

FÍSICA GENERAL

IMPRESA Y CASA EDITORA
ESTABLECIMIENTO GRÁFICO "TOMÁS PALUMBO"
LA MADRID 321-325 — BUENOS AIRES

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
PUBLICACIONES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
DIRECTOR: INGENIERO JULIO R. CASTIÑEIRAS

FÍSICA GENERAL

POR EL

Dr. RAMÓN G. LOYARTE

EX-PRESIDENTE DE LA UNIVERSIDAD
DIRECTOR DEL INSTITUTO DE FÍSICA Y PROFESOR TITULAR DE FÍSICA GENERAL
Y DE FÍSICA MATEMÁTICA

●
TOMO I

Mecánica del cuerpo rígido. — Gravitación
Estática de la elasticidad de los sólidos

TERCERA EDICIÓN



LA PLATA (REP. ARGENTINA)
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
1936

A MI MADRE

VOLUMENES Y EDICIONES APARECIDOS

- 1^{er} TOMO. — Tercera edición. El presente volumen.
- 2^o TOMO. — En prensa la segunda edición.
- 3^{er} TOMO. — En preparación la segunda edición.
- 4^o TOMO. — ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO; ELECTRO-QUÍMICA; ESTRUCTURA DE LA MATERIA; TRANSMUTACIÓN DE LOS ELEMENTOS. Primera edición, 1935.
- 5^o TOMO. — OPTICA GEOMÉTRICA; OPTICA FÍSICA; ESPECTROSCOPÍA; RELATIVIDAD; ESTRUCTURA DE LA MATERIA 2^a PARTE. En preparación.

PREFACIO DE LA PRIMERA EDICION

El carácter y contenido de esta obra de Física general, cuyo primer volumen damos a luz, corresponde a un nivel un poco más elevado que el de los cursos del mismo nombre que se dictan en las universidades del país y del extranjero.

La experiencia, fundamento de la ciencia, aparece en ella con el relieve que le corresponde. El desarrollo lógico de los principios así establecidos y el alcance y utilidad del razonamiento puro aparecen en el estudio matemático de cuestiones muchas de las cuales son de considerable importancia técnica.

La obra requiere el conocimiento de los rudimentos del cálculo diferencial e integral; aparecen, en varias partes, ecuaciones diferenciales lineales de primero y segundo orden, a coeficientes constantes, cuya integración es por demás fácil y conocida. Son tantos los fenómenos — muchos de suma importancia en las aplicaciones — que obedecen a ecuaciones de ese tipo, que es ineludible su conocimiento y manejo, desde los primeros años, al físico, al químico y al ingeniero. Tendrán así, de una manera *económica*, nociones exactas y dominio sobre muchísimas cuestiones de diversa índole.

La Facultad de ciencias físico-matemáticas puras y aplicadas de la Universidad de La Plata, nuestra *alma mater*, ha prestado una vez más el calor de su seno a una

obra que trasunta una aspiración de mejoramiento científico.

Fué el ensueño de su ilustre fundador, el doctor Joaquín V. González, crear una *nueva* Universidad, un ambiente de preocupaciones espirituales en el más alto sentido, a fin de que florecieran en él la enseñanza, la ciencia y los poderosos estímulos subjetivos que generan lo que se llama la cultura pública.

El Instituto de Física fué una de las creaciones de aquel ensueño que forjó preciosas realidades; sus ilustrados directores los doctores Emilio Bose y Ricardo Gans y el cuerpo de profesores le han ganado en el mundo científico un puesto de mérito.

Quede también aquí testimonio de mi gratitud a mi maestro, el inolvidable Emilio Bose.

La Plata, febrero 28 de 1921.

RAMÓN G. LOYARTE

PREFACIO DE LA SEGUNDA EDICIÓN

Esta edición difiere muy poco de la anterior. Nuestro espíritu ha permanecido fiel a su concepción primera y original de la obra, reafirmandose y ahondando siempre en ella.

No hemos hecho otra cosa que mejorar la acuñación — tarea grata y sencilla por ser propio el cuño — cambiar en uno de los capítulos el orden de los párrafos e intercalar algunos nuevos en otros, con el propósito de atenuar las rampas del camino.

Los alumnos de los cursos de Física general pueden prescindir del estudio de los párrafos señalados con un asterisco.

La Plata, abril 3 de 1927.

RAMÓN G. LOYARTE

PREFACIO DE LA TERCERA EDICIÓN

Podríamos reproducir, literalmente, el prefacio de la segunda edición. Nos hemos esforzado en mejorar el lenguaje, tratando de adecuarlo más y más a la realidad física que intentamos describir. Quizás una *realidad ficticia*, mientras *la realidad* que quisiéramos captar se nos escapa.

Muchas de las figuras han sido substituídas por otras mejores. Se han agregado algunas ilustraciones como los retratos de Newton y Galileo y el del «Campanile» de la catedral de Pisa.

Se han incorporado, también, dos o tres temas que hemos reputado de interés.

La edición anterior se agotó hace algunos años ya; circunstancias que no son del caso mencionar demoraron la aparición de la presente.

La Plata, marzo de 1936.

RAMÓN G. LOYARTE

INDICE

PRIMERA PARTE

ALGUNOS CONCEPTOS FUNDAMENTALES. LAS REGLAS DE LA ESTÁTICA

CAPÍTULO I

BREVE COMENTARIO SOBRE ALGUNOS CONCEPTOS FUNDAMENTALES. LAS UNIDADES DE ESPACIO Y TIEMPO. MEDICION DE LONGITUDES: INSTRUMENTOS

	Pág.
1. Propiedades de la materia. Fenómenos. Objeto de la ciencia natural	1
2. El principio de causalidad clásico. Leyes. Hipótesis. Teorías	2
3. El espacio y el tiempo	3
4. Objeto de la física	3
5. Medir.	4
6. Unidad de longitud: metro tipo	4
7. Vernier	6
8. Vernier circular	8
9. Catetómetro	9
10. Rectificación del catetómetro	10
11. Tornillos micrométricos. Palmer y esferómetro	11
12. La unidad de tiempo	13
13. Escalares y vectores	14
14. Representación de un vector	15
15. Suma y resta de vectores	15
16. Descomposición de un vector	16
17. Aplicación, El odógrafo	17
18. El gradiente	19

CAPÍTULO II

REGLAS DE LA ESTÁTICA. APLICACIONES

A. — Generalidades. Regla del paralelogramo

	Pág.
1. Fuerza. Gravedad	22
2. La acción de una fuerza compensada por la tensión de una cuerda o la resistencia de una base de apoyo	23
3. Medida de las fuerzas	24
4. La polea	25
5. Representación gráfica de una fuerza	26
6. Composición de fuerzas. La regla del paralelogramo	27
7. Equilibrio de fuerzas en un punto	28
8. Descomposición de una fuerza	29

B. — Superposición de fuerzas aplicadas en diferentes puntos de un cuerpo rígido y en el mismo plano

9. Fuerzas sobre la misma recta. Fuerzas concurrentes	30
10. Fuerzas paralelas del mismo sentido	31
11. La palanca	33
12. Momento de una fuerza. La ley de equilibrio de la palanca	36
13. Centro de un sistema de fuerzas paralelas	37
14. Fuerzas antiparalelas. Par de fuerzas	38
15. Propiedades y superposición de los pares de fuerza. Momento de un par	39
16. Representación de una cupla por un vector	44
17. Equilibrio de un sistema cualquiera de fuerzas. Principio general de la estática	44
18. Expresión analítica del momento de una fuerza o de un sistema de fuerzas con respecto a un punto	46

C. — El centro de gravedad

19. Centro de gravedad	48
20. Equilibrio de un cuerpo suspendido	48
21. Determinación del centro de gravedad	49
22. Determinación analítica	50
23. Equilibrio de un cuerpo apoyado	53

D. — Aplicaciones

24. Equilibrio de un sistema de barras	54
25. Barra rígida apoyada en dos puntos	56
26. Equilibrio en algunos mecanismos	57
27. Extensión de las reglas anteriores a cuerpos de forma variable	62

SEGUNDA PARTE
DINÁMICA DEL PUNTO

CAPÍTULO III

ELEMENTOS DE CINEMÁTICA. LOS PRINCIPIOS DE NEWTON
O PRINCIPIOS DE LA DINÁMICA

A. — *Elementos de cinemática. Movimiento de caída*

	Pág.
1. Traslación. Rotación. Punto material	64
2. Movimiento uniforme. Definición de velocidad	65
3. Movimiento uniformemente variado	67
4. Determinación del espacio recorrido en el movimiento uniformemente acelerado	68
5. Movimiento cualquiera	70
6. Las dimensiones de la velocidad y de la aceleración	71
7. Movimiento de caída	71
8. Máquina de Morin	72
9. Caída por un plano inclinado	74

B. — *Los principios de Newton o principios de la dinámica*

10. El principio de inercia	76
11. Concepto vectorial de la velocidad y de la aceleración	80
12. El principio de masa o segundo principio	80
13. Algunas experiencias sencillas	82
14. Comparación de masas	83
15. Centro de masa	84
16. La máquina de Atwood	84
17. Comprobación del principio de inercia	85
18. Comprobación del principio de masa	85
19. Aceleración en la máquina de Atwood	86
20. El principio de la igualdad de la acción y de la reacción	87

CAPÍTULO IV

CONSECUENCIAS DE LOS PRINCIPIOS DE LA DINÁMICA. APLICACIONES

A. — *Consecuencia de los principios de la dinámica*

1. Ecuaciones generales del movimiento uniformemente variado	88
2. El principio de superposición de los movimientos	89
3. Experimentos	92
4. Movimiento sobre un plano inclinado	94

B. — *Aplicaciones*

	Pág.
5. Tiro en el vacío. Tiro vertical	95
6. Tiro oblicuo	96
7. Estudio analítico	97
8. Angulo de tiro para alcanzar un punto dado	100
9. Influencia de la resistencia del aire	101
10. Movimiento de un cuerpo en el caso que la resistencia del medio es proporcional a la velocidad	103
11. Influencia de una aceleración vertical sobre la presión o tracción entre las masas	104
12. La balanza de Poggendorf	106

TERCERA PARTE

UNIDADES

CAPÍTULO V

UNIDADES FUNDAMENTALES Y DERIVADAS. DIMENSIONES, HOMOGENEIDAD.
EQUIVALENCIA ENTRE DOS SISTEMAS

1. Generalidades	109
2. Unidades fundamentales	110
3. Unidades derivadas y dimensiones	112
4. Homogeneidad	114
5. Equivalencias entre sistemas que difieren por la magnitud de las unidades elegidas	115

CUARTA PARTE

LA ENERGÍA

CAPÍTULO VI

EL TRABAJO. ENERGÍA CINÉTICA. CONSERVACION DE LA ENERGÍA.
PRINCIPIOS GENERALES DE LA ESTÁTICA

A. — *El trabajo. Energía cinética. Conservación de la energía*

1. Trabajo mecánico	117
2. Unidades	118

	Pág.
3. Definición general del trabajo	119
4. Energía	121
5. Energía cinética	122
6. Energía potencial	124
7. Energía de deformación elástica	126
8. Desaparición de la energía cinética por choque y por roce	128
9. Principio de conservación de la energía	129
0. Experimentos	130

B. — *Principios generales de la estática*

11. Condición y clases de equilibrio	131
12. Estabilidad de un cuerpo apoyado	133
13. El principio de los trabajos virtuales	134
14. Aplicaciones	136

QUINTA PARTE

EL FROTAMIENTO

CAPÍTULO VII

ROCE POR DESLIZAMIENTO Y POR RODADURA

*Roce de los ejes. Ejemplos de equilibrio con y sin roce. El freno de Prony.
Unidades de potencia*

1. Generalidades	141
2. Roce por deslizamiento. Coeficiente de frotamiento del reposo	141
3. Determinación experimental de μ_0	143
4. Influencia de la velocidad	144
5. Roce de los ejes	147
6. Roce por rodadura	149
7. Ejemplos de equilibrio sin roce y con roce	152
8. El freno de Prony. Unidades de potencia	153

SEXTA PARTE

MOVIMIENTOS CURVILÍNEOS. OSCILACIONES

CAPÍTULO VIII

MOVIMIENTO CURVILÍNEO PLANO: ACELERACIONES TANGENCIAL Y NORMAL.
OSCILACIONES: OSCILACIONES LIBRES Y FORZADAS. RESONANCIA

A. — *Aceleración en el caso de movimientos curvilíneos.*

Movimiento circular uniforme

	Pág.
1. Generalidades	155
2. Aceleraciones normal y tangencial	156
3. Movimiento circular uniforme	158
4. El regulador de Watt	162
5. Las curvas ferroviarias	163

B. — *Movimiento oscilatorio armónico. Péndulo. Oscilaciones libres.*

Decrecimiento logarítmico de las oscilaciones. Oscilaciones forzadas. Resonancia

6. Generalidades	164
7. Movimiento oscilatorio armónico rectilíneo	165
8. Composición de oscilaciones	171
9. La energía en un movimiento armónico rectilíneo.	172
10. El péndulo ideal o matemático	173
11. El amortiguamiento de las oscilaciones	175
12. Estudio analítico	179

C. — *Oscilaciones forzadas. Resonancia*

13. Los hechos más notorios	183
14. Estudio analítico	184
15. El péndulo doble de Oberbeck	187
16. El eje flexible de la turbina de Laval	189

SEPTIMA PARTE

DINÁMICA DEL CUERPO RÍGIDO.
MOVIMIENTO DEL CENTRO DE UN SISTEMA DE MASAS

CAPÍTULO IX

ROTACION DE UN CUERPO RÍGIDO AL REDEDOR DE UN EJE.
MOMENTOS DE INERCIA. FUERZA Y MOMENTOS CENTRÍFUGOS.
EJES LIBRES

	Pág.
1. Rotación alrededor de un eje fijo	193
2. Ecuación del movimiento	196
3. Influencia de la polea en el movimiento de las masas en la máquina de Atwood	199
4. Cálculo de los momentos de inercia	200
5. Determinación experimental.	204
6. Regla de Steiner	204
7. Péndulo físico o compuesto	206
8. Péndulo simple sincrónico	208
9. Determinación del momento de inercia de un volante	208
10. Péndulo reversible	208
11. Fuerza centrífuga de un disco rígido que gira alrededor de un eje	209
12. Fuerzas y momentos centrífugos que obran sobre un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje	211
13. Ejes principales de inercia	214

CAPÍTULO X

EL MOVIMIENTO DEL CENTRO DE GRAVEDAD

1. Leyes del movimiento del centro de masa	218
2. Acción de las fuerzas interiores sobre el movimiento de translación de un sistema de masas	221
3. Experimentos	223
4. Caso en que actúan fuerzas exteriores	224

OCTAVA PARTE

CAPÍTULO XI

ELEMENTOS DE CINEMÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO

	Pág.
1. Generalidades	225
2. Teorema de Euler	226
3. Composición de velocidades angulares	227
4. Descomposición de una velocidad angular según tres ejes ortogonales	230
5. El movimiento más general de un cuerpo rígido al rededor de un punto fijo. Cono rodante	230
6. Movimiento de un cuerpo libre	232
7. Grados de libertad	232

CAPÍTULO XII

EL MOVIMIENTO DE UN CUERPO RÍGIDO AL REDEDOR DE UN PUNTO.
ELEMENTOS DE LA TEORIA DEL GIRÓSCOPO Y DE SUS APLICACIONES

A. — *El movimiento del giróscopo simétrico. Caso en que su velocidad de rotación propia es muy grande*

1. Cinemática del movimiento del giróscopo simétrico. Estudio de la precesión regular	234
2. La precesión de la tierra	237
3. Influencia del número de grados de libertad en el movimiento del giróscopo	238
4. Explicación mecánica objetiva de los fenómenos anteriores. Cupla de inercia o acción giroscópica	239
5. Estabilización por medio del giróscopo	242
6. Acción de las fuerzas interiores	245
7. Aplicaciones	248
8. Otros experimentos y aplicaciones	250

B. — *Las ecuaciones generales de movimiento de un cuerpo rígido al rededor de un punto fijo. Aplicación al giróscopo simétrico*

9. Las ecuaciones de movimiento	252
10. Posición relativa de los vectores velocidad angular e impulso. Otra forma de las ecuaciones	254
11. Descripción matemática del movimiento de un giróscopo simétrico	257

C. — *Prueba de la rotación de la tierra*

12. El experimento de Foucault	262
--	-----

NOVENA PARTE

EL MOVIMIENTO RELATIVO

CAPÍTULO XIII

ELEMENTOS DE LA TEORÍA DEL MOVIMIENTO RELATIVO

A. — *Deducción de las ecuaciones*

	Pág.
1. Generalidades	266
2. El sistema se traslada	268
3. El movimiento de arrastre es una rotación	271

B. — *Aplicaciones*

4. Los movimientos relativos y de arrastre son uniformes	274
5. El movimiento relativo es un movimiento uniforme. Cicloide	275
6. Estudio dinámico de algunos casos	276
7. La caída en la superficie de la tierra	279

DECIMA PARTE

GRAVITACION

CAPÍTULO XIV

LA ACELERACION DE LA GRAVEDAD

1. Las observaciones de Newton y Bessel	283
2. La determinación de Borda	284
3. Método de las coincidencias	286
4. Las correcciones	288
5. Determinaciones con el péndulo reversible	292
6. El péndulo de Repsold	294
7. La variación de g en la superficie de la tierra	295
8. La balanza gravitacional de Threlfall y Pollock	301
9. La balanza de Eötvös	301

CAPÍTULO XV

LAS LEYES DEL MOVIMIENTO DE LOS PLANETAS.
LA LEY DE LA ATRACCION DE LAS MASAS. BALANZAS DE PRECISION

A. — *Leyes de Kepler. Ley de atracción de Newton*

	<i>Pág.</i>
1. La ley de atracción	304
2. Deducción elemental de la ley de gravitación	306
3. Comprobación de la hipótesis de Newton por el movimiento de la Luna	308
4. Algo más sobre la mecánica de los cuerpos celestes	309
5. Comprobación de la ley de Newton por la órbita de los cometas	313
6. Perturbaciones. El descubrimiento de Neptuno	313
7. Las determinaciones de la constante k de gravitación. Método de Cavendish	315
8. Las determinaciones de Jolly, Richarz y Krigar Menzel, y Poynting con la balanza común	319
9. La masa y la densidad media de la Tierra	320
10. La masa de los cuerpos celestes	321
11. El potencial de gravitación	322
12. La caída de un aerolito	323
13. Las mareas	324

B. — *Balanzas de precisión*

14. Generalidades	325
15. Equilibrio de la balanza. Sensibilidad	327
16. Estudio más racional	330
17. Determinación del cero	333
18. Métodos de pesar	335
19. La relación de los brazos	336
20. Instalación, prueba y manejo de la balanza	336

UNDECIMA PARTE

ELASTICIDAD DE LOS SOLIDOS. EL CHOQUE

CAPÍTULO XVI

ELASTICIDAD

1. Coeficiente de ruptura. Módulo de Young	338
2. Contracción transversal	341
3. Trabajo almacenado en un cuerpo deformado elásticamente	342

	Pág.
4. Las deformaciones elásticas en su relación con las fuerzas que las determinan	343
5. Las deformaciones simples o elementales en una substancia homogénea e isótropa: dilatación uniforme y deslizamiento	345
6. Las deformaciones de los cuerpos isótropos son homogéneas. Ejes principales	348
7. Descomposición de una deformación homogénea en compresiones y dilataciones según los ejes principales	350
8. Resumen de los números 5, 6 y 7. Deformaciones elementales. Homogeneidad de las deformaciones	354
9. Definición de las constantes características o módulos	355
10. Deducción de las relaciones generales	357
11. Torsión	360
12. Flexión de barras	362
13. Determinación experimental del módulo de Young por medio de la flexión	366
14. Constantes elásticas de algunas substancias	368
15. Espirales elásticas	368
16. Módulo de torsión. Cálculo del módulo de torsión	369
17. Influencia del amortiguamiento	372

CAPÍTULO XVIII

ELEMENTOS DE LA TEORIA DEL CHOQUE

1. Generalidades	373
2. Choque central y excéntrico	373
3. Choque central y normal	374
4. Casos de cuerpos plásticos	376
5. Choque elástico oblicuo	377
6. Las fuerzas del choque	378
7. Tiempo de duración del choque	380
8. Centro de percusión	381

FÍSICA GENERAL

Mecánica del cuerpo rígido. Gravitación. Estática de la elasticidad de los sólidos

PRIMERA PARTE ALGUNOS CONCEPTOS FUNDAMENTALES. LAS REGLAS DE LA ESTÁTICA

CAPITULO I

BREVE COMENTARIO SOBRE ALGUNOS CONCEPTOS FUNDAMENTALES. LAS UNIDADES DE ESPACIO Y TIEMPO. MEDICION DE LONGITUDES: INSTRUMENTOS

1. **Propiedad de la materia. Fenómenos. Objeto de la ciencia natural.** — El medio que nos rodea produce en nuestros sentidos las más variadas sensaciones; sensaciones que originan una representación subjetiva del mundo exterior, a la que dan relieve y vida las nociones de espacio y tiempo. En ese cuadro los cuerpos tienen límites distintos, diferente ubicación y cambian de lugar; ofrecen a la vista **FORMAS** y colores variados, al sentido muscular diferente peso, etc.

Bajo la misma forma, los cuerpos aparecen con caracteres que los distinguen entre sí, caracteres diferenciales que se atribuyen a contexturas íntimas particulares, por lo que se dice que se trata de sustancias o materias diferentes.

El conjunto de hechos por los que se revela la existencia de la materia o por los que se individualizan los diversos cuerpos se denominan *propiedades*.

Un cuerpo puede sufrir, en apariencia por sí mismo, o bajo la acción de otros cuerpos, los más variados cambios; esos cambios, que caracterizan propiedades de la materia, se denominan *fenómenos*.

Es objeto de la ciencia el estudio de las propiedades de la materia, a través de los fenómenos en los cuales se manifiestan.

Estudiar un fenómeno no consiste meramente en describirlo, sino, esencialmente, en establecer las causas que lo determinan y en inquirir la relación de dependencia entre la causa y el efecto.

Si se estudia un fenómeno tal como se presenta, sin modificar voluntariamente las condiciones en que se produce, se permanece en el campo de la *observación*; pueden así concurrir causas que no son esenciales al fenómeno y que, sin embargo, lo modifican fundamentalmente. Por ejemplo, en la caída de los cuerpos en la superficie terrestre, la presencia del aire es un factor extraño al fenómeno; los cuerpos livianos caen, debido a ello, más lentamente que los pesados. Si se estudia ese fenómeno haciendo caer los cuerpos en el interior de un tubo de vidrio privado de aire, resulta que todos caen al mismo tiempo. El estudio de los fenómenos en condiciones dadas de antemano se designa con el nombre de *experimentación*.

La exactitud del estudio de los fenómenos depende de los medios de que se dispone; limitados al uso de nuestros sentidos, las observaciones, serían, en general, poco exactas. El hombre recurre al uso de instrumentos, no sólo para aumentar la agudeza de sus sentidos, sino, también, para eliminar ciertas influencias fisiológicas y psíquicas; ambos fines se logran, en general, simultáneamente.

