Fig. A2b** resultan:

$$u_1(t) = L_1 \frac{d}{dt} i_1(t) - M \frac{d}{dt} i_2(t) \tag{A-10-a}$$

$$u_2(t) = L_2 \frac{d}{dt} i_2(t) - M \frac{d}{dt} i_1(t) \tag{A-10-b}$$

### A.3. Transformador ideal

La **Fig. A3a** presenta el modelo del transformador ideal. El transformador ideal es una abstracción física y está constituido por dos arrollamientos con *acoplamiento ideal* en un *medio magnético ideal*.



**Fig. A3.** Modelo del transformador ideal: **(a)** en vacío; **(b)** cargado con una resistencia  $R$ .

Como el medio magnético es ideal ( $\mu = \infty$  lo que implica  $\mathfrak{R} = 0$ ), la expresión (A-4) resulta:

$$N_1 i_1(t) + N_2 i_2(t) = 0 \tag{A-11}$$

Por lo tanto:

$$i_1(t) = -\frac{N_2}{N_1} i_2(t)$$

Como el transformador es ideal, cada arrollamiento concatena la totalidad del flujo  $\phi$ , el cual atraviesa cada espira, y es el mismo para todas las espiras de ambos arrollamientos (acoplamiento ideal implica que no hay flujo disperso). Entonces, si se aplica la ley de Faraday a cada arrollamiento de  $N_1$  y  $N_2$  espiras respectivamente resulta:

$$u_1(t) = N_1 \frac{d\phi}{dt} \qquad u_2(t) = N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

Y por lo tanto resulta:

$$\frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow u_1(t) = \frac{N_1}{N_2} u_2(t)$$

Si se define la *relación de transformación* ( $n$ ) como:

$$n = \frac{N_1}{N_2}$$

Entonces las relaciones  $u-i$  para el transformador ideal de relación de transformación  $n:1$  resultan:

$$u_1(t) = n u_2(t) \tag{A-12}$$

$$i_1(t) = -\frac{1}{n} i_2(t) \quad (\text{A-13})$$

Y escritas matricialmente:

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ i_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & -\frac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{A-14})$$

Es decir, para caracterizar un transformador ideal se requiere un único parámetro: la *relación de transformación*  $n$ .

A continuación se analiza la resistencia que se observa desde el primario de un transformador ideal cuando se conecta una resistencia  $R$  en el secundario de dicho transformador, como se indica en la **Fig. A3b**. La condición de carga impuesta por la resistencia  $R$  es:

$$u_2(t) = -R i_2(t)$$

La resistencia conectada en el lado secundario se refleja en el par de terminales del primario como:

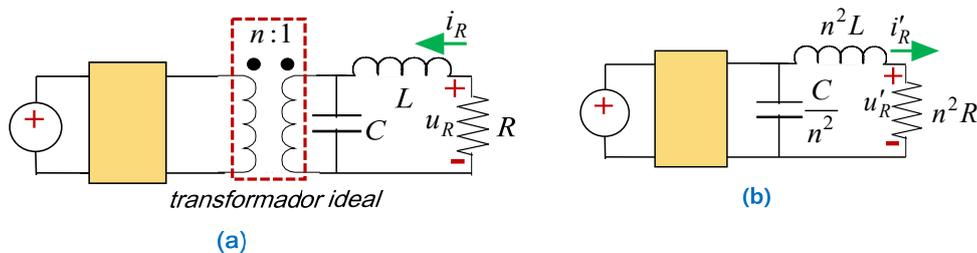
$$R' = \frac{u_1(t)}{i_1(t)} = \frac{n u_2(t)}{-\frac{1}{n} i_2(t)} = n^2 \left[ -\frac{u_2(t)}{i_2(t)} \right] = n^2 R$$

Es decir, el transformador ideal tiene la propiedad de que una resistencia  $R$  conectada en terminales del secundario, aparece en el otro par de terminales como el producto de  $R$  por el cuadrado de la *relación de transformación*  $n$ .

Es muy fácil comprobar aplicando el mismo razonamiento para régimen sinusoidal permanente empleando tensiones y corrientes con notación fasorial e impedancias complejas, que una impedancia  $Z$  conectada en terminales del secundario, aparece en el otro par de terminales como el producto de  $Z$  por el cuadrado de la *relación de transformación*  $n$ .

Esto conlleva que, los elementos  $R$  y  $L$  del circuito del secundario se reflejan al lado primario como  $n^2 R$  y  $n^2 L$ , mientras que los capacitores se reflejan divididos por  $n^2$  (recordar que  $Z=1/j\omega C$ ).

Por lo tanto el análisis del circuito indicado esquemáticamente en la **Fig A4a** puede efectuarse mediante el circuito galvánico equivalente de la **Fig A4b**, en el cual todas las tensiones y corrientes están *referidas al primario*.



**Fig. A4.** Análisis de circuitos con un transformador ideal: (a) esquema de conexión; (b) modelo circuital referido al primario.

Por lo tanto las magnitudes realmente presentes en el secundario del transformador ideal de la **Fig A4a** se obtienen aplicando las relaciones  $u-i$  del transformador ideal ya vistas que, para la notación empleada en la **Fig A4b**, aplicadas sobre el resistor resultan:

$$\begin{bmatrix} u'_R(t) \\ i'_R(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & -\frac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_R(t) \\ i_R(t) \end{bmatrix}$$

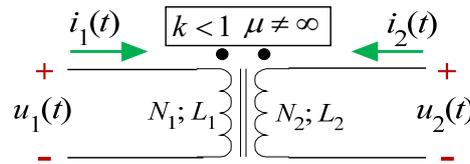
En lo que concierne al flujo de energía, la energía total suministrada al transformador resulta:

$$E(t) = \int_{-\infty}^t [u_1(\tau) i_1(\tau) + u_2(\tau) i_2(\tau)] d\tau = \int_{-\infty}^t \left[ u_1(\tau) i_1(\tau) + \frac{u_1(\tau)}{n} (-n i_1(\tau)) \right] d\tau = 0$$

Entonces la energía suministrada es nula, lo cual indica que el transformador ideal no disipa ni acumula energía.

**A.4. Transformador real**

El transformador real tiene los dos arrollamientos con *acoplamiento no ideal* ( $0 < k < 1$ ) en un *medio magnético real* ( $\mu \neq \infty$  lo que implica  $\Re \neq 0$ ). El esquema circuital se indica en la **Fig. A5**.



**Fig. A5.** Esquema del transformador real.

Aquí es muy importante tener en cuenta que las expresiones (A-9a) y (A-10a) están referidas al lado primario, y las expresiones (A-9b) y (A-10b) están referidas al lado secundario, lo cual hace necesario adecuarlas para encontrar un modelo simplificado de utilidad práctica.

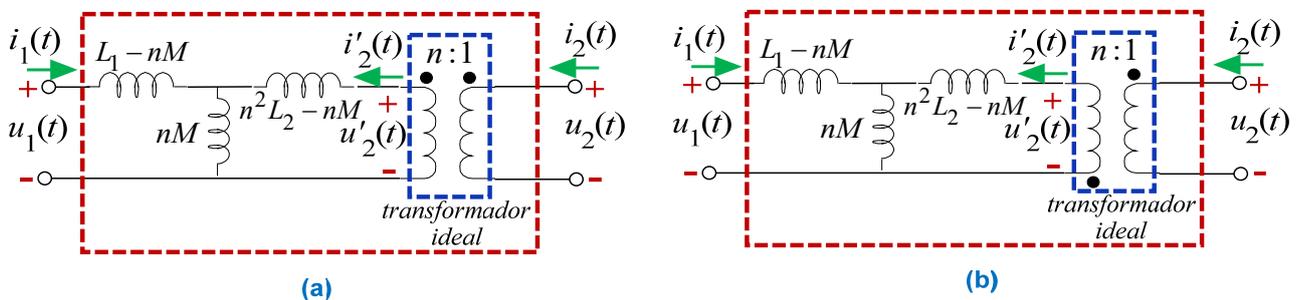
La manera más simple de hacerlo consiste en referir *ambas expresiones al primario*, teniendo en cuenta las relaciones *u-i* (15) del transformador ideal. De este modo, resultan:

$$u_1(t) = L_1 \frac{d}{dt} i_1(t) \pm M \frac{d}{dt} i_2(t) = L_1 \frac{d}{dt} i_1(t) \pm M \frac{d}{dt} [n i'_2(t)] = L_1 \frac{d}{dt} i_1(t) \pm nM \frac{d}{dt} i'_2(t) \quad (A-15)$$

$$u'_2(t) = n \cdot \left[ L_2 \frac{d}{dt} [n \cdot i'_2(t)] \pm M \frac{d}{dt} i_1(t) \right] = n^2 L_2 \frac{d}{dt} i'_2(t) \pm n \cdot M \frac{d}{dt} i_1(t) \quad (A-16)$$

Resultando que la inductancia mutua transferida al primario es  $nM$ , mientras que la inductancia del secundario  $L_2$  transferida al primario es  $n^2 L_2$ .

De este modo, planteando las ecuaciones de malla del circuito primario, puede comprobarse que el modelo de la **Fig A6** reproduce correctamente las expresiones (A-15) y (A-16); de acuerdo a la convención adoptada para los puntos homólogos, la **Fig A6a** corresponde al signo *positivo* y la **Fig A6b** al signo *negativo* del término debido al acoplamiento magnético entre ambos arrollamientos.



**Fig. A6.** Convención de puntos homólogos para el transformador real: (a) refuerzo de flujos; (b) cancelación de flujos.

La gran ventaja de este modelo es que las inductancias *no* están acopladas magnéticamente. Cada inductancia de este modelo admite la siguiente interpretación física en concordancia con la denominación siguiente:

- Inductancia de *dispersión* del arrollamiento primario:

$$L_{D1} = L_1 - n M \quad (A-17)$$

Esta inductancia tiene en cuenta al flujo magnético debido a la corriente  $i_1$  que *no concatena* al arrollamiento secundario. Por lo tanto sólo tiene sentido físico si  $L_{D1} \geq 0$ .

- Inductancia de *dispersión* del arrollamiento secundario referida al primario:

$$L'_{D2} = n^2 L_2 - n M \quad (A-18)$$

Esta inductancia tiene en cuenta al flujo magnético debido a la corriente  $i_2$  que *no concatena* al arrollamiento primario. Por lo tanto sólo tiene sentido físico si  $L'_{D2} \geq 0$ .

- Inductancia de *magnetización* vista desde el arrollamiento primario:

$$L_m = n M \quad (A-19)$$

Esta inductancia tiene en cuenta al flujo magnético que *concatena* a ambos arrollamientos, Debe notarse que el efecto *aditivo* o *sustractivo* del flujo producido por la corriente de cada arrollamiento está

considerado con el sentido de los puntos homólogos del transformador ideal del modelo;  $n$ ,  $M$  y  $L_m$  son siempre positivos

Por un lado, a partir de estas definiciones puede escribirse:

$$0 \leq nM \leq L_1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{nM}{L_1} \leq 1 \tag{A-20}$$

$$0 \leq nM \leq n^2 L_2 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{M}{n L_2} \leq 1 \tag{A-21}$$

Y multiplicando miembro a miembro:

$$0 \leq \frac{M^2}{L_1 L_2} \leq 1$$

Se define el denominado *coeficiente de acoplamiento*  $k$  de manera tal que:

$$k^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad 0 \leq k \leq 1$$

Resultando entonces:

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad 0 \leq k \leq 1 \tag{A-22}$$

Por otro lado, como  $L_{D1}$  y  $L'_{D2}$  tienen que ser positivas, deben cumplirse las siguientes relaciones:

$$L_1 \geq nM \quad \Rightarrow \quad n \leq \frac{L_1}{M}$$

$$n^2 L_2 \geq nM \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{M}{L_2}$$

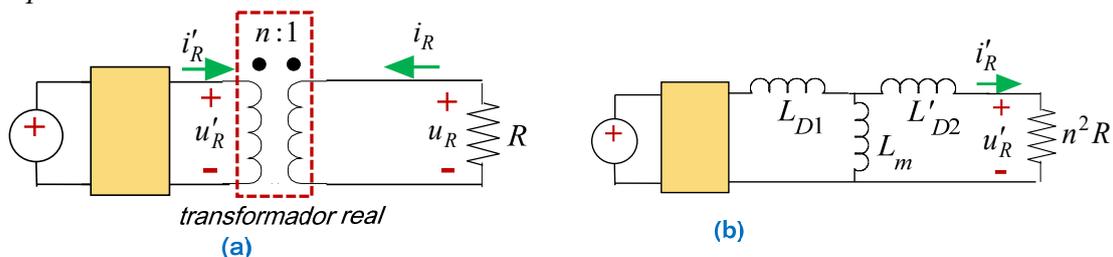
Es decir:

$$\frac{M}{L_2} \leq n \leq \frac{L_1}{M} \quad \Rightarrow \quad k \cdot \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \leq n \leq \frac{1}{k} \cdot \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \tag{A-23}$$

Entonces para caracterizar completamente un transformador real se requieren cuatro parámetros: la *relación de transformación*  $n$ , las inductancias  $L_1$ ,  $L_2$  y el *coeficiente de acoplamiento*  $k$ .

Es importante comprender que (A-23) expresa la relación que existe entre  $k$ ,  $n$ ,  $L_1$  y  $L_2$  para que el modelo resulte válido, pero no debe interpretarse que  $n$  se deba adoptar dentro de ese rango de valores luego de fijar los valores de  $k$ ,  $L_1$  y  $L_2$ . Muy por el contrario, el diseño del transformador se efectúa *adoptando* los valores de  $N_1$  y  $N_2$  constructivamente convenientes para realizar un valor de  $n$  deseado. Dicho valor de  $n$  sumado a las características del circuito magnético, determinan los valores de  $L_1$  y  $L_2$ , que junto con el mejor acoplamiento constructivamente posible (que en la práctica de transformadores de potencia  $k$  se encuentra comprendido entre 0,85 y 1) resultarán valores tales que cumplirán con la relación (A-23).

En la **Fig A7a** se muestra en forma esquemática una red genérica que incluye un transformador real, y en **Fig A7b** se muestra el circuito galvánico equivalente en el cual todas las tensiones y corrientes están referidas al primario.



**Fig. A7.** Análisis de circuitos con un transformador real: **(a)** esquema de conexión; **(b)** modelo circuital referido al primario.

Por lo tanto las magnitudes realmente presentes en el secundario del transformador real de la **Fig A7a** se obtienen, como antes, aplicando las relaciones  $u-i$  ya vistas que, para la notación empleada en la **Fig A7**, resultan:

$$\begin{bmatrix} u'_R(t) \\ i'_R(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & -\frac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_R(t) \\ i_R(t) \end{bmatrix}$$

**A.5. Transformador perfecto**

El transformador perfecto tiene los dos arrollamientos con *acoplamiento ideal* ( $k=1$ ) en un *medio magnético real* ( $\mu \neq \infty$  lo que implica  $\Re \neq 0$ ).

Cuando en el transformador real se aumenta el acoplamiento hasta llegar a la situación ideal ( $k=1$ ) como el *medio magnético es real* ( $\mu \neq \infty$  lo que implica  $\Re \neq 0$ ), se llega al caso particular del *transformador perfecto*.

Ahora, por ser  $k=1$ , de (A-23) y de (A-26) resulta:

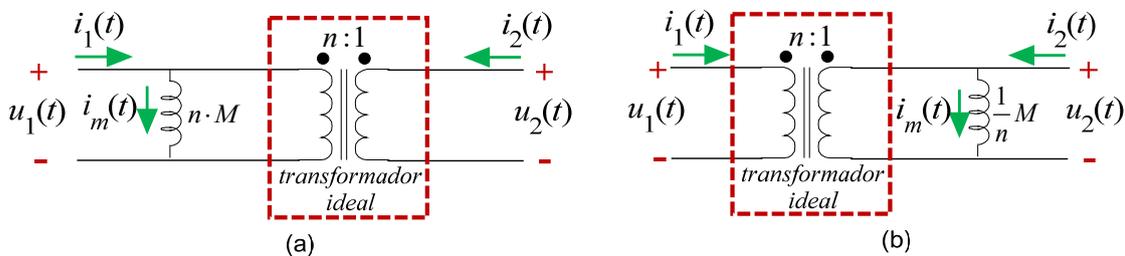
$$M = \sqrt{L_1 L_2} \quad n = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \tag{A-27}$$

Con lo cual el modelo del transformador perfecto sólo requiere dos parámetros:  $L_1$  y  $L_2$  o bien  $n$  y  $M$ . Y en esta situación particular resulta combinando (A-23), (A-24) y (A-25):

$$\begin{aligned} L_{D1} &= 0 \\ L_{D2} &= 0 \\ L_m &= nM \end{aligned}$$

Por lo tanto, el circuito equivalente de un transformador perfecto consiste en un transformador ideal con una inductancia de magnetización  $L_m$  que, considerada en el circuito primario debe disponerse en derivación como se indica en la **Fig. A8a**, siendo  $L_m = n.M$ .

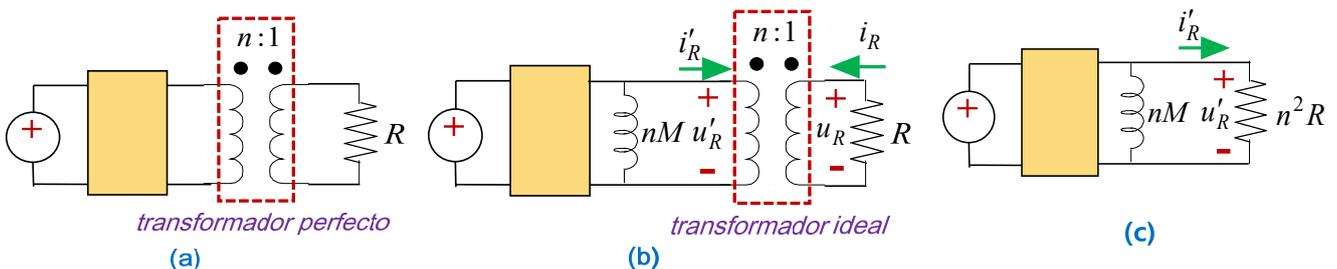
Mediante un razonamiento análogo, puede fácilmente comprobarse que si todas las corrientes se refirieran al secundario, el circuito equivalente del transformador perfecto sería el indicado en la **Fig. A8b**, siendo ahora  $L_m = M / n$ , aunque esta última representación es muy poco empleada.



**Fig. A8.** Modelo del transformador perfecto empleando un transformador ideal: **(a)** inductancia mutua referida al primario; **(b)** inductancia mutua referida al secundario.

Es decir, para caracterizar un transformador perfecto se requieren dos parámetros: la *relación de transformación*  $n$  y la *inductancia mutua*  $M$  (o bien la inductancia de magnetización  $L_m$ ).

De manera análoga a las consideraciones realizadas para el transformador ideal en relación a la **Fig. A3**, en la **Fig. A9a** se muestra en forma esquemática una red genérica que incluye un transformador perfecto, y en la **Fig. A9c** se muestra el circuito galvánico equivalente en el cual todas las tensiones y corrientes están referidas al primario.



**Fig. A9.** Análisis de circuitos con un transformador perfecto: **(a)** esquema de conexión; **(b)** esquema refiriendo  $M$  al primario de un transformador ideal; **(c)** modelo circuital referido al primario.

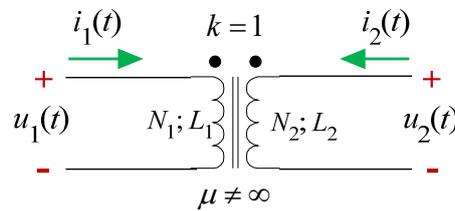
Por lo tanto las magnitudes realmente presentes en el secundario del transformador perfecto de la **Fig. A9a** se obtienen, como antes, aplicando las relaciones  $u-i$  ya vistas que, para la notación empleada en la **Fig. A9**, resultan:

$$\begin{bmatrix} u'_R(t) \\ i'_R(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & -\frac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_R(t) \\ i_R(t) \end{bmatrix}$$

Otra deducción del modelo del transformador perfecto

En el apartado **0** se dedujo el modelo del transformador perfecto como un caso particular del transformador real. Aquí se obtiene el mismo modelo a partir de las leyes de Ampere y de Faraday, de una manera más rigurosa.

En la **Fig. A10**. se muestra un esquema circuital menos abstracto de un transformador. El esquema es muy similar al empleado para el transformador ideal, pero las diferencias, aunque sutiles, son muy importantes. El transformador perfecto tiene los dos arrollamientos con *acoplamiento ideal* ( $k=1$ ) en un *medio magnético real* ( $\mu \neq \infty$  lo que implica  $\mathfrak{R} \neq 0$ ).



**Fig. A10.** Esquema del transformador perfecto.

La ley de Ampere en este caso resulta:

Y refiriendo todas las corrientes al circuito del primario del transformador:

$$i_1(t) + \frac{N_2}{N_1} i_2(t) = \phi(t) \frac{N_2}{\frac{N_1 N_2 \mu S}{l}} = N_2 \phi(t) \frac{1}{M} = N_2 \frac{N_1}{N_1} \phi(t) \frac{1}{M} = N_1 \phi(t) \frac{1}{\frac{N_1}{N_2} M} = N_1 \phi(t) \frac{1}{nM}$$

Teniendo en cuenta las definiciones de la inductancia mutua ya vistas:

$$M = N_1 \frac{\phi_2}{i_2} = N_2 \frac{\phi_1}{i_1} \Rightarrow i_2 = \frac{N_1 \phi_2}{M}$$

el término:

$$\frac{1}{n} N_1 \frac{\phi(t)}{M}$$

Puede interpretarse como la corriente vista en el primario que se requiere para magnetizar el núcleo de material magnético no ideal ( $\mu \neq \infty$  lo que implica  $\mathfrak{R} \neq 0$ ):

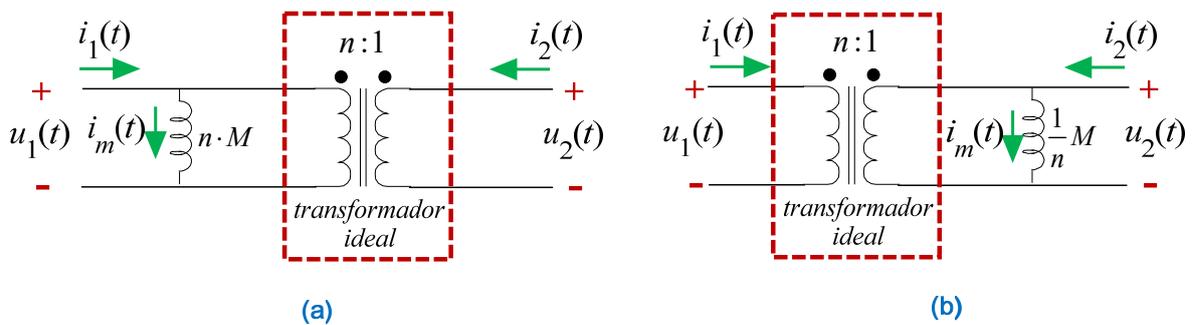
$$i_1(t) = -\frac{1}{n} i_2(t) + N_1 \phi(t) \frac{1}{nM} = -\frac{1}{n} i_2(t) + N_1 \phi(t) \frac{1}{L_m} = -\frac{1}{n} i_2(t) + i_m(t)$$

Es decir, la corriente en el arrollamiento primario del transformador perfecto tiene dos componentes: una es la corriente del arrollamiento secundario *reflejada en el primario* a través de la relación de vueltas (igual que en el caso del transformador ideal) y la otra es la conocida como *corriente de magnetización* que es la componente de la corriente del arrollamiento primario encargada de generar el flujo magnetizante.

