

Libros de **Cátedra**

Astronomía Esférica

Fundamentos de Astrometría

Laura Isabel Fernández, María Silvina De Biasi
y Gonzalo Carlos de Elía

FACULTAD DE
CIENCIAS ASTRONÓMICAS Y GEOFÍSICAS

e
exactas

**Eduulp**
EDITORIAL DE LA UNLP



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE LA PLATA

Astronomía Esférica
Fundamentos de Astrometría

Laura Isabel Fernández
María Silvina De Biasi
Gonzalo Carlos de Elía

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas



Índice

Introducción	4
Prólogo	5
Capítulo 1. Sistemas y marcos de referencia	7
Capítulo 2. Paralaje	11
Capítulo 3. Aberración	27
Capítulo 4. Refracción atmosférica	42
Capítulo 5. Movimiento de los planos fundamentales en los sistemas dinámicos	71
Capítulo 6. Movimiento propio	100
Capítulo 7. Catálogos estelares	111
Capítulo 8. Efectos de la rotación terrestre	129
Capítulo 9. Escalas de tiempo	145
Capítulo 10. Sistemas y marcos de referencia, modelos y convenciones vigentes	166
Anexo A	193
Anexo B	194
Glosario	196
Autores	198

Introducción

La astrometría es una de las ramas más antiguas de la astronomía. Está involucrada en la determinación de las posiciones de los objetos celestes y el análisis de los diferentes efectos que causan la variación de estas posiciones en el tiempo. Para cumplir con este propósito, la astrometría es responsable de establecer, materializar y mantener tanto el sistema de referencia celeste como las escalas de tiempo involucradas. Asimismo, también participa indirectamente en la materialización de los sistemas de referencia terrestre proveyendo los parámetros de la orientación terrestre para vincular las observaciones hechas con técnicas espaciales a la posición de sus respectivas estaciones terrenas.

De modo paulatino desde las últimas cuatro décadas, las mediciones astrométricas han evolucionado con la implementación de nuevas técnicas, tanto desde Tierra ampliando la ventana de observación del espectro electromagnético desde el visible a las ondas de radio, como desde el espacio a partir de las diferentes misiones satelitales. Como consecuencia, hoy en día se han alcanzado precisiones en el orden de los micro segundos de arco de la mano de las misiones astrométricas espaciales (Hipparcos, Gaia) haciendo posible el estudio y análisis de temas de vanguardia que hasta hace unos años estaban fuera de nuestro alcance. Este panorama ofrece nuevos retos, desafíos y posibilidades.

Este libro pretende introducir la astrometría a los estudiantes de grado en el inicio de su carrera. Para ello concentra todo el contenido didáctico necesario para los alumnos cursando en la cátedra de Astronomía Esférica de la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas. Usualmente el material impartido, tanto en las clases teóricas como prácticas, proviene de numerosas fuentes que incluyen desde libros de texto hasta artículos científicos, notas técnicas y resoluciones emanadas por organismos internacionales. Con ese objetivo, este libro compila y desarrolla en español el contenido de algunos textos clásicos, pero además resume y adapta conceptos desde diferentes artículos científicos citados a lo largo del manuscrito.

Aún cuando sabemos que las convenciones y muchas de las resoluciones originadas en la Unión Astronómica Internacional (IAU), la Unión Internacional de Geofísicos y Geodestas (IUGG) o el Servicio Internacional de Rotación de la Tierra y los sistemas de referencia (IERS) se irán desactualizando y/o reemplazando a medida que transcurra el tiempo, confiamos en poder proveer no sólo un resumen del estado actual de las normas y convenciones sino también una herramienta que acompañe al lector en la búsqueda de nuevas actualizaciones.

Pese a las limitaciones en la profundidad del abordaje de los tópicos que implica un texto introductorio, esperamos que este libro despierte la curiosidad de aquellos que quieran realizar estudios más profundos tanto en áreas relacionadas con la astronomía como interdisciplinarias y eventualmente, también pueda servir como fuente de información para otros estudiantes y profesionales involucrados en el uso de los sistemas de referencia y las escalas de tiempo.

Prólogo

Esta obra, « *Astronomía Esférica* », inspira su nombre en la materia de segundo año de la carrera de Licenciatura en Astronomía de la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la Universidad Nacional de La Plata. Es en realidad, mucho más de lo que significa su título. Se trata de un compendio de **Astronomía Fundamental**, que es la base que soporta la pirámide de las ciencias astronómicas.

Mi vinculación con la metrología me demostró que la medida es la base de todas las actividades humanas, y que la astronomía fundamental es la metrología astronómica. La descripción del mundo físico a través de la observación y de la medida necesita de referencias cada vez más precisas, porque las aplicaciones son cada vez más exigentes. El universo que nos mostraban los instrumentos ópticos es muy diferente del que descubrimos observando otras regiones del espectro con técnicas espaciales. Observamos desde la Tierra, y también desde satélites que necesitan de sistemas de referencia estables y precisos. Esta transformación que comenzó en los años ochenta, a partir de los resultados de la campaña internacional MERIT (Monitor Earth Rotation and Intercompare Technics) significó un cambio radical en los estudios de la rotación de la Tierra y los marcos de referencia para la geodesia y la geodinámica. La astronomía fundamental se hizo global con la posibilidad de acceder a todo el cielo, y no solamente a la pequeña fracción accesible a los anteojos de paso. La resolución espacial aumentó gracias a las observaciones en radio ondas sobre líneas de base intercontinentales, y las radiofuentes extragalácticas reemplazaron a las estrellas próximas en la realización de los sistemas de referencia celestes. Las observaciones destinadas a contribuir al estudio del movimiento relativo de los sistemas de referencia provienen hoy de la combinación de técnicas variadas, cada una contribuyendo de manera diferente. Las grandes misiones espaciales, que culminan con Gaia, son sondas que escudriñan en profundidad la Galaxia y el universo que se extiende mas allá de sus límites, y que asocian la astrometría al estudio de nuestra Galaxia, su cinemática, su origen y su evolución, y brindan una importante contribución a la física fundamental.

La búsqueda de mejores referencias obliga a ir mas allá de la mecánica newtoniana, y se apoya en la teoría de la relatividad general. Las referencias de tiempo, otrora gobernadas por los movimientos de la Tierra, recurren a la exactitud de las transiciones atómicas. El tiempo es una coordenada en un sistema de referencia espacio-tiempo donde los relojes solamente definen un tiempo propio. La astronomía cedió a la física el control de las referencias de tiempo.

Todo esto no ha hecho más que consolidar la importancia y el impacto de la astronomía fundamental. Tanto se ha avanzado, que los conceptos y las prácticas no están contenidos en

los libros de texto. Era necesario que alguien, con la suficiente experiencia profesional y académica, tomara el desafío de condensar esta nueva astronomía fundamental en un libro.

Laura Isabel Fernández, María Silvana De Biasi y Gonzalo Carlos de Elía aceptaron el desafío, y volcaron en este volumen sus conocimientos y sus experiencias docentes. Es mi deseo que este libro sea entendido como una lectura imprescindible para astrónomos, y que vaya más allá de ser un libro de cátedra destinado a los estudiantes.

*Dra. Elisa Felicitas Arias
ex profesora de Astronomía Esférica
París, mayo de 2022*

CAPÍTULO 1

Sistemas y marcos de referencia

Laura I. Fernández

¿podrías decirme, por favor, que camino debo seguir para salir de aquí?

-Esto depende en gran parte del sitio al que quieras llegar- dijo el Gato.

–Lewis Carroll, *Alicia en el país de las maravillas*

Coloquialmente, es común escuchar que sistemas y marcos de referencia se confunden y utilizan de modo indistinto. Conceptualmente se trata de cuestiones diferentes.

Lo primero que debemos interrogarnos es la necesidad de un sistema de referencia. Los sistemas de referencia, pilar y base de todo el contenido que desarrollaremos en este libro, son necesarios para conocer y describir posiciones y movimientos de objetos tanto en el espacio como sobre la superficie terrestre. Esta necesidad se enfrenta con un universo que no está estático. Todo se mueve, y aunque podemos expresar matemáticamente estos movimientos a través de rotaciones y/o traslaciones, la necesidad de una referencia espacial sigue siendo imperiosa.

Enfrentar el problema desde el punto de vista matemático, nuevamente parece ser una tarea sencilla. Bastará con definir un plano de referencia, una recta perpendicular al mismo, ubicar los ejes coordenados formando una terna directa y asignar un origen de coordenadas. Luego deberemos establecer convenciones para asignar orígenes, sentido y unidades a las magnitudes medidas en mi sistema. Por ejemplo: las latitudes geodésicas serán positivas para los puntos ubicados al Norte del plano Ecuatorial y negativas al Sur del mismo.

Pero aun cumpliendo con todos estos requisitos, el problema no está resuelto. El verdadero problema detrás del concepto de sistema de referencia no se encuentra en el enunciado de los principios y/o convenciones que lo integran, sino en su accesibilidad.

Por definición, un sistema de referencia es un concepto abstracto. Está caracterizado por tres direcciones mutuamente perpendiculares en el espacio y tiene por objetivo facilitar una descripción cuantitativa de las posiciones y los movimientos de los objetos en él. Su

materialización, el *marco de referencia*, constituye la herramienta de su accesibilidad. Dicho de otro modo, lleva a la práctica el sistema de referencia posibilitando su uso.

En este capítulo no sólo distinguimos los conceptos de sistema y marco de referencia, además desarrollaremos el método de cuatro pasos para la realización de un sistema de referencia propuesto por Kovalevsky y Mueller (1989). Asimismo, concluiremos con un ejemplo del método aplicado a la materialización del sistema de referencia celeste.

Pasos necesarios para la materialización de un sistema de referencia

Según Kovalevsky y Mueller (1989, p. 3) se necesita un mínimo de cuatro pasos para materializar un sistema de referencia: 1) Concepción, 2) Elección de una estructura física, 3) Modelado de la estructura física y 4) Materialización.

La concepción de un sistema de referencia consiste en el enunciado de un principio general o propiedad, el cual vamos a exigir que el sistema de referencia cumpla. En general, se pide que el sistema de referencia en cuestión sea inercial. A través de esta exigencia incorporamos condiciones para asegurar el cumplimiento del principio establecido. Por ejemplo, para que el sistema de referencia sea inercial sus ejes no deberán rotar con respecto del resto universo como un todo¹ (Green, 1985, p. 49) y las ecuaciones diferenciales del movimiento de los objetos en él no deben poseer términos de aceleración. Concluida esta etapa, donde enunciamos la propiedad fundamental que el sistema de referencia debe cumplir, estamos frente a un sistema de referencia *ideal*. Un enunciado abstracto que aún debe ser materializado.

Los pasos 2 y 3 están íntimamente ligados entre sí. Por un lado, debemos elegir una estructura física cuyos movimientos en el sistema ideal admitan ser descritos por las leyes de la Física. En particular, y considerando que este texto es introductorio a la Astrometría de precisión, exigiremos que se cumplan las leyes básicas de la Dinámica, dicho de otro modo, las Leyes de Newton.

Por otro lado, luego de haber elegido la estructura física, es necesario modelarla. Durante el modelado es común adoptar constantes, establecer condiciones iniciales o fijar parámetros. Todo esto debe hacerse unívocamente y libre de ambigüedades para evitar incertezas. Este objetivo sólo se cumplirá si somos capaces de asociar convenciones al modelo desarrollado. Por todo esto, luego del tercer paso, estaremos frente a un Sistema de Referencia *Convencional*.

¹ Principio de E. Mach

Tabla 1.1.

Ejemplos del método de los cuatro pasos para sistemas de referencia celestes

	Dinámico	Cinemático
1	Los astros se mueven de tal forma que sus ecuaciones de movimiento no poseen términos de aceleración (Sólo aplicación en un entorno del sistema solar, asume Mecánica Newtoniana) ²	Asume la existencia de objetos “en reposo” ³
2	Sistema Solar, Sistema Tierra – Luna	Cuásares, radio estrellas, objetos extragalácticos en general con movimiento propio (μ) no discernible
3	Masas planetarias, condiciones iniciales para las ecuaciones de movimiento.	La dirección de los ejes coordenados se fija en el espacio por convención y estos ejes son independientes de los planos fundamentales y/o líneas nodales asociadas a la dinámica de la Tierra
4	Catálogos fundamentales clásicos: posiciones estelares referidas a posiciones observadas de planetas	Marco de Referencia Celeste Internacional (ICRF, International Celestial Reference Frame): reducciones de observaciones de la Interferometría de Línea de Base muy Larga (VLBI, Very Long Baseline Interferometry) a radio fuentes extragalácticas lejanas

Nota: Basado en Kovalevsky y Mueller, 1989.

Concluido el tercer paso, estaremos en condiciones de definir coordenadas para un dado objeto. Estas serán el resultado de aplicar los modelos adoptados a las estructuras físicas elegidas en los pasos anteriores. Sin embargo, estas coordenadas definidas aún son inaccesibles. La accesibilidad del sistema de referencia quedará garantizada luego de su materialización. Una vez aplicados los modelos y las convenciones adoptadas para describir la

² Nótese que para que el sistema pueda ser considerado inercial, su origen también debe serlo. Por lo tanto, el origen debe ser baricéntrico (Baricentro del Sistema Solar). Asumiendo a la galaxia en movimiento circular puede estimarse una aceleración despreciable ($\approx 2 \times 10^{-10} \text{ m seg}^{-2}$)

³ Velocidad despreciable

posición y los movimientos de los objetos o estructuras físicas elegidas y observadas, se obtendrán las posiciones del conjunto finito de N objetos seleccionados. Afirmaremos entonces que son N los puntos que *materializan* el sistema de referencia.

De modo que las coordenadas de los P_i objetos (con $i = 1, \dots, N$), y sus respectivos errores estadísticamente estimados, constituyen el *Marco de Referencia* o lo que es lo mismo la *materialización* del sistema de referencia.

Así el conjunto de posiciones conocidas P_i (marco de referencia), permitirá asociar el punto A de posición desconocida a su sistema de referencia. En resumen: Para determinar la posición del punto incógnita A , bastará con determinar la posición de A con respecto a los P_i .

Nos queda pendiente el tratamiento de un punto importante durante este proceso. Es necesario agregar un quinto paso para asegurarnos que las coordenadas determinadas estén libres de errores sistemáticos. Para ello debemos evitar los errores provenientes de la escala de tiempo asociada al marco.

Efectivamente, un error en la referencia temporal afectará del mismo modo al movimiento de *todos* los objetos en el marco. Ignorar este efecto puede causar una *deformación* o distorsión del marco de referencia y por lo tanto es esencial asociar una *escala de tiempo uniforme* (ver Capítulo 9) al proceso de materialización del sistema de referencia.

Finalmente, si el número N de puntos resulta insuficiente para permitir la posición de cualquier punto incógnita, será necesario extender el proceso a un nuevo conjunto secundario de puntos. Si este es el caso, estaremos frente a una *extensión* o *densificación* del marco de referencia.

Referencias

- Green R. M. (1985) *Spherical Astronomy*. Cambridge University Press.
- Kovalevsky J. y Mueller I. (1989) *Introduction in Reference frames in Astronomy and Geophysics*. J. Kovalevsky, I. Mueller y B. Kolaczek (eds.). Kluwer Academic Publishers.

CAPÍTULO 2

Paralaje

Gonzalo Carlos de Elía

La paralaje es un efecto geométrico definido como la desviación angular de la dirección a un objeto desde distintas ubicaciones. En este contexto definimos el corrimiento paraláctico como la variación en la dirección al objeto debido a un cambio en la posición del observador. De este modo, si el observador se ubica en el origen del sistema de referencia, la corrección por paralaje en las coordenadas de un astro estará basada simplemente en un cambio en el origen del sistema de referencia.

A partir de dichas consideraciones y dependiendo del desplazamiento del observador, podemos definir dos variantes:

- *Paralaje Diurna o Geocéntrica*: el cambio en el origen del sistema de referencia se produce desde el Geocentro al Topocentro,

- *Paralaje Anual*: el cambio en el origen del sistema de referencia se produce desde el Baricentro del Sistema Solar al Geocentro.

A continuación, brindaremos una descripción detallada de cada una de estas variantes, poniendo énfasis en el tratamiento matemático utilizado para desarrollar la transformación, así como también en el orden de magnitud asociado al cambio en las coordenadas celestes debido a este efecto.

Paralaje diurna

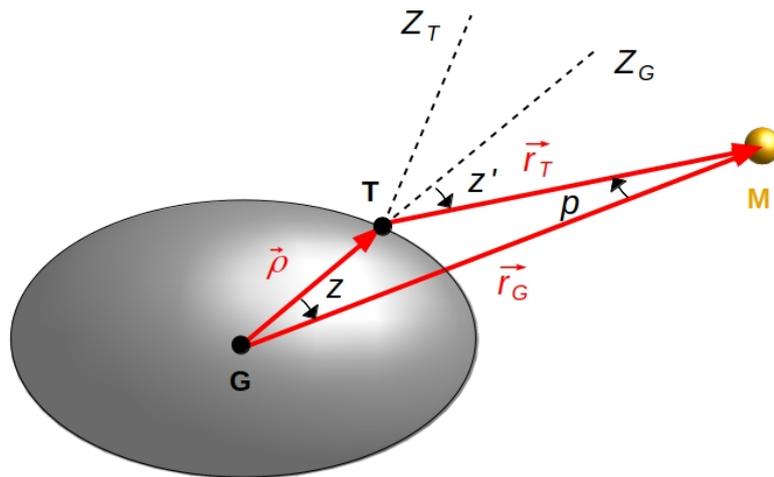
Definiciones y consideraciones generales

Dada la Figura 2.1, sean G y T el Geocentro y Topocentro, respectivamente, Z_G el cenit geocéntrico, y Z_T el cenit topocéntrico. Además, sean \vec{r}_G y \vec{r}_T los vectores posición

geocéntrico y topocéntrico de un mismo punto del objeto M, respectivamente, $\vec{\rho}$ el vector posición geocéntrico del Topocentro, y z y z' las distancias cenitales geocéntricas de \vec{r}_G y \vec{r}_T , respectivamente. Finalmente, sea p la paralaje diurna, la cual se define como el ángulo subtendido en el astro por la distancia entre el Geocentro y el Topocentro.

Figura 2.1.

Representación esquemática de la paralaje diurna.



Nota. Adaptado de *Textbook on Spherical Astronomy* (p. 199), de W. M. Smart, 1977, Cambridge University Press.

Consideraciones geométricas y trigonométricas simples nos permiten derivar diversas conclusiones de interés. Por un lado, dado que G, T, y el punto en consideración sobre el objeto M forman un triángulo plano, la suma de los ángulo interiores es igual a 180° , por lo que

$$(180^\circ - z') + z + p = 180^\circ \quad (2.1)$$

de lo cual

$$z' = z + p \quad (2.2)$$

Este planteo simple nos permite observar que la paralaje diurna incrementa la distancia cenital geocéntrica de un astro (Smart, 1977, p. 199; Green, 1985, p. 102). Por otra parte, aplicando la fórmula del seno para triángulos planos obtenemos que

$$\frac{|\vec{r}_G|}{\text{sen}(180^\circ - z')} = \frac{|\vec{r}_T|}{\text{sen } z} = \frac{|\vec{\rho}|}{\text{sen } p} \quad (2.3)$$

con lo cual

$$\text{sen } p = \frac{|\vec{\rho}|}{|\vec{r}_G|} \text{sen } z' \quad (2.4)$$

De acuerdo con esto, para un dado Topocentro, la paralaje diurna de un astro adoptará diferentes valores dependiendo de la distancia geocéntrica y de la distancia cenital (Smart, 1977, p. 200; Green, 1985, p. 102). A partir de estas dependencias, resulta útil definir la paralaje horizontal ecuatorial P_0 , la cual representa la paralaje diurna cuando el objeto bajo consideración está en el horizonte y el observador se encuentra en el Ecuador (Smart, 1977, p. 200; Green, 1985, p. 102). Luego, el valor de P_0 puede ser obtenido de la Ecuación 2.4 considerando $z' = 90^\circ$ y $|\vec{\rho}| = a$, siendo a el radio ecuatorial de la Tierra, con lo que

$$\text{sen } P_0 = \frac{a}{|\vec{r}_G|} \quad (2.5)$$

Tabla 2.1.

Valores extremos de la Paralaje Horizontal Ecuatorial del Sol, la Luna, y los planetas del Sistema Solar.

OBJETO	PARALAJE HORIZONTAL ECUATORIAL
Sol	8,65'' – 8,94''
Mercurio	6'' – 16,5''
Venus	5,07'' – 32,6''
Luna	53,9' – 61,5'
Marte	3,27'' – 24,12''
Júpiter	1,36'' – 2,22''
Saturno	0,78'' – 1,13''
Urano	0,42'' – 0,51''
Neptuno	0,28'' – 0,31''

Nota. El valor adoptado para el radio ecuatorial de la Tierra en la Ecuación 2.5 es de 6378,137 km.

Para derivar los valores de la Paralaje Horizontal Ecuatorial del Sol, la Luna, y los planetas del Sistema Solar es necesario conocer la evolución orbital de dichos objetos relativa a la Tierra con el fin de determinar sus distancias geocéntricas en cada instante. Para desarrollar esta

tarea, analizamos numéricamente la evolución orbital de la Luna y los planetas alrededor del Sol haciendo uso del código de N-cuerpos conocido como MERCURY (Chambers 1999). En particular, utilizamos la versión RA15 del integrador numérico RADAU (Everhart 1985), la cual está disponible en dicho código, con un parámetro de precisión de 10^{-12} .

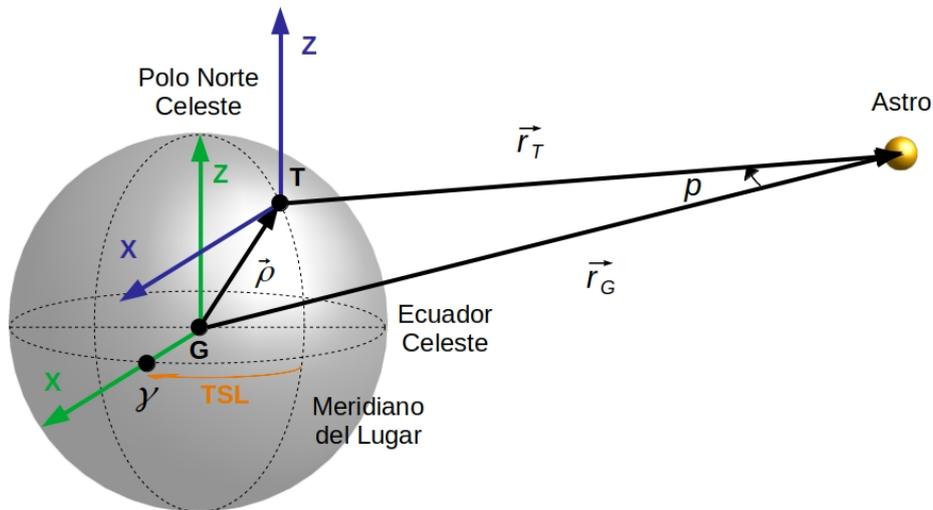
Los resultados de dicha simulación nos permiten calcular la distancia geocéntrica del Sol, la Luna, y los planetas en función del tiempo. A partir de esto, la Tabla 2.1 muestra el rango de valores obtenido para la Paralaje Horizontal Ecuatorial de los objetos de interés mencionados.

Fórmulas rigurosas de corrección

De la Figura 2.2, sean XYZ los ejes cartesianos asociados al sistema ecuatorial celeste geocéntrico y topocéntrico, los cuales son ilustrados en color verde y azul, respectivamente. Sean \vec{r}_G y \vec{r}_T los vectores posición del astro medidos en el sistema ecuatorial celeste geocéntrico y topocéntrico, respectivamente. Sea $\vec{\rho}$ el vector posición del Topocentro medido en el sistema ecuatorial celeste geocéntrico.

Figura 2.2.

Sistemas de referencia y vectores posición en el tratamiento vectorial de la paralaje diurna.



Nota. Sistemas de referencia celestes geocéntrico en verde y topocéntrico en azul.

De acuerdo a lo expuesto en la Figura 2.2, se verifica la relación vectorial

$$\vec{r}_G = \vec{r}_T + \vec{\rho} \quad (2.6)$$

Es muy importante tener en claro que siempre la incógnita a determinar será el vector posición del astro \vec{r}_T asociado al sistema ecuatorial celeste topocéntrico. Por ende, nuestra expresión vectorial de trabajo siempre será

$$\vec{r}_T = \vec{r}_G - \vec{\rho} \quad (2.7)$$

(Green, 1985, p. 107). Dado que estamos trabajando con sistemas de referencia ecuatoriales celestes, los vectores \vec{r}_G y \vec{r}_T son escritos como

$$\vec{r}_G = \begin{pmatrix} |\vec{r}_G| \cos \delta_G \cos \alpha_G \\ |\vec{r}_G| \cos \delta_G \sin \alpha_G \\ |\vec{r}_G| \sin \delta_G \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

y

$$\vec{r}_T = \begin{pmatrix} |\vec{r}_T| \cos \delta_T \cos \alpha_T \\ |\vec{r}_T| \cos \delta_T \sin \alpha_T \\ |\vec{r}_T| \sin \delta_T \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

donde $|\vec{r}_G|$, α_G , y δ_G representan la distancia, ascensión recta y declinación geocéntrica del astro, y $|\vec{r}_T|$, α_T , y δ_T la distancia, ascensión recta y declinación topocéntrica del mismo. Recordemos que las cantidades $|\vec{r}_G|$, α_G , y δ_G resultan ser datos mientras que $|\vec{r}_T|$, α_T , y δ_T son las incógnitas a resolver. Para lograr esto, debemos aun cuantificar el vector $\vec{\rho}$ en un sistema ecuatorial celeste. Sin embargo, la escritura del vector $\vec{\rho}$ dependerá del modelo seleccionado para describir la forma matemática adoptada para la Tierra. De acuerdo con esto, en primera instancia debemos expresar $\vec{\rho}$ en un sistema de referencia terrestre y luego, mediante el uso de rotaciones, escribir $\vec{\rho}$ en un sistema ecuatorial celeste.

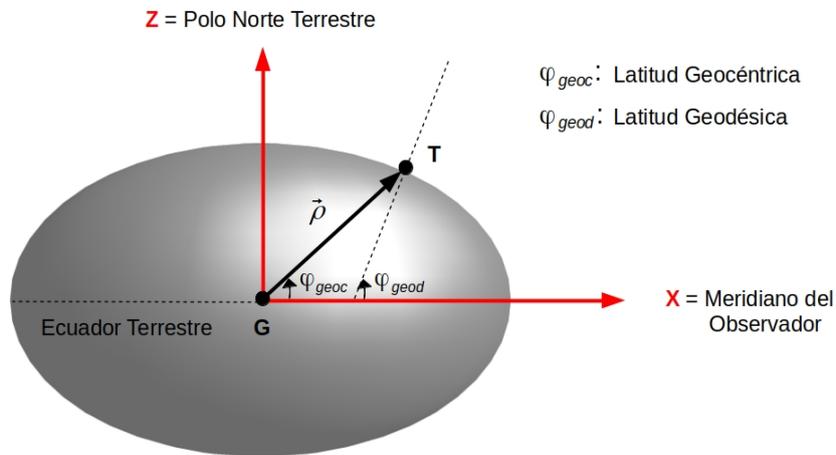
La forma matemática adoptada para la Tierra está dada por el elipsoide de revolución World Geodetic System 1984 (WGS84). El semieje mayor de dicho elipsoide es $a = 6378,137$ km mientras que el achatamiento f adopta un valor dado por $f = 1/298,257223563$. La Figura 2.3 muestra una representación esquemática de dicho elipsoide, junto con el vector posición geocéntrico del Topocentro $\vec{\rho}$, y las latitudes geocéntrica y geodésica del Topocentro φ_{geoc} y φ_{geod} , respectivamente. Además, en dicha figura, se ilustran en color rojo los ejes cartesianos del sistema de referencia terrestre, donde el eje Z tiene la dirección del Polo Norte Terrestre, el eje X apunta hacia el Meridiano Geodésico del Observador, y el eje Y (no representado) se ubica formando una terna directa.

De la Figura 2.3 es sencillo observar que las coordenadas cartesianas del vector posición geocéntrico del Topocentro $\vec{\rho}$ en el sistema de referencia terrestre están dadas por

$$\vec{\rho} = \begin{pmatrix} |\vec{\rho}| \cos \varphi_{geoc} \\ 0 \\ |\vec{\rho}| \sin \varphi_{geoc} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Figura 2.3.

Representación esquemática del elipsoide de revolución WGS84 y del sistema de referencia terrestre.



Nota. Adaptado de *Spherical Astronomy* (p. 97), de R. M. Green, 1985, Cambridge University Press.

Sin embargo, la latitud geocéntrica del Topocentro no resulta ser dato. Haciendo uso del modelo de elipsoide WGS84 y siguiendo el planteo desarrollado por Green (1985, p. 98), es posible escribir las coordenadas cartesianas del vector posición geocéntrico del Topocentro $\vec{\rho}$ en el sistema de referencia terrestre mediante la expresión

$$\vec{\rho} = \begin{pmatrix} C \cos \varphi_{geod} \\ 0 \\ S \sin \varphi_{geod} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

donde

$$C = a [\cos^2 \varphi_{geod} + (1-f)^2 \sin^2 \varphi_{geod}]^{-1/2} \quad (2.12)$$

y

$$S=(1-f)^2 C \quad (2.13)$$

La latitud geodésica del Topocentro φ_{geod} y los parámetros del elipsoide a y f resultan ser datos conocidos por lo cual, las coordenadas cartesianas del vector posición geocéntrico del Topocentro $\vec{\rho}$ en el sistema de referencia terrestre quedan completamente definidas a partir de las Ecuaciones 2.11, 2.12, y 2.13.

Aún nos resta escribir las coordenadas cartesianas del vector posición geocéntrico del Topocentro $\vec{\rho}$ en el sistema ecuatorial celeste. Para cumplir con esta tarea, observemos la Figura 2.4. Dado que el eje Z del sistema ecuatorial celeste tiene la misma dirección que el eje Z del sistema de referencia terrestre, que el eje X del sistema ecuatorial celeste apunta hacia el equinoccio vernal γ , y el eje X del sistema terrestre está orientado hacia el Meridiano Geodésico del Observador, las coordenadas cartesianas del vector posición geocéntrico del Topocentro $\vec{\rho}$ en el sistema ecuatorial celeste pueden ser obtenidas a partir de la expresión

$$\vec{\rho}=R_Z^{ret}(TSL)\vec{\rho}_{terr} \quad (2.14)$$

donde $R_Z^{ret}(TSL)$ representa la matriz de rotación retrógrada alrededor del eje Z un ángulo igual al Tiempo Sidéreo Local TSL , y $\vec{\rho}_{terr}$ el vector posición geocéntrico del Topocentro escrito en el sistema terrestre, el cual está dado por la Ecuación 2.11. De acuerdo con esto y siguiendo los lineamientos de Green (1985, p. 107), las coordenadas cartesianas del vector posición geocéntrico del Topocentro $\vec{\rho}$ en el sistema ecuatorial celeste son escritas como

$$\vec{\rho}=\begin{pmatrix} C \cos \varphi_{geod} \cos TSL \\ C \cos \varphi_{geod} \sen TSL \\ S \sen \varphi_{geod} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

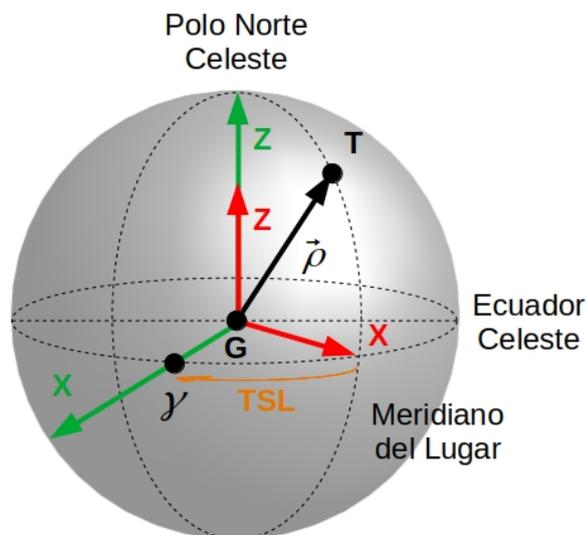
Es muy importante mencionar que en la representación del vector posición geocéntrico del Topocentro $\vec{\rho}$ en el sistema terrestre y en su posterior escritura en el sistema ecuatorial celeste, hemos asumido diversas hipótesis que merecen ser especificadas. Por un lado, consideramos que el Geocentro coincide con el centro del elipsoide WGS84. Por otra parte, despreciamos los efectos del movimiento del polo (ver capítulo 8). Finalmente, consideramos que la deflexión de la vertical es nula, por lo cual la proyección del meridiano geodésico en la esfera celeste coincide con el meridiano astronómico. La especificación de tales hipótesis resulta ser sumamente necesaria para una correcta interpretación del procedimiento matemático propuesto.

Habiendo expresado cada uno de los vectores posición \vec{r}_G, \vec{r}_T , y $\vec{\rho}$ en el sistema ecuatorial celeste, la Ecuación 2.7 puede ser resuelta y determinar el vector posición topocéntrico del astro \vec{r}_T . En efecto, teniendo en cuenta las Ecuaciones 2.7, 2.8, 2.9, y 2.15, el cálculo de \vec{r}_T requerirá la resolución del sistema (Green, 1985, p. 107)

$$\begin{pmatrix} |\vec{r}_T| \cos \delta_T \cos \alpha_T \\ |\vec{r}_T| \cos \delta_T \sin \alpha_T \\ |\vec{r}_T| \sin \delta_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{r}_G| \cos \delta_G \cos \alpha_G \\ |\vec{r}_G| \cos \delta_G \sin \alpha_G \\ |\vec{r}_G| \sin \delta_G \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C \cos \varphi_{geod} \cos TSL \\ C \cos \varphi_{geod} \sin TSL \\ S \sin \varphi_{geod} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Figura 2.4.

Sistemas de referencia involucrados en la transformación del vector posición geocéntrico del topocentro.



Nota. Sistemas de referencia celeste en verde y terrestre en rojo.

Ya que el lado derecho de esta ecuación matricial nos queda expresado en función de datos conocidos, es posible calcular, a partir de ello, las componentes cartesianas del vector posición topocéntrico del astro $\vec{r}_T = (r_{T,x}, r_{T,y}, r_{T,z})$ en el sistema ecuatorial celeste. Una vez calculadas dichas componentes, la ecuación matricial dada por

$$\begin{pmatrix} |\vec{r}_T| \cos \delta_T \cos \alpha_T \\ |\vec{r}_T| \cos \delta_T \sin \alpha_T \\ |\vec{r}_T| \sin \delta_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{T,x} \\ r_{T,y} \\ r_{T,z} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

nos permite derivar las variables topocéntricas $|\vec{r}_T|$, α_T , y δ_T a partir del siguiente esquema de resolución:

$$|\vec{r}_T| = \sqrt{r_{T,x}^2 + r_{T,y}^2 + r_{T,z}^2} \quad (2.18)$$

$$\delta_T = \arcsen\left(\frac{r_{T,z}}{|\vec{r}_T|}\right) \quad (2.19)$$

$$\alpha_T = \arctg\left(\frac{r_{T,y}}{r_{T,x}}\right) \quad (2.20)$$

Es importante destacar que antes de calcular la ascensión recta topocéntrica α_T a partir de la Ecuación 2.20, es necesario determinar el cuadrante al cual pertenece dicha coordenada. A partir de la Ecuación 2.17, y teniendo en cuenta que $|\vec{r}_T|$ y $\cos\delta_T$ son cantidades positivas, el signo de las coordenadas $r_{T,x}$ y $r_{T,y}$ nos dan el signo de $\cos\alpha_T$ y $\sin\alpha_T$, respectivamente, lo cual nos permite determinar el cuadrante de α_T .

Finalmente, la Figura 2.2 nos muestra que, dado que conocemos $|\vec{\rho}|$, $|\vec{r}_G|$, y $|\vec{r}_T|$, es posible obtener la paralaje diurna ρ del astro aplicando el teorema del coseno de la trigonometría plana, derivando la expresión

$$\rho = \arccos\left(\frac{|\vec{r}_G|^2 + |\vec{r}_T|^2 - |\vec{\rho}|^2}{2|\vec{r}_G||\vec{r}_T|}\right) \quad (2.21)$$

Es importante destacar que la corrección de coordenadas por efectos de paralaje diurna debe ser aplicada a objetos pertenecientes al Sistema Solar. Por el contrario, astros ubicados fuera de nuestro Sistema Solar poseen distancias lo suficientemente grandes como para que la corrección de sus coordenadas por efectos de paralaje diurna pueda ser considerada despreciable.

Paralaje anual

Definiciones y consideraciones generales

Dada la Figura 2.5, sean B y G el Baricentro del Sistema Solar y el Geocentro, respectivamente, \vec{r}_B y \vec{r}_G los vectores posición baricéntrico y geocéntrico de un astro, respectivamente, \vec{R} el vector posición baricéntrico del Geocentro, y E el ángulo de elongación. Finalmente, sea π_* la paralaje anual, la cual se define como el ángulo subtendido en el astro por los vectores posición baricéntrico y geocéntrico del mismo.

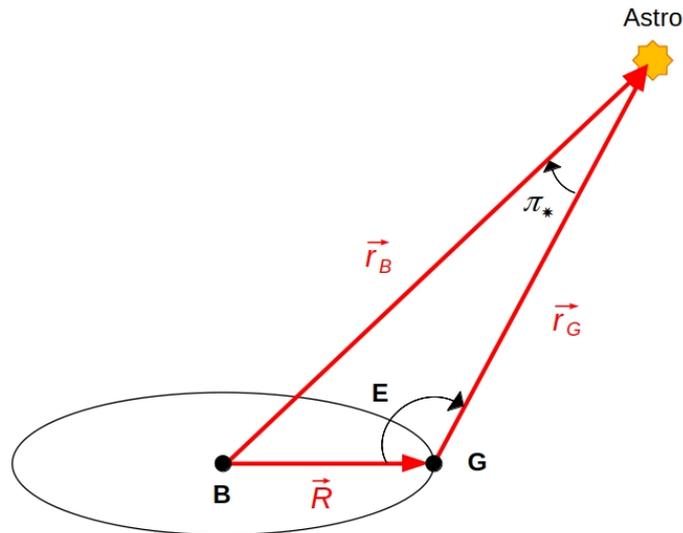
A partir del teorema del seno

$$\text{sen } \pi_* = \frac{|\vec{R}|}{|\vec{r}_B|} \text{sen } E \quad (2.22)$$

(Smart, 1977, p. 217; Green, 1985, p. 188).

Figura 2.5.

Representación esquemática de la paralaje anual.



Nota. Adaptado de *Spherical Astronomy* (p. 187), de R. M. Green, 1985, Cambridge University Press.

Asumiendo que $\text{sen } \pi_* \approx \pi_*$, $|\vec{R}| = 1 \text{ UA}$, y $E = 90^\circ$, la paralaje anual puede ser expresada por

$$\pi_* [\text{rad}] \approx \frac{1}{|\vec{r}_B| [\text{UA}]} \quad (2.23)$$

Con el fin de cuantificar este efecto, mencionamos que la paralaje anual de la estrella Próxima Centauri, la cual se ubica a 4,2 años luz y es la más cercana a nuestro Sistema Solar, es de 0,768'' (Gaia Collaboration et al., 2016; 2021).

Fórmulas rigurosas de corrección

De la Figura 2.6, sean XYZ los ejes cartesianos asociados al sistema ecuatorial celeste baricéntrico y geocéntrico, los cuales son ilustrados en color magenta y verde, respectivamente. Sean \vec{r}_B y \vec{r}_G los vectores posición del astro medidos en el sistema ecuatorial celeste baricéntrico y geocéntrico, respectivamente. Sea \vec{R} el vector posición del Geocentro medido en el sistema ecuatorial celeste baricéntrico.

De acuerdo a lo expuesto en la Figura 2.6, se verifica la relación vectorial (Green, 1985, p. 188)

$$\vec{r}_B = \vec{r}_G + \vec{R} \quad (2.24)$$

Destacamos que en este marco de trabajo siempre la incógnita a determinar será el vector posición del astro \vec{r}_G asociado al sistema ecuatorial celeste geocéntrico. Luego, nuestra expresión vectorial de trabajo siempre será

$$\vec{r}_G = \vec{r}_B - \vec{R} \quad (2.25)$$

Si el astro en consideración pertenece al Sistema Solar, es esencial que esta ecuación vectorial sea utilizada en su forma exacta para el desarrollo de su resolución. Sin embargo, si el astro en cuestión es una estrella, es posible asumir ciertas simplificaciones en el procedimiento matemático (Green, 1985, p. 188). En efecto, escribiendo $\vec{r}_B = |\vec{r}_B| \hat{s}_B$, $\vec{r}_G = |\vec{r}_G| \hat{s}_G$, y $\vec{R} = |\vec{R}| \hat{s}_R$, la Ecuación 2.25 puede expresarse como

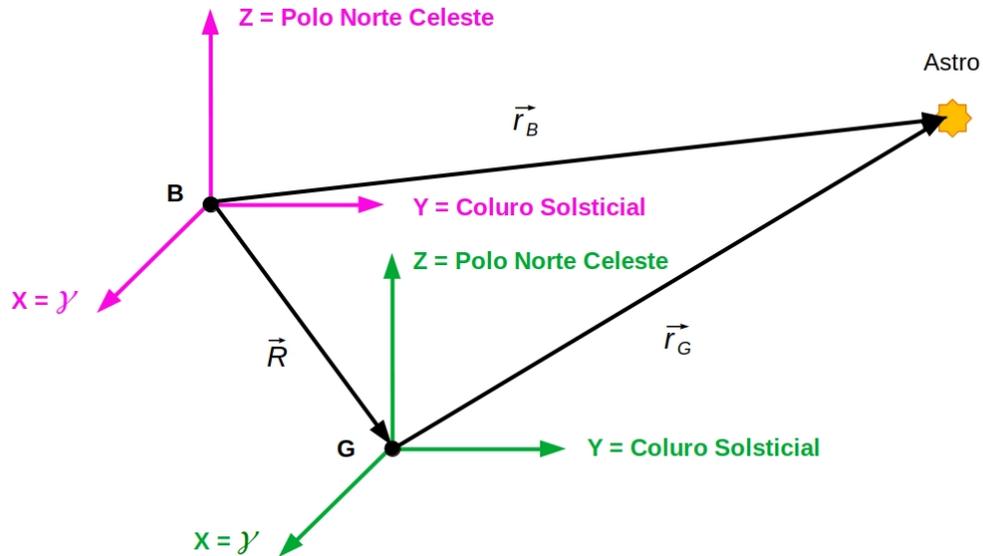
$$|\vec{r}_G| \hat{s}_G = |\vec{r}_B| \hat{s}_B - |\vec{R}| \hat{s}_R \quad (2.26)$$

Si multiplicamos vectorialmente dos veces el versor \hat{s}_B por la Ecuación 2.26 obtenemos que

$$|\vec{r}_G| \hat{s}_B \times (\hat{s}_B \times \hat{s}_G) = -|\vec{R}| \hat{s}_B \times (\hat{s}_B \times \hat{s}_R) \quad (2.27)$$

Figura 2.6.

Sistemas de referencia y vectores posición en el tratamiento vectorial de la paralaje anual.



Nota. Sistemas de referencia celeste baricéntrico en magenta y geocéntrico en verde.

Utilizando identidades vectoriales, es posible reescribir la ecuación anterior en términos de productos escalares, tomando la forma

$$[\hat{s}_B(\hat{s}_B \cdot \hat{s}_G) - \hat{s}_G] = -\frac{|\vec{R}|}{|\vec{r}_G|} [\hat{s}_B(\hat{s}_B \cdot \hat{s}_R) - \hat{s}_R] \quad (2.28)$$

Dado que para una estrella $|\vec{r}_B| \approx |\vec{r}_G|$ entonces $(\hat{s}_B \cdot \hat{s}_G) \approx 1$, y $|\vec{R}|/|\vec{r}_B| \approx |\vec{R}|/|\vec{r}_G| \approx \pi_*$, con lo cual la Ecuación 2.28 puede finalmente expresarse como

$$\vec{ds} = \hat{s}_G - \hat{s}_B = \pi_* [\hat{s}_B(\hat{s}_B \cdot \hat{s}_R) - \hat{s}_R] \quad (2.29)$$

Esta es la ecuación vectorial con la cual vamos a trabajar para afrontar la resolución de una transformación de coordenadas de una estrella por efectos de paralaje anual.

Trabajando en un sistema ecuatorial celeste, el versor asociado a la posición baricéntrica de una estrella se escribe como $\hat{s}_B = (\cos \delta_B \cos \alpha_B, \cos \delta_B \sin \alpha_B, \sin \delta_B)$, siendo α_B y δ_B la ascensión recta y la declinación baricéntricas de la misma. Teniendo en cuenta que el versor

asociado a la posición baricéntrica del Geocentro en el sistema ecuatorial celeste se expresa como $\hat{s}_R = (s_{R,x}, s_{R,y}, s_{R,z})$, y que el vector diferencial $d\vec{s} = \hat{s}_G - \hat{s}_B$ está dado por

$$ds_x = -\text{sen } \delta_B \cos \alpha_B d\delta - \cos \delta_B \text{sen } \alpha_B d\alpha \quad (2.30)$$

$$ds_y = -\text{sen } \delta_B \text{sen } \alpha_B d\delta + \cos \delta_B \cos \alpha_B d\alpha \quad (2.31)$$

$$ds_z = \cos \delta_B d\delta \quad (2.32)$$

es posible escribir los cambios $d\alpha$ y $d\delta$ en las coordenadas ecuatoriales celestes de una estrella por efecto de la paralaje anual mediante (Green, 1985, p. 189)

$$d\alpha = \alpha_G - \alpha_B = \pi_* (s_{R,x} \text{sen } \alpha_B - s_{R,y} \cos \alpha_B) \sec \delta_B \quad (2.33)$$

$$d\delta = \delta_G - \delta_B = \pi_* (s_{R,x} \text{sen } \delta_B \cos \alpha_B + s_{R,y} \text{sen } \delta_B \text{sen } \alpha_B - s_{R,z} \cos \delta_B) \quad (2.34)$$

Trabajando en un sistema de referencia ecliptical es posible obtener relaciones análogas para los cambios $d\lambda$ y $d\beta$ en las coordenadas eclipticales de una estrella por efecto de la paralaje anual. Recordando que el versor asociado a la posición baricéntrica de una estrella en un sistema de referencia ecliptical se escribe como $\hat{s}_B = (\cos \beta_B \cos \lambda_B, \cos \beta_B \text{sen } \lambda_B, \text{sen } \beta_B)$, siendo λ_B y β_B la longitud y latitud ecliptical baricéntricas de la misma, respectivamente, y que además, el versor asociado a la posición baricéntrica del Geocentro en el sistema de referencia ecliptical se expresa como $\hat{s}_R = (s_{R,x}^e, s_{R,y}^e, s_{R,z}^e)$, es posible escribir los cambios $d\lambda$ y $d\beta$ por efecto de la paralaje anual por

$$d\lambda = \lambda_G - \lambda_B = \pi_* (s_{R,x}^e \text{sen } \lambda_B - s_{R,y}^e \cos \lambda_B) \sec \beta_B \quad (2.35)$$

$$d\beta = \beta_G - \beta_B = \pi_* (s_{R,x}^e \text{sen } \beta_B \cos \lambda_B + s_{R,y}^e \text{sen } \beta_B \text{sen } \lambda_B - s_{R,z}^e \cos \beta_B) \quad (2.36)$$

Fórmulas aproximadas de corrección: elipse paraláctica

Si asumimos la hipótesis de que el Geocentro se mueve sobre una órbita circular y sin perturbaciones, las Ecuaciones 2.35 y 2.36 se verán simplificadas. En efecto, tal como nos muestra la Figura 2.7, si el Geocentro G cumple con dichas condiciones, el vector posición

baricéntrico del Geocentro \vec{R} en el sistema ecliptical se escribe como $\vec{R} = |\vec{R}| \hat{s}_R$, donde $|\vec{R}| = 1 \text{ UA}$ y

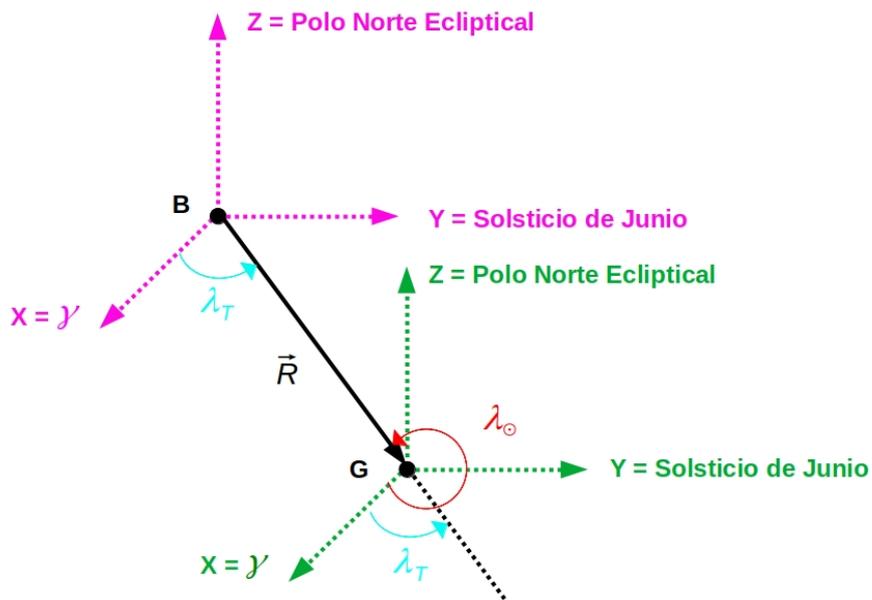
$$\hat{s}_R = (s_{R,x}^e, s_{R,y}^e, s_{R,z}^e) = (\cos \lambda_T, \text{sen } \lambda_T, 0) \quad (2.37)$$

siendo λ_T la longitud ecliptical del Geocentro. Ya que $\lambda_T = \lambda_\odot - 180^\circ$, siendo λ_\odot la longitud ecliptical del Sol, entonces (Green, 1985, p. 191)

$$s_R = (s_{R,x}^e, s_{R,y}^e, s_{R,z}^e) = (-\cos \lambda_\odot, -\text{sen } \lambda_\odot, 0) \quad (2.38)$$

Figura 2.7.

Representación esquemática de la longitud ecliptical de la Tierra λ_T y el Sol λ_\odot .



Trabajando bajo las hipótesis mencionadas y teniendo en cuenta la Ecuación 2.38, las Ecuaciones 2.35 y 2.36 podrán escribirse como

$$d\lambda = \lambda_G - \lambda_B = -\pi_* \text{sen}(\lambda_B - \lambda_\odot) \text{sec } \beta_B \quad (2.39)$$

$$d\beta = \beta_G - \beta_B = -\pi_* \text{cos}(\lambda_B - \lambda_\odot) \text{sen } \beta_B \quad (2.40)$$

(Green, 1985, p. 191). Estas ecuaciones muestran que el efecto de la paralaje anual producirá un cambio periódico en las coordenadas eclípticas de la estrella. El período de variación es de un año, el cual está lógicamente asociado al movimiento orbital de la Tierra.

Para entender la geometría de este efecto, situemos un par de ejes cartesianos (x, y) con origen en la posición baricéntrica de la estrella, de modo que x se ubique paralelo al plano de la Eclíptica e y sobre el meridiano eclíptico de la estrella.

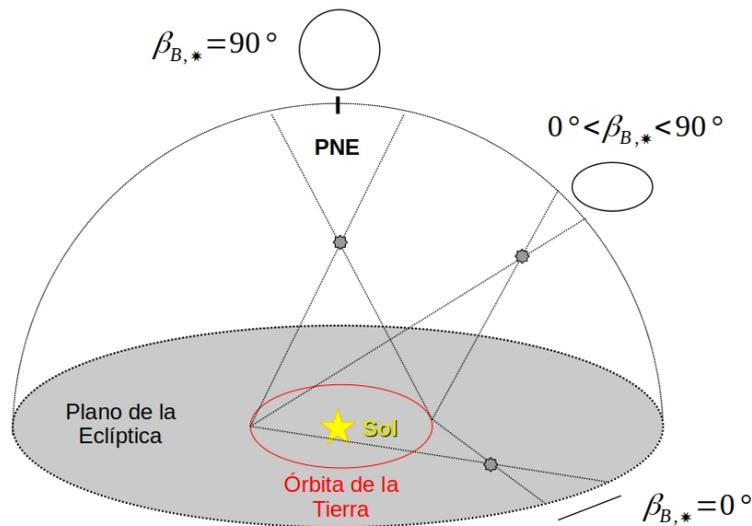
De acuerdo con esto, $x = d \lambda \cos \beta_B$ mientras que $y = d \beta$. A partir de las Ecuaciones 2.39 y 2.40 es posible mostrar que

$$\frac{(d \lambda \cos \beta_B)^2}{\pi_*^2} + \frac{(d \beta)^2}{(\pi_* \operatorname{sen} \beta_B)^2} = 1 \quad (2.41)$$

(Green, 1985, p. 191), la cual representa la ecuación de una elipse.

Figura 2.8.

Representación esquemática de la elipse paraláctica



Nota. Se muestran estrellas con diferentes latitudes eclípticas baricéntricas. Adaptado de <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Annual-parallax-ellips.png>, D. Klimushkin, 2014. CC0 1.0.

En efecto, la ecuación general de una elipse a lo largo del eje x tiene la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.42)$$

donde a y b representan el semieje mayor y menor de la elipse, respectivamente, los cuales nos permiten calcular la excentricidad e de la misma a partir de la expresión $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$.

De acuerdo con esto, la Ecuación 2.41 nos permite concluir que, para cada estrella, su posición geocéntrica describe una elipse anual alrededor de su posición baricéntrica, la cual se caracteriza por un semieje mayor $a = \pi_*$, un semieje menor $b = \pi_* \sin \beta_B$, y una excentricidad $e = \cos \beta_B$. En efecto, el semieje mayor de esta elipse paraláctica dependerá de la distancia a la estrella, mientras que la excentricidad de la ubicación relativa de la misma respecto al plano de la eclíptica. La dependencia de la excentricidad con la latitud ecliptical baricéntrica nos muestra que dichas elipses se verán más excéntricas para estrellas más cercanas a la eclíptica. Este resultado nos permite distinguir dos casos extremos de particular interés. Por un lado, la posición geocéntrica de estrellas ubicadas en los polos eclipticales describe una circunferencia de radio π_* alrededor de su posición baricéntrica ya que la excentricidad de la elipse paraláctica resulta ser nula. Por otra parte, la posición geocéntrica de estrellas ubicadas sobre la Eclíptica describe un segmento de extensión $2\pi_*$ sobre el plano ecliptical alrededor de su posición baricéntrica ya que, tal como se observa de la Ecuación 2.40, la latitud ecliptical no experimenta ningún cambio. La Figura 2.8 nos permite ver una representación esquemática de la elipse paraláctica para estrellas con diferentes latitudes eclipticales baricéntricas.

Referencias

- Chambers, J. E. (1999) A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 304, 793
- Everhart, E. (1985) An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings, Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution, en Proceedings of IAU Colloq. 83, Carusi A. y Valsecchi G.B. eds. *Astrophysics and Space Science Library. Volume 115*, 185.
- Gaia Collaboration et al. (2016). The Gaia mission, *A&A* 595, A1.
- Gaia Collaboration et al. (2021). Gaia EDR3: Summary of the contents and survey properties, *A&A*, 649, A1.
- Green, R. M. (1985). *Spherical Astronomy*, Cambridge University Press.
- Smart W. M. (1977) *Text-Book on Spherical Astronomy*, Sexta Edición, Cambridge University Press.

CAPÍTULO 3

Aberración

Gonzalo Carlos de Elía

La aberración de la luz es un efecto físico definido como la diferencia entre la posición aparente observada de un astro y su posición geométrica real debida a la combinación entre la velocidad del observador y la velocidad finita de la luz. Teniendo en cuenta *sólo el desplazamiento del observador*, la aberración puede ser clasificada en dos diferentes tipos:

- *Aberración Diurna*: generada a partir del movimiento rotacional del observador sobre la Tierra,

- *Aberración Anual*: generada a partir del movimiento de traslación del observador alrededor del Baricentro del Sistema Solar.

Vale la pena mencionar que la acción combinada de ambos efectos define la Aberración Estelar. A continuación, describiremos un tratamiento matemático general para llevar a cabo la transformación de las coordenadas de una estrella por el efecto de aberración, el cual será válido tanto para la variante diurna como para la variante anual.

Fórmulas de corrección rigurosas: tratamiento general

Tal como mencionamos al inicio de este capítulo, el escenario de trabajo que proponemos aquí considera que la estrella bajo consideración no se desplaza respecto del Baricentro del Sistema Solar, mientras que el observador en cuestión se mueve con una cierta velocidad respecto de un sistema de referencia inercial.

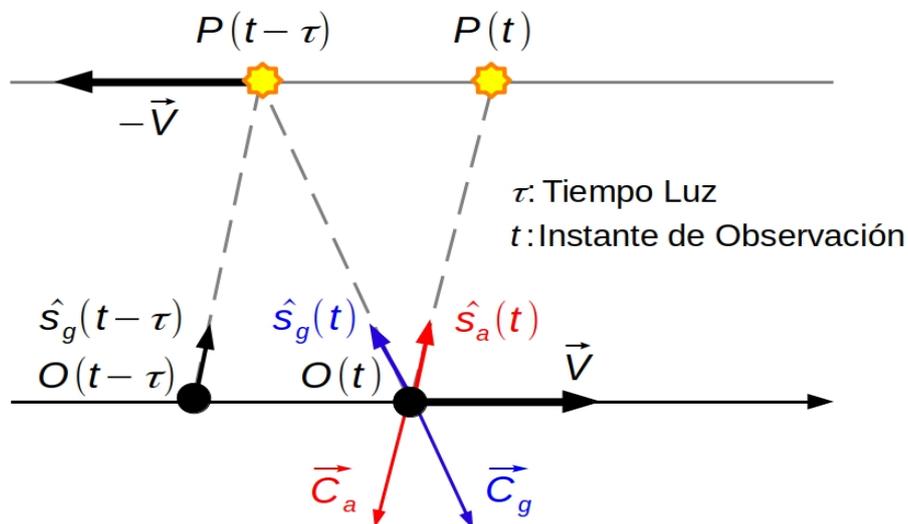
De acuerdo con esto, consideremos un observador O , el cual se desplaza con una velocidad \vec{V} respecto de un sistema de referencia en reposo, y una dada estrella P , tal como se ilustran en la Figura 3.1. Por un lado, sea $\hat{s}_a(t)$ el versor asociado a la posición aparente de la estrella en el instante de observación t , referido al observador en movimiento localizado en $O(t)$. Por otra parte, sea $\hat{s}_g(t)$ el versor asociado a la posición geométrica de

la misma estrella en el instante de observación t , referido a un hipotético observador en reposo también ubicado en $O(t)$. Además, sea $\hat{s}_g(t-\tau)$ el versor asociado a la posición geométrica de la estrella en el instante de observación $t-\tau$, referido a un hipotético observador en reposo ubicado en $O(t-\tau)$. El parámetro τ representa el Tiempo Luz, el cual está definido como el intervalo que tarda la luz que emite el astro en consideración en viajar desde la fuente hasta el observador. Luego, sea $\vec{C}_a(t) = -c\hat{s}_a(t)$ el vector velocidad de la radiación emitida por la estrella, referido a un observador en movimiento localizado en $O(t)$, donde c es la velocidad de la luz. Finalmente, sea $\vec{C}_g(t) = -c\hat{s}_g(t)$ el vector velocidad de la radiación emitida por la estrella, referido a un hipotético observador en reposo también localizado en $O(t)$.

Debido al movimiento del observador, la posición geométrica del astro bajo consideración no coincide con la posición aparente del mismo en el instante de observación t . En nuestro escenario de trabajo vamos a asumir que el versor de la posición geométrica del astro $\hat{s}_g(t)$ y el vector velocidad del observador \vec{V} son los datos conocidos. De este modo, el procedimiento matemático que propondremos se centrará en resolver el versor de la posición aparente del astro $\hat{s}_a(t)$, el cual representa la incógnita de nuestro problema.