2. El principio de causalidad clásico. Leyes. Hipótesis. Teorías.— Según el principio de causalidad de la física clásica los sucesos del mundo físico ocurren uniforme y unívocamente, es decir que si se realizan las mismas condiciones se producen idénticos fenómenos, tanto en el orden cualitativo como en el cuantitativo. Si se conoce el estado de un sistema en un instante dado pueden precisarse los estados posteriores mediante leyes físicas. Se admite, en suma, un determinismo riguroso.

Ya veremos en el volumen final de la obra cómo se ha planteado en la física atómica un principio de indeterminación.

La relación de dependencia entre la causa y el efecto se denomina ley del fenómeno. Conocidas las leyes que se refieren a un grupo de fenómenos de la misma especie, el espíritu humano se esfuerza en forjar principios elementales de los cuales puedan deducirse. Esos principios se establecen de tal manera que de ellos fluya de una manera clara, incontrovertible, la explicación de los hechos particulares que son bien conocidos; se prueba enseguida explicar y describir con su auxilio otros casos más complicados o nuevos y si el resultado es satisfactorio nos inclinamos a considerarlos principios exactos y generales. Se tiene así una teoría de los fenómenos.

En los fenómenos naturales no trascienden los principios aisladamente, sino superponiendo sus efectos, de suerte que se llega a su conocimiento por puras operaciones mentales. Puede, pues, decirse que los principios se manifestarían en forma pura en circunstancias ideales que tal vez no se producen en la naturaleza.

En el descubrimiento de esos principios desempeñan, pues, un papel preponderante raciocinios puramente abstractos y ciertos sentimientos instintivos que provienen, sin duda alguna, de la experiencia, de observaciones conscientes e inconscientes, cuyo sentido descubre el espíritu silenciosamente. Ese proceso es favorecido por el estudio y la meditación.

En la elaboración de las teorías figuran, con frecuencia, suposiciones, hipótesis, con las que el espíritu intenta representarse, descubrir las causas ocultas que rigen a los procesos.

Las hipótesis más trascendentales consisten en tentativas de reducir a los mismos principios fenómenos que ofrecen apariencias dispares; tales hipótesis aspiran no ya a formular una teoría de un grupo de fenómenos, sino a fundar una teoría general de la ciencia.

3. El espacio y el tiempo. — Hemos dicho que, en la representación de las sensaciones que provienen del mundo exterior, las nociones de espacio y tiempo constituían elementos fundamentales. Para la intuición del hombre la noción de tiempo es apriorística y absoluta; tiene existencia en sí, independiente en absoluto de la existencia de los elementos materiales, a los cuales, no obstante, aparece vinculada en todas las representaciones y modos de pensamiento, en una forma que, en realidad, la intuición no descubre.

En los últimos tiempos ha sido menester discutir y establecer el verdadero contenido y significado de esa noción, en lo que a su vinculación con los sucesos del mundo material se refiere. El método es esencialmente objetivo y formal; la intuición no interviene, pues se trata, precisamente, de discernir si hay derecho en proyectar al exterior aquella noción intuitiva.

No deseamos, por el momento, entrar en detalles referentes a este complejo asunto, sobre el que volveremos en su oportunidad.

4. Objeto de la física. — La Física y la química tienen como objeto el estudio de las propiedades de la materia con exclusión de los fenómenos de la vida. Difícil es establecer por medio de una definición el límite que separa a estas ciencias hermanas. La definición que ca-

lifica de fenómenos físicos aquellos cambios que experimenta la materia sin modificar su naturaleza íntima, está lejos de responder a la realidad; piénsese, por ejemplo, en los fenómenos radioactivos y en los de transmutación artificial provocada por bombardeo con partículas α , por protones de gran velocidad, etc. Cosa semejante ocurre, por lo tanto, en la definición de fenómenos químicos: en éstos cambia solamente la agrupación y enlace de los átomos, microcosmos en el que reina la más pura física.

La química y la física constituyen una sola ciencia, en cuyos fenómenos trascienden las mismas propiedades elementales de la materia, en cuyo conocimiento han puesto la meta de su afán los filósofos de todas las épocas.

5. Medir. — Medir un grandor físico es determinar la relación existente entre la magnitud dada y un grandor de la misma especie que se elige como unidad.

Como unidad de medida de un grandor físico puede elegirse un grandor cualquiera de la misma especie, con tal de que sea invariable y se pueda reproducir exactamente.

Sobre otras consideraciones que son de importancia, recurra el lector al capítulo V.

6. Unidad de longitud: metro tipo. — En la antigüedad, las unidades de longitud provenían del tamaño de ciertas partes del cuerpo humano o de la extensión de algunos de sus movimientos: tales eran el pie, el paso, etc., cuyas dimensiones habían sido fijadas en los distintos países por sus gobernantes. Ocurría, naturalmente, que bajo la misma denominación, se comprendían, en las diferentes comarcas y países, magnitudes desiguales.

El físico holandés Huygens propuso, en el año 1664, como unidad para medir las longitudes, la longitud de un péndulo simple que batiese el segundo. La convención francesa de 1791 resolvió introducir un nuevo sistema fundamental de pesas y medidas, para cuyo establecimiento se formó una comisión en la que figuraban Laplace, Lagrange, Borda, Delambre, Prony, Mechaín y Lavoisier. Se convino en fijar como unidad de longitud la diez millonésima parte del cuarto de meridiano terrestre que pasa por el Observatorio de París. Delambre y Mechaín realizaron la medida durante los años 1792-1798, entre Dunkerke y Montjui, cerca de Barcelona, utilizando a ese fin una barra de hierro de una longitud de seis pies de París o toesa, unidad

de longitud de aquel tiempo. De esa medida resultó, para la unidad de medida elegida, una longitud de 0,513074 toesa, construyéndose, para su conservación, una barra de platino de ese largo, 25 mm de ancho y 4 mm de espesor.

La elección de una parte de una gran magnitud terrestre como unidad de longitud parece a primera vista muy acertada, por cuanto, siendo tal magnitud en sí muy probablemente invariable, en caso de destrucción de los patrones construídos, una nueva medición permitiría reproducirlos. Dado que tal magnitud resulta de un número muy grande de mediciones particulares, ya de antemano puede esperarse, a pesar de todas las precauciones que se tomen, resultados sucesivos algo diferentes. Así, por ejemplo, según cálculo del astrónomo Bessel la longitud del cuarto de meridiano sería de 10.000.856, si se toma el metro como unidad.

En el hecho ocurre que es de más exacta reproducción la longitud de una regla de platino que la obtención de un mismo resultado en la medición del cuarto de arco de meridiano.

Por este motivo, se convino por fin en fijar como unidad de longitud la de la regla de platino antes mencionada, a la temperatura de 0° centígrado.

A fin de facilitar la reproducción del metro y de eliminar la influencia de la flexión, se ha dado al metro tipo la forma definitiva que muestra la figura 1.

La regla está construída de una aleación de 90 por ciento de platino y 10 por ciento de iridio, aleación que constituye una materia estable e invariable, de gran dureza, elevado módulo de elasticidad y pequeño coeficiente de dilatación.

El largo total de la regla es de 102 cm. La distribución de la substancia es tal que los centros de gravedad de los cortes, que son todos iguales, naturalmente, caen sobre la cara interior *M*, cara que está, entonces, formada por las fibras neutras de la barra. Sobre ella están marcados los trazos que limitan al metro. Por la forma del corte, la resistencia de la barra a la flexión es, con respecto a su peso, muy elevada; además, la influencia de tal causa sobre la distancia entre los trazos es, por la ubicación de éstos, muy pequeña.

Bessel ha demostrado que el mínimun de la influencia de la flexión sobre la distancia horizontal entre los trazos tiene lugar si la

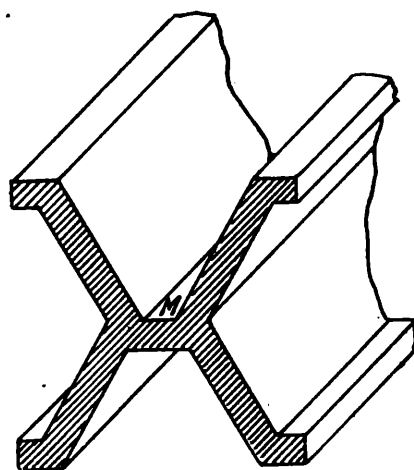


Fig. 1.

regla está apoyada sobre dos soportes situados simétricamente con respecto a sus extremos y a una distancia entre ellos de 0,5594 de su longitud; el cálculo indica que, en tales condiciones, la diferencia entre la longitud de la fibras neutras del metro y la de sus proyecciones horizontales es tan sólo de 0,0003 milésimos de milímetro.

El metro tipo se conserva en el «Instituto o archivo internacional de pesas y medidas», situado en Saint-Cloud, cerca de París, creado en 1875 por resolución de los representantes de diferentes naciones, entre las que figuró la Argentina. Los gastos de instalación del archivo se distribuyeron entre las naciones concurrentes.

De ese etalón se ha obtenido hasta la fecha treinta copias, con un error total probable de 0,04 milésimos de milímetro, copias que están en poder de diferentes naciones. La Argentina no posee hasta la fecha una copia semejante.

La reproducción del metro con una exactitud de la milésima parte de un milímetro, en caso de destrucción de todos los patrones existentes, se podría realizar en virtud de la comparación del metro con las longitudes de onda de las líneas roja, verde y azul del Cadmiun, llevada a cabo por el profesor A. Michelson, de Chicago.

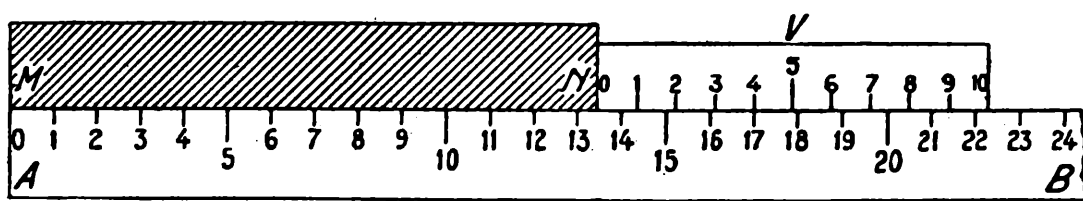


Fig. 2.

7. **Vernier.** — A fin de poder determinar con bastante exactitud la longitud de un cuerpo se hace uso de un dispositivo como el que muestra la figura 2. Se trata de una regla *A B* dividida, sobre la que se desliza una reglita *V*, denominada *Vernier*, provista de cierto número de divisiones, el valor de cada una de las cuales difiere del valor de una de las divisiones de la regla en una pequeña fracción.

El Vernier se forma tomando sobre la reglita una longitud igual a 9; 19; 49, etc., divisiones de la regla y dividiendo respectivamente los intervalos en 10, 20, 50, etc., partes iguales.

Si el valor de una división de la regla es 1 mm el valor de una división del vernier será $\frac{9}{10}$, $\frac{19}{20}$, $\frac{49}{50}$ mm, y la diferencia entre esos valores será, por lo tanto $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{50}$ mm, respectivamente.

Supongamos que en el caso representado en la figura el vernier ha sido formado tomando una longitud 9 mm dividiéndola en diez partes iguales. La longitud del cuerpo MN sería 13,4 mm, pues está comprendida entre 13 y 14 mm y coincide la cuarta división del vernier con una de la regla, lo que significa que entre las divisiones 3 y 16 existe la distancia 0,1 mm; entre las 2 y 15, 0,2 mm, y por fin entre las 0 y 13, 0,4 mm.

Si la coincidencia hubiese tenido lugar no en la cuarta división del vernier sino en la séptima, por ejemplo, la fracción sería 0,7 mm.

Con este vernier se puede apreciar entonces hasta 0,1 mm, magnitud que se denomina su *aproximación*; la aproximación de uno construido por la división en 20 partes de 19 mm es $\frac{1}{20} = 0,05$ mm.

La aproximación de un vernier es, por lo tanto, igual a la diferencia entre los valores de una división de la escala y una de las suyas.

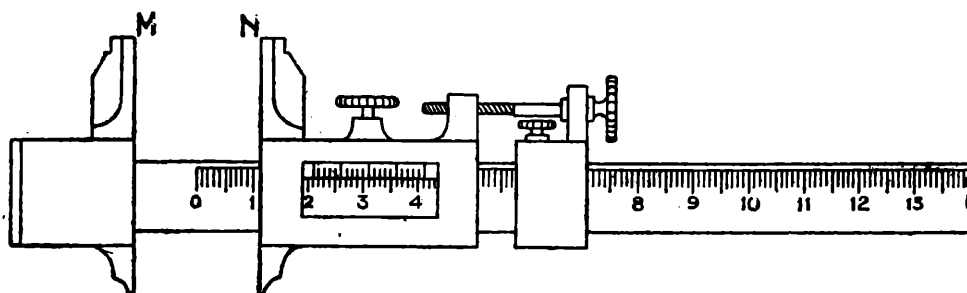


Fig. 3.

Calculemos la aproximación de una manera general. Sea a el valor arbitrario de una división de la regla; el vernier se haya formado dividiendo en $n + 1$ partes iguales una longitud igual a n divisiones de la regla. Las divisiones del vernier tienen, entonces, el valor $\frac{na}{n + 1}$ y el valor de la aproximación, que indicamos con ϵ , será

$$\epsilon = a - \frac{na}{n + 1} = \frac{a}{n + 1}.$$

Es decir, la aproximación se forma dividiendo el valor de una división de la regla por el número total de divisiones del vernier.

En la actualidad se construyen reglas divididas en medios milímetros, sobre los que se mueve un vernier formado tomando una longitud de 49 divisiones y dividiéndola en 50 partes iguales; la aproximación es, por lo tanto, igual a $\frac{0,5}{50}$ mm, es decir, de 0,01 mm.

En el calibre (fig. 3) se tiene un dispositivo cómodo para medidas que no requieren mucha exactitud.

El objeto cuya longitud desea medirse, se presiona suavemente entre las caras planas, normales a la regla, de las piezas *M*, *N*, por desplazamiento de esta última, que es movable y lleva el vernier.

8. **Vernier circular.** — El mismo principio empleado para medir con exactitud longitudes rectilíneas, puede utilizarse, evidentemente,

para longitudes circulares y, por lo tanto, a la medida de ángulos. En lugar de la regla se tiene un círculo dividido, por ejemplo, de 10' en 10'; el vernier se forma tomando sobre un sector circular un ángulo igual a 29 divisiones, es decir, 290', y dividiéndolo en 30 partes iguales; la división del vernier importa en ese caso 9'40'' y la aproximación, es, por consiguiente, de 20''.

Los círculos de los instrumentos destinados a la medida exacta de ángulos están provistos unas veces de dos vernier situados diametralmente entre sí, otras de cuatro.

Con el uso de dos vernier opuestos diametralmente se evita el error que resultaría en la medida de un ángulo si los nonius no girasen al rededor del centro del círculo. Basta para ello determinar los minutos y segundos que resultan de la lectura con ambos nonius y tomar la semisuma de ellos.

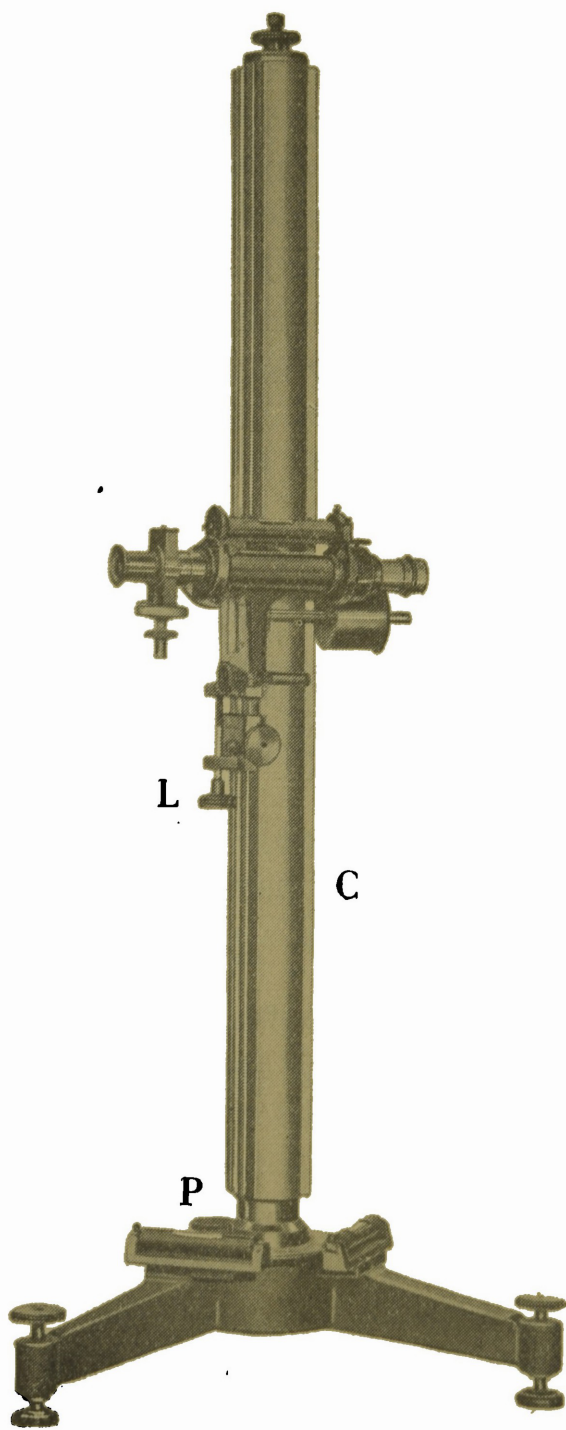


Fig. 4 a.

Con cuatro nonius se pueden eliminar, en parte, los errores provenientes de una división imperfecta del círculo.

9. **Catetómetro.** — En las determinaciones experimentales que se realizan en los laboratorios es, con frecuencia, necesario conocer con exactitud la diferencia de nivel o distancia vertical entre dos puntos o superficies, a cuyo fin se utiliza el instrumento que representan las figuras 4 que se denomina *catetómetro*.

La columna *C* lleva la escala y sirve de guía a una corredera provista de vernier, de un anteojo y un nivel.

La columna descansa en un eje que corre a lo largo de su eje de figura y al rededor del cual puede ser girada a voluntad; por medio de un tornillo *P* se puede fijar en una posición azimutal cualquiera.

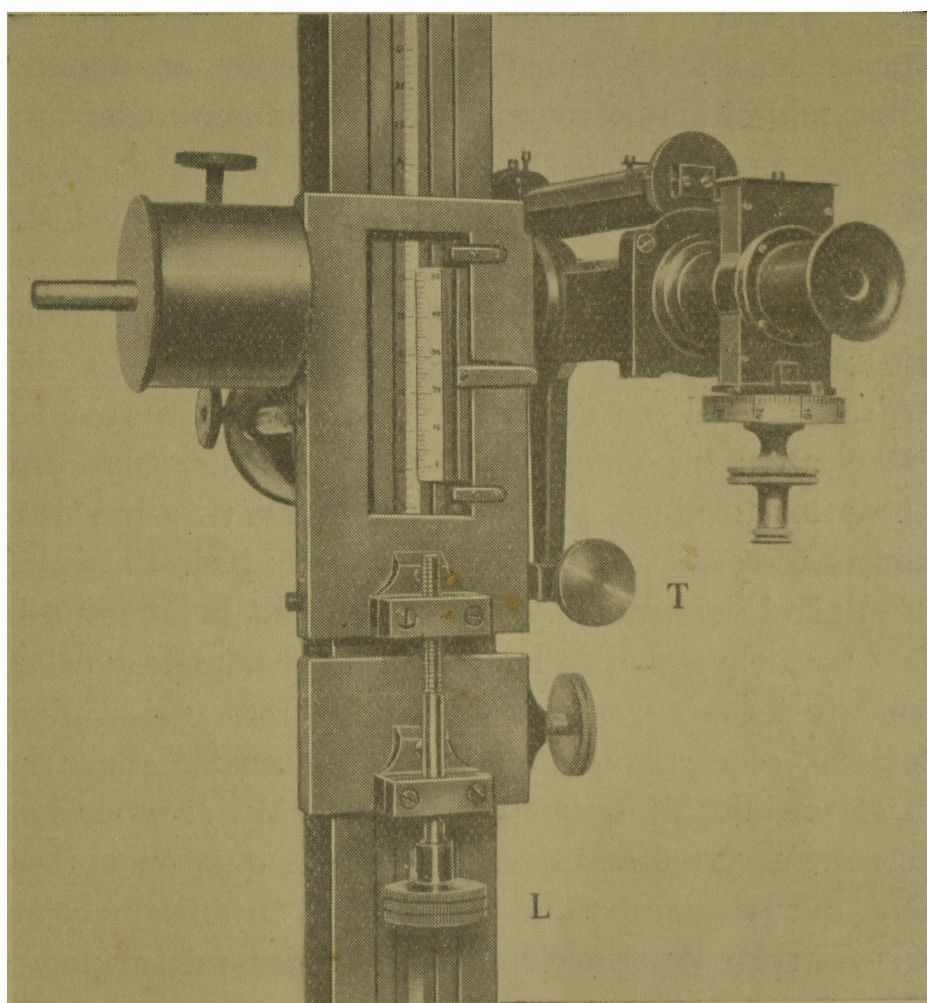


Fig. 4 b.

El eje está fijo a un trípode provisto de dos niveles, uno de los cuales es paralelo a la dirección que determinan dos de los tornillos del trípode. Su verticalidad y, por lo tanto, la de la escala se alcanza, en primera aproximación, con estos niveles; el ajuste final, con el nivel situado encima del anteojo. Si la línea visual del anteojo es paralela al nivel que descansa en él, cuando éste está calado, su dirección es horizontal y por lo tanto normal a la escala.

En esas condiciones se enfocan, sucesivamente, los dos puntos de que se trata, leyendo en ambos casos las posiciones del cero del vernier sobre la regla; la diferencia entre las dos lecturas da la distancia vertical entre los puntos.

* 10. **Rectificación del catetómetro.** — Conviene precisar cuáles son las condiciones que debe cumplir un catetómetro en el momento de las medidas e indicar someramente cómo pueden ser satisfechas.

Esas condiciones son:

- 1ª La escala debe ser perfectamente vertical;
- 2ª La línea de visión por el anteojo debe ser horizontal cuando el nivel está calado.

Estas exigencias se cumplen con las siguientes manipulaciones:

- a) Ubicando el eje de rotación del instrumento exactamente vertical;
- b) Haciendo primeramente que el eje geométrico del anteojo sea horizontal cuando el nivel está calado;
- c) Haciendo coincidir en seguida la línea de visión del anteojo con su eje geométrico.

La verticalidad del eje de rotación se alcanza, aproximadamente, con los niveles del trípode, calando primero aquel cuya dirección es la de dos de los tornillos, y por acción exclusiva sobre éstos, luego, accionando el tercer tornillo, se cala el otro nivel. El ajuste final se logra con el nivel del anteojo. Para ello se gira la columna hasta que el nivel sea paralelo a dos de los tornillos del trípode y calándolo por desplazamiento de éstos; se gira en seguida 180° y si el nivel no permanece calado, se corrige la mitad con los tornillos del trípode y el resto con el tornillo *T*; se vuelve a la posición anterior haciendo la misma corrección y así sucesivamente hasta que, en ambas posiciones, el nivel quede calado. Se le ubica ahora en una dirección perpendicular a la anterior y por acción sobre el tornillo del trípode se nivela nuevamente.