Por lo tanto, el circuito equivalente de un transformador perfecto consiste en un transformador ideal con una inductancia de magnetización  $L_m$  que, considerada en el circuito primario debe disponerse en derivación como se indica en la **Fig. A11a**, siendo  $L_m = n.M$ .

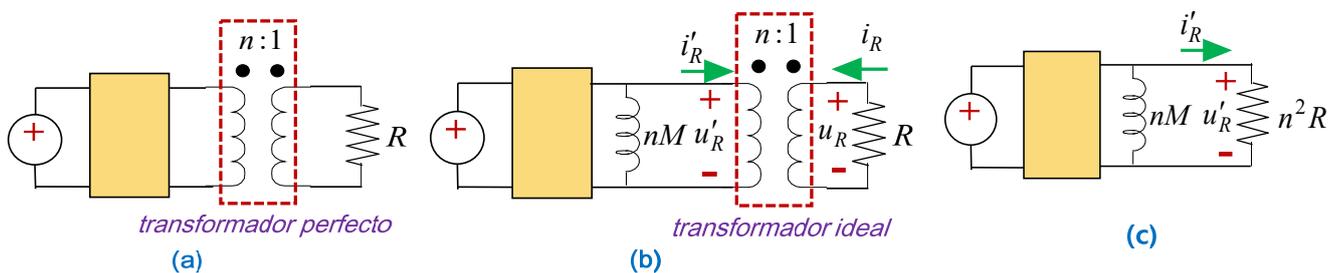
Mediante un razonamiento análogo, puede fácilmente comprobarse que si todas las corrientes se refirieran al secundario, el circuito equivalente del transformador perfecto sería el indicado en la **Fig. A11b**, siendo ahora  $L_m = M / n$ , aunque esta última representación es muy poco empleada.

Es decir, para caracterizar un transformador perfecto se requieren dos parámetros: la *relación de transformación*  $n$  y la *inductancia mutua*  $M$  (o bien la inductancia de magnetización  $L_m$ ).



**Fig. A11.** Deducción del modelo del transformador perfecto: (a) refiriendo  $M$  al primario de un transformador ideal; (b) refiriendo  $M$  al secundario de un transformador ideal.

De manera análoga a las consideraciones realizadas para el transformador ideal en relación a la Fig. A3, en la Fig A12a se muestra en forma esquemática una red genérica que incluye un transformador perfecto, y en la Fig A12c se muestra el circuito galvánico equivalente en el cual todas las tensiones y corrientes están referidas al primario.



**Fig. A12.** Análisis de circuitos con un transformador perfecto: (a) esquema de conexión; (b) sustitución con el esquema empleando un transformador ideal; (c) modelo circuital referido al primario.

Por lo tanto las magnitudes realmente presentes en el secundario del transformador perfecto de la Fig A12a se obtienen, como antes, aplicando las relaciones  $u-i$  ya vistas que, para la notación empleada en la Fig A12, resultan:

$$\begin{bmatrix} u'_R(t) \\ i'_R(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & -\frac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_R(t) \\ i_R(t) \end{bmatrix}$$

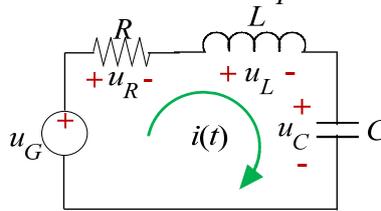


# Apéndice B

## Resolución de circuitos aplicando Transformada de Laplace

### B.1. Generalización de las leyes y teoremas de redes al dominio de Laplace

Supóngase un circuito serie como el indicado en la **Fig. B1**, con condiciones iniciales  $I_{L0}$  y  $U_{C0}$ , excitado con un generador  $u_G(t)$ , en el cual se desea determinar la respuesta  $i(t)$ .



**Fig. B1.** Circuito RLC serie.

La ecuación para la única malla resulta aplicando la segunda ley de Kirchoff:

$$u_G(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

Y reemplazando por las correspondientes relaciones  $u-i$  de los elementos del circuito resulta la ecuación integro diferencial:

$$u_G(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{d i(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i(t) dt = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{d i(t)}{dt} + U_{C0} + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) dt$$

Si ahora se pasa al dominio de Laplace, transformando miembro a miembro, resulta:

$$U_G(s) = R \cdot I(s) + L \cdot [s \cdot I(s) - I_{L0}] + \frac{U_{C0}}{s} + \frac{1}{C} \cdot \frac{I(s)}{s}$$

Y agrupando convenientemente se puede interpretar circuitalmente la transformación efectuada:

$$U_G(s) = R \cdot I(s) + [sL \cdot I(s) - L \cdot I_{L0}] + \left[ \frac{1}{sC} \cdot I(s) + \frac{U_{C0}}{s} \right] \tag{B-1}$$

En efecto, la expresión (B-1) puede interpretarse como el resultado de plantear la segunda ley de Kirchoff en la malla correspondiente al “circuito transformado” de la **Fig. B2**.

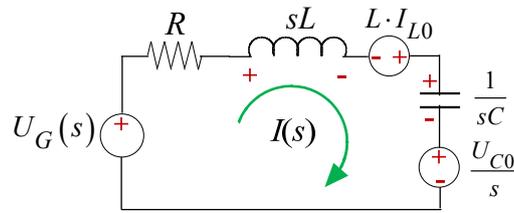


Fig. B2. Circuito “transformado” al dominio de Laplace.

Y gracias a las propiedades de unicidad de la solución, de linealidad y de superposición de la transformada de Laplace, así como resultó aplicable la SLK en la malla del circuito transformado obtenido, puede fácilmente comprobarse la aplicabilidad, para todos los circuitos transformados, de todas las leyes circuitales y teoremas hasta aquí conocidos: Ley de Ohm, Leyes de Kirchoff, ecuaciones de corrientes de malla, ecuaciones de tensiones de nodos, teoremas de Thévenin y de Norton, etc.

La correspondencia entre la expresión (B-1) y la Fig. B2 sirve para elaborar la Tabla C-I donde se muestran los modelos circuitales equivalentes para cada elemento en el dominio de Laplace.

Tabla C-I. Modelos transformados de elementos de circuito.

Representación Física	Modelo en el Dominio Laplace

Los circuitos con transformadores pueden analizarse transformando los modelos de transformadores ya conocidos. Para el caso del transformador real, considerando el circuito equivalente conocido indicado en la Fig. B3, el correspondiente modelo transformado resulta el que se indica en la Fig. B4.

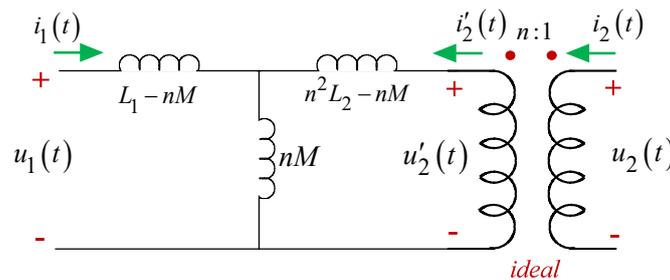


Fig. B3. Modelo circuital de un transformador real empleando un transformador ideal.

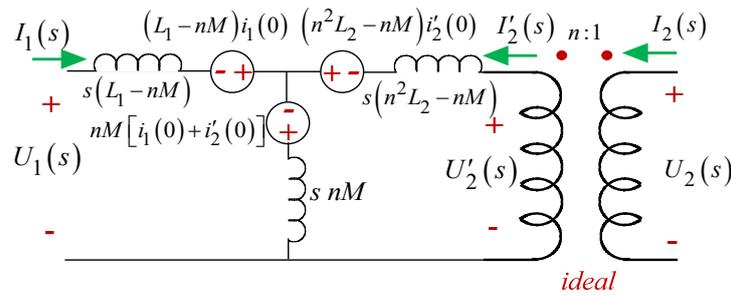


Fig. B4. Modelo "transformado" de un transformador real empleando un transformador ideal.

O aplicando equivalente de Norton a los generadores, resulta el circuito equivalente de la Fig. B5.

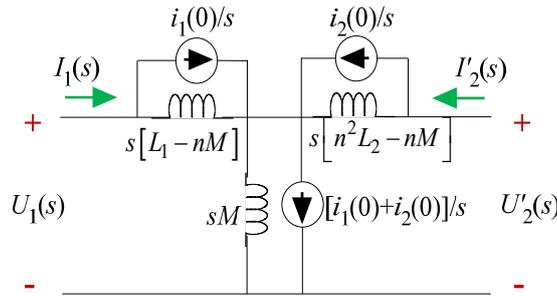


Fig. B5. Modelo "transformado" de un transformador real con tres fuentes de corriente, referido al primario.

Y trasladando dos de las fuentes de corriente, resulta el circuito equivalente de la Fig. B6.

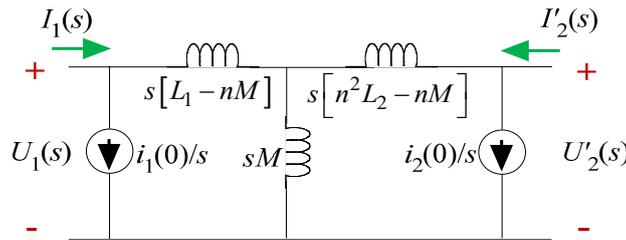


Fig. B6. Modelo "transformado" de un transformador real con dos fuentes de corriente, referido al primario.

### B.2. Respuesta obtenida en el dominio de Laplace

Reagrupando de otra manera conveniente la expresión (B-1), resulta:

$$U_G(s) = I(s) \cdot \left[ R + sL + \frac{1}{sC} \right] + U_{C0} \frac{1}{s} - L \cdot I_{L0} \tag{B-2}$$

De donde puede obtenerse la expresión de la corriente  $I(s)$  que para este ejemplo es la *respuesta* en el dominio de Laplace:

$$I(s) = U_G(s) \cdot \left( \frac{1}{R + sL + \frac{1}{sC}} \right) - \frac{U_{C0}}{s} \cdot \left( \frac{1}{R + sL + \frac{1}{sC}} \right) + L \cdot I_{L0} \cdot \left( \frac{1}{R + sL + \frac{1}{sC}} \right) \tag{B-3}$$

Lo cual indica que la respuesta obtenida en el dominio de Laplace al excitar cualquier circuito lineal constituido por elementos pasivos, siempre puede expresarse de la forma siguiente:

$$R(s) = E(s) \cdot H(s) + \sum_i C_i(s) \cdot G_i(s) \tag{B-4}$$

Donde:

- $R(s)$  es la transformada de Laplace de la respuesta
- $E(s)$  es la transformada de Laplace de la excitación
- $H(s)$  es una función que depende exclusivamente de los elementos del circuito
- $C_i(s)$  son las condiciones iniciales de inductores y capacitores en el dominio de Laplace.
- $G_i(s)$  son funciones que dependen de los elementos del circuito.

Y cuando *las condiciones iniciales son nulas*, la respuesta  $R(s)$  tendrá la siguiente forma:

$$R(s) = E(s) \cdot H(s) \quad (\text{B-5})$$

Que es una expresión fundamental para los siguientes capítulos de este curso.

La función de la red  $H(s)$  queda definida entonces por la relación:

$$H(s) = \left. \frac{R(s)}{E(s)} \right|_{\text{sin condiciones iniciales}} \quad (\text{B-6})$$

La función de red  $H(s)$  tiene distintas denominaciones, dependiendo del tipo de magnitud que sea tanto  $E(s)$  como  $R(s)$ , y también dependiendo si ambas corresponden a la misma puerta o a diferentes puertas de la red. En efecto:

- Si  $R(s)$  es una *corriente* y  $E(s)$  una *tensión*, ambas correspondientes a una misma puerta, la función  $H(s)$  será una admitancia terminal.
- Si  $R(s)$  es una *tensión* y  $E(s)$  una *corriente*, ambas correspondientes a una misma puerta, la función  $H(s)$  será una impedancia terminal.
- Si  $R(s)$  es una *corriente* y  $E(s)$  una *tensión*, correspondientes a distintas puertas, la función  $H(s)$  será una admitancia de transferencia.
- Si  $R(s)$  es una *tensión* y  $E(s)$  una *corriente*, correspondientes a distintas puertas, la función  $G(s)$  será una impedancia de transferencia.
- Si  $R(s)$  es una *tensión* en una puerta y  $E(s)$  una *tensión* en otra puerta, la función  $H(s)$  será una transferencia de tensión.
- Si  $R(s)$  es una *corriente* en una puerta y  $E(s)$  una *corriente* en otra puerta, la función  $H(s)$  será una transferencia de corriente.

Pero en cualquier caso la relación implícita entre la transformada de la respuesta y la transformada de la excitación es con todas las condiciones iniciales igual a cero (sin condiciones iniciales).

### B.3. Ejemplos de obtención de distintas funciones de red $H(s)$

La determinación de las funciones de red se efectúa en el dominio de Laplace.

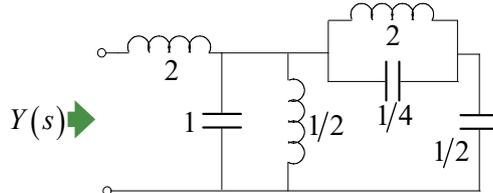
Las consideraciones básicas y convenciones a tener en cuenta son las siguientes.

- 1) Las condiciones iniciales del circuito (es decir la tensión inicial en todos los capacitores y la corriente inicial en todos los inductores) son todas nulas.
- 2) La impedancia de un inductor de inductancia  $L$  es  $Z_L(s) = sL$  y la impedancia de un capacitor de capacidad  $C$  es  $Z_C(s) = (sC)^{-1}$ .
- 3) La admitancia de un inductor de inductancia  $L$  es  $Y_L(s) = 1/Z_L(s) = (sL)^{-1}$  y la admitancia de un capacitor de capacidad  $C$  es  $Y_C(s) = 1/Z_C(s) = sC$ .
- 4) Por convención, en los circuitos transformados al dominio de Laplace siempre se indica el valor de la *impedancia* de cada elemento.
- 5) La *impedancia* de dos elementos en *serie* es la suma de las *impedancias* de cada elemento.
- 6) La *admitancia* de dos elementos en *paralelo* es la suma de las *admitancias* de cada elemento.

En lo que sigue se verán algunos ejemplos de determinación de distintas funciones de red.

#### Ejemplo B.1.

Determinar la admitancia de entrada  $Y(s)$  del circuito de la **Fig. B7**.



**Fig. B7.**

#### Resolución

En este caso la función de red  $H(s)$  es una  $Y(s)$  y dado que las funciones de red se definen con condiciones iniciales nulas, el circuito transformado es trivial como puede comprobarse en la **Fig. B8**.

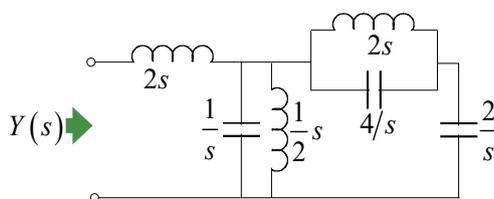
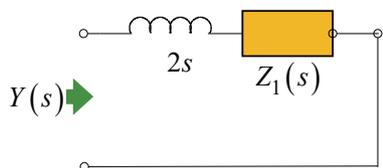
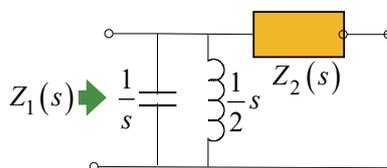


Fig. B8

El razonamiento a aplicar se indica en la Fig. B9.

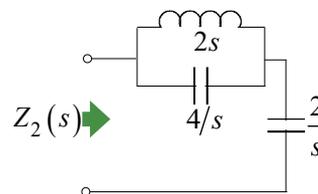


(a)



(b)

Fig. B9



(c)

De la Fig. B9a resulta:

$$Y(s) = \frac{1}{2s + Z_1(s)} \tag{1 (B-7)}$$

De la Fig. B9b resulta:

$$Z_1(s) = \frac{1}{s + \frac{2}{s} + \frac{1}{Z_2(s)}} \tag{B-8}$$

De la Fig. B9c resulta:

$$Z_2(s) = \frac{1}{\frac{1}{2s} + \frac{1}{4}} + \frac{2}{s} \tag{B-9}$$

Reemplazando (B-9) en (B-8) y luego en (B-7) resulta:

$$Y(s) = \frac{1}{2s + \frac{1}{s + \frac{2}{s} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{2s} + \frac{1}{4}} + \frac{2}{s}}}}} \tag{B-10}$$

Se debería desarrollar la habilidad de arribar directamente a la expresión (B-10) sin necesidad de dibujar las Fig. B8 y Fig. B9 y sin necesidad de escribir las expresiones intermedias (B-7), (B-8) y (B-9).

Finalmente sólo se requiere reducir la expresión (B-10) a un cociente de polinomios en s.

$$Y(s) = \frac{1}{2s + \frac{1}{s + \frac{2}{s} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{2s} + \frac{1}{4}} + \frac{2}{s}}}}} = \frac{1}{2s + \frac{1}{s + \frac{2}{s} + \frac{1}{\frac{12s^2 + 8}{2s^3 + 4s}}}}} = \frac{1}{2s + \frac{1}{\frac{12s^4 + 8s^2 + 24s^2 + 16 + 2s^4 + 4s^2}{12s^3 + 8s}}}}$$

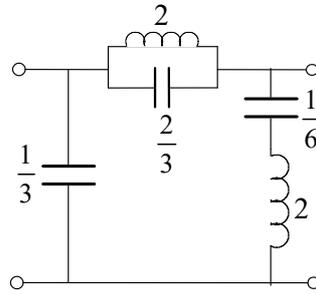
$$Y(s) = \frac{1}{2s + \frac{12s^3 + 8s}{14s^4 + 36s^2 + 16}} = \frac{14s^4 + 36s^2 + 16}{28s^5 + 84s^3 + 40s} = \frac{7s^4 + 18s^2 + 8}{14s^5 + 42s^3 + 20s}$$

$$Y(s) = \frac{7s^4 + 18s^2 + 8}{14s^5 + 42s^3 + 20s}$$

**Ejemplo B.2.**

Considere el cuadripolo de la **Fig. B10**.

- (a) Determinar la transferencia de tensión definida como  $H(s)=U_2(s)/U_1(s)|_{I_2=0}$ . Dibujar el circuito que se debe emplear para medir indicando qué generador se debe conectar y cuál es la variable que se debe medir.
- (b) Determinar el parámetro  $Z_{12}(s)$ . Dibujar el circuito que se debe emplear para medir indicando qué generador se debe conectar y cuál es la variable que se debe medir.



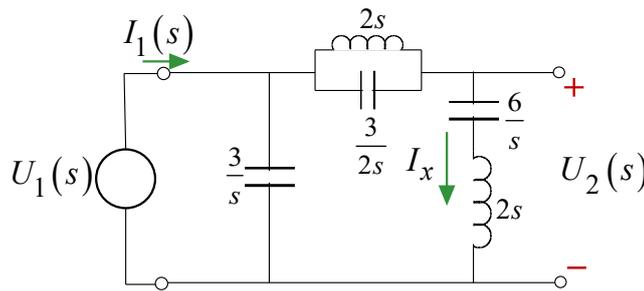
**Fig. B10**

**Resolución**

(a) A partir de la definición de la transferencia  $H(s)$ :

$$H(s) = \left. \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \right|_{I_2=0}$$

Resulta el circuito (transformado) para medirla que se muestra en la **Fig. B11**. En este caso, de acuerdo a la definición de  $H(s)$ , se debe aplicar el generador de tensión  $U_1(s)$  y se debe determinar o medir la variable  $U_2(s)$ .



**Fig. B11**

Por lo tanto en el circuito de la **Fig. B11** se debe determinar  $U_2(s)$  en función de  $U_1(s)$  y hacer la relación  $U_2(s)/U_1(s)$ .

$$U_2(s) = U_1(s) \cdot \underbrace{\frac{1}{\left(\frac{1}{2s + \frac{6}{s}}\right) + \left(\frac{2}{3}s + \frac{1}{2s}\right)}}_{I_x} \cdot \left(\frac{2}{3}s + \frac{1}{2s}\right)$$

$U_2(s)$

$$H(s) = \left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2s + \frac{6}{s}}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}s + \frac{1}{2s}\right) + 1} = \frac{\left(2s + \frac{6}{s}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}s + \frac{1}{2s}\right)}{\left(2s + \frac{6}{s}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}s + \frac{1}{2s}\right) + 1} = \frac{\frac{4}{3}s^2 + \frac{12}{3} + 1 + \frac{3}{s^2}}{\frac{4}{3}s^2 + \frac{12}{3} + 1 + \frac{3}{s^2} + 1}$$

Finalmente, multiplicando numerador y denominador por  $3s^2$ :

$$H(s) = \frac{4s^4 + 15s^2 + 9}{4s^4 + 15s^2 + 12}$$

(b) A partir de la definición del parámetro  $Z_{12}(s)$ :

$$Z_{12}(s) = \frac{U_1}{I_2} \Big|_{I_1=0}$$

Resulta el circuito (transformado) para medir el parámetro que se muestra en la **Fig. B12**. En este caso, de acuerdo a la definición de  $Z_{12}(s)$ , se debe aplicar el generador de tensión  $I_2(s)$  y se debe determinar o medir la variable  $U_1(s)$ .