Figura 3.1.

Representación esquemática de las correcciones rigurosas por aberración.



A partir de las variables introducidas en la Figura 3.1 y acudiendo a una simple composición de velocidades, es sencillo verificar que el vector velocidad de la radiación referido a un

observador en movimiento \vec{C}_a es igual a la suma entre el vector velocidad de la radiación referido a un observador en reposo \vec{C}_g y el vector velocidad del observador en reposo respecto de aquel en movimiento $-\vec{V}$. De este modo, en el instante t se cumple la relación

$$\vec{C}_a = \vec{C}_g - \vec{V} \quad (3.1)$$

(Green, 1985, p. 61), o equivalentemente

$$\hat{s}_a = \hat{s}_g + \frac{\vec{V}}{c} \quad (3.2)$$

Si multiplicamos vectorialmente dos veces el versor \hat{s}_g por la Ecuación 3.2 obtenemos que

$$\hat{s}_g \times (\hat{s}_g \times \hat{s}_a) = \frac{1}{c} \hat{s}_g \times (\hat{s}_g \times \vec{V}) \quad (3.3)$$

Utilizando identidades vectoriales, es posible reescribir la ecuación anterior en términos de productos escalares, tomando la forma

$$[\hat{s}_g(\hat{s}_g \cdot \hat{s}_a) - \hat{s}_a] = \frac{1}{c} [\hat{s}_g(\hat{s}_g \cdot \vec{V}) - \vec{V}] \quad (3.4)$$

Vale la pena destacar que tanto la magnitud del vector velocidad de un observador en rotación sobre la Tierra ($|\vec{V}_{Rot, Ec}| = 0,464 \text{ km s}^{-1}$), como aquella asociada al movimiento traslacional medio alrededor del Baricentro del Sistema Solar ($|\vec{V}_{Tras}| = 29,8 \text{ km s}^{-1}$) resultan ser entre seis y cuatro órdenes de magnitud menores a la velocidad de la luz ($c = 299792,458 \text{ km s}^{-1}$). De acuerdo con esto, el desplazamiento aberracional es pequeño tanto para la variante diurna como para la anual, por lo cual siempre es posible aproximar el producto escalar $(\hat{s}_g \cdot \hat{s}_a) \approx 1$ en la Ecuación 3.4. A partir de esto, obtenemos

$$\vec{ds} = \hat{s}_a - \hat{s}_g = -\frac{1}{c} [\hat{s}_g(\hat{s}_g \cdot \vec{V}) - \vec{V}] \quad (3.5)$$

Esta es la ecuación vectorial con la cual vamos a trabajar para afrontar la resolución de una transformación de coordenadas por efectos de aberración. De acuerdo a lo expresado en el párrafo anterior, es muy importante destacar que esta ecuación puede ser utilizada para corregir las coordenadas de una estrella tanto por efectos de aberración diurna como por efectos de aberración anual.

A partir de la Ecuación 3.5, la cual tiene un carácter puramente vectorial, nos preguntamos cómo es posible obtener la variación de las coordenadas angulares de una estrella asociadas a un dado sistema por efectos de la aberración. Por ejemplo, trabajando en el sistema horizontal, deseamos obtener los cambios en acimut $dA=A_a-A_g$ y altura $dh=h_a-h_g$, donde los subíndices a y g representan las coordenadas asociadas a las posiciones aparente y geométrica de la estrella en consideración, respectivamente.

Trabajando en un Sistema de Referencia Horizontal, el versor de la posición geométrica de la estrella se escribe como $\hat{s}_g=(\cos h_g \cos A_g, -\cos h_g \sin A_g, \sin h_g)$, siendo A_g y h_g el acimut y la altura geométricas de la misma, respectivamente. Asumiendo además que el vector velocidad del observador en el sistema horizontal se expresa como $\vec{V}=(V_x, V_y, V_z)$, y que el vector diferencial $d\vec{s}=\hat{s}_a-\hat{s}_g$ se escribe

$$ds_x = -\sin h_g \cos A_g dh - \cos h_g \sin A_g dA \quad (3.6)$$

$$ds_y = \sin h_g \sin A_g dh - \cos h_g \cos A_g dA \quad (3.7)$$

$$ds_z = \cos h_g dh \quad (3.8)$$

es posible escribir los cambios dA y dh en las coordenadas horizontales de una estrella por efecto de la aberración mediante

$$dA = A_a - A_g = -\frac{1}{c}(V_x \sin A_g + V_y \cos A_g) \sec h_g \quad (3.9)$$

$$dh = h_a - h_g = -\frac{1}{c}(V_x \sin h_g \cos A_g - V_y \sin h_g \sin A_g - V_z \cos h_g) \quad (3.10)$$

Siguiendo la misma línea de trabajo, es posible derivar relaciones análogas para los cambios en las coordenadas angulares asociadas a los Sistemas Ecuatorial Local, Ecuatorial Celeste y Ecliptical. En efecto, asumiendo que el vector velocidad del observador $\vec{V}=(V_x, V_y, V_z)$ se escribe en el sistema de coordenadas seleccionado, los cambios generados por efectos de la aberración en ángulo horario dt y declinación $d\delta$ (sistema ecuatorial local), en ascensión recta $d\alpha$ y declinación $d\delta$ (sistema ecuatorial celeste), y en longitud $d\lambda$ y latitud $d\beta$ eclipticales (Sistema Ecliptical) son escritos como

$$dt = t_a - t_g = -\frac{1}{c}(V_x \sin t_g + V_y \cos t_g) \sec \delta_g \quad (3.11)$$

$$d\delta = \delta_a - \delta_g = -\frac{1}{c}(V_x \sin \delta_g \cos t_g - V_y \sin \delta_g \sin t_g - V_z \cos \delta_g) \quad (3.12)$$

$$d\alpha = \alpha_a - \alpha_g = -\frac{1}{c}(V_x \operatorname{sen} \alpha_g - V_y \operatorname{cos} \alpha_g) \operatorname{sec} \delta_g \quad (3.13)$$

$$d\delta = \delta_a - \delta_g = -\frac{1}{c}(V_x \operatorname{sen} \delta_g \operatorname{cos} \alpha_g + V_y \operatorname{sen} \delta_g \operatorname{sen} \alpha_g - V_z \operatorname{cos} \delta_g) \quad (3.14)$$

$$d\lambda = \lambda_a - \lambda_g = -\frac{1}{c}(V_x \operatorname{sen} \lambda_g - V_y \operatorname{cos} \lambda_g) \operatorname{sec} \beta_g \quad (3.15)$$

$$d\beta = \beta_a - \beta_g = -\frac{1}{c}(V_x \operatorname{sen} \beta_g \operatorname{cos} \lambda_g + V_y \operatorname{sen} \beta_g \operatorname{sen} \lambda_g - V_z \operatorname{cos} \beta_g) \quad (3.16)$$

donde los subíndices a y g hacen referencia a coordenadas aparentes y geométricas de la estrella en cuestión, respectivamente.

A continuación, describiremos cómo estas ecuaciones son utilizadas para analizar los cambios en las coordenadas de una estrella tanto por efectos de la aberración diurna como de la aberración anual.

Aberración diurna

Como ya hemos mencionado al inicio del presente capítulo, el movimiento rotacional de un observador sobre la Tierra nos conduce a corregir las coordenadas de una estrella por efectos de la aberración diurna. En este marco de trabajo, la posición geométrica de la estrella será aquella asociada con un Topocentro en reposo, mientras que la posición aparente de dicha estrella será aquella asociada con el Topocentro en movimiento. Como ya mencionamos previamente, siempre asumiremos que la posición geométrica de la estrella será el dato conocido de nuestro ejercicio, mientras que la posición aparente será la incógnita a resolver.

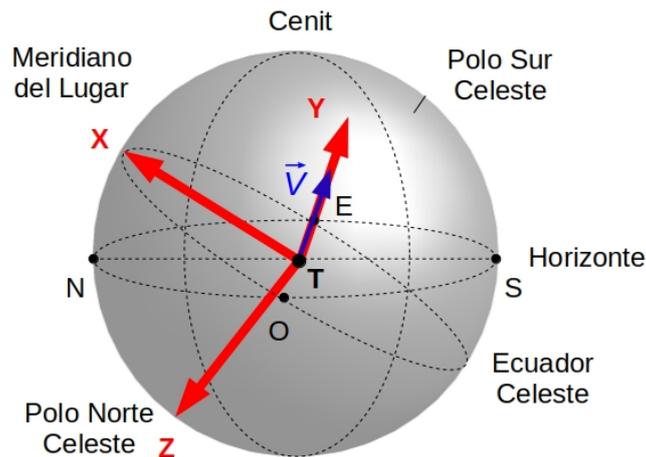
En este escenario de trabajo, el vector velocidad del observador tiene dirección Este en cada instante. Dado que los Sistemas Horizontal y Ecuatorial Local tienen el eje cartesiano Y en la dirección del punto cardinal Este, las componentes cartesianas del vector velocidad del Topocentro en dichos sistemas se representan de manera muy sencilla. De acuerdo con esto, iniciaremos nuestro análisis sobre los efectos de la aberración diurna en las coordenadas de una estrella trabajando en alguno de estos dos sistemas. Debido a la analogía en el tratamiento matemático requerido en ambos sistemas, trabajaremos sólo en el sistema ecuatorial local.

La Figura 3.2 ilustra una esfera celeste Topocéntrica, junto con los ejes cartesianos asociados a un sistema ecuatorial local. Como ya hemos destacado en capítulos previos, la dirección del eje X de dicho sistema coincide con la intersección del Ecuador Celeste y el Meridiano Superior del Lugar, el eje Y va hacia el punto cardinal Este, mientras que el eje Z se dirige hacia el Polo Norte Celeste. Dado que el vector velocidad del Topocentro tiene dirección

Este en cada instante, sus componentes cartesianas en el sistema ecuatorial local son escritas como $\vec{V}_{Ec.L}=(0, V, 0)$.

Figura 3.2.

Ejes cartesianos del sistema ecuatorial local en una esfera celeste topocéntrica.



Nota. El vector velocidad del observador tiene dirección Este y es representado por \vec{V} .

A partir de esto, las Ecuaciones 3.11 y 3.12 nos permiten derivar expresiones sencillas para los cambios generados por efectos de la aberración diurna en el ángulo horario dt y declinación $d\delta$ de una estrella dada, los cuales se escriben como

$$dt = t_a - t_g = -\frac{V}{c} \cos t_g \sec \delta_g \quad (3.17)$$

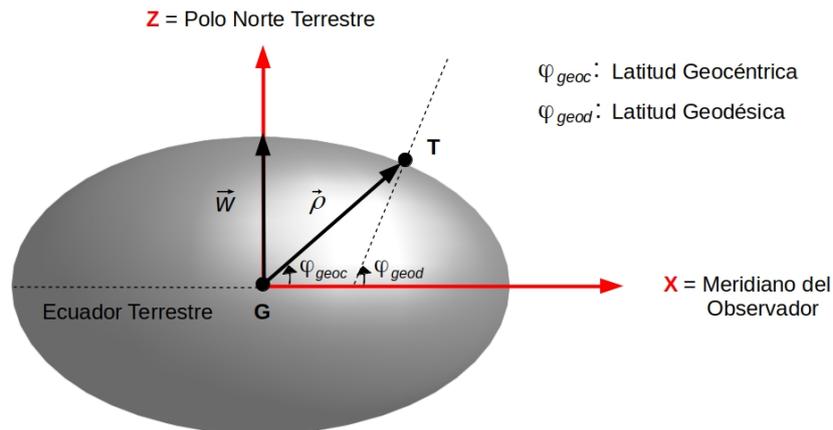
$$d\delta = \delta_a - \delta_g = \frac{V}{c} \sin t_g \sin \delta_g \quad (3.18)$$

donde los subíndices a y g hacen referencia a coordenadas aparentes y geométricas de la estrella, respectivamente. Estas ecuaciones tienen una forma muy simple y dependen de la magnitud del vector velocidad del Topocentro $V=|\vec{V}|$. Ahora bien, la magnitud del vector velocidad depende de la latitud del observador, por lo cual necesitamos encontrar una expresión que demuestre explícitamente dicha dependencia. Para hacer esto, recurriremos al Modelo de Elipsoide que representa a la Tierra, el cual fue ya presentado en el Capítulo anterior dedicado a describir el efecto de Paralaje.

Tal como mencionamos, la forma matemática adoptada para la Tierra está dada por el elipsoide de revolución World Geodetic System 1984 (WGS84), el cual posee un semieje mayor $a=6378,137\text{km}$ y un achatamiento $f=1/298,257223563$.

Figura 3.3.

Representación del elipsoide de revolución World Geodetic System 1984 (WGS84).



Nota. Los ejes cartesianos de color rojo ilustran el Sistema Terrestre, mientras que $\vec{\rho}$ y \vec{w} representan el vector posición geocéntrico del topocentro y el vector velocidad angular de rotación de la Tierra, respectivamente. Adaptado de *Spherical Astronomy* (p. 97), de R. M. Green, 1985, Cambridge University Press.

La Figura 3.3 muestra una representación esquemática de dicho elipsoide, junto con el vector posición geocéntrico del Topocentro $\vec{\rho}$, el vector velocidad angular de rotación de la Tierra \vec{w} , y las latitudes geocéntrica y geodésica del Topocentro φ_{geoc} y φ_{geod} , respectivamente. Además, en dicha figura son ilustrados los ejes cartesianos del Sistema de Referencia Terrestre, donde el eje Z apunta hacia el Polo Norte Terrestre, el eje X tiene la dirección del Meridiano Geodésico del Observador, y el eje Y, el cual no está representado, se posiciona formando una terna directa.

A partir de las variables introducidas en la Figura 3.3, el vector velocidad de rotación del Topocentro está dado por $\vec{V} = \vec{w} \times \vec{\rho}$. De acuerdo con esto, la magnitud de dicho vector puede ser calculada a partir de la expresión $V = |\vec{V}| = |\vec{w}| |\vec{\rho}| \sin(90^\circ - \varphi_{geoc}) = |\vec{w}| |\vec{\rho}| \cos \varphi_{geoc}$. Dado que la latitud geocéntrica del Topocentro φ_{geoc} no resulta ser dato, debemos expresar la magnitud del vector velocidad del observador en términos de la latitud geodésica φ_{geod} . Teniendo en cuenta las Ecuaciones 2.10, 2.11, y 2.12 presentadas en el Capítulo anterior,

$|\dot{\rho}| \cos \varphi_{geoc} = C \cos \varphi_{geod} = a [\cos^2 \varphi_{geod} + (1-f)^2 \sin^2 \varphi_{geod}]^{-1/2} \cos \varphi_{geod}$ (Green 1985, p. 98), con lo cual la magnitud del vector velocidad del Topocentro podrá expresarse como

$$V = |\vec{w}| a [\cos^2 \varphi_{geod} + (1-f)^2 \sin^2 \varphi_{geod}]^{-1/2} \cos \varphi_{geod} \quad (3.19)$$

Es importante mencionar que la Ecuación 3.19 es sumamente útil ya que cuantifica la magnitud del vector velocidad del Topocentro en función de datos conocidos. Reemplazando la Ecuación 3.19 en las Ecuaciones 3.17 y 3.18, obtenemos los cambios generados por efectos de la aberración diurna en el ángulo horario dt y declinación $d\delta$ de una estrella dada en función de las coordenadas geométricas t_g y δ_g , de la latitud geodésica del Topocentro φ_{geod} , de los parámetros del elipsoide WGS84 a y f , y de la velocidad de la luz c . Las expresiones resultantes se escriben como

$$dt = t_a - t_g = -\frac{|\vec{w}|a}{c} [\cos^2 \varphi_{geod} + (1-f)^2 \sin^2 \varphi_{geod}]^{-1/2} \cos \varphi_{geod} \cos t_g \sec \delta_g \quad (3.20)$$

$$d\delta = \delta_a - \delta_g = \frac{|\vec{w}|a}{c} [\cos^2 \varphi_{geod} + (1-f)^2 \sin^2 \varphi_{geod}]^{-1/2} \cos \varphi_{geod} \sin t_g \sin \delta_g \quad (3.21)$$

El primer término presente en ambas ecuaciones representa el cociente entre la velocidad de rotación de la Tierra para un observador situado en el Ecuador $|\vec{w}|a = 0,464 \text{ km s}^{-1}$ y la velocidad de la luz $c = 299792,458 \text{ km s}^{-1}$. Dicho cociente nos define la constante de aberración diurna en el Ecuador $k_{d,E} = 0,32'' = 0,0213^s$ (Smart, 1977, p. 191). En función de la misma, las ecuaciones finales que representan los cambios generados por efectos de la aberración diurna en el ángulo horario dt y declinación $d\delta$ de una estrella están dadas por

$$dt = t_a - t_g = -k_{d,E} [\cos^2 \varphi_{geod} + (1-f)^2 \sin^2 \varphi_{geod}]^{-1/2} \cos \varphi_{geod} \cos t_g \sec \delta_g \quad (3.22)$$

$$d\delta = \delta_a - \delta_g = k_{d,E} [\cos^2 \varphi_{geod} + (1-f)^2 \sin^2 \varphi_{geod}]^{-1/2} \cos \varphi_{geod} \sin t_g \sin \delta_g \quad (3.23)$$

(Smart, 1977, p. 192). Es importante mencionar una vez más que los cambios en las coordenadas horizontales de una estrella por efectos de la aberración diurna admiten un procedimiento matemático análogo al desarrollado para el sistema ecuatorial local dado que las componentes cartesianas del vector velocidad del Topocentro en el sistema horizontal son equivalentes a aquellas del sistema ecuatorial local. Esto se debe a que, como ya indicamos, el vector velocidad del Topocentro siempre tiene dirección Este, y ambos sistemas tienen sus ejes Y en dicha dirección. De acuerdo con esto, los cambios generados por efectos de la aberración diurna en el acimut dA y altura dh de una estrella se escriben como

$$dA = A_a - A_g = -k_{d,E} [\cos^2 \varphi_{geod} + (1-f)^2 \sin^2 \varphi_{geod}]^{-1/2} \cos \varphi_{geod} \cos A_g \sec h_g \quad (3.24)$$

$$dh = h_a - h_g = k_{d,E} [\cos^2 \varphi_{geod} + (1-f)^2 \sin^2 \varphi_{geod}]^{-1/2} \cos \varphi_{geod} \sin A_g \sin h_g \quad (3.25)$$

donde los subíndices a y g hacen referencia a coordenadas aparentes y geométricas, respectivamente.

Para obtener los cambios en las coordenadas ecuatoriales celestes de una estrella por efectos de la aberración diurna debemos hacer uso de las Ecuaciones 3.13 y 3.14 con el vector velocidad del Topocentro expresado en el sistema ecuatorial celeste. Dado que tanto el eje Z asociado a dicho sistema como aquel del sistema ecuatorial local apuntan hacia el Polo Norte Celeste, que el eje X del sistema ecuatorial celeste está orientado hacia el equinoccio vernal y el eje X del sistema ecuatorial local apunta hacia la intersección del Ecuador Celeste con el Meridiano Superior del Lugar, las coordenadas cartesianas del vector velocidad del Topocentro en el sistema ecuatorial celeste se obtienen a partir de la expresión

$$\vec{V}_{Ec.Cel} = R_Z^{ret}(TSL) \vec{V}_{Ec.L} \quad (3.26)$$

donde $R_Z^{ret}(TSL)$ es la matriz de rotación retrógrada alrededor del eje Z un ángulo igual al Tiempo Sidéreo Local TSL , y $\vec{V}_{Ec.L}$ el vector velocidad del Topocentro en el sistema ecuatorial local, el cual se expresa como $\vec{V}_{Ec.L} = (0, V, 0)$, donde V está dado por la Ecuación 3.19. De acuerdo con esto, el vector velocidad del Topocentro en el sistema ecuatorial celeste está dado por

$$\vec{V}_{Ec.Cel} = \begin{pmatrix} -V \sin TSL \\ V \cos TSL \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Si reemplazamos cada una de las componentes cartesianas de este vector en las Ecuaciones 3.13 y 3.14, obtenemos que los cambios generados por efectos de la aberración diurna en la ascensión recta $d\alpha$ y declinación $d\delta$ de una estrella se expresan como

$$d\alpha = \alpha_a - \alpha_g = k_{d,E} [\cos^2 \varphi_{geod} + (1-f)^2 \sin^2 \varphi_{geod}]^{-1/2} \cos \varphi_{geod} \cos(TSL - \alpha_g) \sec \delta_g \quad (3.28)$$

$$d\delta = \delta_a - \delta_g = k_{d,E} [\cos^2 \varphi_{geod} + (1-f)^2 \sin^2 \varphi_{geod}]^{-1/2} \cos \varphi_{geod} \sin(TSL - \alpha_g) \sin \delta_g \quad (3.29)$$

donde, una vez más, los subíndices a y g hacen referencia a coordenadas aparentes y geométricas, respectivamente.

Finalmente, para calcular los cambios en las coordenadas eclípticas de una estrella por efectos de la aberración diurna tenemos que usar las Ecuaciones 3.15 y 3.16 con el vector velocidad del Topocentro expresado en el Sistema Eclíptico. Teniendo en cuenta que tanto el eje X asociado a dicho sistema como aquel del sistema ecuatorial celeste apuntan hacia el Equinoccio Vernal γ , que la dirección del eje Z del Sistema Eclíptico coincide con el Polo Norte Eclíptico y el eje Z del sistema ecuatorial celeste está orientado hacia el Polo Norte Celeste, las coordenadas cartesianas del vector velocidad del Topocentro \vec{V}_{Eclip} en el Sistema Eclíptico se calculan a partir de la ecuación

$$\vec{V}_{Eclip} = R_X^{dir}(\epsilon) \vec{V}_{Ec.Cel} \quad (3.30)$$

donde $R_X^{dir}(\epsilon)$ es la matriz de rotación directa alrededor del eje X un ángulo igual a la oblicuidad de la eclíptica ϵ , y $\vec{V}_{Ec.Cel}$ el vector velocidad del Topocentro en el sistema ecuatorial celeste, el cual está dado por la Ecuación 3.27. A partir de estas relaciones, el vector velocidad del Topocentro en el Sistema Eclíptico se escribe como

$$\vec{V}_{Eclip} = \begin{pmatrix} -V \operatorname{sen} TSL \\ V \cos TSL \cos \epsilon \\ -V \cos TSL \operatorname{sen} \epsilon \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

donde V está dado por la Ecuación 3.19. Si reemplazamos cada una de las componentes cartesianas del vector velocidad \vec{V}_{Eclip} en las Ecuaciones 3.15 y 3.16, obtenemos que los cambios generados por efectos de la aberración diurna en la longitud $d\lambda$ y latitud $d\beta$ eclípticas de una estrella están dados por

$$d\lambda = \lambda_a - \lambda_g = k_{d,E} [\cos^2 \varphi_{geod} + (1-f)^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_{geod}]^{-1/2} \cos \varphi_{geod} \\ \times (\operatorname{sen} TSL \operatorname{sen} \lambda_g + \cos TSL \cos \epsilon \cos \lambda_g) \sec \beta_g \quad (3.32)$$

$$d\beta = \beta_a - \beta_g = k_{d,E} [\cos^2 \varphi_{geod} + (1-f)^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_{geod}]^{-1/2} \cos \varphi_{geod} \\ \times [\operatorname{sen} TSL \operatorname{sen} \beta_g \cos \lambda_g - \cos TSL (\cos \epsilon \operatorname{sen} \beta_g \operatorname{sen} \lambda_g + \operatorname{sen} \epsilon \cos \beta_g)] \quad (3.33)$$

donde, nuevamente, los subíndices a y g se refieren a coordenadas aparentes y geométricas, respectivamente.

Es importante destacar que el tratamiento matemático desarrollado hasta aquí para calcular las correcciones en las coordenadas de una estrella por efectos de la aberración diurna en los diferentes sistemas de trabajo representa un planteo de resolución riguroso.

Aberración anual

Debido al movimiento de traslación del Geocentro alrededor del Baricentro del Sistema Solar es necesario corregir las coordenadas de una estrella por efectos de la aberración anual. En este escenario, la posición geométrica de una estrella será aquella asociada con un Geocentro en reposo, mientras que la posición aparente de dicha estrella será aquella referida al Geocentro en movimiento. Al igual que lo manifestado en el estudio de la variante diurna, la posición geométrica de una estrella siempre será asumida como el dato conocido en el esquema de resolución, mientras que la posición aparente de la misma será la incógnita a determinar.

Los cambios en las coordenadas ecuatoriales celestes ascensión recta $d\alpha$ y declinación $d\delta$ de una estrella producidos por los efectos de la aberración anual pueden ser calculados a partir de las Ecuaciones 3.13 y 3.14, respectivamente. Para hacer esto, el vector velocidad del observador \vec{V} presente en dichas expresiones, el cual representa la velocidad baricéntrica del Geocentro, debe ser expresado en el sistema ecuatorial celeste. Desde un punto de vista práctico, el cálculo de los cambios $d\alpha$ y $d\delta$ para una estrella en un instante dado es un procedimiento sencillo ya que las coordenadas cartesianas del vector velocidad baricéntrico del Geocentro referidas al sistema ecuatorial celeste están tabuladas día por día en el Astronomical Almanac en unidades de UA día⁻¹.

De modo análogo, las Ecuaciones 3.15 y 3.16 nos permiten calcular los cambios en las coordenadas eclípticas longitud $d\lambda$ y latitud $d\beta$ de una estrella producidos por los efectos de la aberración anual. Para ello, debemos expresar las coordenadas cartesianas del vector velocidad baricéntrico del Geocentro en el Sistema Eclíptico. Cumplir con esta tarea requiere tomar el vector velocidad baricéntrico del Geocentro en el sistema ecuatorial celeste tabulado en el Astronomical Almanac, y expresarlo en el Sistema Eclíptico a partir del procedimiento matricial de la Ecuación 3.30.

Al igual que lo planteado en el Capítulo anterior concerniente a los efectos de paralaje anual, si trabajamos con la hipótesis de que el Geocentro se mueve sobre una órbita circular y sin perturbaciones alrededor del Baricentro del Sistema Solar, las ecuaciones que nos brindan los cambios en las coordenadas eclípticas de una estrella por efectos de aberración anual adoptarán una forma muy simple.

De acuerdo a lo ilustrado en la Figura 3.4, si el Geocentro G se mueve sobre una órbita circular y sin perturbaciones, el vector velocidad baricéntrico del Geocentro en el Sistema Ecliptical se escribe como

$$\vec{V}=(V_x, V_y, V_z)=(V \cos \lambda_v, V \operatorname{sen} \lambda_v, 0) \quad (3.34)$$

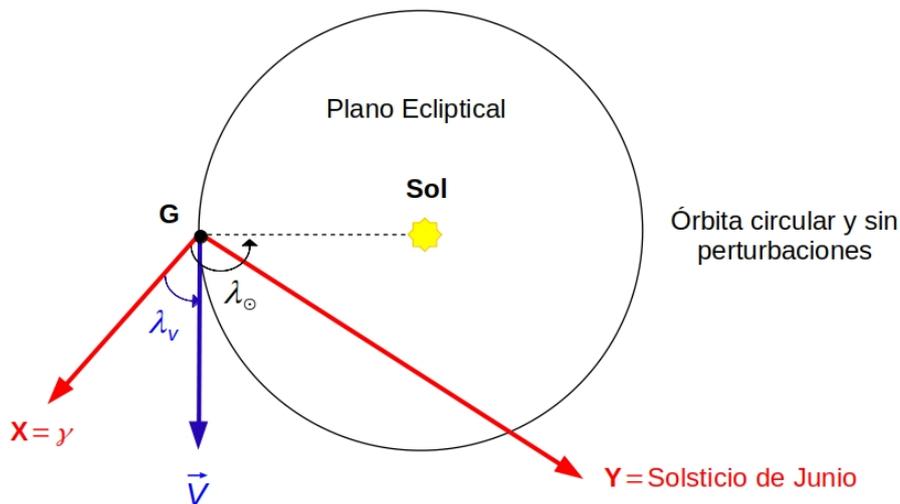
siendo λ_v la longitud ecliptical del vector velocidad \vec{V} . Dado que $\lambda_v=\lambda_\odot-90^\circ$, donde λ_\odot es la longitud ecliptical del Sol, entonces

$$\vec{V}=(V_x, V_y, V_z)=(V \operatorname{sen} \lambda_\odot, -V \cos \lambda_\odot, 0) \quad (3.35)$$

(Green, 1985, p. 191).

Figura 3.4.

Esquema del vector velocidad baricéntrico del Geocentro \vec{V} en el Sistema Ecliptical



Si reemplazamos estas expresiones para las componentes cartesianas del vector velocidad baricéntrico del Geocentro en las Ecuaciones 3.15 y 3.16, los cambios en las coordenadas eclipticales longitud $d\lambda$ y latitud $d\beta$ de una estrella por efectos de aberración anual podrán escribirse como

$$d\lambda=\lambda_a-\lambda_g=-\frac{V}{c} \cos (\lambda_\odot-\lambda_g) \sec \beta_g \quad (3.36)$$

$$d\beta=\beta_a-\beta_g=-\frac{V}{c} \operatorname{sen} (\lambda_\odot-\lambda_g) \operatorname{sen} \beta_g \quad (3.37)$$

donde el cociente entre la magnitud del vector velocidad baricéntrico del Geocentro V y la velocidad de la luz c define la constante de aberración anual $k_a=20.49552''$. Vale la pena mencionar que este valor de la constante es para J2000.0 y es obtenido utilizando el sistema de constantes de la Unión Astronómica Internacional (UAI) de 1976 (Green, 1985, p. 192). Estas ecuaciones simples nos permiten inferir que las coordenadas eclipticales aparentes de una estrella sufrirán cambios periódicos por efecto de la aberración anual a lo largo de un año. Trabajando de modo análogo a lo realizado en el Capítulo anterior para el tratamiento de la paralaje anual, si situamos un par de ejes cartesianos (x, y) con origen en la posición geométrica de la estrella, con x ubicado paralelo al plano de la eclíptica e y en la dirección del meridiano ecliptical de la estrella, $x=d \lambda \cos \beta_g$ mientras que $y=d \beta$. De acuerdo con esto y las Ecuaciones 3.36 y 3.37, es sencillo verificar que

$$\frac{(d \lambda \cos \beta_g)^2}{k_a^2} + \frac{(d \beta)^2}{(k_a \sin \beta_g)^2} = 1 \quad (3.38)$$

la cual representa la ecuación de una elipse. En efecto, dicha expresión nos permite inferir que la posición aparente de una estrella describe una elipse anual alrededor de su posición geométrica, la cual está definida por un semieje mayor igual a k_a , un semieje menor de $k_a \sin \beta_g$, y una excentricidad dada por $\cos \beta_g$. Es interesante notar que el semieje mayor de esta elipse aberracional será equivalente para todas las estrellas, mientras que el semieje menor y la excentricidad dependerán de la posición de la misma relativa a la eclíptica. De manera similar a aquello obtenido para el caso de la elipse paraláctica, la excentricidad de la elipse aberracional depende de la latitud ecliptical de modo tal que dicha elipse será más excéntrica para estrellas ubicadas en localizaciones más cercanas al plano de la eclíptica. De acuerdo con esto, por un lado, la posición aparente de estrellas ubicadas en los polos eclipticales describe una circunferencia de radio k_a alrededor de su posición geométrica dado que la excentricidad de la elipse aberracional es igual a cero. Por otra parte, ya que la Ecuación 3.37 muestra que las estrellas ubicadas en el plano de la eclíptica no tienen cambios en la latitud debido al efecto de aberración anual, la posición aparente de las mismas describe un segmento de longitud $2 k_a$ alrededor de su posición geométrica a lo largo de un año.

Aberración secular y planetaria

El tratamiento concerniente a la aberración diurna y anual descrito en las secciones previas asume que el astro bajo consideración no se desplaza respecto del Baricentro del

Sistema Solar. Sin embargo, esta no es una hipótesis estrictamente válida para las estrellas ni, menos aun, para los objetos de nuestro Sistema Solar. Si consideramos el desplazamiento de la fuente durante el tiempo luz es necesario profundizar la discusión para llevar a cabo un correcto tratamiento del problema. En este contexto hablamos de aberración secular y de aberración planetaria.

Como dijimos, asumir que una estrella se encuentra en reposo respecto del Baricentro del Sistema Solar es sólo una aproximación, ya que la misma experimentará en mayor o menor medida un desplazamiento durante el tiempo luz, el cual se hace evidente a través de su movimiento propio. Las correcciones en las coordenadas teniendo en cuenta el desplazamiento de la fuente estelar define la aberración secular. La incorporación de tales correcciones requiere de un conocimiento preciso del tiempo luz, ya que las mismas resultan ser proporcionales a dicho parámetro. Sin embargo, la baja precisión en la determinación de las distancias estelares, y por ende en el tiempo luz, lleva a que el efecto de la aberración secular no sea tenido en cuenta en los procedimientos prácticos (Green, 1985, p. 190).

La aberración planetaria hace referencia al efecto aberracional total sobre la posición de un astro de nuestro Sistema Solar considerando tanto el movimiento del observador como el desplazamiento de dicho astro durante el tiempo luz.

Para entender el efecto de la aberración planetaria, consideremos un observador O y un dado astro P , tal como se ilustran en la Figura 3.5. A diferencia de lo expuesto en la Figura 3.1, en este caso el astro en consideración se desplaza a una velocidad \vec{v}_p respecto de un sistema de referencia en reposo durante el tiempo luz τ . Luego, sean $\hat{s}_a(t)$ y $\hat{s}_g(t)$ los versores asociados a la posición aparente y a la posición geométrica del astro, ambas en el instante de observación t , y sea \vec{V} el vector velocidad del observador en el instante t referido a un sistema de referencia en reposo. Finalmente, sean $\vec{C}_g(t) = -c\hat{s}_g(t)$ y $\vec{C}_a(t) = -c\hat{s}_a(t)$ el vector velocidad de la radiación emitida por el astro referido a un observador en reposo y en movimiento localizado en $O(t)$, respectivamente, donde c es la velocidad de la luz.

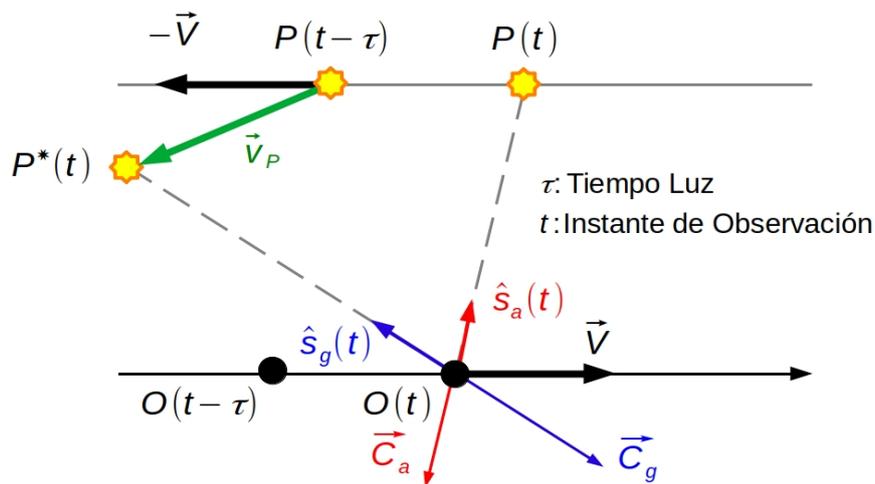
La Ecuación 3.5 representa la expresión vectorial a partir de la cual es posible obtener correcciones tanto por aberración diurna como por aberración anual. Vale la pena recordar que dicha ecuación fue construida asumiendo que el astro bajo estudio no se desplaza respecto del observador.

El vector \vec{V} presente en la Ecuación 3.5 representa el vector velocidad del observador respecto de un sistema de referencia en reposo, o equivalentemente, el vector velocidad del observador respecto del astro, el cual se encuentra en reposo. De acuerdo con esto, es posible adaptar la Ecuación 3.5 con el fin de calcular las correcciones en las coordenadas de un astro por efectos de la aberración planetaria. En efecto, si asumimos que tanto el observador como la

fuentes se desplazan con movimiento rectilíneo uniforme durante el tiempo luz, sólo la velocidad relativa entre ellos resulta ser relevante en el planteo.

Figura 3.5.

Representación esquemática general de la corrección por aberración planetaria.



A partir de las variables introducidas en la Figura 3.5, el vector velocidad del observador respecto del astro está dado por $\vec{V}-\vec{v}_p$. Luego, la ecuación vectorial con la cual vamos a trabajar para afrontar la resolución de una transformación de coordenadas por efectos de aberración planetaria estará dada por

$$\vec{ds} = \hat{s}_a - \hat{s}_g = -\frac{1}{c} \{ \hat{s}_g [\hat{s}_g \cdot (\vec{V} - \vec{v}_p)] - (\vec{V} - \vec{v}_p) \} \quad (3.39)$$

Esta ecuación debe ser utilizada para calcular los cambios en las coordenadas por efectos de aberración para objetos del Sistema Solar (Green, 1985, p. 190).

Referencias

Green, R. M. (1985). *Spherical Astronomy*, Cambridge University Press.
 Smart W. M. (1977) *Text-Book on Spherical Astronomy*, Sexta Edición, Cambridge University Press.

CAPÍTULO 4

Refracción atmosférica

Laura Isabel Fernández

La observación astronómica impone coleccionar la radiación electromagnética proveniente de los objetos celestes, y generalmente, los receptores de esa información se ubican en la superficie terrestre. Esta afirmación involucra a todos los instrumentos de observación desde nuestros ojos mirando al cielo estrellado o los telescopios, ambos capaces de captar radiación electromagnética en el rango visible¹, hasta las antenas que detectan información astronómica en el rango de frecuencias de radio². Lo último también vale para cualquier otra técnica de medición astronómica o geodésica que trabaje en el mismo rango de frecuencias, por ejemplo, los receptores de los sistemas de navegación global por satélite.

El arribo de la información al receptor en Tierra impone que la radiación electromagnética atraviese la atmósfera terrestre. En consecuencia el haz será refractado por la atmósfera y el camino óptico que la señal recorre se verá aumentado con respecto a la trayectoria que se asume rectilínea para su propagación en el vacío. Por este motivo, especialmente para los sistemas de observación que trabajan en frecuencias de radio, se suele referir a la refracción atmosférica sobre la señal como *retraso atmosférico*.

En este Capítulo trataremos los efectos de la atmósfera sobre los observables astronómicos medidos en distintas longitudes de onda, o lo que es lo mismo, medidos en distintos rangos de frecuencia del espectro electromagnético. En particular, trataremos los efectos en el rango visible y en el rango de microondas-radio.

Refracción atmosférica en el rango visible

La radiación electromagnética en el rango visible que provenga de cualquier objeto celeste debe atravesar la atmósfera antes de llegar al instrumento y/u ojo del observador en la

¹ También conocido como rango óptico. Comprende a las longitudes de onda entre 400 y 700 nanómetros

² Longitudes de onda mas largas que 1 centímetro (microondas) y tan largas como miles de metros (radio)

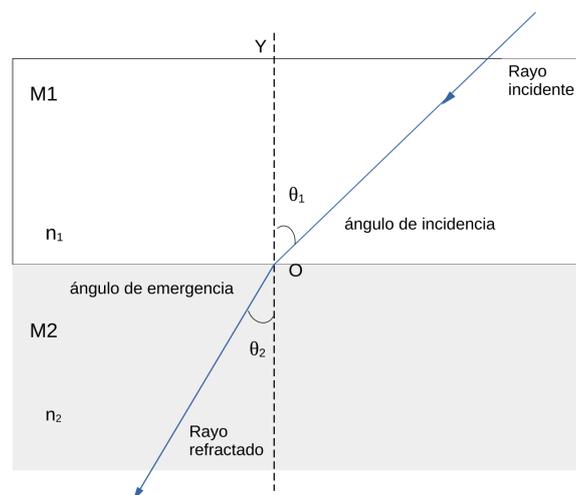
superficie terrestre. Debido a su cruce por la atmósfera, el camino óptico de la señal se modifica por el fenómeno de refracción.

Desde la figura 4.1, recordando que la refracción es el cambio en la dirección de propagación de una onda electromagnética como consecuencia de atravesar dos medios homogéneos (M1 y M2) con distinto índice de refracción (n_1 y n_2), si denominamos OY a la dirección perpendicular a ambos medios, la ley de Snell establece que (Miczaica y Sinton, 1967, p.15; Malacara, 2015, p. 34)

$$n_1 \text{ sen } \theta_1 = n_2 \text{ sen } \theta_2 \quad (4.1)$$

siendo θ_1 el ángulo de incidencia del rayo desde M1 y θ_2 el angulo de emergencia del rayo refractado en M2.

Figura 4.1.
Ley de Snell



Dado que la densidad del aire disminuye a medida que se incrementa la altura respecto a la superficie terrestre, es usual tratar a la atmósfera como un conjunto de capas esféricas concéntricas y estratificadas. Cada una de estas capas posee sus propias características físicas. En particular cada capa posee su propia densidad e índice de refracción que se asumen uniformes dentro de ella (Smart, 1962 p. 60).

Corrección aproximada: Modelo de capas plano paralelas

La corrección aproximada por refracción asume modelar la atmósfera según un modelo de capas estratificadas planas y paralelas. La aproximación se justifica en que el efecto de refracción más significativo se produce en la troposfera. En particular, dado que enfocamos este estudio al rango visible, la contribución a la refracción atmosférica desde las otras capas de la atmósfera puede despreciarse (Green, 1985, p. 83). La troposfera es la parte de la atmósfera más próxima a la superficie terrestre, es la más densa y tiene una extensión aproximada de 10 km. (Böhm y otros, 2013, p. 17). Por tal razón, dado que el radio de curvatura de la troposfera es mucho mayor que el espesor de la capa, este enfoque es válido para estimar el efecto de la refracción atmosférica en el rango visual. Sin embargo es obvio que esta aproximación ignora la curvatura de la Tierra, por lo tanto no es válida para cualquier caso. Este tratamiento del problema sólo es aceptable si el objeto observado esta muy cerca del cenit (Smart, 1962, p. 60).

Asumimos a la atmósfera compuesta con N capas planas estratificadas C_1, C_2, \dots, C_N , cada una de ellas con su respectivo índice de refracción $n_0, n_1, n_2, \dots, n_{N-1}$; siendo n_0 el máximo valor y n_{N-1} por encima de la capa más alta³. Sea z la distancia cenital topocéntrica de la luz incidente antes de atravesar la atmósfera. El rayo atraviesa las sucesivas capas cambiando su dirección en cada una de ellas. Matemáticamente, el efecto se expresa a través de sucesivas aplicaciones de la ley de Snell y considera que los respectivos valores de los índices de refracción aumentan a medida que la altura disminuye por un crecimiento acorde en la densidad atmosférica (Smart, 1962, p. 61).

Luego de atravesar la troposfera, el rayo refractado alcanzará al observador (O) con una distancia cenital observada z_0 (ver figura 4.2).

$$\begin{aligned}
 n \operatorname{sen} z &= n_{N-1} \operatorname{sen} z_{N-1} \\
 n_{N-1} \operatorname{sen} z_{N-1} &= n_{N-2} \operatorname{sen} z_{N-2} \\
 n_{N-2} \operatorname{sen} z_{N-2} &= n_{N-3} \operatorname{sen} z_{N-3} \\
 n_{N-3} \operatorname{sen} z_{N-3} &= n_{N-4} \operatorname{sen} z_{N-4} \\
 &\dots \\
 n_1 \operatorname{sen} z_1 &= n_0 \operatorname{sen} z_0
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

dado que la cantidad $n_i \operatorname{sen} z_i$ se conserva en cada nivel, y reemplazando n_{N-1} quedará

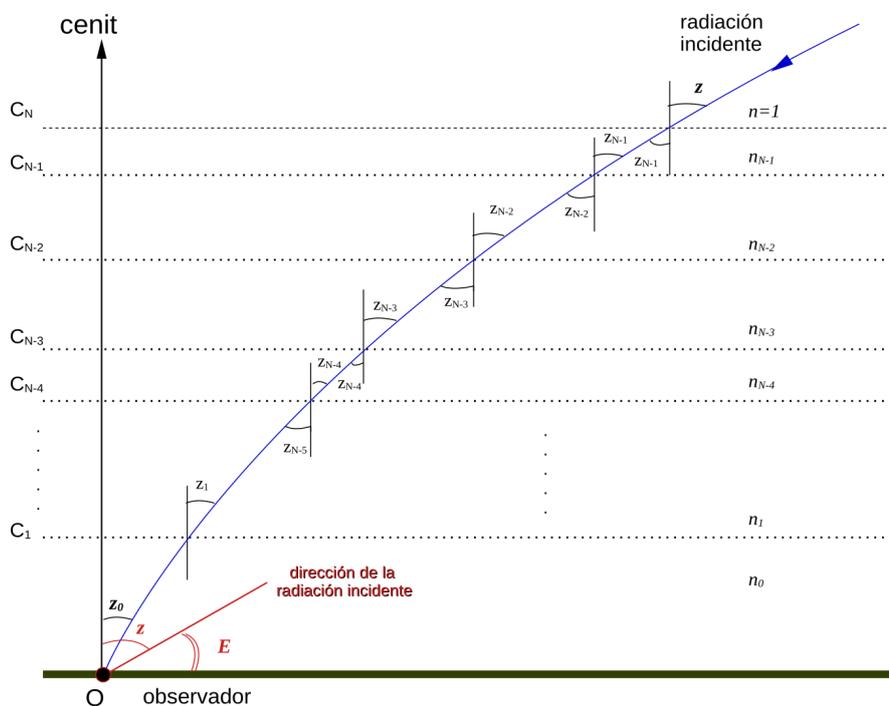
$$\operatorname{sen} z = n_0 \operatorname{sen} z_0
 \tag{4.3}$$

³ Índice de refracción que corresponde al vacío

donde n_0 es el índice de la refracción en la superficie terrestre y es mayor a 1. Por lo anterior podemos concluir fácilmente que la distancia cenital observada (z_0) será menor que la distancia cenital incidente (z). Por lo tanto, y a causa de la atmósfera, *el astro será observado más cerca del cenit*. Asimismo, y dado que la refracción ocurre en un plano vertical, el acimut de la fuente no estará afectado (Green, 1985, p. 84).

Figura 4.2.

Esquema de propagación de la radiación en un modelo de atmósfera de capas planas y paralelas



Nota. Adaptado de *Textbook on Spherical Astronomy* (p. 60), de W. M. Smart, 1977, Cambridge University Press.

Denominamos *ángulo de refracción* a la cantidad $R = z - z_0$. Reemplazando en la ecuación (4.3), y expresando los ángulos en radianes podemos aproximar como

$$\begin{aligned} \sin(R + z_0) &= n_0 \sin z_0 \\ \sin R \cos z_0 + \cos R \sin z_0 &= n_0 \sin z_0 \\ R \cos z_0 + \sin z_0 &\approx n_0 \sin z_0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$R \approx (n_0 - 1) \operatorname{tg} z_0 \quad (4.5)$$

Estas expresiones serán válidas sólo al primer orden de $(n_0 - 1)$ (Green, 1985, p. 84) y bajo todas las restricciones que se mencionaron más arriba. En general, puede aceptarse su validez para distancias cenitales menores a 45° (Smart, 1962, p. 62).

Un análisis un poco más cuidadoso de la ecuación (4.5) advierte que el valor de R no es una constante dado que el índice de refracción en la superficie terrestre depende tanto de las condiciones atmosféricas locales como de la longitud de onda de la radiación incidente.

Con el objetivo de cuantificar el efecto, suelen proveerse valores válidos para condiciones estándar, esto es: 1013 hPa de presión atmosférica y 20° C de temperatura. Considerando el centro del rango visual del espectro electromagnético, resulta un valor del índice de refracción $n_0 = 1.002927$ (Woolard y Clemence, 1966, p. 83; Green, 1985, p. 85). De este modo, si llamamos *constante de refracción media* (K) al argumento de la tangente de la distancia cenital observada en la fórmula (4.5), y reemplazamos los valores para condiciones estándar quedará (Green, 1985, p. 85)

$$\begin{aligned} R &\approx K \operatorname{tg} z_0 \\ R &\approx 60.4'' \operatorname{tg} z_0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Nótese que, por razones prácticas, K fue multiplicada por el factor (206265) con el objeto de expresarla en segundos de arco. Es posible calcular la constante de refracción utilizando datos atmosféricos reales a partir de la aplicación de la ley de Gladstone-Dale que vincula en índice de refracción con la densidad

$$n - 1 = K(\lambda) \rho \quad (4.7)$$

donde λ es la longitud de onda de la radiación incidente y ρ la densidad del gas (Merzkirch, 1987, p. 118-119). Por lo anterior, si se tratara al aire como un gas ideal

$$n - 1 = K(\lambda) (MP/R_v T) \quad (4.8)$$

donde R_v es la constante universal de los gases, M la masa molar, P la presión atmosférica y T la temperatura. De modo que generalizando la expresión anterior, podemos escribir

$$n_0 - 1 \propto \left(\frac{P}{760} \right) \left(\frac{1}{t+273} \right) \quad (4.9)$$

donde P está expresado en [mmHg] y t en [°C]. Luego en términos de las condiciones estándar⁴, y usando la ecuación (4.9), obtenemos (Green, 1985, p. 85)

$$R \approx 60,4'' \frac{(P/760)}{[1/(t+273)]} \operatorname{tg} z_0 \quad (4.10)$$

Modelo de capas concéntricas

Hemos visto que el tratamiento de la atmósfera como una sucesión de capas planas constituye una aproximación y su aplicación está limitada a observaciones en un entorno del cenit. Sin embargo, el modelo de capas planas y paralelas puede considerarse como una aproximación válida para $z \geq 45^\circ$ de un modelo más general que asume a la atmósfera como una sucesión de capas esféricas, concéntricas y estratificadas. Nuevamente, en este modelo de atmósfera radialmente simétrica cada capa (i) posee su propio índice de refracción (n_i). Por lo tanto, como a medida que crece la altura respecto de la superficie de la Tierra la densidad del aire disminuye, lo mismo hace el índice de refracción hasta llegar al límite $n=1$.

Siguiendo la deducción de Smart (1962, p. 62-65), en la figura (4.3), llamamos GOZ la dirección al cenit geocéntrico siendo G el Geocentro. Para 2 capas adyacentes C' y C , sean n' y n sus respectivos índices de refracción. En el punto A, el rayo incidente desde la capa C' , entra a la capa C y emerge de ella refractado en el punto F. Similar al tratamiento anterior, asumiendo que las sucesivas capas estratificadas son finas, este proceso se repite hasta que el rayo refractado alcanza al observador con una distancia cenital geocéntrica z_0 .

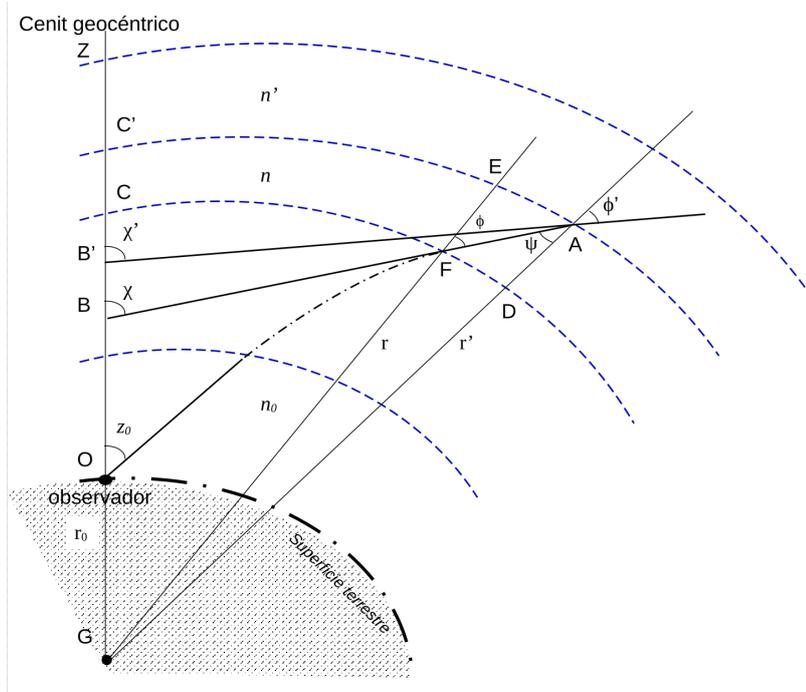
Denominaremos r' , r y r_0 a las distancias geocéntricas de los puntos A, F y la posición del observador; y denominaremos θ' y θ a los ángulos \widehat{AGZ} y \widehat{FGZ} , de tal modo que los puntos A y F poseen coordenadas polares (r', θ') y (r, θ) , respectivamente. Dado que las direcciones radiales son perpendiculares a cada una de las capas, podemos aplicar la ley de Snell

$$n' \operatorname{sen} \phi' = n \operatorname{sen} \psi \quad (4.11)$$

⁴ 760 mmHg=1013 hPa

Figura 4.3.

Propagación de la radiación en un modelo de atmósfera de capas finas concéntricas y radialmente simétrica.



Nota. Adaptado de *Textbook on Spherical Astronomy* (p. 63), de W. M. Smart, 1977, Cambridge University Press.

Considerando el triángulo plano GAF , el ángulo $\widehat{AFG} = 180^\circ - \phi$ luego aplicando la ley del seno para triángulos planos quedará

$$r \operatorname{sen} \phi = r' \operatorname{sen} \psi \quad (4.12)$$

Reemplazando $\operatorname{sen} \psi$ desde la ecuación (4.12) en la fórmula (4.11)

$$nr \operatorname{sen} \phi = n' r' \operatorname{sen} \phi' \quad (4.13)$$

Esta relación se cumplirá en cada par de capas concéntricas hasta alcanzar al observador. Por esta razón, si la capa que contiene al observador y limita con la superficie de la Tierra tiene

índice de refracción n_0 , a partir de (4.13) y aplicando recursivamente la ley de Snell podemos llegar a la fórmula general

$$\begin{aligned}nr \operatorname{sen} \phi &= n_0 r_0 \operatorname{sen} z_0 \\nr \operatorname{sen} \phi &= n_0 a_e \operatorname{sen} z_0\end{aligned}\tag{4.14}$$

donde $r_0 = a_e$, el radio ecuatorial terrestre. Dado que queremos encontrar la relación de la refracción con el cambio de la distancia cenital, evaluaremos el cambio relativo a la distancia cenital provocado por el efecto de la refracción de la luz al atravesar la capa C.

La dirección de la luz incidente en el punto A corta la dirección GZ en el punto B' formando el ángulo χ' . La dirección de la luz refractada (AF) corta a GZ en el punto B formando el ángulo χ . Luego

$$\Delta R = \chi' - \chi\tag{4.15}$$

Denominando $\Delta \theta = \theta' - \theta$ y asumiendo a C como una capa fina, es válido expresar $r' = r + \Delta r$ y $FD = EA = r \Delta \theta$. Además, esto nos permite asumir que AEF es un triángulo rectángulo plano. Luego,

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \phi &= \frac{EA}{EF} \\ \operatorname{tg} \phi &= \frac{r \Delta \theta}{\Delta r}\end{aligned}\tag{4.16}$$

Si consideramos al triángulo plano $AB'G$, la suma de sus ángulos interiores será

$$\begin{aligned}\phi' + \theta' + (180^\circ - \chi') &= 180^\circ \\ \chi' &= \phi' + \theta'\end{aligned}\tag{4.17}$$

De modo análogo, para el triángulo ABG vale

$$\chi = \phi + \theta\tag{4.18}$$

Luego reemplazando (4.17) y (4.18) en la ecuación (4.15) y denominando $\Delta \phi = \phi' - \phi$, con $\Delta \phi$ un ángulo pequeño

$$\Delta R = \Delta \phi + \Delta \theta\tag{4.19}$$

Considerando que el índice de refracción $n=n(r)$ y que n aumenta a medida que r disminuye, podemos expresar $n'=n-\Delta n$. Luego, reemplazando n' , r' y ϕ' en la ecuación (4.13)

$$(n - \Delta n)(r + \Delta r) \sin(\phi + \Delta \phi) = nr \sin \phi \quad (4.20)$$

Desarrollando el seno de la suma, aproximando convenientemente las funciones trigonométricas de ángulos pequeños expresadas en radianes y despreciando los productos dobles de cantidades infinitesimales quedará

$$\begin{aligned} (nr - r\Delta n + n\Delta r)(\sin \phi + \Delta \phi \cos \phi) &= nr \sin \phi \\ nr \sin \phi - r \sin \phi \Delta n + n \sin \phi \Delta r + nr \cos \phi \Delta \phi &= nr \sin \phi \end{aligned} \quad (4.21)$$

Operando convenientemente sobre esta expresión obtenemos

$$(nr \sin \phi) \left(\frac{-\Delta n}{n} + \frac{\Delta r}{r} + \cotg \phi \Delta \phi \right) = 0 \quad (4.22)$$

Según la ecuación (4.16) podemos reemplazar $(\Delta r/r) = \Delta \theta \cotg \phi$ en (4.22) y quedará

$$\frac{\Delta n}{n} = (\Delta \theta + \Delta \phi) \cotg \phi \quad (4.23)$$

Usando (4.19)

$$\Delta R = \frac{\Delta n}{n} \operatorname{tg} \phi \quad (4.24)$$

Utilizando (4.14) para expresar $\sin(\phi)$ como $\sin \phi = n_0 a_e \sin z_0 / rn$, luego $\cos \phi = (rn)^{-1} \sqrt{r^2 n^2 - n_0^2 a_e^2 \sin^2 z_0}$ y reemplazando en (4.24)

$$\Delta R = \frac{\Delta n}{n} \frac{n_0 a_e \sin z_0}{\sqrt{r^2 n^2 - n_0^2 a_e^2 \sin^2 z_0}} \quad (4.25)$$

Recordemos que la fórmula (4.25) me provee la cantidad de refracción que afecta al rayo de luz desde una capa con índice de refracción $(n - \Delta n)$ al atravesar la capa con índice de

refracción n . Si integramos la ecuación (4.25) entre los límites 1 y n_0 obtendremos la cantidad total de refracción que afecta el camino del rayo de luz al atravesar la atmósfera.

$$R = n_0 a_e \sin z_0 \int_1^{n_0} \frac{dn}{n \sqrt{r^2 n^2 - n_0^2 a_e^2 \sin^2 z_0}} \quad (4.26)$$

Esta fórmula, que exige conocer la variación local del índice de refracción con la altura, admite integrarse numéricamente y es exacta (Smart, 1962, p 64.; Green, 1985, p. 89).

Desarrollo de la fórmula de refracción

La resolución de la integral en (4.26) exige considerar la altura de la atmósfera. Sabemos que la constante de refracción media (K) tiende a cero con la altura creciente dado que el índice de refracción (n) se acerca a 1 a medida que la altura crece (ver ecuación 4.7). Sin profundizar en los cálculos detallados de una altura de escala para la atmósfera en el sitio, consideraremos que la extensión vertical de la atmósfera⁵ es una cantidad muy pequeña comparada con el radio ecuatorial terrestre. Por esta razón será válido expresar $r = a_e + h$ siendo h una cantidad pequeña (Smart 1962, p.65; Green, 1985, p. 91).