Así, resulta que para cualquier posición azimutal el nivel permanecerá calado, lo que significa que el eje de rotación es vertical.

El paralelismo del nivel con el eje geométrico del anteojo se logra teniendo en cuenta que el nivel está fijo a dos montantes que se apoyan sobre dos cilindros del cuerpo del anteojo, cilindros del mismo diámetro y coaxiales, eje que es precisamente el eje geométrico del anteojo.

El paralelismo se establece calando el nivel y luego invirtiéndolo sobre el anteojo, esto es, haciendo que los montantes se apoyen, res-

pectivamente, en el otro cilindro. Si el nivel no queda calado se corrige la mitad por medio de los tornillitos que vinculan al nivel con sus propios montantes, con lo que se modifica solamente la posición relativa del nivel con el anteojo; la otra mitad se corrige con el tornillo *T*. Se vuelve a la posición anterior haciendo la misma corrección y así sucesivamente hasta que en ambas posiciones quede calado.

La coincidencia entre la línea de visión y el eje geométrico se obtiene enfocando un punto, esto es, haciendo que su imagen se forme nítidamente en el cruce de los hilos del retículo. Se gira luego el anteojo en sus cojinetes al rededor de su eje de figura en 180°. Si la coincidencia existe, la imagen del punto permanece siempre sobre el cruce de los hilos del retículo. Si esto no ocurre, se corrige la mitad accionando los tornillos que mueven el anillo sobre el que están fijos los hilos del retículo y la otra mitad con el tornillo *L*, que desplaza lentamente la corredera sobre la columna. Se repite la operación hasta que, por giración, la imagen quede siempre sobre el punto mencionado.

11. **Tornillos micrométricos. Palmer y esferómetro.** — La figura 5 muestra el dispositivo llamado Palmer, que permite la medición de pequeños espesores con mucha exactitud.

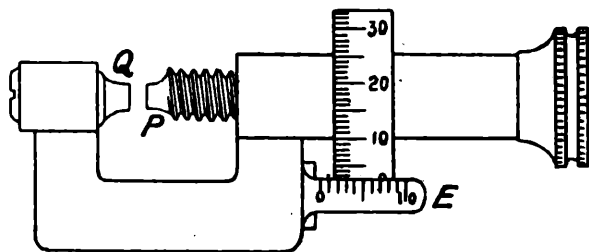


Fig. 5.

El tornillo está provisto de un tambor dividido en cierto número de partes iguales a fin de poder apreciar las fracciones de vuelta. Sobre el bastidor y paralelamente a la dirección del desplazamiento del tornillo existe una escala *E*, cuyas divisiones son, por lo común, de medio milímetro. Cuando el extremo *P* del tornillo toca en *Q*, el borde del tambor coincide con la división cero de la escala *E*; al mismo tiempo la división cero del tambor coincide con el borde de la regla *E*.

El espesor de un cuerpo resulta dado por el número de trazos visibles de la escala *E* más la fracción que resulta de la lectura en el tambor. Por ejemplo, si el paso del tornillo es de medio milímetro y el tambor está dividido en cincuenta partes, cada división representa 0,01 de mm; si la división 30 coincide con el borde de la reglita, la fracción es de 0,30 mm.

La figura 6 muestra el conocido instrumento llamado *esferómetro*, que permite determinar el radio de curvatura de superficies esféricas.

En general, el paso del tornillo es de 0,5 mm y sobre el disco fijo a su extremo superior se trazan 500 divisiones iguales, de modo que se puede apreciar el milésimo de milímetro. Los pies del trípode determinan un triángulo equilátero; la punta del tornillo cae en la intersección de las medianas de ese triángulo.

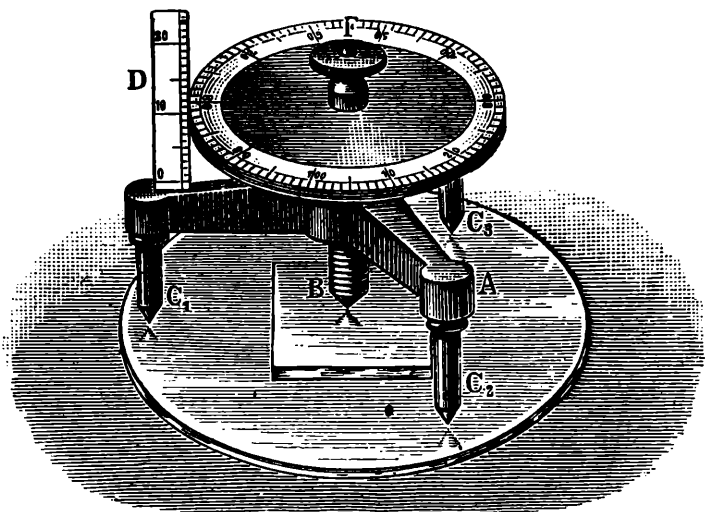


Fig. 6.

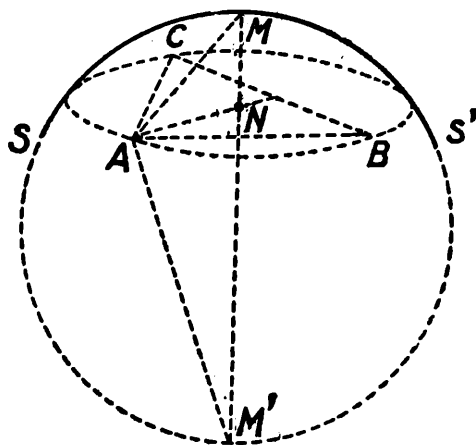


Fig. 7.

Si la punta del tornillo se encuentra en el plano que determinan los tres pies, el cero del disco debe coincidir con el filo de la reglita lateral y exactamente a la altura de su cero: si esto no ocurre, se toma como cero la lectura en esas condiciones.

Por desplazamiento del tornillo se puede hacer que su punta y la de los pies del trípode se encuentren sobre una superficie esférica, la de una lente, por ejemplo. Así se determina (fig. 7) la magnitud MN , es decir, la distancia entre la punta del tornillo y el plano de los tres pies del esferómetro, magnitud que indicaremos con f .

Como la recta AN es perpendicular a la hipotenusa MM' del triángulo rectángulo MAM' , se tiene, indicando con R el radio de la esfera:

$$\overline{AN}^2 = f(2R - f). \quad [1]$$

Además, si es l la longitud del lado del triángulo equilátero ABC , se tiene:

$$AN = \frac{l}{\sqrt{3}} \quad [2]$$

y así resulta:

$$R = \frac{l^2 + 3f^2}{6f}, \quad [3]$$

expresión que permite calcular el radio de curvatura midiendo l y f .

12. **La unidad de tiempo.** — En la medida del tiempo se recurre al movimiento de rotación de la tierra al rededor de su eje, movimiento que se considera uniforme. Esto constituye, en realidad, una hipótesis, cuyo valor proviene, exclusivamente, de que no ha con^oducido, en ningún caso, a contradicciones con los hechos de la experiencia.

Como veremos más adelante, eso significa que el medio en que se mueve la tierra no ofrece ninguna resistencia a su movimiento.

En verdad, un cambio de velocidad de rotación puede provenir, también, de un cambio en la distribución de las masas que la constituyen, por una contracción, por ejemplo, en cuyo caso la velocidad aumentaría.

Además, por la atracción del sol y de la luna se producen en el agua de los mares terrestres mareas que *circulan* sobre la superficie de la tierra en sentido contrario a su rotación, lo que debe producir, por el frotamiento del agua sobre la tierra y entre sí, una disminución de la velocidad angular de aquélla. La acción de esta causa produciría en 1000 años una disminución de 0,012 segundos en un día; según cálculos de Lord Kelvin.

El tiempo transcurrido entre dos pasajes sucesivos de una estrella fija por el meridiano, es decir, el intervalo comprendido entre dos culminaciones sucesivas, se designa con el nombre de *día sidéreo*, mientras que el intervalo de tiempo transcurrido entre dos culminaciones del sol se llama *día solar verdadero*. Los tiempos así definidos no son iguales, a causa del movimiento de ~~rotación~~
traslación de la tierra alrededor del sol.

Si en el intervalo en que la tierra da una vuelta entera alrededor del sol se han observado n culminaciones solares, en el mismo intervalo deben haberse observado $n + 1$ culminaciones de una estrella fija, de modo que n días solares corresponden a $n + 1$ días siderales.

Es $n = 365,2422$, si se considera para el intervalo de las n culminaciones siderales el comprendido entre dos pasajes sucesivos del sol por el equinoccio de primavera.

A fin de comprender la relación anterior considérese lo siguiente. Sean (fig. 8) T y T' dos posiciones diferentes de la tierra sobre su órbita; la primera posición ha sido elegida de tal manera que la dirección de la flecha F , que puede ser la de un anteojo meridiano, indica a la vez la culminación de una estrella fija, que debe suponerse, por lo tanto, en el infinito, y la del sol por la dirección opuesta. En cambio, en la otra posición T' la dirección de F' indica la culminación de la

estrella, mientras que para que la dirección opuesta indique la culminación del sol la tierra debe dar un cuarto de vuelta. La diferencia, entonces, para una revolución completa alrededor del sol, debe ser de una vuelta.

Se tiene, por lo tanto:

$$1 \text{ día solar} = 1 + \frac{1}{365,2422} \text{ de día sideral.}$$

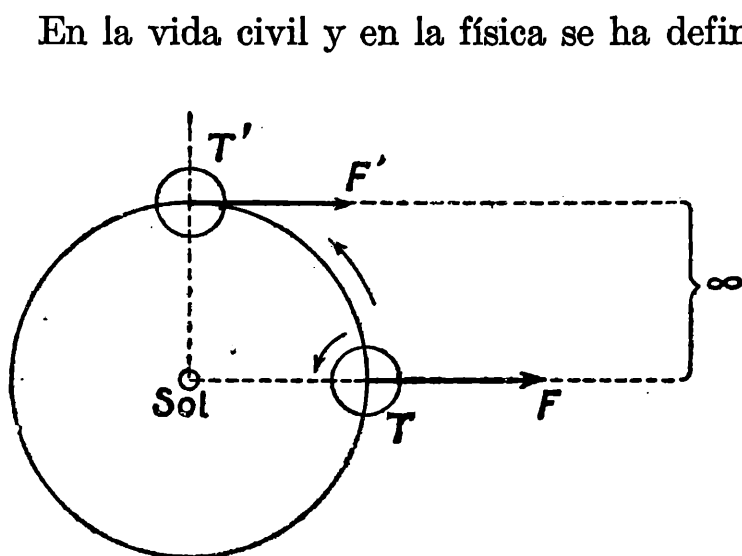


Fig. 8.

intervalo de tiempo que se denomina *día solar medio*. Se substituye el sol verdadero, que se mueve sobre la eclíptica, por un sol ficticio que se mueve con un movimiento uniforme sobre el Ecuador.

El intervalo entre dos culminaciones de ese sol ficticio es el día solar

medio, al cual se divide en 24 horas; la hora se divide, a su vez, en 60 minutos y el minuto en 60 segundos.

13. **Escalares y vectores.** — Los grandores físicos se dividen en dos clases esencialmente diferentes. Si un grandor queda perfectamente determinado por un número se dice que es un *escalar*. Tal ocurre, por ejemplo, con la diferencia de nivel, la densidad, la temperatura. Aquellas magnitudes que requieren, además, para quedar perfectamente determinadas, sea indicada una dirección, reciben el nombre de *vectores*. Tales son, por ejemplo, una fuerza de cualquier naturaleza, una velocidad, etc.

Cuando a cada punto de una región determinada, o de todo el espacio, corresponde una propiedad física que se representa por un escalar se habla de un *campo escalar*; si la propiedad se representa por un vector se habla de *campo vectorial*.

Así, por ejemplo, se habla de un campo de temperatura, de un campo de fuerza. El valor del grandor variará, en general, de un lugar a otro del campo, esto es, será función de las coordenadas.

14. **Representación de un vector.** — Un vector se representa gráficamente por medio de un segmento de recta AB (fig. 9), proporcional a su magnitud, que termina en una flecha, la cual indica cuál de los dos sentidos debe considerarse sobre la dirección. El número que mide el tamaño del vector, vale decir su magnitud, se denomina *módulo*.

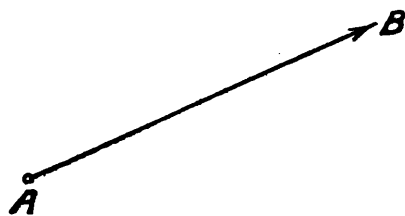


Fig. 9.

Si se trata de un campo vectorial se hace coincidir su origen A con el punto cuya propiedad representa; con el módulo y su dimensión y con la dirección queda definida la propiedad.

15. **Suma y resta de vectores.** — Se entiende como suma de dos vectores OA , OB (fig. 10) a su suma geométrica, esto es, a la diagonal OC del paralelogramo construido sobre ellos.

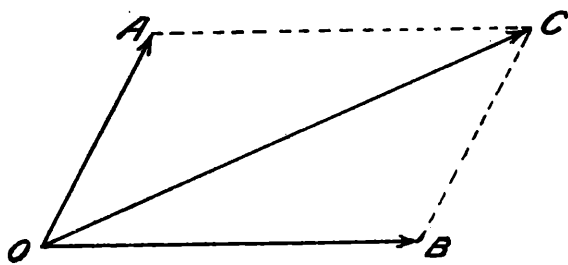


Fig. 10.

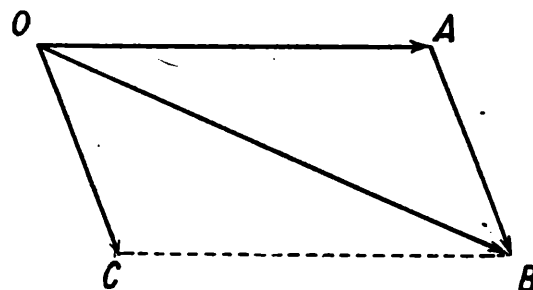


Fig. 11.

Esa definición no es arbitraria, sino que se funda en la experiencia. Esta enseña que si actúan, por ejemplo, sobre un punto material O , simultáneamente, dos fuerzas OA , OB , cada una de ellas produce, sobre él el mismo efecto que si estuviese sola, y de este hecho resulta, como se ha de ver, que el efecto total es el mismo que produciría una sola fuerza OC que fuese la diagonal del paralelogramo construido sobre ellas.

Lo mismo ocurre con las velocidades: si el punto O se mueve con la velocidad OB sobre una plataforma que se desplaza, a su vez, con la velocidad OA , la velocidad total del punto está representada en todo momento por la diagonal OC del paralelogramo construido sobre las velocidades parciales.

Se entiende como diferencia $OB - OA$ de dos vectores (fig. 11), a un vector OC tal que sumado con OA dé el vector OB .

Por la construcción se ve que OC es igual y paralelo a AB , el cual puede también considerarse, por lo tanto, como la diferencia de los dos vectores dados.

Los resultados anteriores se extienden, sin dificultad, al caso de un número cualquiera de vectores, situados en planos cualesquiera. Trátese, por ejemplo, de encontrar la suma de los vectores OA , OB , OC , OD (fig. 12). Para ello se suman primeramente dos vectores cualesquiera, y la suma de ellos con uno de los restantes, y así siguiendo. Al mismo resultado se llega, con más sencillez, partiendo del extremo de uno de ellos, el OA por ejemplo, trazando un segmento de recta AB' igual y paralelo a uno de los otros vectores, el OB por ejemplo, y desde el punto B' alcanzado, otro segmento de recta $B'C'$ igual y paralelo a otro de los vectores restantes, OC en este caso, y así siguiendo. Cuando todos los vectores tengan su correspondiente segmento igual y paralelo, se alcanza un punto como el D' tal que, uniéndolo con O , resulta un segmento OD' , que es la suma de los vectores dados. Esta construcción no es sino la misma construcción indicada primeramente, hecha en una forma abreviada.

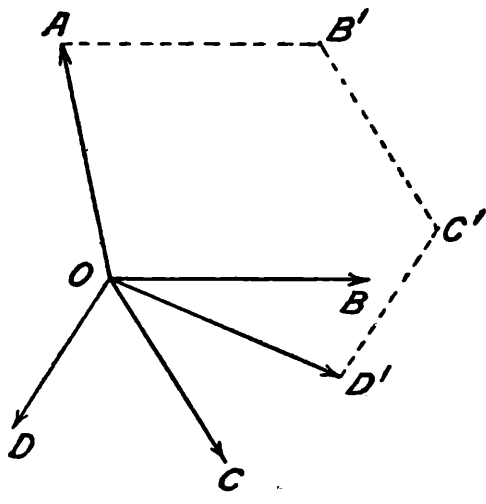


Fig. 12.

Esta construcción no es sino la misma construcción indicada primeramente, hecha en una forma abreviada.

16. Descomposición de un vector. — De las reglas anteriores resulta que todo vector puede considerarse compuesto por dos o más vectores de diferente dirección, o, con otras palabras, un vector se puede descomponer según direcciones dadas de antemano. El vector OF (fig. 13) se puede descomponer en dos vectores según direcciones cualesquiera Ox , Oy , que forman el ángulo φ . Basta para ello hacer la construcción inversa a la de la adición: por el extremo de F se trazan paralelas a las direcciones dadas, y es claro que las componentes según ellas son los vectores OX , OY , respectivamente, que indicaremos con X e Y .

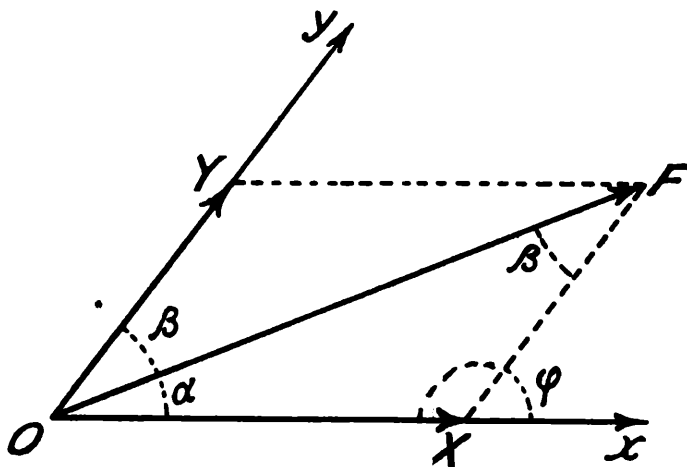


Fig. 13.

Las relaciones que vinculan al vector F y a sus componentes se obtienen aplicando conocidas relaciones geométricas.

Es

$$F^2 = X^2 + Y^2 + 2XY \cos \varphi$$

$$\frac{X}{Y} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \alpha}$$

$$\frac{X}{F} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \varphi}$$

$$\frac{Y}{F} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \varphi},$$

donde hay que tener presente que $\varphi = \alpha + \beta$ es el ángulo que forman las direcciones dadas.

Si las direcciones Ox , Oy fuesen perpendiculares, lo que es corriente por el uso de las coordenadas cartesianas ortogonales, se tendría:

$$F^2 = X^2 + Y^2$$

$$X = F \cos \alpha$$

$$Y = F \cos \beta.$$

Relaciones enteramente semejantes se obtienen con respecto a un sistema de coordenadas rectangulares en el espacio. (Véase el n° 8 del capítulo siguiente).

17. Aplicación. El odógrafo. — Si un punto P se mueve uniformemente sobre un círculo de radio r (fig. 14) describirá en tiempos iguales ángulos iguales. El ángulo, expresado en fracciones de π , que describe en la unidad de tiempo, se llama velocidad angular y se indica generalmente con la letra ω . El camino recorrido sobre el círculo en la unidad de tiempo se denomina velocidad lineal o tangencial y se indica con la letra v .

Entre v y ω existe la relación:

$$v = \omega r, \quad [1]$$

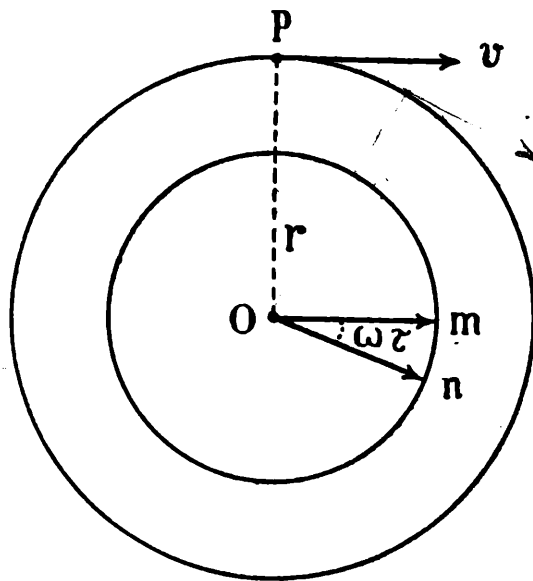


Fig. 14.

como resulta de la consideración geométrica de que v es el arco de círculo de radio r , cuya medida en fracciones de π es ω .

En todo momento la dirección del movimiento es la de la tangente al círculo o , con otras palabras, el vector velocidad tiene la dirección de la tangente geométrica; el número que la mide, esto es, su módulo, es en este caso constante, pero su dirección se modifica continuamente. La *velocidad* cambia, entonces, continuamente de valor.

Se obtiene una representación clara de la variación de la velocidad v en función del tiempo si a partir de un punto O se trazan vectores paralelos e iguales a las velocidades sucesivas del punto; si éste, como hemos supuesto, se mueve uniformemente sobre el círculo de radio r , el vector que representa la velocidad gira alrededor de O con la misma velocidad angular; su extremo describe una curva — un círculo en el caso considerado — que se llama el *odógrafo* del movimiento del punto.

Si en cierto instante la velocidad del punto P tiene la dirección y magnitud Om y, transcurrido el intervalo infinitamente pequeño τ de tiempo, su dirección y magnitud es On , la diferencia entre los dos vectores es el vector mn , que coincidirá con el arco del círculo, pues por la pequeñez de τ el ángulo entre los dos vectores es muy pequeño. Un movimiento cuya velocidad varía con el tiempo, se dice acelerado, llamándose *aceleración* el cambio de la velocidad en una unidad muy pequeña de tiempo; la aceleración es, por lo tanto, un vector. Su valor se calcula en el caso considerado como sigue.

En el triángulo mOn se tiene:

$$mn = Om \cdot m\hat{O}n = v \cdot \omega \cdot \tau, \quad [2]$$

pues Om es el vector que representa la velocidad, y mOn el ángulo descrito en el tiempo τ .

El cambio de la velocidad en la unidad de tiempo, esto es, la aceleración, que indicaremos con a , es

$$a = \frac{mn}{\tau} = v\omega \quad [3]$$

y por la relación [1]:

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r. \quad [4]$$

La dirección de este vector a es la de la normal a la velocidad y tiene, por lo tanto, la dirección del radio del círculo. De esto mismo y de su significación mecánica nos hemos de ocupar más adelante.

Es claro que a todo movimiento corresponde un odógrafo, fácil, en general, de determinar. La aceleración se calcula también en otros casos de una manera sencilla, mediante la representación con vectores.