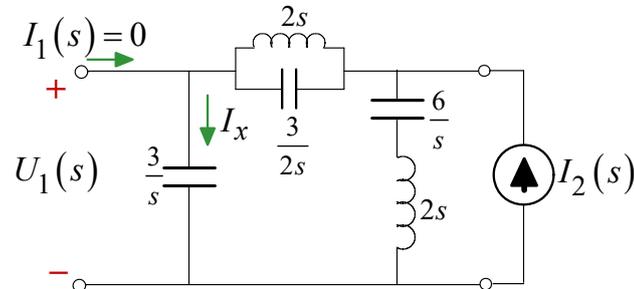


Fig. B12

Por lo tanto en el circuito de la **Fig. B12** se debe determinar  $U_1(s)$  en función de  $I_2(s)$  y hacer la relación  $U_1(s)/I_2(s)$ .

$$U_1(s) = I_2(s) \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{2s + \frac{6}{s}} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{2}{3}s + \frac{1}{2s}} + \frac{3}{s}}}}_{U_2(s)} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\frac{2}{3}s + \frac{1}{2s}} + \frac{3}{s}} \cdot \frac{3}{s}$$

$$Z_{12}(s) = \frac{U_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{1}{\frac{1}{2s + \frac{6}{s}} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{2}{3}s + \frac{1}{2s}} + \frac{3}{s}}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\frac{2}{3}s + \frac{1}{2s}} + \frac{3}{s}} \cdot \frac{3}{s}$$

Ahora sólo se requiere reducir esta expresión a un cociente de polinomios en  $s$ .

$$Z_{12}(s) = \frac{U_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{1}{\frac{1}{2s + \frac{6}{s}} + \frac{1}{s\left(\frac{2}{3}s + \frac{1}{2s}\right)}} \cdot \frac{1}{\frac{s + 2s + \frac{3}{2s}}{s\left(\frac{2}{3}s + \frac{1}{2s}\right)}} \cdot \frac{3}{s} = \frac{3}{s} \cdot \frac{s\left(\frac{2}{3}s + \frac{1}{2s}\right)\left(2s + \frac{6}{s}\right)}{s + 2s + \frac{3}{2s} + s\left(\frac{2}{3}s + \frac{1}{2s}\right)\left(2s + \frac{6}{s}\right)}$$

$$Z_{12}(s) = \frac{U_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{3}{s} \cdot \frac{\cancel{s} \left(\frac{2}{3}s^2 + \frac{1}{2}\right) (2s^2 + 6)}{\cancel{s^2} \left[ 3s^3 + \frac{3}{2}s + s\left(\frac{2}{3}s^2 + \frac{1}{2}\right) (2s^2 + 6) \right]} = \frac{4s^4 + 15s^2 + 9}{\frac{4}{3}s^5 + 8s^3 + \frac{9}{2}}$$

$$Z_{12}(s) = \frac{U_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{24s^4 + 90s^2 + 54}{8s^5 + 48s^3 + 27}$$

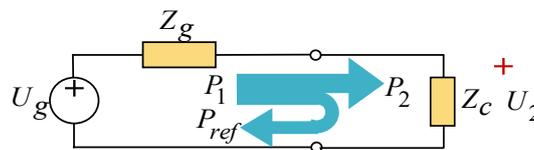


# Apéndice C

## Adaptación de impedancias

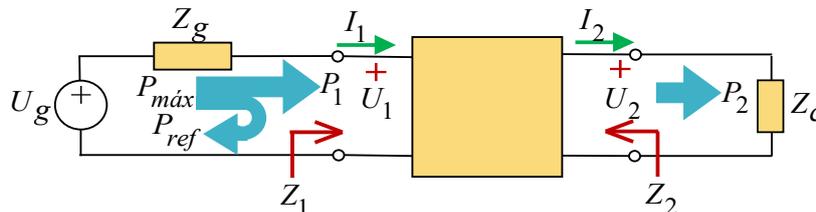
### C.1. Introducción

Con referencia a la **Fig. C1**, se ha visto en el apartado 3.4.2 que la condición para máxima transferencia de potencia es  $Z_c = Z_g^*$ , condición que también aplica para adaptación sin reflexión de potencia, considerando el análisis efectuado en el apartado 3.5 en relación a las expresiones (3-34) y (3-37). Por lo tanto, la adaptación sin reflexión y la adaptación para máxima transferencia de potencia son completamente equivalentes para impedancias  $Z_g$  y  $Z_c$  reales o complejas.



**Fig. C1.** Flujo de potencia entre un generador de impedancia interna  $Z_g$  y una carga de impedancia  $Z_c$ .

Cuando no se puede hacer cumplir la igualdad (3-27) porque las impedancias  $Z_g$  y  $Z_c$  no pueden elegirse ni modificarse, se requiere *insertar* un cuadripolo que permita *adaptar* ambas impedancias, tal como se representa en la **Fig. C2**. Estas o redes de adaptación se realizan con elementos sin pérdidas, como capacitores, inductores o líneas de transmisión.



**Fig. C2.** Flujo de potencia entre un generador de impedancia interna  $Z_g$  y una carga de impedancia  $Z_c$  cuando se inserta un cuadripolo.

El objetivo de adaptar impedancias es lograr la máxima transferencia de potencia, reduciendo todo lo que resulte posible la reflexión de potencia, y ello ocurrirá cuando  $Z_1$  (la impedancia de entrada del cuadripolo cargado con  $Z_c$  en la salida) sea igual al *conjugado* de la impedancia  $Z_g$  de la fuente, y que simultáneamente  $Z_2$  (impedancia de salida del cuadripolo cargado con  $Z_g$  en la entrada) sea igual al *conjugado* de la impedancia  $Z_c$  de la carga.

Dado que las reactancias dependen de la frecuencia, dichas igualdades ocurren estrictamente a una única frecuencia. Pero si el ancho de banda  $\Delta f$  del sistema es muy pequeño respecto de la frecuencia de operación  $f_0$ , podría lograrse que el apartamiento respecto de la igualdad resulte aceptable en todo el ancho  $\Delta f$ . En tal situación se dice que la adaptación es de *banda angosta*.

En el caso particular en que tanto  $Z_c$  como  $Z_g$  son *resistivas puras*, tal como se mencionó en 3.4.2, la adaptación es de *banda ancha*, independiente de la frecuencia y la condición de adaptación resulta:

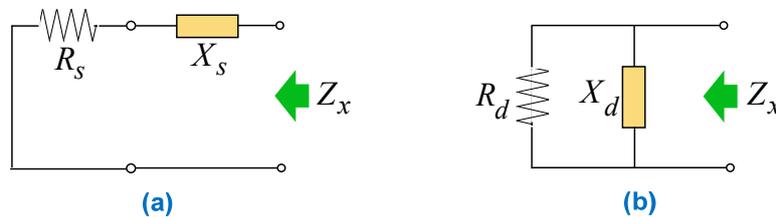
$$\begin{aligned} Z_g &= Z_{01} \\ Z_c &= Z_{02} \end{aligned} \quad (\text{C-1})$$

La condición de adaptación es diferente cuando las impedancias de la fuente y de la carga (una de ellas, o ambas simultáneamente) son complejas. En efecto, en tal caso no es posible apelar a la definición de las impedancias imagen, porque la impedancia vista desde la entrada del cuadripolo cargado con  $Z_c$  debe ser *el conjugado* de la impedancia  $Z_g$  de la fuente mientras que la impedancia vista desde la salida del cuadripolo cargado con  $Z_g$  en la entrada debe ser *el conjugado* de la impedancia  $Z_c$  de la carga.

La adaptación empleando elementos de parámetros concentrados se basa en las propiedades de transformación de impedancias o admitancias de elementos reactivos en serie o en derivación. De hecho, aún con un simple elemento reactivo se puede lograr una adaptación de impedancias limitada.

## C.2. Adaptación con un elemento reactivo en serie

En la **Fig. C3a** se muestra una resistencia  $R_s$ , que bien podría ser la resistencia del equivalente Thevenin de una red mucho más compleja, a la que se le conecta en serie el elemento reactivo  $X_s$ . Esta combinación en serie, puede representarse también por un circuito equivalente paralelo o en derivación como el que se muestra en la **Fig. C3b**.



**Fig. C3.** Adaptación con un elemento reactivo en serie: (a) equivalente Thevenin de la red con el elemento reactivo en serie; (b) circuito equivalente en derivación.

Para definir las correspondencias en esta transformación, la impedancia terminal  $Z_x$  debe ser la misma en ambos casos, con lo cual:

$$\frac{1}{R_d} - j \frac{1}{X_d} = \frac{1}{R_s + jX_s} = \frac{R_s - jX_s}{R_s^2 + X_s^2} = \frac{R_s}{R_s^2 + X_s^2} - j \frac{X_s}{R_s^2 + X_s^2}$$

Donde las reactancias  $X_d$  y  $X_s$  son positivas si son inductivas y negativas si son capacitivas. Es decir:

$$R_d = \frac{R_s^2 + X_s^2}{R_s} = R_s + \frac{X_s^2}{R_s} \quad (\text{C-2})$$

$$X_d = \frac{R_s^2 + X_s^2}{X_s} = X_s + \frac{R_s^2}{X_s} \quad (\text{C-3})$$

Esto indica que la resistencia  $R_s$  de la red se ha transformado a un valor  $(R_s + X_s^2/R_s)$  que siempre resulta mayor que  $R_s$ .

Este es un punto de partida importante para la adaptación, ya que se puede convertir el valor de  $R_s$  (que podría ser el valor de resistencia de una fuente) a algún valor de resistencia requerido que sea *mayor* que  $R_s$  (como por ejemplo el valor de resistencia de una carga) conectando *en serie* con  $R_s$  un valor adecuado de reactancia  $X_s$ . Sin embargo, todavía permanece una reactancia residual dada por (C-3) que debe eliminarse para que la red resulte óptima.

### Ejemplo C.1.

A la resistencia de salida  $R_0$  de una fuente de señal de pulsación  $\omega_0$  se le conecta en serie un capacitor  $C_s$  con la finalidad de aprovechar las propiedades de transformación de impedancias de una reactancia en serie. Demostrar que ajustando el valor de la capacidad  $C_s$  pueden obtenerse valores de una resistencia de salida virtual  $R_d$  siempre mayores que  $R_0$ .

### Resolución

Cuando a la resistencia  $R_0$  se le conecta en serie un capacitor  $C_s$ , la combinación tiene un circuito equivalente en derivación constituido por una resistencia  $R_d$  en paralelo con un capacitor  $C_d$ .

El valor requerido de  $C_s$  se determina a partir de la expresión (C-2) considerando  $R_s=R_0$ , y debe ser tal que la resistencia (virtual)  $R_d$  tenga el valor requerido por el diseño (que siempre será mayor que  $R_0$ ):

$$R_d = R_0 + \frac{X_s^2}{R_0} = R_0 + \frac{1}{R_0} \left( \frac{1}{\omega C_s} \right)^2 = \frac{\omega^2 C_s^2 R_0^2 + 1}{\omega^2 C_s^2 R_0}$$

$$\omega^2 C_s^2 R_0 R_d = \omega^2 C_s^2 R_0^2 + 1 \Rightarrow \omega^2 C_s^2 (R_0 R_d - R_0^2) = 1 \Rightarrow C_s = \frac{1}{\omega \sqrt{R_0 R_d - R_0^2}}$$

Con lo cual, el valor requerido de  $C_s$  para lograr un valor de resistencia deseado  $R_d > R_0$  a la frecuencia de operación  $\omega_0$  está dado por la expresión:

$$C_s = \frac{1}{\omega_0 R_d \sqrt{R_0/R_d - 1}} \quad (1)$$

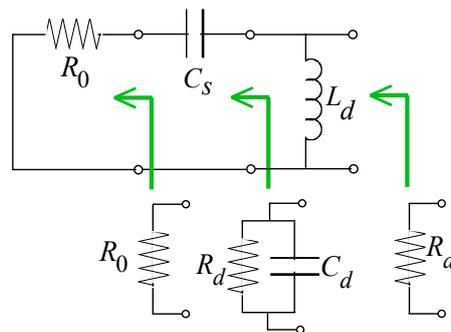
Pero el hecho de haber conectado en serie el capacitor  $C_s$  cuyo valor está dado por (1), tuvo por un lado, el efecto deseado de reflejar a la salida el valor de resistencia  $R_d$  que se requería; pero por otro lado, tuvo la consecuencia indeseada de reflejar una capacidad  $C_d$  en paralelo cuyo valor se determina a partir de la expresión (C-3) considerando  $R_s=R_0$ :

$$X_d = X_s + \frac{R_0^2}{X_s} \Rightarrow \frac{1}{\omega C_d} = \frac{1}{\omega C_s} + \omega C_s R_0^2 = \frac{1 + \omega^2 C_s^2 R_0^2}{\omega C_s} \Rightarrow C_d = \frac{C_s}{1 + \omega^2 C_s^2 R_0^2}$$

Por lo tanto, para completar la adaptación habría que cancelar, a la pulsación  $\omega_0$ , la reactancia del capacitor  $C_d$  que se encuentra *virtualmente* en derivación (en paralelo con  $R_d$ ), lo que se consigue conectando *físicamente* en paralelo una reactancia de igual valor  $X_d$  pero inductiva. En este caso habría que conectar un inductor  $L_d$  en derivación, cuyo valor resulta:

$$\omega_0 C_d = \frac{1}{\omega_0 L_d} \Rightarrow L_d = \frac{1}{\omega_0^2 C_d} = \frac{1 + \omega^2 C_s^2 R_0^2}{\omega_0^2 C_s} \quad (2)$$

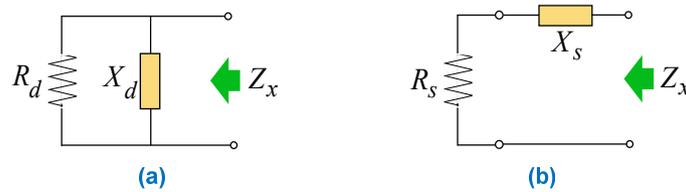
El circuito resultante se muestra en la **Fig. C4**, en la cual se indican además los efectos de cada elemento de compensación introducido ( $C_s$  y  $L_d$ ). El circuito equivalente resultante es un resistor  $R_d$  cuyo valor puede ajustarse adoptando el valor de  $C_s$  dado por (1) y finalmente el inductor  $L_d$  de valor dado por (2) para cancelar la capacidad residual  $C_d$ .



**Fig. C4.** Compensación con dos elementos  $C_s$  y  $L_d$ : efecto de cada elemento.

### C.3. Adaptación con un elemento reactivo en paralelo

El proceso dual de la adaptación con un elemento reactivo en serie, es el uso de un elemento reactivo en derivación. Es decir, en este caso se tiene una resistencia  $R_d$ , que bien podría ser la resistencia del equivalente Thevenin de una red mucho más compleja, a la que se le conecta en paralelo el elemento reactivo  $X_d$ , como se indica en la **Fig. C5a**. Esta combinación en paralelo o en derivación, puede representarse también por un circuito serie como el que se muestra en la **Fig. C5b**.



**Fig. C5.** Adaptación con un elemento reactivo en derivación: **(a)** equivalente Norton de la red con el elemento reactivo en derivación; **(b)** circuito equivalente en serie.

Para definir las correspondencias en esta transformación, la impedancia terminal  $Z_x$  debe ser la misma en ambos casos, con lo cual:

$$R_s + jX_s = \frac{1}{\frac{1}{R_d} - j\frac{1}{X_d}} = \frac{R_d X_d}{X_d - jR_d} = \frac{R_d X_d (X_d + jR_d)}{R_d^2 + X_d^2} = \frac{R_d X_d^2}{R_d^2 + X_d^2} + j \frac{X_d R_d^2}{R_d^2 + X_d^2}$$

Donde las reactancias  $X_d$  y  $X_s$  son positivas si son inductivas y negativas si son capacitivas. Es decir:

$$R_s = \frac{R_d X_d^2}{R_d^2 + X_d^2} = \frac{R_d}{1 + R_d^2/X_d^2} \quad (\text{C-4})$$

$$X_s = \frac{X_d R_d^2}{R_d^2 + X_d^2} = \frac{X_d}{1 + X_d^2/R_d^2} \quad (\text{C-5})$$

Esto indica que la resistencia  $R_d$  de la red se ha transformado a un valor  $R_d/(1+R_d^2/X_d^2)$  que siempre resulta menor que  $R_d$ , y eligiendo convenientemente

Por lo tanto en este caso se puede convertir el valor de  $R_d$  (una carga, por ejemplo) a algún valor de resistencia requerido que sea *menor* que  $R_d$  (como por ejemplo el valor de resistencia de una fuente) conectando *en derivación* un valor adecuado de reactancia  $X_d$ . Sin embargo, todavía permanece una reactancia residual  $X_s$  dada por (C-5) que debe eliminarse para completar la síntesis correctamente.

### Ejemplo C.2.

A la resistencia de salida  $R_0$  de una fuente de señal de pulsación  $\omega_0$  se le conecta en paralelo un capacitor  $C_d$  con la finalidad de aprovechar las propiedades de transformación de impedancias de una reactancia en derivación. Demostrar que ajustando el valor de la capacidad  $C_d$  pueden obtenerse valores de una resistencia de salida virtual  $R_s$  siempre menores que  $R_0$ .

### Resolución

Cuando a la resistencia  $R_0$  se le conecta en paralelo un capacitor  $C_d$ , la combinación tiene un circuito equivalente en serie constituido por una resistencia  $R_s$  en serie con un capacitor  $C_s$ .

El valor requerido de  $C_d$  se determina a partir de la expresión (C-4) considerando  $R_d=R_0$ , y debe ser tal que la resistencia (virtual)  $R_s$  tenga el valor requerido por el diseño (que siempre será menor que  $R_0$ ):

$$R_s = \frac{R_0 X_d^2}{R_0^2 + X_d^2} = \frac{R_0}{1 + R_0^2/X_d^2} = \frac{R_0}{1 + \omega^2 C_d^2 R_0^2}$$

$$R_s (\omega^2 C_d^2 R_0^2 + 1) = R_0$$

Con lo cual, el valor requerido de  $C_d$  para lograr un valor de resistencia deseado  $R_s < R_0$  a la frecuencia de operación  $\omega_0$  está dado por la expresión:

$$C_d = \frac{1}{\omega_0 R_0} \sqrt{\frac{R_0}{R_s} - 1} \quad (1)$$

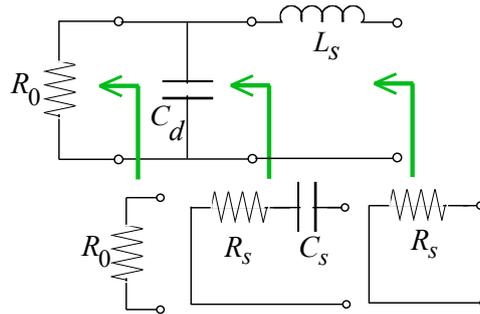
Pero el hecho de haber conectado en derivación el capacitor  $C_d$  cuyo valor está dado por (1), tuvo por un lado, el efecto deseado de reflejar a la salida el valor de resistencia  $R_s$  que se requería; pero por otro lado, tuvo la consecuencia indeseada de reflejar una capacidad  $C_s$  en serie cuyo valor se determina a partir de la expresión (C-5) considerando  $R_d=R_0$ :

$$X_s = \frac{X_d}{1 + X_d^2/R_0^2} \Rightarrow \frac{1}{\omega C_s} = \frac{\omega C_d R_0^2}{1 + \omega^2 C_d^2 R_0^2} \Rightarrow C_s = \frac{1 + \omega^2 C_d^2 R_0^2}{\omega^2 C_d R_0^2}$$

Por lo tanto, para completar la adaptación habría que cancelar, a la pulsación  $\omega_0$ , la reactancia del capacitor  $C_s$  que se encuentra *virtualmente* en serie con  $R_s$ . Esto se consigue conectando *físicamente* en serie una reactancia de igual valor  $X_s$  pero inductiva. En este caso habría que conectar un inductor  $L_s$  en serie, cuyo valor resulta:

$$\omega_0 L_s = \frac{1}{\omega_0 C_s} \Rightarrow L_s = \frac{1}{\omega_0^2 C_s} = \frac{C_d R_0^2}{1 + \omega^2 C_d^2 R_0^2} \quad (2)$$

El circuito resultante se muestra en la **Fig. C6** en la cual se indican además los efectos de cada elemento de compensación introducido ( $C_d$  y  $L_s$ ). El circuito equivalente resultante es un resistor  $R_s$  cuyo valor puede ajustarse adoptando el valor de  $C_d$  dado por (1) y finalmente el inductor  $L_d$  de valor dado por (2) para cancelar la capacidad residual  $C_d$ .



**Fig. C6.** Compensación con dos elementos  $C_d$  y  $L_s$ : efecto de cada elemento.

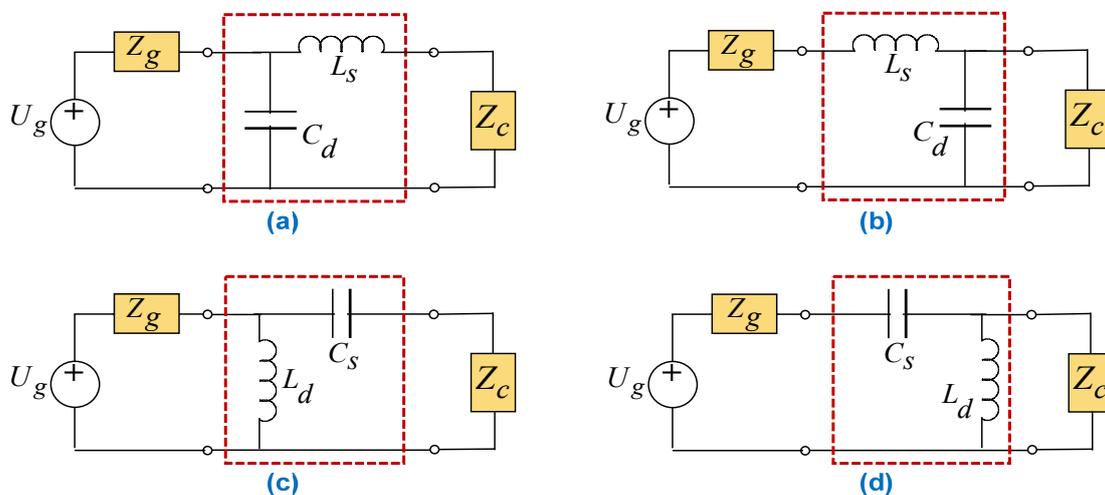
#### C.4. Adaptación con dos elementos en L

Las redes L se emplean para adaptar impedancias en todo tipo de circuitos electrónicos; por ejemplo, son útiles para adaptar la salida de un amplificador con la entrada de una etapa siguiente; o bien adaptar la impedancia de una antena con la salida de un transmisor o la entrada de un receptor, etc.