De este modo, si trabajamos sobre el denominador de (4.26) y expresamos $(r/a_e) = 1 + s$, con s una cantidad pequeña, obtenemos

$$\begin{aligned} (r^2 n^2 - a_e^2 n_0^2 \sin^2 z_0)^{(-1/2)} &= [a_e^2 (1+s)^2 n^2 - a_e^2 n_0^2 \sin^2 z_0]^{(-1/2)} \\ &= a_e^{-1} [(1+s)^2 n^2 - n_0^2 \sin^2 z_0]^{(-1/2)} \end{aligned} \quad (4.27)$$

despreciando los términos que involucran s^2 ,

$$\begin{aligned} (r^2 n^2 - a_e^2 n_0^2 \sin^2 z_0)^{(-1/2)} &= a_e^{-1} [(1+2s)n^2 - n_0^2 \sin^2 z_0]^{(-1/2)} \\ &= a_e^{-1} \left[(n^2 - n_0^2 \sin^2 z_0) \left(1 + \frac{2sn^2}{n^2 - n_0^2 \sin^2 z_0} \right) \right]^{(-1/2)} \end{aligned} \quad (4.28)$$

reordenando y desarrollando en serie de Taylor al primer orden

⁵ Podemos estimar 10 km para la troposfera y 100 km si incluimos la termosfera recordando que esta última capa no representa un medio dispersivo para la luz visible

$$\begin{aligned}
 (r^2 n^2 - a_e^2 n_0^2 \text{sen}^2 z_0)^{(-1/2)} &= a_e^{-1} (n^2 - n_0^2 \text{sen}^2 z_0)^{(-1/2)} \left(1 + \frac{2 s n^2}{n^2 - n_0^2 \text{sen}^2 z_0} \right)^{(-1/2)} \\
 &= a_e^{-1} (n^2 - n_0^2 \text{sen}^2 z_0)^{(-1/2)} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{2 s n^2}{n^2 - n_0^2 \text{sen}^2 z_0} \right)
 \end{aligned} \quad (4.29)$$

reemplazando convenientemente en (4.26) quedará

$$R = n_0 a_e \text{sen} z_0 \int_1^{n_0} \frac{1}{n a_e \sqrt{n^2 - n_0^2 \text{sen}^2 z_0}} \left(1 - \frac{s n^2}{n^2 - n_0^2 \text{sen}^2 z_0} \right) d n \quad (4.30)$$

aplicando la propiedad distributiva y ordenando

$$R = R_1 - R_2 \quad (4.31)$$

donde

$$R_1 = n_0 \text{sen} z_0 \int_1^{n_0} \frac{d n}{n \sqrt{n^2 - n_0^2 \text{sen}^2 z_0}} \quad (4.32)$$

$$R_2 = n_0 \text{sen} z_0 \int_1^{n_0} \frac{s n d n}{(n^2 - n_0^2 \text{sen}^2 z_0)^{3/2}} \quad (4.33)$$

La solución de la integral R_1 es sencilla por el método de sustitución. Denominando $u = n_0 \text{sen} z_0 / n$, luego $du = -n_0 \text{sen} z_0 d n / n^2$ y quedará

$$R_1 = - \int_{n_0 \text{sen} z_0}^{\text{sen} z_0} \frac{d u}{\sqrt{1 - u^2}} \quad (4.34)$$

luego

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \arcsen \left(\frac{n_0 \text{sen} z_0}{n} \right) \Big|_1^{n_0} \\
 R_1 &= \arcsen (n_0 \text{sen} z_0) - z_0
 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Esta solución será válida sí y solo sí $|n_0 \text{sen} z_0| < n$, y dado que n_0 es el máximo valor del índice de refracción esto sólo puede cumplirse para astros localizados en un entorno del cenit,

muy lejos del horizonte. Podemos demostrar que R_1 es equivalente a la corrección aproximada por refracción asumiendo que la atmósfera admite modelarse según un modelo de capas planas y paralelas (Smart, 1962, p. 66).

Sabiendo que $n_0 > 1$ y expresando $n_0 = 1 + x$, con x una cantidad pequeña, la ecuación (4.35) puede reescribirse como

$$R_1(x) = \arcsen[(1+x)\sen z_0] - z_0 \quad (4.36)$$

Aplicando el teorema de Maclaurin al primer orden quedará

$$\begin{aligned} R_1 &= R_1(0) + x \left. \frac{dR_1}{dx} \right|_{x=0} \\ &= 0 + x \left. \frac{\sen z_0}{\sqrt{1 - (1+x)^2 \sen^2 z_0}} \right|_{x=0} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Reescribiendo

$$\begin{aligned} R_1 &= x \operatorname{tg} z_0 \\ R_1 &= (n_0 - 1) \operatorname{tg} z_0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

Como se mencionó más arriba, la expresión (4.38) sólo será válida para distancias cenitales pequeñas y es equivalente a la aproximación de capas planas y paralelas. Es necesario hacer un desarrollo de R_1 en serie de potencias de $(n_0 - 1)$ hasta el segundo orden (Green, 1985, p. 92) y quedará

$$R_1 = (n_0 - 1) \operatorname{tg} z_0 + \frac{1}{2} (n_0 - 1)^2 \operatorname{tg}^3 z_0 \quad (4.39)$$

La solución para R_2 exige la aplicación de la ley de Gladstone – Dale para expresar en índice de refracción en términos de la densidad del aire (ρ). Expresamos $n - 1 = c\rho$ siendo c una constante.

Siguiendo (Smart, 1962, p. 67), consideramos $n = n_0 = 1$ y $dn = c d\rho$ en la ecuación (4.33), quedará

$$\begin{aligned} R_2 &= \sen z_0 \int_0^{\rho_0} \frac{sc d\rho}{(1 - \sen^2 z_0)^{3/2}} \\ &= c \operatorname{tg} z_0 \sec^2 z_0 \int_0^{\rho_0} s d\rho \end{aligned} \quad (4.40)$$

De modo análogo, aplicamos la ley de Gladstone – Dale en la superficie y resulta $n_0 - 1 = c\rho_0$ donde ρ_0 es la densidad del aire en la superficie. Por lo tanto, la constante c resulta $c = (n_0 - 1)/\rho_0$. Por otro lado, recordamos que $r = a_e + h$ y $(r/a_e) = 1 + s$, por lo tanto $s = h/a_e$. Reemplazando los valores de c y s en (4.40) y resolviendo la integral por partes

$$R_2 = \frac{(n_0 - 1)}{\rho_0} \frac{1}{a_e} \operatorname{tg} z_0 \sec^2 z_0 \left(h \rho \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \rho dh \right) \quad (4.41)$$

Nótese que en la superficie terrestre $h=0$ y $\rho=\rho_0$, mientras que en el límite superior de la atmósfera $\rho=0$, por lo tanto, el primer término del segundo miembro de (4.41) será nulo. Por otro lado, el término integral de (4.41) representa la masa de una columna de aire de base unitaria que se extiende verticalmente desde la superficie hasta el límite superior de una atmósfera homogénea equivalente. Este término será una función de la temperatura y de la presión atmosférica pero independiente del comportamiento de la densidad con la altura (Smart, 1962, p. 67; Green, 1985, p. 92).

Si definimos la *altura equivalente de una atmósfera homogénea* (H_0) (Green, 1985, p. 92),

$$H_0 = \frac{1}{\rho_0} \int_0^{\infty} \rho dh \quad (4.42)$$

Reemplazando (4.42) en la ecuación (4.41)

$$R_2 = -(n_0 - 1) \operatorname{tg} z_0 \sec^2 z_0 \frac{H_0}{a_e} \quad (4.43)$$

Llamando $H = H_0/a_e$, resulta

$$R_2 = -(n_0 - 1) \operatorname{tg} z_0 (1 + \operatorname{tg}^2 z_0) H \quad (4.44)$$

Luego usando (4.39) y (4.44) podemos escribir (4.31) como

$$R = A \operatorname{tg} z_0 + B \operatorname{tg}^3 z_0 \quad (4.45)$$

donde (Woolard y Clemence, 1962, p. 83; Green, 1985, p. 93)

$$\begin{aligned} A &= (n_0 - 1)(1 - H) \\ B &= -(n_0 - 1)\left[H - \frac{1}{2}(n_0 - 1)\right] \end{aligned} \quad (4.46)$$

siendo A y B las *constantes de refracción*. En términos de los valores para las condiciones normales de presión y temperatura de una atmósfera estándar, la fórmula (4.46) puede escribirse como (Green, 1985, p. 94)

$$R = 60,29'' \operatorname{tg} z_0 - 0,06688'' \operatorname{tg}^3 z_0 \quad (4.47)$$

La determinación de los valores A y B exige conocer las condiciones meteorológicas del lugar que afectarán a n_0 . Sin embargo, la estimación de la influencia que estos cambios locales en el estado en la atmósfera ejercen sobre la cantidad de refracción que afecta a la trayectoria de la radiación es muy compleja. Asimismo, debe tenerse en cuenta que los cambios en la gravedad local afectarán el cálculo de la altura equivalente y por lo tanto, también tendrán incidencia en la estimación.

Históricamente, desde el siglo XVII en adelante, se utilizaron las *Tablas de Refracción*⁶. Estos cálculos estaban basados en teorías analíticas, usaban condiciones atmosféricas estándar para el sitio de observación y brindaban estimaciones válidas para distancias cenitales menores a 75° aproximadamente⁷. El lector interesado en la historia y construcción de las tablas de refracción puede consultar el texto de Woolard y Clemence (1966, p. 84-88).

Sin embargo A y B pueden estimarse a partir de las observaciones. Efectivamente, aplicando el método de Horrebow - Talcott⁸ es posible determinar la latitud geográfica del observatorio a partir de la culminación superior e inferior de estrellas⁹. Si en las correspondientes ecuaciones de observación se expresa la distancia cenital verdadera (z) del objeto en tránsito como $z = z_0 + A \operatorname{tg} z_0 + B \operatorname{tg}^3 z_0$, siendo z_0 la distancia cenital observada, A , B y la latitud de la estación serán incógnitas que pueden determinarse estadísticamente a partir del método de cuadrados mínimos (Smart, 1962 p. 68-69; Woolard y Clemence, 1966 p. 87; Green, 1985, p. 93).

Efecto de la refracción en las coordenadas ecuatoriales

⁶ Existen tablas de refracción estimadas por Tycho Brahe y mejoradas por Kepler. Sin embargo, estas tablas empíricas no fueron basadas en el estado físico de la atmósfera

⁷ no abordaremos en este texto el tratamiento de la refracción sobre orto y ocaso de los astros

⁸ también conocido como método de alturas iguales

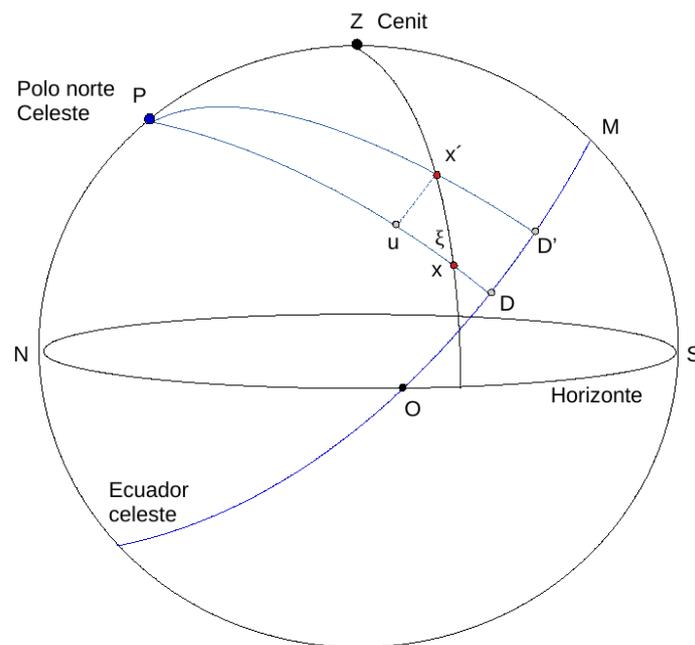
⁹ En general, estrellas circumpolares

Siguiendo Smart (1962, p. 71) repasaremos la corrección aproximada por refracción atmosférica en coordenadas ecuatoriales. Consideremos una estrella de coordenadas ecuatoriales locales (t, δ) ubicada en la posición x de la esfera celeste (ver figura 4.4), a causa de la refracción atmosférica se desplazará hacia el cenit hasta ocupar la posición x' de coordenadas (t', δ') , donde $t' = t + \Delta t$ y $\delta' = \delta + \Delta \delta$.

Sea z la distancia cenital de x y z' la distancia cenital de x' , respectivamente. Trazaremos por el punto x' un arco del paralelo de declinación δ' hasta intersectar perpendicularmente al círculo meridiano que pasa por x en el punto u . Dado que el desplazamiento xx' es muy pequeño, podemos considerar que el triángulo xux' es un triángulo rectángulo plano.

Figura 4.4.

Efecto de la refracción atmosférica en las coordenadas ecuatoriales



Nota. Adaptado de *Textbook on Spherical Astronomy* (p. 71), de W. M. Smart, 1977, Cambridge University Press.

Denominaremos ξ al ángulo paraláctico $P \hat{x} Z = \xi$,

$$ux' = xx' \text{ sen } \xi \quad (4.48)$$

$$ux = xx' \cos \xi \quad (4.49)$$

Dado que $xx' = R$, aproximaremos $xx' = K \operatorname{tg} z$ con K la constante de refracción. Reemplazando en (4.48) y (4.49) quedará

$$ux' = K \operatorname{tg} z \operatorname{sen} \xi \quad (4.50)$$

$$ux = K \operatorname{tg} z \cos \xi \quad (4.51)$$

Consideremos el triángulo esférico PZx , que tiene por lados $Px = (90^\circ - \delta)$, $Zx = z$ y $PZ = (90^\circ - \phi)$, siendo ϕ la latitud del sitio de observación. De la figura 4.4 puede verse que $Z\hat{P}x = t$, el ángulo horario. Dado que $Px' = 90^\circ - \delta'$, y que $Pu = Px'$, luego

$$\begin{aligned} Px &= Pu + ux \\ 90^\circ - \delta &= 90^\circ - \delta' + ux \\ ux &= \delta' - \delta \\ ux &= \Delta \delta \end{aligned} \quad (4.52)$$

Por otro lado, dado que ux' es un arco de círculo menor, y sabiendo que $DD' = MD - MD'$ y aproximando $\delta' \approx \delta$

$$\begin{aligned} ux' &= D\hat{P}D' \operatorname{sen}(90^\circ - \delta') \\ ux' &\approx DD' \cos \delta \\ ux' &\approx (t - t') \cos \delta \\ ux' &\approx -(\Delta t) \cos \delta \end{aligned} \quad (4.53)$$

Reemplazando (4.51) en (4.52) y (4.50) en (4.53) resulta

$$\Delta \delta = K \operatorname{tg} z \cos \xi \quad (4.54)$$

$$\Delta t \cos \delta \approx -K \operatorname{tg} z \operatorname{sen} \xi \quad (4.55)$$

Aplicando la fórmula del coseno al triángulo PZx se obtiene

$$\cos z = \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \delta + \cos \phi \cos \delta \cos t \quad (4.56)$$

Aplicando la fórmula del seno al mismo triángulo esférico quedará

$$\text{sen } \xi \text{ sen } z = \text{cos } \phi \text{ sen } t \quad (4.57)$$

Finalmente, aplicando la fórmula de los 5 elementos resulta

$$\text{sen } z \text{ cos } \xi = \text{sen } \phi \text{ cos } \delta - \text{cos } \phi \text{ sen } \delta \text{ cos } t \quad (4.58)$$

Reescribiendo (4.54) y reemplazando por las expresiones (4.58) y (4.56)

$$\Delta \delta = K \frac{\text{sen } z \text{ cos } \xi}{\text{cos } z}$$

$$\Delta \delta = K \frac{(\text{sen } \phi \text{ cos } \delta - \text{cos } \phi \text{ sen } \delta \text{ cos } t)}{(\text{sen } \phi \text{ sen } \delta + \text{cos } \phi \text{ cos } \delta \text{ cos } t)}$$

$$\Delta \delta = K \frac{\frac{1}{\text{cos } \phi \text{ cos } \delta} (\text{tg } \phi - \text{tg } \delta \text{ cos } t)}{\frac{1}{\text{cos } \phi \text{ cos } \delta} (\text{tg } \phi \text{ tg } \delta + \text{cos } t)}$$

$$\Delta \delta \simeq 60,4'' \frac{(\text{tg } \phi - \text{tg } \delta \text{ cos } t)}{(\text{tg } \phi \text{ tg } \delta + \text{cos } t)}$$

(4.59)

Análogamente, reescribiendo (4.55) y reemplazando por las expresiones (4.56) y (4.57)

$$\Delta t \simeq -K \frac{\text{sec } \delta \text{ sen } z \text{ sen } \xi}{\text{cos } z}$$

$$\Delta t \simeq -K \frac{\text{sec } \delta \text{ cos } \phi \text{ sen } t}{(\text{sen } \phi \text{ sen } \delta + \text{cos } \phi \text{ cos } \delta \text{ cos } t)}$$

Multiplicando numerador y denominador por $1/\text{cos } \phi \text{ cos } \delta$, simplificando y ordenando

$$\Delta t \simeq -K \frac{\frac{1}{\text{cos } \phi \text{ cos } \delta} \text{sec } \delta \text{ cos } \phi \text{ sen } t}{\frac{1}{\text{cos } \phi \text{ cos } \delta} (\text{sen } \phi \text{ sen } \delta + \text{cos } \phi \text{ cos } \delta \text{ cos } t)}$$

$$\Delta t \simeq -60,4'' \frac{\sec^2 \delta \sin t}{(\operatorname{tg} \phi \operatorname{tg} \delta + \cos t)} \quad (4.60)$$

De modo análogo, si denominamos $\Delta \alpha = \alpha' - \alpha$ y dado que $\Delta \alpha = -\Delta t$, dado que estas cantidades se miden en sentidos opuestos, luego la ecuación (4.60) puede expresarse como

$$\Delta \alpha \simeq 60,4'' \frac{\sec^2 \delta \sin t}{(\operatorname{tg} \phi \operatorname{tg} \delta - \cos t)} \quad (4.61)$$

Refracción atmosférica en ondas de radio

La mayor parte de las Técnicas de la Astrometría y Geodesia Espacial (TAGE¹⁰) trabajan en la región de microondas - radio del espectro electromagnético. Esto presenta algunas ventajas evidentes con respecto a la operación en el rango visible. Por ejemplo, las observaciones realizadas en este rango del espectro serán insensibles a las diferencias de iluminación del cielo entre el día y la noche y además admiten realizarse con marcada nubosidad, lluvia o incluso nieve (IERSTN23, 1997). De este modo puede asegurarse la operatividad de los sistemas durante las 24 horas del día a lo largo de todo el año¹¹.

En las sesiones precedentes hemos tratado el efecto de la atmósfera sobre el camino óptico de las señales electromagnéticas en el rango visible. Para ello, fue suficiente discutir la refracción como un problema que involucra a la baja atmósfera¹². Sin embargo, los efectos atmosféricos sobre las señales observadas en el rango de las ondas de radio requieren un tratamiento diferente.

Por un lado veremos que la refracción troposférica constituye una fuente de errores que debe ser compensada en el procesamiento de los datos. Sin embargo, desde los años 90 y a través un análisis cuidadoso del problema geodésico involucrado, se pueden usar las señales de los sistemas de navegación global por satélite (GNSS, del inglés Global Navigation Satellite Systems) como una confiable fuente de datos atmosféricos escasos o de difícil acceso para los meteorólogos: el contenido de vapor de agua precipitable integrado en un volumen elemental sobre el observador.

¹⁰ VLBI, GNSS, SLR, LLR, DORIS

¹¹ Característica imprescindible para la operatividad de los GNSS

¹² Básicamente, la troposfera

Por otro lado, en el caso de las ondas de radio no puede despreciarse la influencia de las capas superiores de la atmósfera. Efectivamente, la ionosfera¹³ constituye un medio dispersivo para la propagación de la radiación en este rango de longitudes de onda. Dicho de otro modo, la ionosfera realiza una importante contribución a la refracción en el caso de las ondas de microondas-radio dado que las propiedades refractivas de la señal se relacionan con la frecuencia del plasma.

A continuación veremos como puede estimarse la refracción atmosférica para los observables de las TAGE que operan en este rango del espectro. Trataremos la contribución a la refracción de la baja atmósfera (troposférica) y mencionaremos algunas palabras acerca de la refracción de la alta atmósfera (ionosférica), dado que su tratamiento excede los contenidos abordados en este texto.

Retrasos troposféricos

A diferencia de las observaciones en el rango visible donde se *miden* posiciones e importa el cambio relativo en las coordenadas observadas, las TAGE habitualmente miden el tiempo de viaje de la señal emitida desde la fuente hasta algún dispositivo receptor. Sabemos que si la señal viaja en el espacio vacío se propaga en línea recta y a velocidad conocida (c ¹⁴). Sin embargo, cuando la fuente está en el espacio (satélites artificiales, radiofuentes) y el receptor en la Tierra (antena GNSS, antena VLBI), la señal necesariamente debe atravesar la atmósfera terrestre.

Ya hemos visto que el análisis del camino óptico o de la propagación de una señal electromagnética a través de la atmósfera dependerá del índice de refracción del medio sin importar la aproximación matemática que se use para su modelado. Dado que la velocidad de propagación en el medio se relaciona con el índice de refracción a través de la fórmula (Seeber, 2003, p. 45)

$$n = \frac{c}{v} \tag{4.62}$$

Recordando que $n > 1$, en la ecuación (4.62) es fácil ver que la velocidad de propagación en la atmósfera será menor que en el vacío y por lo tanto la señal *tardará mas tiempo* en alcanzar al receptor. Por esta razón la refracción troposférica en micro ondas/radio ondas suele denominarse *retraso troposférico o retardo troposférico*.

¹³ Parte de la atmósfera que se extiende entre los 80 y los 400 km sobre la superficie terrestre

¹⁴ Velocidad de la luz

La troposfera es una mezcla de gases y vapor de agua donde no hay partículas cargadas y por lo tanto representa un medio no dispersivo para las ondas de radio. Por esta razón, el índice de refracción dependerá de la presión atmosférica, de la temperatura del aire y de la presión del vapor de agua, pero no de la frecuencia de la señal (Seeber, 2003, p. 48).

Dado que n es próximo a 1, se suele trabajar con la *refractividad* (N) (Smith y Weintraub, 1953)

$$N = 10^6(n - 1) \quad (4.63)$$

Para este rango de frecuencias en particular, el contenido de vapor de agua atravesado por la señal es fundamental dado que es el único constituyente de la mezcla atmosférica que posee una contribución del momento dipolar a la refractividad (Bevis y otros, 1992). Una discusión detallada del desarrollo de la refractividad en términos de la polarizabilidad media de la troposfera puede encontrarse en Janes (1986, p. 6-10).

Por lo anterior, y teniendo en cuenta que cualquier onda electromagnética en el rango de radio y hasta una frecuencia de 15 GHz estará afectada por las troposfera del mismo modo (Seeber, 2003, p. 56), podemos expresar la refractividad en términos de parámetros meteorológicos y constantes empíricas (Smith y Weintraub, 1953; Seeber, 2003, p. 57; Hofmann-Wellenhof y otros, 2007, p. 129)

$$N = N_d + N_w \quad (4.64)$$

donde N_d refiere a la parte *hidrostática*¹⁵ y tiene en cuenta la contribución de las componentes no dipolares de la mezcla a la refractividad, N_w refiere a la parte *húmeda* y tiene en cuenta el momento dipolar del vapor de agua atmosférico (Bevis y otros, 1992). Según Smith y Weintraub, (1953)

$$N_d = K_1 \frac{p_d}{T} \quad N_w = K_2 \frac{e}{T} + K_3 \frac{e}{T^2} \quad (4.65)$$

donde p_d refiere a la presión parcial del aire seco, e a la presión parcial de vapor de agua, ambas presiones medidas en hectopascales [hPa], T es la temperatura en grados Kelvin [K], y donde $K_1 = 77,6 \pm 0,013 [K hPa^{-1}]$, $K_2 = 71,6 \pm 8,5 [K hPa^{-1}]$ y $K_3 = 3,75 \times 10^5 [K^2 hPa^{-1}]$ son constantes empíricas.

Expresando la presión atmosférica como $p = p_d + e$ y reemplazando (4.65) en (4.64) quedará

¹⁵ también conocida como componente seca

$$N = 77,6 \frac{p}{T} - 6 \frac{e}{T} + 3,74 \times 10^5 \frac{e}{T^2} \quad (4.66)$$

Haciendo aproximaciones válidas dentro del rango de temperaturas $-50^\circ\text{C} < T < 40^\circ\text{C}$ y definiendo una nueva constante empírica $K_4 = 3,73 \times 10^5 [\text{K}^2 \text{hPa}^{-1}]$, la ecuación (4.66) quedará (Smith y Weintraub, 1953)

$$N = 77,6 \frac{p}{T} + 3,73 \times 10^5 \frac{e}{T^2} \quad (4.67)$$

donde la presión atmosférica (p) se mide en hectopascales [hPa]. Por lo tanto, resultará $N_d = 77,6 p/T$ y $N_w = 3,73 \times 10^5 e/T^2$.

Sin embargo, la expresión (4.67) no tiene la exactitud necesaria requerida para corregir los caminos ópticos involucrados en las observaciones de las TAGE. Por esta razón, se adopta una fórmula más exacta teniendo en cuenta el comportamiento de un gas no ideal (Bevis y otros, 1992)

$$N = k_1 \frac{p_d}{T} + k_2 \frac{e}{T} + k_3 \frac{e}{T^2} \quad (4.68)$$

donde $k_1 = 77,6 \pm 0,05 [\text{K hPa}^{-1}]$, $k_2 = 70,4 \pm 2,2 [\text{K hPa}^{-1}]$ y $k_3 = 3,739 \pm 0,012 \times 10^5 [\text{K}^2 \text{hPa}^{-1}]$. La exactitud de esta nueva expresión de refractividad quedará limitada por la incerteza en el valor de las constantes (Bevis y otros, 1992). De este modo, finalmente resultará

$$N_d = k_1 \frac{p_d}{T} \quad N_w = k_2 \frac{e}{T} + k_3 \frac{e}{T^2} \quad (4.69)$$

En esta aproximación hemos omitido el desarrollo de las expresiones en términos de los factores de compresibilidad del aire seco y el vapor de agua como funciones de la masa molar de la mezcla para cada caso (ver Nilsson y otros, 2013, p. 78-79). Para corregir esto en la componente de la refractividad, más pequeña en valor absoluto pero más variable e impredecible, reescribimos la refractividad húmeda como

$$N_w = k_2' \frac{e}{T} + k_3 \frac{e}{T^2} \quad (4.70)$$

donde $k_2' = k_2 - (M_w/M_d)k_1$ siendo M_w y M_d las masas molares del vapor de agua y el aire seco, respectivamente. Según Bevis y otros (1994) $k_2' = 22,1 \pm 2,2 [K hPa^{-1}]$.

Para analizar como influyen estas expresiones de la refractividad en el camino de la señal a través de la atmósfera, denominaremos G al camino óptico de la señal propagándose en el vacío, desde la fuente hasta el receptor. De modo que G será una línea recta con longitud igual al tiempo de propagación en el vacío multiplicado por la velocidad de la luz (c). Sea L el camino óptico de la misma señal en la troposfera (Bevis y otros, 1992).

$$L = \int_{atm} n(s) ds \quad (4.71)$$

donde *atm* refiere al camino de la señal en la troposfera. Ya hemos visto que a consecuencia de una velocidad de propagación v menor a c , el tiempo de propagación será mayor y por lo tanto resulta que $L > G$. Llamaremos $\Delta L = L - G$, luego

$$\Delta L = \int_{atm} n(s) ds - G \quad (4.72)$$

$$\Delta L = \int_{atm} [n(s) - 1] ds + \int_{atm} ds - G \quad (4.73)$$

donde el primer término de (4.73) es el exceso de camino óptico debido al retraso en el tiempo de vuelo, se conoce como *retraso troposférico* y puede alcanzar valores de 2,4 metros (Fernández y otros, 2009). Los dos últimos términos de (4.73) representan el efecto de curvatura de la atmósfera alcanzando valores de 1 cm o menos para $z < 75^\circ$, siendo nulo en el cenit (Bevis y otros, 1992).

Expresando el retraso troposférico de la ecuación (4.73) en términos de la refractividad, quedará

$$\Delta L = 10^{-6} \int_{atm} N ds \quad (4.74)$$

donde se omite explícitamente el efecto de curvatura (Nilsson y otros, 2013, p. 83). Dado que en las aplicaciones de las TAGE es común referir los retrasos troposféricos a la dirección cenital, proyectaremos los retrasos oblicuos sobre la dirección cenital (Seeber, 2003, p. 57; Nilsson y otros, 2013, p. 83). Sea *ZTD* el retraso cenital total¹⁶

¹⁶ del inglés, ZTD: Zenith Total delay

$$ZTD = 10^{-6} \int_{h_0}^{\infty} N(h) dh \quad (4.75)$$

donde h_0 es la altura del observador. Usando (4.64) de modo análogo podemos expresar el retraso cenital hidrostático ZHD ¹⁷ y el retraso cenital húmedo ZWD ¹⁸ como (Seeber, 2003, p. 57)

$$ZHD = 10^{-6} \int_{h_0}^{\infty} N_d(h) dh \quad ZWD = 10^{-6} \int_{h_0}^{\infty} N_w(h) dh \quad (4.76)$$

Luego,

$$ZTD = ZHD + ZWD \quad (4.77)$$

donde el ZHD explica el 90% del efecto con muy buena exactitud mientras que ZWD es responsable por la contribución de 10% restante al ZTD (Fernández y otros, 2009). A nivel del mar y en condiciones meteorológicas nominales, el ZHD puede alcanzar hasta 2,3 metros (Bevis, 1992; Nilsson y otros, 2013, p. 85). Por otro lado, el ZWD dependerá de la cantidad de vapor de agua presente en la atmósfera durante la medición, y puede variar desde unos pocos milímetros en regiones desérticas o muy frías hasta varios centímetros en zonas tropicales.

Una vez conocido el retraso troposférico en la dirección cenital, se puede estimar su proyección sobre cualquier distancia cenital¹⁹, arbitraria usando las funciones de mapeo (Seeber, 2003, p. 58). Así, las expresiones para el retardo a lo largo de una trayectoria de elevación arbitraria (E) consisten en el retardo cenital multiplicado por la función de mapeo. De la figura 4.1, es fácil ver que si asumimos a la troposfera local como horizontalmente homogénea y considerando un entorno del cenit, la función de mapeo más sencilla será (Seeber, 2003, p. 58),

$$\begin{aligned} \Delta L(E) &= m_f(E) ZTD \\ \Delta L(E) &= \frac{1}{\sin E} ZTD \\ \Delta L(z) &= \frac{1}{\cos z} ZTD \end{aligned} \quad (4.78)$$

¹⁷ del inglés, ZHD: Zenith Hydrostatic Delay

¹⁸ del inglés, ZWD: Zenith Wet Delay

¹⁹ o su complemento: el ángulo de elevación

Luego, usando la ecuación (4.77) podemos expresar (Nilsson y otros, 2013, p. 100-101)

$$\Delta L(E) = ZHD m_f^d(E) + ZWD m_f^w(E) \quad (4.79)$$

donde la función de mapeo hidrostático ($m_f^d(E)$) estará afectada por el efecto de curvatura despreciado en la ecuación (4.74) (Nilsson y otros, p. 83).

Durante más de 30 años se han desarrollado y refinado distintas funciones de mapeo. Una excelente revisión del estatus del tema puede encontrarse en Nilsson y otros, (2013, sección 4.2, p. 99-106) y las referencias que allí se indican.

A lo largo del tiempo, también se desarrollaron diferentes modelos para expresar la variación de la refractividad con la altura utilizando datos meteorológicos locales en el sitio de observación (Seeber, 2003, p. 57; Hofmann-Wellenhof y otros, 2007, p. 129).

Históricamente, desde el inicio de la era espacial, se publicaron diferentes modelos para estimar ZTD. Entre todos ellos, el más exacto y más ampliamente adoptado para modelar ZHD es el modelo de Saastamoinen (1972) modificado por Davis (1985), (ver Feng y otros, 2020)

$$ZHD = \frac{0,0022768 p}{[1 - 0,00266 \cos(2\phi) - 0,28 \times 10^{-6} h]} \quad (4.80)$$

donde ϕ es la latitud del lugar, p es la presión atmosférica del sitio en [hPa] y h la altura de la antena receptora en [m]. Por otro lado, los modelos de ZWD no resultaron ser muy exactos debido a la variabilidad del contenido de vapor de agua en la atmósfera (Feng y otros, 2020). Más información y detalles de la deducción de los algunos modelos puede encontrarse en (Hofmann-Wellenhof y otros, 2007, p. 130-135).

Dado que la principal fuente de errores se encuentra en la medición de la presión atmosférica, puede estimarse un error de 2,3 mm en el camino óptico por cada hPa de error en las mediciones de presión atmosférica (Nilsson y otros, 2013, p. 85). Efectivamente, si la atmósfera está en equilibrio hidrostático y el barómetro está calibrado con un error $< 0,3$ hPa, el ZHD se determinará con una precisión superior a 1 mm (Bevis y otros, 1992).

Conversión del retraso cenital húmedo en cantidad de vapor de agua precipitable

Una de las principales tareas de los software de procesamiento geodésico de los observables de las TAGE es corregir la distancia estimada entre la fuente de radio ondas y el receptor en Tierra para eliminar, entre otros errores, los efectos de la atmósfera terrestre.

Hemos visto que el ZWD depende la cantidad de vapor de agua atmosférico. Esta cantidad es muy variable según la estación del año y la latitud del observador. Además, sus observaciones son costosas²⁰ y escasas. Sin embargo, allí donde se posean coordenadas muy precisas, es posible resolver el problema inverso al posicionamiento GNSS y obtener el dato de vapor de agua de modo económico y preciso.

Efectivamente, si se conoce la distancia entre la fuente y el receptor con buena precisión, podrá obtenerse una estimación del retraso troposférico total (ZTD) dado que se puede estimar la trayectoria lineal (G) numéricamente (ver ecuaciones 4.72 a 4.75). Asumiendo medidos los parámetros meteorológicos locales (presión atmosférica, temperatura y humedad relativa), podremos calcular ZHD y obtener valores de ZWD .

Definiendo T_m como la *temperatura media pesada de la atmósfera* Jones y otros, 2020, p. 545)

$$T_m \approx \frac{\int_{h_0}^{\infty} \frac{e}{T} dh}{\int_{h_0}^{\infty} \frac{e}{T^2} dh} \quad (4.81)$$

donde h_0 es la altura del observador sobre la superficie, e la presión parcial de vapor de agua en [hPa] y T la temperatura en [K]. T_m puede calcularse numéricamente resolviendo la integral a partir de datos obtenidos en modelos numéricos de clima, datos de radiosondeos o bien utilizando la estimación dada por Askne y Nordius (1987). Sin embargo, los datos necesarios para resolver la integral (4.81) no siempre están disponibles. En ese caso la practica impone la aplicación de la fórmula de Bevis para estimar T_m .

Bevis y colaboradores (1992), analizando más de 8000 radiosondeos en una vasta región de América del Norte, deducen una función lineal que vincula T_m con la temperatura del sitio (T) expresada en [K]

$$T_m = 70,2 + 0,72 T \quad (4.82)$$

Si expresamos ZWD usando (4.76) y (4.70)

$$ZWD = 10^{-6} \int_{h_0}^{\infty} \left(k_2' \frac{e}{T} + k_3 \frac{e}{T^2} \right) dh \quad (4.83)$$

²⁰ radiosondeos, radiómetro

Reemplazando por la ecuación (4.81) quedará

$$ZWD = 10^{-6} \left(k_2' + \frac{k_3}{T_m} \right) \int_{h_0}^{\infty} \frac{e}{T} dh \quad (4.84)$$

Definiendo

$$IWV = \int_s \rho_w ds \quad (4.85)$$

donde IWV ²¹ [$kg m^{-2}$] expresa el contenido total de vapor de agua verticalmente integrado para una columna de aire en la vertical del observador y ρ_w es la densidad de vapor de agua (Nilsson y otros, 2013, p. 89). Luego usando la ecuación de los gases ideales

$$IWV = \Pi ZWD \quad (4.86)$$

donde Π es una constante y resulta (Jones y otros, 2020, p. 545)

$$\Pi = \frac{10^6}{R_v \left(k_2' + \frac{k_3}{T_m} \right)} \quad (4.87)$$

donde R_v es la constante específica de los gases para el vapor de agua $R_v = 461,521 \pm 0,008 [J kg^{-1} K^{-1}]$ (AMS, 2014, Jones y otros, 2020, p. 320) y recordamos que $1 hPa = 10^2 J m^{-3}$.

IWV representa la cantidad total absoluta de agua en la columna vertical de aire que hipotéticamente podría precipitarse, siendo una cantidad de gran importancia para las aplicaciones de los profesionales de las Ciencias Atmosféricas. La amplia distribución espacial de las estaciones GNSS en el planeta, y la amplia disponibilidad temporal de datos²² han hecho de este procedimiento una herramienta muy valiosa que hoy día es usada para la mejora de pronósticos y otros estudios climáticos, dando origen a la denominada *Meteorología GNSS* (Nilsson y otros, 2013, p. 125-126).

Refracción ionosférica

²¹ del inglés, Integrated Water Vapor

²² Puede disponerse de la información a tiempo casi real (< 3 horas) y con una frecuencia temporal de varios minutos

La ionosfera está poblada por iones y electrones libres. La generación de iones y electrones en esta región de la atmósfera es proporcional a la intensidad de la radiación solar recibida y a la densidad de los elementos gaseosos en ella (Seeber, 2003, p. 49). El estado de la ionosfera se describe a través de su densidad electrónica (n_e), esto es, el número de electrones por unidad de volumen. La densidad electrónica varía de modo complejo según la latitud geomagnética de la estación, hora del día, época del año, actividad solar y otras causas que alteren las condiciones nominales o tranquilas del Clima Espacial (del inglés *Space Weather*).

Como ya se ha visto más arriba, la ionosfera constituye un medio dispersivo para las ondas de microondas/radio. La ventaja de esto radica en la posibilidad de reducir la contribución de la ionosfera a la refracción a través de una combinación lineal de frecuencias. Esta es la razón por la cual las TAGE operando en radio²³ poseen dos frecuencias de trabajo para neutralizar la dispersión del medio.

Dicho de otro modo, es posible eliminar el retraso ionosférico al primer orden aplicando una combinación lineal de las dos frecuencias de operación del sistema. Esta combinación suele denominarse *combinación libre de ionosfera* y luego de su aplicación los efectos ionosféricos de segundo orden, aunque son pequeños, permanecen afectando el camino óptico de la señal. Para un tratamiento extendido y riguroso del efecto ionosférico en VLBI y GNSS recomiendo la lectura de Alizadeh y otros (2013).

Referencias

- Alizadeh, M. M., Wijaya, D. D., Hobiger, T., Weber, R., Schuh, H. (2013). Ionospheric effects on microwave signals. In *Atmospheric effects in space geodesy* (pp. 35-71). Springer, Berlin, Heidelberg.
- AMS, American Meteorological Society (2014). Gas constants. Recuperado de https://glossary.ametsoc.org/wiki/Gas_constant
- Askne, J., y Nordius, H. (1987). Estimation of tropospheric delay for microwaves from surface weather data. *Radio science*, 22(03), 379-386.
- Bevis, M., Businger, S., Herring, T. A., Rocken, C., Anthes, R. A., & Ware, R. H. (1992). GPS meteorology: Remote sensing of atmospheric water vapor using the Global Positioning System. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, 97(D14), 15787-15801.

²³ GNSS, VLBI

- Bevis, M., Businger, S., Chiswell, S., Herring, T. A., Anthes, R. A., Rocken, C., Ware, R. H. (1994). GPS meteorology: Mapping zenith wet delays onto precipitable water. *Journal of Applied Meteorology (1988-2005)*, 379-386.
- Böhm, J., Salstein, D., Alizadeh, M. M., Wijaya, D. D. (2013). Geodetic and atmospheric background. In *Atmospheric effects in space geodesy* (pp. 1-33). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Davis, J.L.; Herring, T.A.; Shapiro, I.I.; Rogers, A.E.E.; Elgered, G. Geodesy by radio interferometry: Effects of atmospheric modeling errors on estimates of baseline length. *Radio Sci.* 1985, 20, 1593–1607
- Fernández, L. I., Meza, A. M., Natali, M. P. (2009). Determinación del contenido de vapor de agua precipitable (PWV) a partir de mediciones GPS: primeros resultados en Argentina. *Geoacta*, 34(2), 35-57.
- Feng, P., Li, F., Yan, J., Zhang, F., & Barriot, J. P. (2020). Assessment of the accuracy of the Saastamoinen model and VMF1/VMF3 mapping functions with respect to ray-tracing from radiosonde data in the framework of GNSS meteorology. *Remote Sensing*, 12(20), 3337.
- Green, R. M. (1985). *Spherical Astronomy*, Cambridge University Press.
- Hofmann-Wellenhof, B., Lichtenegger, H., Wasle, E. (2007). *GNSS—global navigation satellite systems: GPS, GLONASS, Galileo, and more*. Springer Science & Business Media.
- IERSTN23 (1997) *IERS Technical Note 23: Definition and Realization of the International Celestial Reference System by VLBI Astrometry of Extragalactic Objects*. Ma C. y Feissel M. (eds.). Disponible en: <https://www.iers.org/SharedDocs/Publikationen/EN/IERS/Publications/tn/TechnNote23/tn23.pdf>
- Janes, H. (1986). On the modelling of tropospheric effects in ultra-high frequency radio positioning. *Technical Report N.º 119*. University of New Brunswick. Canada
- Jones, J., Guerova, G., Douša, J., Dick, G., de Haan, S., Pottiaux, E., ... & van Malderen, R. (2020). *Advanced GNSS tropospheric products for monitoring severe weather events and climate: COST Action ES1206 Final Action Dissemination Report*. Jones, J., Guerova, G., Douša, J., Dick, G., de Haan, S., Pottiaux, E., Bock, O., Pacione, R., van Malderen, R. (Eds). Springer.
- Malacara, D. (2015). *Óptica básica*. Fondo de cultura económica.
- Merzkirch W. (1987). *Flow Visualization*. Academic Press Inc.
- Miczaika, G. R. y Sinton, W. M. (1967). *Las herramientas del astrónomo*. Eudeba.
- Nilsson, T., Böhm, J., Wijaya, D. D., Tresch, A., Nafisi, V., & Schuh, H. (2013). Path delays in the neutral atmosphere. In *Atmospheric effects in space geodesy* (pp. 73-136). Springer.
- Saastamoinen, J. (1972) Atmospheric Correction for the Troposphere and Stratosphere in Radio Ranging Satellites. In *Geophysical Monograph Series; American Geophysical Union: Volume 15*, pp. 247–251.

- Seeber, G. (2003). *Satellite Geodesy*, 2nd edition. Walter de Gruyter GmbH & Co.
- Smart W. M. (1962) *Text-Book on Spherical Astronomy*. Quinta edición. Cambridge University Press
- Smith, E. K., Weintraub, S. (1953). The constants in the equation for atmospheric refractive index at radio frequencies. *Proceedings of the IRE*, 41, 1035–1037
- Woolard, E. C., Clemence, G. (1966). *Spherical Astronomy*. New York-London.

CAPÍTULO 5

Movimiento de los planos fundamentales en los sistemas dinámicos

Laura Isabel Fernández, Gonzalo Carlos de Elía, María Silvina De Biasi

Presentaremos las nociones de los efectos físicos involucrados detrás de las correcciones a las coordenadas estelares utilizando los modelos de Precesión IAU 1976 y de Nutación IAU 1980. Estos modelos fueron íntegramente desarrollados para los sistemas de referencia celestes dinámicos vigentes en su época y nos permitirán entender y visualizar el fenómeno involucrado de manera didáctica, simplificando así la presentación de los modelos de corrección convencionales actualmente vigentes que se desarrollarán en los capítulos siguientes.

Con estos objetivos, el presente capítulo aborda el tratamiento dinámico aproximando a la Tierra sometida a torques externos como un giroscopio. Luego estudiaremos las consecuencias del movimiento resultante sobre los planos fundamentales y las variaciones seculares y periódicas a las coordenadas estelares que estos movimientos implican.

Precesión y Nutación: consideraciones generales

Para poder entender en una primera aproximación las consideraciones de los modelos físicos, analizaremos de modo muy sencillo, el problema de la Tierra en rotación y traslación sometida a torques externos vista desde un sistema de referencia celeste. Estos torques involucran a las fuerzas de atracción gravitacional ejercida sobre nuestro planeta. Por lo anterior, las mayores contribuciones a los torques provendrán del objeto celeste más cercano a la Tierra (Luna) y del más masivo del Sistema Solar (Sol).

Si ambos cuerpos celestes (tractor y atraído) fueran esferas perfectas, las fuerzas de atracción gravitacional no producirían ningún torque. Pero sabemos que la figura matemática que mejor aproxima la forma de nuestro planeta es un elipsoide de revolución, abultado en el Ecuador y achatado en los polos¹. Este elipsoide, que asumimos axialmente simétrico, está rotando en torno a un eje que atraviesa los polos norte y sur pasando por el centro de la Tierra². En consecuencia, la atracción gravitacional del Sol y la Luna causarán torques cuyo efecto neto será un cambio progresivo y lento (a razón de 50" por año con un periodo cercano a los 25.800 años) en la posición del eje de rotación vista desde el sistema de referencia celeste conocido como **Precesión lunisolar**.

El mismo efecto causado por los torques de los planetas del Sistema Solar sobre la Tierra implica una inclinación extremadamente lenta en el plano orbital medio de la Tierra. La literatura (Green, 1985 p. 50; Kovalevsky y Seidelman, 2004 p. 176) suele denominar a este efecto como **Precesión planetaria**. Sin embargo, y siguiendo a Dehant y Mathews (2015), debemos aclarar que esta denominación es engañosa dado que no involucra ningún movimiento neto del eje de rotación visto desde el sistema celeste.

Si además consideramos que la Luna orbita en torno a la Tierra en un plano inclinado aproximadamente 5° con respecto al plano orbital terrestre, el efecto neto de los torques incorporará términos periódicos vinculados a la retrogradación del nodo lunar en el período de los Saros (18,6 años). Este último efecto periódico se conoce como **Nutación**.

Diferentes autores (Smart, 1962, p. 226; Green, 1985, p. 51; Kovalevsky y Seidelman, 2004, p. 176) atribuyen el descubrimiento de la Precesión a Hiparco de Rodas en el siglo II A.C. Según estos autores, Hiparco comparó sus propias observaciones con posiciones de las mismas estrellas registradas un siglo y medio antes y descubrió que mientras las latitudes eclípticas permanecían constantes, las longitudes se incrementaban con el tiempo³.

Este fenómeno sólo podía tener dos explicaciones posibles. La primera era muy poco probable y por lo tanto fue desestimada: que todas las estrellas observadas formen parte de una misma estructura física moviéndose en una dirección preferencial a medida que transcurre el tiempo. La segunda hipótesis asume que el equinoccio vernal retrograda secularmente y por lo tanto las longitudes eclípticas y las ascensiones rectas aumentarán con el tiempo (Smart, 1962, p. 226). Hiparco tuvo entonces el mérito de descubrir que el equinoccio vernal no podía considerarse como un punto fijo en el cielo a medida que transcurría el tiempo. Además, dado que no observó cambios en la latitudes eclípticas, asumió que la Eclíptica era un plano fijo. Como los equinoccios corresponden a la proyección en la esfera celeste de la línea nodal Eclíptica – Ecuador Celeste, el razonamiento de Hiparco sólo desplaza al Ecuador celeste manteniendo la oblicuidad de la eclíptica sin cambios dramáticos.

¹ El radio ecuatorial es aproximadamente 21 km mas grande que el radio polar (Dehant y Mathews, 2015)

² En aquí en adelante, nos referiremos a este punto como el Geocentro

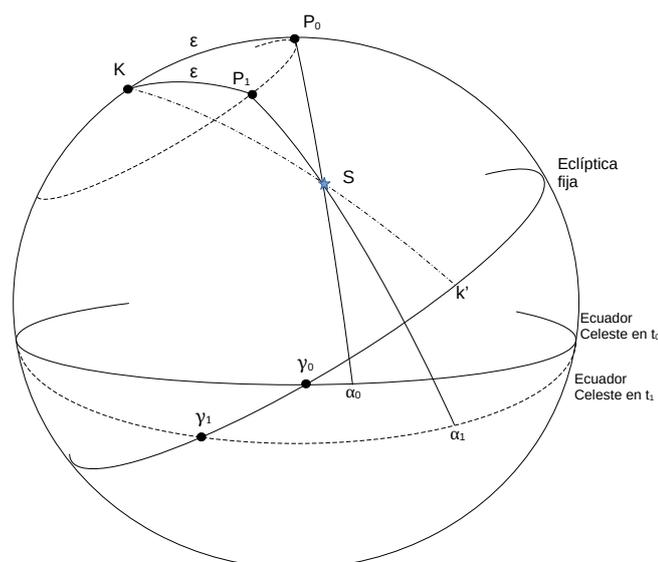
³ Hiparco estima una tasa de variación de 36" por año, levemente inferior al valor hoy aceptado de unos 50" por año

La figura 5.1 esquematiza el razonamiento de Hiparco. Asumiendo a la Eclíptica fija, el Ecuador celeste en el instante t_1 se desplaza respecto de su posición en t_0 causando una retrogradación del equinoccio vernal a la posición γ_1 . Por lo tanto las longitudes eclípticas (λ) resultarán $\lambda_1 > \lambda_0$, dado que $\text{arco}(\gamma_1 k') > \text{arco}(\gamma_0 k')$. Otra consecuencia del movimiento del Ecuador es el desplazamiento de su polo desde la posición P_0 en t_0 a la posición P_1 en t_1 . Nótese que este desplazamiento tendrá lugar en una circunferencia de radio ε^4 constante en torno al polo ecliptical (K).

Según Smart (1953 p. 343; 1962, p. 227), Newton en su obra *Principia* fue el primero en encontrar una explicación dinámica al fenómeno de la Precesión, mientras que Bradley descubre la Nutación en 1748 demostrando que la Eclíptica tampoco es un plano fijo, la oblicuidad de la Eclíptica no es constante y la retrogradación del Equinoccio no es uniforme.

Figura 5.1.

Desplazamiento del Polo y el Ecuador celeste por Precesión según Hiparco.



Nota. Adaptado de *Textbook on Spherical Astronomy* (p. 227), de W. M. Smart, 1977, Cambridge University Press.

Efectivamente, la Nutación entendida como el efecto periódico y de pequeña amplitud⁵ que se superpone al movimiento del Polo celeste en torno al Polo ecliptical, necesitó la aparición de relojes lo suficientemente precisos como para distinguir el efecto en las determinaciones de la declinación hechas a partir de observaciones meridianas en el siglo XVIII (Green, 1985, p. 51).

⁴ Oblicuidad de la Eclíptica

⁵ Menor a 15"

Desde la Astrometría, aparte del entendimiento cabal del problema, nos ocupa el movimiento que este efecto causa sobre los planos fundamentales y como estos cambios alteran las coordenadas de los cuerpos celestes. Dado que ambos planos fundamentales cambiarán de posición, es esperable que varíen sus coordenadas celestes sin importar si se trata del sistema de coordenadas ecuatorial celeste o ecliptical.

El efecto combinado del cambio secular y periódico de la orientación del eje de rotación terrestre visto desde el sistema de referencia celeste, admite ser modelado. En particular desarrollaremos los lineamientos de las teorías de Precesión y Nutación adoptadas por la IAU en 1977 (Lieske et al., 1977; Lieske, 1979) y en 1980 (Seidelmann, 1982), respectivamente. Normalmente ambos efectos se superponen y se calcula su influencia en las coordenadas de los objetos celestes. Tales correcciones son apreciables y deben aplicarse aún cuando el periodo transcurrido desde el instante de referencia sea corto⁶.

Precesión: presentación del problema físico

Ya hemos visto que la Precesión lunisolar se origina en la atracción gravitacional del Sol y la Luna sobre el abultamiento ecuatorial de la Tierra. La solución dinámica rigurosa del problema excede los contenidos básicos presentados en esta obra. Se trata de un problema complejo dado que deben calcularse los torques antedichos para la Tierra considerando una distribución irregular de masas y un núcleo que no es rígido (Walter y Sovers, 2000, p. 22). Por lo anterior, aproximaremos la solución dinámica a un giroscopio bajo las siguientes suposiciones: a) que la Tierra admite describirse matemáticamente por un elipsoide de revolución y b) que la distribución de masas en el interior terrestre es radialmente simétrica (Walter y Sovers, 2000, p. 22; Dehant y Mathews, 2015, p. 1).

La Tierra, representada por un elipsoide de revolución, esta rotando con velocidad angular $\vec{\Omega}$ en torno a un eje inclinado un ángulo $(90^\circ - \varepsilon)$ con respecto al plano orbital, donde ε refiere a la oblicuidad de la Eclíptica, y sea K la dirección perpendicular al plano orbital (ver Figura 5.2).

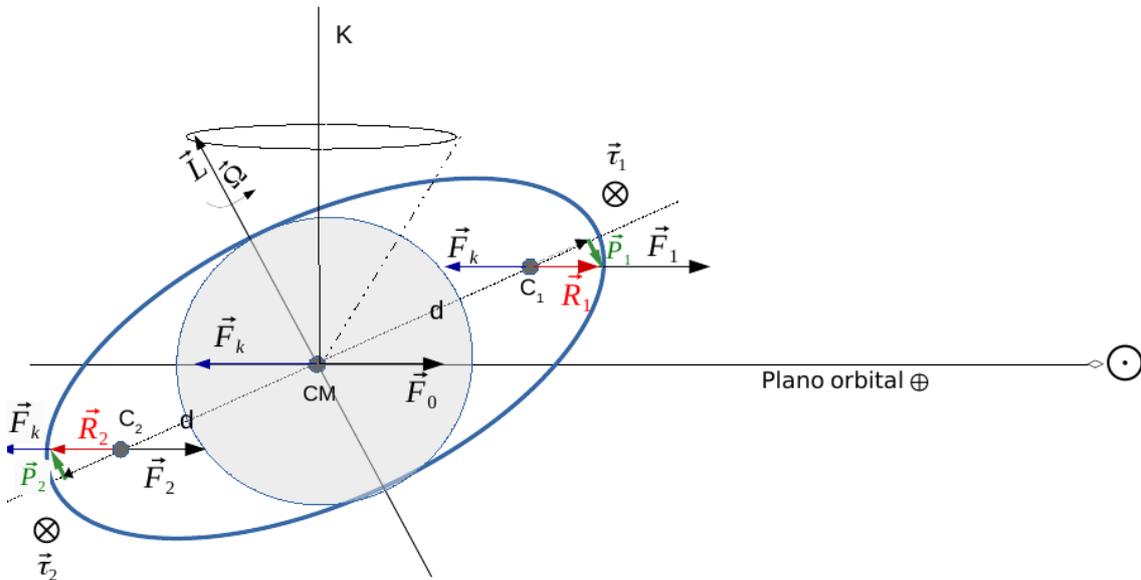
Para analizar las fuerzas actuantes asumiremos que toda la masa del planeta se distribuye en tres puntos. Uno de estos puntos esta ubicado en el Geocentro (CM), los otros dos puntos (C1 y C2) están simétricamente ubicados a una distancia d en el plano del Ecuador a ambos lados del Geocentro. La ubicación de los puntos C1 y C2 representa a los respectivos excedentes de masa del elipsoide al remover la masa de la esfera de radio polar. Estos excedentes también se conocen como abultamientos ecuatoriales.

⁶ Un año o menos

Comenzaremos considerando la atracción gravitacional ejercida por el Sol. Dado que la fuerza de atracción gravitacional es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre cuerpo atraído y tractor, el módulo de esta fuerza será diferente en cada uno de los puntos C1, C2 y CM resultando $\vec{F}_1 > \vec{F}_0 > \vec{F}_2$.

Figura 5.2.

Esquema de fuerzas y torques considerando a la Tierra como un giroscopio.



Nota. Adaptado de *Astrometry of Fundamental Catalogues* (p. 18), de Walter H. G. y Sovers O. J., 2000, Springer.

Haciendo un poco de álgebra, puede demostrarse que los módulos de \vec{F}_0 , \vec{F}_1 y \vec{F}_2 pueden vincularse linealmente entre sí en términos de $(2d)$. De modo conveniente

entonces podemos aproximar $\vec{F}_1 = \vec{F}_0 + \Delta \vec{F}$ y $\vec{F}_2 = \vec{F}_0 - \Delta \vec{F}$, donde $\Delta \vec{F} \approx \frac{\vec{F}_0 2d \cos \varepsilon}{R}$

siendo R la distancia desde el Geocentro al centro del Sol.

Además, dado que el sistema Tierra – Luna se encuentra en equilibrio dinámico en el campo de gravedad del Sol, la fuerza ejercida sobre el centro de masa será de igual módulo y sentido opuesto a la fuerza centrífuga \vec{F}_k (Walter y Sovers, 2000, p. 19). Por lo anterior, en el Geocentro resulta $\vec{F}_0 = -\vec{F}_k$. Dado que $d \ll 1$ UA, e ignorando la rotación de la Tierra, asumimos que el efecto de la fuerza centrífuga es idéntico en los 3 puntos considerados C_1 , CM y C_2 .

Sumando \vec{F}_k en C1 y C2 respectivamente quedará, $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 - \vec{F}_0$ y $\vec{R}_2 = \vec{F}_2 - \vec{F}_0$. Por lo anterior, resulta $\vec{R}_1 = \Delta \vec{F}$ y $\vec{R}_2 = -\Delta \vec{F}$ o lo que es lo mismo $\vec{R}_1 = -\vec{R}_2$. Si descomponemos estas fuerzas en sus componentes paralela y perpendicular al plano del Ecuador obtenemos \vec{P}_1 y \vec{P}_2 , tal que $\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$. Los torques resultantes coincidirán en módulo $\tau_1 = \tau_2$, siendo ambos perpendiculares y con sentido entrante al plano del esquema. La consecuencia neta del torque solar será entonces intentar alinear el plano del Ecuador con el plano de la órbita terrestre en torno al Sol (Walter y Sovers, 2000, p. 20).

De modo análogo, la Luna también ejerce torques sobre la Tierra. Aunque es esperable que la magnitud de tales torques sea mayor en virtud de las menores distancias entre los cuerpos tractor y atraído, su efecto será similar al torque solar en una primera aproximación. Efectivamente, el efecto neto del torque lunar será inclinar el plano Ecuatorial hacia el plano orbital de la Luna. Pero dado que el plano orbital de la Luna y la órbita terrestre están inclinados aproximadamente 5° entre sí, el torque lunar actuará esencialmente en la misma dirección que el torque solar (Walter y Sovers, 2000, p. 20) y ambos torques combinados darán origen al efecto precesional dominante también conocido como Precesión lunisolar, donde cerca de $\frac{2}{3}$ de la magnitud del efecto se debe a la Luna y $\frac{1}{3}$ del mismo al Sol (Smart, 1962, p. 228).

La comprensión integral de la Precesión vista desde el sistema de referencia celeste, exige aplicar la conservación del momento angular. Según hemos visto en párrafos anteriores los torques ejercidos sobre los abultamientos ecuatoriales tienen igual dirección y sentido. En consecuencia, su suma será distinta de cero.

Dado que asumimos una Tierra sólida con tensor de inercia I , rotando con velocidad angular constante $\vec{\Omega}$, su momento angular $\vec{L} = I\vec{\Omega}$ tendrá modulo constante, con \vec{L} compartiendo la dirección de $\vec{\Omega}$, esto es: en la dirección del eje de rotación o eje polar. En consecuencia, para cumplir con la conservación del momento angular, \vec{L} deberá cambiar su dirección con el tiempo.

Por lo anterior, en la Figura 5.2 puede verse que la Precesión se manifiesta como el movimiento del eje polar sobre la superficie de un cono de apertura $= 2\epsilon$ en torno a la dirección perpendicular al plano orbital terrestre K^7 . El circuito se completa en aproximadamente 25800 años con una tasa estimada de $50''/\text{año}$. La consecuencia observacional de este fenómeno se manifiesta en las distintas ubicaciones del Polo celeste proyectado en la esfera celeste y es muy notable con intervalos de algunos miles de años. Dado que usualmente se ubica al Polo norte celeste en la esfera celeste por su cercanía a las distintas constelaciones, y actualmente

⁷ Recordar que K proyectado en la esfera celeste es el polo ecliptical

se encuentra en la dirección de α Ursae Minoris⁸, por causa de la Precesión en aproximadamente 12000 años se ubicará en cercanías de α Lyrae⁹.

Para concluir debemos aclarar que la descripción antedicha asume que la dirección perpendicular al plano orbital (K) está fija. Si bien esta suposición es válida durante intervalos menores a 1 año (Green, 1985, p. 209), K se desplazará como consecuencia de la llamada Precesión planetaria como veremos en una sección siguiente.