18. **El gradiente.** — Supongamos que a todos los puntos del espacio, o de cierta región de él, corresponde una propiedad física que se representa por una magnitud escalar. Trátese, para precisar más y como ejemplo, de la temperatura de un cuerpo; su valor variará, en general, de un punto a otro. Se tendrá una representación clara de la distribución de sus valores, si se imagina al cuerpo cruzado por superficies tales que, sobre cualquiera de ellas, la temperatura tenga un valor constante. Se pasa de una temperatura a otra pasando de una superficie a otra. Cortando las superficies por un plano cualquiera se obtienen curvas como las del dibujo (fig. 15).

Superficies o líneas definidas por la constancia de un escalar reciben el nombre genérico de *superficies de nivel y líneas de nivel*, respectivamente; en el caso que nos ocupa *superficies isotermas y líneas isotermas*.

El camino más corto para pasar de una superficie a otra vecina es la línea perpendicular a ambas superficies. Si éstas son muy próximas, la línea será un pequeño segmento de recta; en esa misma dirección se tendrá, en el punto considerado, la variación más rápida del escalar.

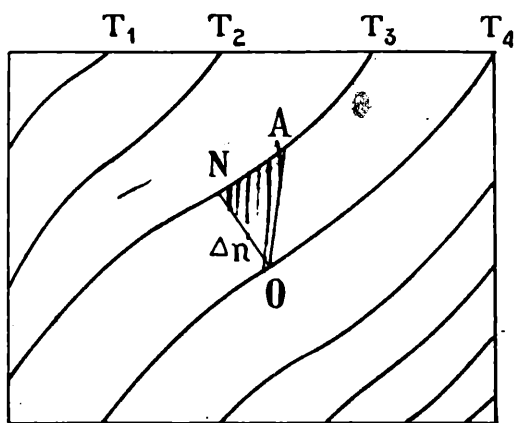


Fig. 15.

Consideremos el punto O de la superficie $T = T_4 = \text{const}$, y sea ON el camino más corto para pasar a la superficie próxima de *temperatura inferior* $T = T_3 = \text{const}$. Se designa con el nombre de *gradiente del escalar* y por lo tanto, en este caso, *gradiente de temperatura*, al cociente $\frac{T_4 - T_3}{ON}$ y se escribe:

$$\text{grad } T = \frac{T_4 - T_3}{ON} = \frac{\Delta T}{\Delta n},$$

si se indica con ΔT la pequeña variación $T_4 - T_3$ de la temperatura en los puntos extremos del segmento pequeño Δn normal a ambas superficies.

El gradiente es, pues, según la anterior definición, el cociente que da la variación del escalar por unidad de longitud en dirección de la normal a la superficie, o, lo que es lo mismo, en la dirección en que el escalar varía más rápidamente.

La importancia de esta magnitud proviene de que muchos procesos físicos como, por ejemplo, la propagación del calor por conducción, el movimiento de la electricidad, etc., se producen tan pronto como aparecen diferencias de temperatura o de potencial en dos lugares de un conductor. Las corrientes de calor o de electricidad se producen en la dirección en que más rápidamente decrecen los escalares mencionados y sus intensidades son, además, proporcionales al gradiente.

Se habla también de gradiente aún cuando la dirección no coincida con la de la más rápida variación del escalar. Se llama, por ejemplo, gradiente en la dirección OA al cociente $\frac{\Delta T}{OA}$.

El gradiente goza de las propiedades de los vectores y se le considera como tal. Para probar esto, consideremos un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales, cuyo origen O coincide con un punto de una de las superficies de nivel (fig. 16). Los ejes corten a la superficie vecina en los puntos A, B, C , de modo que el triedro formado por los ejes determina sobre ella la superficie triangular ABC .

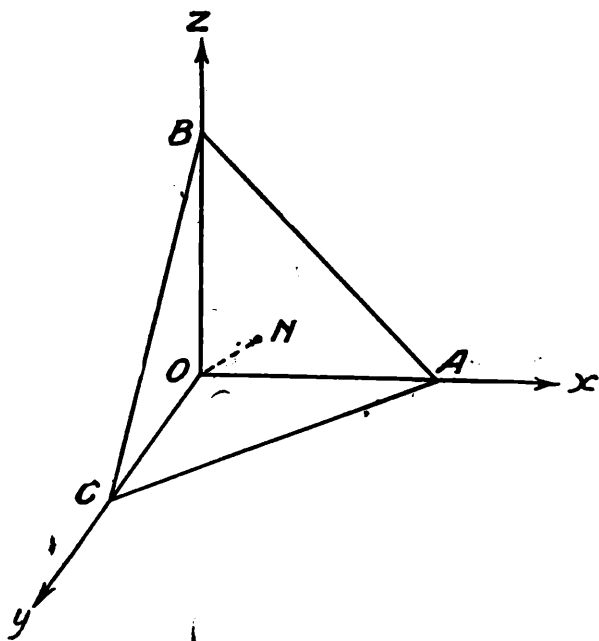


Fig. 16.

La variación más rápida del escalar corresponde a la dirección de la normal ON , de modo que el gradiente, que indicaremos con g , es

La variación más rápida del escalar corresponde a la dirección de la normal ON , de modo que el gradiente, que indicaremos con g , es

$$g = \frac{\Delta T}{ON}, \quad [1]$$

si se representa con ΔT , como antes, la diferencia de los valores del escalar en las dos superficies.

El gradiente en la dirección x la indicaremos con g_x . Por las definiciones será

$$g_x = \frac{\Delta T}{OA}, \quad [2]$$

pues la misma diferencia tiene el escalar entre O y A que entre O y N . De la misma manera se tiene para los gradientes según y y z :

$$g_y = \frac{\Delta T}{OC} \quad [3]$$

$$g_z = \frac{\Delta T}{OB}, \quad [4]$$

De las relaciones precedentes resulta, si se indican con α , β y γ los ángulos que forma ON con los ejes:

$$\frac{g_x}{g} = \frac{ON}{OA} = \cos \alpha \quad [5]$$

o

$$g_x = g \cos \alpha, \quad [6]$$

y de la misma manera:

$$\begin{aligned} g_y &= g \cos \beta \\ g_z &= g \cos \gamma, \end{aligned} \quad [6']$$

relaciones que muestran que g_x , g_y , g_z pueden considerarse como las componentes de un vector g según las tres direcciones x , y , z .

Resulta, además:

$$g^2 = g_x^2 + g_y^2 + g_z^2, \quad [7]$$

que dice que el cuadrado del gradiente es igual a la suma de los cuadrados de los gradientes según tres direcciones ortogonales cualesquiera.

Si nos movemos sobre la normal en el camino Δn , en el sentido que va de los escalares mayores a los menores, sentido que consideraremos positivo, el escalar, que indicaremos con U , disminuye en ΔU y, por lo tanto, la definición completa del vector gradiente de un escalar será

$$\text{grad } U = - \frac{\Delta U}{\Delta n},$$

donde el signo menos indica que el escalar decrece en dirección a las normales positivas.

CAPITULO II

REGLAS DE LA ESTÁTICA. APLICACIONES

A. — GENERALIDADES. REGLA DEL PARALELOGRAMO .

1. **Fuerza. Gravedad.** — Uno de los fenómenos físicos de apariencia más sencilla es el cambio de lugar de los cuerpos. El conocimiento de las leyes de tal proceso es de importancia, tanto para los menesteres de la práctica como para las especulaciones de la ciencia pura y de la filosofía.

La caída de un cuerpo, por ejemplo, es un movimiento que despierta la curiosidad del hombre, curiosidad que no se satisface con la mera descripción del proceso. El espíritu humano requiere enseguida el porqué de los cambios que observa; le es indispensable averiguar las causas que los determinan y conocer sus cualidades íntimas. En el caso de la caída ocurre en seguida considerar a la tierra como la causante del fenómeno y se dice que la *causa* del movimiento es debido a una *fuerza* que la tierra aplica al cuerpo, fuerza que se llama *de gravedad*.

En todos los casos en que un cuerpo abandona el estado de reposo se consigue determinar otros cuerpos cuya presencia o estado es la causa del movimiento. A este género de influencia de un cuerpo sobre otro se le denomina *fuerza*. Así, se dice, por ejemplo, que una piedra cae debido a una fuerza de atracción proveniente de la tierra; que la atracción de trozos de hierro por un imán es debida a una fuerza proveniente de éste, e idénticamente en el caso del movimiento de partículas livianas próximas a una barra de vidrio *electrizada*.

Por medio de la fuerza muscular del hombre o de los demás seres, por ejemplo, puede ponerse un cuerpo en movimiento, o aumentarse o disminuirse la velocidad de un movimiento ya existente. Esta vinculación del concepto de fuerza al de movimiento, que ex profeso hacemos notar en el comienzo de nuestro estudio, ha de ser considerada en su oportunidad con más amplitud y rigor.

A toda fuerza le corresponde una dirección. Así, por ejemplo, a la fuerza de gravedad le corresponde en cada lugar de la tierra la dirección de la vertical y hacia abajo, pues es éste el sentido de la caída.

2. La acción de una fuerza compensada por la tensión de una cuerda o la resistencia de una base de apoyo. — Si suspendemos un cuerpo de una cuerda (fig. 17), la fuerza de gravedad no produce el efecto que antes hemos mencionado.

Una observación atenta nos mostrará que por la presencia del cuerpo la cuerda se ha alargado, efecto notorio a simple vista si se utiliza una goma; lo mismo se puede observar con medios apropiados en el caso de un hilo metálico.

La experiencia enseña que, en todos los casos, cualquiera que sea el grueso de la cuerda y por liviano que sea el cuerpo, se produce cierto alargamiento. Además, todo hilo así alargado tiene la tendencia de volver a su estado primitivo y trata, por lo tanto, de mover al cuerpo hacia arriba, lo que hace, efectivamente, si moviendo el cuerpo con la mano hacia abajo, lo abandonamos luego.

Esto nos permite afirmar que el hilo aplica sobre el cuerpo una fuerza dirigida hacia arriba y muestra que el estado de reposo en que se encuentra el cuerpo es debido a que sobre él actúan dos fuerzas, de las cuales una está dirigida verticalmente hacia abajo y la otra verticalmente hacia arriba. Esta fuerza que ejerce la cuerda sobre el peso suspendido en ella se llama *tensión* de la cuerda y tiene, naturalmente, su dirección.

Cuando dos fuerzas actúan sobre un cuerpo sin ponerlo en movimiento se dice que están en equilibrio.

Una tensión en una cuerda o en un hilo metálico puede ser producida en cualquier dirección del espacio, fijando un extremo y tirando del otro con la mano.

Se puede reemplazar la cuerda por una espiral metálica, lo que tiene la ventaja de que con fuerzas relativamente pequeñas se obtienen alargamientos visibles a simple vista.

Consideraciones semejantes corresponden al caso en que un cuerpo descansa sobre una base, una mesa, por ejemplo. La tabla de la mesa es deformada y tiende a restablecer su primitiva posición originándose una fuerza AF_1 que equilibra la acción OF de la tierra sobre el

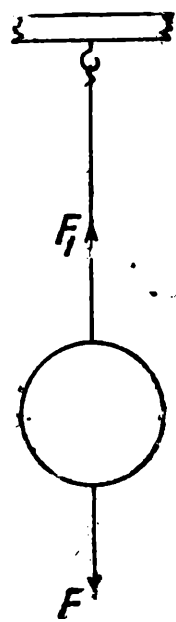


Fig. 17.

cuerpo (fig. 18) y que se denomina resistencia de la base de sustentación.

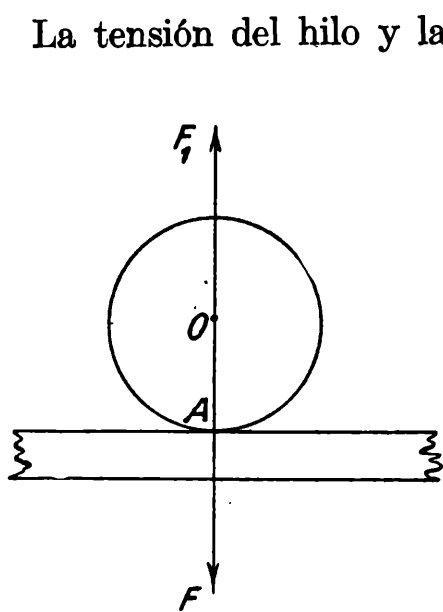


Fig. 18.

La tensión del hilo y la resistencia de la base de sustentación son fuerzas que se originan por la presencia de otras fuerzas, denominándose por esto fuerzas de *reacción*, mientras que las que las producen se llaman fuerzas de *acción*.

En los dos casos *la reacción es igual y opuesta a la acción*. Que son opuestas es evidente y la igualdad la deducimos del hecho de que el cuerpo queda en reposo. Estos son los primeros ejemplos de un principio muy general que hemos de considerar en más de una ocasión.

3. Medida de las fuerzas. — A fin de poder expresar la magnitud de las fuerzas por medio de números, es preciso establecer, primeramente, cómo determinaremos la relación entre dos fuerzas y elegir una fuerza como unidad. Podemos comparar las fuerzas con las fuerzas que la gravedad aplica sobre cuerpos determinados, es decir, con sus *pesos*.

Lo más cómodo y claro es, por el momento, juzgar de la magnitud de una fuerza por el alargamiento que produce en una espiral metálica fija por uno de sus extremos. Dos fuerzas o dos pesos serán iguales si producen el mismo alargamiento en una espiral dada.

Se puede formar así un número cualquiera de cuerpos tales que, suspendidos, produzcan todos el mismo alargamiento, esto es, de igual peso, y por agrupación de ellos, establecer pesos que sean un número cualquiera de veces mayor que cierto peso elegido como unidad.

La relación entre dos fuerzas cualesquiera sería el cociente entre los pesos que producen alargamientos iguales a los de aquéllas. Las fuerzas resultarán expresadas en gramos si se elige el gramo como unidad de peso.

La elección de los pesos para medir las fuerzas es debido al hecho de que el peso de un cuerpo es, bajo cualquier circunstancia, invariable en el mismo lugar de la tierra, esto es, el alargamiento que produce un cuerpo en una espiral dada es siempre el mismo. Así, por ejemplo, si colocamos agua en un recipiente herméticamente cerrado la deformación que produciría en la espiral no dependerá del hecho

de que esté helada o en ebullición. Dos sustancias *A* y *B*, que se combinan químicamente, contenidas en un tubo en *U*, producen la misma deformación en la espiral antes que después de la combinación.

Finalmente, la relación entre los pesos de dos cuerpos es invariable en cualquier lugar de la tierra.

Estas determinaciones no se han realizado, naturalmente, con la espiral, sino con la balanza, pero es en cambio didácticamente ventajosa la exposición realizada de esos hechos de la experiencia.

4. **La polea.** — Un disco circular de periferia acanalada que puede girar con entera facilidad alrededor de un eje horizontal situado normalmente en su punto medio, se designa con el nombre de polea, siendo de uso muy frecuente en instalaciones de toda índole.

La experiencia enseña que el alargamiento que produce un peso *P* (fig. 19) en una espiral no se modifica si entre ésta y aquel se instala una polea en la forma que indica la figura. Lo mismo ocurre cualquiera que sea la dirección de la espiral en el plano de la polea; tanto en la posición *A* como en la *A'*, por ejemplo, se obtiene el mismo resultado, es decir, la presencia de la polea no modifica la acción que un peso ejerce sobre la espiral.

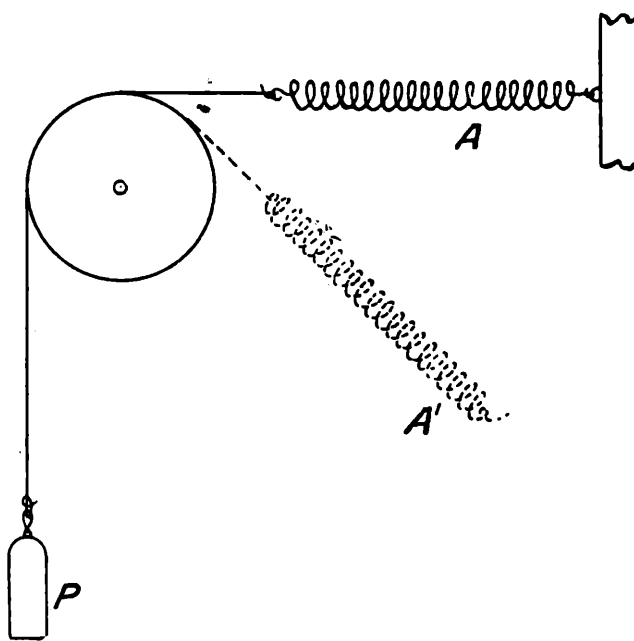


Fig. 19.

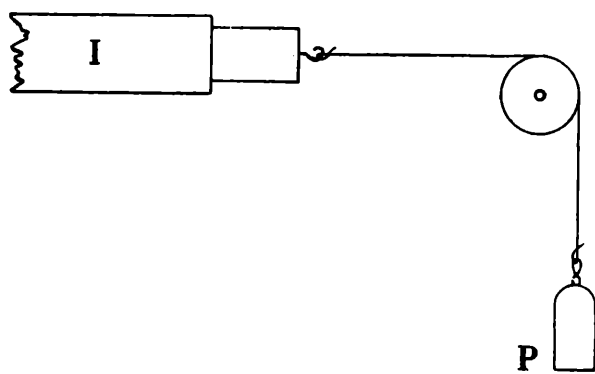


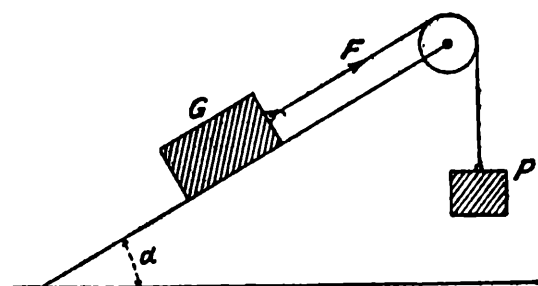
Fig. 20.

Midiendo las fuerzas por comparación con los pesos, no será necesario el uso de la espiral, una vez formada, con su auxilio, la colección de pesos iguales, y por lo tanto, de pesos múltiples.

Utilizando una polea se puede medir una fuerza, cualquiera sea su naturaleza, por comparación directa con los pesos. Así, por ejemplo, la fuerza con que un imán

de medir una fuerza, cualquiera sea su naturaleza, por comparación directa con los pesos. Así, por ejemplo, la fuerza con que un imán

mantiene adherido a un trozo de hierro la podemos medir con la instalación de la figura 20. Un hilo que pasa por la garganta de una polea está fijó en uno de sus extremos en el hierro y en el otro lleva un platillo para los pesos. Se puede determinar un peso P tal que



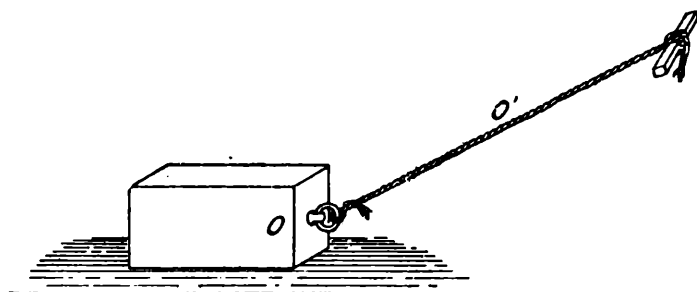
baste agregar un peso muy pequeño para que el hierro sea separado del imán. El peso máximo que puede mantener la atracción del imán sobre el hierro da la medida de esa fuerza.

Del mismo modo la fuerza F necesaria para impedir que un cuerpo G caiga sobre un plano inclinado (fig. 21) será igual al peso P que

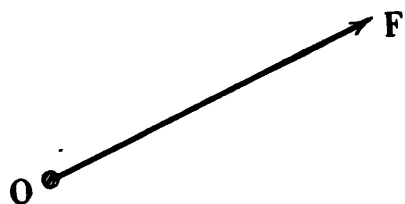
es necesario suspender en el extremo del hilo, para que el carro quede en reposo sobre él.

5. Representación gráfica de una fuerza. — Se ha visto que una fuerza tiene siempre una dirección y una magnitud medible por pesos, es decir, es un vector. Así, la dirección de la fuerza de gravedad es la de la vertical; la tensión de una cuerda tiene la dirección de ella misma.

Si arrastramos un cuerpo con una cuerda (fig. 22), el punto O en que ésta se



fija a aquél puede ser considerado como el punto en que se aplica la fuerza y se designa por esto con el nombre de *punto de aplicación* de la fuerza. Puesto que la tensión es la misma en todos los puntos de la cuerda, es decir, la fuerza se transmite de punto a punto, es claro que puede considerarse como punto de aplicación otro punto cualquiera O' .



También en el caso de otras fuerzas se habla de un punto de aplicación: así, por ejemplo, un imán aplica una fuerza sobre los polos de una aguja imantada situada en las cercanías.

Gráficamente se representa una fuerza, puesto que es un vector,

por un segmento recta (fig. 23) trazada a partir del punto O de aplicación y cuya dirección coincide con la de la fuerza. Su longitud representa, en una escala determinada, la magnitud de la fuerza. Así, por ejemplo, si una fuerza de 100 gramos la representamos por un segmento de recta de 5 centímetros de longitud, eso significa que, en la escala elegida, cada centímetro representa 20 gramos.

La flecha en el extremo del segmento indica el sentido de acción de la fuerza.

6. Composición de fuerzas. La regla del paralelogramo. — La experiencia enseña que dos fuerzas iguales y opuestas aplicadas al mismo punto de un cuerpo, no modifican su estado de reposo. Esto lo hemos admitido ya, en realidad, en las consideraciones anteriores.

Si dos fuerzas cualesquiera, F_1 y F_2 (fig. 24), están aplicadas al mismo punto O de un cuerpo, la experiencia enseña que el efecto sobre el cuerpo es idéntico al que produce una fuerza

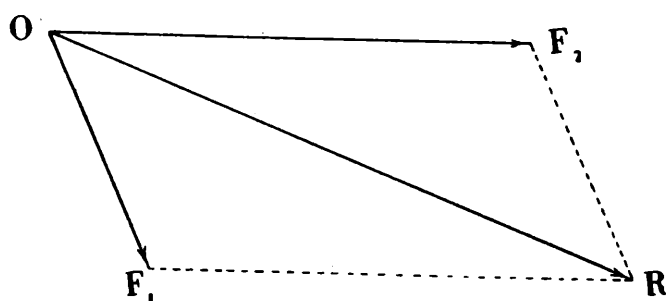


Fig. 24.

cuya magnitud y dirección está dada por la diagonal R del paralelogramo construido sobre aquellas.

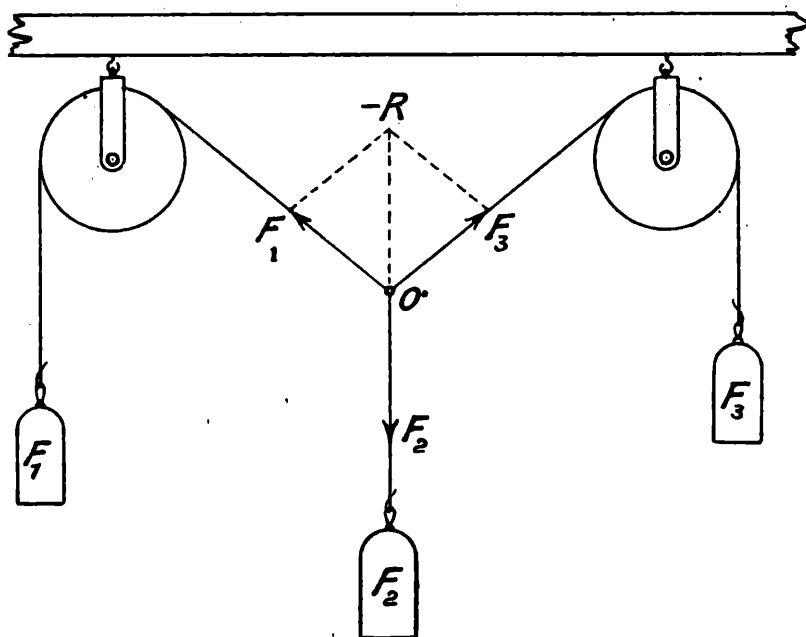


Fig. 25.