Una red de adaptación L sin pérdidas es un circuito simple de dos elementos LC que se puede usar para adaptar una amplia gama de impedancias tanto puramente resistivas como complejas.

Los ejemplos presentados en los dos apartados anteriores permiten comprender conceptualmente la adaptación entre dos niveles de resistencias diferentes que se puede realizar mediante una red LC de dos elementos en L, los cuales pueden disponerse de dos formas: 1) un elemento reactivo en derivación  $X_d$  y un elemento reactivo en serie  $X_s$ ; 2) un elemento reactivo en serie  $X_s$  y un elemento reactivo en derivación  $X_d$ . Tanto  $X_d$  como  $X_s$  pueden ser capacitiva o inductiva, pero siempre ambas serán de distinto tipo.

Por lo tanto, las configuraciones de la red L son cuatro (**Fig. C7**): los circuitos **(a)** y **(c)** son adecuados cuando  $R_g > R_c$ , mientras que los circuitos **(b)** y **(d)** son adecuados cuando  $R_g < R_c$ .



**Fig. C7.** Circuitos de adaptación con dos elementos en L: **(a)** indicado para  $R_g > R_c$ ; **(b)** indicado para  $R_g < R_c$ ; **(c)** indicado para  $R_g > R_c$  y **(d)** indicado para  $R_g < R_c$ .

Conceptualmente esta correspondencia se justifica considerando que para adaptar  $Z_g$  y  $Z_c$  se requiere *aumentar* la resistencia *menor* (esto se logra con el elemento en serie, que debe estar en serie con la

impedancia cuya parte real sea menor) y *reducir* la resistencia *mayor* (esto se logra con el elemento en derivación, que debe estar en paralelo con la impedancia cuya parte real sea mayor).

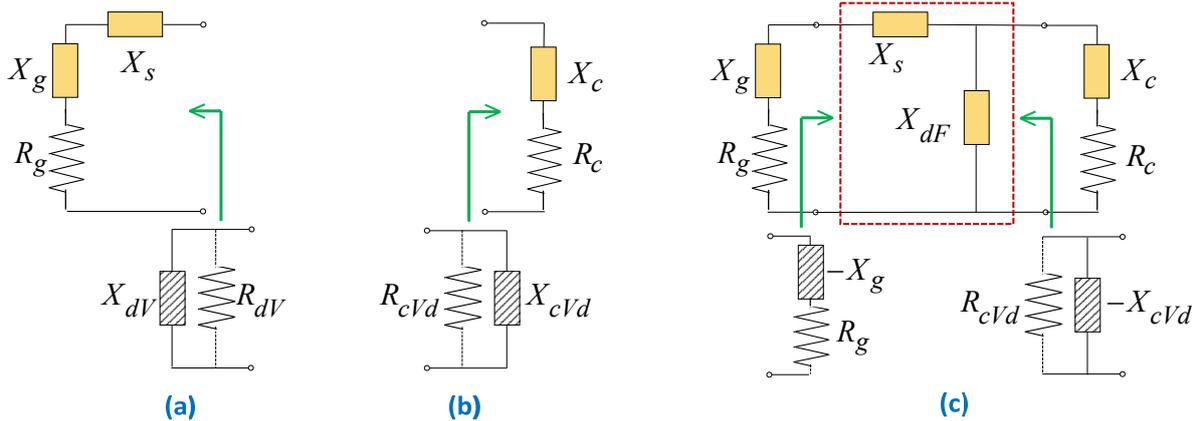
Por otra parte, puede observarse que las configuraciones (a) y (b) son *pasa bajos* y las configuraciones (c) y (d) son *pasa altos*. Las versiones *pasa bajos* son probablemente las más utilizadas, ya que atenúan las armónicas, el ruido y otras señales no deseadas, como suele ser necesario en una enorme cantidad de aplicaciones. Los criterios de diseño clave son las magnitudes y los tamaños *relativos* de la impedancia de salida del generador y la impedancia de carga.

Con base en el razonamiento y en los resultados obtenidos tanto en el **Ejemplo C.1** como en el **Ejemplo C.2**, se analizará el caso completamente general en el cual tanto la impedancia del generador como la impedancia de carga sean complejas, es decir:  $Z_g=R_g+jX_g$  y  $Z_c=R_c+jX_c$ .

En este desarrollo, el carácter inductivo o capacitivo de las impedancias está dado por el signo de la parte imaginaria: las reactancias inductivas son positivas y las reactancias capacitivas son negativas.

**C.4.1. Redes L para los casos en que  $R_g < R_c$**

Cuando  $R_g < R_c$  se agrega una reactancia  $X_s$  en serie con  $Z_g$  y se determina la impedancia equivalente en derivación (virtual)  $Z_{dV}=[(1/R_{dV})+(1/jX_{dV})]^{-1}$ , tal como se representa en la **Fig. C8a**. Del mismo modo, se determina la impedancia de carga equivalente en derivación (virtual)  $Z_{cV}=[(1/R_{cV})+(1/jX_{cV})]^{-1}$ , tal como se representa en la **Fig. C8b**. La admitancia  $X_s$  se adopta de manera tal que  $R_{dV}=R_{cVd}$ . Finalmente, para cumplir la la condición de adaptación conjugada se debe agregar en derivación (en paralelo con la impedancia de carga  $Z_c$ ) una admitancia física  $X_{dF}$ , como se indica en la **Fig. C8c**, con la cual la red de adaptación cancelará completamente la reactancia de la carga. Para ello, por tratarse de admitancias en paralelo, debe cumplirse la condición:  $1/X_{dV}+1/X_{dF}=-1/X_{cVd}$ .



**Fig. C8.** Adaptación para casos con  $R_g < R_c$ : (a) impedancia equivalente en derivación (virtual) vista hacia la entrada con la reactancia de compensación en serie; (b) impedancia equivalente en derivación (virtual) vista hacia la carga; (c) determinación de la reactancia de compensación en derivación.

Entonces el primer paso consiste en determinar el equivalente en paralelo de la combinación  $Z_g$  en serie con  $X_s$ , es decir se debe determinar  $R_{dV}$  y  $X_{dV}$  en función de  $R_g$ ,  $X_g$  y  $X_s$  (**Fig. C8a**):

$$\frac{1}{R_{dV}} - j \frac{1}{X_{dV}} = \frac{1}{R_g + j(X_g + X_s)} = \frac{R_g - j(X_g + X_s)}{R_g^2 + (X_g + X_s)^2}$$

Por lo tanto:

$$R_{dV} = \frac{R_g^2 + (X_g + X_s)^2}{R_g} \tag{C-6}$$

$$X_{dV} = \frac{R_g^2 + (X_g + X_s)^2}{X_g + X_s} \tag{C-7}$$

El paso siguiente es obtener el equivalente en paralelo de la impedancia de carga  $Z_c$ ; es decir se debe determinar  $R_{cVd}$  y  $X_{cVd}$  en función de  $R_c$  y  $X_c$  (**Fig. C8b**). Para ello se plantea:

$$\frac{1}{R_{cVd}} - j \frac{1}{X_{cVd}} = \frac{1}{R_c + jX_c} = \frac{R_c - jX_c}{R_c^2 + X_c^2}$$

Por lo tanto:

$$R_{cVd} = \frac{R_c^2 + X_c^2}{R_c} \quad (\text{C-8})$$

$$X_{cVd} = \frac{R_c^2 + X_c^2}{X_c} \quad (\text{C-9})$$

Los valores de  $X_s$  con los que se logra que  $R_{dV}=R_{cVd}$ , resultan igualando (C-6) con (C-8):

$$R_c R_g^2 + R_c (X_g + X_s)^2 = R_g R_c^2 + R_g X_c^2$$

$$X_s^2 + 2X_g X_s + R_g^2 + X_g^2 - R_g R_c - X_c^2 \frac{R_g}{R_c} = 0$$

Y las dos soluciones de  $X_s$  resultan:

$$X_{s1,2} = \frac{1}{2} \left[ -2X_g \pm \sqrt{4X_g^2 - 4 \left( R_g^2 + X_g^2 - R_g R_c - X_c^2 \frac{R_g}{R_c} \right)} \right] = -X_g \pm \sqrt{-R_g^2 + R_g R_c + X_c^2 \frac{R_g}{R_c}}$$

$$X_{s1,2} = -X_g \pm R_g \sqrt{\frac{R_c}{R_g} - 1 + \frac{X_c^2}{R_g R_c}} \quad (\text{C-10})$$

Con los valores  $X_{s1}$  y  $X_{s2}$  obtenidos con (C-10) en (C-8) y en (C-9) se obtienen los valores correspondientes de las partes real e imaginaria de la impedancia virtual  $Z_{dV}$  que se ve desde los terminales de  $X_d$  hacia el generador:

$$R_{dV1,2} = \frac{R_g^2 + (X_g + X_{s1,2})^2}{R_g} \quad (\text{C-11})$$

$$X_{dV1,2} = \frac{R_g^2 + (X_g + X_{s1,2})^2}{X_g + X_{s1,2}} \quad (\text{C-12})$$

A continuación, como se indica en la **Fig. C8c**, habiendo cumplido la condición  $R_{dV}=R_{cVd}$  sólo resta agregar en derivación una admitancia física  $X_{dF}$  que satisfaga la condición de adaptación conjugada que, en este caso por tratarse de admitancias en paralelo, resulta:

$$\frac{1}{X_{dV1,2}} + \frac{1}{X_{dF1,2}} = -\frac{1}{X_{cVd}} \Rightarrow \frac{1}{X_{dF1,2}} = -\frac{1}{X_{cVd}} - \frac{1}{X_{dV1,2}}$$

Es decir:

$$X_{dF1,2} = -\frac{X_{cVd} \cdot X_{dV1,2}}{X_{cVd} + X_{dV1,2}} \quad (\text{C-13})$$

Finalmente, de las dos soluciones posibles ( $X_{s1}$ ,  $X_{dF1}$ ) y ( $X_{s2}$ ,  $X_{dF2}$ ) debe elegirse la combinación deseada: pasa bajos ( $L$  en serie y  $C$  en derivación) o pasa altos ( $C$  en serie y  $L$  en derivación).

En lo que concierne al factor de sobrepaso o factor de mérito  $Q$ , para la condición de adaptación se debe cumplir:

$$Q = \frac{X_g + X_s}{R_g} = \frac{\frac{1}{X_{dF}} + \frac{1}{X_c}}{\frac{1}{R_{cVd}}}$$

Entonces teniendo en cuenta (C-10):

$$Q = \frac{X_g + X_s}{R_g} = \frac{1}{R_g} \left( X_g - X_g \pm R_g \sqrt{\frac{R_c}{R_g} - 1 + \frac{X_c^2}{R_g R_c}} \right)$$

Es decir:

$$Q = \sqrt{\frac{R_c}{R_g} - 1 + \frac{X_c^2}{R_g R_c}} \tag{C-14}$$

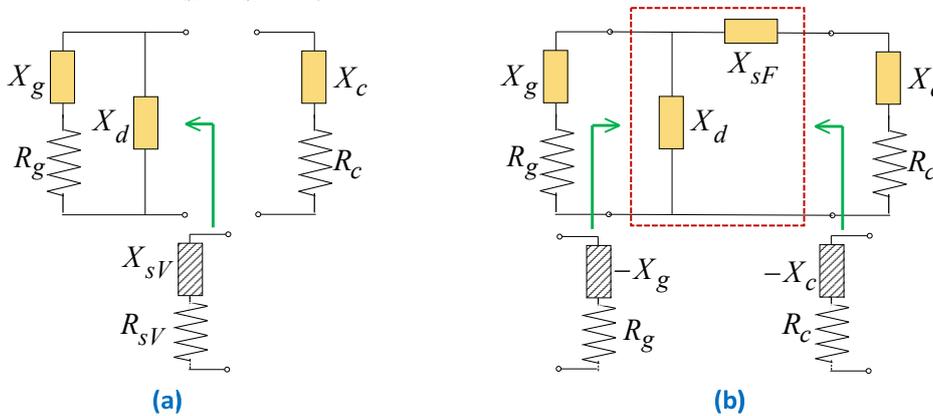
Por lo tanto el  $Q$  del circuito queda determinado exclusivamente por los valores de  $R_g$ ,  $R_c$  y  $X_c$ , no admitiendo algún ajuste de valor. Pero es interesante observar que si se cambia convenientemente el valor de  $X_c$  (por ejemplo, agregando un tercer elemento reactivo en serie con  $X_c$ ), sí sería posible controlar el valor de  $Q$ . Esto constituye la base de la adaptación con redes de tres elementos.

Cuando las impedancias  $Z_g$  y  $Z_c$  son resistivas puras resulta la expresión más difundida en la bibliografía:

$$Q = \sqrt{\frac{R_c}{R_g} - 1} \tag{C-15}$$

**C.4.2. Redes L para los casos en que  $R_g > R_c$**

Cuando  $R_g > R_c$  se agrega un elemento  $X_d$  en derivación, es decir, en paralelo con  $Z_g$  y se determina la impedancia equivalente en serie (virtual)  $Z_{sV} = R_{sV} + jX_{sV}$ , tal como se representa en la **Fig. C9a**. La admitancia  $X_d$  se adopta de manera tal que  $R_{sV} = R_c$ . Finalmente, para cumplir la la condición de adaptación conjugada se debe agregar una admitancia física  $X_{sF}$  en serie con la impedancia de carga  $Z_c$  como se indica en la **Fig. C9b**, con la cual la red de adaptación cancelará completamente la reactancia de la carga. Para ello debe cumplirse la condición:  $X_{sV} + X_{sF} = -X_c$ .



**Fig. C9.** Adaptación para casos con  $R_g > R_c$ : **(a)** impedancia equivalente en derivación (virtual) vista hacia la entrada con la reactancia de compensación en derivación; **(b)** condición para determinar la reactancia de compensación en derivación a partir de la impedancia equivalente en serie (virtual) vista hacia la carga.

El primer paso es obtener el equivalente serie de la combinación  $Z_g$  en paralelo con  $X_d$ ; es decir se debe determinar  $R_{sV}$  y  $X_{sV}$  en función de  $R_g$ ,  $X_g$  y  $X_d$  (**Fig. C9a**):

$$\frac{1}{R_{sV} + jX_{sV}} = \frac{1}{R_g + jX_g} + \frac{1}{jX_d} = \frac{R_g - jX_g}{R_g^2 + X_g^2} - j \frac{1}{X_d} = \frac{X_d R_g - j(R_g^2 + X_g^2 + X_g X_d)}{X_d (R_g^2 + X_g^2)}$$

$$R_{sV} + jX_{sV} = \frac{X_d (R_g^2 + X_g^2) [X_d R_g + j(R_g^2 + X_g^2 + X_g X_d)]}{(X_d R_g)^2 + (R_g^2 + X_g^2 + X_g X_d)^2}$$

$$R_{sV} + jX_{sV} = \frac{X_d^2 (R_g^2 + X_g^2) R_g + j X_d (R_g^2 + X_g^2) (R_g^2 + X_g^2 + X_g X_d)}{(X_d R_g)^2 + (R_g^2 + X_g^2)^2 + 2(R_g^2 + X_g^2) X_g X_d + (X_g X_d)^2}$$

$$R_{sV} + jX_{sV} = \frac{X_d^2 (R_g^2 + X_g^2) R_g + j X_d (R_g^2 + X_g^2) (R_g^2 + X_g^2 + X_g X_d)}{X_d^2 (R_g^2 + X_g^2) + (R_g^2 + X_g^2)^2 + 2(R_g^2 + X_g^2) X_g X_d}$$

$$R_{sV} + jX_{sV} = \frac{X_d^2 R_g + j X_d (R_g^2 + X_g^2 + X_g X_d)}{X_d^2 + 2X_g X_d + R_g^2 + X_g^2} = \frac{X_d^2 R_g + j X_d (R_g^2 + X_g^2 + X_g X_d)}{R_g^2 + (X_g + X_d)^2}$$

Por lo tanto:

$$R_{sV} = \frac{X_d^2 R_g}{R_g^2 + (X_g + X_d)^2} \quad (C-16)$$

$$X_{sV} = \frac{X_d (R_g^2 + X_g^2 + X_g X_d)}{R_g^2 + (X_g + X_d)^2} \quad (C-17)$$

Los valores de  $X_d$  con los que se logra que  $R_{sV} = \text{Re}[Z_c]$ , resultan de (C-16) reemplazando a  $R_{sV}$  por  $R_c$ :

$$\begin{aligned} R_c X_d^2 + 2R_c X_g X_d + R_c (R_g^2 + X_g^2) &= X_d^2 R_g \\ (R_c - R_g) X_d^2 + 2R_c X_g X_d + R_c (R_g^2 + X_g^2) &= 0 \\ X_d^2 + 2 \frac{R_c}{(R_c - R_g)} X_g X_d + \frac{R_c}{(R_c - R_g)} (R_g^2 + X_g^2) &= 0 \\ X_d^2 + 2 \frac{1}{(1 - R_g/R_c)} X_g X_d + \frac{1}{(1 - R_g/R_c)} (R_g^2 + X_g^2) &= 0 \end{aligned} \quad (C-18)$$

De (C-18) se deducen las dos soluciones de  $X_d$ :

$$\begin{aligned} X_{d1,2} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{-2X_g}{1 - R_g/R_c} \pm \sqrt{\frac{4X_g^2}{(1 - R_g/R_c)^2} - \frac{4(R_g^2 + X_g^2)}{1 - R_g/R_c}} \right] \\ X_{d1,2} &= \frac{1}{R_g/R_c - 1} \left[ X_g \pm \sqrt{X_g^2 (R_g/R_c) + R_g^2 (R_g/R_c - 1)} \right] \\ X_{d1,2} &= \frac{1}{R_g/R_c - 1} \left[ X_g \pm R_g \sqrt{\frac{R_g}{R_c} - 1 + \frac{X_g^2}{R_g R_c}} \right] \end{aligned} \quad (C-19)$$

Con los valores  $X_{d1}$  y  $X_{d2}$  en (C-16) y en (C-17) se obtienen los valores correspondientes de las partes real e imaginaria de la impedancia virtual  $Z_s$  equivalente en terminales de  $X_d$ , como se indica en la **Fig. C9b**:

$$R_{sV1,2} = \frac{X_{d1,2}^2 R_g}{X_{d1,2}^2 + 2X_g X_{d1,2} + (R_g^2 + X_g^2)} \quad (C-20)$$

$$X_{sV1,2} = \frac{X_{d1,2} (R_g^2 + X_g^2 + X_g X_{d1,2})}{X_{d1,2}^2 + 2X_g X_{d1,2} + (R_g^2 + X_g^2)} \quad (C-21)$$

Resta determinar la admitancia física  $X_{sF}$  a conectar en serie para cumplir la condición de adaptación conjugada de la carga, es decir:

$$X_{sV1,2} + X_{sF1,2} = -X_c$$

Es decir:

$$X_{sF1,2} = -X_c - X_{sV1,2} \quad (C-22)$$

Finalmente, de las dos soluciones posibles ( $X_{d1}$ ,  $X_{sF1}$ ) y ( $X_{d2}$ ,  $X_{sF2}$ ) debe elegirse la combinación deseada: pasa bajos ( $C$  en derivación y  $L$  en serie) o pasa altos ( $L$  en derivación y  $C$  en serie).

En lo que concierne al factor de sobrepaso o factor de mérito  $Q$ , para la condición de adaptación se debe cumplir:

$$Q = \frac{X_c + X_{sF}}{R_c} = \frac{X_{sV}}{R_{sV}}$$

Entonces teniendo en cuenta (C-20) y (C-21):

$$Q = \frac{X_{sV}}{R_{sV}} = \frac{R_g^2 + X_g^2 + X_g X_d}{R_g X_d} = \frac{R_g}{X_d} + \frac{X_g}{R_g} \left( \frac{X_g}{X_d} + 1 \right)$$

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{R_g}{X_d} + \frac{X_g}{R_g} \left( \frac{X_g}{X_d} + 1 \right) = \frac{X_g}{R_g} + \frac{1}{X_d} \left( R_g + \frac{X_g^2}{R_g} \right) \\
 Q &= \frac{X_g}{R_g} + \frac{1}{\frac{1}{R_g/R_c - 1} \left( X_g \pm R_g \sqrt{\frac{R_g}{R_c} - 1} + \frac{X_g^2}{R_g R_c} \right)} \left( R_g + \frac{X_g^2}{R_g} \right) \\
 Q &= \frac{X_g}{R_g} + \frac{(R_g/R_c - 1) \left( R_g + \frac{X_g^2}{R_g} \right)}{X_g \pm R_g \sqrt{\frac{R_g}{R_c} - 1} + \frac{X_g^2}{R_g R_c}} \tag{C-23}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto el  $Q$  del circuito queda determinado exclusivamente por los valores de  $R_g$ ,  $R_c$  y  $X_g$ , no admitiendo algún ajuste de valor. Pero es interesante observar que si se cambia convenientemente el valor de  $X_g$  (por ejemplo, agregando un tercer elemento reactivo en serie con  $X_g$ ), sí sería posible controlar el valor de  $Q$ . Esto constituye la base de la adaptación con redes de tres elementos.