Movimiento del Ecuador celeste

Para poder cuantificar las correcciones a las coordenadas estelares por Precesión lunisolar, es necesario analizar el problema físico desde la esfera celeste y calcular los desplazamientos modelados de los planos fundamentales, analizando sus consecuencias sobre las posiciones en el sistema de referencia celeste. A continuación, y dado que la Precesión lunisolar es el efecto dominante, derivaremos fórmulas de corrección al primer orden sobre el efecto geométrico esquematizado en la Figura 5.1.

Asumiendo un instante inicial t_0 , las posiciones del Polo celeste y el Equinoccio vernal serán P_0 y γ_0 , respectivamente. A causa de la Precesión lunisolar, el Polo celeste se moverá desde P_0 hasta P_1 , donde P_1 indica la posición del Polo celeste en un instante posterior $t_1 = (t_0 + \Delta t)$. Dado que asumimos a la Eclíptica fija, este desplazamiento se efectúa a lo largo de una circunferencia con centro en el polo ecliptical K y radio ϵ . Dicho de otro modo, la distancia entre el Polo celeste y el Polo ecliptical se mantendrá constante e igual a ϵ a medida que pasa el tiempo. Sin embargo la posición de P_1 respecto de P_0 quedará establecida por el ángulo

$\widehat{P_0 K P_1} = \psi_A \Delta t$, donde ψ_A es

$$\psi_A = 50,387'' + 0,0049'' T \quad (5.1)$$

con T expresado en fracción de siglos Julianos contados desde J2000,0¹⁰ (Green 1985, p. 211).

En consecuencia, el Ecuador celeste se desplazará hacia el oeste¹¹ desde su posición en t_0 a su nueva ubicación en t_1 , siendo γ_1 el nuevo Equinoccio vernal. Por lo anterior, es claro que el arco $\gamma_0 \gamma_1 = \psi_A \Delta t$.

⁸ Polaris

⁹ Vega

¹⁰ $T = (t - 2000)/100$, con t en años

¹¹ "hacia atrás", retrogradará

A continuación analizaremos las consecuencias de estos movimientos sobre las coordenadas estelares. Dado que la Eclíptica permanece fija durante Δt es fácil ver que en coordenadas eclípticas las variaciones admiten expresarse como

$$\begin{cases} d\lambda = \psi_A \Delta t \\ d\beta = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

donde $d\lambda = \lambda_1 - \lambda_0$; $d\beta = \beta_1 - \beta_0$. El cambio de las coordenadas ecuatoriales celestes por Precesión lunisolar se calcula a partir de una transformación de coordenadas que puede realizarse a partir de la trigonometría esférica o utilizando matrices de rotación. Para ejemplificar ambos procedimientos realizaremos aquí la transformación de coordenadas usando rotaciones y aplicaremos trigonometría esférica en la sección siguiente.

Sean \hat{s}_{ECU} y \hat{s}_{ECL} los respectivos versores posición en coordenadas ecuatoriales celestes y eclípticas, respectivamente.

$$\hat{s}_{ECU} = R_x(-\varepsilon) \hat{s}_{ECL} \quad (5.3)$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\varepsilon) & \sin(-\varepsilon) \\ 0 & -\sin(-\varepsilon) & \cos(-\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \beta \\ \sin \lambda \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

La solución de (5.4) conduce a

$$\cos \alpha \cos \delta = \cos \lambda \cos \beta \quad (5.5a)$$

$$\sin \alpha \cos \delta = \cos \varepsilon \sin \lambda \cos \beta - \sin \varepsilon \sin \beta \quad (5.5b)$$

$$\sin \delta = \sin \varepsilon \sin \lambda \cos \beta + \cos \varepsilon \sin \beta \quad (5.5c)$$

Derivamos (5.5c) aplicando regla de la cadena y considerando que $d\varepsilon$ y $d\beta$ son nulas, quedará

$$\cos \delta d\delta = \sin \varepsilon \cos \lambda \cos \beta d\lambda \quad (5.6)$$

Reemplazando (5.5a) y (5.2) en la ecuación (5.6) quedará

$$d\delta = \psi_A \Delta t \sin \varepsilon \cos \alpha \quad (5.7)$$

donde $d\delta = \delta_1 - \delta_0$. Luego derivando (5.5a) y considerando que $d\beta = 0$ resulta

$$-\sin \alpha \cos \delta d\alpha - \cos \alpha \sin \delta d\delta = -\cos \beta \sin \lambda d\lambda \quad (5.8)$$

Es necesario operar para sustituir el producto $\cos \beta \sin \lambda$ en términos de coordenadas ecuatoriales celestes. Multiplicando la ecuación (5.5b) por $\cos \varepsilon$, la ecuación (5.5c) por $\sin \varepsilon$ y sumando ambas ecuaciones resultantes quedará

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos \delta \cos \varepsilon + \sin \delta \sin \varepsilon = \cos^2 \varepsilon \sin \lambda \cos \beta - \cos \varepsilon \sin \varepsilon \sin \beta \\ + \sin^2 \varepsilon \sin \lambda \cos \beta + \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin \beta \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\sin \alpha \cos \delta \cos \varepsilon + \sin \delta \sin \varepsilon = \cos \beta \sin \lambda \quad (5.10)$$

Determinamos $d\alpha = \alpha_1 - \alpha_0$, multiplicando ambos miembros de la ecuación (5.8) por (-1), reemplazando $d\lambda$ por (5.2), $d\delta$ por (5.7), $\cos \beta \sin \lambda$ por (5.10) y operando algebraicamente resulta

$$d\alpha = \psi_A \Delta t (\cos \varepsilon + \operatorname{tg} \delta \sin \varepsilon \sin \alpha) \quad (5.11)$$

Como se mencionó más arriba, las ecuaciones (5.2), (5.7) y (5.11) fueron deducidas al primer orden usando una aproximación geométrica del efecto de Precesión que asume a la Eclíptica fija y al Ecuador móvil durante el intervalo Δt . Por lo tanto las fórmulas aquí deducidas son válidas para un intervalo de 1 año o menos tiempo (Green, 1985, p. 210).

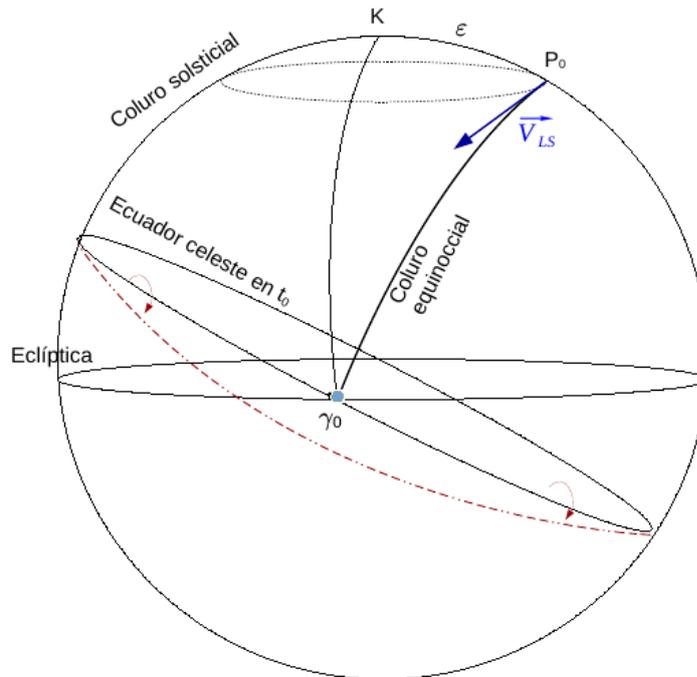
Velocidad precesional instantánea del Ecuador

Siguiendo Woolard y Clemence (1966, p. 244-247), el movimiento instantáneo del Polo del Ecuador celeste medio puede aproximarse como una rotación en torno al eje de la Eclíptica fija de la época con velocidad tangencial $|\vec{V}_{ls}| \approx (d\psi_A/dt) \sin \varepsilon$, manteniendo constante la orientación relativa de ambos planos (ε). Dicho de otro modo, podemos pensar al Polo celeste medio moviéndose en una circunferencia con centro en K y radio ε .

Por definición de velocidad tangencial, este movimiento será instantáneamente perpendicular al coluro solsticial y por lo tanto tendrá la dirección del coluro equinoccial. En consecuencia, el Ecuador medio también se moverá rotando en torno a un eje que pasa por el coluro solsticial y produciendo un desplazamiento del equinoccio vernal hacia el oeste (ver Figura 5.3).

Figura 5.3.

Esquema del movimiento instantáneo del Ecuador celeste por Precesión lunisolar.



Nota. Adaptado de *Spherical Astronomy* (p. 245), de Woolard E. W. y Clemence G. M., 1966, Academic Press.

Sin embargo, debe notarse que este desplazamiento estará afectado por pequeñas variaciones seculares adicionales a $d\psi_A/dt$ de origen dinámico. Su consecuencia está en la trayectoria del Polo medio, que no reproduce exactamente una circunferencia ni se repite en revoluciones sucesivas. Además, las series de potencias de las expresiones teóricas no resultan válidas para periodos mayores a algunos cientos de años (Woolard y Clemence, 1966, p. 246). Finalmente, también debe notarse que la trayectoria real del Polo celeste tampoco se realiza estrictamente en un arco de círculo máximo dado que el nodo también se desplaza (Woolard y Clemence, 1966, p. 245).

Movimiento de la Eclíptica

Previamente tratamos la acción de los torques gravitacionales ejercidos sobre la Tierra. En particular, analizamos la acción de los dos cuerpos tractores más importantes: el Sol por su masa y la Luna por su corta distancia a nuestro planeta.

Los torques gravitacionales ejercidos por el resto de los planetas del Sistema Solar sobre la Tierra también deben ser tenidos en cuenta, y aunque su influencia sobre la dirección del momento angular del planeta sea despreciable, la perturbación introducida alterará los elementos orbitales de la Tierra (Green, 1985, p. 211). Esta perturbación es mencionada en los textos clásicos como *Precesión planetaria* (Smart, 1962, p. 236-237; Woolard y Clemence, 1966, p. 236; Green, 1985, p. 211).

Recordando que el plano orbital medio de nuestro planeta define el plano de la Eclíptica en la esfera celeste, la consecuencia de esta perturbación será un movimiento de la Eclíptica y su polo con el tiempo.

A continuación analizaremos en la esfera celeste las consecuencias de estos movimientos sobre las coordenadas estelares usando trigonometría esférica. El desarrollo contemplará las consecuencias del desplazamiento del plano de la Eclíptica para un intervalo Δt de un año o menos tiempo considerando al Ecuador celeste fijo. De modo que si partimos de la configuración geométrica en un instante inicial t_0 (ver Figura 5.4), el instante posterior t_1 será $t_1 = t_0 + \Delta t$.

En la figura 5.4, P es el Polo celeste, K_0 y γ_0 son el Polo ecliptical y el Equinoccio vernal en el instante t_0 , respectivamente. Sea R el punto de intersección entre las dos Eclípticas. A consecuencia de la Precesión planetaria, la Eclíptica en t_0 rotará en torno al nodo $\overline{RR'}$ con una tasa aproximada de $0,5''$ por año de modo que, luego del intervalo Δt , ocupará una nueva posición caracterizada por el polo K_1 y el equinoccio vernal γ_1 en t_1 . A simple vista es fácil ver que el Equinoccio vernal nuevamente se desplaza pero esta vez se moverá a lo largo del Ecuador fijo y en sentido directo.

Dado que el equinoccio se desplaza en la misma dirección en la cual se miden las ascensiones rectas crecientes, si $d\alpha = \alpha_1 - \alpha_0$, luego $d\alpha < 0$ dado que $\alpha_0 > \alpha_1$ porque $\gamma_0 A > \gamma_1 A$. La consecuencia directa sobre las coordenadas ecuatoriales absolutas será

$$\begin{cases} d\alpha = -\chi_A \Delta t \\ d\delta = 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

donde $d\delta = \delta_1 - \delta_0$ y χ_A es la tasa anual de Precesión Planetaria dada por

$$\chi_A = 0,1055'' - 0,0189'' T \quad (5.13)$$

con T expresado en fracción de siglos Julianos contados desde J2000,0 (Lieske et al, 1977, p. 15; Green 1985, p. 214).

Analizaremos en detalle los parámetros teóricos involucrados en la rotación del plano ecliptical desde el triángulo sombreado en la figura 5.4 (arriba). La figura 5.4 (abajo) nos muestra ese triángulo en detalle. Ya hemos visto que el desplazamiento de γ_1 con respecto a γ_0 a lo largo del Ecuador fijo durante Δt será χ_A . Se denomina Π_A al arco $\gamma_0 R$, o lo que es lo mismo a la longitud ecliptical del eje de rotación de la Eclíptica en el instante t_0 . Por otro lado, π_A es el ángulo $\gamma_0 R \gamma_1$ rotado por la Eclíptica durante el intervalo Δt . Si tomamos como época de referencia J2000.0, la teoría nos ofrece valores numéricos para calcular Π_A y π_A

$$\begin{aligned} \Pi_A &= 174,8764^\circ + 0,9137^\circ T \\ \pi_A &= 0,47'' - 0.0007'' T \end{aligned} \quad (5.14)$$

con T expresado en fracción de siglos Julianos contados desde J2000.0 (Lieske et al, 1977, p. 15; Green 1985, p. 214).

Por lo anterior, el ángulo entre las dos Eclípticas estará dado por $(\pi_A \Delta t)$ con Δt expresado en fracción de siglos (Lieske et al, 1977, p. 15).

Antes de calcular la variación a las coordenadas eclipticales por Precesión planetaria, es importante remarcar que el efecto también alterará la oblicuidad de la Eclíptica.

Denominando ε_0 a la oblicuidad de la Eclíptica en t_0 , el respectivo valor de la oblicuidad en t_1 será $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + d\varepsilon$.

Aplicando la fórmula del seno al triángulo esférico de la figura 5.4 (abajo) y considerando que el restante ángulo interior del triángulo es el suplementario de $(\varepsilon_0 + d\varepsilon)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \sin [180^\circ - (\varepsilon_0 + d\varepsilon)] \sin (\chi_A \Delta t) &= \sin (\pi_A \Delta t) \sin \Pi_A \\ \sin (\varepsilon_0 + d\varepsilon) \sin (\chi_A \Delta t) &= \sin (\pi_A \Delta t) \sin \Pi_A \end{aligned} \quad (5.15)$$

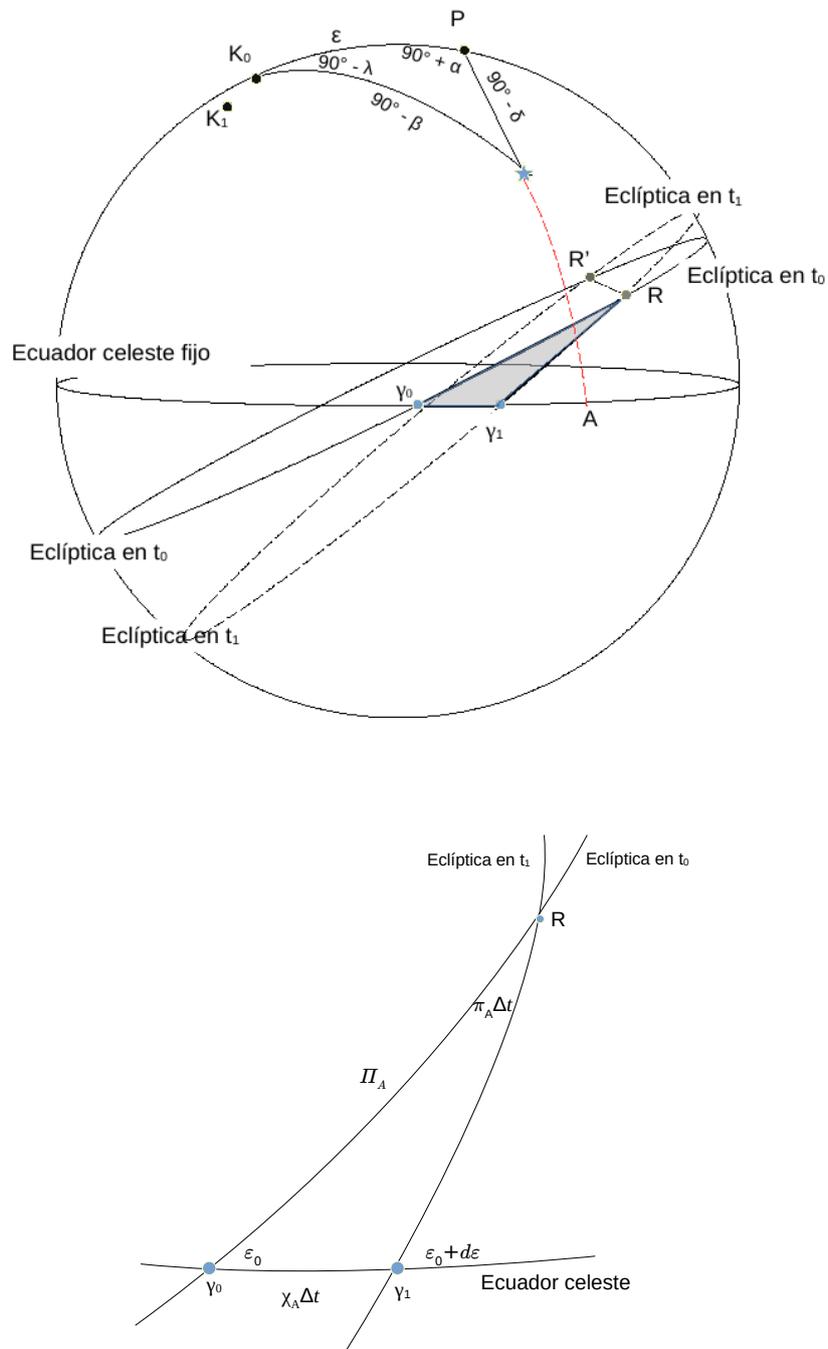
Desde las ecuaciones (5.13) y (5.14), puede verse que los valores de χ_A y π_A resultarán muy pequeños para $\Delta t \leq 1 \text{ año}$. Por lo tanto, aproximando $\varepsilon_0 + d\varepsilon \simeq \varepsilon_0$ y expresando los ángulos en radianes, la ecuación (5.15) quedará

$$\chi_A \approx \pi_A \sin \Pi_A \operatorname{cosec} \varepsilon_0 \quad (5.16)$$

(Lieske et al., 1977, p. 12). Aplicando la fórmula de las cuatro partes al triángulo esférico de la figura 5.4 (abajo) quedará (ver Anexo B, ecuación B.12)

Figura 5.4.

(Arriba) *Movimiento de los planos fundamentales en la esfera celeste debido a la Precesión Planetaria.* (Abajo) *Detalle de los planos, arcos y ángulos involucrados.*



Nota. Por claridad, los desplazamientos se han magnificado y están fuera de escala. Adaptado de *Spherical Astronomy* (p, 212), por Green R. M., 1985, Cambridge University Press.

$$\cotg \Pi_A \operatorname{sen}(\chi_A \Delta t) = \cos(\chi_A \Delta t) \cos \varepsilon_0 + \operatorname{sen} \varepsilon_0 \cotg [180^\circ - (\varepsilon_0 + d \varepsilon)] \quad (5.17)$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (5.17) por $\operatorname{sen}(\varepsilon_0 + d \varepsilon)$,

$$\begin{aligned} \cotg \Pi_A \operatorname{sen}(\chi_A \Delta t) \operatorname{sen}(\varepsilon_0 + d \varepsilon) &= \cos(\chi_A \Delta t) \cos \varepsilon_0 \operatorname{sen}(\varepsilon_0 + d \varepsilon) \\ &\quad - \operatorname{sen} \varepsilon_0 \cotg(\varepsilon_0 + d \varepsilon) \operatorname{sen}(\varepsilon_0 + d \varepsilon) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Aproximando $\operatorname{sen}(\chi_A \Delta t) \approx \chi_A \Delta t$ y $\cos(\chi_A \Delta t) \approx 1$ dado que $\chi_A \Delta t$ está expresado en radianes y resulta ser un ángulo pequeño para $\Delta t \leq 1 \text{ año}$, quedará

$$\cotg \Pi_A (\chi_A \Delta t) \operatorname{sen}(\varepsilon_0 + d \varepsilon) \approx \cos \varepsilon_0 \operatorname{sen}(\varepsilon_0 + d \varepsilon) - \operatorname{sen} \varepsilon_0 \cos(\varepsilon_0 + d \varepsilon) \quad (5.19)$$

$d \varepsilon$ también es una cantidad pequeña para $\Delta t \leq 1 \text{ año}$ y está expresada en radianes. Convenientemente en el primer miembro podemos aproximar $\operatorname{sen}(\varepsilon_0 + d \varepsilon) \approx \operatorname{sen} \varepsilon_0$

$$\cotg \Pi_A (\chi_A \Delta t) \operatorname{sen} \varepsilon_0 \approx \operatorname{sen}[(\varepsilon_0 + d \varepsilon) - \varepsilon_0] \quad (5.20)$$

Aproximando $\operatorname{sen} d \varepsilon \approx d \varepsilon$ quedará

$$d \varepsilon \approx \chi_A \Delta t \cotg \Pi_A \operatorname{sen} \varepsilon_0 \quad (5.21)$$

Finalmente, reemplazando la ecuación (5.16) en (5.21) resulta

$$\boxed{d \varepsilon \approx \pi_A \Delta t \cos \Pi_A} \quad (5.22)$$

Para obtener la variación a las coordenadas eclípticas, considero la estrella S en la Figura 5.4 (arriba) y asumo sus coordenadas (α, δ) y (λ, β) conocidas para el instante inicial t_0 . Aplicando la fórmula del coseno al triángulo esférico de vértices $K_0 P S$ (donde S refiere a la estrella) y operando algebraicamente sobre el resultado, quedará (Green, 1985, p. 213)

$$\operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} \alpha \quad (5.23)$$

Derivamos aplicando regla de la cadena, reemplazamos $d \delta = 0$ y operamos algebraicamente obteniendo

$$\cos \beta \, d\beta = -\cos \delta \cos \alpha \sin \varepsilon \, d\alpha - (\sin \delta \sin \varepsilon + \cos \delta \sin \alpha \cos \varepsilon) \, d\varepsilon \quad (5.24)$$

Aplicando la fórmula del seno al mismo triángulo esférico se obtiene¹²

$$\cos \alpha \cos \delta = \cos \lambda \cos \beta \quad (5.25)$$

Aplicando la fórmula de los cinco elementos

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - \beta) \cos(90^\circ - \lambda) &= \cos(90^\circ - \delta) \sin \varepsilon - \sin(90^\circ - \delta) \cos \varepsilon \cos(90^\circ + \alpha) \\ \cos \beta \sin \lambda &= \sin \delta \sin \varepsilon + \cos \delta \cos \varepsilon \sin \alpha \end{aligned} \quad (5.26)$$

Reemplazando las ecuaciones (5.25), (5.26), (5.21) y (5.12) en (5.24) y operando algebraicamente, quedará (Green, 1985, p. 213)

$$d\beta = \pi_A \Delta t \sin(\Pi_A - \lambda) \quad (5.27)$$

donde $d\beta = \beta_1 - \beta_0$. Para deducir las variaciones en λ , derivamos la ecuación (5.25) aplicando regla de la cadena y recordando que $d\delta = 0$

$$\sin \lambda \cos \beta \, d\lambda = \sin \alpha \cos \delta \, d\alpha - \cos \lambda \sin \beta \, d\beta \quad (5.28)$$

Para reemplazar las coordenadas ecuatoriales celestes en la ecuación (5.28), aplico la fórmula de los cinco elementos sobre el triángulo esférico de la figura 5.4 (abajo)

$$\cos \delta \sin \alpha = \sin \beta \sin \varepsilon - \cos \beta \cos \varepsilon \sin \lambda \quad (5.29)$$

Reemplazando (5.29), (5.12), (5.16) y (5.27) en la ecuación (5.28), operando algebraicamente y ordenando quedará (Green, 1985, p. 213)

$$d\lambda = \pi_A \Delta t [\operatorname{tg} \beta \cos(\Pi_A - \lambda) - \operatorname{cotg} \varepsilon \sin \Pi_A] \quad (5.30)$$

donde $d\lambda = \lambda_1 - \lambda_0$. Finalmente, una expresión más familiar puede obtenerse desde la ecuación (5.30), usando la ecuación (5.16) para expresar $d\lambda$ explícitamente en términos de la tasa anual de Precesión planetaria, resultará (Green, 1985, p. 213)

¹² Nótese que las ecuaciones 5.5a y 5.25 son iguales dado que los métodos de transformación de coordenadas son equivalentes

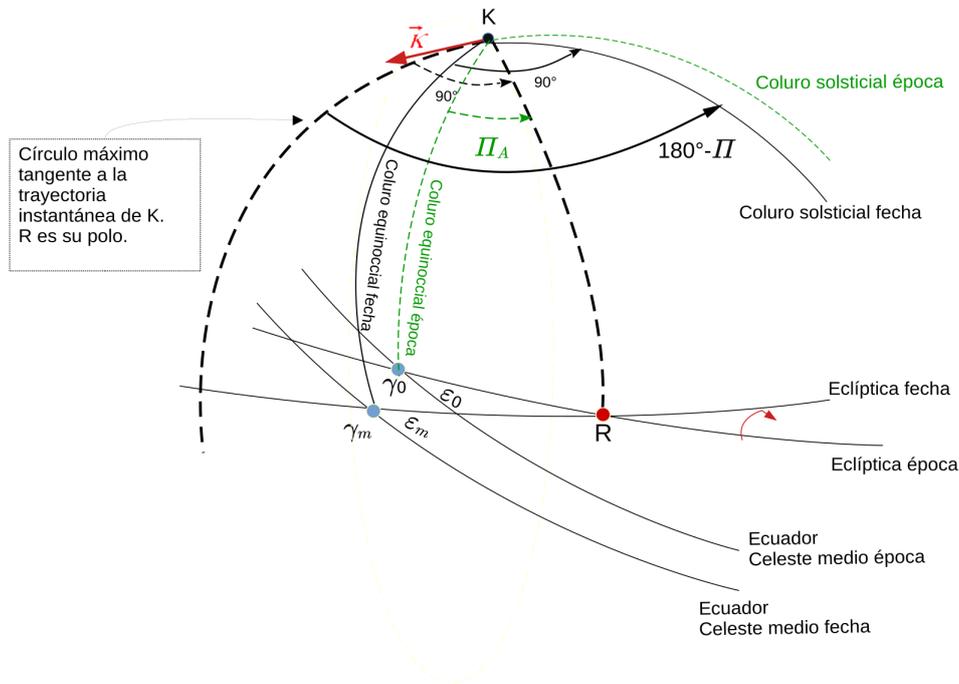
$$\dot{\lambda} = \pi_A \Delta t \operatorname{tg} \beta \cos (\Pi_A - \lambda) - \chi_A \Delta t \cos \varepsilon \quad (5.31)$$

Velocidad precesional instantánea de la Eclíptica

El desplazamiento instantáneo del Polo ecliptical en la esfera celeste no tiene lugar a lo largo de un círculo máximo, sin embargo tomaremos como referencia el círculo máximo que es tangente a la trayectoria instantánea del Polo ecliptical (ver Figura 5.5). Denominaremos genéricamente $(180^\circ - \Pi)$ al ángulo que este círculo máximo forma hacia el Este con el coluro solsticial medio de la fecha (Woolard y Clemence, 1966, p. 176).

Figura 5.5.

Detalle del movimiento instantáneo de la Eclíptica.



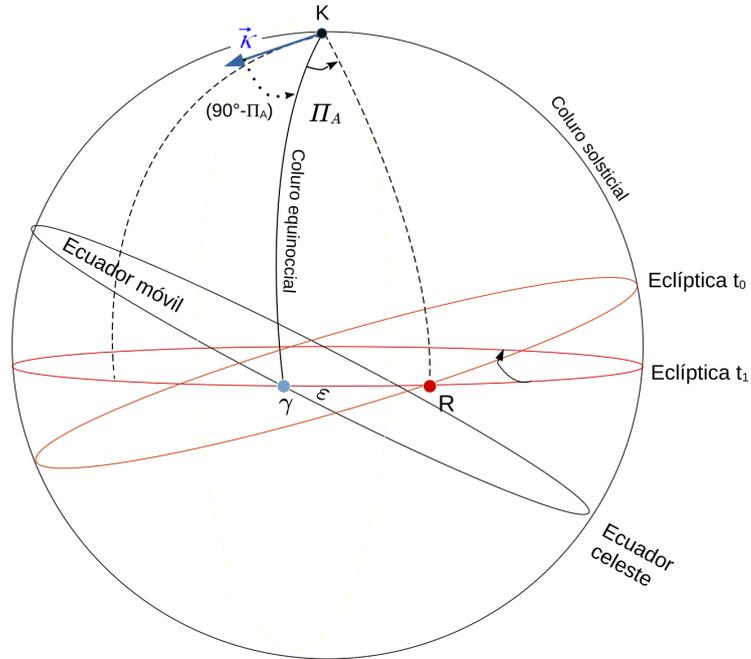
Consideraremos la longitud ecliptical del nodo de la Eclíptica de la fecha con respecto a la Eclíptica fija de la época fundamental¹³ (R) medido sobre la Eclíptica de la fecha, este ángulo será Π (no marcado en el gráfico) y se mide desde el Equinoccio medio de la fecha (γ_m). Si en cambio medimos la longitud ecliptical de R sobre la Eclíptica fija de la época fundamental (γ_0 , ver figura 5.5),

¹³ Presentado en la sección anterior como *eje de rotación de la Eclíptica*

podremos estimar un valor angular conocido (Π_A) calculado desde la teoría dinámica de movimiento de la Tierra en el Sistema Solar.

Figura 5.6.

Esquema del movimiento instantáneo de la Eclíptica por Precesión planetaria



Nota. Adaptado de *Spherical Astronomy* (p. 245), por Woolard E. W. y Clemence G. M., 1966, Academic Press.

Según Woolard y Clemence (1966) la posición instantánea del Polo eclíptico puede representarse por sus coordenadas en un sistema cartesiano rectangular con origen en el Polo eclíptico de la época fundamental, eje x en el coluro equinoccial de la época y eje y en el coluro solsticial de la época hacia la dirección de 90° de longitud (de color verde en la Figura 5.5). De este modo, las coordenadas del Polo eclíptico instantáneo serán $x_{Ecl} = \pi_A \sin \Pi_A$ y $y_{Ecl} = -\pi_A \cos \Pi_A$, donde convencionalmente π_A será negativo para instantes previos a la época fundamental. Aunque se trata de una proyección sobre la esfera celeste, la magnitud de los desplazamientos acumulados durante algunos siglos permiten aproximar el triángulo esférico resultante en un triángulo plano. (Woolard y Clemence, 1966, p. 177). Por esta misma razón, aproximaremos Π como Π_A sin perder generalidad.

Como se mencionó anteriormente, la velocidad instantánea del Polo eclíptico K es tangente al círculo máximo que aproxima su trayectoria, y tiene como módulo $|\vec{k}| = d\pi_A/dt$ (Woolard

y Clemence, 1966, p. 178) y la dirección ($90^\circ - \Pi_A$) al Oeste del coluro equinoccial (ver Figura 5.6).

La aplicación de la regla de la cadena a las expresiones de x_{Ecl} , y_{Ecl} nos proveerán las componentes cartesianas de la velocidad instantánea. La componente $\kappa \sin \Pi_A$ a lo largo del coluro equinoccial medio de la fecha provocará una rotación en el plano de la Eclíptica que no cambia la oblicuidad (ϵ) pero desplazará el equinoccio hacia el Este a lo largo del Ecuador móvil con una tasa χ_A , según la ecuación (5.16) a la cual podemos aproximarnos en radianes dada la magnitud de los ángulos involucrados.

Por otro lado, la componente $-\kappa \cos \Pi_A$ a lo largo del coluro solsticial, rotará a la Eclíptica provocando una variación en la oblicuidad ($\epsilon_m \neq \epsilon_0$, ver ecuación 5.22). Lieske y colaboradores (1977) proveen los valores numéricos de las componentes $\kappa \sin \Pi_A$ y $\kappa \cos \Pi_A$ adaptados a las convenciones y masas planetarias vigentes para la IAU en 1976. Estas expresiones siguen el formalismo de Newcomb, de modo que son equivalentes a las variaciones temporales de $\sin \pi_A \sin \Pi_A$ y $\sin \pi_A \cos \Pi_A$, respectivamente y admiten desarrollarse en series de potencias del tiempo (Lieske et al., 1977).

Precesión general

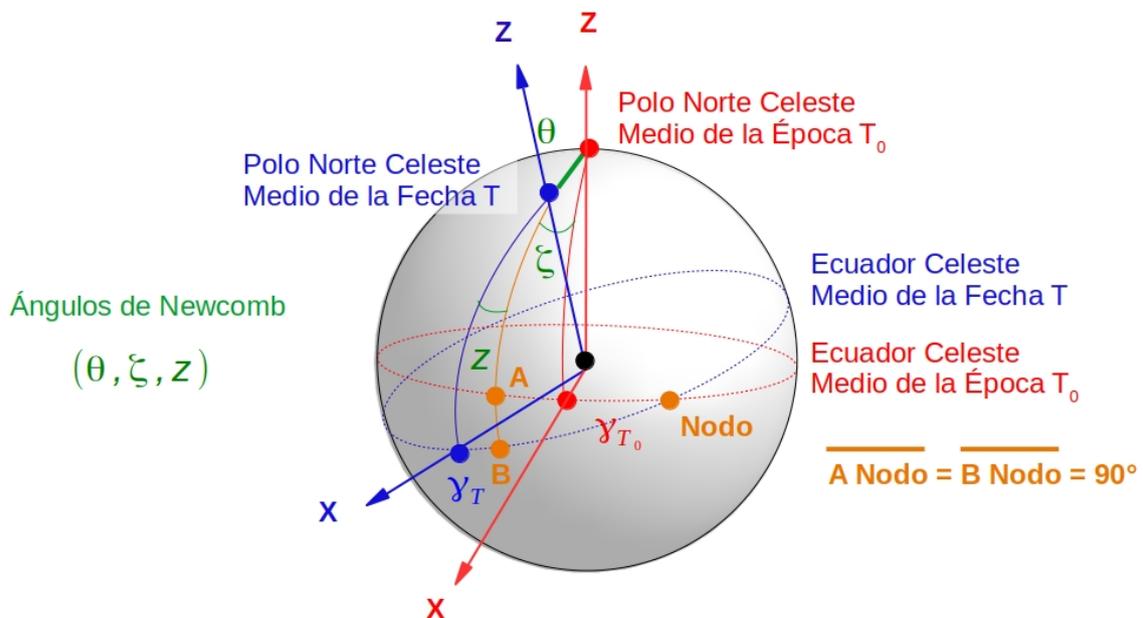
Fórmulas de corrección rigurosas

Para llevar a cabo una transformación rigurosa de las coordenadas de un astro por efectos de Precesión general debemos hacer uso de un método vectorial. La Figura 5.7 ilustra los elementos necesarios para el desarrollo de dicho procedimiento. En efecto, en dicha figura se representan el Polo norte celeste, el Ecuador y Equinoccios medios, y el coluro equinoccial de la época inicial T_0 y de la fecha final T , los cuales son ilustrados en color rojo y azul, respectivamente. Además, se representa el círculo horario que pasa por los Polos celestes de la época inicial T_0 y de la fecha final T , el cual se muestra de color naranja. Tal como se expone en la figura, cada uno de los arcos subtendidos entre los puntos A y B y el nodo entre ambos Ecuadores celestes medios es equivalente a 90° . En color verde se definen los **Ángulos de Newcomb** (θ, ζ, z), (Newcomb, 1906, p. 239-240) los cuales describen el efecto de la Precesión general acumulada sobre las coordenadas ecuatoriales celestes de un astro. La Figura 5.7 muestra también los ejes cartesianos asociados al sistema ecuatorial celeste medio de la época inicial T_0 y de la fecha final T , los cuales son ilustrados en color rojo y azul, respectivamente. En cada uno de los sistemas mencionados, el eje Z tiene la dirección del Polo

norte celeste medio, el eje X está orientado hacia el equinoccio vernal medio, y el eje Y (no representado) apunta hacia la intersección del Ecuador celeste medio con el coluro solsticial.

Figura 5.7.

Representación de los Ángulos de Newcomb



Si conocemos las coordenadas ecuatoriales celestes $(\alpha_{T_0}, \delta_{T_0})$ de un astro referidas a Ecuador y Equinoccio medios de la época inicial T_0 y deseamos calcular las coordenadas ecuatoriales celestes (α_T, δ_T) de dicho astro referidas a Ecuador y Equinoccio medios de la fecha final T , debemos construir la matriz de Precesión haciendo uso de los Ángulos de Newcomb. Dicha matriz está definida a partir del producto entre las siguientes tres matrices de rotación (Lieske et al. 1977):

- Primero $R_Z^{dir}(90^\circ - \zeta)$, la cual lleva el eje X desde el Equinoccio Vernal Medio de la época inicial T_0 γ_{T_0} hacia el Nudo,
- Segundo $R_X^{dir}(\theta)$, la cual lleva el eje Z desde el Polo Norte Celeste Medio de la época inicial T_0 hacia el Polo Norte Celeste Medio de la fecha final T ,
- Tercero $R_Z^{ret}(90^\circ + z)$, la cual lleva el X desde el Nudo hacia el Equinoccio Vernal Medio de la fecha final T γ_T .

Luego, si $\vec{r}_{T_0} = (\cos \delta_{T_0} \cos \alpha_{T_0}, \cos \delta_{T_0} \sin \alpha_{T_0}, \sin \delta_{T_0})$ representa el vector posición de un astro en el sistema ecuatorial celeste medio de la época inicial T_0 , es posible calcular el vector posición \vec{r}_T de dicho astro en el sistema ecuatorial celeste medio de la fecha final T a partir de la expresión

$$\vec{r}_T = R_Z^{ret}(90^\circ + z) R_X^{dir}(\theta) R_Z^{dir}(90^\circ - \zeta) \vec{r}_{T_0} \quad (5.32)$$

El lado derecho de esta ecuación matricial queda expresado en función de las coordenadas ecuatoriales celestes medias del astro $(\alpha_{T_0}, \delta_{T_0})$ referidas a la época inicial T_0 , las cuales representan un dato conocido, y de los Ángulos de Newcomb. A partir de los estudios desarrollados por Lieske et al. (1977), dichos ángulos pueden ser calculados mediante funciones polinómicas del tiempo, a partir de expresiones de la forma

$$\theta = (2004,3109'' - 0,85330'' \tau - 0,000217'' \tau^2) t - (0,42665'' + 0,000217'' \tau) t^2 - 0,041833 t^3 \quad (5.33)$$

$$\zeta = (2306,2181'' + 1,39656'' \tau - 0,000139'' \tau^2) t + (0,30188'' - 0,000345'' \tau) t^2 + 0,017998 t^3 \quad (5.34)$$

$$z = (2306,2181'' + 1,39656'' \tau - 0,000139'' \tau^2) t + (1,09468'' + 0,000066'' \tau) t^2 + 0,018203 t^3 \quad (5.35)$$

donde $\tau = \frac{T_0 - 2000,0}{100}$ y $t = \frac{T - T_0}{100}$, siendo T_0 y T la época inicial y fecha final, respectivamente, ambas expresadas en años.

A modo de ejemplo, si las coordenadas ecuatoriales celestes iniciales que asumimos como dato están referidas a Ecuador y Equinoccio medios J2000,0, $T_0 = 2000,0$ y $\tau = 0$, con lo cual las ecuaciones (5.33), (5.34), y (5.35) se verán muy simplificadas. Vale la pena remarcar que la fecha final T no necesariamente debe ser mayor que la época inicial T_0 .

Una vez cuantificados cada uno de los términos del segundo miembro de la ecuación (5.32), podemos calcular las componentes cartesianas del vector posición del astro $\vec{r}_T = (r_{T,x}, r_{T,y}, r_{T,z})$ referido a Ecuador y Equinoccio medios de la fecha final T . Calculadas tales componentes, la ecuación matricial dada por

$$\begin{pmatrix} \cos \delta_T \cos \alpha_T \\ \cos \delta_T \sin \alpha_T \\ \sin \delta_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{T,x} \\ r_{T,y} \\ r_{T,z} \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

nos lleva a derivar las coordenadas ecuatoriales celestes (α_T, δ_T) del astro bajo consideración referidas a Ecuador y Equinoccio medios de la fecha final T a partir del siguiente esquema de resolución:

$$\delta_T = \arcsen r_{T,z} \quad (5.37)$$

$$\alpha_T = \arctg\left(\frac{r_{T,y}}{r_{T,x}}\right) \quad (5.38)$$

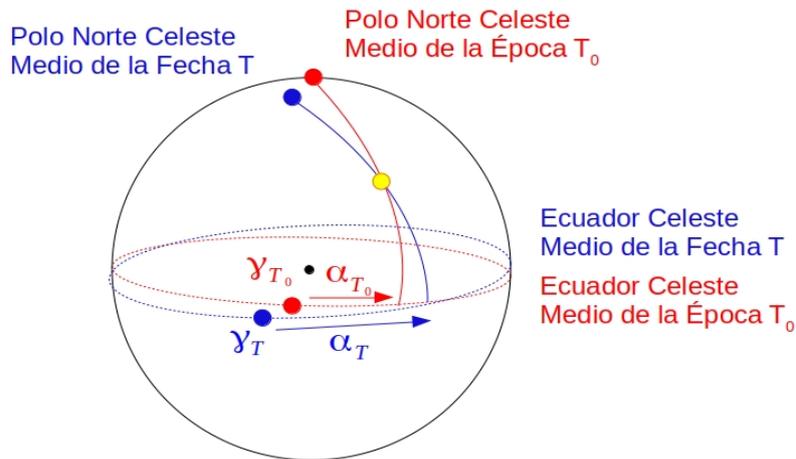
De modo similar a lo mencionado en el Capítulo 2 concerniente a Paralaje, destacamos que es sumamente necesario calcular el cuadrante al cual pertenece la ascensión recta α_T , previo al uso de la ecuación (5.38). En efecto, de acuerdo a la ecuación (5.36) y considerando que $\cos \delta_T$ es una cantidad positiva, el signo de las coordenadas cartesianas $r_{T,x}$ y $r_{T,y}$ nos permite conocer el signo de $\cos \alpha_T$ y $\sin \alpha_T$, respectivamente, lo cual nos lleva a especificar el cuadrante de α_T .

Fórmulas de corrección aproximadas

Si las correcciones en las coordenadas ecuatoriales celestes medias de un astro $\Delta \alpha$ y $\Delta \delta$ por efectos de Precesión general son pequeñas, es posible utilizar fórmulas aproximadas para cuantificar tales cambios. Es importante remarcar que para garantizar que $\Delta \alpha$ y $\Delta \delta$ tengan valores chicos, es necesario que el intervalo entre la época inicial T_0 y la fecha final T sea pequeño, y además que el astro bajo consideración no esté cerca de los Polos Celestes. La Figura 5.8 ilustra de manera esquemática los cambios en las coordenadas ecuatoriales celestes medias por efectos de Precesión general para un astro ubicado lejos y para otro localizado cerca del Polo norte celeste medio. Resulta claro a partir de dicha figura que un astro ubicado cerca de uno de los Polos celestes puede experimentar grandes cambios en ascensión recta incluso cuando el intervalo entre la época inicial y la fecha final resulta ser pequeño. En términos prácticos y con el fin de garantizar que $\Delta \alpha$ y $\Delta \delta$ tengan valores chicos, las fórmulas aproximadas que nos dan las correcciones en las coordenadas ecuatoriales celeste medias por efectos de Precesión general podrán ser utilizadas siempre y cuando el intervalo entre la época inicial y la fecha final $|T - T_0| \lesssim 1$ año y la declinación del astro bajo estudio sea tal que $|\delta| \lesssim 80^\circ$.

Figura 5.8.

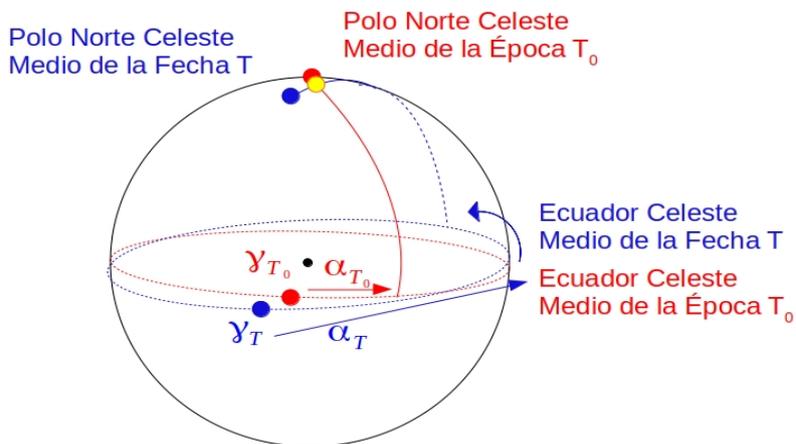
(Arriba) Cambios en las coordenadas ecuatoriales celestes medias por *Precesión general* para astros lejos del Polo celeste. (Abajo) *Idem* para astros cerca del Polo celeste.



$$|\Delta T| = |T - T_0| < 1 \text{ año}$$

Para un astro lejos del polo ($|\delta| < 80^\circ$):

$\Delta \alpha, \Delta \delta$ pequeños



$$|\Delta T| = |T - T_0| < 1 \text{ año}$$

Para un astro cerca del polo ($|\delta| > 80^\circ$):

$\Delta \delta$ pequeño

$\Delta \alpha$ grande

Las fórmulas aproximadas que nos permiten calcular las correcciones en las coordenadas ecuatoriales celestes medias de un astro por efectos de Precesión general son construidas a partir de las ecuaciones (5.7), (5.11) y (5.12), y están dadas por

$$\alpha_T = \alpha_{T_0} + (m + n \operatorname{sen} \alpha_{T_0} \tan \delta_{T_0}) t \quad (5.39)$$

$$\delta_T = \delta_{T_0} + n \cos \alpha_{T_0} t \quad (5.40)$$

donde $m = \psi_A \cos \varepsilon - \chi_A$ y $n = \psi_A \operatorname{sen} \varepsilon$ representan la velocidad anual de Precesión General en ascensión recta y declinación, respectivamente, y $t = \frac{T - T_0}{100}$, siendo T_0 y T la época inicial y fecha final, respectivamente, ambas expresadas en años. De acuerdo con Lieske et al. (1977), las velocidades m y n tienen unidades de ''/siglo y pueden ser cuantificadas a partir de las siguientes expresiones

$$m = 4612,4362'' + 2,79312'' \tau - 0,000278'' \tau^2 \quad (5.41)$$

$$n = 2004,3109'' - 0,85330'' \tau - 0,000217'' \tau^2 \quad (5.42)$$

donde $\tau = \frac{T_0 - 2000,0}{100}$.

Vale la pena destacar que las fórmulas aproximadas dadas por las ecuaciones (5.39) y (5.40) pueden ser derivadas también a partir de la ecuación (5.32), asumiendo que tanto los cambios en las coordenadas ecuatoriales celestes así como también los valores de los Ángulos de Newcomb son cantidades pequeñas, para $|T - T_0| \lesssim 1$ año y astros con $|\delta| \lesssim 80^\circ$.

El desarrollo de este procedimiento es muy interesante ya que permite vincular de manera explícita las velocidades anuales de Precesión general m y n con la tasa de cambio en el tiempo de los Ángulos de Newcomb. En efecto, a partir del tratamiento propuesto, es posible

verificar que $m = \left(\frac{d(\zeta + z)}{dt} \right)_{T_0}$ y $n = \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_{T_0}$ (Lieske et al. 1977).

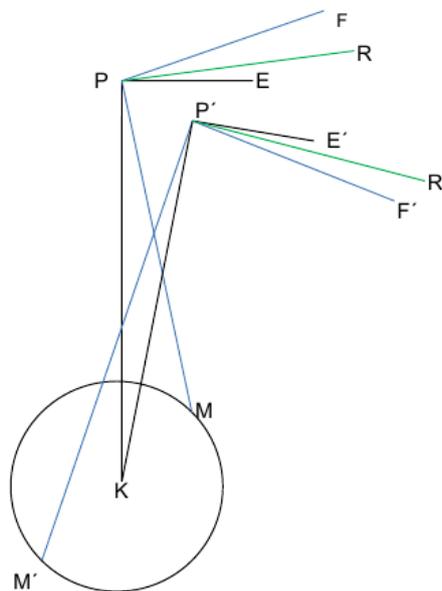
Nutación

Como se menciona más arriba, el efecto neto del torque lunisolar agrega cambios periódicos en la orientación del eje de rotación terrestre visto desde un sistema de referencia celeste; analizaremos su origen y principales características.

El movimiento del eje de rotación en la esfera celeste es la resultante de dos movimientos simultáneos: uno en torno al polo de la Eclíptica de la fecha producido por la acción del Sol y el otro alrededor del Polo móvil de la órbita de la Luna provocado por la acción de la Luna.

Figura 5.9.

Movimiento lunisolar del polo norte terrestre visto desde arriba del polo



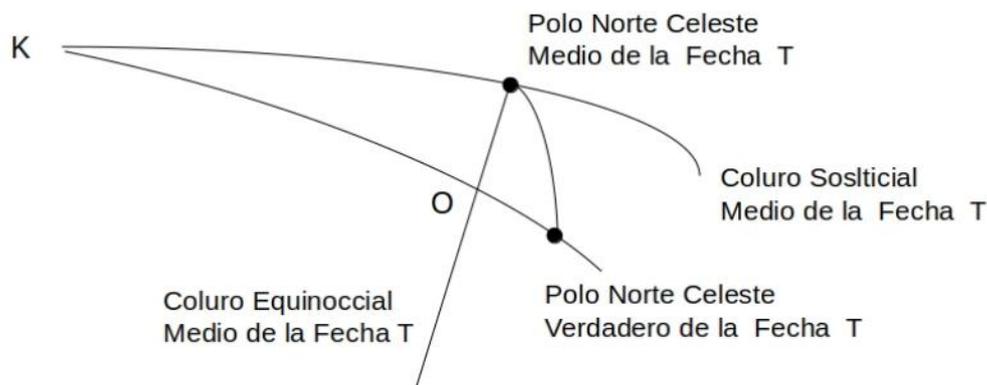
Nota. Basado en *A compendium of Spherical Astronomy with its applications to the determination and reduction of positions of the fixed stars* (p. 247), por Newcomb S., 1906, The Macmillan Company.

La figura 5.9 muestra al Polo norte del Ecuador P, al polo norte de la Eclíptica de la fecha K y al Polo norte de la órbita de la Luna M. Por la acción del Sol, P se mueve en la dirección PE a 90° de la dirección PK; por acción de la Luna P se mueve en la dirección PF a 90° de la dirección PM. El movimiento instantáneo resultante de P por la acción combinada del Sol y de la Luna es en la dirección PR, que depende de las posiciones relativas de P, K y M y de las velocidades relativas en las direcciones PF y PE.

Además, el polo M completa un giro alrededor de K a una distancia prácticamente invariable de aproximadamente 5° en un período de 18,6 años debido a la retrogradación del nodo lunar. Nótese la posición de las direcciones PF y PF' respecto a la de las direcciones PE y PE', respectivamente, en dos instantes distintos de dicho giro. El movimiento de M alrededor de K produce que el movimiento de P en la dirección PF oscile continuamente a uno y otro lado de la dirección PE en 18,6 años. Luego, P describe en la esfera celeste una curva sinuosa a velocidad variable alrededor del polo de la Eclíptica fija, completa un giro en aproximadamente 26000 años al que se le superpone una senoide principal con período igual al de rotación del polo de la órbita lunar M (Woolard, Clemence, 1966, p.182-183).

Figura 5.10.

Movimiento del Polo celeste Verdadero respecto del Polo medio de la fecha



Nota. Adaptado de *A compendium of Spherical Astronomy with its applications to the determination and reduction of positions of the fixed stars* (p. 249), por Newcomb S., 1906, The Macmillan Company.

El Polo norte celeste P es el Polo norte celeste verdadero, P_{vF} , su trayectoria en la esfera celeste puede representarse como un giro alrededor del Polo celeste medio de la fecha P_{mF} en un recorrido casi elíptico de semieje mayor aproximadamente $9''$ a velocidad variable denominado **Nutación**, al mismo tiempo que el Polo celeste medio de la Fecha P_{mF} se mueve de manera uniforme en un círculo alrededor del Polo norte ecliptical de la época K_0 ¹⁴ - Precesión lunisolar- (Woolard, Clemence, 1966, p. 182-183).

En la figura 5.10 se grafican, para un dado instante, las posiciones del Polo norte ecliptical de la fecha, del Polo celeste medio de la fecha, del Polo celeste verdadero de la fecha y del

¹⁴ Considerando despreciables las variaciones seculares en la velocidad de movimiento y en el radio del círculo igual a la oblicuidad media de la fecha

Coluro Solsticial medio de la fecha; sus notaciones son K , P_{mF} , P_{vF} y CS_{mF} , respectivamente. La dirección $P_{mF}O$ perpendicular a CS_{mF} es el coluro equinoccial medio de la fecha. El ángulo en K es pequeño ya que no supera los $20''$, el valor máximo de la distancia $P_{mF}P_{vF}$ es aproximadamente $10''$, por lo que el triángulo $P_{mF}OP_{vF}$ puede considerarse plano.

Bajo esta restricción, la componente OP_{vF} de la Nutación será el cambio en oblicuidad, y $P_{mF}KP_{vF}$ el cambio en la Precesión lunisolar producido por la Nutación, los que se representan por $\Delta \varepsilon$ y $\Delta \psi$ (Newcomb, 1906, p. 248-249).

La Nutación describe el movimiento del Polo celeste verdadero de la fecha relativo al Polo celeste medio de la fecha y puede resolverse en las componentes en longitud $\Delta \psi$ y en oblicuidad $\Delta \varepsilon$, que se muestran en la figura 5.11 (ESAA 1992, p. 114).

El modelo de nutación IAU 1980 (Seidelmann, 1982) describe este movimiento de corto período del eje de rotación terrestre respecto a un sistema de coordenadas celeste fijo adoptando un modelo de Tierra no rígida e incluye el movimiento debido a los torques externos debidos a la Luna, y en menor medida al Sol y a los planetas sobre el abultamiento ecuatorial – Nutación forzada- y cualquier Nutación libre que puede excitarse por procesos internos que se determinan sólo por observaciones. El Polo de referencia tanto para la Nutación como para el movimiento del polo (ver capítulo 8) se denomina Polo celeste de Efemérides (CEP), y tiene la ventaja de carecer de componentes de movimiento diurno o casi diurno respecto a un sistema de coordenadas celeste fijo o a un sistema de coordenadas terrestre fijo (ESAA, 1992, p.109).

Este modelo provee desarrollos en serie para la Nutación en longitud y en oblicuidad

$$\Delta \psi = \sum_{i=1}^n S_i \sin A_i \quad (5.43a)$$

$$\Delta \varepsilon = \sum_{i=1}^n C_i \cos A_i \quad (5.43b)$$

$$A_i = a_i l + b_i l' + c_i F + d_i D + e_i \Omega \quad (5.43c)$$

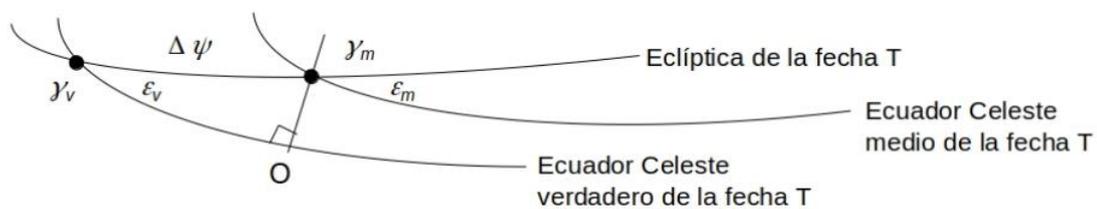
Los 106 términos de las series de la Nutación quedan definidas por los multiplicadores a_i , b_i , c_i , d_i y e_i — enteros—, los coeficientes S_i , C_i y los argumentos fundamentales l , l' , F , D y Ω funciones de la longitud media de la Luna, del perigeo lunar, del Sol, del perigeo solar, del nodo

lunar y del nodo ascendente de la órbita lunar medida desde el Equinoccio medio de la fecha (ver tablas 3.222.1 y 3.222.2 en ESAA, 1992, p. 118-119).

La precisión de las observaciones realizadas con la técnica VLBI motivaron una mejora del modelo con la introducción de nuevos términos, tales como los directos e indirectos y la Nutación planetaria, requeridos ante una precisión del milisegundo de arco (ver tablas 3.224.1 y 3.224.2 ESAA, 1992, p. 116-117).

Figura 5.11.

Componentes de la Nutación



Nota. Adaptado de *A revision to the Explanatory Supplement of the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac* (p. 114), por Seidelmann P. K. (ed.), 1992, University Science Books.

Similar al caso de la Precesión general, la transformación rigurosa de las coordenadas de un astro por los efectos de la Nutación se realiza aplicando tres rotaciones que utilizan las componentes de la Nutación y la oblicuidad media de la fecha ϵ_m . La figura 5.12 muestra, en el instante de observación T, los parámetros recién mencionados como así también los ejes cartesianos de los sistemas celestes materializados por el Ecuador y Equinoccio medios de la fecha y por el Ecuador y Equinoccio verdaderos de la fecha.

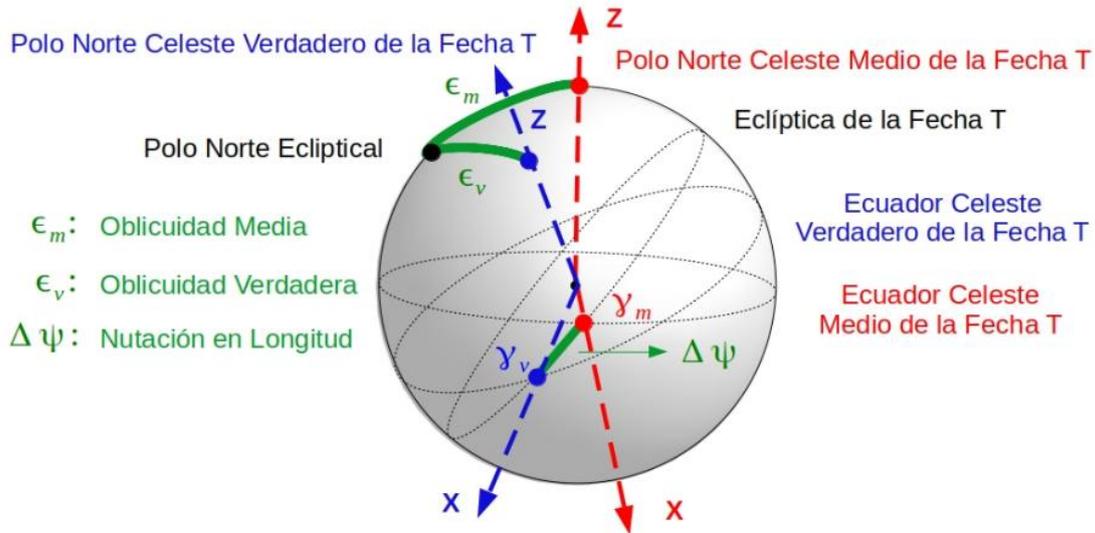
La secuencia de las tres rotaciones que transforma el sistema Ecuador y Equinoccio medios de la fecha en el sistema Ecuador y Equinoccio verdaderos de la fecha es la siguiente:

- Primero: $R_x^{dir}(\epsilon_m)$ lleva el eje Z del sistema celeste materializado por el Ecuador y Equinoccio medios de la fecha al eje Z al Polo norte ecliptical de la fecha.
- Segunda: $R_z^{ret}(\Delta\psi)$ lleva el eje X del sistema celeste materializado por el Ecuador y Equinoccio medios de la fecha al eje X del sistema celeste materializado por el Ecuador y Equinoccio verdadero de la fecha.

- Tercera: $R_x^{ret}(\epsilon_v)$ lleva el eje Z en el Polo norte ecliptical de la fecha al eje Z del sistema celeste materializado por el Ecuador y Equinoccio verdadero de la fecha.

Figura 5.12.

Construcción de la matriz de Nutación.