Esa ley puede comprobarse experimentalmente con una instalación como la indicada en la figura 25. Se trata de tres hilos delgados que tienen un extremo común en O y de cuyos extremos li-

bres penden pesos F_1 , F_2 y F_3 ; dos de los hilos pasan, respectivamente, por la garganta de dos poleas que pueden girar al rededor de su eje con entera facilidad. Se tiene así el caso de tres fuerzas con-

currentes o aplicadas en el mismo punto O , el cual tomará invariablemente la misma posición de reposo si los pesos son siempre los mismos. Cada fuerza tiene la dirección del hilo respectivo y su magnitud está dada por el peso total que pende de su extremo.

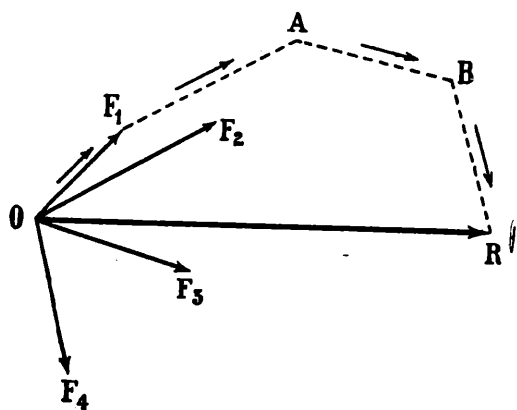
El reposo del punto O significa que cada una de las fuerzas anula el efecto que determinarían las otras dos fuerzas sobre él; cada una de las fuerzas equilibra, entonces, a las otras dos. Por lo tanto, si F_2 equilibra al sistema formado por F_1 y F_3 , eso quiere decir que el sistema F_1 y F_3 puede ser reemplazado por una sola fuerza R igual y opuesta a F_2 , y la experiencia muestra que la diagonal del paralelogramo construido sobre F_1 y F_3 es, justamente, igual y opuesta a F_2 . De una manera general, la diagonal construída sobre dos cualesquiera de las fuerzas es igual y opuesta a la tercera fuerza. Para comprobarlo basta dibujar en escala las fuerzas, poniendo un cartón paralelamente y muy próximo a los hilos y trazando con un lápiz las direcciones.

Así, por ejemplo, si $F_1 = 40$ gr, $F_2 = 50$ gr y $F_3 = 30$ gr se obtiene que, cuando el punto O está en reposo, F_1 y F_3 forman un ángulo de 90° , de suerte que la diagonal del paralelogramo construído sobre ellas es, por el teorema de Pitágoras, $\sqrt{30^2 + 40^2} = 50$, lo que comprueba la regla establecida.

Si se modifican los pesos, ocurre que el punto toma, naturalmente, otra posición de reposo a fin de que la regla del paralelogramo se satisfaga.

Esta regla es un caso particular de un principio muy general que se conoce con el nombre de principio de superposición. Su validez significa, como veremos detenidamente más adelante, que cada fuerza actúa en presencia de otras fuerzas como si estuviese sola.

7. Equilibrio de fuerzas en un punto. — Si se trata de un número cualquiera de fuerzas concurrentes, F_1, F_2, F_3, \dots , situadas en el mismo plano o en planos diferentes, es evidente que la resultante se determinará hallando la resultante entre dos fuerzas y luego entre esta resultante parcial y una tercera fuerza y así siguiendo. Si las fuerzas no están en el mismo plano sino dirigidas arbitrariamente, a partir



del punto, es evidente que la construcción es aplicable pues cada composición parcial se verifica en el plano de las componentes.

El resultado se obtiene fácilmente teniendo presente que se trata de una suma de vectores, como sigue: sean, repitiendo en parte lo que ya hemos hecho en otra ocasión, cuatro fuerzas aplicadas a un punto O (fig. 26). Partiendo de éste, nos movemos sobre la primera fuerza, y al llegar a su extremo sobre una recta paralela a la segunda fuerza hasta recorrer un segmento de su misma longitud; se hace lo mismo partiendo del extremo de esta última recta y así siguiendo hasta recorrer el segmento paralelo a la última fuerza. La recta R , que une a O con el último punto alcanzado, da la magnitud y dirección de la resultante, esto es, una fuerza tal que aplicada en sentido contrario mantendría al punto O en reposo.

La construcción puede hacerse partiendo de un punto A cualquiera (fig. 27). A fin de que esto se comprenda claramente, consideremos el mismo caso de las cuatro fuerzas anteriores. Partiendo de un punto A cualquiera, recorreremos segmentos paralelos e iguales a las fuerzas dadas; la recta

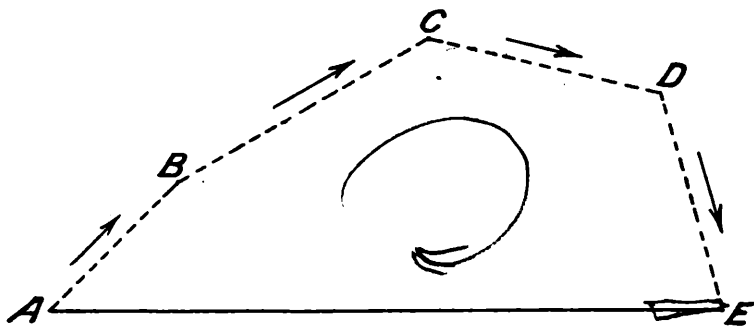


Fig. 27.

EA que cierra el polígono da la magnitud y dirección de la resultante y su sentido es opuesto al de la circulación sobre ella para llegar al punto A .

Si el polígono resulta cerrado, eso significa que el sistema está en equilibrio, pues su resultante es nula.

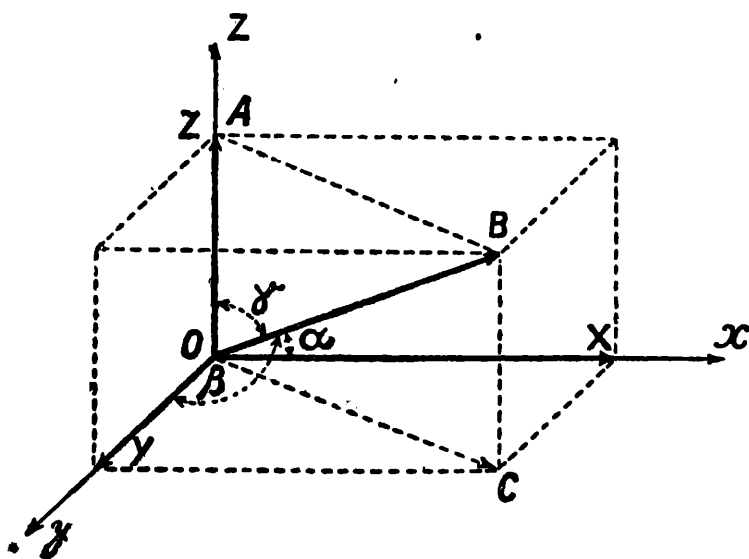


Fig. 28.

8. Descomposición de una fuerza.

— De lo que antecede resulta, como ya vimos, la regla para descomponer una fuerza en dos componentes según direcciones cualesquiera; basta para ello

trazar paralelas a las direcciones dadas desde el extremo de la fuerza. Así, por ejemplo (fig. 13), las componentes de la fuerza F según las direcciones Ox ; Oy son las indicadas con las letras X e Y .

Si las direcciones dadas fuesen ortogonales se tendrían las relaciones ya establecidas:

$$X = F \cos \alpha \quad [1]$$

$$Y = F \operatorname{sen} \alpha$$

$$F^2 = X^2 + Y^2. \quad [2]$$

De idéntica manera, una fuerza F aplicada a un punto O (fig. 28) puede descomponerse en tres fuerzas X , Y , Z , según ejes ortogonales x , y , z que pasan por O , pues primeramente puede descomponerse en el plano que forma con el eje de las z , por ejemplo, en las componentes Z y OC . Esta última, situada en el plano xy , se descompone finalmente en las componentes X e Y .

Valen las relaciones:

$$F^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \quad [3]$$

$$X = F \cos \alpha, \quad Y = F \cos \beta, \quad Z = F \cos \gamma, \quad [4]$$

si α , β , γ son los ángulos que forma la fuerza F con cada uno de los ejes.

B. — SUPERPOSICIÓN DE FUERZAS APLICADAS EN DIFERENTES PUNTOS DE UN CUERPO RÍGIDO Y EN EL MISMO PLANO

9. Fuerzas sobre la misma recta. Fuerzas concurrentes. — Un cuerpo rígido estaría constituido por una substancia ideal que formase

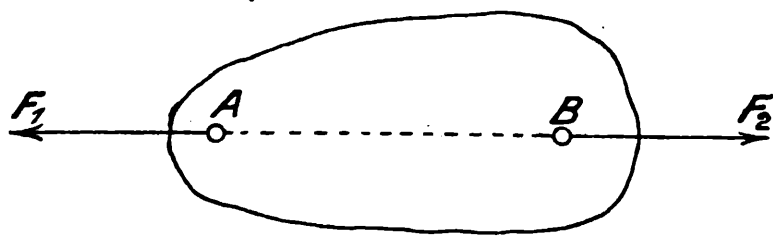


Fig. 29.

una figura sólida y no admitiese ninguna deformación.

Los llamados cuerpos sólidos cumplen aproximadamente esas condiciones, pues aun cuando, como hemos

visto, sufren deformaciones, ellas son muy pequeñas con respecto a las fuerzas que las producen.

Para la investigación del equilibrio de las fuerzas, conviene prescindir de esas deformaciones y suponer rígido al cuerpo, esto es, indeformable.

La experiencia enseña que dos fuerzas, F_1 y F_2 , iguales y opuestas sobre la misma recta (fig. 29), aplicadas en puntos A y B diferentes del mismo cuerpo, se equilibran. De este hecho resulta que como

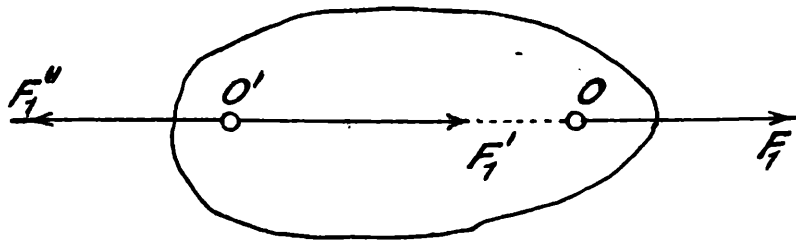


Fig. 30.

punto de aplicación de una fuerza F_1 (fig. 30), que actúa sobre un cuerpo rígido, puede ser considerado cualquiera de los puntos del mismo situados sobre la recta en que se encuentra la fuerza. En efecto, supongamos aplicadas en O' dos fuerzas F_1' , F_1'' , opuestas entre sí e iguales a F_1 . Las condiciones del sistema no se modifican puesto que las fuerzas agregadas se anulan. Pero podemos considerar las cosas de otro modo. Por lo anterior, las fuerzas F_1 y F_1'' se equilibran y el sistema de fuerzas puede ser substituído por la fuerza $F_1' = F_1$ aplicada en O' , lo que significa, precisamente, trasladar a F_1 de O a O' .

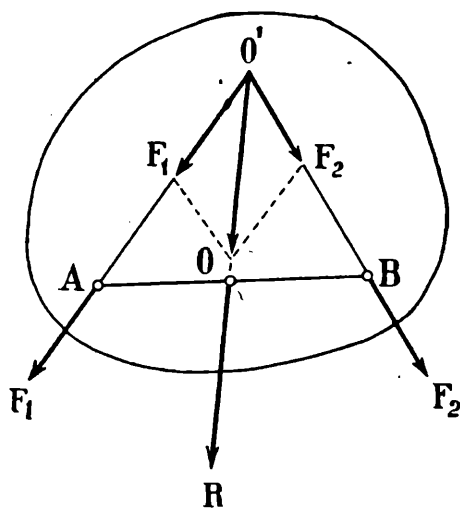


Fig. 31.

Resulta también, en seguida, que dos fuerzas cualesquiera, F_1 y F_2 (fig. 31), aplicadas en dos puntos diferentes A y B del mismo plano de un cuerpo rígido, se componen según la regla del paralelogramo, pues basta para ello trasladar sus puntos de aplicación al punto O' , intersección de las rectas que las contienen.

Encontrada la resultante R , puede transportarse su punto de aplicación al punto O , situado sobre la recta AB . La construcción puede emplearse, como es evidente, también en el caso en que el punto O' cae fuera del cuerpo.

10. Fuerzas paralelas del mismo sentido. — La construcción que se ha indicado no se puede aplicar directamente al caso en que las fuerzas son paralelas. La solución resulta fácilmente de los principios conocidos. Sean F_1 y F_2 (fig. 32) las fuerzas paralelas aplicadas en A y B . Las condiciones del sistema no se modifican si agre-

gamos dos fuerzas F iguales y opuestas sobre la recta AB , una en A y otra en B .

El sistema de fuerzas F_1 y F_2 es equivalente, por lo tanto, al sistema de fuerzas Q_1 y Q_2 , si Q_1 es la resultante de F_1 , F y Q_2 la de F_2 y F . Trasladando los puntos de aplicación de Q_1 y Q_2 al punto C

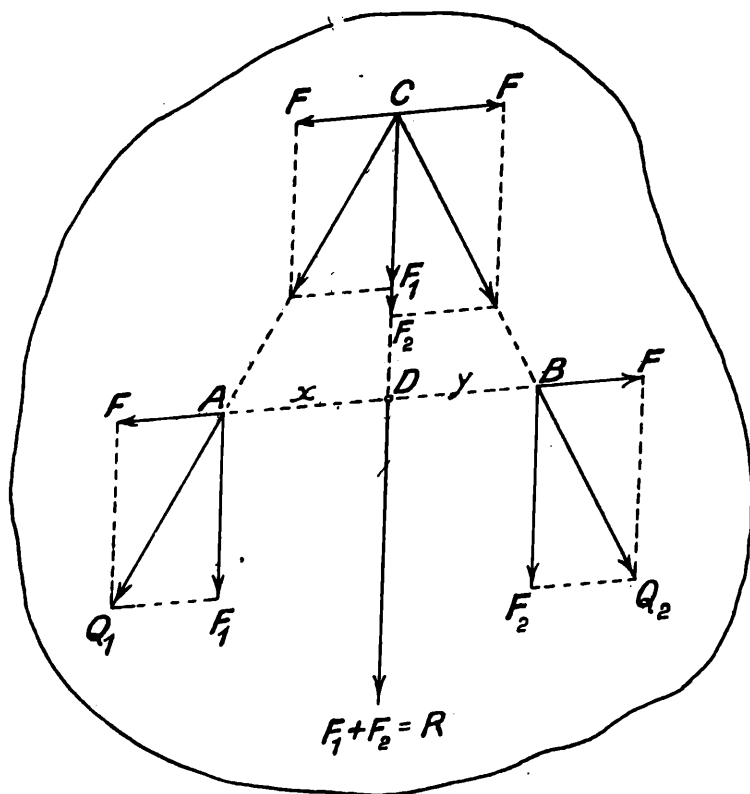


Fig. 32.

y descomponiéndolas en él en sus componentes, según direcciones paralelas a las primitivas, se obtienen dos fuerzas iguales a las F , que se anulan por opuestas, y dos fuerzas superpuestas del mismo sentido, iguales, respectivamente, a F_1 y F_2 y cuya suma $R = F_1 + F_2$ da la resultante buscada. Se puede trasladar el punto de aplicación de esa resultante al punto D situado sobre la recta AB .

La posición de D sobre ella resulta de la semejanza de triángulos como sigue:

$$\frac{x}{F} = \frac{CD}{F_1} \quad ; \quad \frac{y}{F} = \frac{CD}{F_2} \quad [5]$$

de donde

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{y}{x} \quad [6]$$

Esto es: *La resultante de dos fuerzas paralelas del mismo sentido es paralela a ellas e igual a su suma; su punto de aplicación divide la línea de unión de sus puntos de aplicación en partes inversamente proporcionales a las mismas.*

La comprobación experimental de esta regla se obtiene con una instalación como la representada por la figura 33. Una barra rígida AB está suspendida de dos hilos, cada uno de los cuales pasa por la garganta de una polea y termina en un platillo donde se colocan pesos para equilibrar el peso de la barra.

Si se suspende en un punto O de ésta un peso R , es necesario, para mantener el equilibrio, agregar pesos F_1 y F_2 tales que sea

$$F_1 + F_2 = R \quad \text{y} \quad F_1 x = F_2 y .$$

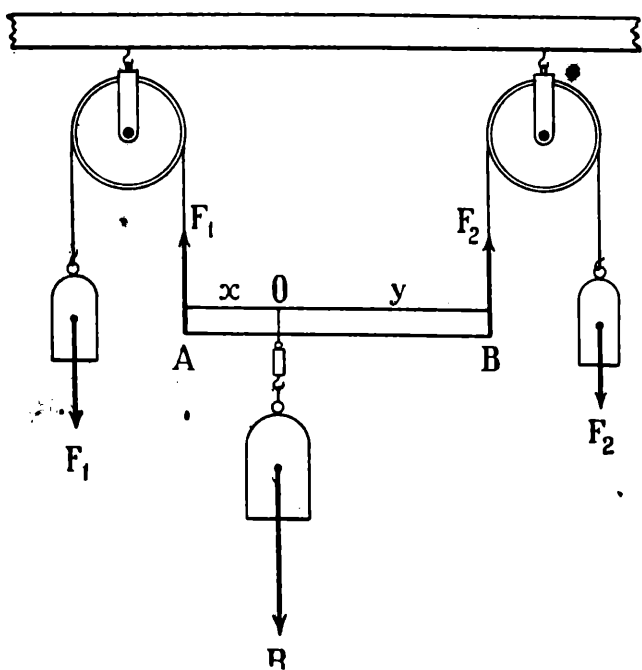


Fig. 33.

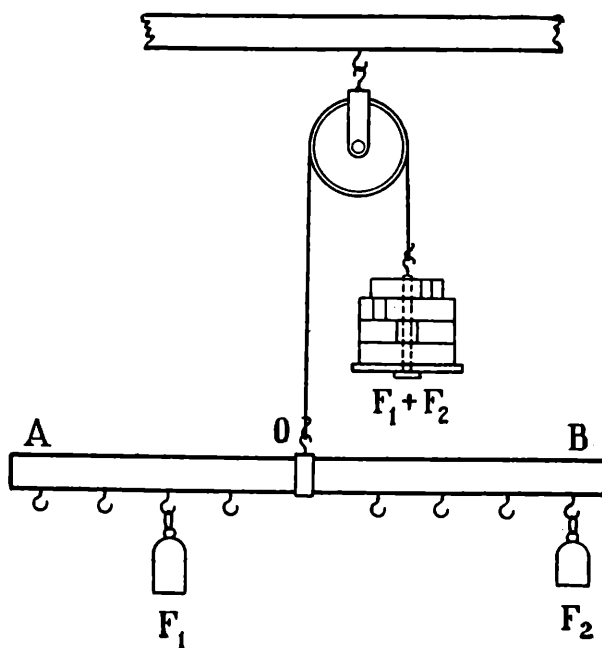


Fig. 34.

La misma cosa ocurre en la instalación de la fig. 34; la barra rígida AB , que lleva los pesos F_1 y F_2 , es mantenida en equilibrio por una fuerza opuesta igual a la suma de ellas y aplicada en un punto O tal que sus distancias a los puntos de aplicación de aquellas están en razón inversa de las fuerzas.

11. **La palanca.** — Si el punto O de las instalaciones anteriores estuviese fijo, como ocurre en el caso de una barra rígida girable al rededor de un eje fijo (fig. 35), es claro que éste soportaría una fuerza igual a la resultante de las dos fuerzas y los productos de éstas por sus distancias respectivas al eje serían iguales. Una barra rígida girable al rededor de un punto recibe el nombre de *palanca*; el punto O se llama punto de apoyo. Se tiene

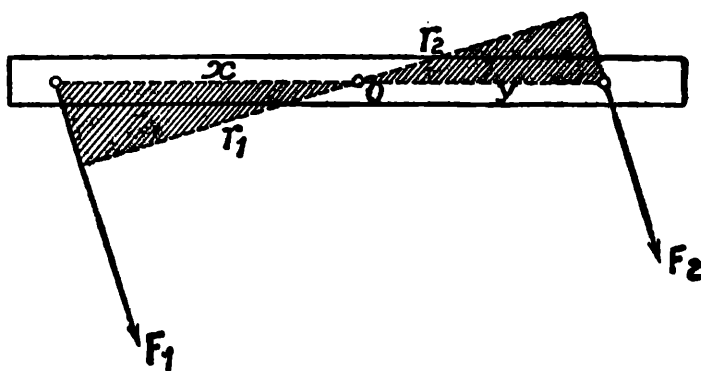


Fig. 35.

$$F_1 x = F_2 y$$

[6']

y por la semejanza de los triángulos sombreados

$$\frac{x}{y} = \frac{r_1}{r_2}, \quad [7]$$

si r_1 y r_2 son las distancias del punto O a las rectas que contienen a las fuerzas. Es entonces

$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2, \quad [8]$$

es decir, que los productos de las fuerzas por sus respectivas distancias al punto de apoyo son iguales. Este resultado permite, como se verá, formular la ley de equilibrio de la palanca de una manera más general.

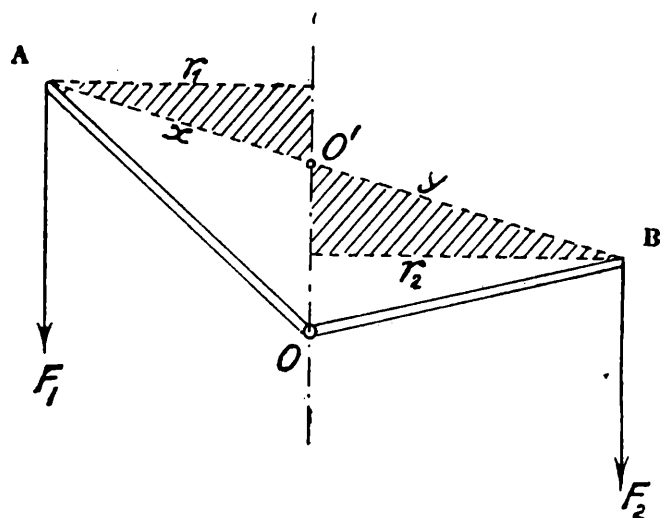


Fig. 36.