Cuando las impedancias  $Z_g$  y  $Z_c$  son resistivas puras resulta la expresión más difundida en la bibliografía:

$$Q = \frac{R_g/R_c - 1}{\sqrt{R_g/R_c - 1}} = \sqrt{\frac{R_g}{R_c} - 1} \tag{C-24}$$

### C.4.3. Consideraciones para el diseño

El análisis efectuado demostró que, con una red de adaptación en L, el  $Q$  del circuito y por lo tanto el ancho de banda de la adaptación, es fijo y no hay posibilidad alguna de controlar su valor.

Por eso, para saber si una red de dos elementos es adecuada para adaptar impedancias para una dada aplicación, debe tenerse en cuenta que el  $Q$  requerido se obtiene mediante la relación:

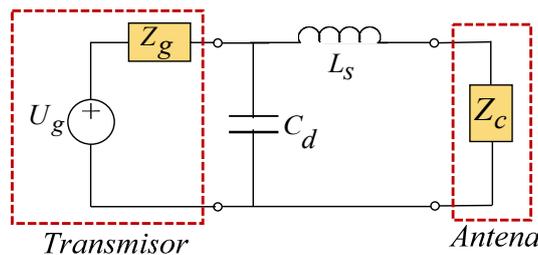
$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} \tag{C-25}$$

donde  $f_0$  es la frecuencia de operación y  $\Delta f$  es el ancho de banda de 3 dB.

Si bien la red L es muy versátil, es posible que no se adapte a todas las necesidades. En efecto, puede ocurrir que el  $Q$  requerido dado por (C-25), sea muy superior al valor que puede conseguirse con una red L dado, según corresponda, por (C-14) o (C-15) y (C-23) ó (C-24). En otros casos, los valores calculados de inductancia o capacitancia pueden ser demasiado grandes o pequeños para ser prácticos para cierto rango de frecuencias; pero, en ocasiones, este problema se puede superar cambiando de una versión pasa bajos a una versión pasa altos o viceversa.

#### Ejemplo C.3.

El transmisor de la **Fig. C10** opera a 1 GHz y tiene una impedancia de salida real pura  $Z_g = 75 \Omega$ . El transmisor debe estar conectado directamente a una antena cuya impedancia de entrada es real pura  $Z_c = 50 \Omega$ . Utilizando la sección L indicada, encuentre los valores de  $L_s$  y  $C_d$  que permitan la máxima transferencia de potencia a la antena.



**Fig. C10.** Red de adaptación en L entre un transmisor y la antena.

#### Resolución

En este caso corresponde aplicar el procedimiento que se deriva del análisis efectuado para los casos en que  $R_g > R_c$  (apartado C.4.2.)

A la resistencia  $R_g$  se le conecta en paralelo un capacitor  $C_d$  y la combinación tiene un circuito equivalente en serie constituido por una resistencia  $R_s$  en serie con un capacitor  $C_s$ . El valor requerido de  $C_d$  se determina a partir de la expresión (C-19) considerando  $X_g=0$ :

$$X_{d1,2} = \pm \frac{R_g \sqrt{R_g/R_c - 1}}{R_g/R_c - 1} = \pm \frac{R_g}{\sqrt{R_g/R_c - 1}}$$

En este caso, como el elemento en derivación es un capacitor  $C_d$ , el signo a considerar es el negativo.

$$-\frac{1}{\omega_0 C_d} = -\frac{R_g}{\sqrt{R_g/R_c - 1}} \Rightarrow C_d = \frac{1}{\omega_0 R_g} \sqrt{\frac{R_g}{R_c} - 1}$$

$$C_d = \frac{1}{\omega_0 R_g} \sqrt{\frac{R_g}{R_c} - 1} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^9 \cdot 75} \sqrt{\frac{75}{50} - 1} = 1,5 \cdot 10^{-12} \text{ F} \quad (1)$$

Pero el hecho de haber conectado en derivación el capacitor  $C_d$  cuyo valor está dado por (1), tuvo por un lado, el efecto deseado de reflejar a la salida el valor de resistencia  $R_c$  que se requería; pero por otro lado, tuvo la consecuencia indeseada de reflejar una capacidad en serie cuyo valor de reactancia (virtual) se determina a partir de la expresión (C-21) considerando  $X_g=0$ :

$$X_{sV} = \frac{X_d}{1 + \frac{X_d^2}{R_g^2}} \Rightarrow X_{sV} = \frac{-\omega_0 C_d R_g^2}{1 + \omega_0^2 C_d^2 R_g^2} = \frac{-2\pi \cdot 10^9 \cdot 1,5 \cdot 10^{-12} \cdot 75^2}{1 + (2\pi \cdot 10^9 \cdot 1,5 \cdot 10^{-12} \cdot 75)^2} = -35,355 \Omega$$

Por lo tanto, para completar la adaptación se debe cancelar, a la pulsación  $\omega_0$ , la reactancia capacitiva  $X_{sV}$  que se encuentra *virtualmente* en serie con  $R_c$ . Esto se consigue conectando *físicamente* en serie una reactancia  $X_{sF}$  dada por (C-22) considerando  $X_g=0$ :

$$X_{sF} = -X_c - X_{sV} = +35,355 \Omega$$

Es decir, inductiva. Entonces habría que conectar un inductor  $L_s$  en serie, cuyo valor resulta:

$$\omega_0 L_s = X_{sF} \Rightarrow L_s = \frac{X_{sF}}{\omega_0} = \frac{35,355}{2\pi \cdot 10^9} = 5,6 \cdot 10^{-9} \text{ H} \quad (2)$$

#### Ejemplo C.4.

Considere ahora que transmisor de la **Fig. C10** operando 1 GHz tiene una impedancia de salida  $Z_g = (90 + j30)$  y que la impedancia de entrada de la antena es una combinación en serie de una resistencia  $R_c = 75 \Omega$  y un inductor  $L_c = 3 \text{ nH}$ . Determinar los valores de  $C_d$  y  $L_s$  de la celda de adaptación en L (celda de acoplamiento de la antena).

#### Resolución

En este caso, como las impedancias de generador y de carga son complejas, sólo se se puede aplicar la primera y segunda formas de resolución aplicadas en el **Ejemplo C.3** siendo ahora la condición que deben satisfacer las impedancias de entrada y de salida  $Z_1$  y  $Z_2$  del cuadripolo doblemente cargado:

$$Z_1 = Z_g^* = 90 - j30 \quad Z_2 = Z_c^* = 75 - j2\pi \cdot 1 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-9} = 75 - j6\pi$$

La topología de la celda de adaptación L continúa siendo la misma de la **Fig. C10** porque  $R_g = \text{Re}[Z_g] > R_c = \text{Re}[Z_c]$ ; es decir, en este caso corresponde aplicar el procedimiento que se deriva del análisis efectuado para los casos en que  $R_g > R_c$ .

A la impedancia  $Z_g$  se le conecta en paralelo un capacitor  $C_d$  y la combinación tiene un circuito equivalente en serie constituido por una resistencia  $R_{sV}$  en serie con un capacitor  $C_{sV}$ . El valor requerido de  $C_d$  se determina a partir de la expresión (C-19):

$$X_{d1,2} = \frac{1}{\frac{R_g}{R_c} - 1} \left[ X_g \pm R_g \sqrt{\frac{R_g}{R_c} - 1 + \frac{X_g^2}{R_g R_c}} \right] = \frac{1}{\frac{90}{75} - 1} \left[ 30 \pm 90 \sqrt{\frac{90}{75} - 1 + \frac{30^2}{90 \cdot 75}} \right] = \begin{cases} X_{d1} = -109,8 \Omega \\ X_{d2} = 409,8 \Omega \end{cases}$$

Como el elemento en derivación es un capacitor  $C_d$ , el signo a considerar es el negativo.

$$X_{d1} = -\frac{1}{\omega_0 C_d} \Rightarrow C_d = -\frac{1}{2\pi \cdot 10^9 \cdot (-109,8)} = 1,449 \cdot 10^{-12} \text{ F} \quad (1)$$

Pero el hecho de haber conectado en derivación el capacitor  $C_d$  cuyo valor está dado por (1), tuvo por un lado, el efecto deseado de reflejar a la salida el valor de resistencia  $R_c$  que se requería; pero por otro lado, tuvo la consecuencia indeseada de reflejar una capacidad en serie cuyo valor de reactancia (virtual) se determina a partir de la expresión (C-21):

$$X_{sV1} = \frac{X_{d1}(R_g^2 + X_g^2 + X_g X_{d1})}{X_{d1}^2 + 2X_g X_{d1} + (R_g^2 + X_g^2)} = \frac{-109,8 \cdot [90^2 + 30^2 + 30 \cdot (-109,8)]}{(-109,8)^2 + 2 \cdot 30 \cdot (-109,8) + (90^2 + 30^2)} = -43,3 \Omega$$

Por lo tanto, para completar la adaptación se debe cancelar, a la pulsación  $\omega_0$ , la reactancia capacitiva  $X_{sV}$  que se encuentra *virtualmente* en serie con  $R_c$ . Esto se consigue conectando *físicamente* en serie una reactancia  $X_{sF}$  dada por (C-22):

$$X_{sV1} + X_{sF1} = -X_c \Rightarrow X_{sF1} = -X_c - X_{sV1} = -6\pi - (-43,3) = 24,45 \Omega$$

Es decir, inductiva. Entonces caso habría que conectar un inductor  $L_s$  en serie, cuyo valor resulta:

$$X_{sF} = \omega_0 L_s \Rightarrow L_{s1} = \frac{X_{sF}}{\omega_0} = \frac{24,45}{2\pi \cdot 10^9} = 3,89 \cdot 10^{-9} \text{ H} \quad (2)$$

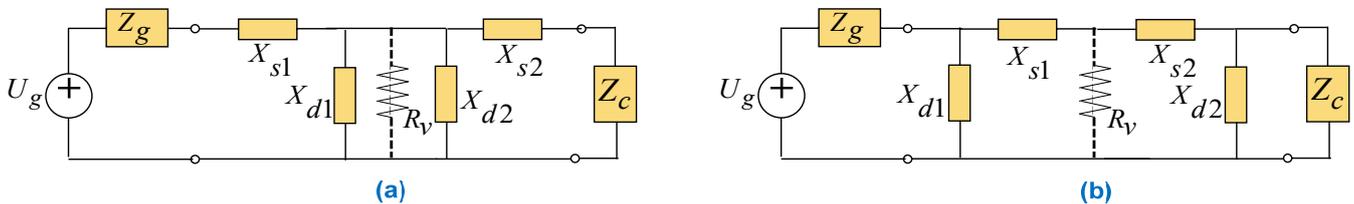
### C.5. Adaptación con tres elementos en T y en Π

Si bien las redes L son adecuadas para una enorme cantidad de aplicaciones, en muchos casos puede ser necesario un circuito más complejo para proporcionar un mejor desempeño o cumplir mejor con las especificaciones. Los circuitos que siguen a las redes L en grado de complejidad son las redes T y Π.

La razón principal para emplear una red T o una red Π es lograr el control sobre el coeficiente de sobretensión o factor  $Q$  del circuito, cosa que no es posible con una red L, en las cuales no solo  $Q$  es fijo por ser una función de las resistencias de entrada y salida, sino que además es muy bajo para aplicaciones en las que se requiere limitar el ancho de banda para reducir los armónicos o ayudar a filtrar las señales adyacentes sin el uso de filtros adicionales.

Las redes T y Π proporcionan suficiente variedad para adaptarse a casi cualquier situación.

Para diseñar una red T o Π se emplean los procedimientos de las redes L. De hecho, ambos tipos T y Π pueden considerarse como dos redes L verticalmente espejadas y en cascada, lo cual permite emplear los procedimientos de diseño para las redes L. Para ello, se debe asumir una carga intermedia virtual  $R_V$  para la primera L que será vista como una resistencia de fuente virtual  $R_V$  para la segunda L, como se muestra en la **Fig. C11**. Así, el diseño de cada sección se plantea como en el caso de la red de adaptación L, con los siguientes objetivos: la primera sección L debe adaptar  $Z_g$  a  $R_V$  y la segunda sección L debe adaptar  $R_V$  a  $Z_c$ .



**Fig. C11.** Diseño de redes de adaptación con tres elementos con base en redes L: (a) redes T; (b) redes Π.

- En el caso de las redes T (**Fig. C11a**) a partir de las expresiones (C-15) y (C-24) puede obtenerse una buena estimación del valor de la resistencia virtual  $R_V$  mediante la relación:

$$R_V = \min(R_g, R_c) \cdot (1 + Q^2) \quad (C-26)$$

Donde  $Q$  es el valor requerido que se determina mediante (C-25).

Este criterio asegura que el valor  $R_V$  resultante sea *mayor* que  $R_g$  y  $R_c$  y puede aplicarse con resultados aceptables aún cuando las impedancias  $Z_g$  y/o  $Z_c$  no sean resistivas puras

Una vez que se determina el valor de  $R_V$ , se calculan los valores de los componentes de cada sección L con la ayuda de la resistencia virtual y se obtienen 4 elementos.

Los dos componentes en *derivación* de cada sección L se pueden combinar sumando las *suceptancias*. El tipo de componente resultante dependerá del signo de la reactancia final.

De este modo, la red de adaptación obtenida consta de tres elementos y tiene el  $Q$  requerido.

- En el caso de las redes  $\Pi$  (**Fig. C11b**), también a partir de las expresiones (C-15) y (C-24) puede obtenerse una buena estimación del valor de la resistencia virtual  $R_V$  mediante la relación:

$$R_V = \frac{\max(R_g, R_c)}{1+Q^2} \tag{C-27}$$

Donde  $Q$  es el valor requerido que se determina mediante (C-25).

Este criterio asegura que el valor  $R_V$  resultante sea *menor* que  $R_g$  y  $R_c$  y puede aplicarse con resultados aceptables aún cuando las impedancias  $Z_g$  y/o  $Z_c$  no sean resistivas puras.

Una vez que se determina el valor de  $R_V$ , se calculan los valores de los componentes de cada sección  $L$  con la ayuda de la resistencia virtual y se obtienen 4 elementos.

Los dos componentes en *serie* de cada sección  $L$  se pueden combinar sumando sus *reactancias*. El tipo de componente resultante dependerá del signo de la reactancia final.

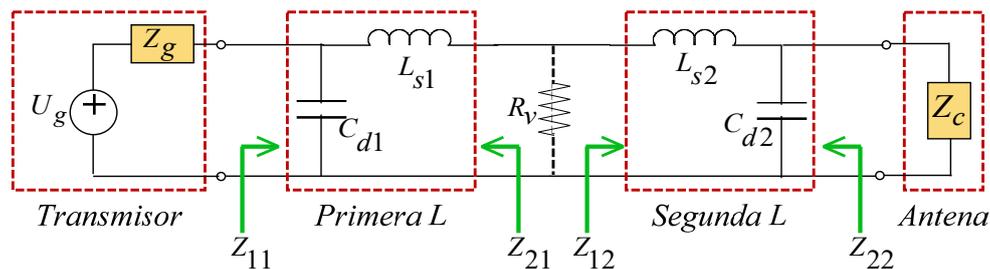
De este modo, la red de adaptación obtenida consta de tres elementos y tiene el  $Q$  requerido.

**Ejemplo C.5.**

Una antena de chip se montó en una PCB de 4 capas para operar a 2445 MHz con un ancho de banda de 500 MHz, y se midió el valor de impedancia justo en el punto de alimentación de la antena que resultó de  $21 + j1,15 \Omega$ . Se requiere diseñar una red de adaptación  $\Pi$  pasa bajos entre dicha antena y la fuente de señal cuya impedancia es  $Z_g=50 + j0 \Omega$

**Resolución**

El esquema del circuito a emplear se muestra en la **Fig. C12**.



**Fig. C12.** Red de adaptación  $\Pi$  entre un transmisor y la antena.

El factor  $Q$  requerido resulta de aplicar la expresión (C-25):

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{2445 \cdot 10^6}{500 \cdot 10^6} = 4,89$$

Por ser una red  $\Pi$ , la primera  $L$  debe empezar en derivación, es decir  $R_g > R_V$ ; y la segunda  $L$  debe empezar en serie, es decir  $R_V < R_c$ . Entonces  $R_V$  se calcula mediante la expresión (C-27):

$$R_V = \frac{\max(R_g, R_c)}{1+Q^2} = \frac{50}{1+4,89^2} = 2 \Omega$$

**Diseño de la primera L**

Las impedancias que cargan a la primera sección  $L$  son  $Z_g$  y  $R_V$  que, en este caso, ambas son resistivas puras. Para la primera  $L$  se aplica el procedimiento que se desprende del análisis efectuado en el apartado **C.4.2.** para los casos en que  $R_g > R_c$ .

A la impedancia  $Z_g$  se le conecta en paralelo una reactancia  $X_d$  y la combinación tiene un circuito equivalente en serie constituido por una resistencia  $R_{sV}$  en serie con una reactancia  $X_{sV}$ . El valor requerido de  $X_d$  se determina con la expresión (C-19) en la cual se reemplaza a  $R_c$  por  $R_V$ :

$$X_{d1,2} = \frac{1}{R_g/R_V - 1} \left[ X_g \pm R_g \sqrt{\frac{R_g}{R_V} - 1 + \frac{X_g^2}{R_g R_V}} \right] = \frac{1}{50/2 - 1} \left[ \pm 50 \sqrt{\frac{50}{50/2} - 1} \right] = \begin{cases} X_{d1} = -10,21 \Omega \\ X_{d2} = 10,21 \Omega \end{cases}$$

Como el elemento en derivación es un capacitor  $C_{d1}$ , el signo a considerar es el negativo.

$$X_{d1} = -\frac{1}{\omega_0 C_{d1}} \Rightarrow C_{d1} = -\frac{1}{2\pi \cdot 2,445 \cdot 10^9 \cdot (-10,21)} = 6,366 \cdot 10^{-12} \text{ F} \quad (1)$$

Pero el hecho de haber conectado en derivación el capacitor  $C_{d1}$  de valor 6,366 pF tuvo por un lado, el efecto deseado de reflejar a la salida el valor de resistencia  $R_V$  que se requería; y por otro lado, la consecuencia, en este caso indeseada, de reflejar una capacidad en serie cuyo valor de reactancia (virtual) se determina a partir de la expresión (C-21):

$$X_{sV1} = \frac{X_{d1}(R_g^2 + X_g^2 + X_g X_{d1})}{X_{d1}^2 + 2X_g X_{d1} + (R_g^2 + X_g^2)} = \frac{-10,21 \cdot 50^2}{(-10,21)^2 + 50^2} = -9,7998 \Omega$$

Por lo tanto, para completar la adaptación se debe cancelar, a la pulsación  $\omega_0$ , la reactancia capacitiva  $X_{sV}$  que se encuentra *virtualmente* en serie con  $R_V$ . Esto se consigue conectando *físicamente* en serie una reactancia  $X_{sF}$  dada por (C-22):

$$X_{sV1} + X_{sF1} = 0 \Rightarrow X_{sF1} = -X_{sV1} = -(-9,7998) = 9,7998 \Omega$$

Es decir, inductiva. Entonces caso habría que conectar un inductor  $L_{s1}$  en serie, cuyo valor resulta:

$$X_{sF} = \omega_0 L_{s1} \Rightarrow L_{s1} = \frac{X_{sF}}{\omega_0} = \frac{9,7998}{2\pi \cdot 2,445 \cdot 10^9} = 6,379 \cdot 10^{-10} \text{ H} \quad (2)$$

### Diseño de la segunda L

Las impedancias que cargan a la segunda sección L son  $R_V = 2 \Omega$  y  $Z_c = 21 + j1,15 \Omega$ . Por lo tanto, en este caso se debe aplicar el procedimiento que se desprende del análisis efectuado en el apartado C.4.1. para los casos en que  $R_g < R_c$ .

A la resistencia  $R_V$  se le conecta en serie un inductor  $L_{s2}$  y la combinación tiene un circuito equivalente en derivación constituido por una resistencia  $R_{dV}$  en paralelo con un inductor  $L_{dV}$ . El valor requerido de  $L_{s2}$  se determina con la expresión (C-10) en la cual se reemplaza a  $R_g$  por  $R_V$  y se hace  $X_g = 0$ :

$$X_{s2} = \pm R_V \sqrt{\frac{R_c}{R_V} - 1 + \frac{X_c^2}{R_V R_c}} = \pm 2 \sqrt{\frac{21}{2} - 1 + \frac{(1,15)^2}{2 \cdot 21}} = \pm 6,175 \Omega$$

Como el elemento en serie es un inductor  $L_{s2}$ , el signo a considerar es el positivo.

$$X_{s2} = \omega_0 L_{s2} \Rightarrow L_{s2} = \frac{6,175}{2\pi \cdot 2,445 \cdot 10^9} = 4,02 \cdot 10^{-10} \text{ H} \quad (1)$$

Entonces, el hecho de haber conectado en serie el inductor  $L_{s2}$  de valor  $4,02 \cdot 10^{-10}$  H tuvo por un lado, el efecto deseado de reflejar a la salida el valor de resistencia requerido del equivalente paralelo de  $Z_c$  que se requería (condición impuesta en la deducción de la expresión de  $X_{s1,2}$ ); pero por otro lado, conlleva el efecto colateral de reflejar una reactancia en derivación (virtual)  $X_{dV}$  cuyo valor se determina a partir de la expresión (C-12), reemplazando a  $R_g$  por  $R_V$ :

$$X_{dV2} = \frac{R_g^2 + (X_g + X_{s2})^2}{X_g + X_{s2}} = \frac{2^2 + (0 + 6,175)^2}{0 + 6,175} = 6,823$$

En este caso, como  $X_{dV2}$  está en paralelo con  $Z_c$  que es compleja, hay que considerar el equivalente paralelo de  $Z_c$ ; y para una adaptación conjugada, la *susceptancia* total en derivación en terminales de  $Z_c$  debe resultar nula. La reactancia  $X_{cVd}$  del equivalente paralelo de  $Z_c$  se obtiene mediante la expresión (C-9):

$$X_{cVd} = \frac{R_c^2 + X_c^2}{X_c} = \frac{21^2 + 1,15^2}{1,15} = 384,62 \Omega$$

Solo resta agregar en derivación una admitancia física  $X_{dF2}$  que satisfaga la condición de adaptación conjugada del equivalente paralelo de la impedancia de carga. Por tratarse de admitancias en paralelo, debe ser:

$$\frac{1}{X_{dV2}} + \frac{1}{X_{dF2}} = -\frac{1}{X_{cVd}} \Rightarrow \frac{1}{X_{dF2}} = -\frac{1}{X_{cVd}} - \frac{1}{X_{dV2}}$$

Es decir:

$$X_{dF2} = -\frac{X_{cVd} \cdot X_{dV2}}{X_{cVd} + X_{dV2}} = -\frac{384,62 \cdot (6,823)}{384,62 + 6,823} = -6,704$$

$$-\frac{1}{\omega_0 C_{d2}} = X_{dF2} \Rightarrow C_{d2} = -\frac{1}{2\pi \cdot 2,445 \cdot 10^9 \cdot (-6,704)} = 9,7 \cdot 10^{-12} \text{ F} \quad (1)$$

### Circuito $\Pi$ resultante

Para el circuito  $\Pi$  se adoptan los elementos en derivación de cada sección L (ambos capacitores) y se suman las reactancias de los dos elementos en serie para obtener un único elemento. En este caso, como se trata de inductores, directamente se suman las inductancias. De este modo, los 3 elementos del circuito resultante son:

$$C_{d1} = 6,366 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

$$L_s = L_{s1} + L_{s2} = 6,379 \cdot 10^{-10} + 4,02 \cdot 10^{-10} = 1,038 \cdot 10^{-9} \text{ H}$$

$$C_{d2} = 9,7 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$


---

### C.6. Bibliografía

- [1] Silicon Labs. *Impedance Matching Network Architectures*. Silicon Labs AN1275 Application Note.
- [2] P.B. Walkley. *Impedance Matching Networks of the L Type*. Royal Aircraft Establishment Technical Report TR-78049. Farnborough, Hants, UK. May 1978.
- [3] R. Armstrong and E. Korolkiewicz. *application of resonant circuit theory to matching networks*. Int. J. Elect. Enging Educ., Vol. 18, pp. 351-358. Manchester V.P., UK, 1981.