Luego, el versor dirección \widehat{s}_{mF} en el sistema celeste materializado por el Ecuador y Equinoccio medios de la fecha se transforma en el versor dirección \widehat{s}_{vF} referido al sistema celeste materializado por el Ecuador y Equinoccio verdaderos de la fecha por:

$$\widehat{s}_{vF} = R_x^{ret}(\epsilon_v) R_z^{ret}(\Delta \psi) R_x^{dir}(\epsilon_m) \widehat{s}_{mF} \quad (5.44)$$

Las coordenadas ecuatoriales celestes del astro en el sistema de referencia celeste materializado por el Ecuador y Equinoccio verdaderos de la fecha se calculan con el mismo procedimiento detallado en las ecuaciones (5.36) a (5.38).

Referencias

- Dehant, V., Mathews, P. M. (2015). *Precession, nutation and wobble of the Earth*. Cambridge University Press.
- (ESAA) Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac (1992) *A revision to the Explanatory Supplement of the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac*. P.K. Seidelmann (ed.). Mill Valley, CA. University Science Books.
- Green, R. M. (1985). *Spherical Astronomy*, Cambridge University Press.
- Lieske, J. H., Lederle, T., Fricke, W., Morando, B. (1977). Expressions for the precession quantities based upon the IAU/1976/system of astronomical constants. *Astronomy and Astrophysics*, 58, 1-16.
- Lieske, J. H. (1979). Precession Matrix Based on IAU (1976) System of Astronomical Constants. *Astronomy and Astrophysics*, 73, 282-284.
- Newcomb, S. (1906). *A compendium of Spherical Astronomy with its applications to the determination and reduction of positions of the fixed stars*. The Macmillan Company.
- Seidelmann, P. K. (1982). 1980 IAU theory of nutation: The final report of the IAU working group on nutation. *Celestial mechanics*, 27(1), 79-106.
- Smart W. M. (1953). *Celestial Mechanics*. J Wiley & sons.
- Smart W. M. (1962) *Text-Book on Spherical Astronomy*. Quinta edición. Cambridge University Press
- Walter, H. G., Sovers, O. (2000). *Astrometry of fundamental catalogues: the evolution from optical to radio reference frames*. Springer Science & Business Media.
- Woolard, E. W. y Clemence G. M. (1966) *Spherical Astronomy*. Academic Press.

CAPÍTULO 6

Movimiento propio

María Silvina De Biasi

Durante muchos siglos, las observaciones mostraban que las posiciones de las estrellas en el cielo mantenían las configuraciones que formaban entre sí, por eso se las denominaba “estrellas fijas” a diferencia de los planetas o estrellas errantes. A principios del siglo XVIII esta situación se modifica cuando Halley detecta cambios considerables en las posiciones de Arturo (α Boo) , Sirio (α CMa) y Aldebaran (α Tau) respecto a las posiciones de otras estrellas; a esta evidencia se suman las obtenidas por Tobias Mayer de la comparación de observaciones distanciadas en 50 años (Woolard, Clemence, 1966, p. 303). Las estrellas, entonces, se mueven.

Componentes del movimiento estelar

Siguiendo a Green (Green, 1988, p. 259-268), el modelo adoptado, entonces, para describir este fenómeno supone que:

- El sistema de referencia celeste con origen en el Baricentro del Sistema Solar es inercial,
- La velocidad de la estrella con respecto al Baricentro Sistema Solar –que consideraremos como el Sol, sin pérdida de generalidad- cambia muy lentamente a lo largo de una rotación galáctica, aproximadamente 2×10^8 años. En consecuencia, esta velocidad se adopta constante, lo cual es una buena aproximación y muy útil, resultando entonces el movimiento de la estrella relativa al Sol rectilíneo y uniforme en el espacio.

En el sistema de referencia adoptado, la trayectoria espacial de la estrella entre los instantes t_0 y $t_0 + dt$, es una recta, que se observa en el plano del cielo como el desplazamiento angular θ , como lo muestra la figura 6.1

La velocidad de la estrella relativa al Sol V medida en km/seg se descompone en la componente radial V_r y la componente tangencial V_T según:

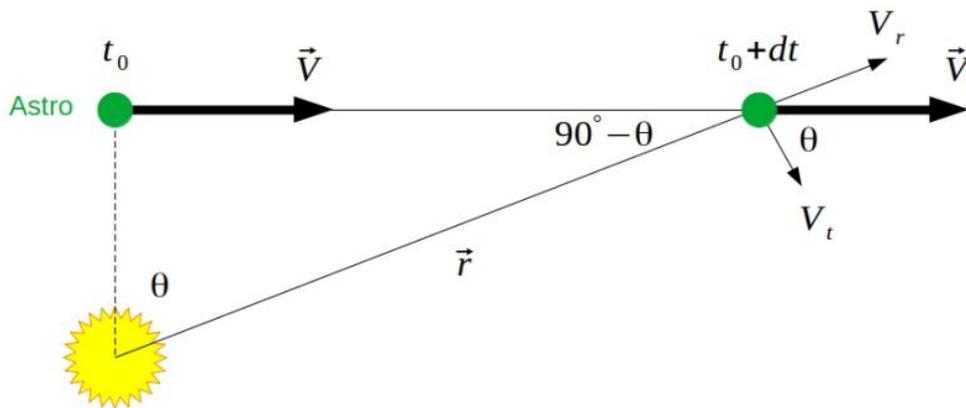
$$\vec{V} = V_r \hat{s} + \vec{V}_t \quad (6.1)$$

$$V_r = \vec{V} \cdot \hat{s} \quad (6.2)$$

$$\vec{V}_t = \hat{s} \times (\hat{s} \times \vec{V}) \quad (6.3)$$

Figura 6.1.

Movimiento espacial de la estrella relativo al Sol



Para facilitar los desarrollos, la trayectoria de la estrella en el instante inicial es perpendicular a la visual, r se mide en km , θ en radianes y los instantes de tiempo en años. Como resulta útil expresar las velocidades en km/seg y denominando \tilde{n} al número de segundos en 1 año igual a $3,157 \times 10^7$, los módulos de las componentes se expresan

$$V_r = V \sin \theta = \frac{1}{\tilde{n}} \frac{dr}{dt} \quad (6.4)$$

$$V_T = V \cos \theta = \frac{1}{\tilde{n}} r \frac{d\theta}{dt} \quad (6.5)$$

El movimiento propio de una estrella se define como el desplazamiento angular en un año en la esfera celeste referido a un Ecuador y Equinoccio medios. Su unidad usual es "/año, para lo cual:

$$\mu = \frac{d\theta}{dt} \frac{1}{\text{sen } 1''}, [\mu] = ''/\text{año} \quad (6.6)$$

De las ecuaciones 6.5 y 6.6, se encuentra fácilmente una relación entre la velocidad tangencial y el movimiento propio siendo conocida la paralaje.

Utilizando la ecuación $r = \frac{a}{\pi \text{ sen } 1''}$ expresando en km , con $[\pi] = ''$ y $a = 1UA = 1,496 \times 10^8 km$,

V_T resulta:

$$V_T = V \cos \theta = \frac{a}{\tilde{n}} \frac{\mu}{\pi} = 4,74 \frac{\mu}{\pi} \quad (6.7)$$

Las estrellas con mayor movimiento propio son las de Barnard (HIP 87937) y la de Kapteyn (HIP 24186), con valores de 10,393 "/año y 8,644 "/año y magnitudes visuales 9,51 y 8,53 respectivamente (fuente: Simbad, <http://simbad.cds.unistra.fr/simbad/>).

Componentes del movimiento propio en ascensión recta y declinación

El movimiento propio se caracteriza por su módulo μ y por su ángulo de posición ϕ —medido desde el círculo horario de la estrella hacia su trayectoria—. Sin embargo, se expresa generalmente en términos de la velocidad anual de cambio (secular) en ascensión recta μ_α y en declinación μ_δ con respecto a un marco de referencia estándar como: $\mu_\alpha = d\alpha/dt$ y $\mu_\delta = d\delta/dt$, donde $[\mu_\alpha] = \text{seg}/\text{año}$; $[\mu_\delta] = ''/\text{año}$.

En la figura 6.2, siguiendo el desarrollo de Green (1988, p. 261-262), $X(\alpha, \delta)$ y $X'(\alpha + d\alpha, \delta + d\delta)$ son las posiciones de la estrella en los instantes t_0 y $t_0 + dt$ referidos a

Ecuador E y Equinoccio y Medios de una cierta Época T , PNC es el polo de E . El ángulo $PNC \hat{X} X'$ es ϕ , el ángulo de posición del movimiento propio con valores de 0 a 360° .

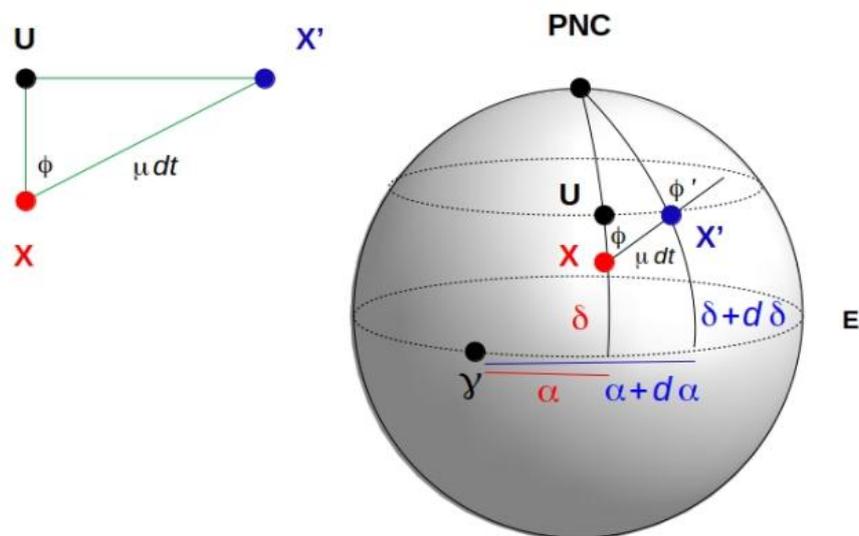
Al asumir que V es constante, la trayectoria de la estrella y el Baricentro del Sistema Solar definen un plano que interseca a la esfera celeste en un círculo máximo.

Consideremos el arco del círculo menor UX' con polo PNC . Es fácil ver que, al primer orden, resulta

$$UX' = d\alpha \cos \delta \tag{6.8}$$

Figura 6.2.

Parámetros y componentes del movimiento propio



Nota. Adaptado de *Spherical Astronomy* (p. 261), por Green R. M., 1985, Cambridge University Press.

$$UX = d\delta \tag{6.9}$$

La pequeña figura UXX' puede aproximarse al triángulo plano rectángulo $\hat{U} = 90^\circ$, luego

$$UX' = \mu dt \operatorname{sen} \phi \tag{6.10}$$

$$UX = \mu dt \cos \phi \quad (6.11)$$

Siendo μ_α y μ_δ las derivadas respecto al tiempo de las coordenadas α y δ respectivamente, expresadas en las unidades prácticas $[\mu_\alpha] = \text{seg/año}$; $[\mu_\delta] = "/\text{año}$, se obtiene:

$$\mu_\alpha = \frac{d\alpha}{dt} = \mu \sin \phi \sec \delta \quad (6.12)$$

$$\mu_\delta = \frac{d\delta}{dt} = \mu \cos \phi \quad (6.13)$$

Luego, en cualquier instante t podemos conocer las coordenadas de la estrella $(\alpha, \delta)(t)$ en función de sus coordenadas $(\alpha, \delta)(t_0)$ y las componentes del movimiento propio (μ_α, μ_δ) en un instante inicial t_0 , referidas a Ecuador E y Equinoccio y Medios de una cierta Época T :

$$\alpha(t) = \alpha(t_0) + \mu_\alpha(t - t_0) \quad (6.14)$$

$$\delta(t) = \delta(t_0) + \mu_\delta(t - t_0) \quad (6.15)$$

Cambios intrínsecos en el movimiento propio

Las expresiones 6.14 y 6.15 son equivalentes a un desarrollo en serie de Taylor al primer orden, pero resultan insuficientes en los casos de estrellas cercanas con gran movimiento propio, donde es necesario incluir un término de segundo orden obtenido de las derivadas temporales de μ_α y μ_δ .

Se derivan las componentes del movimiento propio, sin cambiar el sistema de referencia celeste, materializado por el Ecuador E y Equinoccio y Medios de una cierta Época T , por lo tanto los cambios en dichas componentes se deben al movimiento de la estrella relativo al Sol en la esfera celeste, conocidos como *cambios intrínsecos en el movimiento propio*.

El procedimiento es sencillo, sólo hay que respetar las unidades en cada término. Derivando las ecuaciones 6.12 y 6.13 se obtiene

$$\frac{d\mu_\alpha}{dt} = \frac{1}{15} \frac{d\mu}{dt} \operatorname{sen} \phi \operatorname{sec} \delta + \frac{1}{15} \mu \cos \phi \operatorname{sec} \delta \frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{15} \mu \operatorname{sen} \phi \operatorname{sec} \delta \operatorname{tg} \delta \frac{d\delta}{dt} \operatorname{sen} 1'' \quad (6.16)$$

$$\frac{d\mu_\delta}{dt} = \frac{d\mu}{dt} \cos \phi - \mu \operatorname{sen} \phi \frac{d\phi}{dt} \quad (6.17)$$

que pueden expresarse, en función de 6.12 y 6.13

$$\frac{d\mu_\alpha}{dt} = \frac{1}{15} \frac{d\mu}{dt} \operatorname{sen} \phi \operatorname{sec} \delta + \frac{1}{15} \mu_\delta \operatorname{sec} \delta \frac{d\phi}{dt} + \mu_\alpha \mu_\delta \operatorname{tg} \delta \operatorname{sen} 1'' \quad (6.18)$$

$$\frac{d\mu_\delta}{dt} = \frac{d\mu}{dt} \cos \phi - 15 \mu_\alpha \cos \delta \frac{d\phi}{dt} \quad (6.19)$$

Surgen nuevas incógnitas, las derivadas del ángulo de posición $d\phi/dt$ y del movimiento propio total $d\mu/dt$. Calcularemos primero $d\phi/dt$ aplicando el teorema del seno al triángulo esférico PXX' de la figura 6.2:

$$\cos \delta \operatorname{sen} \phi = \cos \delta' \operatorname{sen} \delta' \quad (6.20)$$

Esto significa que la estrella se mueve a lo largo del círculo máximo XX' manteniendo la cantidad $\cos \delta \operatorname{sen} \phi$ constante, por consiguiente su derivada es nula y se obtiene:

$$\frac{d\phi}{dt} = \operatorname{tg} \phi \operatorname{tg} \delta \operatorname{sen} 1'' \frac{d\delta}{dt} \quad (6.21)$$

que puede expresarse como

$$\frac{d\phi}{dt} = 15 \mu_\alpha \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} 1'' \quad (6.22)$$

A continuación calcularemos la aceleración perspectiva $d\mu/dt$ derivando la ecuación 6.5 para la velocidad tangencial V_T y combinándola con la ecuación 6.6 y la expresión de r utilizada en 6.7

$$-V \operatorname{sen} \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\tilde{n}} \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \frac{r}{\tilde{n}} \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (6.23)$$

$$-V_r \mu \operatorname{sen} 1'' = V_r \mu \operatorname{sen} 1'' + \frac{1}{\tilde{n}} \frac{a}{\pi \operatorname{sen} 1''} \frac{d\mu}{dt} \operatorname{sen} 1'' \quad (6.24)$$

$$\frac{d\mu}{dt} = -2 \frac{\tilde{n}}{a} V_r \mu \pi \operatorname{sen} 1'' = -0,422 V_r \mu \pi \operatorname{sen} 1'' \quad (6.25)$$

Reemplazando las expresiones obtenidas en 6.22 y 6.25 en 6.18 y 6.19 resulta:

$$\frac{d\mu_\alpha}{dt} = -0,422 V_r \mu_\alpha \pi \operatorname{sen} 1'' + 2 \mu_\alpha \mu_\delta \operatorname{tg} \delta \operatorname{sen} 1'' \quad (6.26)$$

$$\frac{d\mu_\delta}{dt} = -0,422 V_r \mu_\delta \pi \operatorname{sen} 1'' - 225 \mu_\alpha^2 \operatorname{sen} \delta \cos \delta \operatorname{sen} 1'' \quad (6.27)$$

Finalmente, las expresiones 6.14 y 6.15 de las coordenadas de la estrella $(\alpha, \delta)(t)$ en cualquier instante t , a partir de sus coordenadas $(\alpha, \delta)(t_0)$ y las componentes del movimiento propio (μ_α, μ_δ) en un instante inicial t_0 , se completan como:

$$\alpha(t) = \alpha(t_0) + \mu_\alpha(t-t_0) + \frac{1}{2} \frac{d\mu_\alpha}{dt} (t-t_0)^2 \quad (6.28)$$

$$\delta(t) = \delta(t_0) + \mu_\delta(t-t_0) + \frac{1}{2} \frac{d\mu_\delta}{dt} (t-t_0)^2 \quad (6.29)$$

donde todos los parámetros intervinientes están referidos a Ecuador E y Equinoccio y Medios de una cierta Época T . Estas ecuaciones son válidas para la mayoría de las estrellas en un intervalo de tiempo de hasta 100 años. Sin embargo, las estrellas cercanas de gran movimiento propio requieren la inclusión del término de segundo orden.

Vector movimiento propio

Si el versor dirección de la estrella en el instante t_0 es $\hat{s} = (\cos \alpha \cos \delta, \sin \alpha \cos \delta, \sin \delta)$, se puede considerar al movimiento propio -desplazamiento angular de una estrella en 1 año a lo largo de un círculo máximo en el plano del cielo- como el vector $\vec{\mu}$

$$\vec{\mu} = \frac{d\hat{s}}{dt} = \frac{d}{dt} (\cos \alpha \cos \delta, \sin \alpha \cos \delta, \sin \delta) \quad (6.30)$$

Las componentes rectangulares en “/año resultan

$$\mu_x = -15 \sin \alpha \cos \delta \mu_\alpha - \cos \alpha \sin \delta \mu_\delta \quad (6.31)$$

$$\mu_y = 15 \cos \alpha \cos \delta \mu_\alpha - \sin \alpha \sin \delta \mu_\delta \quad (6.32)$$

$$\mu_z = \cos \delta \mu_\delta \quad (6.33)$$

Los módulos de los vectores velocidad tangencial \vec{V}_T y movimiento propio $\vec{\mu}$ se relacionan según la ecuación 6.7, por lo tanto

$$\vec{V}_T = 4,74 \frac{\vec{\mu}}{\pi} \quad (6.34)$$

Finalmente, el vector velocidad de la estrella relativa al Sol \vec{V} presentado en 6.1 resulta

$$\vec{V} = V_r \hat{s} + 4,74 \frac{\vec{\mu}}{\pi} \quad (6.35)$$

Cambios por Precesión en el movimiento propio

En el capítulo 5 se ha analizado cómo la Precesión afecta las coordenadas de una estrella, es decir, a su versor dirección \hat{s} . Las componentes del movimiento propio indican la velocidad anual de cambio de dichas coordenadas, por lo tanto la Precesión también las modificará.

Sea $\vec{\mu}$ el vector movimiento propio expresado en el sistema celeste materializado por el Ecuador E y Equinoccio γ Medios de una cierta Época T en el instante t_0 y $\vec{\mu}'$ el vector movimiento propio expresado en el sistema celeste materializado por el Ecuador E' y Equinoccio γ' Medios de una cierta Fecha T' en el mismo instante t_0 .

El procedimiento más preciso para la transformación entre ambos vectores es aplicar la matriz de Precesión $P_{TaT'}$, que transforma el sistema celeste de Ecuador E y Equinoccio Medios en una cierta Época T al sistema celeste de Ecuador E' y Equinoccio γ' Medios en una cierta Fecha T'

$$\vec{\mu}' = P_{TaT'} \vec{\mu} \quad (6.36)$$

donde $P_{TaT'}$ es la matriz cuyos coeficientes están dados en las ecuaciones 5.32 a 5.35.

Dado que las componentes del movimiento propio son cantidades pequeñas, los cambios por Precesión son cantidades de segundo orden. Retomemos, entonces, las derivadas de (μ_α, μ_δ) -ecuaciones 6.16 y 6.17- que son válidas para cualquier efecto que las produzca.

Resulta claro que la Precesión no afecta al módulo μ

$$\frac{d\mu}{dt} = 0 \quad (6.37)$$

En cambio, el ángulo de posición ϕ se verá afectado. Para deducir la expresión de la velocidad de cambio precesional $d\phi/dt$, utilizaremos la figura 6.3 donde P y P' son las posiciones del Polo celeste Medio en dos épocas distantes separadas por un intervalo pequeño dt , siendo E, E', γ y γ' los Ecuadores y Equinoccios Medios respectivos y K el Polo de la Eclíptica - considerado fijo-. La posición de la estrella en la Esfera Celeste es S y se desplaza por movimiento propio a lo largo del círculo máximo SR . Las coordenadas de la estrella referidas al Polo P y Equinoccio γ son (α, δ) y (α', δ') las referidas al Polo P' y Equinoccio γ' .

Asumimos que el intervalo dt es pequeño. Entonces la trayectoria de P a P' alrededor de K debido a la Precesión lunisolar se produce a lo largo del coluro equinoccial del Ecuador E , por lo que el arco PP' es igual a $\psi \sin \varepsilon dt$ -equivalente a $n dt$ -. Además, el ángulo $\widehat{KPP'}$, es igual a 90° , luego el ángulo $\widehat{P'PS}$ es igual a α .

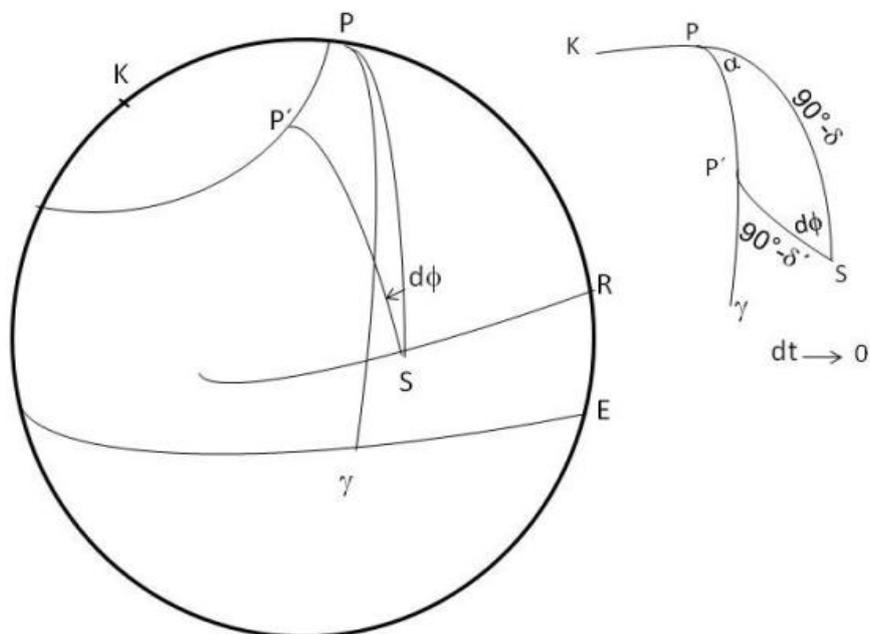
Conocidos lados y ángulos del triángulo $PP'S$, se aplica el teorema del seno y haciendo

uso de $\frac{d\delta}{dt} = n \text{ sen } \alpha \text{ sen } 1''$ resulta:

$$\text{sen } d\phi \cos \delta' = \text{sen}(n dt) \text{sen } \alpha \quad (6.38)$$

Figura 6.3

Cambios en el ángulo de posición por Precesión



Nota. Basado en *Spherical Astronomy* (p. 267), por Green R. M., 1985, Cambridge University Press.

Como el intervalo dt es pequeño, δ' tiende a δ y la ecuación 6.38 se transforma en

$$\frac{d\phi}{dt} = n \text{ sen } \alpha \text{ sec } \delta \text{ sen } 1'' \quad (6.39)$$

Reemplazando la expresión $d\delta/dt$ debida a la Precesión lunisolar y las obtenidas en 6.37, 6.38 y 6.39 en las ecuaciones 6.16 y 6.17, se llega a las siguientes expresiones de las velocidades de cambio por Precesión de (μ_α, μ_δ)

$$\frac{d\mu_\alpha}{dt} = n \left(\mu_\alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \delta + \frac{\mu_\delta}{15} \operatorname{sen} \alpha \sec^2 \delta \right) \operatorname{sen} 1'' \quad (6.40)$$

$$\frac{d\mu_\delta}{dt} = -15n \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} 1'' \quad (6.41)$$

Finalmente, se obtienen las componentes del movimiento propio en el sistema celeste materializado por el Ecuador E' y Equinoccio γ' Medios de la Época T' siendo conocidas las componentes en el sistema celeste materializado por el Ecuador E y Equinoccio γ Medios de la Época T resultan:

$$\mu_\alpha|_{T'} = \mu_\alpha|_T + \frac{d\mu_\alpha}{dt} (T' - T) \quad (6.42)$$

$$\mu_\delta|_{T'} = \mu_\delta|_T + \frac{d\mu_\delta}{dt} (T' - T) \quad (6.43)$$

En caso de que $(T' - T)$ sea un intervalo de tiempo extenso, debe tomarse el valor de n correspondiente a la mitad de dicho intervalo.

Referencias

- Green, R. M. (1985). *Spherical Astronomy*. Cambridge University Press.
 Woolard, E.W, Clemence, G.M. (1966). *Spherical Astronomy*. Academic Press Inc.

CAPÍTULO 7

Catálogos Estelares

María Silvina De Biasi

Posiciones estelares

Hemos estudiado varios efectos que producen variaciones en las coordenadas de las estrellas, siendo los más importantes la paralaje, la aberración, la precesión, la nutación y el movimiento propio.

Luego, resulta ambiguo conocer únicamente las coordenadas (α, δ) del objeto celeste observado o a estudiar, ya que su valor no especifica: a) el origen del sistema de referencia celeste en el que se expresan, b) la orientación de dicho sistema, ni c) el instante cuando el objeto tiene esa dirección.

Hay varias posibilidades que involucran los diversos fenómenos vistos en capítulos anteriores, por ejemplo para a) el de paralaje, para b) los de precesión y nutación y c) se trata de un parámetro del movimiento propio de la estrella.

Siguiendo a Green (Green, 1988, p.284.-285), la estandarización de las posibilidades introduce las siguientes definiciones:

La *posición media* de una estrella son sus coordenadas (α_M, δ_M) en una esfera celeste baricéntrica referidas al Ecuador y Equinoccio Medios de la fecha - instante de observación. La posición media varía por los efectos de precesión y movimiento propio. Un caso particular es a *posición media estándar* de una estrella, definida como sus coordenadas (α_0, δ_0) en un sistema de referencia celeste baricéntrico materializado por Ecuador y Equinoccio Medios de la Época fundamental. Las posiciones medias estándar son las que conforman los catálogos fundamentales.

La *posición verdadera* de una estrella son sus coordenadas (α_V, δ_V) en un sistema de referencia celeste baricéntrico materializado por Ecuador y Equinoccio verdaderos de la fecha (la fecha es el instante de observación).

La *posición aparente* de una estrella son sus coordenadas $(\alpha_{ap}, \delta_{ap})$ en un sistema de referencia celeste geocéntrico materializado por Ecuador y Equinoccio verdaderos de la fecha, contiene los efectos de paralaje y aberración anuales. La posición aparente difiere de la posición observada (eliminados los errores instrumentales) por los efectos locales de aberración diurna y refracción.

Nótese que las posiciones media, media estándar y aparentes indican las direcciones de la estrella en el espacio, y pueden representarse a través de versores.

Cálculo de la posición aparente de una estrella

Analizaremos el algoritmo vectorial que calcula la posición aparente de una estrella en un instante dado t_1 siendo conocida su posición media estándar, basados en Green (Green, 1988, p. 295-298).

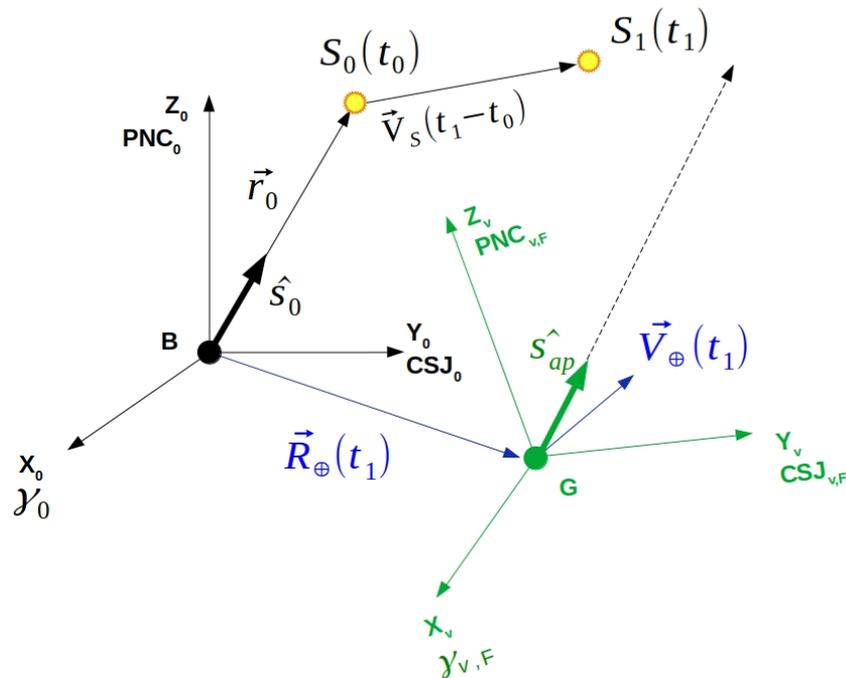
Este algoritmo es riguroso, fácilmente programable, usado ampliamente por la comunidad astronómica desde fines de la década de 1980. Anteriormente se utilizaba una fórmula en coordenadas esféricas que ha quedado obsoleta, la técnica de los números diarios, cuya precisión es limitada.

Los datos para desarrollar el algoritmo son los siguientes. Los correspondientes a la estrella S se obtienen de un catálogo: la posición media estándar (α_0, δ_0) en el instante t_0 representada el versor \hat{s}_0 , su paralaje π , $[\pi]=''$, las componentes ecuatoriales del movimiento propio (μ_α, μ_δ) , $[\mu_\alpha]=seg/año; [\mu_\delta]=''$ y la velocidad radial $V_r, [V_r]=km/seg$. Todos los vectores están expresados en un sistema de referencia celeste baricéntrico materializado por Ecuador y Equinoccio Medios de la Época estándar en el instante t_0 , denominado -Época del catálogo-. Las efemérides proveen en el instante t_1 el vector posición baricéntrica de la Tierra $\vec{R}_\oplus(t_1)$ y el vector velocidad baricéntrica de la Tierra $\vec{V}_\oplus(t_1)$, ambos expresados en el sistema celeste de la posición media estándar, siendo sus unidades $[\vec{R}_\oplus]=UA, [\vec{V}_\oplus]=UA/año$.

En el intervalo $(t_1 - t_0)$ la estrella se ha desplazado en el espacio entre los puntos $S_0(t_0)$ a $S_1(t_1)$ con velocidad \vec{V}_S relativa al Sol y asumida constante. El objetivo es calcular su posición aparente \hat{s}_{ap} en el instante t_1 .

Figura 7.1.

Algoritmo vectorial del cálculo de la posición aparente de una estrella



Como \vec{R}_\oplus , \vec{V}_\oplus y los vectores de la estrella están expresados en el mismo sistema celeste, el algoritmo corrige primero por paralaje anual y movimiento propio, luego por aberración anual y por último por precesión y nutación. El planteo general se grafica en la figura 7.1.

Cabe destacar que todas las Figuras 7.1 a 7.4 no se encuentran a escala con fines didácticos. Los puntos B, G, S_0 y S_1 no son necesariamente coplanares.

Corrección por movimiento propio y paralaje anual

En la Figura 7.2 el sistema de referencia celeste geocéntrico G se encuentra en la posición baricéntrica $\vec{R}_\oplus(t_1)$ en el instante de observación t_1 y está materializado por el Ecuador y Equinoccio Medios de la Época estándar. Sean $\vec{r}_0 = r_0 \hat{S}_0$ el vector posición baricéntrica de

la estrella en t_0 y $\vec{r}_1 = r_1 \hat{s}_1$ el vector en la dirección geocéntrica geométrica de la misma en t_1 . Resulta, entonces, la siguiente relación:

$$\vec{r}_0 + \vec{V}_T(t_1 - t_0) = \vec{R}_\oplus + \vec{r}_1 \quad (7.1)$$

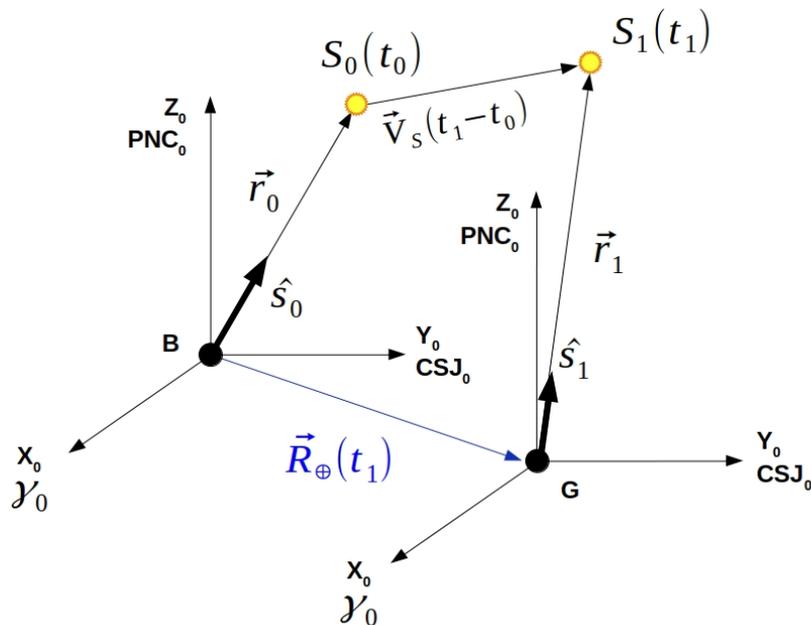
$$r_0 \hat{s}_0 + \vec{V}_S(t_1 - t_0) - \vec{R}_\oplus = r_1 \hat{s}_1 \quad (7.2)$$

En 7.2 nos interesa obtener el versor \hat{s}_1 y expresar el miembro izquierdo en radianes. Se asume que la unidad de \vec{V}_S es rad/año, como $[\vec{R}_\oplus] = UA$, r_0 se escribe a partir de la ecuación 2.23

$$r_0 = \frac{1UA}{\pi \text{sen } 1''}$$

Figura 7.2.

Corrección por paralaje y movimiento propio en el cálculo de la posición aparente de una estrella.



Entonces, se multiplican ambos miembros de la igualdad 7.2 por π_{rad} la paralaje expresada en radianes:

$$\pi_{rad} r_0 + \pi_{rad} \vec{V}_S - \pi_{rad} \vec{R}_\oplus = \pi_{rad} r_1 \hat{s}_1 \quad (7.3)$$

luego,

$$\hat{s}_1 = \frac{\vec{s}_0 + \vec{m}(t_1 - t_0) - \pi_{rad} \vec{R}_\oplus}{|\vec{s}_0 + \vec{m}(t_1 - t_0) - \pi_{rad} \vec{R}_\oplus|} \quad (7.4)$$

siendo $\vec{m} = \pi_{rad} \vec{V}_\oplus$ el vector movimiento espacial expresado en rad/año. Siendo $\vec{\mu}$ el vector movimiento propio (ver capítulo 6) expresado en $[rad/año]$, \vec{m} se escribe:

$$\vec{m} = \vec{\mu} + \frac{\pi_{rad}}{4.74} V_r \hat{s}_0 \quad (7.5)$$

Corrección por aberración anual

Recordando lo visto en el capítulo 3, en el instante t_1 la luz de la estrella llega simultáneamente a los observadores en G -en reposo respecto de B- y en G* -moviéndose con \vec{V}_\oplus respecto de B. El primero observa la estrella en la dirección geométrica \hat{s}_1 , el segundo en la dirección aparente \hat{s}_2 como se muestra en la figura 7.3.

Los sistemas de referencia de ambos observadores están materializados por el Ecuador y Equinoccio Medios de la Época estándar.

Luego, aplicando la expresión con doble producto vectorial en la ecuación 3.5 al primer orden en $V_\oplus(t_1)/c$

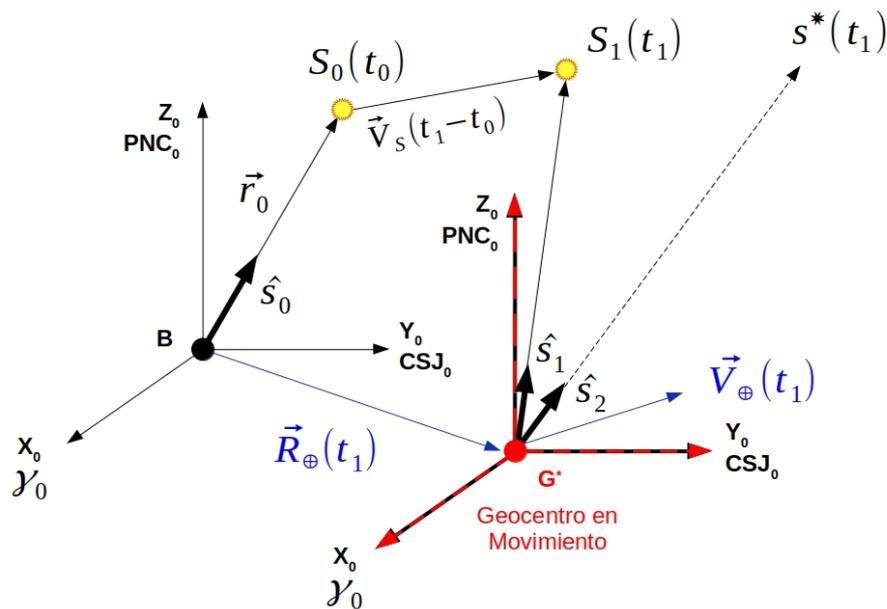
$$\hat{s}_2 = \hat{s}_1 - \frac{1}{c} \hat{s}_1 \times (\hat{s}_1 \times \vec{V}_\oplus(t_1))$$

luego, el vector dirección aparente \hat{s}^* resulta

$$\hat{s}^* = \frac{\vec{s}_1 - \frac{1}{c} \vec{s}_1 \times (\vec{s}_1 \times \vec{V}_\oplus(t_1))}{|\vec{s}_1 - \frac{1}{c} \vec{s}_1 \times (\vec{s}_1 \times \vec{V}_\oplus(t_1))|} \quad (7.6)$$

Figura 7.3.

Corrección por aberración anual en el cálculo de la posición aparente de una estrella.



Corrección por Precesión y Nutación

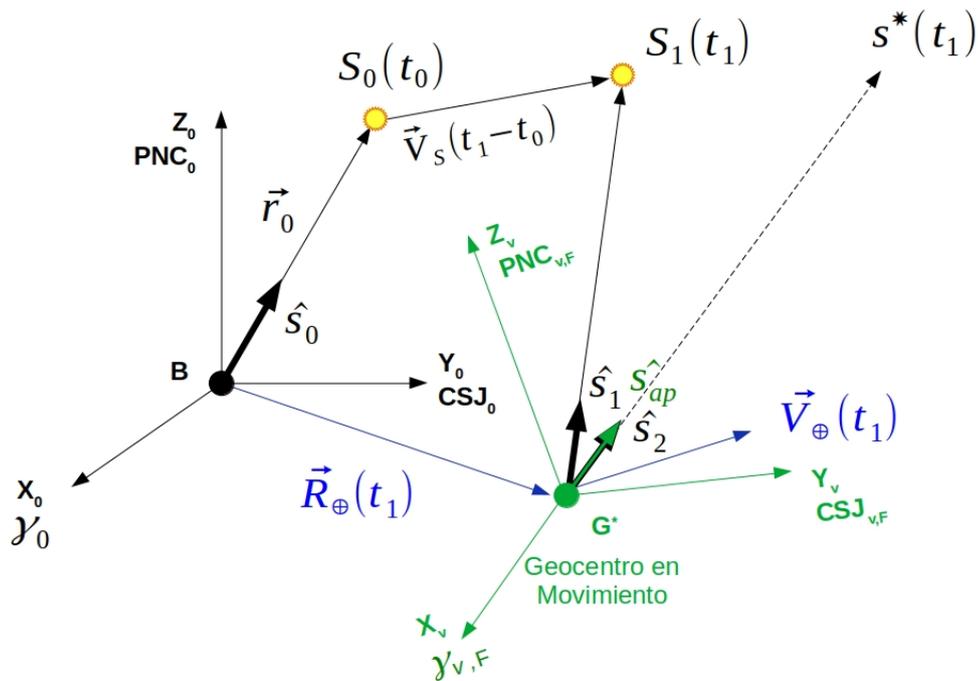
En la figura 7.4, el versor \hat{s}^* está expresado en el sistema de referencia celeste geocéntrico G^* , ubicado en la posición baricéntrica $\vec{R}_\oplus(t_1)$ y moviéndose con velocidad baricéntrica $\vec{V}_\oplus(t_1)$ en el instante de observación t_1 y la orientación de dicho sistema está materializada por el Ecuador y Equinoccio Medios de la Época estándar. Para obtener la posición aparente \hat{s}_{ap} , basta cambiar este sistema de referencia celeste al sistema de referencia celeste materializado por el Ecuador y Equinoccio verdaderos de la fecha. Siendo P la matriz de precesión que transforma el sistema celeste referido a Ecuador y Equinoccio

Medios estándar a Ecuador y Equinoccio Medios de la fecha y N la matriz de nutación que transforma el sistema celeste referido a Ecuador y Equinoccio Medios de la fecha al sistema celeste referido a Ecuador y Equinoccio Verdaderos de la Fecha (ecuaciones 5.32 a 5.35 y 5.44), la posición aparente de la estrella \hat{s}_{ap} resulta:

$$\hat{s}_{ap} = NP \hat{s}^* \quad (7.7)$$

Figura 7.4.

Corrección por Precesión y Nutación en el cálculo de la posición aparente de una estrella.



Luego, las coordenadas ecuatoriales celestes de la posición aparente de la estrella S en el instante t_1 son:

$$\alpha_{ap} = \arctg\left(\frac{s_{ap_y}}{s_{ap_x}}\right) \quad (7.8a)$$

$$\delta_{ap} = \arcsen(s_{ap_z}) \quad (7.8b)$$

En el caso del cálculo de la posición aparente de un planeta, debe considerarse la corrección por tiempo luz para determinar la posición geocéntrica del planeta.

Una de las aplicaciones de este algoritmo es la confección de un programa de observación de cualquier objeto celeste. En particular, antes de la aparición del posicionamiento satelitario, las posiciones aparentes de las estrellas brillantes y planetas se publicaban anualmente para ser utilizadas en la determinación de latitud y longitud mediante la observación de estos objetos.

Catálogos astrométricos

Un catálogo estelar astrométrico es una lista de coordenadas precisas de un determinado conjunto de estrellas expresadas en un cierto sistema de referencia celeste; estas coordenadas se obtienen de las observaciones realizadas con uno o varios instrumentos, las que se reducen mediante procedimientos específicos que superan los contenidos de este libro.

Para cada estrella enumerada, el catálogo provee su número de identificación, las coordenadas ecuatoriales (α, δ) y sus errores, las componentes de movimiento propio (μ_α, μ_δ) y sus errores expresados en el sistema celeste adoptado y en un dado instante t_0 denominado *Época del catálogo*, la que a veces coincide con la época del sistema de referencia celeste adoptado. El listado de las estrellas se ordena por ascensión recta creciente. Son pocos los catálogos que, además, aportan la paralaje π y la velocidad radial V_r con sus respectivos errores, información valiosa con aplicaciones astrométricas y astrofísicas.

Los parámetros astrométricos se completan con la magnitud en la banda en la que opera el instrumento utilizado para producir el catálogo, por ejemplo V, B, J, H, K, G, la que facilita el reconocimiento de la estrella en el cielo, ocasionalmente están disponibles la identificación de la estrella en otros catálogos y el tipo espectral que contribuye al conocimiento de los parámetros astrofísicos del astro.

Clases de catálogos astrométricos

Las coordenadas de las estrellas que constituyen un catálogo astrométrico se determinan a partir de observaciones. Siguiendo a Mueller (Mueller, 1969, p.180.-185), las coordenadas obtenidas se clasifican en absolutas o relativas según sea el método de observación empleado. Las **coordenadas absolutas** se obtienen refiriéndolas directamente al sistema de referencia celeste cuya determinación es parte del proceso de observación, mientras que las **coordenadas relativas** de una estrella se obtienen midiendo su ubicación con respecto a la localización de las estrellas cercanas cuyas coordenadas son conocidas en el sistema de referencia celeste adoptado. Aquellos catálogos que contienen el primer tipo de coordenadas se denominan catálogos absolutos, y catálogos relativos los que contienen el segundo.

Determinación de coordenadas absolutas. Catálogo fundamental

Recordemos que en el instante de tránsito¹ cualquier objeto celeste cruza el meridiano celeste local, su declinación δ es una función de la latitud φ y de la distancia cenital z , además su ascensión recta α es igual al tiempo sidéreo local TSL . La observación de una estrella en este instante nos conducirá a determinar sus coordenadas absolutas, eliminados los efectos de refracción, aberración estelar y errores instrumentales, sin recurrir a posiciones de otras estrellas.

El instrumento indicado para este tipo de observación es el círculo meridiano, telescopio que posee su eje óptico fijo al plano del meridiano celeste local; en la actualidad se encuentran operativos al ser fotoeléctricos y automatizados.

Comenzaremos por la determinación de la declinación absoluta, que es la más sencilla en la práctica. Fácilmente se deducen las siguientes relaciones que ocurren en el plano del meridiano celeste local de un observador en el Hemisferio Sur entre δ , φ y z en los casos de una estrella: a) que sale y se pone, b) circumpolar que no cruza el Primer Vertical (culminación superior al norte del Cenit) y c) circumpolar que cruza el Primer Vertical (culminación superior al sur del Cenit) en el caso de latitudes mayores a 45° .

$$|\delta|=|\varphi|-z, \delta < 0 (\text{caso a}) \quad (7.9i)$$

$$|\delta|=z-|\varphi|, \delta > 0 (\text{caso a}) \quad (7.9ii)$$

$$|\delta|=|\varphi|-z (\text{caso b}) \quad (7.9iii)$$

$$|\delta|=|\varphi|+z (\text{caso c}) \quad (7.9iv)$$

¹ El término "tránsito" se emplea para las estrellas que tiene salida/orto y puesta/ocaso, mientras que "culminación superior e inferior" se reserva para las estrellas circumpolares, donde la culminación inferior es visible.

Nótese que b) y c) tienen la misma expresión para la distancia cenital de culminación inferior

$$|\delta| = 180^\circ - |\varphi| - z \quad (7.10)$$

La determinación precisa de la *ascensión recta absoluta* es muy difícil, ya que requiere determinar con precisión la dirección del Equinoccio Vernal.

Un primer procedimiento es asumir la latitud ecliptical aparente del Sol como nula $\beta_s = 0$ para encontrar una relación entre α_s y δ_s en el triángulo esférico rectángulo γSU de la Figura 7.5, donde PNE el Polo Norte Ecliptical y PNC el Polo Norte Celeste. Entonces, aplicando las fórmulas de los teoremas del coseno, del seno y de los 5 elementos:

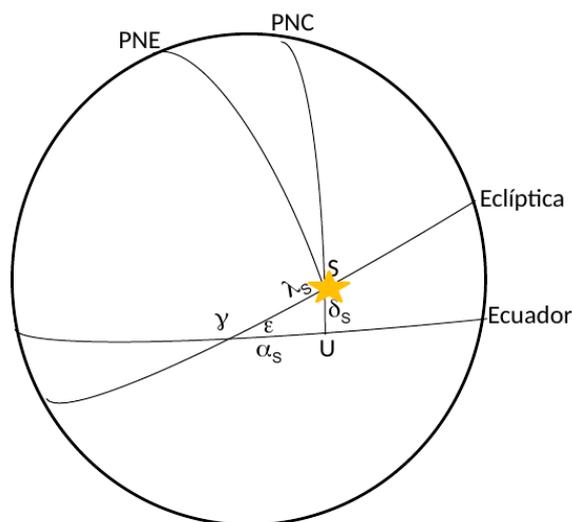
$$\cos \lambda_s = \cos \alpha_s \cos \delta_s \quad (7.11a)$$

$$\text{sen } \delta_s = \text{sen } \lambda_s \text{sen } \varepsilon \quad (7.11b)$$

$$\text{sen } \lambda_s \cos \varepsilon = \text{sen } \alpha_s \cos \delta_s \quad (7.11c)$$

Figura 7.5.

Determinación de la ascensión recta absoluta del Sol .



se obtiene

$$\operatorname{sen} \alpha_s = \operatorname{tg} \delta_s \operatorname{cotg} \varepsilon \quad (7.12)$$

donde la oblicuidad de la eclíptica ε se supone conocida; luego la determinación de la ascensión recta absoluta del Sol se reduce a determinar la declinación absoluta del Sol, detallada más arriba. También puede determinarse de la observación de la declinación del Sol en los solsticios, cuando $\operatorname{sen} \delta_s = \pm \operatorname{sen} \varepsilon$.

Como este tipo de observación es dificultosa al tratarse de un objeto extendido, mucho más brillante que cualquier estrella y que irradia una importante cantidad de calor, estos inconvenientes se resuelven utilizando las observaciones de asteroides, cuyas órbitas precisas permiten determinar la orientación de la eclíptica. Es decir, una determinación práctica del Equinoccio y Ecuador puede llevarse a cabo a partir de observaciones del Sol y de los miembros del Sistema Solar.

En la práctica, existe un procedimiento que simplifica considerablemente la determinación de las ascensiones rectas absolutas. Se trata del empleo de un conjunto selecto de estrellas bien distribuidas en la zona ecuatorial, $-30^\circ < \delta < 30^\circ$, llamadas *estrellas reloj*, las que se distinguen por sus coordenadas conocidas con precisión. Entonces, la ascensión recta absoluta de las estrellas a determinar se calcula observando estas estrellas relativas a las estrellas reloj (Walter y Sovers, 2000, p. 33). Asimismo, la utilización de las estrellas reloj tiene la ventaja de reducir las correcciones del reloj sidéreo que registra los instantes de tránsito (Woolard, Clemence, 1966, p. 391).

Catálogo fundamental

Supongamos que en un observatorio se dispone de un gran número de coordenadas absolutas de las estrellas visibles referidas a un cierto sistema de referencia celeste y observadas en distintos instantes, habiendo minimizado los errores sistemáticos de observación y reducción.

Luego, se realiza un ajuste por mínimos cuadrados a este conjunto de coordenadas absolutas a fin de obtener los mejores valores de las coordenadas y del movimiento propio, junto con sus residuos, de tales estrellas en un cierto instante (la Época del catálogo) en el sistema de referencia celeste mencionado. Queda así formado, entonces, un catálogo fundamental individual, el que cubre la zona del cielo accesible desde ese observatorio (Mueller, 1969, p. 190).

La cobertura de todo el cielo se logra con la construcción de un catálogo fundamental general, en adelante catálogo fundamental. Su construcción comienza con una selección minuciosa de varios catálogos fundamentales individuales y sus residuos. Luego, se calculan los valores medios de las posiciones y movimientos propios de las estrellas teniendo en cuenta los valores de los residuos de cada catálogo individual. Finalmente, las posiciones y movimientos propios obtenidos y sus errores pueden completarse con los mejores valores de coordenadas relativas de estrellas - con un peso menor al de las coordenadas absolutas- para asegurar una densidad aproximadamente homogénea de estrellas en el plano del cielo (Mueller, 1969, p190).

La propiedad de un catálogo fundamental es *proveer un sistema de referencia celeste para describir los movimientos de los cuerpos del Sistema Solar y para determinar los movimientos propios estelares*. Luego, un catálogo fundamental materializa en el espacio las direcciones de los ejes coordinados –marco de referencia (ver capítulo 1)- del sistema de referencia celeste a través de las coordenadas baricéntricas de las estrellas que lo componen.

Breve cronología de los catálogos fundamentales

Desde fines del siglo XIX y a lo largo del siglo XX se construyeron varios catálogos fundamentales ópticos con el propósito de que representaran (materializaran) de la mejor manera posible un sistema de referencia celeste inercial para estudiar los movimientos absolutos requeridos por la Mecánica Celeste y , posteriormente, para el estudio de la Galaxia. Asimismo, el proyecto de un relevamiento astrométrico de todo el cielo, subdividido en las zonas de visibilidad estelar de los observatorios involucrados, se beneficiaría con la disponibilidad de un catálogo fundamental conteniendo estrellas de referencia a las cuales se podrían referir las posiciones de las estrellas de los catálogos individuales (Walter y Sovers, 2000, p. 37-38).

Los dos tipos de catálogos fundamentales ópticos son las series americana y alemana de catálogos fundamentales. La primera comienza con el Newcomb's Catalogue of Fundamental Stars (Newcomb 1898b en Walter y Sovers, 2000, p38) de 1297 estrellas y culmina con el General Catalogue of 33342 Stars for the Epoch 1950 (GC) (Bos, 1937) y el Catalogue of 5268 Standard Stars, 1950.0, Based on the Normal System N 30 (N30) (Morgan, 1952 en Walter y Sovers, 2000, p. 38)

La serie alemana cuenta con el primer catálogo de coordenadas y movimientos propios, el Fundamental-Catalog (Auwers, 1879 y 1883, en Mueller 1969, p. 193), conteniendo alrededor de 600 estrellas entre $-32^\circ < \delta < 90^\circ$, una parte cubriendo el hemisferio norte conteniendo 539 estrellas, otra cubriendo el hemisferio sur con 83 estrellas. Lo sigue el Neuer Fundamental Katalog (NFK) (Peters, 1907, en Walter y Sovers, 2000, p. 38) con posiciones y movimientos

propios de 925 estrellas. En la década de 1920 se sugirió repetir el relevamiento fotográfico del cielo del hemisferio norte en base a un sistema de referencia único; lo que derivó en una revisión de las posiciones del NFK que se vieron afectadas por la baja precisión de los movimientos propios. Este hecho motivó la construcción del Dritter Fundamental-Katalog des Berliner Astronomischen Jahrbuchs (FK3) (Kopff 1937 y 1938, Kahrstedt 1937, Heinemann 1937 en Mueller 1969, p. 195), proporcionando posiciones y movimientos propios de casi la totalidad de las estrellas del NFK (Kopff, 1937 en Walter y Sovers, 2000, p. 38) y un suplemento de 662 estrellas (Kopff 1938 en Walter y Sovers, 2000, p. 38). Este catálogo proveyó la base para las efemérides de las estrellas publicadas en los almanaques internacionales (Mueller 1969, p. 195).

Años más tarde, el descubrimiento de errores sistemáticos en el sistema del FK3 iniciaron la construcción del Fourth Fundamental Catalogue (FK4) (Fricke & Kopff, 1963 en Walter y Sovers, 2000, p. 38), con posiciones y movimientos propios de 1535 estrellas referidas al sistema celeste materializado por el Ecuador Equinoccio y Época B1950.0 y B1975.0 y una compilación de 1987 estrellas suplementarias (FK4 Sup) (Walter y Sovers, 2000, p. 38).

Al poco tiempo de la publicación del FK4 aparecieron varios catálogos observacionales cubriendo los dos hemisferios que evidenciaron errores sistemáticos y aleatorios en las posiciones y movimientos propios del FK4, además de la necesidad de un ajuste en la compensación de las ascensiones rectas. Simultáneamente, los cambios del sistema de constantes astronómicas (IAU 1977 en Walter y Sovers, 2000, p. 38) y de las convenciones para el marco de referencia celeste a la Época estándar J2000 eran inmediatos. Llegaba, entonces, el momento de revisar el catálogo fundamental teniendo en cuenta los nuevos datos y los acuerdos internacionales, además de realizar cambios en el procedimiento de su construcción, tales como la reducción de observaciones por métodos estadísticos, aumento del número de estrellas fundamentales y un límite de magnitud más débil, utilizando los catálogos observacionales antiguos y modernos disponibles (Walter y Sovers, 2000, p. 38-39)

Los trabajos sobre el nuevo catálogo, el Fifth Fundamental Catalogue (FK5) (Fricke et al, 1988), comenzaron a principios de la década de 1970. Como sus catálogos antecesores, éste se basa en observaciones realizadas con el círculo meridiano, luego el Ecuador Celeste Instantáneo y el Equinoccio vernal son los dos puntos de referencia en la definición del sistema de referencia del catálogo. Por lo analizado más arriba resulta, entonces, que la ascensión recta y la declinación absolutas están ligadas al Sistema Solar; razón por la cual el Sistema Solar juega un papel indiscutible en la definición del sistema del FK5. Dentro de la precisión de las observaciones con círculo meridiano, se asume que el Sistema Solar es un sistema dinámico aislado; su baricentro puede considerarse como el origen de un sistema inercial al no ser detectable la aceleración solar originada por la revolución del Sol alrededor del centro galáctico (del orden $2 \times 10^{-8} \text{ cm s}^{-2}$); por lo tanto un sistema de referencia celeste baricéntrico

con ejes orientados a un Ecuador y Equinoccio fijos puede aceptarse como inercial (Walter y Sovers, 2000, p. 39-40).

El FK5 Part I (Fricke et al, 1988) contiene 1535 estrellas fundamentales utilizadas para definir el sistema FK4; representa una revisión de su antecesor en la que se aplicaron correcciones individuales y sistemáticas a las posiciones medias y los movimientos propios del FK4, se eliminó el error en el equinoccio FK4 y se introdujo el sistema de constantes astronómicas de la IAU (1976); cuenta con el aporte de posiciones estelares de aproximadamente 300 catálogos de todo el mundo. Las posiciones medias y movimientos propios de las 1535 estrellas están referidas al sistema celeste materializado por el Ecuador y Equinoccio Medios J2000.0 y Época J2000.

La segunda parte del FK5, el Fifth Fundamental Catalogue (FK5) Part II (FK5 Extension) (Fricke et al, 1991) contiene 3117 nuevas estrellas fundamentales que extienden la Parte I a magnitud $m_v = 9,5 \text{ mag}$ cuyas posiciones medias y movimientos propios están referidas al sistema celeste materializado por el Ecuador y Equinoccio Medios J2000.0 y Época J2000.0. Al igual que la Parte I, dichas posiciones y movimientos propios se obtuvieron adoptando el sistema de constantes astronómicas de la IAU (1976), se corrigió el error en el equinoccio FK4 y se aplicaron las correcciones sistemáticas FK5 - FK4. En su compilación se utilizaron posiciones estelares de más de 200 catálogos de todo el mundo.

Los catálogos FK4 y FK5 contienen paralajes para muy pocas estrellas, por lo que se requería la información del General Catalogue of Trigonometric Stellar Parallaxes. Su primera edición data de la década de 1950 (Jenkins, 1952), mientras que la última de mediados de 1990 (Van Altena et al 1995) contiene coordenadas ecuatoriales y paralajes de 8112 estrellas en el sistema celeste del FK4 (Ecuador y Equinoccio B1950.0) en la Época 1900. Nótese que la no uniformidad en el sistema celeste y la Época adoptados dificultaba el cálculo de las posiciones aparentes.

Contribución de la Astrometría espacial

Hacia fines de la década de 1990 se produce un gran adelanto en la Astrometría con el lanzamiento de las misiones espaciales astrométricas. Un telescopio a bordo de un satélite en órbita tiene como ventajas la eliminación de la refracción, un mejor "seeing" y las imágenes obtenidas poseen un diagrama de difracción bien definido, pero el satélite que alberga el telescopio está sujeto a numerosas perturbaciones que pueden afectar su orientación en el espacio de un modo impredecible. Sin embargo, se ha encontrado que se pueden determinar en el espacio distancias angulares con gran precisión, las que derivarán en posiciones de los

objetos en cuestión con un similar orden de precisión. Las dos primeras misiones han sido el Telescopio espacial Hubble (HST) destinado a investigaciones astrométricas y astrofísicas y el satélite Hipparcos con objetivos únicamente astrométricos (Walter y Sovers, 2000, p. 69).