Supongamos ahora que se tiene una palanca como la indicada en la figura 36. Se trata de una barra arqueada capaz de girar

en torno de un eje fijo que pasa por O . Además de las fuerzas F_1 y F_2 solo existe la fuerza proveniente de la reacción que ellas determinan en O . Si la resultante de aquellas no pasase por este punto la reacción no podría equilibrarlas jamás pues debe ser igual y opuesta sobre la misma recta. En el estado de equilibrio la resultante de F_1 y F_2 , que es paralela a las mismas e igual a su suma, pasa, pues, por el punto fijo O . La reacción del eje es igual y de sentido opuesto a esa resultante. Además, si el sistema está en equilibrio, aquella resultante debe pasar por un punto O' de la recta AB tal que sea

$$F_1 x = F_2 y; \quad [6]$$

y de la semejanza de los triángulos sombreados resulta, como antes, que

$$F_1 r_1 = F_2 r_2. \quad [8']$$

La fuerza que desempeña el papel activo se designa con el nombre de *potencia* y la que desempeña el papel pasivo se llama la *resistencia*. Se designa con el nombre de *brazos* de la palanca a las distancias r_1 y r_2 del punto de apoyo a las fuerzas.

Entonces, cuando la palanca está en equilibrio, el producto de la potencia por su brazo es igual al producto de la resistencia por el suyo.

Se ha considerado el caso de fuerzas paralelas; hallaremos ahora la ley de equilibrio de la palanca para fuerzas cualesquiera.

Actúen (fig. 37) en los puntos A y B de una barra rígida uno de cuyos puntos, el O , es fijo, dos fuerzas cualesquiera Q_1 y Q_2 . Cada una de ellas puede descomponerse en sus componentes según la dirección de la barra y según la dirección normal a la misma; las componentes de Q_1 son f_1 y F_1 ; las de Q_2 , f_2 y F_2 . Como la barra es rígida y el punto O es fijo, las fuerzas f_1 y f_2 no tienen ninguna influencia sobre el equilibrio, el cual depende entonces, exclusivamente, de las fuerzas paralelas F_1 y F_2 , que satisfacen la relación

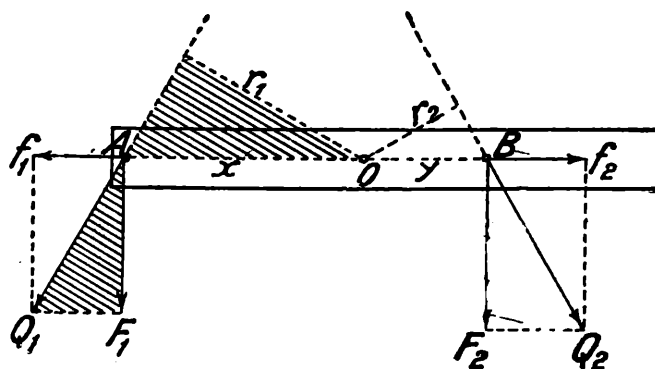


Fig. 37.

$$F_1 x = F_2 y . \quad [9]$$

Si se trazan desde O las perpendiculares r_1 y r_2 a las rectas que contienen las fuerzas, se obtiene, en virtud de la semejanza de los triángulos sombreados, la relación

$$F_1 x = Q_1 r_1 \quad [10]$$

y por idéntico motivo

$$F_2 y = Q_2 r_2 , \quad [11]$$

y por lo tanto

$$Q_1 r_1 = Q_2 r_2 . \quad [12]$$

El punto O , que es fijo, equilibra la tracción $f_2 - f_1$ en la dirección AB mediante una reacción igual y de sentido contrario y la tracción proveniente de las fuerzas F_1 y F_2 con una reacción igual y opuesta a la resultante de éstas que es paralela a las mismas e igual a su suma. Está claro que la reacción total resultante es igual y opuesta a la resultante de Q_1 y Q_2 que debe pasar, como es evidente, por O si el sistema se encuentra en equilibrio, por las razones que dimos más

arriba. En la figura 37 a se ha representado la reacción $-(F_1 + F_2)$ que corresponde a las fuerzas F_1 y F_2 , que son las únicas que podrían influir en el movimiento de rotación en torno de O , dibujando en líneas de puntos separadas, por razones didácticas, a F_1 y F_2 .

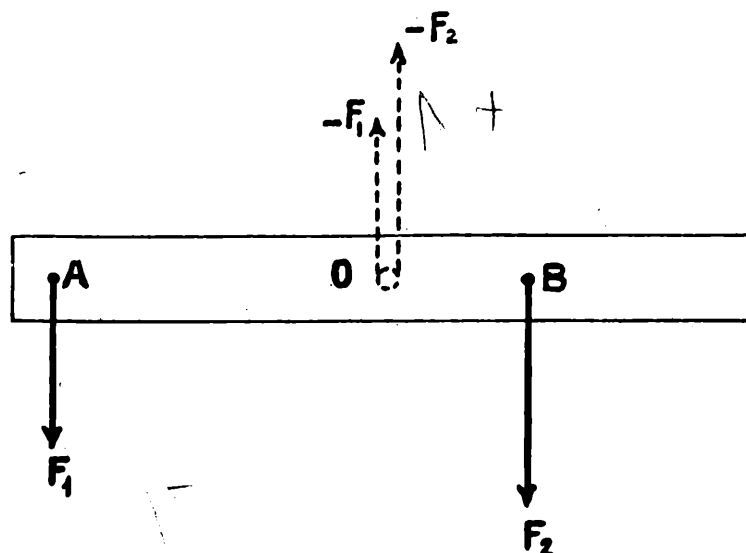


Fig. 37 a.

12. Momento de una fuerza. La ley de equilibrio de la palanca. — Se llama momento de una fuerza F , con respecto a un punto O , al producto de su módulo por su distancia r al punto (fig. 38). Su valor es numéricamente igual al doble del área del triángulo sombreado

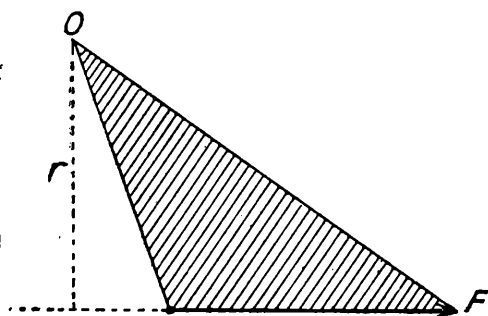


Fig. 38.

cuyo vértice está en el punto y cuyo lado opuesto es la fuerza.

En el caso de la palanca, las fuerzas, o mejor dicho los momentos, tienden a hacer girar al cuerpo al rededor del punto O en sentido opuesto; se dice por ello que tienen signo diferente.

Diremos entonces que la palanca está en equilibrio si los momentos de las dos fuerzas con respecto al punto de apoyo son iguales y de sentido contrario, o, lo que es lo mismo, si la suma es cero. Este principio se puede generalizar, sin dificultad, al caso de más de dos fuerzas. Esto se verá en el párrafo 17 por un método muy general.

Ese ejemplo hace notoria la conveniencia de fijar un sentido a los momentos. Eligiremos como momento positivo al sentido de giración contrario al de las agujas de un reloj; sería negativo un momento cuyo sentido de giración fuera el mismo de las agujas.

13. **Centro de un sistema de fuerzas paralelas.** — El punto de aplicación de la resultante de un sistema de fuerzas paralelas se designa con el nombre de centro o punto medio de las mismas.

En el caso de dos fuerzas, ese punto se encuentra según el procedimiento del párrafo anterior; y si se trata de muchas fuerzas, por aplicación sucesiva del mismo procedimiento.

Nos proponemos ahora, utilizando coordenadas cartesianas, encontrar relaciones que permitan calcular las coordenadas del centro de las fuerzas en función de las magnitudes dadas, que son las fuerzas y las coordenadas de sus puntos de aplicación.

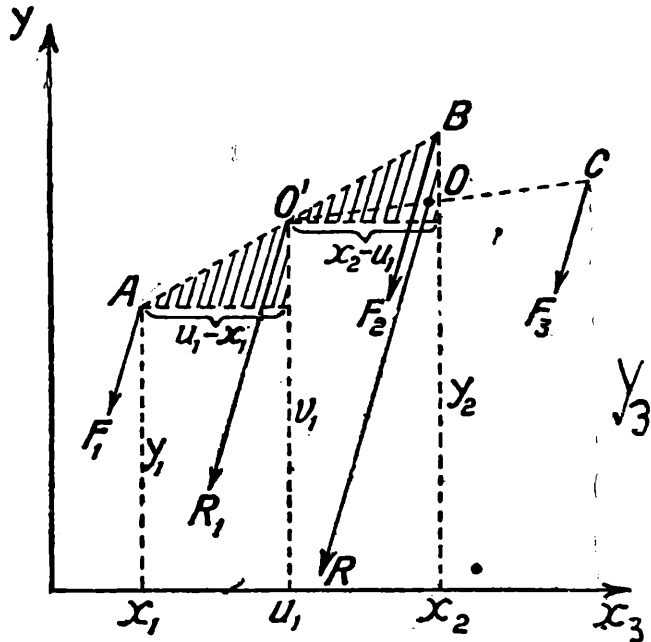


Fig. 39.

Consideremos el caso de tres fuerzas, F_1 , F_2 y F_3 , que obran en el mismo plano (fig. 39), y sean x_1 y_1 , x_2 y_2 y x_3 y_3 sus coordenadas. Indicando con u_1 y v_1 las coordenadas del centro O' de las fuerzas F_1 y F_2 , debe ser $F_1 \cdot AO' = F_2 \cdot O'B$, en virtud de las reglas antes establecidas. Por la semejanza de los triángulos sombreados se tiene:

$$F_1 (u_1 - x_1) = F_2 (x_2 - u_1) \quad [13]$$

de donde

$$u_1 = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F_1 + F_2} \quad [14]$$

De la misma manera, resulta para la otra coordenada

$$v_1 = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2}{F_1 + F_2} \quad [15]$$

Para hallar el centro de la resultante R_1 y de la tercera fuerza F_3 basta aplicar las fórmulas encontradas. Indicando con u y v las coordenadas del punto O buscado, se tiene, como es notorio:

$$u = \frac{(F_1 + F_2) u_1 + F_3 x_3}{F_1 + F_2 + F_3} \quad [16]$$

$$v = \frac{(F_1 + F_2) v_1 + F_3 y_3}{F_1 + F_2 + F_3}, \quad [17]$$

puesto que es $R_1 = F_1 + F_2$, y las coordenadas de su punto de aplicación son u_1 y v_1 . Reemplazando u_1 y v_1 por sus valores resulta, finalmente,

$$u = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{\Sigma F x}{\Sigma F}$$

$$v = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{\Sigma F y}{\Sigma F},$$

[18]

ecuaciones que se pueden generalizar sin ninguna dificultad al caso de un número n arbitrario de fuerzas paralelas aplicadas en puntos *cualesquiera* del cuerpo.

En efecto, es evidente que el centro de un sistema de fuerzas paralelas no depende de la dirección de las fuerzas; en el caso antes tratado *el centro sería el mismo si en lugar de estar las fuerzas en el plano xy fuesen todas perpendiculares al mismo plano.*

Podemos, por lo tanto, girar las fuerzas paralelas, aplicadas en los n puntos del cuerpo, hasta que todas sean paralelas a uno de los ejes, al de las z por ejemplo; alcanzada esta posición se pueden mover sus puntos de aplicación sobre las rectas que las contienen hasta el plano xy , pues así no se modifican las coordenadas del mismo nombre de ninguno de los puntos de aplicación.

Es claro entonces que las coordenadas u, v del centro de las fuerzas están dadas por relaciones idénticas a las de antes y lo mismo puede probarse para la w .

Si se indican con u, v, w las coordenadas del punto medio, referido a un sistema de coordenadas rectangulares en el espacio, se tendría:

$$u = \frac{\sum_1^n F x}{\sum_1^n F} \quad ; \quad v = \frac{\sum_1^n F y}{\sum_1^n F} \quad ; \quad w = \frac{\sum_1^n F z}{\sum_1^n F} .$$

[19]

Si el origen de coordenadas coincidiese con el centro de las fuerzas paralelas, se tendría: $u = v = w = 0$ y, por lo tanto,

$$\sum_1^n F x = 0 \quad ; \quad \sum_1^n F y = 0 \quad ; \quad \sum_1^n F z = 0 .$$

14. Fuerzas antiparalelas. Par de fuerzas. — El principio de construcción del párrafo 10 es aplicable también al caso en que las

fuerzas paralelas son de diferente sentido, lo que significa que vale también el teorema de los momentos.

El centro de dos fuerzas como las F_1 y F_2 (fig. 40) estará en un punto O tal que sea

$$F_1 \cdot OA = F_2 \cdot OB, \quad [20]$$

y la magnitud de la resultante será:

$$R = F_2 - F_1. \quad [21]$$

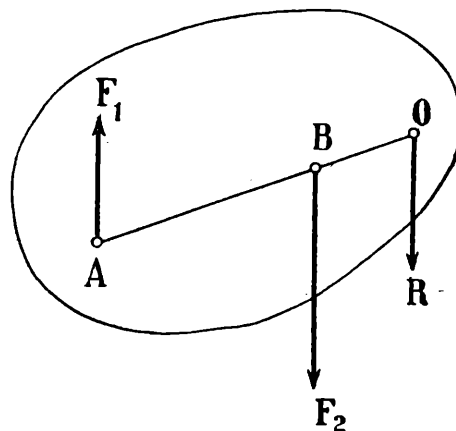


Fig. 40.

El método falla cuando las fuerzas antiparalelas son iguales, sistema que se denomina *cupla* o *par de fuerzas*.

Por ningún procedimiento se puede encontrar una fuerza que le sea equivalente; el sistema forma por sí un sistema particular irreductible.

Es evidente que no existe en este caso ningún punto del plano con respecto al cual los momentos de las dos fuerzas sean iguales y de sentido contrario. Cualquiera sea el punto elegido, la suma de los momentos no se anula; es decir, que un cuerpo rígido, cualquiera sea

el punto que se le fije, bajo la acción de una cupla no estará jamás en equilibrio. Lo que hace notorio que el par de fuerzas es un sistema simple.

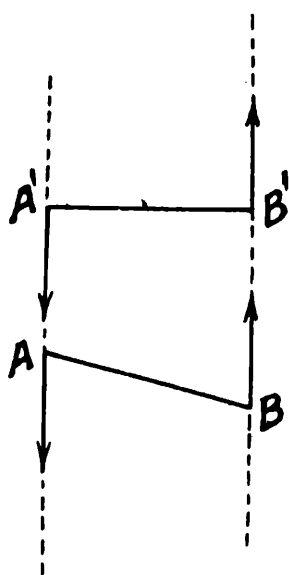


Fig. 41.

En el caso de la palanca, párrafo 11, las fuerzas F_1 y F_2 , fig. 37 a, que son las únicas que pueden influir en el movimiento de rotación, forman con sus reacciones $-F_1$ y $-F_2$, dos pares de fuerzas.

Esto no es sino la manifestación de un hecho general: de que en los problemas del equilibrio, considerando las reacciones, lo que es indispensable en el estudio de los casos prácticos, aparecen los pares de fuerza. Y en la dinámica el papel de los mismos es fundamental, como que,

según veremos, una fuerza equivale a una fuerza y a un par. /

✓ 15. Propiedades y superposición de los pares de fuerza. Momento de un par. — A. UN PAR PUEDE SER TRASLADADO O GIRADO

EN SU PLANO. — En efecto, lo primero resulta del hecho de que una fuerza puede ser trasladada a cualquier punto de la recta que la contiene. Basta considerar, además, únicamente el caso en que las fuer-

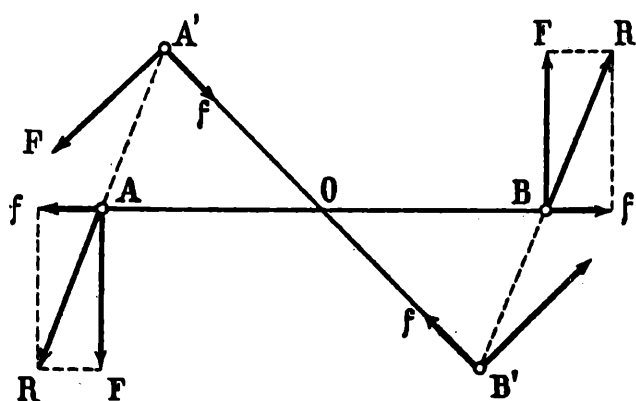


Fig. 42.

zas son normales a la recta que une a los puntos de aplicación, pues si esto no sucede, trasladamos (figura 41) los puntos de aplicación a puntos A' y B' tales que eso tenga lugar.

Para hacer girar la cupla F, AB (fig. 42), hasta la posición $A'B'$, al rededor del punto medio, es suficiente

agregar sobre AB dos fuerzas iguales y opuestas, una en A y otra en B , y tales que la resultante R con la respectiva fuerza pase por A' o B' , lo cual es posible con dos fuerzas f iguales, por simetría. Luego se transportan las R a A' y B' , donde se descomponen nuevamente en sus componentes F y f . Así se obtiene la cupla en la posición pedida.

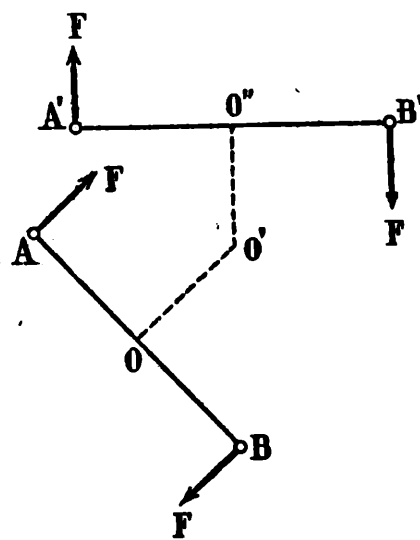


Fig. 43.

Para pasar de una posición F, AB a otra cualquiera $F, A'B'$ del mismo plano (fig. 43), bastan las siguientes operaciones: se traslada primeramente la cupla paralelamente a sí misma hasta que el punto medio O esté en el punto O' , intersección de las normales trazadas en los puntos medios de AB y $A'B'$; se gira allí al rededor de su punto medio, hasta que sea paralela a la posición final y luego se traslada paralelamente.

Se ve así que una cupla puede trasladarse a cualquier posición de su plano.

Consideremos (fig. 44) un cuerpo rígido sometido a la acción de una cupla. Puesto que ésta puede trasladarse paralelamente a sí misma y girar en su plano, siempre será posible orientarla de tal manera que la recta AB pase por un punto cualquiera O del cuerpo, situado en su plano, elegido previamente; en unos casos, el punto quedará entre A y B , en otros casos, fuera.

Si imaginamos fijo al punto arbitrario O , la cupla hará girar el cuerpo al rededor de él, pues, si está entre A y B , los dos momentos tienen el mismo signo y su suma es igual a $F \cdot AB$; si el punto está fuera, los momentos tienen signos diferentes y su diferencia da también el valor $F \cdot AB$. Por esta razón se da el nombre de *momento* de una cupla, al producto de una de las fuerzas por la distancia entre ellas que se denomina *brazo de la cupla*.

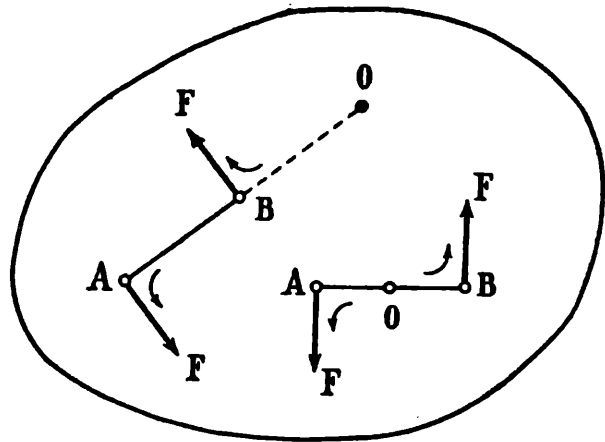


Fig. 44.

B. DOS PARES SITUADOS EN EL MISMO PLANO SON EQUIVALENTES, SI LOS MOMENTOS SON IGUALES Y DEL MISMO SIGNO. — Debemos demostrar que cuplas cuyas fuerzas están aplicadas en puntos diferentes $A' A$, y B, B' (fig. 45), son equivalentes, si sus momentos son iguales.

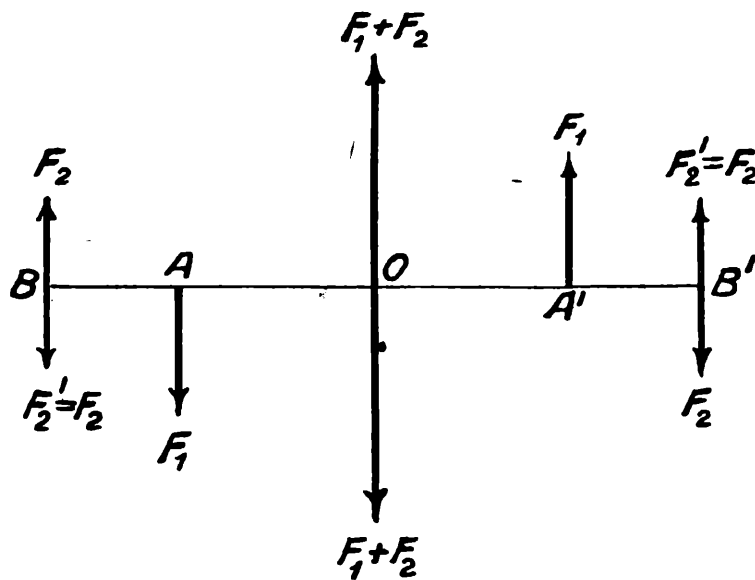


Fig. 45.

Sea $F_1 \cdot AA'$ la cupla dada y B, B' dos puntos colocados simétricamente con respecto a A y A' y supongamos aplicadas en cada uno de ellos dos fuerzas, F_2 y F_2' , iguales y opuestas entre sí, paralelas a F_1 y tales que se cumpla la relación

$$F_1 \cdot AA' = F_2 \cdot BB'. \quad [22]$$

El sistema no se ha modificado por el agregado de fuerzas que se anulan entre sí, pero se le puede considerar ahora de otra manera,

pues hallando las resultantes de las F_1 y F_2 , que van hacia arriba, y de las que van hacia abajo se obtienen dos resultantes iguales a $F_1 + F_2$ y opuestas aplicadas en el punto medio O de AA' y BB' , pues ese punto cumple la condición

$$F_1 \cdot OA' = F_2 \cdot OB, \quad [23]$$

en virtud de la relación [22], puesto que es

$$OA' = \frac{AA'}{2} \quad \text{y} \quad OB = \frac{BB'}{2}.$$

Queda, por lo tanto, únicamente la cupla de las fuerzas $F_2' = F_2$.

La elección de los puntos B y B' simétricos con respecto a los A no limita la validez de la prueba, pues se ha visto que una cupla puede ser trasladada en su plano.

Se tiene ahora la posibilidad de reducir pares de fuerzas situados en el mismo plano, a pares del mismo brazo, lo que nos permite superponerlos.