---

# Apéndice D

## Valores normalizados de resistores y capacitores

---

### D.1. Las series de valores normalizados (Series E)

La Norma IRAM 4083 [1] al igual que distintos organismos de regulación en otros países, en correspondencia con la Comisión Electrotécnica Internacional (IEC) adhieren a la recomendación IEC 60063 [2], en la que se especifican valores normalizados para resistores y capacitores, frecuentemente referidos en la bibliografía como *sistema de valores normalizados*.

IEC definió la serie de valores *preferidos* en 1952 con el objetivo de permitir a los fabricantes producir componentes pasivos con mayor facilidad. La serie E define los valores de capacitancia y resistencia, así como las tolerancias de los capacitores y resistores. Estos valores normalizados se publican en las normas IEC, IEC 60063: 1963 e IEC 60063: 2015. Mientras que la norma IEC 60063 define los valores y tolerancias *preferidos*, la norma IEC 60062 [3] define los códigos de marcado para los capacitores y resistores.

Las series E han sido adoptadas por varios organismos internacionales de regulación y normalización, incluido el Instituto Argentino de Normalización y Certificación (IRAM).

Los beneficios de la normalización de valores de los componentes son evidentes. Los valores de los componentes que los fabricantes deben producir están acotados, y ello garantiza la compatibilidad de los componentes, de manera tal que los ingenieros no se encuentran limitados a adoptar los componentes de un único fabricante.

Estos valores normalizados tienen una secuencia logarítmica y esto permite que los diferentes valores estén separados de tal manera que se relacionen con la tolerancia o precisión del componente.

Para comprender las series normalizadas E, es necesario tener presente el concepto de tolerancia. Sea por ejemplo una resistencia de  $10\text{ k}\Omega \pm 10\%$ ; esto significa que el valor nominal ( $10\text{ k}\Omega$ ) está comprendido entre  $9\text{ k}\Omega$  y  $11\text{ k}\Omega$ . Las series E están confeccionadas de modo tal que contengan todos los posibles valores que cubran, sin solapamiento, 1 década y se denominan atendiendo al número de estos valores en la década. Así, la serie E12 son doce valores entre 1 y 10, con una tolerancia 20%. Las series E y su correspondientes tolerancias se presentan en la **Tabla D-I**.

**Tabla D-I.** Series E. Tolerancias y valores por década.

Serie	Tolerancia [%]	Valores por década (N)
E6	20	6
E12	10	12
E24	5	24
E48	2	48
E96	1	96
E192	0,5	192

La expresión matemática que define a cada valor normalizado es:

$$E_n(N) = 10^{\frac{n-1}{N}} \quad n \in \mathbb{N}; \quad 0 \leq n < N \quad (\text{D-1})$$

Donde  $N$  es el número de valores por década y  $n$  es el número de orden del término de la serie.

Las series E6, E12 y E24 se expresan con redondeo a un dígito decimal. Las series E48, E96 y E192 se expresan con redondeo a 2 dígitos decimales.

Así, por ejemplo, el noveno término de la serie E48 resulta:

$$E_9(48) = 10^{\frac{9-1}{48}} = 1,47$$

### Series E24, E12 y E6.

Los valores de la serie E24 se obtienen redondeando los números teóricos de la serie geométrica (D-1) con  $N = 24$ . Es importante observar que algunos valores de la serie E24 se desvían de la regla matemática expresada por (D-1). De manera similar, los valores de la serie E12 se obtienen omitiendo los términos pares de la serie E24; y los valores de la serie E6 se obtienen omitiendo los términos pares de la serie E12. La **Tabla D-II** muestra los valores de las series E6, E12 y E24 de tolerancias 20%, 10% y 5% respectivamente. El rango completo de los valores de los componentes estándar consiste en *múltiplos* y *submúltiplos* decimales de los valores E6, E12 y E24 que se proporcionan en dicha Tabla.

**Tabla D-II.** Series E6, E12 y E24.

E6	E12	E24
20%	10%	5%
1.0	1.0	1.0
		1.1
	1.2	1.2
		1.3
1.5	1.5	1.5
		1.6
	1.8	1.8
		2.0
2.2	2.2	2.2
		2.4
	2.7	2.7
		3.0
3.3	3.3	3.3
		3.6
	3.9	3.9
		4.3
4.7	4.7	4.7
		5.1
	5.6	5.6
		6.2
6.8	6.8	6.8
		7.5
	8.2	8.2
		9.1

### Series E192, E96, E48

Los valores de la serie E192 se obtienen redondeando los números teóricos de la serie geométrica (D-1) con  $N = 192$ . Los valores teóricos obtenidos de la serie se redondean a tres dígitos significativos. La serie E96 se obtiene omitiendo los términos pares de la serie E192. De manera similar, la serie E48 se obtiene los términos pares de la serie E96. El rango completo de los valores de los componentes estándar consta de *múltiplos* decimales y *submúltiplos* de los valores E192, E96 y E48 que se proporcionan en la **Tabla D-III**.

De este modo se completa la **Tabla D-II** en la que se muestran las series E6, E12 y E24 de valores normalizados, de tolerancias de 20%, 10% y 5% respectivamente.

**Tabla D-III.** Series E48, E96 y E192.

E48	E96	E192															
2%	1%	0,5%	2%	1%	0,5%	2%	1%	0,5%	2%	1%	0,5%	2%	1%	0,5%	2%	1%	0,5%
1.00	1.00	100	1.47	1.47	147	2.15	2.15	215	3.16	3.16	316	4.64	4.64	464	6.81	6.81	681
		101			149			218			320			470			690
	1.02	102		1.50	150		2.21	221		3.24	324		4.75	475		6.98	698
		104			152			223			328			481			706
1.05	1.05	105	1.54	1.54	154	2.26	2.26	226	3.32	3.32	332	4.87	4.87	487	7.15	7.15	715
		106			156			229			336			493			723
	1.07	107		1.58	158		2.32	232		3.40	340		4.99	499		7.32	732
		109			160			234			344			505			741
1.10	1.10	110	1.62	1.62	162	2.37	2.37	237	3.48	3.48	348	5.11	5.11	511	7.50	7.50	750
		111			164			240			352			517			759
	1.13	113		1.65	165		2.43	243		3.57	357		5.23	523		7.68	768
		114			167			246			361			530			777
1.15	1.15	115	1.69	1.69	169	2.49	2.49	249	3.65	3.65	365	5.36	5.36	536	7.87	7.87	787
		117			172			252			370			542			796
	1.18	118		1.74	174		2.55	255		3.74	374		5.49	549		8.06	806
		120			176			258			379			556			816
1.21	1.21	121	1.78	1.78	178	2.61	2.61	261	3.83	3.83	383	5.62	5.62	562	8.25	8.25	825
		123			180			264			388			569			835
	1.24	124		1.82	182		2.67	267		3.92	392		5.76	576		8.45	845
		126			184			271			397			583			856
1.27	1.27	127	1.87	1.87	187	2.74	2.74	274	4.02	4.02	402	5.90	5.90	590	8.66	8.66	866
		129			189			277			407			597			876
	1.30	130		1.91	191		2.80	280		4.12	412		6.04	604		8.87	887
		132			193			284			417			612			898
1.33	1.33	133	1.96	1.96	196	2.87	2.87	287	4.22	4.22	422	6.19	6.19	619	9.09	9.09	909
		135			198			291			427			626			919
	1.37	137		2.00	200		2.94	294		4.32	432		6.34	634		9.31	931
		138			203			298			437			642			942
1.40	1.40	140	2.05	2.05	205	3.01	3.01	301	4.42	4.42	442	6.49	6.49	649	9.53	9.53	953
		142			208			305			448			657			965
	1.43	143		2.10	210		3.09	309		4.53	453		6.65	665		9.76	976
		145			213			312			459			673			988

Tolerancias para valores de resistores y capacitores.

Los resistores se producen en valores estándar para simplificar los procesos de fabricación, compra, manejo y diseño. La serie de números *preferidos* produce un espaciado que relaciona los valores de los componentes con sus tolerancias. Para resistencias convencionales, las tolerancias son  $\pm 20\%$  (E6),  $\pm 10\%$  (E12),  $\pm 5\%$  (E24),  $\pm 2\%$  (E48) y  $\pm 1\%$  (E96). Algunos fabricantes producen resistores con tolerancias más precisas a un costo mayor.

Para resistores, las series de valores normalizados de tolerancias más habituales en el mercado son las series E6, E12, E24 y E48.

A diferencia de los resistores, los valores de los capacitores generalmente se definen en dos dígitos significativos. Por lo tanto, no es común aplicar las series E48, E96 y E192. En la mayoría de los casos, los fabricantes de capacitores utilizan tolerancias más estrictas para estos componentes pasivos. Es común que los fabricantes de capacitores utilicen una tolerancia de  $\pm 1\%$  con los valores de E24.

**D.2. Relaciones entre los valores de una misma lista**

En numerosos métodos de diseño se aplican criterios de simplificación basados en adoptar un valor para la relación entre dos componentes de un circuito (p. ej., haciendo  $R_1 = n R_2$ , o bien  $C_1 = m C_2$ , etc.). En tales casos, resulta deseable que los dos valores (para el ejemplo, tanto  $R_1$  como  $R_2$ , o bien tanto  $C_1$  como  $C_2$ ) se correspondan con una misma lista de valores normalizados.

A tal fin resulta de utilidad conocer, para cada serie EN la frecuencia de ocurrencia de los valores de todas las relaciones posibles entre dos elementos de la serie, definidas por:

$$R_j = \frac{v_j}{v_k} \Big|_{\substack{j \neq k \\ j=1..N \\ k=1..N}}$$

Siendo  $v_j$  y  $v_k$  elementos de la serie EN, siendo  $N= 6, 12, 24, 48, 96$  ó  $192$ .

En la **Tabla D-IV** se muestran los valores más frecuentes de la relación  $R_j$  para cada serie y el valor  $f$  de la correspondiente frecuencia de ocurrencia.

Por ejemplo, si se deben adoptar dos valores de resistencia  $R_1$  y  $R_2$  tales que  $R_1 = m R_2$  y ambos valores deben corresponder a la serie E48, entonces conviene adoptar  $m=1,4$  ó  $m=0,714286$ , dado que para este valor de  $m$  existen 7 pares de valores de  $R_1$  y  $R_2$  en la lista.

**Tabla D-IV.** Valores más comunes de relaciones entre elementos de las listas y su frecuencia de ocurrencia.

E12		E24		E48		E96		E192	
$R_j$	$f$								
0,66667	4	0,66667	7	0,714286	7	0,75	19	0,75	48
1,5	3	1,5	7	1,4	7	1,333333	19	1,333333	48
0,454545	2	0,5	5	1,333333	7	0,714286	14	0,5	29
0,555556	2	2	5	0,75	6	1,4	14	2	29
0,833333	2	0,75	5	0,909091	5	0,5	12	0,714286	21
0,545454	2	1,333333	5	1,1	5	2	12	1,4	21
1,2	2	0,333333	4	0,785714	3	0,666667	9	0,666667	20
0,818182	2	0,833333	4	1,27273	3	1,5	9	1,5	20
1,8	2	1,2	4			1,7	5	0,909091	17
1,222222	2	3	4			1,3	5	1,1	17
1,833333	2	0,555556	3			0,5625	5	0,555556	15
2,2	2	0,8	3			0,866667	5	0,777778	15
		0,909091	3			1,15385	5	1,28571	15
		1,25	3			1,77778	5	1,8	15
		0,916667	3					0,833333	14
		1,1	3					1,2	14
		1,09091	3					0,416667	14
		1,8	3					0,583333	14
								2,4	14

**D.3. Script de Matlab**

El siguiente script de Matlab es una función de la forma:

```
function[X, Err]=ExxValue(Z, Exx)
```

con dos parámetros de entrada y dos parámetros de salida.

Los parámetros de entrada son:

Z : es el valor al que se pretende ajustar con el menor error posible con un elemento de la lista de valores normalizados especificada.

Exx: es un entero que indica la lista de valores normalizados a considerar. Puede ser sólo uno de los siguientes valores: 6, 12, 24, 48, 96 ó 192.

Los parámetros de salida son:

X : es el valor del elemento de la lista de valores normalizados especificada que aproxima al valor Z con el menor error.

Err: es el error porcentual del valor X con respecto al valor Z, definido como:

$$\text{Err}=100 \cdot (X-Z)/Z$$

La función se implementó de manera que si por error se pasa un valor inválido para Exx, devuelve Y=0 y Err=100.

```
function [Y, Err] = ExxValue(Z, Exx)
% Devuelve el valor Y más cercano a Z que sea compatible
% con la lista de valores normalizados Exx, donde Exx
% puede ser 6, 12, 24, 48, 96 ó 192
% Además retorna el error relativo porcentual de Y respecto de Z,
% definido como Err=100*(Y-Z)/Z
E6 = [1.0, 1.5, 2.2, 3.3, 4.7, 6.8, 10];
E12 = [1.0, 1.2, 1.5, 1.8, 2.2, 2.7, 3.3, 3.9, 4.7, 5.6, 6.8, 8.2, 9.1, 10];
E24 = [1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.6, 1.8, 2.0, 2.2, 2.4, 2.7, 3.0, 3.3, ...
      3.6, 3.9, 4.3, 4.7, 5.1, 5.6, 6.2, 6.8, 7.5, 8.2, 9.1, 10];
E48 = [100, 105, 110, 115, 121, 127, 133, 140, 147, 154, 162, 169, ...
      178, 187, 196, 205, 215, 226, 237, 249, 261, 274, 287, 301, ...
      316, 332, 348, 365, 383, 402, 422, 442, 464, 487, 511, 536, ...
      562, 590, 619, 649, 681, 715, 750, 787, 825, 866, 909, 953, 1000];
E96 = [100, 102, 105, 107, 110, 113, 115, 118, 121, 124, 127, 130, 133, ...
      137, 140, 143, 147, 150, 154, 158, 162, 165, 169, 174, 178, 182, ...
      187, 191, 196, 200, 205, 210, 215, 221, 226, 232, 237, 243, 249, ...
      255, 261, 267, 274, 280, 287, 294, 301, 309, 316, 324, 332, 340, ...
      348, 357, 365, 374, 383, 392, 402, 412, 422, 432, 442, 453, 464, ...
      475, 487, 499, 511, 523, 536, 549, 562, 576, 590, 604, 619, 634, ...
      649, 665, 681, 698, 715, 732, 750, 768, 787, 806, 825, 845, 866, ...
      887, 909, 931, 953, 976, 1000];
E192= [100,101,102,104,105,106,107,109,110,111,113,114,115,117,118,120, ...
      121,123,124,126,127,129,130,132,133,135,137,138,140,142,143,145, ...
      147,149,150,152,154,156,158,160,162,164,165,167,169,172,174,176, ...
      178,180,182,184,187,189,191,193,196,198,200,203,205,208,210,213, ...
      215,218,221,223,226,229,232,234,237,240,243,246,249,252,255,258, ...
      261,264,267,271,274,277,280,284,287,291,294,298,301,305,309,312, ...
      316,320,324,328,332,336,340,344,348,352,357,361,365,370,374,379, ...
      383,388,392,397,402,407,412,417,422,427,432,437,442,448,453,459, ...
      464,470,475,481,487,493,499,505,511,517,523,530,536,542,549,556, ...
      562,569,576,583,590,597,604,612,619,626,634,642,649,657,665,673, ...
      681,690,698,706,715,723,732,741,750,759,768,777,787,796,806,816, ...
      825,835,845,856,866,876,887,898,909,919,931,942,953,965,976,988, 1000];
switch Exx
case 6
    ESerie=E6;
    Pot10=10^floor(log10(Z));
case 12
    ESerie=E12;
    Pot10=10^floor(log10(Z));
case 24
    ESerie=E24;
    Pot10=10^floor(log10(Z));
case 48
    ESerie=E48;
    Pot10=10^floor(log10(Z)-2);
case 96
    ESerie=E96;
    Pot10=10^floor(log10(Z)-2);
case 192
    ESerie=E192;
    Pot10=10^floor(log10(Z)-2);
otherwise
    ESerie=[];
    Pot10=0;
end
if isempty(ESerie)
    Y=0;
    Err=100;
end
```

```
else
    [Err,k] = min(abs(ESerie*Pot10-Z));
    if k==Exx+1, k=1; Pot10=10*Pot10; end
    Y=ESerie(k)*Pot10;
    Err=100*Err/Z;
end
end
```

#### D.4. Referencias

- [1] **IRAM 4083**. *Resistores y capacitores fijos de uso en la industria electrónica. Valores preferidos de resistencia y de capacitancia*. Instituto Argentino de Normalización y Certificación. 5-12-1975.
- [2] **IEC 60063**. *Preferred number series for resistors and capacitors*. International Electrotechnical Commission. 3rd. Ed. 27-03-2015.
- [3] **IEC 60062**. *Marking codes for resistors and capacitors*. International Electrotechnical Commission. 6th. Ed. 12-07-2016.

---

# Apéndice E

## El amplificador operacional

---

### E.1. Introducción

El Amplificador Operacional (abreviado AO), es un amplificador de acoplamiento directo de alta ganancia, el que mediante el uso de una red de realimentación mejora su respuesta total, la cual puede ser controlada en forma sencilla. Es muy versátil y eficiente, permite realizar aplicaciones tanto lineales como no lineales, las que abarcan Instrumentación Electrónica, Circuitos de Interfaz, Electrónica Industrial, Computación Analógica y otras aplicaciones especiales.

El nombre de AO, deriva de sus primeras aplicaciones, las que consistían en la realización de operaciones matemáticas mediante el uso de computadores analógicos (básicamente la resolución de ecuaciones diferenciales).

Dentro de los usos específicos de los AO, se pueden mencionar las siguientes aplicaciones: Amplificadores de Corriente Continua., Amplificadores de Corriente Alterna, Comparadores, Osciladores, Multivibradores, Filtros Activos, Amplificadores de Instrumentación, Transmitters y acondicionadores de señal, etc. Por otro lado, las aplicaciones más comunes están las operaciones matemáticas (procesamiento de señales): Sumadores, Integradores, Diferenciadores, Amplificadores Logarítmicos, etc.

En este Apéndice se analizan las configuraciones más básicas y clásicas que resultan de interés para su aplicación en el campo de los Filtros Activos.

### E.2. El AO ideal

Para introducir la definición del AO ideal se considera conveniente resumir en la **Tabla E-I** los diferentes tipos de amplificadores con su correspondiente denominación en función al tipo de entrada / salida, como así también las características ideales de cada uno.

**Tabla E-I.** Diferentes tipos de amplificadores y sus respectivas características ideales.

Denominación	Entrada	Salida	Ganancia	$R_i$ ideal	$R_s$ ideal
Amplificador de Tensión	$U_e$	$U_s$	$U_s/U_e$	$\infty$	0
Amplificador de Corriente	$I_e$	$I_s$	$I_s/I_e$	0	$\infty$
Amplificador de Transconductancia	$U_e$	$I_s$	$I_s/U_e$	$\infty$	$\infty$
Amplificador de Transresistencia	$I_e$	$U_s$	$U_s/I_e$	0	0

Un AO ideal es genéricamente un amplificador diferencial de tensión con las características que se indican en la **Tabla E-II**.

**Tabla E-II.** Principales Características del AO ideal.

Parámetro	Denominación en inglés	Símbolo	Valor
Corriente de entrada	Input current	$i_e$	0
Desbalance de tensión de entrada	Input offset voltage	$u_d$	0
Impedancia de Entrada	Input Impedance	$Z_e$	$\infty$
Impedancia de Salida	Output Impedance	$Z_s$	0
Ganancia (en lazo abierto)	Gain	$a$	$\infty$
Ancho de Banda	Bandwidth	$B$	$\infty$

Entonces, el amplificador operacional ideal tiene las siguientes características:

- No toma corriente de alimentación y por lo tanto no requiere fuente de alimentación
- Al no requerir fuente de alimentación, la tensión de salida  $u_S$  no estará limitada pudiendo ser  $\pm\infty$ .
- Al tener impedancia de salida nula, la corriente de salida es  $\pm\infty$  para  $u_S = \pm\infty$ .
- Por tener ganancia infinita, la más leve tensión  $u_d$  en la entrada dará lugar, en lazo abierto, a cambios abruptos en la tensión  $u_S$  entre  $-\infty$  y  $+\infty$ .
- Por tener velocidad de respuesta infinita, dichos cambios abruptos se producirían instantáneamente en ambos sentidos.