El satélite astrométrico Hipparcos

La misión Hipparcos de la Agencia Europea Espacial (ESA) inaugura una nueva era de la Astrometría. Fue lanzada en agosto de 1989 y, a pesar de no haber alcanzado la órbita geosincrónica por una falla en un motor, se obtuvieron datos de gran calidad durante 37 meses observando todo el cielo con un solo instrumento. Esta misión produjo dos importantes catálogos: el catálogo Hipparcos y el catálogo Tycho (Walter y Sovers, 2000, p. 70).

El catálogo Hipparcos contiene posiciones, movimientos propios y paralajes de 118218 estrellas en el Sistema de Referencia Celeste Internacional (ICRS) (descrito en el capítulo 10), con errores en coordenadas y paralaje de 1 milisegundo de arco (1msa) y en los movimientos propios de 1-2 msa/año, siendo la Época del catálogo J1991.25. La magnitud límite es $m_{V\text{ límite}} = 9\text{ mag}$, aunque el límite de completitud es $m_V = 7,3\text{ mag}$, lo que significa que las estrellas del catálogo más brillantes e iguales a esta magnitud cubren todo el cielo (ESA, 1997).

La alineación del catálogo Hipparcos con el marco ICRF (descrito en el capítulo 10) se llevó a cabo con observaciones de Interferometría de Muy Larga Línea de Base (VLBI) de una docena de radio estrellas, con errores en la orientación inferiores al milisegundo de arco en la Época J1991.25. El marco celeste Hipparcos (HCRF) –Hipparcos Celestial Reference Frame– es la realización en longitudes ópticas del ICRS (ver capítulo 10), y en su definición se excluyeron muchas estrellas dobles y/o sistemas múltiples debido a la poca confiabilidad en los valores de los movimientos propios (IERS TN36, 2010).

Posteriormente, se realiza una importante mejora en los datos astrométricos respecto al catálogo original, la nueva reducción de los datos de Hipparcos (van Leeuwen, 2007), del orden de un factor 4 para las estrellas brillantes, sin cambiar el sistema de coordenadas. Estas mejoras surgen de cambios en los modelos de las perturbaciones sufridas por el satélite y en la estrategia de observación (IERS TN36, 2010).

Cabe mencionarse algunos de sus resultados más destacados, como la deformación del plano galáctico, las mejores determinaciones de edad y magnitud de las Pléyades con derivaciones en las teorías de evolución estelar y otras que pueden consultarse en:

<https://www.cosmos.esa.int/web/hipparcos/hipparcos-result-applications>

El catálogo Tycho-2 (Hog et al, 2000) contiene posiciones y movimientos propios de 2,5 millones de estrellas brillantes en el Sistema de Referencia Celeste Internacional (ICRS), como

así también fotometría en dos colores. Las posiciones y magnitudes están determinadas a partir de las observaciones del satélite Hipparcos, mientras que los movimientos propios se obtienen de la comparación con posiciones de los numerosos catálogos astrométricos en tierra reducidos al sistema de coordenadas celeste de Hipparcos. La precisión en las posiciones alcanza a decenas de msa, y en los movimientos propios de 1-3 msa/año. La Época del catálogo es J2000.0, su magnitud límite es $m_{V\text{ límite}} = 12 \text{ mag}$, si bien el límite de completitud es $m_V = 11 \text{ mag}$.

La misión Gaia

Los resultados obtenidos con el telescopio de la misión Hipparcos motivaron a planificar una nueva misión con un telescopio de mayor tamaño que los continúe y mejore. La misión *Gaia* de la ESA, lanzada en diciembre 2013, contiene dos telescopios de triple espejo cuyas visuales están separadas 106° que permiten mediciones precisas de los paralajes estelares, a bordo de un satélite ubicado en un el punto de libración del sistema Tierra-Sol L_2 de estabilidad térmica, poca perturbación gravitatoria y sin eclipses (Walter y Sovers, 2000, p. 208).

Los datos recogidos por *Gaia* desde julio 2014 constituyen la base de las realizaciones preliminares del catálogo, denominados *Gaia* Data Release. Los sucesivos Data Release contienen los cinco parámetros astrométricos (posición, movimiento propio y paralaje) en el ICRS, velocidades radiales y fotometría multicolor en la banda G (330nm a 1050nm) (Evans et al., 2018) para algunos miles de millones de fuentes más brillantes que $G=21$, junto con curvas de luz medio millar de estrellas variables, astrometría y fotometría de algunos asteroides del Sistema Solar, temperatura efectiva, extinción, enrojecimiento, radio y luminosidad para alrededor de 100 millones de fuentes (Gaia Collaboration 2018). Los resultados de *Gaia* impactarán en muchas ramas de la astronomía, tales como la determinación de órbitas de cuerpos pequeños del Sistema Solar, la evolución estelar, la dinámica de los sistemas estelares, la estructura de la Galaxia, la detección de sistemas planetarios, la determinación de órbitas de cuerpos pequeños del Sistema Solar (Walter y Sovers, 2000, p. 209).

Hasta el presente, la última versión *Gaia* Early Data Release 3 -*Gaia* EDR3- (Gaia Collaboration 2021) es completo entre $12 < G < 17$, las incertezas en el paralaje son menores a 0,01 msa para $G < 15$, alrededor de 0,02 msa para $G = 17$ y 0,1 msa para $G = 20$; para las componentes de los movimientos propios sus incertezas son del orden de 0,03 msa/año para $G < 15$, alrededor de 0,1 msa/año para $G = 17$ y 0,6 msa/año para $G = 20$. Las velocidades radiales se listan para 6 millones de estrellas con $4 < G < 13$. La Época del catálogo es J2016.0

Recientemente, la XXXI Asamblea General de la Unión Astronómica Internacional (IAU) ha resuelto que el marco celeste *Gaia* en longitudes de onda del visible basado únicamente en fuentes extragalácticas, *Gaia*-CRF3, materializa el ICRS en el rango óptico desde el 1 de enero de 2022 (Resolución B3 XXXI Asamblea Gral de la IAU, 2021).

Un producto muy valioso del *Gaia* EDR3 es el catálogo que contiene la estimación de distancias de 1470 millones de estrellas mediante un enfoque probabilístico de las paralajes y sus errores utilizando un modelo tridimensional de la Galaxia que incluye la extinción estelar (Bailer-Jones et al, 2021). No se debe olvidar que el alto valor del error relativo de las paralajes de la mayoría de este conjunto de estrellas –por ser lejanas o débiles- descarta la simple inversión de la paralaje para obtener la distancia. La distancia de una estrella, parámetro fundamental en la Astrofísica, debe estimarse aplicando un modelo de estas características a la paralaje. La información actualizada de la misión se encuentra disponible en <https://www.cosmos.esa.int/web/gaia/home>.

Hasta el presente, la última versión *Gaia* Data Release 3 -*Gaia* EDR3- (Gaia Collaboration 2022) combina la solución astrométrica completa (coordenadas, movimiento propio y paralaje) presentada en *Gaia* Early Data Release 3 -*Gaia* EDR3- (Gaia Collaboration 2020) con nuevos productos astrofísicos, mapa de extinción galáctica, velocidades radiales para 33 millones de estrellas con $4 < G < 13$, como así también la identificación de las estrellas en Hipparcos, Tycho-2 y numerosos catálogos fotométricos. *Gaia* EDR3 contiene aproximadamente 1460 millones de estrellas, con límite de magnitud $3 < G < 21$, las incertezas en la paralaje son menores a 0.01msa para $G < 15$, alrededor de 0.02msa para $G = 17$ y 0.1msa para $G = 20$; para las componentes de los movimientos propios sus incertezas son del orden de 0.03 msa/año para $G < 15$, alrededor de 0.1msa/año para $G = 17$ y 0.6 msa/año para $G = 20$. La época del catálogo es J2016.0

Referencias

- Bailer-Jones, C. A. L., Rybizki, J., Fouesneau, M., Demleitner, M., Andrae, R. (2021) Estimating Distances from Parallaxes. V. Geometric and Photogeometric Distances to 1.47 Billion Stars in Gaia Early Data Release 3. *Astronomical Journal*, 161,147-175
- Fricke, W., Schwan, H., Lederle, T., Bastian, U., Bien, R., Burkhardt, G., Du Mont, B., Hering, R., Jährling, R., Jahreiß, H., Röser, S., Schwedtfeger, H.-M., Walter, H. G. (1988) Fifth Fundamental Catalogue (FK5). Part 1. The Basic Fundamental Stars. *Veroeff. Astron. Rechen-Inst.*, Vol. 32, 1-106.

- Fricke, W. , Schwan, H. , Corbin, T. , Bastian, U. , Bien, R. , Cole, C. , Jackson, E., Jährling, R. , Jahreiß, H. ,Lederle, T. Röser, S. (1991) *Fundamental Catalogue (FK 5), Part II: The FK5 Extension - New Fundamental Stars*. *Veroeff. Astron. Rechen-Inst.*, Vol. 33, 1-146
- Evans, D.W., Riello, M. De Angeli, F., Carrasco, J.M. et al (2018). Gaia Data Release 2. Photometric content and validation. *Astron. Astrophys*, 616, A4, 1-21.
- ESA (1997) The HIPPARCOS and TYCHO catalogues. Astrometric and photometric star catalogues derived from the ESA HIPPARCOS Space Astrometry Mission. *ESA Publications Division*, ESA SP1200.
- Gaia Collaboration, Brown, A.G.A. et al (2018) Gaia Data Release 2. Summary of the contents and survey properties. *Astron. Astrophys*, 616, A1, 1-22.
- Gaia Collaboration, Brown, A.G.A. et al (2021). Gaia Early Data Release 3. Summary of the contents and survey properties. *Astron. Astrophys*, 649, A1, 1-20.
- Gaia Collaboration (2022) Gaia Data Release 3. Part 1. *arXiv:2208.00211*. Disponible en. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2208.00211>
- Green, R.M. (1988). *Spherical Astronomy*. 2da edición. Cambridge University Press
- Hog E., Fabricius C., Makarov V.V., Urban S., Corbin T., Wycoff G., Bastian U., Schwekendiek P., Wicenec A. (2000). The Tycho-2 Catalogue of the 2.5 Million Brightest Stars, *Astron. Astrophys*, 355, L27-L30
- IERS, (2010). IERS Technical Note 36, en *IERS Conventions (2010)*, Petit, G. & Luzum, B. (eds). <http://www.iers.org/IERS/EN/Publications/TechnicalNotes/TechnicalNotes.html>
- Jenkins, L. F. (1963). *General catalogue of trigonometric stellar parallaxes*. New Haven, CT. Yale University Observatory.
- Mueller, I. I.(1969). *Spherical and Practical Astronomy as Applied to Geodesy*. New York. Editorial: Frederic Ungar Publishing CO.
- The Hipparcos and Tycho catalogues (1997). *Astrometric and photometric star catalogues derived from the ESA Hipparcos Space Astrometry Mission*. ESA Publications Division, ESA SP Series vol 1200.
- van Altena, W. F., Lee, J. T., Hoffleit, E. D. (1995). *The general catalogue of trigonometric stellar parallaxes*. Editorial: Yale University Observatory, 4ta edición
- van Leeuwen, F. (2007). Validation of the new Hipparcos reduction. *Astron. Astrophys*, 474, 653-664
- Walter, H.G., Sovers, O.J. (2000). *Astrometry of Fundamental Catalogues. The evolution from Optical to Radio reference Frames*. Springer.
- Woolard, E.W, Clemence, G.M. (1966). *Spherical Astronomy*. Academic Press Inc.

CAPÍTULO 8

Efectos de la rotación terrestre

Laura I. Fernández

The moment he was set at liberty, he looked up to the sky and down to the ground, and, stamping with his foot, in a contemplative mood, said, *Epur si move*; that is, still it moves, meaning the earth.

—Giuseppe Baretti. “*The Italian Library*”

La orientación instantánea de la Tierra en el espacio queda completamente determinada por tres cantidades independientes, por ejemplo, los ángulos de Euler. Sin embargo para poder vincular ambos sistemas de referencia, terrestre y celeste, es necesario incorporar parámetros adicionales.

Los Parámetros de la Orientación Terrestre (EOP, Earth Orientation Parameters) constituyen un juego de cinco parámetros que caracterizan completamente la orientación de la Tierra en el espacio, pero que también se utilizan para estudiar las irregularidades de la rotación terrestre.

Dos de los parámetros tienen en cuenta las diferencias entre la determinación observacional (VLBI, Very Long Baseline Interferometry) del Polo celeste y su posición establecida por las teorías convencionales de Precesión y Nutación vigentes al momento del cálculo. Estas dos cantidades se conocen como corrimientos del Polo celeste (Celestial Pole Offsets) y el estudio de su evolución a lo largo del tiempo ha sido de gran importancia en la actualización de las convenciones de la IAU.

Los apartamientos de la rotación terrestre con respecto a un giro uniforme pueden estudiarse y monitorearse a partir de los tres parámetros adicionales. Dos de ellos se conocen como las componentes del movimiento del polo (x_p , y_p) y no son otra cosa más que las componentes ecuatoriales de la posición del eje instantáneo de rotación en el Sistema de Referencia Terrestre. El parámetro restante refiere a la diferencia entre el valor real de la velocidad angular de rotación de la Tierra y un valor constante (convencionalmente establecido) que debería tener la Tierra si rotara a velocidad uniforme. Un cambio en la velocidad del giro terrestre provocará obviamente un cambio en la longitud del día y es por esto que el parámetro

en cuestión suele denominarse como variación a la longitud del día (ΔLOD , $\Delta\text{Length-Of-Day}$). Su estimación se efectúa a partir de las diferencias entre dos escalas de tiempo: una escala no uniforme que contempla la velocidad real de rotación de la Tierra (TU1) y una escala de tiempo uniforme derivada del tiempo atómico internacional (TUC). Al subconjunto de los EOP formado por estos tres últimos parámetros, (x_p , y_p) y ΔLOD , también se los conoce como parámetros de la rotación terrestre (ERP, Earth Rotation Parameters).

En este capítulo presentaremos las definiciones y características de los cinco EOP que se utilizarán en el capítulo 10 para transformar una posición referida al Marco de Referencia Terrestre en una posición en un Marco de Referencia Celeste con origen en el Geocentro.

Corrimientos del Polo celeste

Para un dado instante, la posición y el desplazamiento previsto del Polo celeste en el Marco de Referencia Celeste queda completamente determinado por los modelos de Precesión y Nutación convencionalmente establecidos por la IAU. Si nos referimos a las series de la Nutación adoptadas por la IAU en 1980 (Seidelman, 1982) y el modelo de Precesión IAU 1976 (Lieske, 1977), entonces estaremos describiendo la posición y trayectoria del Polo Celeste de Efemérides (CEP, Celestial Ephemeris Pole). Si en cambio nos referimos a los modelos IAU vigentes desde el año 2000 (IAU2000A para Nutación e IAU2006 para Precesión), estaremos hablando del *Polo Celeste Intermediario* (CIP, Celestial Intermediate Pole). En cualquier caso, la posición del Polo celeste determinada a partir de mediciones (VLBI) diferirá de la posición convencionalmente establecida según el modelo vigente. Tales diferencias, entendidas como defectos o correcciones a los modelos, se denominan *Corrimientos del Polo Celeste*, comúnmente conocidos por su denominación en inglés *Celestial Pole Offsets* (CPO).

Tabla 8.1.

Corrimientos del Polo celeste instantáneo (CPO)

IAU1976/IAU1980	IAU2006/IAU2000A
$d\psi, d\epsilon$	dX, dY

Nota. Convenciones IERS 1996 a la izquierda e IERS 2010 a la derecha.

La posición de Ecuador Celeste Medio J2000.0 y su respectivo Polo en cualquier instante, esta teóricamente materializada por los modelos incluidos en las convenciones IERS 1996 que

describen el comportamiento dinámico de la Tierra en un sistema de referencia celeste dinámico e inercial. Durante la década de los años 90, diferentes trabajos científicos independientes demostraron que estos modelos son capaces de acumular algunas milésimas de segundos de arco (msa) de error con respecto a los mismos parámetros de la Precesión y la Nutación determinados a partir de las observaciones VLBI, que en esa época ya acumulaba aproximadamente 15 años de datos (Arias y otros, 1995). En otras palabras, los CPO alcanzaron varias milésimas de segundo de arco de amplitud.

Dado que los CPO pueden interpretarse como un estimador de los errores en la posición modelada del Polo celeste con respecto a un sistema de referencia fijo al espacio, este hecho marcó un llamado de atención acerca del comportamiento de los modelos IAU 1980 e IAU 1977. Estos últimos fueron adoptados décadas atrás cuando las mediciones astrométricas se realizaban mayormente en el rango visible. Tales mediciones resultan hoy imprecisas frente a las precisiones alcanzadas posteriormente con VLBI.

Los resultados de los trabajos publicados en la segunda mitad de los años '90 (Souchay y otros, 1995; Charlot y otros, 1994; Ma y otros, 1998) fueron consistentes y mostraron que el Polo del ICRS se apartaba del Polo celeste Medio Convencional J2000.0.

Mientras que Souchay y otros (1995); Ma y otros (1998) sólo consideraron datos VLBI, Charlot y colaboradores (1994) trabajaron con 24 años de datos LLR¹ (Lunar Laser Ranging) además de los 15 años de mediciones VLBI acumuladas al momento. En general todos los autores coinciden en señalar una tasa aproximada de variación en longitud ($\dot{\psi}$, Precesión lunisolar) de -3 msa/año y en oblicuidad ($\dot{\varepsilon}$, Nutación) de aproximadamente -0,25 msa/año, respectivamente.

Souchay y colaboradores (1995) propusieron correcciones, poniendo de manifiesto la necesidad de modificar y actualizar los modelos convencionales de la IAU a los nuevos requerimientos de precisión de las técnicas de la astrometría y geodesia espacial, que desde la década de los 90 paulatinamente reemplazaron a la mayoría de las observaciones astrométricas hechas en el rango visible.

En el marco de las convenciones IAU 2010, los CPO varían con magnitudes por debajo de 1 msa. De nuevo, estos expresan la diferencia entre la ubicación (X e Y) del eje instantáneo de rotación (CIP²) en el Marco de Referencia Celeste determinado por VLBI y su posición determinada por los modelos IAU2006 (para Precesión) (Capitaine y colaboradores, 2003; 2005) e IAU2000A (para Nutación) (Mathews y colaboradores, 2002). Actualmente los CPO se denominan como dX, dY y reemplazan a los anteriores parámetros $\dot{\psi}$ y $\dot{\varepsilon}$. Aunque las magnitudes de dX, dY son mucho más pequeñas, estos no resultan nulos a causa de la

¹ Técnica de la Geodesia Espacial basada en la determinación de los tiempos de viaje de ida y vuelta de pulsos láser entre una estación en la Tierra y espejos reflectores en la superficie de la Luna.

² Ver Capítulo 10

nutación libre del núcleo (FCN, Free Core Nutation; también conocida como Nutación Libre casi diurna). La FCN se origina en la rotación del núcleo fluido de la Tierra y tiene amplitud y fase impredecibles. Tanto la FCN como cualquier otro efecto que no se tenga en cuenta en los modelos de Precesión y Nutación adoptados impactará en los CPO (Kaplan, 2005).

Zerhouni y Capitaine (2009) estimaron las correcciones a las coordenadas del Polo celeste dX , dY usando datos de LLR. En ese trabajo los autores demostraron que aunque la técnica no es tan precisa ni tan densa en sus resultados como VLBI, la combinación de ambas técnicas puede revelar mayor cantidad de detalles que el uso de VLBI de forma aislada. En particular, las series de datos de ambas técnicas combinadas podrían mejorar la determinación del término de Nutación de 18.6 años. Recientemente, Belda y colaboradores (2018) presentan un método para la predicción de los CPO que utiliza modelos empíricos para la FCN, un factor determinante en las variaciones temporales de los CPO.

Movimiento del polo

Ya hemos visto que el eje instantáneo de rotación de la Tierra determina el Polo celeste Verdadero³ (IERS 1996) en el Marco de Referencia Celeste y sus desplazamientos en el sistema de referencia inercial son descritos por los respectivos modelos de Precesión - Nutación.

En esta sección consideraremos los desplazamientos del eje de rotación terrestre con respecto al Marco de Referencia Terrestre. En particular, el cambio instantáneo de dirección del eje de rotación con respecto a un eje z fijo o *Polo de la figura*⁴ en el Marco de Referencia Terrestre, se denomina *movimiento del polo* (MP) y puede parametrizarse con 2 cantidades (x_p, y_p) también conocidas como *coordenadas del polo terrestre*.

La posición del eje instantáneo de rotación (P) con respecto al eje de la figura (Z_i) se determina a través de sus coordenadas polares (γ, Γ) (Woolard y Clemence, 1966, p. 201).

En la Figura 8.1, puede verse que claramente que las coordenadas del eje instantáneo de rotación en el Marco de Referencia Terrestre serán $(x_p, -y_p, 1)$, donde convencionalmente se establece que

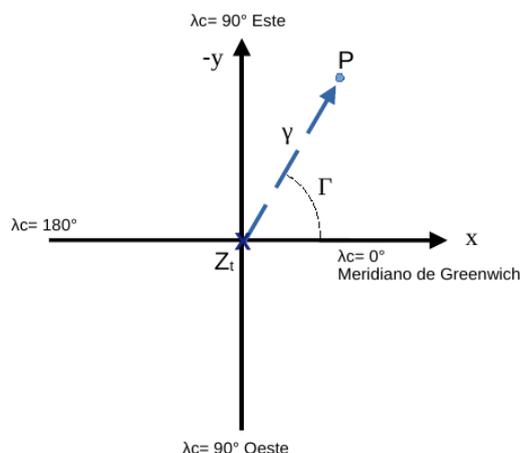
$$x_p = \gamma \cos \Gamma; -y_p = \gamma \sin \Gamma \quad (8.1)$$

³ Equivalente al CIP en IERS 2010, ver Capítulo 10

⁴ Convencionalmente establecido según la dirección del máximo momento de inercia del planeta

Figura 8.1.

Coordenadas polares del eje instantáneo de rotación terrestre con respecto al eje de la figura (Z_i)



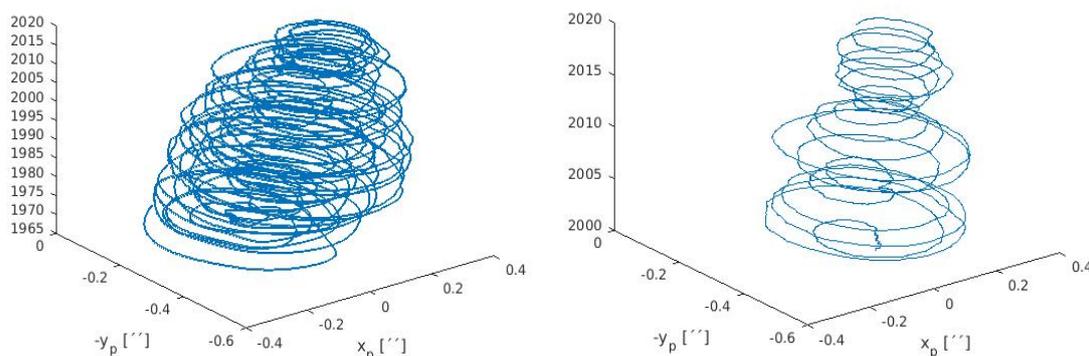
Nota. Vista desde un plano sobre el polo norte terrestre. λ_c refiere a la longitud terrestre convencional.

De lo anterior puede verse que la convención establece que la coordenada x se mide a lo largo del Meridiano de Greenwich, mientras que la coordenada y se mide a lo largo del meridiano 90° de longitud Oeste. El desplazamiento temporal de la posición del eje instantáneo de rotación con respecto al eje de la figura describe una curva característica denominada *polodhe* o *polodia* (ver figura 8.2). La amplitud de este movimiento casi circular varía entre $0,05''$ y $0,25''$ con un periodo aproximado de 6 años (ESAA, 1992). Asumiendo un valor de 6378,14 kilómetros para el radio ecuatorial de la Tierra, tales apartamientos equivalen a un arco de longitud entre 1,55 y 7,73 metros respectivamente sobre la superficie terrestre. El MP se compone por la superposición de varios movimientos con escalas de tiempo desde seculares a sub- diurnos que obedecen a los movimientos forzados por condiciones atmosféricas y/o geofísicas. Estas condiciones perturbadoras cambian continuamente alterando la dinámica de la rotación terrestre a partir de los movimientos angulares relativos generados y de las redistribuciones de masa que modifican el tensor de inercia del planeta.

La Figura 8.2 muestra los apartamientos observados del polo instantáneo de rotación con respecto al polo de la figura. Desde la Figura 8.2 (izq.) se distingue claramente una deriva de la trayectoria. La dirección de la deriva esta aproximada en $\lambda = 75^\circ$ Oeste y se estima que el efecto es causado por el rebote post-glacial y el deshielo de los glaciares (McCarthy y Seidelmann, 2018, p. 78).

Figura 8.2.

(Izquierda) Movimiento del polo en segundos de arco ["] en función del tiempo. (Derecha) Detalle de los últimos 20 años.



Casi todas las causas del movimiento del polo son eventos geofísicos⁵ y por ende, son independientes de la acción gravitatoria de fuerzas externas. Dado que en general estos eventos son impredecibles, la posición del Polo Instantáneo de Rotación se determina observacionalmente de modo regular. El Centro para la Orientación terrestre, perteneciente al IERS (<https://hpiers.obspm.fr/eop-pc/index.php>) es el encargado de brindar las coordenadas diarias del eje instantáneo de la rotación (Bizouard y otros, 2019).

El cambio instantáneo en la dirección del eje de rotación con respecto a la corteza terrestre puede analizarse en primera aproximación considerando un trompo que gira en torno a su eje.

En 1765 Euler predijo que si el eje de rotación de la Tierra no coincidía con el eje principal de inercia, entonces este describiría una circunferencia con respecto al eje de la figura en 305 días. En efecto, Euler consideró a la Tierra como un sólido rígido y simétrico respecto de eje polar. Por lo anterior, el cociente estimado de sus momentos de inercia será

$$\frac{I_3 - I_1}{I_3} = 0,00327 \quad (8.2)$$

donde $I_3 = 8,036 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$ es el momento de inercia polar de la Tierra e $I_1 = 8,01 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$ es el momento de inercia ecuatorial del planeta⁶. Además, desde la

⁵ A las causas geofísicas se superpone una pequeña parte remanente de la acción lunisolar con período diario (Woolard y Clemence, 1966)

⁶ Valores IAG 1999

Figura 8.3 podemos ver que si la velocidad angular de rotación de la Tierra ($\vec{\omega}$) se aparta un ángulo ξ de la dirección del eje de simetría z convencional, este vector ($\vec{\omega}$) comenzará a girar en torno a z precesando con una velocidad angular $\vec{\Omega}$ en un periodo T y describiendo un cono. De este modo, la proyección de ($\vec{\omega}$) en el eje z permanecerá constante (ω_z). Dado que el ξ estimado es de 0,125", de la Figura 8.3 puede verse que $\cos(\xi) = \omega_z / \omega$, pero ξ es un ángulo pequeño y por lo tanto, el valor de su coseno en radianes puede aproximarse a 1.

Luego, $\omega_z \simeq \omega$. El valor de la velocidad angular $\vec{\Omega}$ con la que el vector $\vec{\omega}$ gira en torno al eje z convencional será (Goldstein, 1994, p. 268-270)

$$\Omega = \frac{(I_3 - I_1)}{I_3} \omega_3 \quad (8.3)$$

Reemplazando los valores de ecuación (8.2) en la ecuación (8.3) y considerando $\omega = 2\pi/1$ día quedará $\Omega \simeq 0,0205$ [rad/día]. Luego, como $\Omega = 2\pi/T$ el periodo estimado para el movimiento Euleriano será $T \approx 306$ días.

En 1891 Seth C. Chandler descubre el efecto predicho por Euler a partir de observaciones y estima su amplitud en 0,5". Sin embargo, el periodo observado por Chandler resultó ser de 432 días en lugar de 306 (McCarthy y Seidelmann, 2018). La respuesta a esta diferencia se encuentra la falta de rigidez de la Tierra.

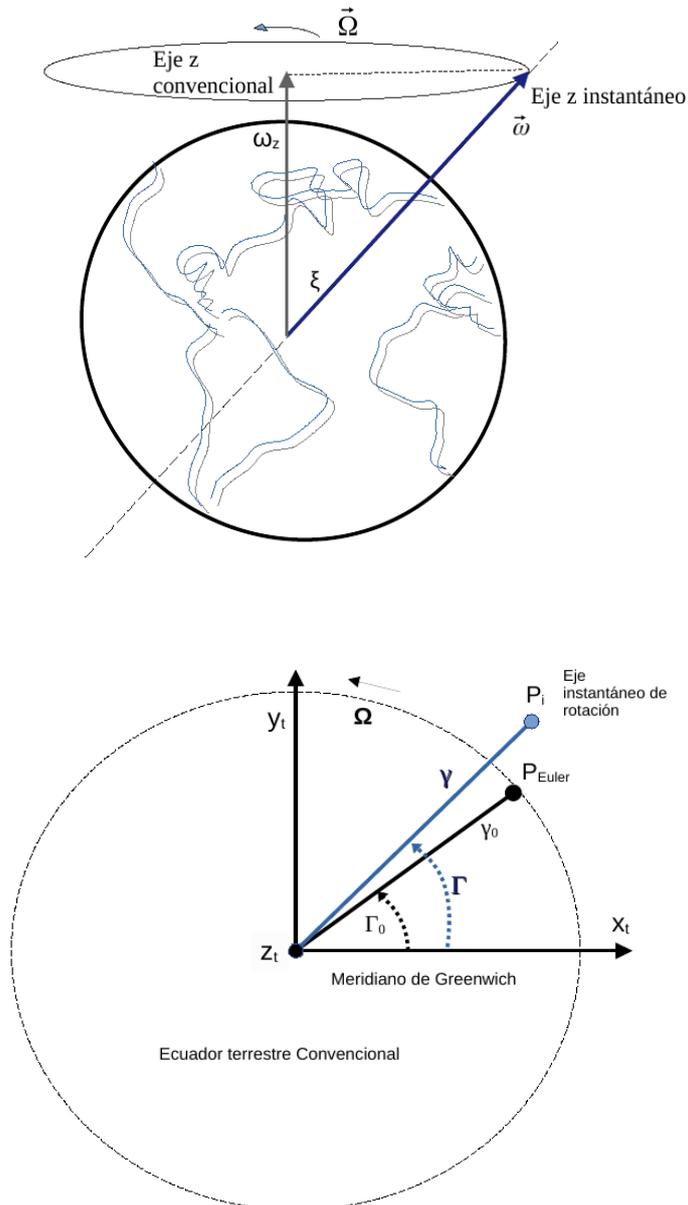
A partir de una análisis espectral de la señal puede verse que la contribución más importante a los términos periódicos del MP proviene de un término con periodo de 432-434 días denominado *bamboleo de Chandler* en honor a su descubridor. A esta contribución, siguen en importancia (considerando su amplitud) las variaciones estacionales (anuales y semi-anuales) debidas principalmente a las redistribuciones de masas de agua y atmosféricas durante el año.

Cambios en las coordenadas terrestres

El MP no afecta las coordenadas celestes (p. ej. α y δ) de un objeto celeste. Sin embargo afectará la reducción de todas las mediciones efectuadas con instrumental colocado en la superficie terrestre dado que producirá cambios en la latitud y longitud terrestres del sitio de observación.

Figura 8.3.

(Arriba) Movimiento Euleriano del vector velocidad angular $\vec{\omega}$ en torno al eje de simetría de la Tierra. (Abajo) Movimientos del Polo instantáneo de rotación y el Polo del movimiento Euleriano.



Nota. El movimiento Euleriano considera a la Tierra como un cuerpo rígido, simétrico y aislado. La figura de abajo muestra una vista superior del movimiento de los polos con respecto a los ejes del Marco de Referencia Terrestre convencional.

La variación de las latitudes geográficas debidas al movimiento del polo, también fueron confirmadas durante 1891. Efectivamente, se realizaron en simultáneo las determinaciones astronómicas de la latitud del lugar en dos estaciones apartadas casi 180° en longitud (λ): Berlín y Waikiki. Debido a este hecho las variaciones en latitud resultaron opuestas en fase. Estos descubrimientos empíricos, junto con el trabajo de Chandler, condujeron al establecimiento del Servicio Internacional de las Latitudes (ILS⁷) en 1895.

En sus comienzos, el ILS sólo dispuso de 5 estaciones ubicadas a una latitud de 39° 8' N y comenzó su operación rutinaria en 1899 (Smylie, 2013, p. 274). El ILS evolucionó a medida que pasaron los años y puede considerarse como uno de los precursores del actual IERS.

El procedimiento astronómico para determinar la latitud (ϕ) de una dada estación se conoce como método de Horrebow-Talcott⁸ y consiste en medir las distancias cenitales de pares de estrellas con declinación conocida, transitando al norte y al sur del cenit, respectivamente. Luego,

$$\phi = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2) + \frac{1}{2}(z_s - z_n) \quad (8.4)$$

donde δ_1 y z_n son la declinación y distancia cenital de la estrella culminando al norte del cenit y δ_2 y z_s corresponden a la estrella culminando al sur de cenit. Las estrellas 1 y 2 se elegían por tener alturas (complemento de la distancia cenital) casi iguales y en general eran estrellas circumpolares. Cuando los valores de $z \lesssim 30^\circ$ y las culminaciones eran casi simultáneas, el uso de los telescopios cenitales y/o tubos fotográficos cenitales produjo determinaciones de ϕ de gran precisión (Woolard y Clemence, 1966, p. 229).

Siguiendo la interpretación de Woolard y Clemence, (1966, p. 199-200), la variación de las coordenadas terrestres (ϕ, λ) de una dada estación a causa del Movimiento del Polo puede deducirse matemáticamente desde la Figura 8.4. Nótese que se han indicado las intersecciones de los meridianos convencional e instantáneo con sus respectivos Ecuadores.

La Figura 8.5 nos muestra un detalle de los triángulos esféricos sobre los cuales debemos operar la deducir las respectivas fórmulas de variación. Comenzaremos operando sobre el triángulo con vértices en el eje z de la figura, el eje instantáneo de rotación y el cenit del lugar.

Aplicando la formula del coseno,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi_0\right) \cos \gamma + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_0\right) \sin \gamma \cos(-\lambda_0 + \Gamma) \quad (8.5)$$

$$\sin \phi = \sin \phi_0 \cos \gamma + \cos \phi_0 \sin \gamma \cos(-\lambda_0 + \Gamma) \quad (8.6)$$

⁷ International Latitude Service

⁸ También llamado "Método de alturas iguales", ver capítulo 4

Desarrollando el coseno de la diferencia y considerando que γ es un ángulo muy pequeño, por lo tanto si lo expresamos en radianes, es válido aproximar $\text{sen}(\gamma) \approx \gamma$ y el $\text{cos}(\gamma) \approx 1$

$$\text{sen } \phi \simeq \text{sen } \phi_0 + \gamma \text{ cos } \phi_0 [\text{cos } \lambda_0 \text{ cos } \Gamma + \text{sen } \lambda_0 \text{ sen } \Gamma] \quad (8.7)$$

Aplicando la propiedad distributiva y reemplazando por la ecuación (8.1)

$$\text{sen } \phi \simeq \text{sen } \phi_0 + \text{cos } \phi_0 [x_p \text{ cos } \lambda_0 - y_p \text{ sen } \lambda_0] \quad (8.8)$$

Si expresamos $\text{sen}(\phi)$ como $\text{sen}(\phi) = \text{sen}[(\phi - \phi_0) + \phi_0]$.

Denominando $\Delta \phi = \phi - \phi_0$ y desarrollando el seno de la suma

$$\text{sen } \phi = \text{sen } \Delta \phi \text{ cos } \phi_0 + \text{cos } \Delta \phi \text{ sen } \phi_0 \quad (8.9)$$

Dado que $\Delta \phi$ es muy pequeño, si lo expresamos en radianes

$$\text{sen } \phi \simeq \Delta \phi \text{ cos } \phi_0 + \text{sen } \phi_0 \quad (8.10)$$

Reemplazando la ecuación (8.10) en la ecuación (8.8)

$$\Delta \phi \text{ cos } \phi_0 + \text{sen } \phi_0 \simeq \text{sen } \phi_0 + \text{cos } \phi_0 [x_p \text{ cos } \lambda_0 - y_p \text{ sen } \lambda_0] \quad (8.11)$$

Simplificando adecuadamente, quedará

$$\boxed{\Delta \phi \simeq [x_p \text{ cos } \lambda_0 - y_p \text{ sen } \lambda_0]} \quad (8.12)$$

Para deducir las variaciones en las longitudes debido al Movimiento del Polo, aplicamos la fórmula del seno al mismo triángulo anterior

$$\frac{\text{sen } \Delta m}{\text{sen } \gamma} = \frac{\text{sen}(-\lambda_0 + \Gamma)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)} \quad (8.13)$$

$$\text{sen } \Delta m \text{ cos } \phi = \text{sen } \gamma \text{ sen}(-\lambda_0 + \Gamma) \quad (8.14)$$

Dado que γ es un ángulo muy pequeño, la intersección del meridiano de lugar instantáneo con el Ecuador convencional no es estrictamente un ángulo recto, aunque su valor es muy próximo a $(\pi/2)$. Por esta razón, con el objetivo de cuantificar la diferencia entre las longitudes instantánea y convencional, puedo aproximar $\phi \approx \phi_0$ y la ecuación (8.14) quedará

$$\text{sen } \Delta m \cos \phi_0 \approx \text{sen } \gamma \text{ sen } (-\lambda_0 + \Gamma) \quad (8.15)$$

Desarrollando el seno de la diferencia y aproximando $\text{sen}(\gamma) \approx \gamma$ para γ expresado en radianes quedará

$$\text{sen } \Delta m \cos \phi_0 \approx \gamma [\text{sen } \Gamma \cos \lambda_0 - \cos \Gamma \text{ sen } \lambda_0] \quad (8.16)$$

Aplicando la propiedad distributiva y reemplazando con la ecuación (8.1),

$$\text{sen } \Delta m \cos \phi_0 \approx [-x_p \text{ sen } \lambda_0 - y_p \cos \lambda_0] \quad (8.17)$$

Para encontrar el valor del $\text{sen}(\Delta m)$ es necesario aplicar fórmula del seno al triángulo con vértices en el cenit, la intersección del meridiano de lugar convencional con el Ecuador convencional y la intersección del meridiano de lugar instantáneo con el Ecuador convencional. Por lo anterior, aunque este último ángulo no es exactamente igual a un ángulo recto, podemos aproximarlo a $(\pi/2)$ sin perder generalidad. Luego

$$\frac{\text{sen } \Delta m}{\text{sen } \Delta \lambda} \simeq \frac{\text{sen}(\pi/2)}{\text{sen } \phi_0} \quad (8.18)$$

$$\text{sen } \Delta m \simeq \frac{\text{sen } \Delta \lambda}{\text{sen } \phi_0} \quad (8.19)$$

Reemplazando la ecuación (8.19) en la ecuación (8.17) y despejando

$$\text{sen } \Delta \lambda \approx \frac{\text{sen } \phi_0}{\cos \phi_0} (-x_p \text{ sen } \lambda_0 - y_p \cos \lambda_0) \quad (8.20)$$

Nótese que el sitio escogido se ubica al oeste de Greenwich, luego $\Delta \lambda = -\lambda + \lambda_0$, por lo tanto la diferencia entre las longitudes instantánea y convencional será $-\Delta \lambda$. Como antes,

aproximando el seno de un ángulo pequeño por el valor del ángulo en radianes en la ecuación (8.20) resultará

$$\Delta \lambda \approx \operatorname{tg} \phi_0 (x_p \operatorname{sen} \lambda_0 + y_p \operatorname{cos} \lambda_0) \quad (8.21)$$

Cambios en la longitud del día

Ya hemos visto la cronología de los avances en el estudio del Movimiento del Polo. Analizaremos a continuación el estudio de los cambios en la velocidad de rotación terrestre.

Sin dudas el inicio a la comprobación empírica y el estudio de las irregularidades de la rotación terrestre puede ubicarse con precisión en la segunda mitad del siglo XIX.

La idea de la rotación terrestre, asociada al movimiento aparente diurno del cielo estrellado, fue objeto de controversias y numerosas teorías desde la antigüedad. Efectivamente, desde la época de Tolomeo (90-168 AC) se usó la posición del Sol en el cielo para medir intervalos de tiempo aún cuando los astrónomos ya sabían que medir tiempos a partir del movimiento diario del Sol no resultaría en una escala de tiempo uniforme (McCarthy y Seidelman, 2018, p. 10).

Una evidencia empírica de la rotación terrestre fue aportada por el péndulo de Foucault en el Observatorio de París en 1851. Pero fue Newcomb en 1878 el primero en considerar la posibilidad de una Tierra rotando irregularmente como respuesta y explicación a sus inconsistencias observacionales. Efectivamente, la falla continua en las teorías de la Luna intentando representar sus observaciones, lo llevaron a pensar que la rotación de la Tierra no era uniforme.

En el próximo capítulo veremos que las escalas de tiempo denominadas *rotacionales*⁹ están afectadas por irregularidades de la rotación terrestre, no sólo por el cambio en la velocidad de rotación sino también por el cambio en la posición del meridiano instantáneo de lugar debido al movimiento del polo.

El Tiempo Universal (TU) fue adoptado por la IAU en 1935 para designar tiempo medio¹⁰ desde el meridiano de Greenwich. Desde esa fecha hasta hoy evolucionó tanto su definición como la forma de determinarlo debido a las mejoras en el conocimiento y en la precisión instrumental (McCarthy y Seidelman, 2018, p. 15). TU puede vincularse matemáticamente al Tiempo Sidéreo Local. Por lo tanto las observaciones locales del ángulo de rotación terrestre a partir de la determinación del instante de tránsito de las estrellas por el meridiano de lugar, como ya hemos visto, serán afectadas por el movimiento del polo. La escala de TU así

⁹ Tiempo solar y tiempo sidéreo

¹⁰ Movimiento medio diurno del Sol

determinada se denomina TU0. Pero el Movimiento del Polo puede corregirse aplicando la ecuación (8.21) y al hacerlo, obtenemos TU1.

Así, TU1 representa una escala de tiempo derivada de las observaciones directas del ángulo de rotación de la Tierra en el espacio y por lo tanto seguirá afectada por las variaciones en la tasa de rotación, i.e. es una escala de tiempo *no uniforme*. Hoy día TU1 se determina principalmente a partir observaciones de VLBI.

La velocidad angular real de rotación diurna de la Tierra admite ser expresada como la adición de una tasa de rotación que varía uniformemente con TAI + correcciones que indican la falta de uniformidad de la rotación terrestre. Estas correcciones pueden escribirse como la diferencia entre una escala de tiempo rotacional y una escala de tiempo uniforme. En particular, están dadas por (TU1-TUC) o (TU1-TAI)¹¹.

La diferencia entre la duración del día determinada astronómicamente y 86400 segundos en una escala de tiempo uniforme (TAI) se denomina *exceso a la duración del día* (LOD¹²). La relación entre la velocidad angular de rotación de la Tierra (ω , en radianes por segundo) y LOD, medido en segundos, es

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{LOD}{86400} \right) \quad (8.22)$$

donde $\omega_0 = 72921151,467064 \times 10^{-12}$ *radianes/segundo* es tasa de rotación nominal o, lo que es lo mismo, la velocidad angular de rotación media del planeta convencionalmente fijada en la época 1820 (Bizouard, septiembre 2021). Nótese que los 86400 segundos de TAI corresponden a la duración del día solar medio.

Tanto TU1 como LOD sufren distintas variaciones debidas a mareas zonales, mareas oceánicas, circulación atmosférica, intercambio de momento angular entre el núcleo y el manto terrestre, entre otras causas geofísicas que producen cambios en la redistribución de masas de la Tierra o provocan contribuciones a la componente axial del momento angular relativo¹³ del planeta. También ocurren variaciones debidas a la transferencia de momento angular al movimiento orbital de la Luna. Algunas de estas variaciones son rápidas (p. ej. 50 días, estacionales) y otras lentas (p. ej. decenales, seculares) según su naturaleza (Gross, 2007, p. 278-283).

Si denominamos ΔLOD a los cambios en la longitud del día expresados en segundos (Gross, 2007 p. 17),

¹¹ Ver capítulo 9

¹² Length-Of-Day

¹³ Debidos a movimientos relativos al marco de referencia rotante

$$\Delta LOD(t) = \frac{-d(TU1 - TUC)}{dt} 86400 \quad (8.23)$$

El análisis de las series temporales de ΔLOD constituye una valiosa fuente de datos para trabajos interdisciplinarios. Efectivamente, permite elaborar modelos, comparar sus predicciones con los datos observados y desarrollar estudios del comportamiento de las distintas causas físicas de excitación dentro de la Tierra entendida como un sistema dinámico único.

Referencias

- Arias, E. F., Charlot, P., Feissel, M., Lestrade, J. F. (1995). The extragalactic reference system of the International Earth Rotation Service, ICRS. *Astronomy and Astrophysics*, 303, 604-608.
- Belda, S., Ferrándiz, J. M., Heinkelmann, R., Schuh, H. (2018). A new method to improve the prediction of the celestial pole offsets. *Scientific reports*, 8(1), 1-10. Doi:10.1038/s41598-018-32082-1
- Bizouard, C., Lambert, S., Gattano, C., Becker, O., Richard, J. Y. (2019). The IERS EOP 14C04 solution for Earth orientation parameters consistent with ITRF 2014. *Journal of Geodesy*, 93(5), 621-633. <https://doi.org/10.1007/s00190-018-1186-3>
- Bizouard, C. (acceso septiembre 2021) Universal Time – Length of Day. Recuperado de <https://hpiers.obspm.fr/eop-pc/>
- Capitaine, N., Wallace, P. T., Chapront, J., (2003), Expressions for IAU 2000 precession quantities, *Astronomy and Astrophysics*, 412, 567–586.
- Capitaine, N., Wallace, P. T., Chapront, J. (2005), Improvement of the IAU 2000 precession model, *Astronomy and Astrophysics*, 432, 355–367
- Charlot, P., Sovers, O., Williams, J., & Newhall, X. (1994). Precession and nutation from joint analysis of radio interferometric and lunar laser ranging observations, *Astrophys. J.* 109, 418
- Explanatory Supplement of the Astronomical Almanac (ESAA, 1992) *A revision to the Explanatory Supplement of the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac*. P.K. Seidelmann (ed.). University Science Books
- Goldstein H. (1994). *Mecánica Clásica*. Editorial Reverté.
- Gross, R. S. (2007). Earth rotation variations-long period. En *Treatise on geophysics*, 3, 239-294.

- IERS (1996). IERS Conventions 1996. McCarthy, D. D. (ed.). *IERS Technical Note*, 21, 1-95.
- IERS TN36. (2010) *IERS Conventions 2010*. G. Petit and B Luzum (eds.). ISSN: 1019-4568 (print version)
- Kaplan G. H. (2005) The IAU Resolutions on Astronomical Reference Systems, Time Scales, and Earth Rotation Models Explanation and Implementation. *United States Naval Observatory circular N°. 179*. Washington: USNO. Disponible en: <https://arxiv.org/pdf/astro-ph/0602086.pdf>
- Lieske, J. H., Lederle, T., Fricke, W., Morando, B. (1977). Expressions for the precession quantities based upon the IAU 1976 system of astronomical constants. *Astronomy and Astrophysics*, 58, 1-16.
- Ma, C., Arias, E. F., Eubanks, T., Fey, A. L., Gontier, A. M., Jacobs, C. S., ... & Charlot, P. (1998). The international celestial reference frame as realized by very long baseline interferometry. *The Astronomical Journal*, 116(1), 516.
- Mathews, P. M., Herring, T. A., Buffett, B. A. (2002) Modeling of nutation and precession: New nutation series for nonrigid Earth and insights into the Earth's interior. *J. Geophys. Res.* 107(B4), 2068 .
- McCarthy D.D, Seidelmann P.K. (2018) *Time: From Earth Rotation to Atomic Physics*. Cambridge University Press
- Seidelmann, P. K. (1982). 1980 IAU theory of nutation: The final report of the IAU working group on nutation. *Celestial mechanics*, 27(1), 79-106.
- Smylie D.E. (2013). *Earth Dynamics: Deformation and oscillation of the rotating Earth*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Souchay, J., Feissel, M., Bizouard, C., Capitaine, N., Bougeard, M. (1995). Precession and nutation for a non-rigid Earth: comparison between theory and VLBI observations. *Astronomy and Astrophysics*, 299, 277.
- Woolard, E. C., Clemence, G. (1966). *Spherical Astronomy*. New York, London: Academic Press.
- Zerhouni, W., Capitaine, N. (2009). Celestial pole offsets from lunar laser ranging and comparison with VLBI. *Astronomy & Astrophysics*, 507(3), 1687-1695.

CAPÍTULO 9

Escalas de tiempo

María Silvina De Biasi

Según el Diccionario de la Real Academia Española, tiempo es la magnitud física que permite ordenar la secuencia de los sucesos, estableciendo un pasado, un presente y un futuro, y cuya unidad en el sistema internacional es el segundo. En varios capítulos de este libro el tiempo está presente en las variaciones de las coordenadas de los objetos celestes debido a varios efectos, por ejemplo la rotación y traslación de la Tierra, el movimiento de los planos fundamentales de referencia, el movimiento de las estrellas relativo al Sol. Podemos decir que el tiempo es la variable que describe los cambios en el mundo físico, intrínsecamente ligado con la medida del movimiento.

El problema de la Astronomía es la medida del tiempo, su definición es de naturaleza filosófica. Se denomina escala de tiempo a cualquier sistema de medición del tiempo fundado en un fenómeno físico observable, que puede tratarse del conteo de sucesos periódicos –las oscilaciones de un péndulo, de un diapasón, de un átomo excitado- o de un fenómeno continuo y medible –la rotación de la Tierra, su traslación -, como lo señala Vives (Vives 1971, p188-189). Para la medida práctica del tiempo es indispensable disponer de un mecanismo que reproduzca lo más exactamente la escala, el reloj o guarda-tiempo, permitiendo su conservación y ofreciendo continuamente una indicación directa del tiempo (Vives 1971, p.205).

Las escalas de tiempo utilizadas en Astronomía están agrupadas según el fenómeno que las define:

Tabla 9.1.

Escalas de tiempo utilizadas en Astronomía

Grupo	Fenómeno	Escala de tiempo
Tiempos rotacionales	Rotación de la Tierra	Tiempo Sidéreo, Tiempo Solar
Tiempos dinámicos	Traslación de los cuerpos del Sistema Solar	Tiempo de Efemérides Tiempo Dinámico Baricéntrico, Tiempo Terrestre

Tiempos físicos	Transiciones atómicas	Tiempo Atómico Internacional Tiempo Universal Coordinado
-----------------	-----------------------	---

Tiempos rotacionales

La unidad de esta escala de tiempo es el período de una revolución completa de la Tierra alrededor de su eje, como lo indica su nombre. La rotación terrestre puede medirse a través del movimiento angular del meridiano local de un observador relativo a un punto dado en la esfera celeste; luego la observación del movimiento diario del punto seleccionado provee la medición de dicho movimiento. Los tiempos rotacionales son, en consecuencia, escalas de tiempo local y, además, están afectados por el movimiento del polo terrestre vistos en el capítulo 8.

Tiempo Sidéreo

El *Tiempo Sidéreo Local* TSL se mide numéricamente en cada instante por el ángulo horario del equinoccio vernal t_y .

El equinoccio vernal no está fijo en la esfera celeste, tal como se detalla en el capítulo 5, lo que introduce nuevas denominaciones. El *Tiempo Sidéreo Aparente Local* TSAL es el ángulo horario del Equinoccio Verdadero de la Fecha γ_V , mientras que el *Tiempo Sidéreo Medio Local* TSML es el ángulo horario del Equinoccio medio de la Fecha γ_m . Cuando los ángulos horarios están referidos al meridiano de Greenwich, se denominan Tiempo Sidéreo Aparente en Greenwich TSAG y Tiempo Sidéreo Medio en Greenwich TSMG, respectivamente. Por consiguiente, $TSMG = TSML - \lambda$ y $TSAG = TSAL - \lambda$, con λ la longitud geográfica del lugar.

La diferencia entre TSAL y TSML se denomina Ecuación de los Equinoccios EE, denominada “*nutación en ascensión recta*” antes de 1960, es la ascensión recta del Equinoccio medio de la Fecha referida a Ecuador y Equinoccio Verdaderos de la Fecha, representada por el arco $\gamma_V O$ en la figura 5.11. Se encuentra tabulada diariamente en las efemérides referida al meridiano de Greenwich, siendo su expresión:

$$EE = TSAG - TSMG$$

$$EE = \Delta \psi \cos \varepsilon_V \approx \Delta \psi \cos \varepsilon_m \quad (9.1)$$

En la práctica, el Tiempo Sidéreo Aparente no es utilizado como escala de tiempo, solamente se lo determina mediante la observación de las estrellas en tránsito. Utilizando la ecuación 9.1, se obtiene el Tiempo Sidéreo Medio y se establece como unidad el día sidéreo medio, que es el intervalo entre dos tránsitos consecutivos del Equinoccio medio de la Fecha γ_m (Mueller, 1969, p.140). Por convención, el día sidéreo medio se divide en horas, minutos y segundos, y si denominamos (sid) al intervalo sidéreo medio

$$1 \text{ día (sid)} = 24^h(\text{sid}) = 1440^m(\text{sid}) = 86400^s(\text{sid})$$

Cabe ahora preguntarnos si la unidad del Tiempo Sidéreo Medio tiene siempre la misma duración considerando solamente efectos en el sistema celeste de referencia. Debido a la precesión, el día sidéreo medio es apenas más corto que un período de rotación de la Tierra. El Equinoccio se desplaza sobre el Ecuador hacia el Oeste con la velocidad anual de precesión general en ascensión recta m (fórmula 5.39) y, como la Tierra rota de Oeste a Este, cualquier meridiano encuentra al Equinoccio $\sim 0^s,008$ antes de completar los 360° respecto a un Equinoccio idealmente fijo en el Ecuador.

Tiempo Solar

Similar al Tiempo Sidéreo, el movimiento del Sol en ángulo horario respecto al meridiano local define al *Tiempo Solar Verdadero* $TS_{\odot}L$ y su medida numérica en cada instante es el ángulo horario del Sol. Luego

$$TS_{\odot}L = t_{\odot}$$

$$TS_{\odot}L = TSL - \alpha_{\odot} \tag{9.2}$$

Esta escala fue muy utilizada en la antigüedad para regular la vida civil, la medida de este tiempo se realizaba con un reloj de Sol.

Variaciones del Tiempo Solar Verdadero

Siguiendo a Vives, (Vives, 1971, p. 223-224), analizaremos el movimiento del Sol a lo largo de la eclíptica asumiendo un movimiento no perturbado - $\beta_s = 0$ - y la oblicuidad de la eclíptica ε conocida. A partir de la fórmula de los 5 elementos aplicada al triángulo esférico rectángulo $SU\gamma$ de la figura 7.5,

$$\sin \delta_s \cos 90^\circ = \cos \lambda_s \sin \alpha_s - \sin \lambda_s \cos \alpha_s \cos \varepsilon$$

se obtiene

$$\tan \alpha_s = \tan \lambda_s \cos \varepsilon$$

La variación en α_s se calcula derivando esta ecuación

$$\frac{-1}{\cos^2 \alpha_s} d \alpha_s = \frac{-1}{\cos^2 \lambda_s} d \lambda_s \cos \varepsilon \quad (9.3)$$

El teorema del coseno provee la expresión

$$\cos \lambda_s = \cos \alpha_s \sin \delta_s + \sin \alpha_s \cos \delta_s \cos 90^\circ \quad (9.4)$$

Reemplazando 9.4 en 9.3 resulta

$$d \alpha_s = \frac{\cos \varepsilon}{\cos^2 \delta_s} d \lambda_s \quad (9.5)$$

Analicemos las variables de la fórmula 9.5. El movimiento del Sol sobre la eclíptica no es uniforme debido a la ley de las áreas, luego $d \lambda_s$ es máxima en el perigeo y mínima en el apogeo; además δ_s varía entre $-\varepsilon \leq \delta_s \leq \varepsilon$ y el término $\cos^2 \delta_s$ es máximo en los equinoccios. Entonces, $d \alpha_s$ no aumenta uniformemente, por ende tampoco lo hace t_s , implicando que el Tiempo Solar Verdadero no es uniforme.

Tiempo Solar Medio

Las irregularidades del Tiempo Solar Verdadero recién estudiadas, además de ser conocidas por Claudio Ptolomeo, evidenciaron que el empleo del Sol no resultaba conveniente para cronometrar el tiempo. Los astrónomos idearon, entonces, una escala de tiempo regular, el Tiempo Solar Medio, con el objeto de garantizar la proporcionalidad entre la nueva escala y el ángulo que describe la Tierra durante la rotación alrededor de su eje –asumida como constante en aquella época- (Audin y Guinot, 1988, p.40). Para esto, se define un objeto celeste imaginario, el Sol Medio Ficticio (SMF), ubicado en el Ecuador medio de la fecha moviéndose uniformemente con velocidad igual a la velocidad diurna promedio del Sol, la que difiere de la velocidad media anual del Sol a lo largo de la Eclíptica en la mínima aceleración secular del Sol (Mueller, 1969, p.147). A fin de evitar confusiones de nomenclatura en las referencias utilizadas, este objeto imaginario toma el nombre de sol ficticio en Mueller (Mueller, 1969), Sol medio ficticio en ESAA (ESAA, 1992) y Sol Medio Universal en Green (Green, 1988).

El Sol Medio Ficticio (SMF) queda caracterizado por una fórmula convencional de su ascensión recta referida al Equinoccio medio establecida por Newcomb en sus Tablas del Sol (1895)

$$AR(\text{SMF}) = 18^h 38^m 45^s,836 + 8640184^s,542 T_M + 0^s,0929 T_M^2 \quad (9.6)$$

donde T_M es el tiempo en centurias julianas de 36525 días solares medios desde la época estándar 0 de enero de 1900 a 12^h TU (Mueller, 1969, p.147)

El ángulo horario del Sol Medio Ficticio define la escala de *Tiempo Solar Medio Local*

$$TS_{\odot} \text{ML} = t_{\text{SMF}} \quad (9.7)$$

su unidad es el día solar medio, que es el intervalo entre dos tránsitos consecutivos del SMF. Similar al día sidéreo medio, se divide en horas, minutos y segundos, y si el intervalo solar medio se designa con (M) resulta

$$1 \text{ día (M)} = 24^h \text{ (M)} = 1440^m \text{ (M)} = 86400^s \text{ (M)}$$

Para que el día comience a medianoche, se define el *Tiempo Civil* como

$$TCivil = TS_{\odot} \text{ML} + 12 \text{ h} \quad (9.8)$$

En especial, el Tiempo Civil del meridiano de Greenwich se denomina *Tiempo Universal* TU, su utilización fue recomendada por la UAI en 1948 (Audin y Guinot, 1988, p.41); asimismo el Tiempo Solar Medio en Greenwich, más conocido por sus siglas GMT y utilizado

frecuentemente en varios sitios de internet, es equivalente al Tiempo Universal en el Reino Unido y en navegación.

La diferencia entre el Tiempo Solar Verdadero y el Tiempo Solar Medio en un cierto instante se denomina Ecuación del Tiempo (ET), el módulo de su amplitud nunca excede los 16 minutos (ESAA, 1992, p. 74). El valor diario de ET se encuentra en los almanaques (efemérides) náuticos, se utiliza en el posicionamiento en tierra y en mar de baja precisión mediante observaciones del Sol y en los relojes de Sol.

A pesar de sus irregularidades, el Tiempo Solar Verdadero era la única escala accesible directamente mediante la observación de las alturas del Sol y de las estrellas y fue el argumento de las efemérides utilizadas para navegación y Astronomía; la Ecuación del Tiempo se utilizaba cuando el Tiempo Solar Medio era requerido para ajustar los relojes y determinar el argumento de entrada de las tablas astronómicas. Desde fines del siglo XVIII el Tiempo Solar Verdadero fue gradualmente remplazado en la vida civil por el Tiempo Solar Medio, lo que también sucedió en el argumento temporal de las efemérides a mediados del siglo XIX (ESAA, 1992, p. 75), además en 1925 se adopta el comienzo del día solar medio a medianoche (Audin y Guinot, 1988, p. 41).