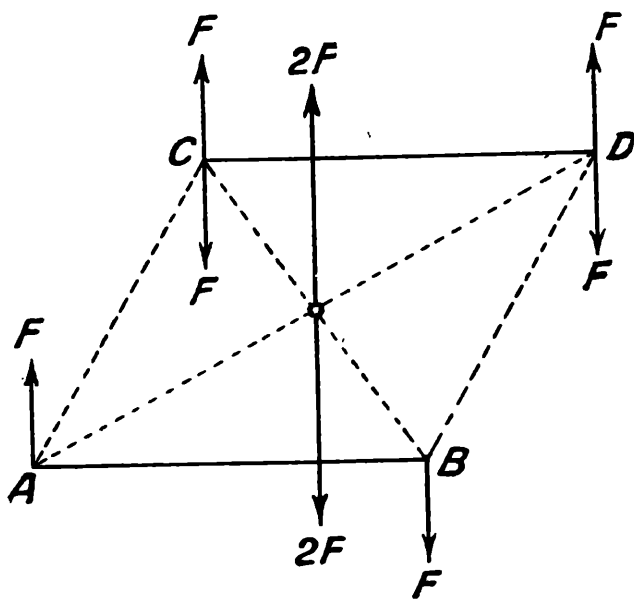


Fig. 46.

† C. UN PAR PUEDE SER TRASLADADO A OTRO PLANO

PARALELO SIN QUE SU EFECTO SE MODIFIQUE. — Trátese, por ejemplo, de trasladar la cupla de momento $F \cdot AB$ (fig. 46) a un plano paralelo a las fuerzas F y que pasa por la recta $CD = AB$.

Para eso agregamos en cada uno de los puntos C y D dos fuerzas paralelas e iguales a F y opuestas entre sí, con lo que el sistema no se modifica. Si se componen las fuerzas F aplicadas en A y D que están dirigidas hacia arriba y las aplicadas en B y C dirigidas hacia abajo, se obtienen dos fuerzas aplicadas en la intersección de CB y AD , opuestas e iguales, de valor $2F$ que, por lo tanto, se anulan. Queda solamente una fuerza F en D , dirigida hacia abajo, y una fuerza F en C dirigida hacia arriba, con lo que el traslado queda hecho, sin variar las condiciones del sistema.

D. COMPOSICIÓN DE PARES. — De lo que antecede resulta que un número cualquiera de cuplas situadas en planos paralelos son equivalentes a una cupla

cuyo momento sea la suma algebraica de sus momentos, pues pueden reducirse todas al mismo brazo y luego ser movidas paralelamente a sí mismas hasta que estén en un mismo plano y en éste

desplazarse a voluntad hasta que los brazos y las fuerzas se superpongan. En la figura 47 se han compuesto dos cuplas situadas en el mismo plano.

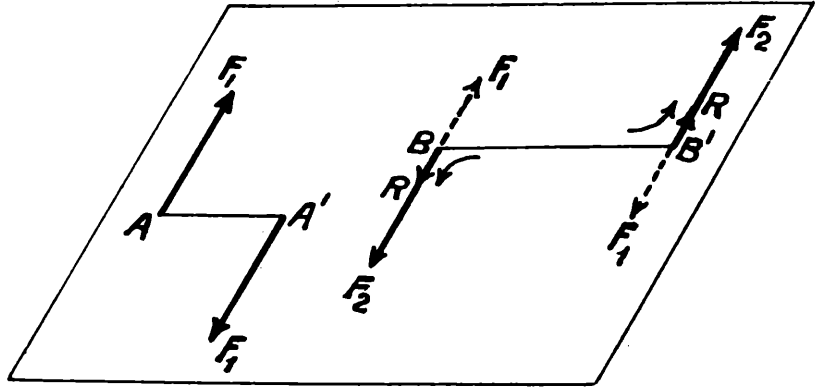


Fig. 47. — Las cuplas $F_1.AA'$; $F_2.BB'$ dan como resultante la cupla $R.BB'$.

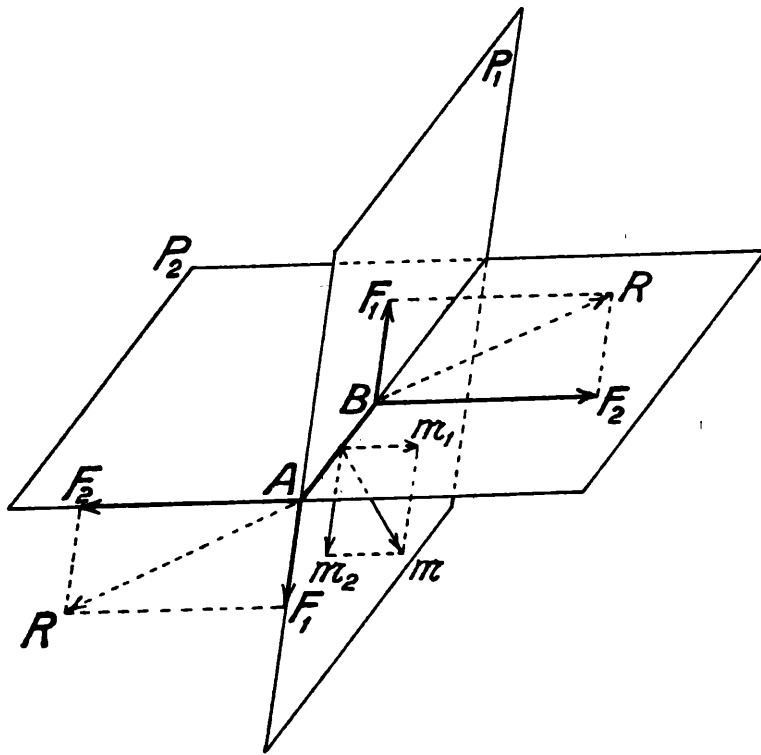


Fig. 48.

Si las cuplas no se encuentran en planos paralelos, se reducen como antes al mismo brazo y se giran y mueven paralelamente a sí mismas hasta que los brazos coincidan con la intersección de aquéllos y por fin se componen las fuerzas por la regla de paralelogramo. En la figura 48 se han compuesto las cuplas $F_1.AB$ y $F_2.AB$, que se encuentran en los planos P_1 y P_2 . La cupla resultante es de momento $R.AB$, siendo R la diagonal del paralelogramo construido sobre F_1 y F_2 .

La descomposición de una cupla en componentes resulta de estas mismas consideraciones.

16. **Representación de una cupla por un vector.** — Todas las operaciones realizadas con las cuplas se simplifican grandemente representando las cuplas por un segmento de recta, perpendicular al plano

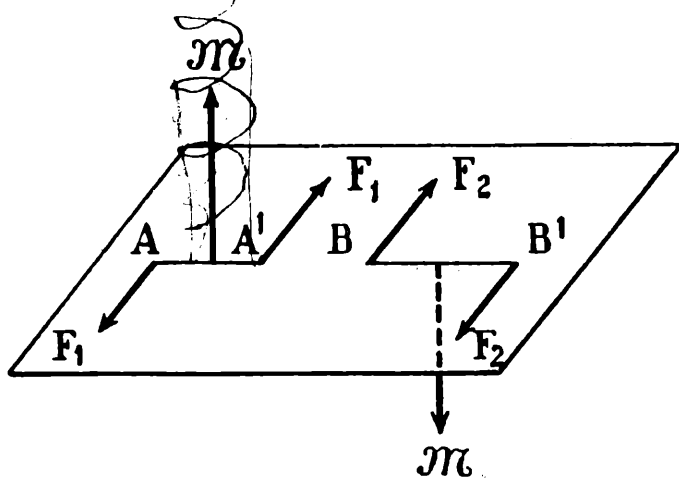


Fig. 49.

de la cupla (fig. 49) en el punto medio del brazo, y cuya magnitud y sentido representan la magnitud y sentido de la cupla. El vector así construido se llama *vector momento* de la cupla que representaremos con la letra \mathcal{M} .

El vector se traza del lado del plano desde el

cual se ve la cupla con un sentido de giración opuesto al de las agujas de un reloj, es decir, *en el sentido en que progresaría un tirabuzón que girase en el sentido de la cupla*. Su longitud es, en una escala elegida, igual al valor del momento

Las propiedades de las cuplas se enuncian mediante el vector momento de esta manera:

- a) El vector momento puede trasladarse paralelamente a sí mismo en forma cualquiera;
- b) Los vectores momentos se componen y descomponen según la regla del paralelogramo.

En la composición de cuplas en diferente plano (fig. ~~48~~ ⁴⁸) se ha operado al mismo tiempo con los vectores momentos \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 . El vector momento resultante es el \mathcal{M} , diagonal del paralelogramo construido sobre \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 , y es normal a la cupla resultante $R \cdot AB$.

17. **Equilibrio de un sistema cualquiera de fuerzas. Principio general de la estática.** — Hasta ahora se han estudiado casos particulares de composición de fuerzas. El problema más general es el siguiente:

Substituir un número cualquiera de fuerzas distribuídas arbitrariamente sobre n puntos de un cuerpo rígido por el menor número posible fuerzas.

Mostremos, primeramente, cómo puede ser trasladada una fuerza paralelamente a sí misma a otro punto que no pertenezca a la recta que la contiene.

Sea (fig. 50) F una fuerza aplicada en un punto O de un cuerpo rígido. En otro punto O' del mismo se pueden suponer actuando dos fuerzas opuestas entre sí e iguales y paralelas a F , con lo cual el sistema no se modifica. Este puede considerarse, sin embargo, constituido por una fuerza F aplicada en O' igual, paralela y del mismo sentido que la dada y por la cupla $F \cdot OO'$, cuyo momento es el momento de la fuerza con respecto al punto O' .

Se puede, por lo tanto, substituir una fuerza por otra de la misma dirección y magnitud, aplicada a otro punto cualquiera, si se agrega una cupla cuyo momento sea igual al de la fuerza con respecto al nuevo punto de aplicación, esto es $F \cdot d$.

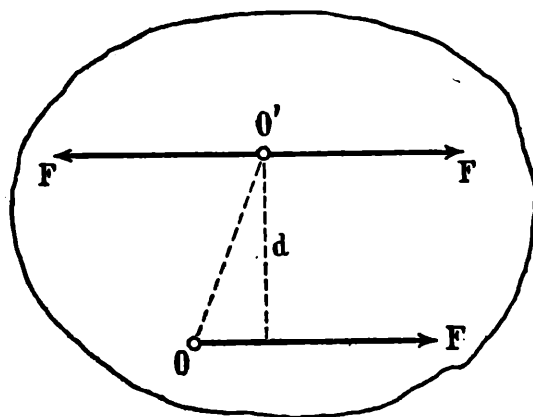


Fig. 50.

Si se tiene un número cualquiera de fuerzas coplanares, aplicadas a diferentes puntos del

mismo plano de un cuerpo rígido, se obtiene el sistema más simple como sigue: se trasladan todas paralelamente a sí mismas a un punto O cualquiera del mismo plano, agregando en cada caso el par pertinente. Se tiene así un sistema de fuerzas en O y un sistema de pares, cuyos momentos son iguales, respectivamente, a los momentos de cada fuerza con respecto a O .

Componiendo las fuerzas concurrentes en O se obtiene una fuerza y componiendo las cuplas se obtiene una cupla cuyo momento es igual a la suma de los momentos de las fuerzas dadas con respecto al punto O .

El sistema equivale entonces a una fuerza y a una cupla; estará en equilibrio si es cero tanto la fuerza resultante como el momento de la cupla. *Un sistema cualquiera de fuerzas coplanares está, pues, en equilibrio si se cumplen las siguientes condiciones:*

- 1ª *Que la resultante sea nula;*
- 2ª *Que la suma de los momentos, con respecto a un punto cualquiera del plano, sea cero.*

Si se tiene un sistema cualquiera de fuerzas, no ya coplanares, sino distribuidas arbitrariamente sobre n puntos de un cuerpo rígido, se trasladan todas paralelamente a sí mismas a un punto cualquiera O del cuerpo, agregando la correspondiente cupla. Se halla la

resultante de las fuerzas y de las cuplas por los métodos que conocemos.

El sistema queda así reducido a una fuerza única y a una cupla que estará, por lo general, en diferente plano.

En ese caso sucede también que las fuerzas estarán en equilibrio si tanto la resultante como la cupla se anulan.

Si el cuerpo no tiene ningún punto fijo, conviene elegir como punto O' a su centro de gravedad; se tendría como sistema resultante de las fuerzas dadas a una fuerza aplicada al centro de gravedad y que produciría un movimiento de *traslación* y una cupla que haría girar al cuerpo alrededor de un eje que pasa por ese punto.

Se comprende así el alcance de las proposiciones anteriores, sobre las que hemos de volver al estudiar el movimiento del cuerpo rígido.

18. Expresión analítica del momento de una fuerza o de un sistema de fuerzas con respecto a un punto. — En el párrafo 12 se ha definido como momento de una fuerza con respecto a un punto

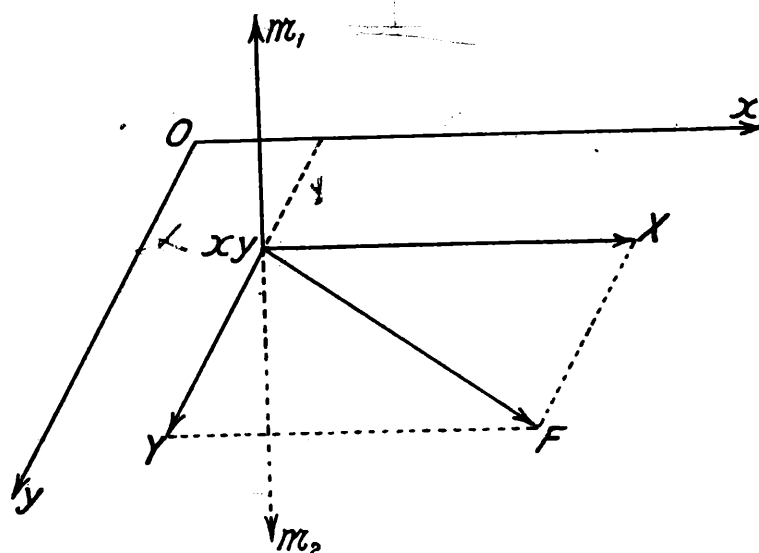


Fig. 51.

al producto de la intensidad de la fuerza por su distancia al punto. Ese producto se puede expresar de otra manera. Elijamos en el plano que determina la fuerza con el punto un sistema plano de coordenadas ortogonales, cuyo origen coincida con aquel, y sean x e y las coordenadas del punto de aplicación de la fuer-

za dada, la cual descomponemos (fig. 51) en sus componentes X e Y en dirección de los ejes. Puesto que los momentos se componen según las reglas que corresponden a los vectores, la suma geométrica de los momentos de las fuerzas X e Y con respecto al punto O da, evidentemente, el momento de F con respecto al mismo punto. El momento de X es Xy y es positivo, pues el sentido de giración que le corresponde es el contrario al de las agujas de un reloj y está representado por el vector $\mathcal{M}_1 = Xy$ normal al plano y dirigido hacia arriba, en virtud de la regla del tirabuzón. El momento de Y es Yx

y tiene signo negativo, estando representado por el vector \mathcal{M}_2 , también normal al plano xy . La suma geométrica es

$$\mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2 = Xy - Yx, \quad [24]$$

suma que da, como ya se dijo, el momento de la fuerza F con respecto al punto O .

Ese momento haría girar el plano, suponiendo que fuese un disco material y al punto O fijo, al rededor de éste, o, mejor dicho, al rededor de una recta perpendicular al plano xy pasante por O ; esa recta sería el eje de las z , completando nuestro sistema de coordenadas; el momento resultante $\mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2$ sería entonces el momento al rededor del eje de las z , momento que indicaremos con \mathcal{M}_z . Esta interpretación resulta claramente de la representación por el vector momento, cuya dirección es, en este caso, la de ese eje.

Si los ejes estuviesen orientados de una manera cualquiera y fuesen X , Y y Z las componentes de la fuerza en sus direcciones, y x , y y z las coordenadas del punto de aplicación, se obtiene, fácilmente, para los momentos \mathcal{M}_x , \mathcal{M}_y y \mathcal{M}_z al rededor de los ejes de coordenadas las expresiones

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_x &= Yz - Zy \\ \mathcal{M}_y &= Zx - Xz \\ \mathcal{M}_z &= Xy - Yx. \end{aligned} \quad [25]$$

El resultante de estos tres vectores momentos que tienen las direcciones de los ejes, es su suma geométrica. Ese vector resultante, que indicaremos con \mathcal{M} , es, evidentemente, el vector momento que corresponde al momento de la fuerza F con respecto al punto O , es decir, al producto de F por su distancia a O . Se tiene

$$\mathcal{M}^2 = \mathcal{M}_x^2 + \mathcal{M}_y^2 + \mathcal{M}_z^2. \quad [26]$$

Si se tratase no de una fuerza sino de un sistema de fuerzas distribuidas en diferentes puntos de un cuerpo, se tendría en las ecuaciones [25] una suma de términos semejantes a los de los segundos miembros.

C. — EL CENTRO DE GRAVEDAD

19. **Centro de gravedad.** — Se puede imaginar a todo cuerpo descompuesto en elementos muy pequeños de volumen, cada uno de los

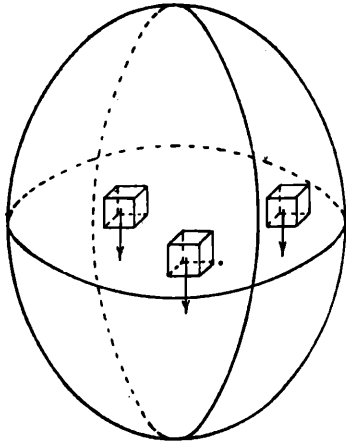


Fig. 52.

cuales (fig. 52) tendrá cierto peso. Es decir, que en cada uno de esos elementos está aplicada una fuerza medida por su peso y de dirección vertical. Ese sistema está constituido por fuerzas sensiblemente paralelas entre sí, si se tiene en cuenta la pequeñez de las dimensiones de los cuerpos comunes con respecto a la del radio de la tierra.

El centro de tal sistema de fuerzas se llama *centro de gravedad* del cuerpo. Si referimos éste a un sistema de coordenadas rectangulares en el espacio, las coordenadas de tal punto son, de acuerdo con lo visto en el caso de las fuerzas paralelas:

$$\xi = \frac{\sum px}{P} \quad , \quad \eta = \frac{\sum py}{P} \quad , \quad \zeta = \frac{\sum pz}{P} \quad , \quad [27]$$

si se indica con p el peso de un elemento y con $P = \sum p$ el peso total.

Cada una de las coordenadas del centro de gravedad se determina, pues, formando los productos del peso de cada elemento por la coordenada correspondiente, sumándolos y dividiendo luego la suma por la suma de los pesos de todos los elementos, esto es, por el peso total P del cuerpo.

Es notorio que la posición del centro de gravedad del cuerpo depende solamente de la distribución de los elementos y de su peso; y si el cuerpo es homogéneo, únicamente de la distribución de la materia. Las ecuaciones [27] que permiten calcularla no dependen del sistema de coordenadas que se elija.

Es fácil, además, comprender que siendo el centro de gravedad el punto de aplicación de la resultante de los pesos de todos los elementos, podemos suponer aplicado a él al peso total del cuerpo.

20. **Equilibrio de un cuerpo suspendido.** — Supongamos que un sólido (fig. 53) se halla suspendido, pudiendo girar al rededor de un eje horizontal que pasa por el punto O de suspensión. Sea G el centro de gravedad del cuerpo y P la fuerza que representa el peso.

La condición de equilibrio es que la suma de los momentos de las fuerzas con respecto al eje que pasa por O sea nula, esto es:

$$P \times OA = P \cdot d = 0. \quad [28]$$

El cuerpo adoptará una posición final de reposo para la cual es $d = 0$, lo que sucede cuando los puntos O y G se hallan sobre la misma vertical. Existen dos posibilidades a este respecto, pues G puede hallarse sobre la vertical que pasa por O , abajo o arriba, ya que el cuerpo puede girar a su alrededor.

¿Qué diferencia existe, en lo que a la calidad del equilibrio se refiere, entre esas dos posiciones?

Si G está por debajo de O y en la vertical que pasa por él, desviando al cuerpo un pequeño ángulo se producirá un movimiento oscilatorio en el cual el punto G oscila a uno y otro lado de la vertical hasta que finalmente queda sobre ella y el cuerpo tendrá exactamente su posición primitiva. Si G se encuentra sobre O , una pequeña desviación ale-

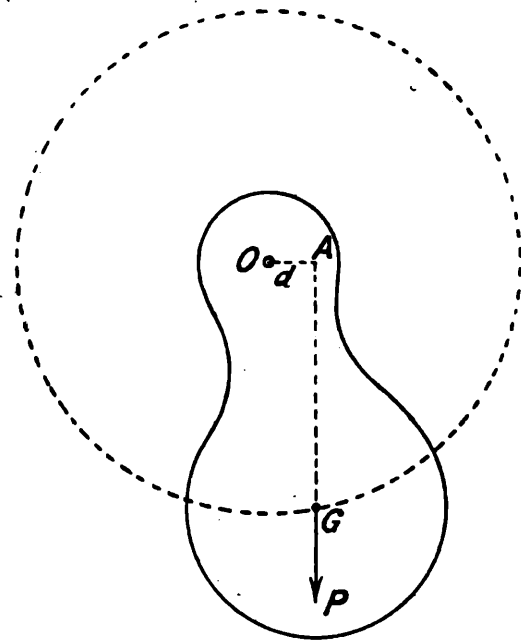


Fig. 53.

ja al cuerpo de su posición. En el primer caso se dice que el equilibrio es *estable* y en el segundo caso *inestable*.

Si el eje de suspensión pasase por G mismo, el cuerpo estaría en equilibrio en cualquier posición, pues en todas ellas la suma de los momentos de las fuerzas con respecto a O sería nula, dado que esa suma es igual a Pd y d es siempre cero. El equilibrio se dice, en este caso, *indiferente*.

Si se mide la distancia vertical de cada una de las posiciones posibles del centro de gravedad a un plano horizontal situado por debajo del mismo, se observa que en el caso de equilibrio estable la altura es mínima y en el caso de equilibrio inestable máxima.

21. Determinación del centro de gravedad. — La posición del centro de gravedad puede hallarse por cálculo usando las fórmulas que se han deducido más arriba, o, experimentalmente, aprovechando la condición de equilibrio del cuerpo suspendido.

Si se trata de cuerpos homogéneos de forma geométrica, el centro de gravedad se determina por razonamientos muy sencillos. Se dice que el cuerpo es homogéneo cuando el peso de la unidad de volumen es igual en todas partes.

El centro de gravedad de un segmento rectilíneo, supuesto pesado, está, evidentemente, en el punto medio, pues a cada elemento del segmento situado de un lado se puede hacer corresponder un segmento igual situado simétricamente del otro lado.

El caso de un triángulo se reduce al anterior, dividiéndolo en elementos rectilíneos, por cortes paralelos a uno de los lados. Cada uno de esos segmentos tiene su centro de gravedad en el punto medio, y por tanto el del triángulo mismo está situado sobre la mediana correspondiente. El centro de gravedad del triángulo se encuentra, entonces, en la intersección de las medianas y a la tercera parte de las mismas a partir de cada lado.

Un cuadrilátero cualquiera puede descomponerse de dos maneras en dos triángulos y su centro de gravedad estará, por lo tanto, en la intersección de los segmentos de rectas que unen los centros de gravedad de cada par de triángulos.