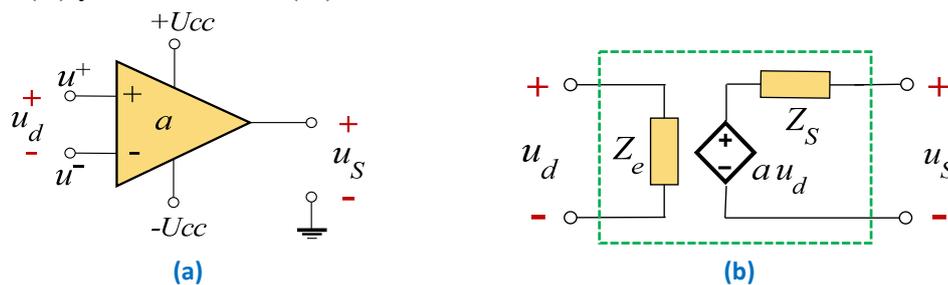
Por lo tanto el modelo del AO ideal si bien es una herramienta útil en las primeras etapas de simulación, no explica adecuadamente el comportamiento del AO real.

### E.3. El AO “perfecto”

Los AO reales tienen una ganancia en lazo abierto muy alta (no es infinita, sino del orden de  $10^5$ ), y lo mismo ocurre con su ancho de banda y su impedancia de entrada, aspectos que deberán ser considerados cuando se trabaje con AO reales y las condiciones de diseño sean más precisas.

Este dispositivo puede alimentarse con fuentes positivas y negativas, lo cual permite que la tensión de salida pueda excursionar tanto por arriba como por debajo del potencial de tierra. Evidentemente, los rangos máximos de salida, estarán determinados por las fuentes de alimentación.

Un AO real se representa mediante el símbolo que se muestra en la **Fig. E1a**, donde  $u^-$  es la entrada inversora y  $u^+$  es la entrada no inversora. El cuadripolo equivalente se muestra en la **Fig. E1b**. Idealmente  $u_S$  depende de la diferencia de potencial  $u_d$  (entrada diferencial) que existe entre los dos terminales de entrada, el inversor ( $u^-$ ) y el no inversor ( $u^+$ ).



**Fig. E1.** (a) Símbolo empleado para representar a un AO. (b) cuadripolo equivalente.

La impedancia de entrada  $Z_e$  es muy grande ( $Z_e \rightarrow \infty$ ), por lo cual la corriente de entrada tiende a ser nula y prácticamente no carga al circuito conectado a la entrada.

La impedancia de salida  $Z_s$  es muy pequeña ( $Z_s \rightarrow 0$ ), por lo cual la tensión de salida es prácticamente independiente de la impedancia de carga, la cual siempre es mucho mayor que  $Z_s$  ( $u_S = a \cdot u_d$ ).

La *ganancia de tensión*  $a$  se define como la relación de la tensión de salida  $u_S$  a la tensión diferencial de entrada (o desbalance de tensión de entrada)  $u_d$  y su valor *tiende a infinito*, con lo cual:

$$a = \frac{u_S}{u_d} \gg 1$$

La característica de transferencia de tensión típica de un AO se muestra en la **Fig. E2**.

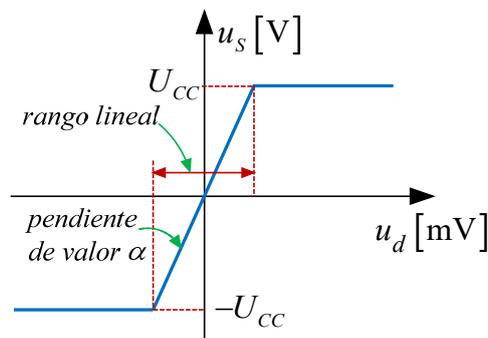


Fig. E2. Característica de transferencia de tensión típica de un AO.

Cuando la ganancia tiende a infinito (extremo que corresponde al caso del AO ideal), la tensión diferencial  $u_d = u^+ - u^-$  tiende a cero; o dicho de otra forma  $u^- \approx u^+$ . En la realidad, la tensión diferencial  $u_d$  es muy cercana a cero, y así debe ser debido a que la tensión de salida debe ser inferior a la tensión de alimentación.

**Ejemplo E-1.** Sea un AO de ganancia  $a = 10^5$  en el que se logra obtener  $u_s = 10$  V. Esto significa que la tensión diferencial en la entrada es  $u_d = 0,1$  mV.

Entonces, para poder utilizar este AO en la zona lineal, es necesario que la tensión  $u_d$  excursione entre  $\pm 0,1$  mV.

Por otra parte si  $u_d$  es grande, la tensión de salida  $u_s$  alcanzará un valor de saturación, dado que nunca podrá superar a la tensión de alimentación  $U_{CC}$ . En el caso del ejemplo anterior, si la tensión  $u_d$  supera los límites  $\pm 0,1$  mV, la salida saturará a los valores  $\pm U_{CC}$ .

Entonces, cuando la entrada diferencial excede el rango lineal de la curva de la Fig. E2, el AO opera como un dispositivo no lineal. Esta característica es aprovechada por muchas aplicaciones no lineales (tales como comparadores, osciladores y circuitos disparadores).

**Ejemplo E-2.** Sea el AO con la característica de transferencia de la Fig. E2 que se conecta a lazo abierto, tal como se indica en la Fig. E3.

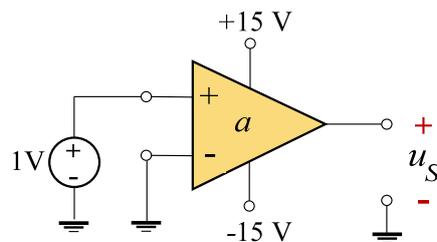


Fig. E3. Conexión a lazo abierto de un AO.

Al resultar la tensión de entrada superior al rango de linealidad, la tensión de salida alcanzará el valor de saturación  $u_s = +15$  V.

Esta configuración se denomina *comparador a lazo abierto*, es decir sin ningún tipo de realimentación entre entrada y salida.

Por lo tanto, un circuito con un AO a lazo abierto se comportará como un comparador y saturará con  $u_s$  igual a alguna de las tensiones de alimentación. Entonces surge naturalmente el interrogante de cómo diseñar circuitos que funcionen linealmente (es decir con salida no saturada) usando AO con ganancia  $a$  tendiendo a infinito. La clave para responder a este interrogante es el concepto de *realimentación negativa*.

#### E.4. El AO perfecto con realimentación negativa

El concepto de realimentación negativa es muy amplio y de aplicación en sistemas de control en general. Consiste en retroalimentar en la entrada del sistema una acción o magnitud proporcional a las variaciones de la salida del sistema, de tal manera que contrarreste aquellas variaciones. El esquema en bloques de este proceso se muestra en Fig. E4.

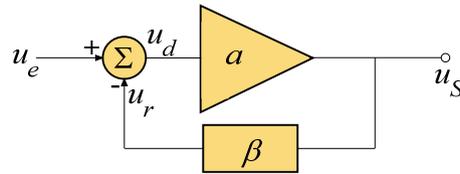


Fig. E4. Diagrama en bloques de la conexión con realimentación negativa de un AO.

Siendo en Fig. E4:

- $u_e$  Señal de entrada
- $u_s$  Señal de salida que está siendo medida y escalada a través del bloque de realimentación  $\beta$  produciendo la señal de realimentación  $u_r$ .
- $u_r$  Señal de realimentación
- $a$  Ganancia del sistema a lazo abierto
- $\beta$  Coeficiente de realimentación
- $u_d$  Señal de error
- $\Sigma$  bloque sumador

Para este esquema se pueden plantear las siguientes expresiones:

$$u_s = a \cdot u_d$$

$$u_d = u_e - u_r$$

$$u_r = \beta \cdot u_s$$

y combinando estas expresiones:

$$u_s = a \cdot (u_e - u_r) = a \cdot (u_e - \beta \cdot u_s) = a \cdot u_e - a \cdot \beta \cdot u_s$$

$$u_s (1 + a \cdot \beta) = a \cdot u_e$$

Entonces, la ganancia a lazo cerrado, definida como  $A = u_s / u_e$  resulta:

$$A = \frac{u_s}{u_e} = \frac{a}{1 + \beta \cdot a}$$

Para valores del producto  $\beta a \gg 1$ , que es la situación normal dado que  $a$  es muy grande (tendiendo a infinito), resulta:

$$A = \frac{u_s}{u_e} = \frac{a}{1 + \beta \cdot a} \cong \frac{1}{\beta} \tag{E-1}$$

Es decir para valores grandes del producto  $\beta a$  la ganancia a lazo cerrado  $A$  será función exclusivamente del factor de realimentación  $\beta$ , resultando independiente de  $a$  (y de sus variaciones).

Al producto  $\beta a$  se lo conoce como ganancia del lazo. Volveremos a este concepto más adelante cuando estudiemos las desviaciones del AO “real” frente al “perfecto” que estamos estudiando.

### E.5. Configuraciones básicas del AO

Empleando elementos externos que realimentan parte de la salida a la entrada, el AO puede configurarse para diferentes aplicaciones básicas, que se describen y analizan a continuación.

#### E.5.1. Amplificador no inversor

Sea el circuito de la Fig. E5, con un AO perfecto.

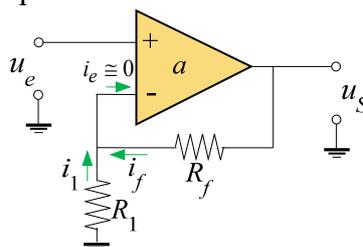


Fig. E5. AO conectado como amplificador no inversor.

Como  $a$  es muy grande,  $u_d \cong 0$ , con lo cual  $u^- \cong u^+$ , y en consecuencia  $i_e \cong 0$ . Entonces puede plantearse:

$$i_f = \frac{1}{R_f}(u_S - u_e) \quad i_1 = -\frac{1}{R_1}u_e$$

siendo

$$i_e = i_1 + i_f = 0$$

$$-\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_f}\right)u_e + \frac{1}{R_f}u_S = 0$$

Despejando la tensión de salida  $u_S$  resulta:

$$u_S = u_e \left(1 + \frac{R_f}{R_1}\right) \tag{E-2}$$

Entonces, la ganancia a lazo cerrado, definida como  $A = u_S/u_e$  resulta:

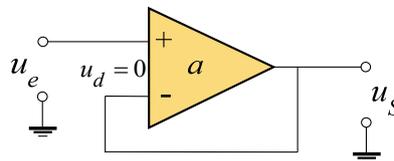
$$A = 1 + \frac{R_f}{R_1} \tag{E-3}$$

Que, tal como cabía esperar de acuerdo a la expresión (E-1) haciendo la correspondencia con el esquema de la **Fig. E4**, resulta ser la inversa de la transferencia del bloque de realimentación ( $\beta$ ). En efecto, de acuerdo a dicha correspondencia:

$$\beta = \frac{u_e}{u_S} = \frac{R_1}{R_1 + R_f} = \frac{1}{1 + \frac{R_f}{R_1}}$$

Se destaca además que  $A$  resulta siempre positiva, lo cual indica que no existe desfase entre la entrada y la salida, lo cual determina la denominación de *no inversor* al circuito de la **Fig. E5**.

Resulta interesante observar en la expresión (E-2) que si  $R_1$  se hace infinita y  $R_f$  se hace 0 (**Fig. E6**) resulta  $u_S = u_e$ , lo que determina que esta configuración sea denominada *seguidor de tensión* o *buffer de ganancia unitaria*.



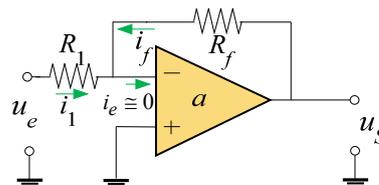
**Fig. E6.** AO conectado como amplificador no inversor de ganancia unitaria (seguidor de tensión).

Esta configuración se caracteriza porque tiene una alta impedancia de entrada y una muy pequeña impedancia de salida. Es decir, para el circuito de entrada se comporta como una carga ideal, y para el circuito de salida se comporta como un generador de tensión ideal.

Todas estas propiedades determinan que esta configuración resulte muy empleada como etapa de aislamiento.

### E.5.2. Amplificador inversor

En la **Fig. E7** se muestra otra conexión con un AO perfecto realimentado negativamente, por medio de la resistencia  $R_f$  que vincula la salida con la entrada inversora. La resistencia  $R_1$  conecta la tensión de entrada al terminal inversor.



**Fig. E7.** AO conectado como amplificador inversor.

Otra vez,  $a$  es muy grande,  $u_d \cong 0$ , con lo cual  $u^- \cong u^+$ , y en consecuencia  $i_e \cong 0$  y por lo tanto puede plantearse:

$$i_f = \frac{1}{R_f}u_S \quad i_1 = \frac{1}{R_1}u_e$$

Siendo

$$i_e = i_1 + i_f = 0$$

$$\frac{1}{R_1} u_e + \frac{1}{R_f} u_S = 0$$

Despejando la tensión de salida  $u_S$  resulta:

$$u_S = -\frac{R_f}{R_1} u_e \tag{E-3}$$

Entonces, la *ganancia a lazo cerrado*, definida como  $A = u_S / u_e$  resulta:

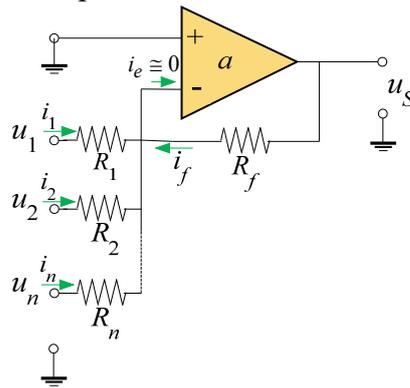
$$A = -\frac{R_f}{R_1} \tag{E-4}$$

El signo negativo indica que existe una inversión de fase entre la entrada y la salida.

Por otra parte, como la diferencia de tensión entre  $u^+$  y  $u^-$  es cero, el punto  $u^-$  se encuentra a potencial de tierra, y esto es lo que se denomina como *tierra virtual*.

### E.5.3. Amplificador sumador inversor

El análisis efectuado en el apartado anterior puede extenderse al caso de tener varias tensiones de entrada sumadas en el terminal inversor, como se muestra en la **Fig. E8**, donde otra vez el AO es perfecto y está realimentado negativamente, por medio de la resistencia  $R_f$  que vincula la salida con la entrada inversora. Las resistencias  $R_1, R_2, R_3$ , etc. conectan las respectivas tensiones de entrada al terminal inversor.



**Fig. E8.** AO conectado como amplificador sumador inversor.

Ahora el planteo de la suma de corrientes en el nodo  $u^-$  resulta:

$$i_f = \frac{1}{R_f} u_S \quad i_1 = \frac{1}{R_1} u_1 \quad i_2 = \frac{1}{R_2} u_2 \quad \dots \quad i_n = \frac{1}{R_n} u_n$$

Siendo

$$i_e = i_f + i_1 + i_2 + \dots + i_n = 0$$

$$\frac{1}{R_f} u_S + \frac{1}{R_1} u_1 + \frac{1}{R_2} u_2 + \dots + \frac{1}{R_n} u_n = 0$$

Despejando la tensión de salida  $u_S$  resulta:

$$u_S = -R_f \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{R_i} \tag{E-5}$$

Con lo cual la salida resulta proporcional a la suma (eventualmente “pesada” por los valores de  $R_1, R_2, \dots, R_n$ , si son distintos) de las tensiones de entrada, con el agregado de una inversión de fase.

### E.5.4. Amplificador diferencial

En la **Fig. E9** se muestra la conexión que corresponde al denominado *amplificador diferencial*.

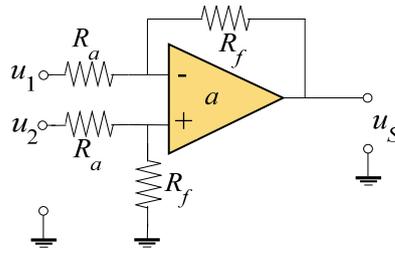


Fig. E9. AO conectado como amplificador diferencial.

Planteando las ecuaciones de nodos en los terminales  $u^+$  y  $u^-$  resulta:

$$\frac{u_1 - u^-}{R_a} + \frac{u_S - u^-}{R_f} = 0$$

$$\frac{u_2 - u^+}{R_a} - \frac{u^+}{R_f} = 0 \quad \Rightarrow \quad u^+ = u_2 \frac{\frac{1}{R_a}}{\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_f}} = u_2 \frac{R_f}{R_a + R_f}$$

Y por ser  $u^- \cong u^+$ , reemplazando con esta última expresión en la primera ecuación:

$$\frac{u_1}{R_a} - \frac{u_2 R_f}{R_a (R_a + R_f)} + \frac{u_S}{R_f} - \frac{u_2}{R_a + R_f} = 0$$

Es decir:

$$u_S = \frac{R_f}{R_a} (u_2 - u_1) \tag{E-6}$$

Lo cual demuestra que la tensión de salida es directamente proporcional a la tensión diferencial en la entrada del AO.

### E.5.5. Circuito Integrador inversor

Uno de los circuitos básicos fundamentales conformado por amplificadores operacionales operando en la zona lineal de la Fig. E2 es el bloque integrador. El circuito de la Fig. E10 se conoce como *circuito integrador (inversor) puro* (o circuito integrador de Miller).

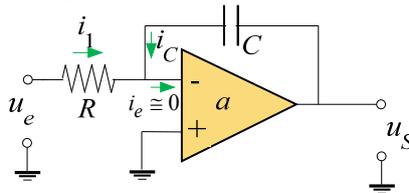


Fig. E10. AO conectado como integrador inversor (circuito integrador de Miller).

Para analizarlo, se considera nuevamente que  $a$  es muy grande,  $u_d \cong 0$ , con lo cual  $u^- \cong u^+$ , y en consecuencia  $i_e \cong 0$  y por lo tanto puede plantearse:

$$i_e = i_1 + i_C = 0 \Rightarrow i_C = -i_1$$

$$i_1 = \frac{u_e}{R}$$

Entonces

$$i_C = -\frac{u_e}{R}$$

Por otra parte, el cero virtual en el terminal  $u^-$  determina que:

$$u_S = u_C = \frac{1}{C} \int_0^{\infty} i_C(t) dt + u_C(0)$$

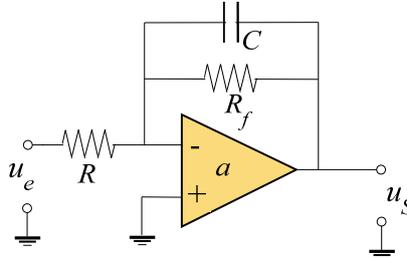
Donde  $U_C(0)$  es la tensión inicial en el capacitor en el instante  $t=0$ .

Resultando finalmente:

$$u_S = -\frac{1}{RC} \int_0^{\infty} u_e(t) dt + U_{C0} \quad (\text{E-7})$$

Que indica que la tensión de salida resulta proporcional a la integral de la tensión de entrada, con signo cambiado.

El amplificador integrador de la **Fig. E10** presenta el inconveniente de que si la tensión de entrada tiene una componente de continua, se satura y deja de integrar. Este problema se soluciona agregando una resistencia en paralelo al capacitor, que limitará la ganancia en continua del integrador. El circuito resultante es el que se muestra en la **Fig. E11**.



**Fig. E11.** AO conectado como integrador inversor con limitación de ganancia.

Para frecuencias mucho menores que  $1/CR_f$  puede considerarse que  $R_f \ll X_C$ , con lo cual en este rango de frecuencias la tensión de salida resulta determinada por (E-3) y la ganancia de lazo cerrado por (E-4):

$$A_{f \rightarrow 0} = -\frac{R_f}{R} \quad (\text{E-8})$$

Por el contrario, para frecuencias mucho mayores que  $1/CR_f$  puede considerarse que  $R_f \gg X_C$ , con lo cual la tensión de salida resulta determinada por (E-7).

Es decir, la acción integradora de este circuito tiene lugar a frecuencias mucho mayores que  $1/CR_f$  (en términos prácticos, puede considerarse este rango como  $f > 10/CR_f$ ).

Para determinar la ganancia en lazo cerrado, resulta conveniente pasar al dominio de la frecuencia compleja aplicando la Transformada de Laplace a (E-7) anulando la condición inicial en el capacitor:

$$U_S(s) = \mathcal{L} \left\{ -\frac{1}{CR} \int_0^{\infty} u_e(t) dt \right\} = -\frac{1}{sCR} U_e(s)$$

De donde resulta:

$$H(s) = -\frac{1}{sCR} \quad (\text{E-9})$$

Para realizar el diagrama de Bode del módulo de la ganancia en lazo cerrado (en decibelios) por medio de las asíntotas dadas por las expresiones (E-8) y (E-9), conviene hacer:

- Para frecuencias  $f < 0,1/CR_f$

$$\left| H(j\omega) \right|_{\omega \rightarrow 0} = 20 \log \left| -\frac{R_f}{R} \right| \quad \text{Fase} \left\{ H(j\omega) \right\}_{\omega \rightarrow 0} = 180^\circ$$

- Para frecuencias  $f > 10/CR_f$

$$\left| H(j\omega) \right|_{\omega \rightarrow \infty} = 20 \log \left| -\frac{1}{j\omega CR} \right| = -20 \log(C \cdot R) - 20 \log \omega$$

$$\text{Fase} \left\{ H(j\omega) \right\}_{\omega \rightarrow \infty} = \text{Fase} \left\{ -\frac{1}{j\omega CR} \right\} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

En la **Fig. E12** se muestra el diagrama de  $|H(j\omega)|$  resultante.

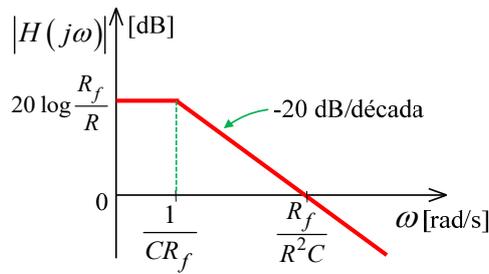


Fig. E12. Diagrama de Bode de  $|H(j\omega)|$  del integrador inversor con limitación de ganancia.

Como observación final, se puede señalar que la característica “integradora” de este circuito está determinada por la recta de pendiente de  $-20\text{dB/déc}$ , y esto ocurre en altas frecuencias ( $f > 10/CR_f$ ). En esta zona de frecuencias la fase será  $+90^\circ$ . Debe notarse que de no haber sido por la inversión de fase aportada por el AO, la fase en esta zona de frecuencias hubiera resultado  $-90^\circ$ .