Además del día solar medio, otro intervalo solar relevante es el año trópico (año solar medio trópico), definido como el tiempo requerido entre dos pasajes consecutivos del Sol Medio Ficticio por el Equinoccio medio, o equivalentemente el tiempo promedio requerido por el Sol para realizar dos pasajes consecutivos por Equinoccio Verdadero; su duración es de 365,24219879 días solares medios (Mueller, 1966, p. 150). Recordemos que el calendario civil usado en todo el mundo, tanto el calendario Juliano introducido en el año 46AC como el calendario Gregoriano puesto en práctica en 1582 y vigente en la actualidad, se ajusta lo mejor posible a la duración del año trópico.

Conversión entre intervalos de Tiempo Sidéreo y Tiempo Solar

En la ecuación 9.6, el valor de $AR(SMF)$ fija en cada instante la posición del Sol Medio Ficticio respecto al Equinoccio y a las estrellas, relacionando el Tiempo Solar Medio, ángulo horario del SMF con el Tiempo Sidéreo, ángulo horario del equinoccio, expresado en la ecuación 9.2. Utilizaremos la expresión 9.6 actualizada por la IAU en 1983 para encontrar la relación entre el Tiempo Sidéreo Medio en Greenwich TSMG y el Tiempo Universal TU (Green, 1988, p. 242)

$$AR(SMF) = 18^h 41^m 50^s,54841 + 8640184^s,812866 T_M + 0^s,093104 T_M^2 - 6^s,2 \times 10^{-6} T_M^3 \quad (9.9)$$

T_M es el tiempo en centurias julianas desde 1 de enero de 2000 a 12^h TU1 (ver capítulo 8).

La expresión 9.8 permite expresar

$$TU = TS_{\odot} MG + 12 \text{ h}$$

$$TU = TSMG - AR(SMF) + 12 \text{ h}$$

reemplazando los valores de 9.9 se llega a

$$TSMG \text{ a } 0 \text{ h TU} = 6^h 41^m 50^s,54841 + 8640184^s,812866 T_M + 0^s,093104 T_M^2 - 6^s,2 \times 10^{-6} T_M^3 \quad (9.10)$$

cuyos valores diarios a 0h TU se encuentran tabulados en los almanaques astronómicos.

Encontremos ahora el factor de conversión entre el día sidéreo medio y el día solar medio. Los últimos términos de 9.10 se deben a una variación secular del año trópico causada principalmente por una variación en la velocidad de precesión, por lo tanto son independientes de las variaciones de la velocidad angular de rotación terrestre y pueden desprejiciarse este análisis (Green, 1988, p. 242).

En la figura 9.1, se representa la Tierra vista desde el Polo norte celeste (PNC), donde MG simboliza el meridiano de Greenwich y se indican las direcciones al Equinoccio vernal y al Sol Medio Ficticio SMF. Durante 1 día solar medio, el ángulo horario que describe el Equinoccio se compone de un recorrido completo de 24 horas sidéreas más un ángulo μ . Este ángulo es igual a la tasa de cambio de TSMG durante 1 día solar medio -dada por 9.10- en el instante 12hs TU (el SMF está en tránsito en el meridiano MG) (Mueller, 1969, p.156). Luego,

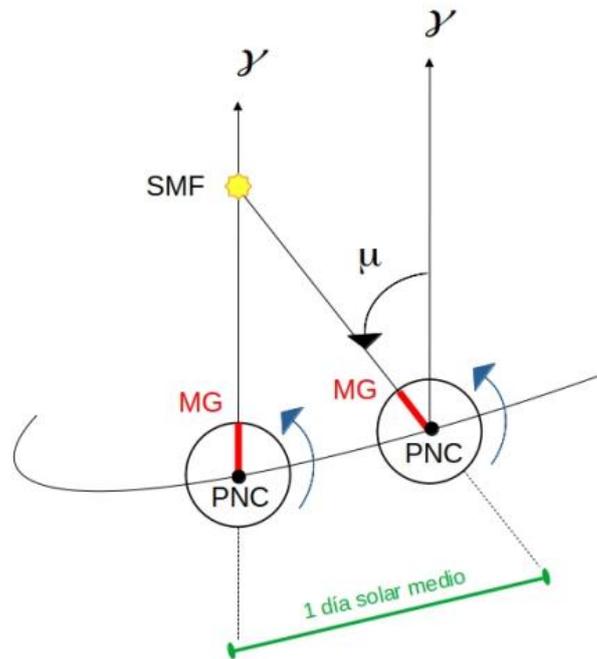
$$1 \text{ día (M)} = 1 \text{ día(sid)} + \mu$$

$$\mu = \frac{dTSMG}{dT_M} = \frac{8640184^s,812866}{36525}$$

$$\mu = 236^s,555367909$$

Figura 9.1.

Conversión entre día sidéreo medio y día solar medio



Nota. Adaptado de *Spherical and Practical Astronomy as Applied to Geodesy* (p. 158), por Mueller I. I., 1969, Frederick Ungar Publishing Co.

Finalmente,

$$1 \text{ día(M)} = 1,002737909350795 \text{ día (sid)} \quad (9.11a)$$

$$1 \text{ día (sid)} = 0,997269566329084 \text{ día (M)} \quad (9.11b)$$

Determinación del Tiempo Universal

En cualquier instante, una determinación directa de TU puede realizarse a partir del Tiempo Sidéreo Local en ese instante, generalmente observando el tránsito de un objeto celeste de ascensión recta conocida. Recordemos los pasos del procedimiento habitual de transformación del tiempo sidéreo aparente local TSAL en Tiempo Universal :

Primero: Calcular el Tiempo Sidéreo Medio Local mediante la ecuación de los equinoccios EE

$$TSML = TSAL - EE$$

Segundo: Obtener el Tiempo sidéreo medio en Greenwich mediante la longitud geográfica del lugar λ'

$$TSMG = TSML - \lambda'$$

Los pasos primero y segundo pueden intercambiarse

Tercero: Calcular el intervalo sidéreo θ entre 0h TU y el instante dado

$$\theta = TSMG - TSMG \text{ a } 0 \text{ h TU}$$

Cuarto: Convertir el intervalo sidéreo en un intervalo de TU (de tiempo solar medio) haciendo uso de 9.11b

$$TU = 0,997269566329084 \theta$$

Como se explicó en el capítulo 8, este procedimiento determina la escala de TU denominada TU0 que está afectada por el movimiento del polo y las irregularidades de la rotación terrestre. Sin embargo, es posible desafectar a TU0 del movimiento del polo utilizando la ecuación 8.21 para lo cual se asocia TU0 a la longitud instantánea λ y la nueva escala TU1 a la longitud convencional λ_0 del lugar de observación.

Difusión del Tiempo Universal

A fines del siglo XIX la vida civil utilizaba el Tiempo Solar Medio, sin embargo la coordinación de las actividades comerciales y del transporte requerían una referencia de tiempo única a nivel mundial. La adopción de un primer meridiano y de una hora universal fue recomendada en la conferencia internacional realizada en Washington en 1888, donde también se acordó que el día universal comenzara a medianoche en el primer meridiano (Audin y Guinot, 1988, p. 40). Esta hora universal estaría expresada en la escala TU.

A principios del siglo XX, el sistema de husos horarios ligado al Tiempo Universal se extendió a todo el mundo y la escala TU se difundía mediante señales horarias. Las diferencias de hasta 2 segundos detectadas entre estas señales evidenciaron notables discrepancias entre las distintas realizaciones locales de TU; este hecho motivó la creación de la Oficina

Internacional de la Hora (BIH) en 1912. Su tarea fue calcular un Tiempo Universal teórico –la hora definitiva- promediando observaciones astronómicas y transmitirlo mediante señales horarias (Audin y Guinot, 1988, p. 43).

Tiempos dinámicos

Una escala de tiempo uniforme podía conservarse y medirse en un reloj mecánico; tal es así que el Tiempo Solar Verdadero fue reemplazado por el Tiempo Solar Medio, concebido para que fuese proporcional a la rotación de la Tierra.

En la Grecia antigua la uniformidad de la rotación terrestre era un dogma, Copérnico adhería a este concepto aunque Kepler mencionaba la posibilidad de irregularidades en la misma. Flamsteed intentó medir dichas irregularidades con relojes de péndulo en el flamante Observatorio de Greenwich (1677) sin éxito. A mediados del siglo XVIII, la Academia de ciencias y bellas letras de Berlín debatió sobre la uniformidad de la rotación terrestre donde Kant propuso una causa: el posible frenado de la rotación terrestre era causado por la disipación de energía en las mareas oceánicas – lo que fue confirmado dos siglos más tarde por las observaciones-. La idea de la uniformidad de la rotación de la Tierra estaba muy arraigada entre los científicos, el reconocimiento de sus irregularidades comenzó en la segunda mitad del siglo XIX.

A mediados del siglo XIX Ferrel y Delaunay demostraron con principios de la dinámica que la diferencias entre las observaciones y las efemérides calculadas de la Luna se debían al aumento en la duración del día terrestre originado por las fuerza de marea entre la Tierra y la Luna.

El primer aporte de la no uniformidad de la rotación terrestre lo hizo el estudio de los movimientos de los planetas y de la Luna. Al orden de precisión de las observaciones de ese tiempo, el planteo de un modelo newtoniano de interacción gravitatoria entre el Sol y el planeta considerados puntuales era válido y desarrollado con gran precisión, aún despreciando la no esfericidad del planeta y los fenómenos disipativos de energía. Posteriormente, el modelo se ajustaba a las observaciones al comparar las posiciones del planeta calculadas en el instante de observación –en Tiempo Solar Medio- con dichas observaciones y surgían diferencias. Después de minimizar los posibles errores con un método de ajuste de las numerosas observaciones, las diferencias permanecían y no podían explicarse como errores aleatorios.

Este efecto fue observado por Newcomb al utilizar las efemérides de la Luna establecidas por Hansen en 1857 habiendo controlado previamente el modelo modelo empleado; a partir de

los resultados obtenidos Newcomb consideró que el Tiempo Solar Medio posiblemente tenía irregularidades.

La confirmación de este hecho llegó en 1927 con el trabajo de Brown y de de Sitter sobre los efectos en la velocidad del movimiento orbital de Mercurio y Venus y las variaciones en las longitudes del Sol y la Luna. En la década de 1930 la aparición de los relojes de cuarzo permitió medir por primera vez la componente anual de la irregularidad de la rotación terrestre -aproximadamente 60ms- realizada en dos laboratorios en 1929 de forma independiente.

Casi simultáneo al trabajo de de Brown y de de Sitter, en 1929 Danjon escribió un artículo en una revista de aficionados donde sugirió la utilización de la dinámica de los movimientos orbitales para medir el tiempo, lamentablemente esta idea no acaparó la atención de sus colegas. En 1950, durante la Conferencia sobre las Constantes Astronómicas Fundamentales llevada a cabo en París, Clemence propuso establecer una escala fundamental uniforme definida por las Tablas del Sol de Newcomb. Finalmente, dicha escala fue aceptada denominándose "*Tiempo de las efemérides*" propuesto por Brouwer y adoptada por la UAI en 1952. Esta descripción histórica se obtuvo de Audin y Guinot, 1988, p. 43-46

Tiempo de Efemérides

El tiempo dinámico, representa la variable independiente de las ecuaciones de movimiento de los cuerpos del Sistema Solar (ESAA, 1992, p. 41) y es el argumento temporal de sus efemérides.

El *Tiempo de Efemérides* TE es una escala de tiempo dinámico expresado en forma solar. La teoría elegida fue la de Newcomb por ser la más usada en ese momento; TE es una escala estrictamente uniforme en la física Newtoniana asumiendo que la teoría en la que se basa es perfecta.

Para su definición, se introducen otro cuerpo ficticio, el Sol Medio de Efemérides (SME), que se mueve alrededor del Ecuador Medio con velocidad constante igual al movimiento medio del Sol; y un meridiano estándar, el meridiano de efemérides, que coincidiría con la dirección del meridiano de Greenwich si la Tierra rotase de manera uniforme a la velocidad implícita en la definición de TE; este meridiano no está fijo a la superficie terrestre y tiene un pequeño desplazamiento hacia el este (Green, 1988, p. 238). Cabe recordar que la dirección del meridiano de Greenwich en el espacio depende de la rotación de la Tierra y que los tiempos dinámicos son independientes de la misma.

La unidad y el origen de TE quedan definidos por convención mediante la adopción de la expresión numérica de la longitud media geométrica del Sol L dada por las tablas del Sol de Newcomb (1895),

$$L = 279^\circ 41' 48'' ,04 + 129602768'' ,13 T_E + 1'' ,089 T_E^2 \quad (9.12)$$

T_E es el intervalo medido en centurias julianas de efemérides (conteniendo 36525 días de efemérides, 1 día de efemérides conteniendo 86400 segundos de efemérides s_E) desde 0 de enero de 1900 a $12^h T_E$, origen de la escala e instante para el cual $L = 279^\circ 41' 48'' ,04$ (Mueller, 1969, p.168)

Similar a TU, el tiempo de Efemérides TE se define como

$$TE = t_{EF}(SME) + 12^h \quad (9.13)$$

Siendo t_{EF} el ángulo horario medido desde el meridiano de efemérides.

Unidad del Tiempo de Efemérides

La unidad primaria de TE es el año trópico en la época estándar de TE $T_E = 0$. Durante un año trópico, la longitud media geométrica L del SME aumenta 360° . Entonces, si N el número de segundos de efemérides en un año trópico, la variación de L durante ese intervalo de tiempo resulta

$$\frac{dL}{dT_E} N = 360^\circ \quad (9.14)$$

La ecuación 9.12 contiene un término lineal y otro cuadrático en T_E medidos en centurias de efemérides desde 1900 enero 0^d.5 TE; la derivada de este último da un término lineal en T_E que introduciría variaciones en la ecuación 9.14. El Tiempo de Efemérides fue creado como una escala de tiempo uniforme; entonces una unidad de tiempo constante se consigue cuando este término lineal en 9.14 se anule. Esto ocurre en el instante 1900 enero 0d.5 TE para el cual $T_E = 0$. Luego, la duración del segundo de efemérides s_E se calcula fácilmente:

$$\frac{1}{36525 \times 86400 s_E} \times 129602768 \text{ } ^{\circ},13 \times N = 360 \times 3600 \text{ } ^{\circ}$$

$$N = 31556925,9747 s_E \quad (9.15)$$

La duración del segundo de efemérides s_E es la fracción $1/N$ del año trópico para 1900 enero 0d.5 TE. En 1956 fue adoptado por el Comité Internacional de Pesas y Medidas (CIPM) y formó parte del *Système International* (SI) hasta 1967 (Audin y Guinot, 1988, p. 548). El valor de s_E es muy cercano a la duración, en promedio, del segundo de tiempo solar medio durante los siglos XVIII y XIX (Audin y Guinot, 1988, p.53)

Determinación del Tiempo de Efemérides

La determinación primaria consiste en comparar las posiciones observadas del Sol con las efemérides donde el argumento es una medida del tiempo definida por la ecuación 9.12. El tiempo TE es, por definición, el valor del argumento para el cual la posición calculada – efemérides- coincide con la posición observada debidamente reducida aplicando las correcciones y transformaciones correspondientes vistas en capítulos anteriores (Mueller, 1969, p. 169). Por consiguiente, se sustituye el valor de L_{obs} en 9.12 y se resuelve la ecuación cuyo resultado es el TE correspondiente a la posición L_{obs} (Vives, 1971, p. 275). Esta determinación primaria de TE es muy difícil de realizar y poco precisa, suponiendo que la incerteza en la determinación de L_{obs} es del orden de $0''.5$, la incerteza en TE resulta del orden de 10s (Audin y Guinot, 1988, p.261).

Una mejora en la precisión de la determinación de TE se logra mediante las observaciones de la Luna durante las ocultaciones de las estrellas. La unicidad en la realización de la escala TE queda asegurada por el uso de una efemérides lunar particular recomendada por la UAI (Audin y Guinot, 1988, p. 261). Sin embargo, TE no estaba disponible de inmediato ni en un tiempo corto, ya que la reducción de las observaciones y el análisis de los datos requerían varios años (Mueller, 1969, p.169).

Un parámetro importante es la corrección ΔT que se define para cualquier instante como

$$\Delta T = TE - TU \quad (9.16)$$

En la práctica, se utiliza TU como escala intermedia para el cálculo de ΔT , gracias a la menor incerteza en su determinación. ΔT se obtiene como la diferencia entre el instante en TE correspondiente a la posición L_{obs} y el instante de posición observada registrado en TU (ESAA, 1992, p. 79). Asimismo, ΔT está presente en la longitud geográfica del meridiano de efemérides mediante la expresión (Mueller, 1969, p.171).

$$\lambda_{EF} = 1,002738 \Delta T$$

En referencia a los objetos celestes ficticios que definen las escalas TE y TSM, el SME es similar al SMF. La ascensión recta del SME, AR(SME), está dada por la expresión

$$AR(SME) = 18^h 38^m 45^s,836 + 8640184^s,542 T_E + 0^s,0929 T_E^2 \quad (9.17)$$

La ecuación 9.17 se diferencia de la ecuación 9.6 en que t se expresa en centurias julianas de longitud variable contado desde una época estándar en TU. Como Newcomb asumió que la duración de la centuria juliana era estrictamente uniforme, la expresión que obtuvo fue 9.17 y no 9.6 (Mueller, 1969, p.170).

Dificultades del Tiempo de Efemérides

El Tiempo de Efemérides está definido por las Tablas del Sol de Newcomb y está basado en un conjunto de constantes astronómicas, por lo tanto cualquier cambio en la teoría del Sol y/o en las constantes astronómicas adoptadas modificarían su definición, como sucedió en 1984. Otro aspecto a considerar es que TE está definido en el marco de la dinámica newtoniana, sin poder clasificarse como una escala de tiempo baricéntrica o geocéntrica (ESAA, 1992, p.3), cuya distinción se verá más adelante.

Asimismo, la unidad primaria el año trópico para 1900 enero 0,5 TE fue elegida independiente de las constantes astronómicas, aunque su determinación lo sea. El origen o época fundamental fue fijado por convención a un valor determinado de la longitud geométrica media del Sol, no obstante las observaciones como las efemérides dependan del valor de la constante de aberración (ESAA 1992, p. 82).

Además de las incertezas en la determinación del TE y su disponibilidad no inmediata mencionadas arriba, esta escala está afectada por errores sistemáticos causados por su sensibilidad a la determinación del sistema de referencia y a los valores de las constantes astronómicas adoptadas en su definición; cualquier revisión provocaba un salto en TE como el

de 0,6 s en 1968 por el cambio en el valor de la constante de aberración (Audin y Guinot, 1988, p. 262).

Por todas las dificultades mostradas, el TE nunca fue difundido ni utilizado en la vida civil, su uso fue exclusivo de la dinámica astronómica. Cabe destacar que hasta 1960 la escala de tiempo oficial, TU, y la definición del segundo, la 86400ava parte del día solar medio, estaban coherentemente basadas en la rotación terrestre. No ocurrió lo mismo con la adopción del segundo de efemérides ya que la escala de tiempo continuaba siendo TU (Audin y Guinot, 1988, p.49).

Escalas modernas de tiempo dinámico

Hacia fines de la década de 1970 la UAI recomienda introducir dos nuevas escalas de tiempo para reemplazar al TE y reconocer la importancia de los efectos relativistas en la teoría dinámica de los miembros del Sistema Solar. Como se detallará más adelante, el segundo de efemérides había sido reemplazado por el segundo atómico como unidad de tiempo del SI en 1967 y la escala de tiempo oficial se basaba en el Tiempo Atómico Internacional TAI desde el 1 de enero de 1972. Recordemos que TE es la escala de tiempo dinámico en la mecánica newtoniana, uniforme, por lo que no es diferente del tiempo atómico –también uniforme- en el contexto de esta mecánica (Green 1988, p. 246).

El 1 de enero de 1977 se introduce la nueva escala de tiempo para las efemérides geocéntricas, denominada Tiempo Dinámico Terrestre TDT; su unidad es el segundo SI. Con respecto a su origen, éste se fija para mantener la continuidad con TE. Como se verá mas adelante $ET = TAI + 32^s,184$, luego

$$1 \text{ de enero de } 1977 \text{ a } 0^h TAI = 1 \text{ de enero de } 1977 \text{ a } 0^h 0^m 32^s,184 TDT$$

TDT comienza a utilizarse en los almanaques astronómicos recién en 1984 (Green, 1988, p. 240 y 246).

En 1976 y 1979 la UAI define el Tiempo Dinámico Baricéntrico TDB como la escala de tiempo de las ecuaciones de movimiento referidas al baricentro del Sistema Solar, esta escala difiere de TDT (luego TT) en pequeños términos periódicos cuyos valores dependen de la teoría relativista adoptada. Tanto TDT como TBD pueden considerarse como una extensión de TE (ESAA, 1992, p. 3).

Para situarnos en el contexto de las nuevas escalas definidas en 1991, se explicará brevemente la terminología referente al tiempo de la Relatividad General. En esta teoría, cada

punto del recorrido de una partícula en el espacio-tiempo está caracterizado por los valores de cuatro coordenadas en el espacio-tiempo (de 4 dimensiones) en un sistema de referencia dado. El tiempo propio es el tiempo que conserva un reloj que se mueve con la partícula, cualquiera sea la trayectoria y el campo gravitatorio en que se encuentre; en la práctica siempre es medible si el reloj puede viajar con la partícula. El tiempo coordinado es una de las cuatro variables independientes que caracterizan el evento en el espacio-tiempo, específicamente, el tiempo coordinado de un sistema de referencia dado es la variable independiente de las ecuaciones de movimiento de los cuerpos en ese sistema de referencia y, además, no es medible (Kaplan, 2005, p. 2).

En 1991, la Resolución A4 de la IAU definen nuevas escalas basadas en el segundo SI: las escalas de tiempo coordinado Tiempo Coordinado Baricéntrico TCB y Tiempo Coordinado Geocéntrico TCG que se utilizan en los desarrollos teóricos con origen en el BCRS y en el GCRS (ver capítulo 10), respectivamente (Kaplan, 2005, p. 9). El origen de TCG mantiene la continuidad con TE, mientras que el origen de TCB se fija tal que TCB tenga la misma lectura que TCG el 1 de enero de 1977 0h TAI en el Geocentro (Audin y Guinot, 1988, p. 222-224).

El Tiempo Terrestre TT es una variante de TCG cuya unidad es el segundo (de tiempo propio) sobre el geoide en rotación (Audin y Guinot, 1988, p.223). Para las aplicaciones prácticas, TT se considera una forma ideal de TAI con su origen fijo en $32^{\text{s}},184$ a fin de mantener la continuidad de TT con TDT y TE. Asimismo, la expresión ΔT en (9.16) adopta la forma

$$\Delta T = TT - TU$$

Tiempos físicos

El progreso en el conocimiento del electromagnetismo, de la física cuántica y atómica y de la espectroscopía llevado a cabo a fines del siglo XIX y durante la primera mitad del siglo XX propició la invención y el desarrollo de estándares de frecuencia y de tiempo. Al final de la década de 1930 Rabi desarrolló un método de resonancia magnética sobre un chorro atómico o molecular. En 1950 Ramsey introdujo el método de los campos oscilante separados que mejora las condiciones de interacción entre la onda electromagnética y los átomos. Estos métodos fueron la base para que Essen y Parry desarrollasen en 1955 el primer estándar de frecuencia de cesio operativo confiable en el National Physical Laboratory del Reino Unido (Audin y Guinot, 1988, p. 49-50).

Los desarrollos y mejoras de los relojes atómicos fueron contemporáneos de la definición del TE y de su unidad; por lo que Markowitz, Hall, Essen y Perry establecieron en 1958 el valor del segundo atómico en función del segundo de efemérides; este último determinado mediante un programa mundial de observaciones con la cámara lunar de Markowitz (Arias 2005; McCarthy y Seidelmann, 2018, p.95). Ante los inconvenientes que presentaba el TE, detallados más arriba, en 1967 la 13ra. Conferencia General de Pesas y Medidas adoptó una nueva definición del segundo, denominado segundo SI, como “la duración de 9192631770 períodos de la radiación correspondiente a la transición entre dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de Cesio 133”. El valor numérico del segundo SI es igual al valor del segundo de efemérides determinado por Markowitz y Hall (Arias 2005; McCarthy y Seidelmann, 2018, p. 95) y su definición continúa vigente.

A fines de la década de 1950 se habían construido varios estándares de cesio de laboratorio y se comercializaban los estándares de cesio comerciales, permitiendo la realización de escalas de tiempo atómico independientes. Luego, surgieron como objetivos la comparación del rendimiento de los estándares y la producción de una escala atómica promedio más uniforme y confiable que los individuales (Arias, 2005).

Si bien la búsqueda de una escala de tiempo fácilmente accesible a toda la comunidad mundial comenzaba a dar sus frutos, la aprobación de la escala de tiempo atómico TAI no fue sencilla. Una objeción fue su origen artificial, mediante un dispositivo, opuesto a un fenómeno espontáneo (Arias 2005) como la rotación terrestre o la dinámica de los cuerpos del Sistema Solar, además se observaba un avance de TAI respecto a TU1 que alcanzaría aproximadamente 1 hora en 1000 años (Audin y Guinot, 1988, p. 59).

La escala de *Tiempo Atómico Internacional* TAI fue reconocida oficialmente en 1971 por la Conferencia General de Pesas y Medidas y por la Unión Internacional de Telecomunicaciones. La unidad de TAI es el segundo del Sistema Internacional de Unidades SI a nivel del mar (Earth Orientation Centre, <https://hpiers.obspm.fr/eop-pc/index.php>), su origen se fijó convencionalmente de modo que la misma fecha en TAI y en Tiempo Universal ocurrió el 1 enero 1958 0hs TU, no utilizándose TE debido a su mala determinación en aquel momento. Luego se adoptó el valor $TE = TAI + 32^s,184$, donde el valor $32^s,184$ representa la mejor estimación de la diferencia entre TE y TAI para el 1 enero 1977 (Audin y Guinot, 1988, p. 222).

TAI es la base de las escalas de tiempo utilizado en la dinámica y el modelo de movimiento de los cuerpos celestes naturales y artificiales, con aplicaciones en la exploración del universo, comprobaciones de teorías, geodesia, geofísica y estudios del medio ambiente donde cobran relevancia los efectos relativistas (Arias, 2005).

Sin embargo, el rechazo a la adopción de TAI como la hora mundial reemplazando a TU1 tuvo una razón práctica. En ese tiempo, los navegantes utilizaban la navegación astronómica

para el posicionamiento en el mar y se opusieron firmemente al cese de difusión de TU1 (Audin y Guinot, 1988, p. 59), dato vital para determinar la longitud geográfica.

Finalmente, desde el 1 de enero de 1972 la escala mundial de tiempo civil desde el 1 de enero de 1972 es el *Tiempo Universal Coordinado TUC*. Su unidad es el segundo SI y la escala está sujeta a ajustes de 1 segundo, llamados segundos intercalares, para mantenerse dentro de 0,9s de TU1. (Kaplan, 2005, p. 11). TUC es la referencia horaria mundial de la vida civil y base legal de las horas oficiales de los países, en reemplazo de TU.

Los segundos intercalares se agregan, de ser necesario, al final de junio o diciembre, su anuncio y procedimiento se detallan en el Boletín C del Earth Rotation Centre. Hasta el momento, el último ocurrió el 1 de enero de 2017 0hs TUC (Boletín C 52) donde la secuencia de los segundos indicadores fue:

31 de diciembre de 2016, $23^h 59^m 59^s$ TUC

31 de diciembre de 2016, $23^h 59^m 60^s$ TUC

1 de enero de 2017, $0^h 0^m 0^s$ TUC

Como puede observarse, hay dos instantes distintos (2do y 3er segundos indicadores) para los que su valor numérico es la misma fecha. Esta situación causa inconvenientes técnicos y legales en las transacciones comerciales en red y en las transferencias electrónicas de fondos. Por este motivo, la IAU estableció un Grupo de Trabajo de la IAU sobre la Re-definición del Tiempo Universal Coordinado con el fin de plantear el problema del segundo intercalar y recomendar una solución, trabajando con el IERS, el Unión Internacional de Ciencias de la Radio (URSI), el Sector de Radiocomunicaciones de la Internacional Unión de Telecomunicaciones (UIT-R), la Oficina Internacional de Pesos y Medidas (BIPM), y las agencias de navegación pertinentes (Resolución B2 XXIV IAU GA 2000).

Creación TAI y de TUC

TAI es una escala de tiempo integrada debido a que se construye por acumulación de segundos, lo que conlleva a acumular incertidumbres que le valieron críticas a su adopción en reemplazo de TE, aunque prevaleció su precisión. La construcción de una escala de tiempo integrada requiere de un fenómeno, la definición de la unidad, las realizaciones de la unidad o

patrones de frecuencia (relojes continuamente operativos) y un algoritmo de cálculo adaptado a los requerimientos de la escala. (Arias, 2005).

Además, una escala de tiempo se caracteriza por su fiabilidad, estabilidad de frecuencia, precisión de frecuencia y accesibilidad. La fiabilidad está estrechamente relacionada con la fiabilidad de los relojes cuyas medidas se utilizan para su construcción y con su cantidad, que debe ser grande. La estabilidad de frecuencia de una escala de tiempo es la capacidad de mantener fija una proporción entre la unidad de la escala y su definición teórica. La exactitud de frecuencia es la aptitud de su intervalo de escala unitario para reproducir su contraparte teórica. La accesibilidad a una escala de tiempo mundial es su capacidad para proporcionar una forma de fechar eventos para cualquier uso. TAI se construye de modo de cumplir con estas condiciones (Arias, 2005). Las distintas etapas en su establecimiento se detallan a continuación.

TAI y TUC se obtienen a partir de la combinación de datos de aproximadamente 450 relojes atómicos que funcionan en más de 80 organismos de tiempo, cada reloj mantiene una escala local de TUC denominada TUC(k) (BIPM AR 2020, p. 9).

Dichos datos provienen de las comparaciones entre las escalas locales TUC(k) de los relojes que integran la red internacional de conexiones de tiempo (*time links*) organizada por el BIPM. Los métodos de comparación de estos relojes se basan en observaciones de satélites GNSS y en la transferencia de tiempo y frecuencia de doble vía (TWSTFT) (BIPM AR 2020, p. 9-10). Esta última utiliza satélites geoestacionarios de telecomunicación para comparar simultáneamente relojes ubicados, cada uno, en los extremos de la línea de base entre dos estaciones receptoras-emisoras (Arias 2005).

Las técnicas de transferencia de tiempo GNSS (en su mayoría satélites GPS) son los métodos All-in-view (AV), GPS PPP (BIPM AR 2020, p10) y en algunos casos el de Vista Común (CV) (BIPM AR 2020, p.10). CV permite comparar dos relojes que reciben simultáneamente la información de tiempo del mismo satélite, y posibilita eliminar y/o minimizar varios errores. AV es una variación de CV, donde los receptores de todas las estaciones participantes observan todos los satélites que están a la vista. La técnica de transferencia de tiempo basada en el posicionamiento de punto preciso PPP utiliza como datos las mediciones de código y fase del receptor GPS provenientes de todos los satélites observados por los relojes de dos sitios separados, el procesamiento de dichos datos permite estimar la diferencias de tiempo y frecuencia entre los dos sitios (McCarthy y Seidelmann, 2018, p.288-289). La información sobre la distribución geográfica de los laboratorios que contribuyen a TAI y los equipos de transferencia de tiempo están disponibles en el servidor FTP del Departamento de Tiempo del BIPM, sección Informes anuales.

La elaboración de TAI privilegia la estabilidad a largo tiempo (un mes o más) y la exactitud en frecuencia. La misma se establece en dos pasos: un algoritmo de estabilidad produce la

escala atómica libre EAL donde la estabilidad es óptima durante la duración del intervalo de muestreo, luego el pilotaje de TAI asegura la exactitud en frecuencia de TAI (Audin y Guinot, 1988, p. 227).

El algoritmo de cálculo de TAI, Algos, fue desarrollado en el BIH en la década de 1970 donde se fijaron los principios de la construcción de TAI, su cálculo está a cargo del BIPM desde 1988. En el primer paso, se calcula una escala como el promedio ponderado de las lecturas de los relojes obtenidas en las comparaciones de reloj con los métodos arriba descritos. Esta escala se denomina escala de tiempo atómica libre (*Echelle Atomique Libre*, EAL) tiene una estabilidad de frecuencia óptima durante la duración del intervalo de muestreo pero su frecuencia no está restringida para ser precisa. Para asegurar la exactitud en frecuencia de la escala, el segundo paso consiste en corregir la frecuencia de la EAL en base a las frecuencias de los estándares primarios de frecuencia (Primary Frequency Standards, PFS), los que representan las mejores realizaciones del segundo SI (Arias 2005). Este procedimiento se conoce como pilotaje de TAI, y su resultado final es TAI. (Audin y Guinot, 1988, p. 227; Arias, 2005).

Recordemos que TUC se obtiene sumando el número entero de segundos intercalares aplicados desde el 1 enero 1972. Hasta el presente, $TUC - TAI = -37^s$ (Boletín C 52, Earth Orientation Centre).

Difusión de TAI y de TUC

TAI y TUC se difunden mensualmente a través de la Circular T de BIPM, publicada sin interrupción desde el 1 Marzo de 1988 y disponible en el servidor FTP del Departamento de Tiempo del BIPM. La Circular T contiene, cada 5 días a 0h TUC, las diferencias y sus incertidumbres en nanosegundos entre TUC y la realización local de la escala en cada uno de los laboratorios que contribuyen a la construcción de TUC, TUC(k). Las diferencias [TUC-TUC(k)] aseguran la trazabilidad de las aproximaciones locales TUC(k) a TUC, es decir, otorgan valor legal a cada TUC(k), principalmente porque muchas son la base de las horas oficiales de países.

Los satélites GPS difunden la escala de tiempo del sistema llamada Tiempo GPS, que resulta de la combinación de relojes ubicados en los sitios de monitoreo y a bordo de los satélites, y está gobernada por TUC(USNO) módulo 1 s, de la que no puede diferir en más de un microsegundo. Generalmente, los receptores GPS proporcionan TUC al usuario, pues se transmite el desfasaje horario entre TUC y el Tiempo GPS. De manera similar, los satélites

GLONASS difunde la escala Tiempo GLONASS (Arias, 2005; McCarthy y Seidelmann, 2018, p. 289).

Referencias

- XXIst General Assembly Buenos Aires, Argentina, 1991 Disponible en: https://www.iau.org/static/resolutions/IAU1991_French.pdf
- XXIVst General Assembly, Manchester, UK, 2000 Disponible en: https://www.iau.org/static/resolutions/IAU200_French.pdf
- Arias, E.F. (2005) The Metrology of Time. *Physiological Transactions of the Royal Society A* 363, 2289-2305
- Audin C. y Guinot, B. (1988). *Les fondements de la mesure du temps. Comment les fréquences atomiques règlent le monde*. Paris Editorial Masson.
- BIPM Annual Report (2020), disponible en <https://www.bipm.org/en/time-ftp>
- ESAA (Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac) (1992). *A revision to the Explanatory Supplement of the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac*. P.K. Seidelmann (ed.). University Science Books
- Green, R.M. (1988). *Spherical astronomy*. Cambridge University Press.
- Kaplan, G.H. (2005) *The IAU Resolutions on Astronomical Reference Systems, Time Scales and Earth Rotation models. Explanation and Implementation*. United States Naval Observatory Circular No.179, 1-118.
- McCarthy, D.D. Seidelmann, P.K. (2018) *Time: From Earth Rotation to Atomic Physics*. Cambridge. Cambridge University Press.
- Mueller, I.I. (1969). *Spherical and Practical Astronomy as Applied to Geodesy*. New York. Frederic Ungar Publishing CO.
- Vives, T.J. (1971). *Astronomía de posición. Espacio y tiempo*. Editorial Alhambra, S.A.

CAPÍTULO 10

Sistemas y marcos de referencia, modelos y convenciones vigentes

Laura I. Fernández

En este capítulo abordaremos breves reseñas históricas y numerosos detalles técnicos involucrados en la definición, el establecimiento convencional y la materialización de los Sistemas de Referencia Celeste cinemático y Terrestre. En particular nos enfocaremos en los Sistemas de Referencia Celeste Internacional (ICRS, International Celestial Reference System) y Terrestre Internacional (ITRS, International Terrestrial Reference System), resumiendo las circunstancias que motivaron su establecimiento y las sucesivas modernizaciones y actualizaciones. Enfatizamos en las convenciones establecidas tanto por la Unión Astronómica Internacional (IAU, International Astronomical Union) como por la Unión Internacional de Geodesia y Geofísica (IUGG, International Union of Geodesy and Geophysics) y en el rol del Servicio Internacional de Rotación de la Tierra y los sistemas de referencia (IERS, International Earth Rotation and reference systems Service). También presentaremos el Sistema de Referencia Celeste Intermediario (CIRS, Celestial Intermediate Reference System) y los Orígenes No Rotantes Celeste (CIO, Celestial Intermediate Origin) y Terrestre (TIO, Terrestrial Intermediate Origin) como herramientas útiles para la transformación entre los Sistemas de Referencia Terrestre y Celeste (o viceversa). Concluiremos con el desarrollo de las transformaciones matriciales entre los Sistemas de Referencia Terrestre y Celeste mostrando similitudes y diferencias a tener en cuenta según se trate del Sistema de Referencia Celeste dinámico, i.e. según los modelos de Precesión IAU1976 (Lieske y otros, 1977) y de Nutación IAU1980 (Seidelman, 1982), ó del Sistema de Referencia Celeste cinemático aplicando para ello las convenciones IERS 2010 (Kaplan, 2005; IERS TN36, 2010) junto con los modelos y estándares vigentes al momento de escribir este texto.

Sistema y Marco de Referencia Celeste Internacional (ICRS e ICRF)

Durante la XXI^{era} Asamblea General de la Unión Astronómica Internacional (IAU) celebrada en Buenos Aires en 1991, se establece la necesidad de implementar un Sistema de Referencia Celeste Baricéntrico Convencional basado en la posición observada de objetos extragalácticos (recomendación VI. p. 18, IAU1991, 1991). Además, se especifica que el nuevo sistema coordinado debe ser una continuación del catálogo FK5 (Fricke, et al., 1988) en la época J2000.0 (Kaplan, 2005) y se pone de manifiesto la existencia de varios marcos de referencia que cumplen con estos requisitos. Estos marcos, materializados por diferentes instituciones, eran combinados por el IERS con el fin de obtener un único marco de referencia celeste necesario para el cálculo de los Parámetros de la Orientación Terrestre (EOP, Earth Orientation Parameters). Por lo anterior la recomendación VI antes mencionada, que puede citarse como uno de los primeros hitos del establecimiento del nuevo Marco de Referencia Celeste, en su texto recomendó llevar a cabo la tarea estadística necesaria sobre los diferentes marcos existentes al momento para analizar sus exactitudes pero también sus posibles diferencias sistemáticas. Con este fin, designó al grupo de expertos que llevaría a cabo la tarea y pautó la definición de un nuevo Sistema de Referencia Celeste convencional para ser presentado en una futura Asamblea General de la IAU.

El Sistema de Referencia Celeste Internacional (ICRS) fue adoptado oficialmente por la Unión Astronómica Internacional desde el 1 de enero de 1998 según la Resolución B2 de la XXIII^{era} Asamblea General celebrada en Kyoto en 1997 (IAU1997, 1997; Kaplan, 2005). A través de la resolución B2 de 1997 también quedó establecida su materialización a través del Marco de Referencia Celeste Internacional (ICRF, International Celestial Reference Frame).

Además de poseer direcciones cartesianas alineadas con el FK5 y origen de coordenadas en el Baricentro del Sistema Solar, el plano fundamental del ICRF debía estar próximo al Ecuador Celeste medio J2000.0 (Arias et al., 1995; IERSTN21, 1996). Algunos trabajos publicados en ese momento (Souchay et al., 1995, Charlot et al., 1994) estiman que el apartamiento entre la materialización del Polo del ICRS y el Polo celeste Medio Convencional J2000.0 es inferior a los 20 milésimas de segundo de arco (msa¹) (ver Capítulo 8 para más detalles). Por lo anterior, era esperable que la materialización del Ecuador Celeste medio J2000.0, realizado por el IERS a partir de las observaciones VLBI, resultara diferente del plano fundamental convencional. Este hecho está contemplado en la resolución IAU B2 de 1997 que estipula que la dirección del Polo ICRF sea consistente con la del polo FK5 dentro de las incertezas de este último (IAU1997, 1997; Kaplan, 2005).

¹ 1 msa = 0,001 segundos de arco

Una situación similar se planteó con el origen de las ascensiones rectas (α) del ICRS. La IAU recomendó que éste se ubique próximo al equinoccio dinámico J2000.0 donde *próximo* puede entenderse nuevamente como dentro de las incertezas del sistema dinámico previo FK5. Los primeros cálculos realizados por el IERS a partir de la compilación de catálogos en radio ubicó al origen de α a unas 78 ± 10 msa del equinoccio dinámico J2000.0 cumpliendo así con los requisitos de la IAU (Arias et al., 1995; IERSTN21, 1996). Este corrimiento debe interpretarse como una rotación directa en torno al eje polar, y por lo tanto las sucesivas y posteriores realizaciones del ICRS tuvieron como objetivo minimizar este efecto (Kaplan, 2005).

El ICRF se basa en las coordenadas de radio fuentes extragalácticas observadas con las antenas de la Interferometría de línea de base muy larga (VLBI, Very Long Baseline Interferometry). La estabilidad rotacional del marco se basa en la suposición de que esas fuentes no tienen movimientos propios. Debe aclararse que aunque por convención los ejes del ICRF se ubican muy próximos a los ejes definidos por el Ecuador y Equinoccio medios J2000.0, el ICRS es un sistema *cinemáticamente no rotante* y en tal sentido sus ejes serán direcciones fijas en el espacio (Kaplan, 2005).

En la resolución B2 de la IAU1997 también se estableció que el catálogo Hipparcos (HCRF, Hipparcos Celestial Reference Frame) constituya la materialización primaria del ICRS en longitudes de onda del rango óptico (IAU1997, 1997).

Un grupo de expertos vinculados al IERS, quienes fueron designados por la IAU (*IAU Working group on Reference Frames*), fueron los encargados de la construcción del ICRF. Para tal fin procesaron observaciones VLBI desde 1995, pero además fueron los responsables del vínculo del ICRF con Marcos de Referencia en otras frecuencias, del análisis de nuevas y mejores estrategias de cálculo, del estudio de la estabilidad y la calidad astrométrica de las radiofuentes en el marco, y de su densificación.

La primera realización del ICRF incluyó 608 radiofuentes, de las cuales sólo 212 objetos admitieron ser calificadas como *fuentes de definición* por tener una estructura estable, más de 20 observaciones registradas, errores formales inferiores a 1 msa y haber sido observadas durante período mayor a los 2 años. Sólo el subconjunto de las fuentes de definición tienen un rol fundamental en la determinación del ICRF, siendo estas las responsables de la orientación de los ejes del ICRS.

La primera versión del ICRF mostró por primera vez un rasgo que aún permanece en las sucesivas actualizaciones del marco: una desigual distribución de radiofuentes en los hemisferios norte y sur. Esta peculiaridad está vinculada a la geometría de la red de estaciones VLBI ubicadas mayormente en el hemisferio norte.

El ICRF, esto es, las coordenadas de las fuentes, sus respectivos errores y un análisis técnico de los distintos aspectos de la primera materialización, pueden encontrarse en la nota técnica 23 del IERS (IERSTN23, 1997).

La primera extensión del ICRF (ICRF-Ext.1) tuvo lugar en abril de 1999 y su objetivo principal fue calcular nuevamente las posiciones de las radio fuentes involucradas en el primer cómputo del ICRF. Esta tarea tuvo un doble objetivo ya que, no sólo se refinó la posición calculada del conjunto de fuentes candidatas, sino que también se monitoreó el conjunto total de las radio fuentes para chequear que aún cumplieran con las características necesarias requeridas para formar parte del ICRF. Este nuevo cálculo involucró observaciones realizadas entre diciembre 1994 y abril 1999. Como resultado se comprobó que las posiciones y los errores del conjunto de fuentes de definición no cambió. Además, se agregaron 59 nuevas radio fuentes al número total (Fey y Gaume, 2006).

La segunda extensión del ICRF (ICRF-Ext.2) en 2003 tuvo en cuenta más de 1 millón de nuevas observaciones realizadas en el periodo desde mayo de 1999 hasta mayo de 2002. Estos datos se redujeron para efectuar un nuevo cálculo y brindar posiciones del conjunto original de radio fuentes estimadas en 1995, pero también de aquellas fuentes que formaron parte del ICRF-Ext1. Como resultado se incorporaron 50 nuevas fuentes y se corroboró que las posiciones y la magnitud de los errores para las fuentes de definición no se modificaron respecto del primer ICRF² (Fey y Gaume, 2006). La suma de ambas extensiones agregó 109 nuevas fuentes al marco (Charlot et al., 2020).

Aún cuando ICRF1 representó una mejora cercana a un orden de magnitud en los valores de ruido y en la estabilidad de los ejes con respecto al FK5, también tuvo limitaciones y deficiencias. La debilidad más evidente fue la distribución no uniforme y desigual de las radiofuentes de definición, las que se ubican mayoritariamente en el hemisferio norte. Además, varias de las fuentes de definición originales resultaron tener variaciones sistemáticas y significativas en su posición (IERSTN35, 2009).

La segunda realización del ICRF (ICRF2) fue oficialmente adoptado a partir del 1 de enero de 2010 según resolución B3 de la XXVII^{ma} Asamblea General de la IAU, celebrada en Brasil (IAU2009, 2009). Entre las razones que justificaron el nuevo cálculo del Marco de Referencia Celeste podemos mencionar la cantidad disponible de observaciones adicionales acumuladas durante 14 años, la inclusión de nuevas sesiones de observación en el hemisferio sur, la mejora de modelos geofísicos y el uso de computadoras más rápidas que permitieron mejoras significativas en el análisis de los datos. Las nuevas mediciones se realizaron con antenas y arreglos más sensibles, entre los que se incluyeron 10 estaciones que contienen arreglos de antenas con línea de base muy larga (VLBA, Very Long Baseline Array), mejorando la calidad de los datos. Esto permitió seleccionar un juego de fuentes más estables y mejor distribuidas en el cielo para lograr una definición más precisa de los ejes (IERSTN35, 2009).

El ICRF2 posee 3414 radio fuentes compactas, cuyas posiciones se obtuvieron usando casi 30 años de observaciones VLBI acumuladas. En una rápida comparación con respecto al

² En adelante llamaremos ICRF1 a la primera realización

ICRF1, el ICRF2 posee 5 veces más fuentes, resultó ser 5-6 veces más exacto con un ruido de sólo ≈ 40 micro segundos de arco (μs^3) y es 2 veces más estable que su predecesor con una estabilidad de $\approx 10 \mu\text{s}$ en la materialización de sus ejes. La solución final ICRF2 se alineó con el ICRF1-Ext2 a través de 138 fuentes estables y comunes (IERSTN35, 2009).

Con el objetivo de eliminar o reducir las debilidades del ICRF1, el ICRF2 posee 295 nuevas fuentes de definición, más estables en su posición, sin estructuras extensas en su emisión de radio y con una distribución en el cielo más uniforme. Este conjunto de fuentes de definición ICRF2 no dependen de una época, y por lo tanto no poseen una época explícitamente asociada (IERSTN35, 2009).

El conjunto de 295 fuentes de definición ICRF2 sólo incluye 97 fuentes de definición del ICRF1 ubicadas mayormente en el hemisferio norte y por lo tanto susceptible de introducir errores sistemáticos debido a su pobre distribución espacial. Para remediarlo, se añadieron 41 nuevas fuentes de definición (que no pertenecen al conjunto de fuentes de definición del ICRF1), con distribución preferentemente austral dando lugar así al conjunto de 138 objetos comunes de comparación y alineación del ICRF2 con el ICRF1-Ext2 (IERS TN35, 2009).

El Marco de Referencia Celeste actual es el ICRF3 y fue establecido por la IAU según resolución B2 presentada en la XXX^{ma} Asamblea General de la IAU de 2018 (IAU2018, 2018) y está vigente desde el 1 de enero de 2019. Este nuevo marco de referencia posee características únicas con respecto de todos sus predecesores.

Efectivamente, tanto el ICRF2 como los anteriores (ICRF1 y sus extensiones) se basaron en mediciones VLBI realizadas en las frecuencias de 2.3/8.4 GHz⁴. El ICRF3, no sólo contiene la información de 40 años de observaciones VLBI en sus frecuencias estándar, sino que por primera vez, también brinda posiciones en frecuencias mayores (bandas K y X/Ka). Para ello, las observaciones VLBI fueron complementadas con datos VLBA (banda K) durante el período 2002-2018 y datos de la red DSN (Deep Space Network) (banda X/Ka) durante el período 2005-2018 (Charlot et al., 2020, p. 4-5).

Aunque las posiciones determinadas en otras frecuencias diferentes a la banda S/X pasan a formar parte del marco por primera vez, el concepto no es enteramente nuevo. En 1997, y como parte de las resoluciones de la IAU involucradas en la adopción del ICRF original, (ver resolución B2 inciso d en IAU1997, 1997), se sugiere extender el ICRF a otras frecuencias. En respuesta a esta inquietud, se han venido realizando determinaciones astrométricas VLBI en 24, 32 y 43 Ghz. La reducción de estas observaciones proveyó marcos de referencia celestes independientes en otras frecuencias del espectro electromagnético permitiendo que el ICRF2, por ejemplo, fuera sometido a una validación externa comparándolo con esos otros marcos de referencia celestes (IERSTN35, 2009).

³ $1\mu\text{s} = 1\text{E}-06$ segundos de arco

⁴ Banda S/X

El ICRF3 comprende 4588 fuentes en total, pero sólo 600 de ellas tienen posiciones en las tres bandas de frecuencia. Si discriminamos el número de fuentes posicionadas en cada frecuencia, el mayor número corresponde a la frecuencia tradicional de 8,4 GHz. (banda X) con 4536 fuentes. Sin embargo, un subconjunto de sólo 303 fuentes en 8,4 GHz., uniformemente distribuidas en el cielo son *fuentes de definición*. Dicho de otro modo, las posiciones de estas 303 fuentes definen los ejes del ICRF3 en virtud de su ubicación, estabilidad en su posición y tipo de estructura. Entre estas 303 fuentes, aquellas ubicadas en el hemisferio sur, son las que muestran la mayores incertezas en la determinación de su posición (Charlot et al, 2020).

El conjunto total de posiciones discriminadas por frecuencia se completa con 824 fuentes en 24 GHz (banda K) y 678 fuentes en 32 GHz (banda X/Ka). Las posiciones de las fuentes se han determinado de forma independiente en cada una de las frecuencias para preservar el contenido astrofísico de la información. La comparación de las posiciones individuales entre las 3 bandas de frecuencia muestra diferencias significativas sólo para un 5% de las fuentes (Charlot et al., 2020).

La época de referencia es 2015.0 y por primera vez, el ICRF3 calcula el efecto de la aceleración del sistema solar con respecto al centro galáctico estimada directamente a partir de los datos, resultando un valor de 0,0058 msa/año (Titov et al., 2011; Malkin, 2014). Efectivamente, el movimiento del Baricentro del Sistema Solar con respecto a un Marco de Referencia extragaláctico con origen en el centro galáctico puede provocar cambios aparentes en las posiciones de las radiofuentes por aberración. En este movimiento, se calculó sólo la parte no lineal (aceleración) dado que la parte constante de la aberración es absorbida en las posiciones de las fuentes por convención (Sovers et al, 1998). El resultado de no haber incorporado este efecto, que es significativo en escala decenal, habría producido una deformación importante en la red dado que las series temporales VLBI en la banda S/X acumulan casi 40 años de datos (Charlot et al., 2020).

El ruido estimado en las coordenadas individuales de las fuentes ICRF3 es de 0,03 msa. El ICRF3 está alineado con su predecesor, el ICRF2, dentro de las incertezas de este último. Las medianas de las diferencias alcanzan 0,1 msa en ascensión recta y 0,2 msa en declinación. También se compararon las posiciones ICRF3 respecto de las fuentes en el rango óptico del Marco de Referencia Celeste de la misión Gaia (Gaia-CRF⁵). Para ello, se usaron 2983 fuentes en común en la banda S/X, entre las cuales se cuentan 250 fuentes de definición. La comparación de las diferencias en las posiciones individuales ICRF3 en las 3 frecuencias y GAIA-CRF2 en el óptico, son significativas en un 22% de los casos, aunque se sugiere que este efecto podría ser una manifestación de la estructura extendida de las fuentes involucradas (Charlot et al., 2020).

⁵ Gaia Celestial Reference Frame

Extensión al rango óptico: Hipparcos y GAIA - ICRF

Según la resolución B2 inciso c de la XXIII^{era} Asamblea General de la IAU en 1997, se estableció que el catálogo Hipparcos sería la realización primaria del ICRS en el rango óptico del espectro electromagnético. Esta decisión, efectiva desde el 1 de enero de 1998 junto con la primera adopción del ICRF, tiene en cuenta que el Marco coordinado del catálogo Hipparcos está alineado con aquel definido por las radiofuentes extragalácticas con una incerteza de $\pm 0,6$ msa en la época de referencia J1991.25, con una tasa de rotación de $\pm 0,25$ msa/año (IAU1997,1997).

Aún antes del lanzamiento de la misión Gaia, se esperaba que la precisión astrométrica de esta nueva misión pudiera igualar e incluso superar la del ICRF. Fey y Gaume (2006, p. 24) proponen que el éxito de diversas misiones espaciales ópticas astrométricas propuestas en esos años podrían motivar una futura re-definición del ICRF en longitudes de onda ópticas.

El catálogo Hipparcos continuó materializando el ICRS en el rango óptico hasta 2021. Sin embargo y con el paso del tiempo, la comunidad astronómica ha sustituido su uso con el catálogo estelar de Gaia, cuya última realización es Gaia-CRF3.

Gaia-CRF3 refiere a la tercera realización del Marco de Referencia Celeste de la misión Gaia disponible con el tercer lanzamiento temprano de datos (Gaia-EDR3⁶) desde diciembre de 2020. Gaia-CRF3 está alineado con el ICRF con una precisión de aproximadamente 0,01 msa en la época J2016.0 y tiene una tasa de rotación de 0,01 msa/año (Brown et al., 2021, p. 7).

Gaia-CRF3 está constituido exclusivamente por objetos extragalácticos cuasi-estelares proveyendo posiciones y movimientos propios de 1614173 de objetos, y alineado con el ICRF a través de un subconjunto de 2269 de ellos.

Efectivamente, el marco de referencia Gaia-CRF3 en el visible e ICRF3 en radio están alineados en virtud de un juego común de 2269 radiofuentes ICRF3 que emiten en la banda S/X y que a su vez, sus emisiones en el rango óptico han sido identificadas en el tercer lanzamiento temprano de datos Gaia (EDR3) (Lindgren et al., 2021, p. 5). Además, los principios observacionales de Gaia satisfacen los requerimientos del ICRF3 (Brown et al., 2021).

Teniendo en cuenta lo anterior, recientemente la IAU a través de la Resolución B3 de la XXI^a Asamblea General en 2021 estableció que GAIA-CRF3 sea la realización fundamental del ICRS en el rango óptico desde el 1 de enero de 2022 (IAU2021b, 2021).

⁶ Early Data Release 3

Sistema y Marco de Referencia Terrestre Internacional (ITRS e ITRF)

En general, definimos al Sistema de Referencia Terrestre (TRS, Terrestrial Reference System) como un Sistema de Referencia espacial que gira con la Tierra en su movimiento diurno. En este sistema, las coordenadas de las posiciones de los puntos sobre la superficie terrestre sólo sufrirán variaciones con el tiempo debido a los distintos efectos geofísicos tanto periódicos y modelados (mareas) como súbitos e inesperados (movimientos tectónicos/sísmicos), (IERSTN36, 2010).

Dado que cada una de las Técnicas de la Astrometría y Geodesia Espacial (TAGE, i.e. GPS⁷, VLBI, SLR, DORIS) a través de su respectivo centro de análisis asociado (i.e. IGS, IVS, ILRS, IDS) definen y realizan su propio Sistema de Referencia Terrestre (TRS) al procesar sus observables, fue necesario *uniformar convencionalmente* el Sistema de Referencia Terrestre. Este hecho motivó a la Unión Internacional de Geofísicos y Geodestas (IUGG) y a la Asociación Internacional de Geodesia (IAG) a adoptar convencionalmente un único TRS que denominó Sistema de Referencia Terrestre Internacional (ITRS) (Geodesist's Handbook, 1992 p. 125; Altamimi et al., 2002).

Por esta razón, siguiendo los modelos y las convenciones establecidos por la resolución 2 de la XX^{ma} Asamblea General de la IUGG 1991, en acuerdo con lo establecido en la XXI^a Asamblea General de la IAU en 1991 (Geodesist's Handbook, 1992 p. 128) y la resolución 2 de la XXIV^a Asamblea General IUGG en 2007 (IERSTN36, 2010, p. 171), el TRS se modela como *una terna directa ortogonal y con origen en el Geocentro*, entendiendo el Geocentro como el centro de masa de todo el sistema terrestre, incluidos los océanos y la atmósfera (GTRS, Geocentric Terrestrial Reference System). *Las orientaciones de sus ejes están relacionadas, idealmente, con el Ecuador de la Tierra y su eje de la figura*⁸, este último asociado al eje \hat{z} . Además, se define el *GTRS como co-rotante con la Tierra y su evolución temporal se ajusta a la condición NNR*⁹, con respecto a los movimientos tectónicos horizontales de toda la Tierra. Dicho de otra manera, la condición NNR establece que el momento angular total de todas las placas tectónicas debe ser cero (Dehant y Mathews, 2015, p. 26).

La unidad de longitud es el metro del sistema internacional (SI) y en el marco de la relatividad general (IERSTN36, 2010, p. 34) la coordenada temporal en el GTRS es el Tiempo Coordinado Geocéntrico (TCG¹⁰).

⁷ Si bien en los primeros ITRF, GPS era el único sistema satelital de posicionamiento global, hoy día corresponde referirnos a GNSS

⁸ Eje del máximo momento de inercia de la Tierra

⁹ No-Net-Rotation, también conocida como *condición de Tisserand*

¹⁰ Geocentric Coordinate Time

Las coordenadas cartesianas de cualquier punto definidas en un dado sistema TRS1 admiten ser transformadas a otro sistema TRS2, si aplicamos una Transformación tridimensional de Similaridad¹¹. Para ello necesitamos de siete parámetros a saber: tres componentes de traslación, un factor de escala y tres ángulos de rotación. Dado que los parámetros involucrados son funciones del tiempo, sus variaciones temporales vincularán las velocidades del punto en ambos sistemas (ver ecuaciones 4.3 y 4.4 en IERSTN36, 2010, p. 31). Por esta razón, las sucesivas realizaciones de ITRS también proveen los juegos de parámetros necesarios para vincular sus resultados con las realizaciones precedentes (ejemplo para ITRF2014 e ITRF2008 en https://itrf.ign.fr/ITRF_solutions/2014/tp_14-08.php).

Como hemos visto en el capítulo 1, el Marco de Referencia Terrestre (TRF, Terrestrial Reference Frame) se definirá como la realización o materialización del TRS. Para ello es necesario materializar su origen, orientación de los ejes, escala, y evolución temporal. El proceso se logra a través de la realización de un conjunto de puntos físicos con coordenadas en el TRS, con una precisión específica determinada por la técnica de medición y los errores propios de los métodos matemáticos de reducción y cálculo.

El Marco de Referencia mas importante será el ITRF, entendido como la materialización del GTRS mediante un conjunto de coordenadas (y velocidades) instantáneas de puntos de referencia distribuidos en toda la superficie topográfica de la Tierra (Dehant y Mathews, 2015, p. 26). Estos productos serán el resultado de estrategias de combinación con el objetivo de minimizar los sistematismos y bias asociados con cada técnica particular de observación.

Aunque las posiciones y velocidades de los puntos del ITRF se brindan en coordenadas cartesianas, en la práctica suelen usarse coordenadas geodésicas o geográficas. Por lo anterior, es común expresar la orientación del eje x sobre el plano ecuatorial y en el meridiano convencional de Greenwich o meridiano internacional¹². Siendo este último el origen de las longitudes, que se miden positivas hacia el Este. Convencionalmente, la orientación inicial del ITRF corresponde a la del Sistema Terrestre del BIH¹³ (Bureau International de l'Heure) en la época de 1984.0. A su vez y para establecer una continuidad con los sistemas de referencia terrestres anteriores, esta primera alineación fue próxima al Ecuador medio de 1900 (IERSTN36, 2010, p. 34, Dehant y Mathews, 2015, p. 26).

El procedimiento usado por el IERS para determinar el ITRF consiste principalmente en dos pasos. En el primero de ellos cada uno de los Centros de Análisis asociados a una técnica de medición calculan su TRF individual y contribuyen no sólo con su solución, sino también con la información de las correcciones convencionales aplicadas por el centro. En el segundo paso,

¹¹ Transformación de siete parámetros

¹² También conocido como primer meridiano

¹³ Antecesor del actual IERS

es necesario combinar de modo estadísticamente óptimo cada combinación TRF individual y fijar el datum¹⁴ (IERSTN36, 2010).

El organismo encargado de las sucesivas materializaciones de ITRS es el IERS a través del Centro de Productos ITRS (ITRS-PC¹⁵). Hasta la fecha se produjeron 13 versiones del ITRF, siendo la primera el ITRF1988 y la última ITRF2014¹⁶ (IERSTN36, 2010; Altamimi et al., 2016). Desde la primera realización y hasta el ITRF2000, las soluciones provinieron de ajustes geodésicos globales de las series temporales de coordenadas y las velocidades de las estaciones terrestres estimadas individualmente desde los observables realizados con distintas técnicas entre las TAGE, en particular VLBI, SLR, GPS y DORIS. La combinación llevada a cabo en los primeros ITRF resultaba de la doble combinación simultánea de las posiciones y velocidades de las estaciones utilizando matrices de varianza/covarianza completas y una transformación de Helmert o de siete parámetros (Boucher et al., 1998, p. 4).

A partir del ITRF2000 cambia la estrategia de cálculo, minimizando las restricciones a las soluciones geodésicas y asegurando así una definición del dato a nivel de 1 mm. El origen del ITRF2000 está definido por el Geocentro determinado por la técnica de SLR y la escala determinada por SLR y VLBI. Su orientación está alineada con su precursor (ITRF97) y la evolución temporal de su orientación sigue por convención el modelo NNR-NUVEL-1A manteniendo la condición NNR (Altamimi et al., 2002). A partir del ITRF2005, la construcción del Marco de Referencia no sólo incorpora las series temporales de las coordenadas de las estaciones sino también los parámetros de la orientación terrestre (IERSTN36, 2010).

El ITRF14 incorpora características únicas con respecto a sus predecesores. Por primera vez, el marco se genera a partir de un modelado de los movimientos no lineales de las observaciones. Esto incluye señales estacionales (anuales y semestrales) y deformaciones post-sísmicas en los lugares que sufrieron grandes terremotos. Los modelos de deformación post-sísmica se estimaron utilizando datos GNSS/GPS y se brindan como un producto asociado al marco a través del IERS (Altamimi et al., 2016). Para el cálculo del ITRF14 se usó el historial completo de observaciones disponibles desde las cuatro técnicas de las TAGE (VLBI, GNSS, SLR, DORIS). Más específicamente, se utilizaron series temporales de las posiciones de las estaciones re-procesadas semanalmente para SLR y DORIS, diariamente para GNSS y sesiones de 24 horas de VLBI, además de los EOP que se incorporan al cómputo desde el ITRF2005 (Altamimi et al., 2016, IERSTN38, 2017).

El ITRF14 está caracterizado por su origen, su escala y su orientación. El origen ITRF14 es el Geocentro del sistema terrestre tal y como lo detectan las observaciones SLR durante el periodo comprendido entre 1993.0 y 2015.0. Concuerda con el origen del ITRF2008 dentro de los 3 mm y se define de forma tal que los parámetros de traslación sean nulos en la época

¹⁴ Conjunto de puntos de referencia y modelos adoptados (ejemplo: elipsoide de referencia)

¹⁵ International Terrestrial Reference System – Product Center

¹⁶ Al momento de esta redacción se anuncia el lanzamiento de **ITRF2020** (<https://itrf.ign.fr/en/solutions/itrf2020>)

2010.0. La escala ITRF14 está definida por las soluciones SLR y VLBI y es nula en la época 2010.0. Finalmente, la orientación de los ejes ITRF2014 se define de tal manera que los parámetros de rotación serán nulos en la época 2010.0 y las tasas de rotación también serán cero entre el ITRF14 y su predecesor ITRF2008. Estas dos condiciones se aplicaron sobre un conjunto de 127 estaciones de referencia (Altamimi et al., 2016, IERSTN38, 2017).

Actualmente, el ITRF proporciona no sólo coordenadas y velocidades de los puntos que realizan el sistema, sino también y a través del IERS, provee las correcciones y modelos convencionales para estimar las posiciones en el sistema terrestre con gran precisión. Conocida la posición y velocidad de una dada estación en la época de referencia, el modelo antes mencionado será una función lineal a trozos que tiene en cuenta: movimiento de las placas tectónicas, el rebote post-glacial y los desplazamientos sísmicos (IERSTN36, 2010, p. 35; Dehant y Mathews, 2015, Altamimi et al., 2016, p. 6128-6129).

Sistema de referencia celeste intermediario y orígenes no rotantes

Capitaine y colaboradores (1986) aplican el concepto de origen no rotante introducido por B. Guinot en 1979. Para ello, asume conocidos tanto el Sistema de Referencia Celeste (CRS, Celestial Reference System) como el Sistema de Referencia Terrestre (TRS). Donde el TRS se define con la condición de no poseer “ninguna rotación o traslación neta entre la superficie de la Tierra y este sistema de referencia” (Capitaine et al, 1986 p. 285).

Antes de continuar es importante resaltar que la resolución B1.3 adoptada en la XXIV^a Asamblea General de la IAU (IAU2000¹⁷, 2000) define dos CRS: uno con origen en el Baricentro del Sistema Solar (BCRS, Barycentric Celestial Reference System) y otro con origen en el centro de masas de la Tierra o Geocentro (GCRS, Geocentric Celestial Reference System). Ambos están definidos en el marco de la relatividad general, y aunque la relación matemática entre ellos excede los tópicos abarcados en el presente texto, presentaremos algunas de sus diferencias.

Según Kaplan (2005 p. 3) el BCRS es el sistema natural para expresar no sólo las efemérides de los objetos del sistema solar, sino también las posiciones y los movimientos de los objetos en nuestra galaxia y extragalácticos. Mientras que el GCRS “es un sistema de referencia local” utilizado para mediciones realizadas desde la Tierra.

Una lectura de las resoluciones IAU2000 no ofrece una definición clara y distintiva de su orientación relativa pero si establece que ambos son “cinemáticamente no rotantes”, esto es,

¹⁷ En adelante nos referiremos a este conjunto de resoluciones como “resoluciones IAU2000”

que sus ejes no presentan rotaciones sistemáticas con respecto a las radio fuentes que materializan el ICRF. Por lo tanto adoptaremos la interpretación de Kaplan (2005, p. 3) quien asume que el BCRS esta orientado según los ejes de ICRS. Por otro lado, dado que la orientación espacial del GCRS se deriva desde el BCRS y los ejes del GCRS deben ser cinemáticamente no rotantes con respecto al BCRS, y por lo tanto al ICRS, resultará que el GCRS tendrá la misma orientación pero origen en el Geocentro.

En resumen, y con la excepción de los diferentes orígenes, el CRS tendrá 3 direcciones mutuamente perpendiculares (ver figura 10.1): el eje X que indica el origen de las ascensiones rectas (Σ_0), el eje Z esta orientado en la dirección del Polo celeste e Y completando la terna directa (Capitaine et al., 2000).

Recordamos algunos detalles del TRS que ya ha sido presentado en secciones previas: tiene origen geocéntrico y la evolución temporal de la orientación de sus ejes debe ser tal que no presente rotaciones globales residuales con respecto a la corteza terrestre (Boucher, 1990 citado en Capitaine et al., 2000). Sus ejes están orientados (ver Figura 10.3): eje w hacia los polos geográficos, eje u hacia el origen de las longitudes¹⁸ (Π_0), y el eje v estará orientado hacia $\lambda=90^\circ$ Este sobre el plano del Ecuador, completando una terna directa (Capitaine et al, 2000, p. 399).

Orígenes no rotantes y localizadores

Sabemos que debido a la rotación terrestre la orientación del TRS con respecto al CRS será una función del tiempo. La intersección del eje de la rotación terrestre con la esfera celeste determina un eje instantáneo de rotación o Polo celeste Intermediario (CIP, Celestial Intermediate Pole) cuya posición variará con el tiempo. Podemos asignar a este eje un plano fundamental que denominaremos Ecuador del *Sistema de Referencia Celeste Intermediario* (CIRS) y contendrá al origen no rotante del sistema celeste (CIO), comúnmente denominado con σ . La definición cinemática de σ establece que a medida que el CIP se desplace en el GCRS, el movimiento de σ sobre el Ecuador móvil del CIRS *no tendrá componente de rotación instantánea con respecto al eje z del GCRS*.

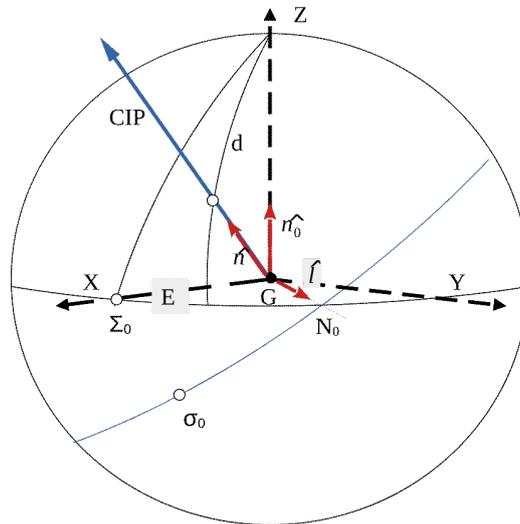
De acuerdo con la resolución B1.7 de las resoluciones IAU2000, la posición variable en el tiempo del CIP se define en el GCRS y se expresa en términos de sus cosenos directores ($X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$), como funciones de sus coordenadas polares E y d

$$X(t) = \sin(d) \cos(E) \quad Y(t) = \sin(d) \sin(E) \quad Z(t) = \cos(d) \quad (10.1)$$

¹⁸ Meridiano convencional de Greenwich

Figura 10.1.

Coordenadas polares del CIP en el GCRS para un dado instante t_0 .



Nota. El origen no rotante del sistema celeste (CIO, σ_0), se ubica en el Ecuador del Sistema Celeste Intermediario (CIRS) dibujado en azul. Adaptado de “A non-rotating origin on the instantaneous Equator: definition, properties and use” (p. 287), de Capitaine N., Guinot B. y Souchay J., 1986, *Celestial Mechanics*, 39.

Según lo dicho en el párrafo anterior, es claro que para un dado instante la posición de σ estará definida por el movimiento del CIP. En la Figura 10.2 consideremos CIP_0 y σ_0 , CIP_1 y σ_1 a la posición del Polo celeste Intermediario y su correspondiente CIO en la época fundamental t_0 y en el instante posterior t_1 , respectivamente.

Sean N_0 y N_1 los respectivos nodos ascendentes de los Ecuadores del CIRS en la época t_0 y en el instante t_1 en el Ecuador del GCRS. La posición de σ_1 en el instante t_1 sólo podrá determinarse si se conoce la posición del CIO en la referencia temporal precedente, en este caso $\sigma_0 = \sigma(t_0)$. Luego el desplazamiento del CIO desde t_0 a t_1 se obtiene resolviendo (Capitaine et al, 1986, 2000),

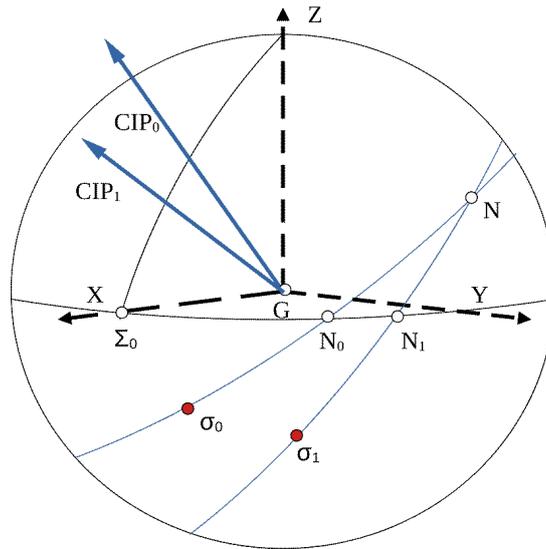
$$s = (\sigma_1 N_1 - \Sigma_0 N_1) - (\sigma_0 N_0 - \Sigma_0 N_0) \quad (10.2)$$

donde s se denomina *localizador del CIO*. Para deducir s haremos uso de la definición cinemática del CIO.

Según Capitaine y colaboradores (1986) denominamos \hat{n} , \hat{n}_0 , \hat{l} a los versores en la dirección del CIP, el eje z del GCRS y en la dirección \overrightarrow{ON}_0 al nodo ascendente N_0 , respectivamente (ver Figura 10.1).

Figura 10.2.

Posición del CIO en instante t_1 (σ_1) con respecto a su posición en la época de referencia t_0 (σ_0)



Luego la tasa de rotación ($\vec{\Omega}$) de un movimiento instantáneo del CIP en el GCRS puede escribirse como (Capitaine y colaboradores, 1986, p. 287-288)

$$\vec{\Omega} = \frac{dE}{dt} \hat{n}_0 + \frac{dd}{dt} \hat{l} - \left(\frac{dE}{dt} + \frac{ds}{dt} \right) \hat{n} \quad (10.3)$$

La componente de $\vec{\Omega}$ a lo largo del eje z del GCRS será $\vec{\Omega} \cdot \hat{n}$. Desarrollando

$$\vec{\Omega} \cdot \hat{n} = \frac{dE}{dt} \cos(d) - \frac{dE}{dt} - \frac{ds}{dt} \quad (10.4)$$

Si aplicamos la definición cinemática de origen no rotante, debe cumplirse que $\vec{\Omega} \cdot \hat{n} = 0$ y la expresión anterior quedará,

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} \cos(d) - \frac{dE}{dt} - \frac{ds}{dt} &= 0 \\ \frac{dE}{dt} (\cos(d) - 1) &= \frac{ds}{dt} \end{aligned} \quad (10.5)$$

Despejando quedará

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{ds}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} [\cos(d) - 1] \frac{dE}{dt} dt \quad (10.6)$$

$$s = \int_{t_0}^{t_1} [\cos(d) - 1] \frac{dE}{dt} dt - (\sigma_0 N_0 - \Sigma_0 N_0) \quad (10.7)$$

donde la incógnita (s) refiere a la localización del CIO en t_1 , $(\sigma_0 N_0 - \Sigma_0 N_0)$ refiere a la localización del CIO en la época t_0 . En la expresión (10.7) consideraremos $\sigma_0 N_0 = \Sigma_0 N_0$ por convención (Capitaine et al, 1986, 2000).

Recordando que $\hat{n} = (\sin d \cos E, \sin d \sin E, \cos d)$; $\hat{n}_0 = (0, 0, 1)$, aplicando regla de la cadena y operando algebraicamente sobre el producto mixto de vectores puede demostrarse que la ecuación (10.7) puede reescribirse como (Capitaine y colaboradores, 1986, p. 288)

$$s = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{(\hat{n} \times \hat{n}) \cdot n_0}{1 + \hat{n} \cdot \hat{n}_0} dt \quad (10.8)$$

donde el punto refiere a la derivada temporal. De modo equivalente, aplicando la ecuación (10.1) para expresar \hat{n} y operando sobre (10.8) quedará (Capitaine y colaboradores, 1986, p. 288)

$$s = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{X\dot{Y} - \dot{X}Y}{1+Z} dt \quad (10.9)$$

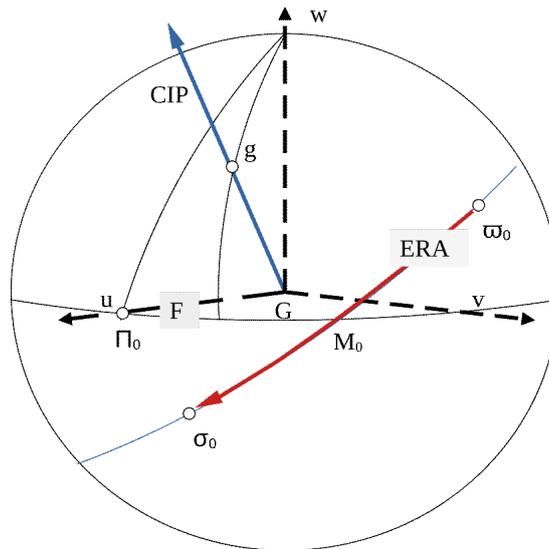
Por otro lado, la posición de CIP en el ITRS quedará determinada por $(u(t), v(t), w(t))$ y aunque su uso no está extendido, sus cosenos directores también admiten ser expresados en términos de sus coordenadas polares análogas F y g (ver Figura 10.3).

Además, debe notarse que si $(x_p(t), y_p(t))$ son las coordenadas del polo, entonces se cumple que (Capitaine et al, 2000)

$$x_p(t)=u(t) \quad y_p(t)=-v(t) \tag{10.10}$$

Figura 10.3.

Coordenadas polares del CIP en el TRS para un dado instante t_0 .



Nota. El origen no rotante del sistema terrestre (TIO, ϖ_0) se ubica en el Ecuador del Sistema Celeste Intermediario (CIRS), dibujado en azul. El ángulo ERA se dibuja en rojo.

Análogamente podemos definir el Origen No Rotante en el Sistema Terrestre (TIO), designado por ϖ , que será el origen de las longitudes instantáneas medidas sobre el Ecuador móvil del Sistema Intermediario (Capitaine et al, 1986). Luego el correspondiente *localizador del TIO* (s') se calculará geoméricamente para un instante t_i según (Capitaine et al, 1986, p. 289).

$$s' = \varpi_i M_i - \Pi_0 M_i \tag{10.11}$$

donde M_i es el nodo ascendente del Ecuador del CIP en t_i sobre el Ecuador del TRS. De modo análogo, si denominamos \hat{n} al versor en la dirección del CIP expresado en términos de sus respectivas coordenadas polares en el TRS y $\hat{n}_0 = (0, 0, 1)$ al versor en dirección al eje z del TRS, y aplicando regla de la cadena puede deducirse (Capitaine et al, 1986, p. 289)

$$s' = \int_{t_0}^{t_1} [\cos(g) - 1] \frac{dF}{dt} dt \quad (10.12)$$

donde se aplicó una convención similar a la anterior ($\varpi_0 M_0 = \Pi_0 M_0$). Considerando que $\hat{n} = (u, v, 1)$ con error inferior a 10^{-6} segundos de arco en varios siglos (Capitaine et al., 2000), podemos proceder de modo análogo a la deducción de las ecuaciones (10.8) y (10.9). Como resultado, la ecuación (10.12) puede escribirse

$$s' = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{u \dot{v} - \dot{u} v}{2} dt \quad (10.13)$$

Nótese que el movimiento exacto de ϖ dependerá del movimiento del polo y por lo tanto es impredecible (Kaplan, 2005 p. 54).

De acuerdo a la resolución B1.7 de las resoluciones IAU 2000 (IAU2000, 2000) el CIP es el Polo de un Sistema de Referencia Intermediario que por convención posee movimientos diferentes en el ITRS (parte terrestre) y en el GCRS (parte celeste). El movimiento celeste del CIP puede expresarse matemáticamente a través de los modelos de Precesión - Nutación e incluye a todos los términos de variación con periodos superiores a 2 días en el GCRS, es decir, frecuencias entre -0,5 y +0,5 ciclos por día sidéreo (cpds). Por otro lado, el movimiento terrestre del CIP está asociado al Movimiento del Polo e incluye todos los términos con frecuencias menores que -1,5 cpds o mayores que +0,5 cpds en el ITRS (IERSTN36, 2010, p. 46).

Se denomina *ángulo de la rotación terrestre* (ERA, Earth Rotation Angle¹⁹), comúnmente denominado como θ , al ángulo geocéntrico medido positivo en dirección retrógrada desde el TIO (ϖ) hacia el CIO (σ) (ver Figura 10.3) sobre el Ecuador del Sistema Intermediario (Capitaine et al., 2000). Ajustándonos a la definición de Orígenes No Rotantes, el TIO girará a medida que la Tierra rota mientras que el CIO no tendrá ninguna rotación instantánea. Por lo tanto ERA (θ) representa una medida directa de la rotación de la Tierra y su variación en el tiempo será $d\theta/dt = \omega$, siendo ω la velocidad angular media de rotación terrestre (Capitaine et al., 2000).

A través de la resolución B1.8 de las resoluciones IAU2000 (IAU2000, 2000), la IAU redefinió TU1 en función de ERA de modo tal que se asegura la continuidad en fase y tasa de variación con los valores de TU1 obtenidos convencionalmente a partir de su relación con Tiempo Sidéreo Medio en Greenwich (TSMG).

¹⁹ También conocido como *ángulo estelar*

$$\theta(\text{TU1})=2\pi[0,7790572732640+1,00273781191135448\times(\text{JD}-2451545,0)] \quad (10.14)$$

donde JD es instante de TU1 expresado en día Juliano y fracción (Capitaine et al., 2000; 2003a). En virtud de la expresión matemática (10.14) queda claro que las variaciones a la velocidad angular de rotación terrestre (ΔLOD^{20}) que afectan a TU1 afectarán de igual modo a θ (Kaplan, 2005).

La posición y el desplazamiento temporal del CIP en el Sistema de Referencia Celeste está determinado básicamente por la Precesión y la Nutación. En un capítulo anterior hemos presentado el origen dinámico de estos efectos, exponiendo además el desarrollo de los modelos de Precesión IAU 1976 (Lieske et al., 1977) y Nutación IAU 1980 (Seidelman, 1982), y su respectiva influencia en la variación de las coordenadas.

Williams (1994) mostró que la teoría de Precesión General IAU 1976 presenta un error aproximado de -300 msa por siglo juliano²¹ en longitud (Hilton et al., 2006, p. 353) y -25 msa/siglo en oblicuidad de la Eclíptica. Por otra parte, los valores de la oblicuidad en J2000.0 disponibles en 1976 se derivaron de observables de LLR (Lunar Laser Ranging) y observaciones planetarias con un error de 0",04. Finalmente, el uso de los valores IAU 1976 para las masas planetarias en la solución de Newcomb que explica el movimiento de la eclíptica también introdujo errores no despreciables (Capitaine et al., 2003a, p. 570).

En el año 2000 la IAU, a través de su resolución B1.6 (IAU2000, 2000), recomendó que tanto el modelo de Precesión general IAU 1977 como el de Nutación IAU 1980 sean reemplazados a partir del 1 de enero del año 2003 por un nuevo modelo denominado *modelo de Precesión - Nutación IAU2000* basado en parámetros estimados desde observaciones VLBI. Este modelo, basado en el trabajo de Mathews y colaboradores (2002), posee 2 versiones: IAU2000A que modela parámetros con nivel de ruido estimado en 0,2 msa e IAU2000B, una versión acortada con un nivel de ruido estimado en 1 msa, útil para los usuarios que no requieran de la máxima precisión (IERSTN36, 2010, Capitaine et al., 2003b).

La parte de Precesión del modelo IAU2000A sólo incorpora correcciones a las tasas de Precesión del modelo IAU1976, sin embargo la parte de Nutación incorpora 678 nuevos términos lunisulares y 687 términos planetarios a la teoría de Nutación IAU1980 (Capitaine et al, 2003b, p. 570).

Capitaine y colaboradores (2003b) muestran que el modelo IAU2000A de Precesión - Nutación no es consistente con la teoría dinámica y proponen nuevas expresiones para la Precesión consistentes con el modelo IAU2000A aceptado sólo algunos años antes. Por esta razón, la Resolución B1 de la XXVI Asamblea General de la IAU (IAU2006_B1, 2006), introduce

²⁰ Exceso en la duración del día verdadero con respecto a un día medio de 86400 segundos si la Tierra rotara a velocidad angular constante.

²¹ Formado por 36525 días julianos de TT (Tiempo Terrestre)

el modelo conocido como *teoría de precesión P03* que Capitaine y colaboradores proponen previamente (Capitaine et al., 2003b).

Para entender porque el modelo recientemente aceptado no es consistente con la teoría dinámica debemos considerar que VLBI es la técnica más precisa para observar los efectos de la Precesión y la Nutación. Dado las observaciones VLBI sólo son sensibles a la parte lineal de la Precesión e insensibles a posición de la Eclíptica, los coeficientes de orden superior de la teoría de Precesión y la orientación de la Eclíptica deben derivarse de la teoría dinámica. A esto debe sumarse que el modelo de Precesión y Nutación IAU2000A enfatiza en los términos periódicos (Nutación), corrigiendo sólo la parte lineal de la Precesión a partir de observaciones VLBI (Hilton et al., 2006). Al haber ignorado los términos de segundo orden de la Precesión, la solución no era coherente con la teoría dinámica y acumulaba errores.

En resumen, la teoría P03 deriva la Precesión sobre la Eclíptica usando cantidades de una teoría analítica previa (VSOP87, Bretagnon y Francou 1988) y parámetros de las efemérides planetaria y lunar DE406 producidas por el Jet Propulsion Laboratory²² (ver referencias en Capitaine et al., 2003b), con el objeto de mejorar términos polinómicos en la expresión del momento angular del Baricentro Tierra-Luna con respecto a una Eclíptica fija.

Además, calcularon nuevamente el valor de la oblicuidad media de la Eclíptica en J2000 a partir de un ajuste de la teoría de la Luna usando datos de LLR, y el desplazamiento del equinoccio en el GCRS usando EOP calculados desde observaciones VLBI (Capitaine et al., 2003b). Finalmente, para re-calcular la Precesión sobre el Ecuador, resolvieron las ecuaciones dinámicas de Precesión usando las estimaciones de las tasas de precesión calculadas por Mathews y colaboradores (2002) en acuerdo con el modelo IAU 2000A.

Uno de los puntos más relevantes de estas modificaciones involucra un cambio en la terminología asociada al fenómeno de Precesión que durante muchos años se utilizó, y está vinculada al modelo IAU1976 (Lieske et al., 1977). Dado que los resultados de los nuevos modelos de Precesión y Nutación basados en observaciones VLBI han mostrado que la influencia que la atracción gravitacional de los planetas ejerce sobre la Tierra contribuye de modo significativo al movimiento del Ecuador, se recomienda abandonar los términos *Precesión lunisolar* y *Precesión Planetaria* por erróneos (IAU2006_B1, 2006). En su lugar adopta *Precesión del Ecuador* y *Precesión de la Eclíptica* (Capitaine et al., 2003b; Hilton et al, 2006; IAU2006_B1, 2006).

Esta modificación entró en vigencia a partir del 1 de enero de 2009 (IAU2006_B1, 2006) y específicamente establece que desde esa fecha, la componente de Precesión de IAU 2000A sea reemplazada por la *Teoría de Precesión P03* de Capitaine y colaboradores (2003b). En particular, para la *Precesión del Ecuador* se adoptan las expresiones (Capitaine et al, 2003b, p. 581, ecuación 37)

²² Laboratorio dependiente de NASA, USA

$$\begin{aligned}\psi_A &= 5038, ''481507t - 1, ''0790069t^2 - 0, ''00114045t^3 + 1, ''328E-04t^4 - 9, ''517E-08t^5 \\ \omega_A &= \varepsilon_0 - 0, ''025754t + 0, ''0512623t^2 - 0, ''00772503t^3 - 4, ''67E-07t^4 + 3, ''337E-07t^5\end{aligned}\tag{10.15}$$

donde $\varepsilon_0 = 84381, ''406$, y t refiere a la fracción de siglo juliano en TDB²³, aunque establece qué, por razones prácticas y al exceder la exactitud requerida, se considere fracción de siglo juliano en TT desde J2000.0.

Por otro lado, y considerando que $P = \sin \pi \sin \Pi$ y $Q = \sin \pi \cos \Pi$, donde π y Π son los elementos osculadores del Baricentro de la órbita Tierra-Luna²⁴ (Capitaine et al., 2003b, p. 573), se adoptan las siguientes expresiones para la *Precesión de la Eclíptica* (Capitaine et al., 2003b, p. 581, ecuación 38)

$$\begin{aligned}P_A &= +4, ''199094t + 0, ''1939873t^2 - 2, ''2466E-04t^3 - 9, ''12E-08t^4 + 1, ''2E-08t^5 \\ Q_A &= -46, ''811015t + 0, ''0510283t^2 + 5, ''2413E-04t^3 - 6, ''46E-07t^4 - 1, ''72E-08t^5\end{aligned}\tag{10.16}$$

donde t como antes se cuenta en fracción de siglo juliano de TT desde J2000.0.

Estos parámetros, junto con los desarrollos polinomiales de parámetros adicionales y/o complementarios²⁵, se utilizarán en las transformaciones entre Sistemas Terrestre a Celeste (o viceversa) tanto en la transformación basada en el CIO como en la transformación basada en el equinoccio, como se verá a continuación.

Resumiendo, el modelo de Precesión - Nutación finalmente aceptado resulta de las resoluciones B1.6 (IAU2000, 2000) y la resolución B1 de la (IAU2006_B1, 2006) y se conoce como: *Modelo de Precesión - Nutación IAU2006/2000*. (IERSTN36, 2010).

Al momento de escribir este texto, y habiendo transcurrido mas de 10 años desde el establecimiento de este modelo, la presentación preliminar de la resolución B2 presentada en la XXXIª Asamblea General de la IAU durante 2021 enfatiza en la necesidad de una constante mejora en la precisión y consistencia de teoría de la rotación terrestre y resuelve fomentar esas mejoras atendiendo su coherencia con respecto a los marcos de referencia, resoluciones y estándares adoptados, no sólo por la IAU, sino también por la IUGG a través de la IAG (IAU2021a, 2021).

²³ Tiempo Dinámico Baricéntrico

²⁴ π es la inclinación con respecto eclíptica y Π longitud del nodo ascendente

²⁵ Por ejemplo, nuevos ángulos de Newcomb

Transformación entre sistemas de referencia terrestre y celeste

Presentamos a continuación las operaciones necesarias para transformar un vector posición entre los Sistemas de Referencia Terrestre y Celeste. Para ello desarrollaremos el método de cálculo paso a paso utilizando las nuevas convenciones IAU2000/2006 (IERSTN36, 2010) aplicables a un Marco de Referencia Celeste cinemático, pero también desarrollaremos la corrección *clásica*, i.e. las convenciones IERSTN21 (1996) adecuadas al Marco de Referencia Celeste dinámico basado en el Ecuador y Equinoccio. Se mostrarán las equivalencias y diferencias en términos de precisión entre ambas aproximaciones.

En primer lugar las dos transformaciones se basan en diferentes puntos origen de las ascensiones rectas (α). Para la transformación clásica el origen es el equinoccio vernal (γ) y se define geoméricamente como uno de los nodos entre el Ecuador instantáneo y la Eclíptica de la fecha. Su movimiento es complejo y comparativamente rápido a lo largo del Ecuador instantáneo a consecuencia del movimiento del Ecuador pero también de la Eclíptica (Capitaine et al., 2003b, p. 568). En cambio, en términos de las nuevas convenciones introducidas por la IAU desde el año 2000, el nuevo origen corresponde al CIO, Origen No Rotante del Sistema de Referencia Celeste cuya definición y características ya fueron desarrolladas en párrafos precedentes. Debe notarse que, según lo resuelto por el grupo de trabajo de Nomenclatura para la Astronomía fundamental y aprobado por la XXVI Asamblea General de la IAU en 2006 (NFA, 2006, p. 120), en un caso nos referiremos a " α con respecto al equinoccio" y en el otro a " α con respecto al CIO". En general es usual nombrar indistintamente a cualquiera de ellas como α , lo cual es correcto siempre y cuando consideremos sus diferentes orígenes.

Como regla general, la transformación que relaciona el ITRS con el GCRS para una dada fecha t será

$$\vec{r}_{GCRS}(t) = Q(t)R(t)W(t)\vec{r}_{ITRS}(t) \quad (10.17)$$

donde $Q(t)$ es la matriz de transformación que tiene en cuenta el movimiento del Polo celeste en el Sistema de Referencia Celeste, $R(t)$ y $W(t)$ son las matrices de transformación que consideran la rotación de la Tierra y del Movimiento del Polo, respectivamente (IERSTN36, 2010, p. 43). Nótese que esta transformación es genérica y válida para cualquier polo y cualquier origen. La distinción quedará establecida a través de la construcción de las respectivas matrices.

Transformación basada en el Equinoccio

La transformación basada en el equinoccio es similar a la transformación tradicional que se utilizó durante muchos años para transformar entre un Sistema de Referencia Terrestre y el Sistema de Referencia Celeste dinámico, sólo que debemos incorporar nuevas matrices y/o valores de los coeficientes matriciales con el fin de adaptarse a los modelos IAU2000/2006. Partiendo de la ecuación (10.17), la aplicación de $W(t)$ transformará la posición en el sistema terrestre a una posición referida al Ecuador y equinoccio verdadero de la fecha.

$$W(t) = R_y(x_p) R_x(y_p) \quad (10.18)$$

La operación anterior corrigió el efecto del Movimiento del Polo, o dicho de otro modo, logró una coincidencia entre el Ecuador terrestre y el Ecuador celeste instantáneo, haciendo coincidir los respectivos polos. Sin embargo, el eje x resultante aún apuntará al primer meridiano²⁶. Por lo tanto el próximo paso deberá alinear el eje x con el equinoccio verdadero de la fecha

$$R(t) = R_z(-TSAG) \quad (10.19)$$

donde $TSAG$ refiere al Tiempo Sidéreo Aparente en Greenwich. La expresión adecuada para satisfacer la precisión de a 0,1 microsegundos, se obtiene del modelo P03 (Capitaine et al, 2003b, p. 582, ec. 43).

A partir de aquí sabemos que la aplicación de la inversa de la matriz de Nutación transformará las coordenadas referidas a Ecuador y Equinoccio verdaderos de la fecha en coordenadas referidas al Ecuador y Equinoccio medios de la fecha. Como ya hemos visto, la elección del número de términos involucrados en el desarrollo en series temporales de los parámetros $\Delta\psi$ y $\Delta\varepsilon$ impactará en la precisión de los resultados y determinará el uso de IAU2000A o IAU2000B según se requiera.

Luego, la aplicación de la inversa de la matriz de Precesión transformará las coordenadas referidas al Ecuador y Equinoccio medios de la fecha en coordenadas referidas a Ecuador y Equinoccio medios de la época fundamental J2000.0. Aquí debe tenerse en cuenta que los coeficientes de estas matrices estarán expresados en términos de los ángulos de Newcomb calculados según el modelo de precesión P03 (Capitaine et al, 2003b, p. 582, ec. 40) como series de tiempo expresado en fracción de siglo juliano de TDB (o TT) dados por $T = (JD(TDB) - 2451545,0) / 36525$ donde JD refiere al día Juliano.

Para completar la transformación, sin embargo, será necesaria una última rotación adicional que transforme los datos referidos al Ecuador y Equinoccio medio dinámico inercial J2000.0 al GCRS. A tal fin usaremos la *matriz de frame Bias (B)* (Kaplan, 2005, p. 27). La matriz B estará

²⁶ Meridiano instantáneo en Greenwich

formada por 3 rotaciones. Dos de ellas involucran a los Celestial Pole Offsets del Polo Medio J2000.0 en el GCRS descriptos por el modelo de Precesión y Nutación (ξ_0, η_0) . El tercero refiere al corrimiento del Equinoccio ($d\alpha_0$), entendido como la ascensión recta GCRS del Equinoccio medio J2000 calculado a partir del modelo de Precesión y Nutación (Capitaine et al. 2000, p. 1148). Nótese que (ξ_0, η_0) no pueden calcularse desde la teoría, sino que se estiman a partir de un ajuste del modelo de Precesión y Nutación a las observaciones VLBI. En cambio, $d\alpha_0$ no puede derivarse de las observaciones VLBI dado que la técnica es insensible a la ubicación de la Eclíptica y por lo tanto deben usarse observables adicionales que materialicen este plano fundamental (Capitaine et al. 2000). Luego, la matriz B se construye como (Capitaine et al., 2003a)

$$B = R_x(-\eta_0) R_y(\xi_0) R_z(d\alpha_0) \quad (10.20)$$

donde los respectivos valores de los coeficientes en segundos de arco son: $\xi_0 = -0,0166170 \pm 1 \times E - 05$, $\eta_0 = -0,0068192 \pm 1 \times E - 05$ (IERSTN32, 2003, p. 43) y $d\alpha_0 = -0,01460 \pm 0,00050$ (IERSTN32, 2003, p. 41; IERSTN36, 2010, p. 56).

A primer orden, la matriz B puede expresarse (Kaplan, 2005, p. 28)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & d\alpha_0 & -\xi_0 \\ -d\alpha_0 & 1 & -\eta_0 \\ \xi_0 & \eta_0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.21)$$

De esta manera, la matriz $Q(t)$ necesaria para completar la transformación resultará del producto de las matrices antes mencionadas

$$Q(t) = B^{-1} P^{-1} N^{-1} \quad (10.22)$$

Los valores diarios de los elementos de la matriz combinada NPB aparecen listados en The Astronomical Almanac (Kaplan, 2005).

Transformación basada en Orígenes No Rotantes

Hemos visto que la IAU, a través de la resolución B1.8 entre las resoluciones IAU2000 (IAU2000, 2000), estableció el uso del TIO y del CIO con el fin de materializar el Sistema Celeste Intermediario (CIRS) y permitir la transformación entre el ITRS y el GCRS y viceversa

(Capitaine, 2004). A continuación explicaremos la construcción de cada de las matrices involucradas en (10.17) para la transformación basada en el CIO y consistente con las resoluciones IAU2000/2006 (IERSTN36, 2010).

La matriz $W(t)$ que relaciona al ITRS con el TIRS admite ser escrita como,

$$W(t) = R_z(-s') R_y(x_p) R_x(y_p) \quad (10.23)$$

donde x_p e y_p son las coordenadas del polo que describen la posición del CIP en el ITRS y s' es el localizador del TIO, que me brinda la posición del Origen No Rotante del TIRS²⁷.

En el próximo paso tendremos en cuenta la rotación terrestre, vinculando la posición del TIO con el CIO sobre el Ecuador del CIRS²⁸. Nótese que el Ecuador del TIRS y el Ecuador del CIRS coinciden y ese plano fundamental también admite ser llamado Ecuador del CIP

$$R(t) = R_z(-ERA) \quad (10.24)$$

donde, por definición, el uso del ángulo ERA asegura una representación rigurosa de la rotación terrestre.

Finalmente, una vez ubicado el CIO en el GCRS, la matriz que nos indica el movimiento del CIP en el GCRS completa la transformación,

$$Q(t) = R_z(-E) R_y(-d) R_z(E) R_z(s) \quad (10.25)$$

donde la posición del CIP en el GCRS queda expresada en función de sus coordenadas polares. Si en cambio utilizamos las coordenadas cartesianas del CIP en el GCRS (Ec. 10.1), la ecuación anterior se transforma en

$$Q(t) = \begin{pmatrix} 1 - aX^2 & -aXY & X \\ -aXY & 1 - aY^2 & Y \\ -X & -Y & 1 - a(X^2 + Y^2) \end{pmatrix} R_z(s) \quad (10.26)$$

donde $a = 1/2 + 1/8(X^2 + Y^2)$, con una exactitud de $1\mu\text{as}$ ²⁹ (IERSTN36, 2010).

Referencias

²⁷ Sistema de referencia terrestre cuyo plano fundamental es el *Ecuador del CIP*, eje x hacia el TIO y CIP como eje z

²⁸ Sistema de referencia celeste cuyo plano fundamental es el *Ecuador del CIP*, eje x hacia el CIO y CIP como eje z

²⁹ Microsegundos de arco = $1\text{E}-06$ segundos de arco

- Altamimi, Z., Sillard, P., & Boucher, C. (2002). ITRF2000: A new release of the International Terrestrial Reference Frame for earth science applications. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 107(B10), ETG-2.
- Altamimi, Z., Rebischung, P., Métivier, L., & Collilieux, X. (2016). ITRF2014: A new release of the International Terrestrial Reference Frame modeling nonlinear station motions. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 121(8), 6109-6131.
- Arias, E. F., Charlot, P., Feissel, M., & Lestrade, J. F. (1995). The extragalactic reference system of the International Earth Rotation Service, ICRS. *Astronomy and Astrophysics*, 303, 604-608.
- Boucher C., Altamimi Z., Sillard P. (1998) Results and Analysis of the ITRF96. *IERS Technical Note 24*. <https://www.iers.org/IERS/EN/Publications/TechnicalNotes/tn24.html?nn=94912>.
- Bretagnon, P., & Francou, G. (1988). Planetary theories in rectangular and spherical variables- VSOP 87 solutions. *Astronomy and astrophysics*, 202, 309-315.
- Brown, A. G., Vallenari, A., Prusti, T., De Bruijne, J. H. J., Babusiaux, C., Biermann, M., ... & Bauchet, N. (2021). Gaia Early Data Release 3-Summary of the contents and survey properties. *Astronomy & Astrophysics*, 649, A1.
- Capitaine, N., Guinot, B., Souchay, J. (1986). A non-rotating origin on the instantaneous equator: definition, properties and use. *Celestial mechanics*, 39(3), 283-307.
- Capitaine, N., Guinot, B., McCarthy, D. D. (2000). Definition of the celestial ephemeris origin and of UT1 in the international celestial reference frame. *Astronomy and Astrophysics*, 355, 398-405.
- Capitaine, N., Wallace, P. T., McCarthy, D. D. (2003a). Expressions to implement the IAU 2000 definition of UT1. *Astronomy & Astrophysics*, 406(3), 1135-1149.
- Capitaine, N., Wallace, P. T., Chapront, J. (2003b). Expressions for IAU 2000 precession quantities. *Astronomy & Astrophysics*, 412(2), 567-586.
- Capitaine, N. (2004). Microsecond models for the celestial motions of the CIP and CEO. *Proceedings of the Journées 2003" Systèmes de référence spatio-temporels": Astrometry*, 18-23.
- Dehant, V., Mathews, P. M. (2015). *Precession, nutation and wobble of the Earth*. Cambridge University Press.
- Charlot, P., Sovers, O., Williams, J., & Newhall, X. (1994). Precession and nutation from joint analysis of radio interferometric and lunar laser ranging observations, *Astrophys. J.* 109, 418.
- Charlot, P., Jacobs, C. S., Gordon, D., Lambert, S., de Witt, A., Böhm, J., ... & Gaume, R. (2020). The third realization of the International Celestial Reference Frame by very long

- baseline interferometry. *Astronomy & Astrophysics*, 644, A159. Disponible en: <https://www.aanda.org/articles/aa/pdf/2020/12/aa38368-20.pdf>
- Fey y Gaume, (2006) Future Realizations of the ICRF: Radio and Optical *en IERS Technical Note 34: The International Celestial Reference System and Frame*. ICRS Center Report for 2001–2004. J. Souchay y M. Feissel-Vernier (eds.), 21-27.
- Fricke, W., Schwan, H., Lederle, T., Bastian, U., Bien, R., Burkhardt, G., ... & Walter, H. G. (1988). Fifth fundamental catalogue (FK5). part 1. the basic fundamental stars. *Veroeffentlichungen des Astronomischen Rechen-Instituts Heidelberg*, 32, 1-106.
- Geodesist's Handbook (1992). *Bull. Geod.*, 66, office.iag-aig.org/doc/5d7f91f62a359.pdf
- Hilton, J. L., Capitaine, N., Chapront, J., Ferrandiz, J. M., Fienga, A., Fukushima, T., ... & Williams, J. (2006). Report of the international astronomical union division I working group on precession and the ecliptic. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 94(3), 351-367.
- IAU1997 (1997). Disponible en https://www.iau.org/static/resolutions/IAU1997_French.pdf
- IAU2000 (2000). Disponible en https://www.iau.org/static/resolutions/IAU2000_French.pdf
- IAU2006_B1 (2006). Disponible en https://www.iau.org/static/resolutions/IAU2006_Resol1.pdf
- IAU2009 (2009). Disponible en https://www.iau.org/static/resolutions/IAU2009_English.pdf
- IAU2018 (2018) Resolution B2 XXX General Assembly. Disponible en https://www.iau.org/static/resolutions/IAU2018_ResolB2_English.pdf
- IAU2021a (2021) Resolution B2 XXXI General Assembly *Improvement of the Earth's Rotation Theories and Models*. <https://www.iau.org/static/archives/announcements/pdf/ann21040b.pdf>
- IAU2021b (2021) Resolution B3 XXXI General Assembly *On the Gaia Celestial Reference Frame*. <https://www.iau.org/static/archives/announcements/pdf/ann21040c.pdf>
- IERSTN21 (1996) *IERS Technical Note 21: IERS Conventions 1992*. McCarthy D.D. (ed.). Disponible en: <https://www.iers.org/SharedDocs/Publikationen/EN/IERS/Publications/tn/TechnNote21/tn21.pdf>
- IERSTN23 (1997) *IERS Technical Note 23: Definition and Realization of the International Celestial Reference System by VLBI Astrometry of Extragalactic Objects*. Ma C. y Feissel M. (eds.). Disponible en: <https://www.iers.org/SharedDocs/Publikationen/EN/IERS/Publications/tn/TechnNote23/tn23.pdf>
- IERSTN32 (2003) *IERS Technical Note 32: IERS Conventions (2003)*. D. D. McCarthy y G. Petit (eds.). Disponible en: <https://www.iers.org/IERS/EN/Publications/TechnicalNotes/tn32.html>
- IERSTN35 (2009) *IERS Technical Note 35: The Second Realization of the International Celestial Reference Frame by Very Long Baseline Interferometry*, Presented on behalf of the IERS / IVS Working Group, Alan Fey, David Gordon, and Christopher S. Jacobs (eds.). Disponible en: <https://www.iers.org/IERS/EN/Publications/TechnicalNotes/tn35.html>

- IERSTN36 (2010) IERS Technical Note 36: IERS Conventions (2010). G. Petit and B. Luzum (eds.) Disponible en: <https://www.iers.org/SharedDocs/Publikationen/EN/IERS/Publications/tn/TechnNote36/tn36.html>
- IERSTN38 (2017) *IERS Technical Note 38: Analysis and results of ITRF2014*. Z. Altamimi, P. Rebischung, L. Métivier, X. Collilieux (eds.). Disponible en: <https://www.iers.org/IERS/EN/Publications/TechnicalNotes/tn38.html?nn=94912>
- Kaplan G. H. (2005) *The IAU Resolutions on Astronomical Reference Systems, Time Scales, and Earth Rotation Models Explanation and Implementation*. United States Naval Observatory circular N°. 179. Washington: USNO. Disponible en: <https://arxiv.org/pdf/astro-ph/0602086.pdf>
- Lieske, J. H., Lederle, T., Fricke, W., & Morando, B. (1977). Expressions for the precession quantities based upon the IAU/1976/system of astronomical constants. *Astronomy and Astrophysics*, 58, 1-16.
- Lindgren, L., Klioner, S. A., Hernández, J., Bombrun, A., Ramos-Lerate, M., Steidelmüller, H., ... & Vecchiato, A. (2021). Gaia Early Data Release 3-The astrometric solution. *Astronomy & Astrophysics*, 649, A2.
- Malkin, Z. (2014). On the implications of the Galactic aberration in proper motions for the Celestial Reference Frame. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 445(1), 845-849.
- Mathews, P. M., Herring, T. A., Buffett, B. A. (2002). Modeling of nutation and precession: New nutation series for nonrigid Earth and insights into the Earth's interior. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 107(B4), ETG-3.
- NFA (2006) *Division 1 working group on Nomenclature for Fundamental Astronomy*. Transactions IAU, Volume XXVIB. Proc. XXVIth IAU General Assembly. K.A. van der Hucht (ed.). Disponible en: https://synte.obspm.fr/iauWGnfa/NFA_WG_GA06.pdf
- Seidelmann, P. K. (1982). 1980 IAU theory of nutation: The final report of the IAU working group on nutation. *Celestial mechanics*, 27(1), 79-106.
- Sovers, O. J., Fenselow, J. L., & Jacobs, C. S. (1998). Astrometry and geodesy with radio interferometry: experiments, models, results. *Reviews of Modern Physics*, 70(4), 1393.
- Titov, O., Lambert, S. B., & Gontier, A. M. (2011). VLBI measurement of the secular aberration drift. *Astronomy & Astrophysics*, 529, A91.
- Souchay, J., Feissel, M., Bizouard, C., Capitaine, N., Bougeard, M. (1995). Precession and nutation for a non-rigid Earth: comparison between theory and VLBI observations. *Astronomy and Astrophysics*, 299, 277.
- Williams, J. G. (1994). Contributions to the Earth's obliquity rate, precession, and nutation. *The Astronomical Journal*, 108, 711-724.

Anexo A: Vectores

Sean 3 vectores genéricos: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$

– *Producto Mixto de vectores:*

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \quad (\text{A.1})$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \quad (\text{A.3})$$

✓ *Propiedad del producto mixto:*

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad (\text{A.4})$$

– *Producto vectorial triple:*

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (\text{A.5})$$

Dado que se cumple $(\vec{b} \times \vec{c}) = -(\vec{c} \times \vec{b})$, entonces

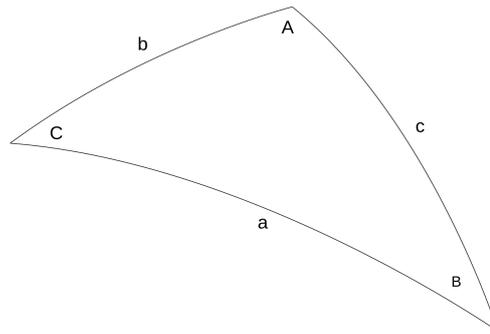
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (\text{A.6})$$

Luego

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -\vec{a}(\vec{c} \cdot \vec{b}) + \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) \quad (\text{A.7})$$

Anexo B: Fórmulas auxiliares de la trigonometría esférica

Sea un triángulo esférico genérico de lados a , b , c y ángulos \hat{A} , \hat{B} , \hat{C}



– *Fórmula del seno*

$$\frac{\text{sen}(\hat{A})}{\text{sen}(a)} = \frac{\text{sen}(\hat{B})}{\text{sen}(b)} = \frac{\text{sen}(\hat{C})}{\text{sen}(c)} \quad (\text{B.1})$$

– *Fórmula del coseno*

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \text{sen}(b)\text{sen}(c)\cos(\hat{A}) \quad (\text{B.2})$$

$$\cos(b) = \cos(a)\cos(c) + \text{sen}(a)\text{sen}(c)\cos(\hat{B}) \quad (\text{B.3})$$

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\text{sen}(b)\cos(\hat{C}) \quad (\text{B.4})$$

– *Fórmula de los cinco elementos*

$$\text{sen}(a)\cos(\hat{B}) = \cos(b)\text{sen}(c) - \text{sen}(b)\cos(c)\cos(\hat{A}) \quad (\text{B.5})$$

$$\text{sen}(a)\cos(\hat{C}) = \cos(c)\text{sen}(b) - \text{sen}(c)\cos(b)\cos(\hat{A}) \quad (\text{B.6})$$

$$\text{sen}(b)\cos(\hat{A}) = \cos(a)\text{sen}(c) - \text{sen}(a)\cos(c)\cos(\hat{B}) \quad (\text{B.7})$$

$$\text{sen}(b)\cos(\hat{C}) = \cos(c)\text{sen}(a) - \text{sen}(c)\cos(a)\cos(\hat{B}) \quad (\text{B.8})$$

$$\text{sen}(c)\cos(\hat{A}) = \cos(a)\text{sen}(b) - \text{sen}(a)\cos(b)\cos(\hat{C}) \quad (\text{B.9})$$

$$\text{sen}(c)\cos(\hat{B}) = \cos(b)\text{sen}(a) - \text{sen}(b)\cos(a)\cos(\hat{C}) \quad (\text{B.10})$$

– *Fórmula de las cuatro partes*

Aplicando la fórmula del coseno B.3 y reemplazando $\cos(c)$ por B.4 y $\sin(c)$ por B.1 queda

$$\begin{aligned}\cos(b) &= \cos^2(a)\cos(\hat{b}) + \cos(a)\sin(a)\sin(b)\cos(\hat{C}) \\ &+ \sin(a)\cos(\hat{B})\sin(b)\sin(\hat{C})\sin^{-1}(\hat{B})\end{aligned}\tag{B.11}$$

Si dividimos ambos miembros de B.11 por $[\sin(a)\sin(b)]$ y operamos algebraicamente obtenemos la *fórmula de las cuatro partes*.

$$\cotg(b)\sin(a) = \cos(a)\cos(\hat{C}) + \sin(\hat{C})\cotg(\hat{B})\tag{B.12}$$

Glosario

BCRS (Baricentric Celestial Reference System): Sistema de Referencia Celeste Baricéntrico

BIH (Bureau International de l'Heure): Oficina Internacional de la Hora

BIPM (Bureau International des Poids et Mesures): Oficina Internacional de Pesos y Medidas

CEP (Celestial Ephemeris Pole): Polo Celeste Efemérides

CIO (Celestial Intermediate Origin): Origen Celeste Intermediario

CIP (Celestial Intermediate Pole): Polo Celeste Intermediario

CIRF (Celestial Intermediate Reference Frame): Marco de Referencia Celeste Intermediario

CIRS (Celestial Intermediate Reference System): Sistema de Referencia Celeste Intermediario

CPO (Celestial Pole Offsets): Corrimientos del Polo Celeste

CRF (Celestial Reference Frame): Marco de Referencia Celeste

CRS (Celestial Reference System): Sistema de Referencia Celeste

DORIS (Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite): Orbitografía Doppler y Radioposicionamiento Integrado por Satélite

EOP (Earth Orientation Parameters): Parámetros de la Orientación Terrestre

ERA (Earth Rotation Angle): Ángulo de la Rotación Terrestre

ESAA (Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac): Suplemento Explicativo del Almanaque Astronómico

GCRS (Geocentric Celestial Reference System): Sistema de Referencia Celeste Geocéntrico

GNSS (Global Navigation Satellite System): Sistema Global de Navegación por Satélite

GPS (Global Positioning System): Sistema de Posicionamiento Global

GTRS (Geocentric Terrestrial Reference System): Sistema de Referencia Terrestre Geocéntrico

IAG (International Association of Geodesy): Asociación Internacional de Geodesia

IAU (International Astronomical Union): Unión Astronómica Internacional

ICRF (International Celestial Reference Frame): Marco de Referencia Celeste Internacional

ICRS (International Celestial Reference System): Sistema de Referencia Celeste Internacional

IDS (International DORIS Service): Servicio Internacional DORIS

IERS (International Earth Rotation and reference systems Service): Servicio Internacional de la Rotación de la Tierra y los sistemas de referencia

IGS (International GNSS Service): Servicio Internacional GNSS

ILRS (International Laser Ranging Service): Servicio Internacional de Teledetección Láser

ITRF (International Terrestrial Reference Frame): Marco de Referencia Terrestre Internacional

ITRS (International Terrestrial Reference System): Sistema de Referencia Terrestre Internacional

IUGG (International Union of Geodesy and Geophysics): Unión Internacional de Geodesia y Geofísica

IVS (International VLBI Service for Geodesy and Astrometry): Servicio Internacional VLBI para la Geodesia y la Astronomía

LLR (Lunar Laser Ranging): Teledetección Láser a la Luna

LOD (Length-Of-Day): Longitud del día

NNR (No-Net-Rotation): Sin Rotación Neta

SLR (Satellite Laser Ranging): Teledetección Láser a Satélite

TIO (Terrestrial Intermediate Origin): Origen Terrestre Intermediario

TIRS (Terrestrial Intermediate Reference System): Sistema de Referencia Terrestre Intermediario

TRF (Terrestrial Reference Frame): Marco de Referencia Terrestre

TRS (Terrestrial Reference System): Sistema de Referencia Terrestre

VLBI (Very Long Baseline Interferometry): Interferometría de línea de Base Muy Larga

Autores

Coordinadora

Fernández, Laura Isabel

Doctora en Astronomía (2001) y Licenciada en Astronomía (1995), de la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas (FCAG) de la Universidad Nacional de La Plata (UNLP). Profesor Asociado en la cátedra Astronomía Esférica de la FCAG, con 29 años de experiencia docente. Investigador Adjunto del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), miembro en proyectos científicos de CONICET y Fondo para la Investigación Científica y Tecnológica, (FONCyT). Dirigió una tesis doctoral (FCAG-UNLP), dirigió y codirigió becarios de grado y posgrado. Fue directora de proyectos científicos nacionales, docente en cursos de posgrado nacionales e internacionales, revisora en revistas científicas internacionales, tribunales de tesis/tesinas y miembro de distintos comités evaluadores. Secretaria Comisión A2 de la International Astronomical Union (IAU) y Member-at-large de la Comisión 3 de la International Association of Geodesy (IAG).

Autores

De Biasi, María Silvina

Doctora en Astronomía (1999) y Licenciada en Astronomía (1988), Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas (FCAG), Universidad Nacional de La Plata (UNLP), Profesora Universitaria en Astronomía, Facultad de Artes y Ciencias, Universidad Católica de Salta (2002). Profesor Adjunto en la cátedra Astronomía Esférica de la FCAG, con 35 años de experiencia docente y Profesional Principal del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Responsable FCAG de la transferencia de saberes astronómicos al sistema de Justicia. Miembro de la Coordinadora de la Educación en Astronomía en Argentina (NAEC). Coautora de varios trabajos en revistas nacionales e internacionales con referato, integrante de proyectos de investigación nacionales, evaluadora de becas de iniciación UNLP y miembro de tribunales de tesis/tesinas; cuenta con amplia trayectoria en la divulgación de la Astronomía.

de Elía, Gonzalo Carlos

Doctor (2009) y Licenciado (2004) en Astronomía, egresado de la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas (FCAG) de la Universidad Nacional de La Plata (UNLP). Con 20 años de experiencia docente en la FCAG, es Profesor Adjunto de Origen y Evolución de Sistemas Planetarios y Jefe de Trabajos Prácticos de Astronomía Esférica. Investigador Independiente del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Ha

dirigido 4 Tesis Doctorales en Astronomía y 1 en Geofísica, 6 Tesis de Licenciatura en Astronomía y 1 Tesis de Grado en Geofísica. Es autor de publicaciones en revistas internacionales y actas de congresos nacionales e internacionales. Fue Investigador Responsable de un proyecto de la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica y miembro de proyectos de investigación de CONICET y UNLP. Premio Investigador Joven 2013 a la Labor Científica, Tecnológica y Artística de la UNLP. Desde 2017, el asteroide 1978VT10 lleva la denominación de "(10674) de Elía".

Fernández, Laura Isabel

Astronomía esférica : fundamentos de astrometría / Laura Isabel Fernández ; María Silvana De Biasi ; Gonzalo Carlos de Elía ; prólogo de Elisa Felicitas Arias. - 1a ed. - La Plata : Universidad Nacional de La Plata ; EDULP, 2023.

Libro digital, PDF - (Libros de cátedra)

Archivo Digital: descarga

ISBN 978-950-34-2346-2

1. Astronomía. I. De Biasi, María Silvana. II. Elía, Gonzalo Carlos de. III. Arias, Elisa Felicitas, prolog. IV. Título.
CDD 522.7

Diseño de tapa: Dirección de Comunicación Visual de la UNLP

Universidad Nacional de La Plata – Editorial de la Universidad de La Plata 48 N.º 551-599 /
La Plata B1900AMX / Buenos Aires, Argentina

+54 221 644 7150

edulp.editorial@gmail.com

www.editorial.unlp.edu.ar

EduLP integra la Red de Editoriales Universitarias Nacionales (REUN)

Primera edición, 2024

ISBN 978-950-34-2346-2

© 2024 - EduLP

e
exactas


EDITORIAL DE LA UNLP



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE LA PLATA