E.5.6. Circuito derivador

El circuito derivador es otro de de los circuitos básicos fundamentales conformado por amplificadores operacionales operando en la zona lineal de la Fig. E2. El circuito derivador se muestra en la Fig. E13.

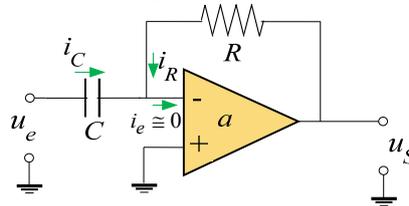


Fig. E13. AO conectado como derivador.

Para analizarlo, se considera nuevamente que  $a$  es muy grande,  $u_d \cong 0$ , con lo cual  $u^- \cong u^+$ , y en consecuencia  $i_e \cong 0$  y por lo tanto puede plantearse:

$$i_e = i_C + i_R = 0 \Rightarrow i_C = -i_R$$

Por otra parte, el cero virtual en el terminal  $u^-$  determina que:

$$i_C = C \frac{d}{dt} u_e$$

Entonces

$$u_S = R \cdot i_R = -RC \frac{d}{dt} u_e \tag{E-10}$$

Para determinar la ganancia en lazo cerrado, resulta conveniente pasar al dominio de la frecuencia compleja aplicando la Transformada de Laplace a (E-10) anulando la condición inicial en el capacitor:

$$U_S(s) = \mathcal{L} \left\{ -RC \frac{d}{dt} u_e \right\} = -RC \left[ s U_e(s) - u_e(0) \right]$$

De donde resulta:

$$H(s) = -RC s \tag{E-11}$$

El diagrama de Bode puede obtenerse haciendo  $s=j\omega$  y analizando el módulo y la fase de  $A(j\omega)$ . De este modo resulta:

$$|H(j\omega)| = 20 \log |-j\omega RC| = 20 \log RC + 20 \log \omega$$

$$Fase\{H(j\omega)\} = Fase\{-j\omega CR\} = 180^\circ + 90^\circ = -90^\circ$$

Debe notarse que de no haber sido por la inversión de fase aportada por el AO, la fase hubiera resultado  $90^\circ$ .

En la Fig. E14 se muestra el diagrama de  $|H(j\omega)|$  resultante.

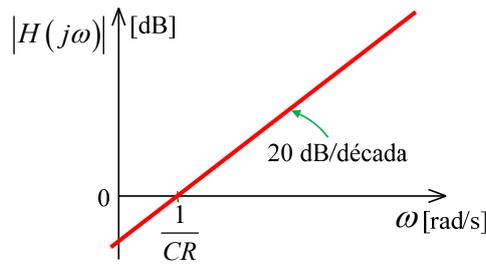


Fig. E14. Diagrama de Bode de  $|H(j\omega)|$  del derivador.

Este circuito tiene una altísima ganancia para frecuencias altas, lo que también involucra inconvenientes de implementación práctica, dado que el ruido de alta frecuencia que eventualmente podría aparecer montado en la señal de entrada, resultaría muy amplificado por el circuito derivador.

Este comportamiento indeseado en altas frecuencias puede mejorarse limitando la ganancia a altas frecuencias, conectando un capacitor  $C_f$  en paralelo con  $R$ , como se muestra en la Fig. E15.

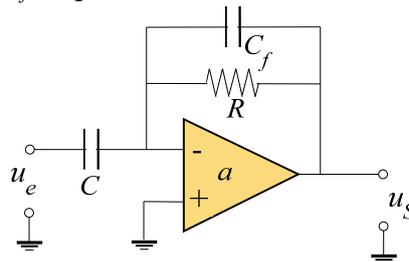


Fig. E15. AO conectado como derivador con limitación de ganancia.

Procediendo directamente en el dominio de la frecuencia compleja, aplicando Laplace resulta:

$$U_S(s) = -\frac{U_e(s)}{\frac{1}{sC}} \cdot \frac{R \frac{1}{sC_f}}{R + \frac{1}{sC_f}} = -U_e(s) \cdot \frac{sCR}{1 + sC_f R}$$

Con lo cual:

$$H_S(s) = -\frac{sCR}{1 + sC_f R} \tag{E-12}$$

Expresión con un cero en el origen ( $s=0$ ) y un polo en  $s=-RC_f$ . El diagrama de Bode de  $|H(j\omega)|$  de esta variante del circuito se muestra en la Fig. E16.

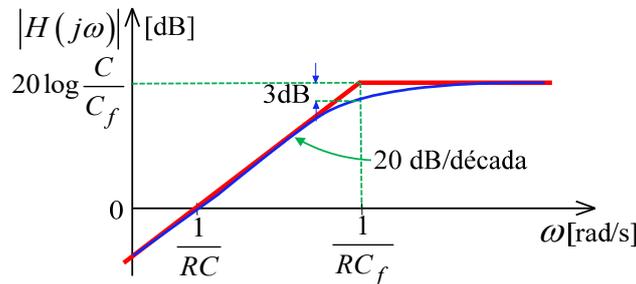


Fig. E16. Diagrama de Bode de  $|H(j\omega)|$  del derivador con limitación de ganancia.

Cabe señalar que la característica “derivadora” de este circuito está determinada por la recta de pendiente de +20dB/déc, y lo que ocurre para frecuencias por debajo de  $0,1/RC_f$ . En este rango de frecuencias la fase será  $-90^\circ$  en lugar de  $+90^\circ$  que corresponden a la acción derivadora propiamente dicha, debido a la inversión de fase aportada por el AO.

### E.5.7. Convertidor de resistencia negativa

El circuito que se muestra en la Fig. E17 tiene la particularidad de presentar una resistencia de entrada negativa, y tiene aplicación en el diseño de fuentes de corriente y filtros activos.

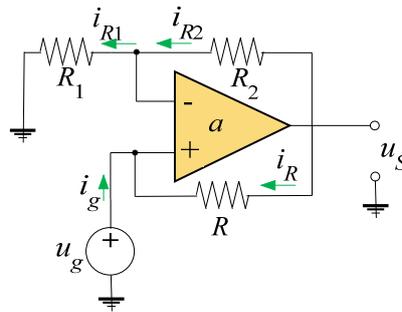


Fig. E17. AO conectado como convertidor con resistencia negativa.

Para determinar la resistencia de entrada, se aplica una fuente de tensión  $u_g$  y se determina la corriente inyectada  $i_g$ . Para ello se considera nuevamente que  $a$  es muy grande,  $u_d \cong 0$ , con lo cual  $u^- \cong u^+$ , y en consecuencia  $i_e \cong 0$  y por lo tanto puede plantearse:

$$i_e = i_g + i_R = 0 \Rightarrow i_g = -i_R$$

$$i_e = i_{R2} - i_{R1} = 0 \Rightarrow i_{R1} = i_{R2}$$

Por otra parte:

$$i_R = u_S \left( 1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \frac{1}{R} = \frac{u_S R_2}{R(R_1 + R_2)}$$

entonces:

$$i_g = -\frac{u_S R_2}{R(R_1 + R_2)} \tag{E-13}$$

además:

$$i_{R1} = \frac{u_g}{R_1}$$

Por lo tanto:

$$u_S = \frac{u_g}{R_1} (R_1 + R_2) \tag{E-14}$$

Reemplazando (E-14) en (E-13):

$$i_g = -u_g \frac{(R_1 + R_2)}{R_1} \frac{R_2}{R(R_1 + R_2)}$$

Resultando la resistencia de entrada, vista por el generador  $u_g$ :

$$R_e = \frac{u_g}{i_g} = -\frac{R R_1}{R_2}$$

Que es negativa.

### E.6. El AO real

Para la mayoría de las aplicaciones en bajas frecuencias los amplificadores operacionales que actualmente se fabrican tienen un comportamiento muy aproximado al ideal; pero cuando se los emplea en aplicaciones de mayor precisión se requiere considerar modelos mas detallados de su comportamiento.

En cualquier caso es necesario conocer las características específicas del amplificador operacional que se utiliza, para determinar si es válido considerar el comportamiento ideal y estimar si puede ser utilizado en la aplicación que se está desarrollando o debe ser sustituido por otro.

La forma habitual de analizar un circuito que se basa en un amplificador operacional, parte de considerar inicialmente un comportamiento ideal, y luego, partiendo de este estudio se analizan las limitaciones que sobre el mismo introducen las diferentes características reales específicas del amplificador. El resultado de este análisis es, bien la validación del amplificador operacional, o la propuesta de su sustitución por otro tipo de amplificador operacional con características mas adecuadas.

Las características de ganancia y ancho de banda finitos de los AO son los factores que más afectan al correcto funcionamiento de los circuitos en el diseño de filtros activos.

En general, la respuesta en frecuencia de los AO está determinada por varios polos y ceros. Sin embargo, para asegurar la estabilidad en las configuraciones en lazo cerrado, los AO se diseñan de forma que presenten un único polo real *dominante* en  $s = -\omega_C$  (con  $\omega_C > 0$ ) por lo que la respuesta en frecuencia de un AO. se puede expresar como:

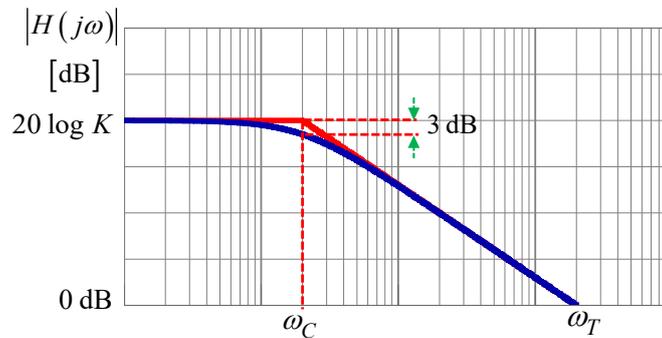
$$H(s) = \frac{K}{1 + \frac{s}{\omega_C}} \Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{K}{1 + j \frac{\omega}{\omega_C}}$$

Expresión que puede aproximarse para  $\omega \gg \omega_C$  como:

$$|H(j\omega)| = \frac{K\omega_C}{\omega}$$

Siendo  $K\omega_C$  el producto ganancia por ancho de banda,  $\omega_C$  es la pulsación de corte de 3 dB y  $K$  la ganancia en continua ( $\omega=0$ ) o *de lazo abierto*. Estos parámetros se indican en el diagrama de Bode de  $|H(j\omega)|$ , que se muestra en la **Fig. E18**.

El ancho de banda para ganancia unitaria (0 dB) se indica con  $\omega_T$ . Este dato es fundamental para una correcta selección del AO. En las hojas de datos suele especificarse como unity-gain bandwidth o bien como gain-bandwidth product (producto ganancia por ancho de banda)



**Fig. E18.** Diagrama de Bode de  $|H(j\omega)|$  de un AO real.

En la **Tabla E-III** se muestran órdenes de magnitud típicos de los parámetros característicos para los AO comerciales.

**Tabla E-III.** Características del AO ideal vs. el AO real.

Parámetro	Ideal	Real
Corriente de entrada	0	500 nA
Desbalance de tensión de entrada	0	5 mV
Impedancia de Entrada	$\infty$	$10^{12} \Omega$
Impedancia de Salida	0	100 $\Omega$
Ganancia (en lazo abierto)	$\infty$	$10^5$
Ancho de Banda	$\infty$	$10^6$ Hz

Para pulsaciones cercanas o superiores a  $\omega_T$  el modelo del AO con un único polo dominante deja de ser válido, requiriéndose que se tomen en consideración los efectos de otros polos y ceros que en este orden de pulsaciones comienzan a tener peso.





# Índice Alfabético

## A

Adaptación de impedancias .....	67
adaptación con dos elementos.....	68
adaptación con tres elementos .....	72
adaptación conjugada .....	63
Q requerido .....	68
Aproximación de Butterworth .....	153
comportamiento asintótico.....	159
parámetros de diseño.....	155
plantilla de especificaciones.....	155
polinomios de Butterworth .....	157
Aproximación de Chebyshev .....	162
comportamiento asintótico.....	171
parámetros de diseño.....	166
plantilla de especificaciones.....	165
polinomios de Chebyshev.....	166

## C

Características de amplitud	
filtro pasa bajos ideal.....	147
métodos de aproximación.....	152
plantilla de atenuación de un pasa bajos real .....	151
plantilla de ganancia de un pasa bajos real .....	150
Características de los filtros ideales .....	301
filtro pasa altos .....	303
filtro pasa bajos .....	302
filtro pasa banda.....	303
filtro supresor de banda .....	303
celda $\pi$ .....	18
celda lattice o celosía .....	20
celda T .....	18
coeficiente de reflexión.....	65, 139
Cuadripolos	
antisimétricos .....	13
asimétricos .....	13
balanceados.....	12
bilaterales .....	14
equilibrados.....	12
interconexión..... Véase Interconexión de cuadripolos	
recíprocos .....	14
simetría .....	12
simétricos .....	13

## D

dipolos .....	78
---------------	----

## F

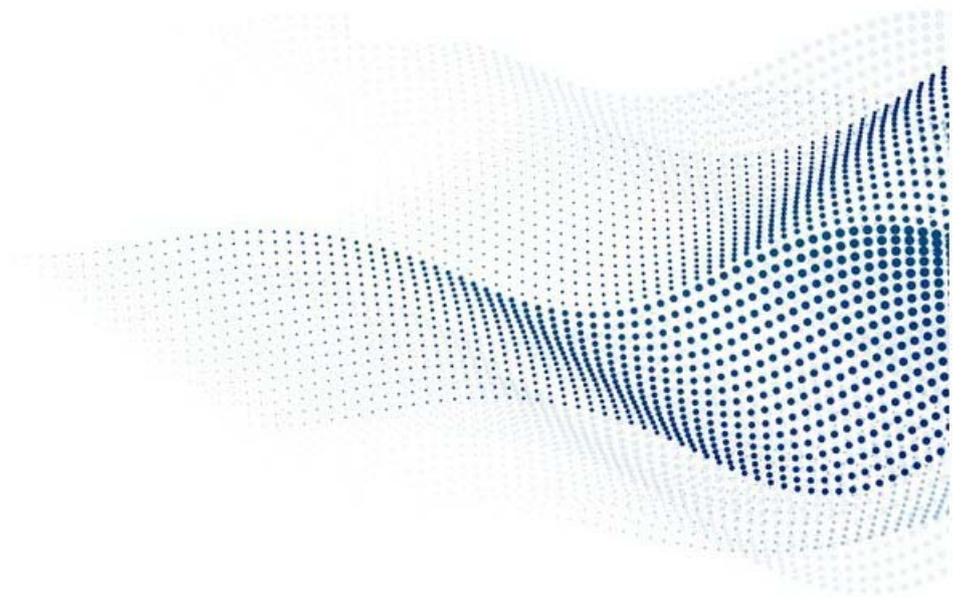
Factor de potencia.....	61
corrección.....	61
Filtros activos RC .....	246
Filtros digitales	
formas canónicas de realización.....	374
implementación directa .....	374

implementación en cascada .....	375
implementación en paralelo.....	375
Filtros FIR.....	304
causalidad vs. no causalidad.....	306
diseño empleando ventanas .....	312
estimación del orden.....	320
fenómeno de <i>Gibbs</i> .....	316
funciones de ventana .....	318
procedimiento de diseño .....	323
respuesta en frecuencia .....	317
simetría de la respuesta al impulso.....	308
<i>windowing</i> .....	313
Filtros IIR.....	334
estimación del orden.....	336
método de la respuesta al escalón invariante.....	346
método de la respuesta al impulso invariante .....	336
método de la transformación bilineal .....	Véase Transformación bilineal
Filtros pasivos LC .....	210
ejemplos de diseño.....	215
especificación del diseño.....	211
método de pérdidas de inserción.....	211
procedimiento de diseño .....	213
Filtros pasivos RC.....	198
filtro RCP de muesca doble T en paralelo.....	206
filtro RCP pasa altos elemental.....	200
filtro RCP pasa bajos elemental.....	198
filtro RCP pasa banda elemental .....	201
filtro RCP supresor de banda elemental.....	203
Filtros activos RC	
análisis de sensibilidad .....	289
aspectos de la implementación.....	287
celdas con topología Sallen Key.....	252
celdas de primer orden .....	247
celdas de segundo orden.....	251
celdas pasa altos de primer orden .....	249
celdas pasa bajos de primer orden.....	247
diseño mediante celdas en cascada .....	246
filtro Sallen Key pasa altos.....	261
filtro Sallen Key pasa bajos.....	254
filtro Sallen Key pasa banda .....	268
filtro Sallen Key pasa banda (Topología I) .....	269
filtro Sallen Key pasa banda (Topología II) .....	272
filtro Sallen Key supresor de banda.....	281
selección de componentes .....	288
flujo de potencia .....	65
Funciones de transferencia de los filtros .....	190
filtro pasa altos .....	192
filtro pasa bajos .....	191
filtro pasa banda.....	193
filtro pasa banda de 4º orden.....	195
filtro supresor de banda .....	197

<b>I</b>	
impedancia característica.....	35
impedancias imagen.....	34
inmitancia.....	78
inmitancia de punto impulsor .....	78
inmitancias terminales .....	78
Interconexión de cuadripolos.....	39
cuadripolos en cascada.....	48
cuadripolos en paralelo .....	40
cuadripolos en paralelo-serie .....	48
cuadripolos en serie .....	45
cuadripolos en serie-paralelo .....	47
<b>M</b>	
matrices características.....	11
Matrices híbridas G y H .....	26
circuitos equivalentes.....	27
matrices reales positivas .....	98
Matriz de admitancias en cortocircuito .....	14
determinación de los parámetros .....	14
modelos circuitales.....	15
uso y aplicaciones.....	18
Matriz de admitancias indefinida.....	53
hacer un terminal común .....	55
redes en paralelo.....	56
supresión de terminales .....	56
unión de dos terminales .....	56
Matriz de impedancias en circuito abierto.....	16
determinación de los parámetros z.....	16
modelos circuitales.....	17
uso y aplicaciones.....	18
Matriz de transmisión .....	29
aplicaciones .....	32
equivalente de Thevenin .....	39
impedancia característica.....	35
impedancia de entrada.....	32
impedancia de salida .....	33
impedancias imagen.....	34
transferencias de tensiones y corrientes.....	36
matriz $\Gamma$ .....	Véase Matriz de transmisión
<b>N</b>	
Normalización de funciones de red.....	146
normalización de frecuencia .....	147, 174
normalización del nivel de impedancia .....	146
<b>P</b>	
parámetros ABCD .....	Véase Matriz de transmisión
parámetros de transmisión .....	Véase Matriz de transmisión
parámetros $g$ .....	Véase Matrices híbridas G y H
parámetros $h$ .....	Véase Matrices híbridas G y H
parámetros $t$ .....	Véase Matriz de transmisión
pérdida de inserción.....	66, 133
polos y ceros de las inmitancias de transferencia.....	103
potencia activa .....	60
potencia aparente .....	60
potencia compleja .....	60
potencia instantánea.....	58
potencia instantánea .....	59
potencia media.....	59
potencia nominal.....	58
potencia reactiva.....	60
potencia reflejada .....	65
Procesamiento de señales digitales .....	295
aliasing .....	298
conversión analógico-digital.....	295
cuantización de muestras.....	297
frecuencia del sistema discreto.....	296
función del sistema .....	300
muestreo de señales analógicas.....	296
periodicidad de las exponenciales discretas .....	297
pulsación del sistema discreto .....	296
respuesta al impulso.....	298
respuesta en frecuencia .....	299
señales causales y no causales .....	300
propiedades de las inmitancias de transferencia.....	103
punto de suministro .....	61
<b>R</b>	
redes iterativas.....	49
relación entre los parámetros de las matrices Z e Y .....	17
relación entre $Q_p$ y $\Delta\omega$ .....	194
Remociones parciales.....	118
polo en el origen.....	118
polo en infinito .....	119
polos finitos .....	120
<b>S</b>	
Síntesis de cuadripolos cargados	
alimentados por un generador ideal .....	132
alimentados por un generador real.....	138
ganancia de inserción .....	139
parámetro $t$ .....	140
procedimiento de síntesis .....	141
Síntesis de cuadripolos cargados	
análisis de realizabilidad.....	140
Síntesis de cuadripolos descargados	
cambio del nivel de inmitancia.....	105
ceros de transmisión finitos .....	121
con ceros de transmisión en el origen y en infinito ...	113
desarrollo en cadena de una inmitancia terminal .....	101
extensión del desarrollo de Foster .....	100
procedimiento de síntesis .....	104
redes asintóticas.....	116
Síntesis de transferencias.....	128
todos los ceros de transmisión en el origen.....	111
todos los ceros de transmisión en infinito .....	107
Síntesis de dipolos	
desarrollos de Cauer.....	88
formas canónicas de Foster.....	83
propiedades de dipolos LC .....	82
propiedades de inmitancias RLC.....	79
realizabilidad LC.....	81
realizabilidad RLC.....	78
remoción de un polo en el origen .....	85
remoción de un polo en infinito .....	86
remoción de un polo finito.....	87
síntesis de Redes LC en cadena .....	106
<b>T</b>	
teorema de Bartlett.....	24
teorema de Foster.....	82
topología de filtros LC .....	188
Transferencia de potencia.....	61

máxima eficiencia .....	64	Transformaciones de frecuencia .....	172
máxima transferencia .....	62	pasa bajo-pasa altos sin normalizar/desnormalizar ...	174
Transformación bilineal.....	348	pasa bajos - pasa banda .....	180
deformación de frecuencias .....	350	pasa bajos - suprime banda.....	185
mapeo de frecuencias .....	350	pasa bajos-pasa altos normalizando/desnormalizando	
predeformación .....	351	.....	175
procedimiento de diseño.....	353	plantillas de especificaciones del filtro pasa altos.....	176
<i>warping</i> .....	350	plantillas de especificaciones del filtro pasa banda ...	183
Transformación de redes		plantillas de especificaciones del filtro suprime banda	
balanceadas-desbalanceadas .....	21	.....	187
desbalanceadas-balanceadas .....	23	proporcional a la frecuencia.....	173
estrella-triángulo .....	19	recíproca de la frecuencia .....	174





ISBN 978-631-00-2245-1



9 786310 022451