Será fácil, por lo que antecede, hallar la posición de tal punto en el caso de otra figura plana cualquiera.

Un tetraedro puede imaginarse formado por láminas triangulares muy delgadas paralelas a una cualquiera de las caras, y, por consiguiente, su centro de gravedad se halla en la intersección de las rectas que unen los vértices con los centros de gravedad de los triángulos que constituyen las caras opuestas.

Experimentalmente se determina la posición del centro de gravedad suspendiendo al cuerpo sucesivamente de dos puntos distintos, señalando en cada caso — lo cual puede hacerse con una plomada — la dirección de la vertical; puesto que cada una de esas direcciones contiene el centro de gravedad, su posición queda determinada por la intersección de ambas.

22. Determinación analítica. — A. Supongamos que se trate de hallar el centro de gravedad de un sistema formado por dos esferas homogéneas, de peso P_1 y P_2 , respectivamente, situadas a la distancia l una de otra (fig. 54).

Cada esfera puede representarse por una fuerza vertical igual a su peso aplicada a su centro de gravedad, que está en el centro geométrico de la misma. El problema se reduce a encontrar el centro de dos fuerzas paralelas.

Elijamos como origen un punto cualquiera de la recta que pasa por los centros, línea que tomamos como ejes de las x . Conviene elegir como origen uno cualquiera de los centros de las esferas; lo sea el de la primera.

La coordenada del centro G de gravedad está dada por la ecuación

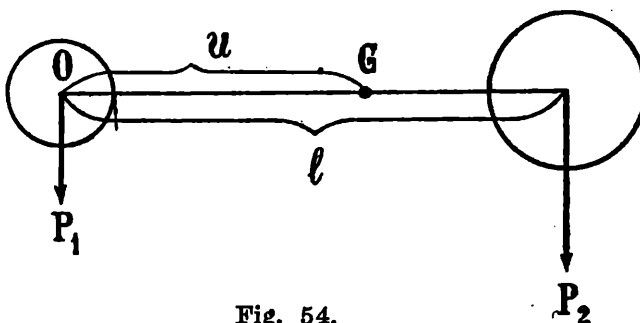


Fig. 54.

$$u = \frac{\sum px}{P} = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2} = \frac{P_2 l}{P_1 + P_2}, \quad [29]$$

pues es $x_1 = 0$ y $x_2 = l$.

Al mismo resultado se llega escribiendo la ecuación

$$P_1 u = P_2 (l - u), \quad [30]$$

que expresa la igualdad de los momentos de las fuerzas con respecto al punto G de aplicación de la resultante.

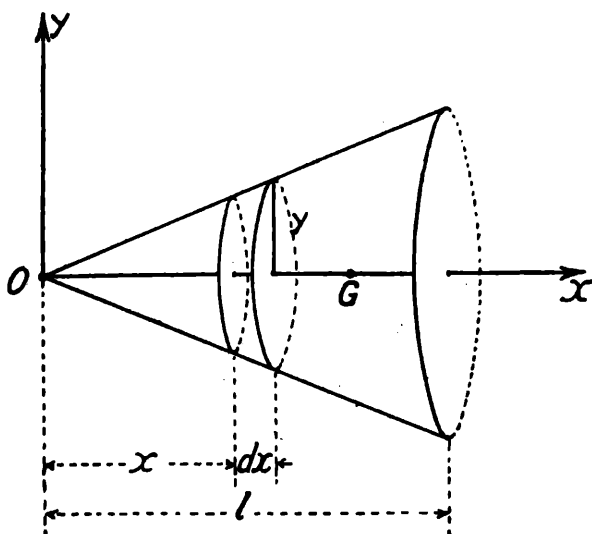


Fig. 55.

En el caso de dos cuerpos celestes, el sol y la tierra, por ejemplo, *existe* también un centro de gravedad, el cual está muy próximo al sol. Nuestro universo tiene también su centro de gravedad muy cerca de ese astro.

B. Trátese ahora de determinar el centro de gravedad de un cono circular recto. Si se eligen las coordenadas en la forma que

muestra la figura 55, es claro que ese punto se encuentra sobre el eje x , si admitimos que la substancia es homogénea. Debemos calcular entonces solamente la coordenada ξ .

Para ello descomponemos el cuerpo en discos infinitamente delgados de espesor dx por planos perpendiculares al eje de las abscisas; sus centros de gravedad están situados sobre el mismo eje y sus radios son las coordenadas correspondientes a los puntos de una de las generatrices: la situada sobre un plano, por ejemplo.

Esos radios pueden expresarse en función de x , dado que la ecuación de esa generatriz es de la forma

$$y = ax,$$

donde a es una constante. Se tiene

$$\xi = \frac{\sum px}{\sum p},$$

donde las p son los pesos elementales. El valor de uno de éstos es, si se indica con ρ el peso específico de la substancia:

$$p = \rho \pi y^2 dx = \rho \pi a^2 x^2 dx.$$

La suma de esos pesos está dada por el integral definido entre 0 y l , si l es la altura del cono.

Los productos px son de la forma

$$px = \rho \pi a^2 x^3 dx$$

y la suma es el integral entre 0 y l . Es entonces:

$$\xi = \frac{\int_0^l \rho \pi a^2 x^3 dx}{\int_0^l \rho \pi a^2 x^2 dx} = \frac{\int_0^l x^3 dx}{\int_0^l x^2 dx} = \frac{3}{4} l,$$

es decir, el centro de gravedad G se encuentra, a contar desde la base, a la cuarta parte de la altura.

El centro de gravedad de una semiesfera (fig. 56) se encuentra del mismo modo, eligiendo los ejes como indica el esquema y dividiendo el cuerpo en discos infinitamente delgados de espesor dx ; sus radios son las ordenadas y de uno de sus círculos máximos. La ecuación del círculo máximo situado en el plano del dibujo es

$$y^2 = x(2r - x),$$

si es r el radio de la esfera y si se tiene en cuenta que las coordenadas del centro del círculo son r y 0.

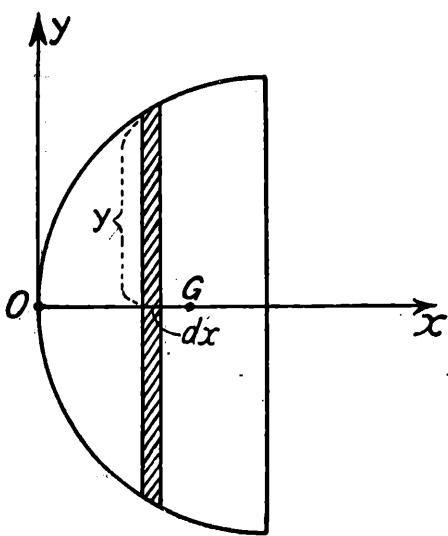


Fig. 56.

El peso elemental p de uno de los discos es, indicando con ρ el peso específico de la substancia:

$$\rho \pi y^2 dx = \rho \pi x^2 (2r - x)^2 dx \rightarrow \gamma = \rho \pi y^2 dx = \rho \pi x (2r - x) dx$$

y los productos px son de la forma

$$\rho \pi x^3 (2r - x)^2 dx.$$

Es, pues,

$$\Sigma px = \int_0^r \rho \pi x^3 (2r - x)^2 dx = \frac{5}{12} \rho \pi r^3 ; \quad \Sigma p = \frac{2}{3} \rho \pi r^3 = \frac{2}{3} \rho \pi r \cdot r^2 = \frac{1}{4} \rho \pi r^4 = \frac{5}{12} \rho \pi r^3$$

y, por lo tanto,

$$\xi = \frac{\Sigma px}{\Sigma p} = \frac{5}{8} r.$$

23. Equilibrio de un cuerpo apoyado. — Se denomina estabilidad de un cuerpo apoyado el momento que opone cuando se trata de hacerlo girar al rededor de un canto cualquiera de su base. Tengamos, por ejemplo (fig. 57), un paralelepípedo cuyas aristas tienen las dimensiones a, b y c , que suponemos escritas en orden creciente de magnitud, que descansa sobre una mesa por la cara de lados a, b .

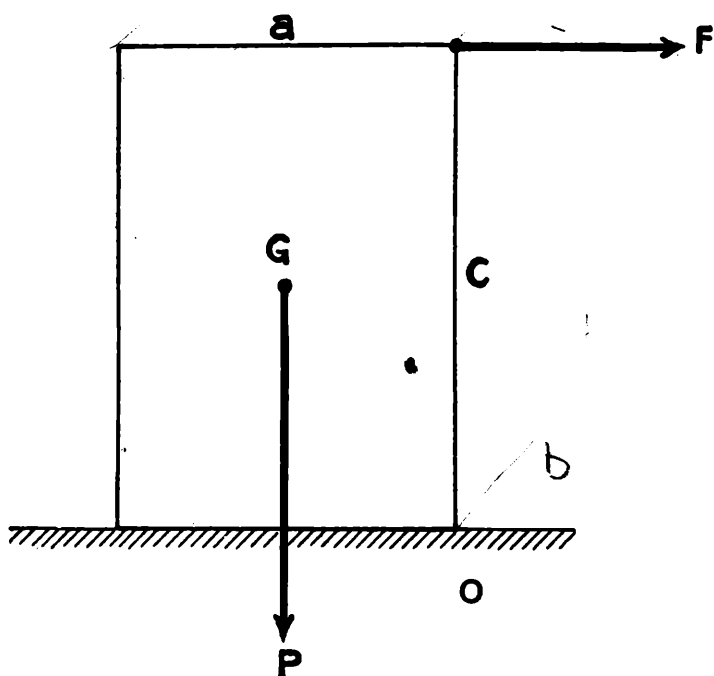


Fig. 57.

El momento que opone a ser girado al rededor de la arista b es el momento de su peso P con respecto al punto O , esto es, $P \cdot \frac{a}{2}$. Si se trata de hacerlo girar por medio de la fuerza F , por ejemplo, el cuerpo no girará mientras sea

$$Fc \leq P \frac{a}{2} \tag{31}$$

y al rededor de la arista a mientras

$$Fc \leq P \frac{b}{2} \tag{32}$$

La estabilidad es, pues, tanto más grande cuanto mayor es el peso y más amplia la base de sustentación.

Si se supone que el cuerpo ha girado al rededor de O de tal manera que la vertical que contiene al centro G de gravedad pase por él, el momento que opone el cuerpo a seguir siendo girado es cero y el cuerpo se halla en equilibrio inestable.

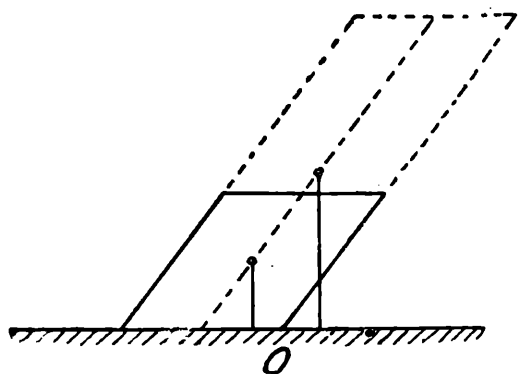


Fig. 58.

Se hace también ostensible que, si la vertical que pasa por el centro de gravedad no corta la superficie de la base de sustentación, el cuerpo cae.

El cilindro inclinado de la figura 58 quedará en reposo cuando conste de la parte inferior; agregándole otro trozo, todo el cuerpo gira alrededor de una recta que pasa por O y cae.

D. — APLICACIONES

24. **Equilibrio de un sistema de barras.** — Consideremos, primeramente, una construcción muy usada, consistente en una barra doblada en ángulo (fig. 59), que se denomina *menzola*. Prescindamos por el momento del peso de las barras.

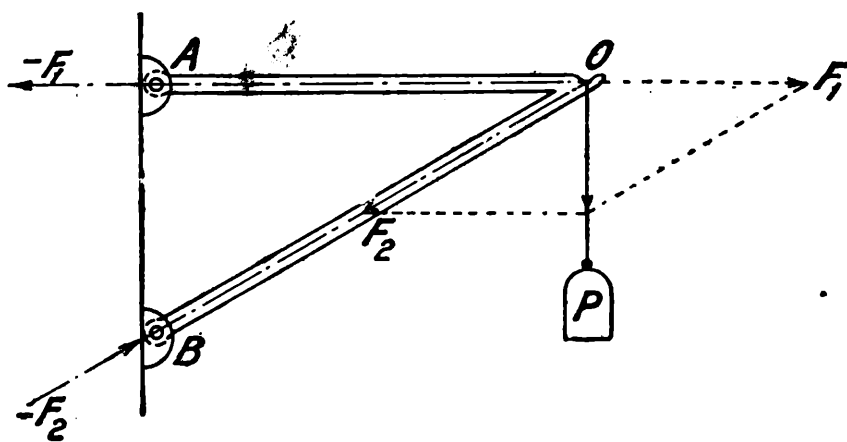


Fig. 59.

Si en el punto O suspendemos un peso P , su acción sobre el sistema se pone en evidencia descomponiéndola en sus componentes F_1 y F_2 según las direcciones OA y OB . Resulta así que para que el sistema esté en equilibrio el muro debe soportar una tracción F_1 según AO , esto es, debe oponer una reacción igual y contraria, que está indicada con $-F_1$, y compensar la presión F_2 en B con la $-F_2$. Se puede considerar en todo momento a la barra doblada como un cuerpo rí-

gido sometido a la acción de las fuerzas exteriores P , $-F_1$ y $-F_2$. Mientras están en equilibrio, esas tres fuerzas deben pasar por un punto — el O en este caso — y cada una de ellas debe ser igual y opuesta a la diagonal del paralelogramo construído sobre las otras dos.

Enteramente semejante es el problema del equilibrio de una puerta sometida a la acción exclusiva de su peso (fig. 60); la bisagra A debe soportar la tracción F_1 y la B una presión F_2 .

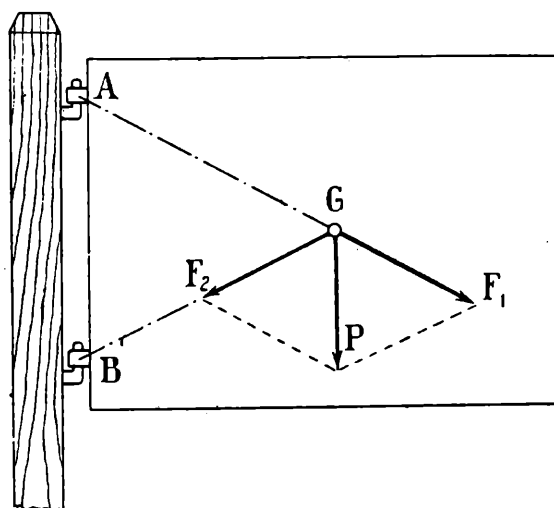


Fig. 60.

Tratemos ahora el caso de la armadura $A B C$ (fig. 61), formada por tres barras rígidamente unidas, cuyo punto A está fijo en el muro y el B apoyado en el mismo. La carga sea un peso P que pende de C .

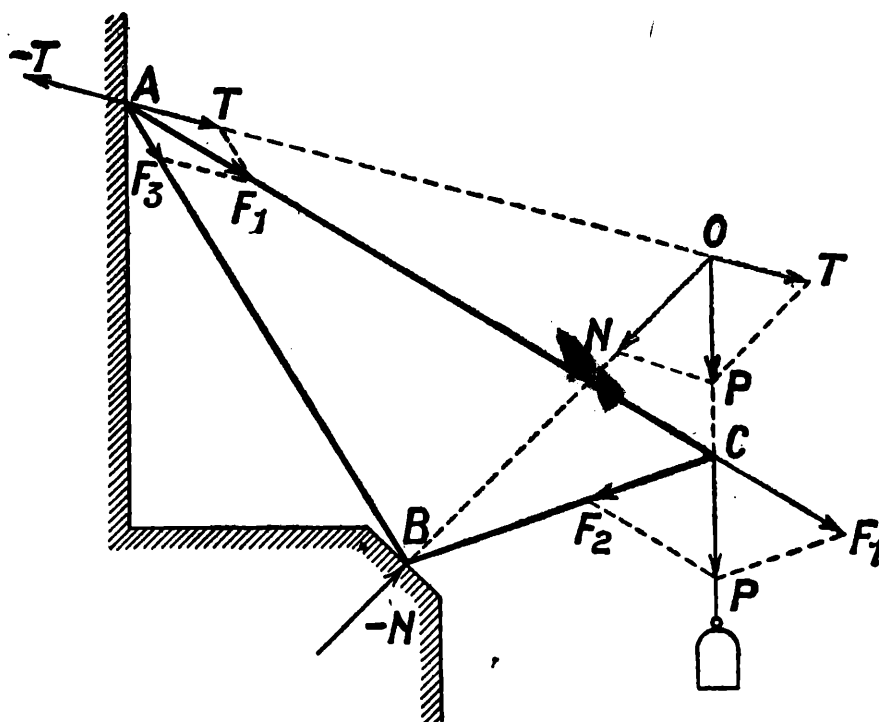


Fig. 61.

Esta origina reacciones en A y en B que deben equilibrarla, es decir, que esas dos reacciones tienen que pasar por un mismo punto de la línea que contiene a P y admitir una resultante igual y opuesta a esa carga. Si, como suponemos, el punto B puede deslizarse, en el estado de equilibrio la reacción del muro sobre él se cumplirá en la dirección de la normal BN a su superficie. La reacción del muro en A deberá, además, actuar en la dirección AO , siendo O el punto intersección de

BN con CP . Las componentes de P en las direcciones de AO y BO son, respectivamente, T y N y es evidente que las reacciones deben ser iguales y opuestas, esto es $-T$ y $-N$.

Las acciones que P ejerce sobre los muros, que son la tracción T y la presión N , se transmiten por las barras de la armadura; veamos cómo. La fuerza P produce una tracción F_1 a lo largo de AC y una compresión F_2 sobre CB . La fuerza F_1 accionando en A origina cierta tracción sobre el muro, que no puede ser sino T , y una compresión F_3 a lo largo de AB ; está claro que T y F_3 no son sino las componentes de F_1 en las direcciones de AO y AB . Las fuerzas F_3 y F_2 accionando en B originan una presión sobre el muro, que no es sino la N ; es decir, ésta es la resultante de ambas fuerzas.

25. Barra rígida apoyada en dos puntos. — Este es un caso interesante que se presenta con frecuencia en las aplicaciones. La

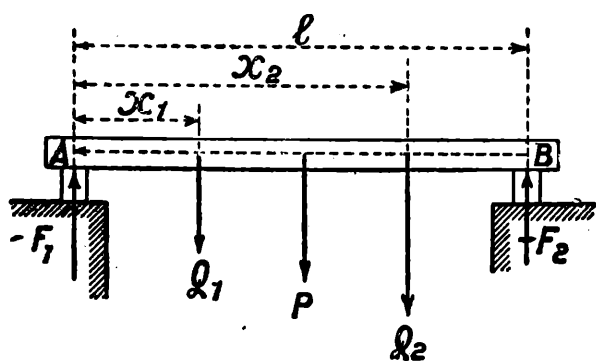


Fig. 62.

solución del problema consiste en determinar cuáles son las reacciones de los puntos de apoyo necesarias para producir el equilibrio; ella se obtiene aplicando los principios fundamentales de la estática para el caso de fuerzas situadas en un plano.

Séan (fig. 62) A y B los puntos de apoyo, situados a la distancia

l uno del otro y P el peso de la barra, aplicado en el centro de gravedad, que suponemos a igual distancia de aquellos puntos. Existan, además, a las distancias x_1 y x_2 , de A cuerpos de pesos Q_1 y Q_2 , respectivamente. Debido a su propio peso y al de los cuerpos, la barra presiona en A y B con fuerzas que indicaremos con F_1 y F_2 ; en el estado de equilibrio los apoyos reaccionan con fuerzas iguales y contrarias, $-F_1$, y $-F_2$.

El equilibrio de la barra rígida se produce si las fuerzas P , Q_1 , Q_2 , $-F_1$ y $-F_2$ se equilibran, lo que sucede si la resultante es cero y si la suma de los momentos con respecto a un punto cualquiera es nula. Conviene elegir uno cualquiera de los puntos A y B . Eligiendo a A , las condiciones de equilibrio son:

$$P + Q_1 + Q_2 - F_1 - F_2 = 0 \quad [33]$$

$$-F_2 \cdot l + P \frac{l}{2} + Q_1 x_1 + Q_2 x_2 = 0. \quad [34]$$

De la segunda ecuación se obtiene el valor de F_2 y por la primera el de F_1 ; de la misma manera se procede eligiendo el punto B .

La significación de las fuerzas — F_1 , — F_2 es ésta: serían las fuerzas necesarias para matener el equilibrio si no estuviesen los soportes. Por ejemplo, para retirar el apoyo B , podemos hacer una instalación como la de la figura 63. Agregando pesos R en el extremo libre del hilo, llegará un momento en que puede retirarse el apoyo B sin que el sistema se ponga en movimiento. El peso R que pende del hilo es la medida de la reacción F_2 .

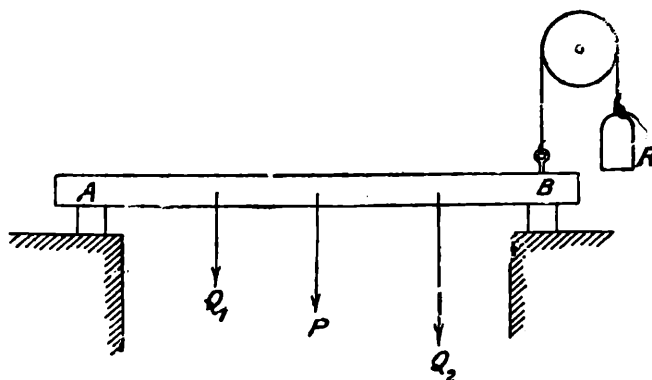


Fig. 63.

26. Equilibrio en algunos mecanismos. — 1. PLANO INCLINADO. Sea (fig. 64) ABC un plano inclinado de altura a y longitud l , sobre el cual se encuentra un cuerpo de peso P .

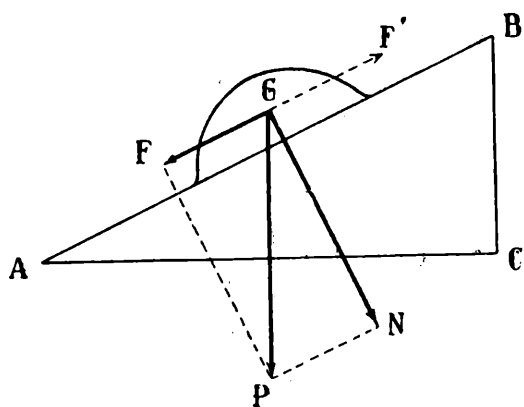


Fig. 64.

Supongamos que el cuerpo pueda moverse sobre él con entera facilidad, lo que significa suponer que no existe roce.

La fuerza que hace caer al cuerpo por el plano inclinado es la componente F de P que le es paralela; la otra componente N , normal al plano, despierta una reacción igual y contraria.

Para que el cuerpo esté en equilibrio se debe aplicar una fuerza F' igual y contraria a F . La magnitud de ésta resulta de la semejanza de los triángulos ABC y GPN , pues se tiene:

$$\frac{F}{P} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{l}. \quad [35]$$

Si el cuerpo fuera un carro cargado, por ejemplo, el motor o los caballos tendrían que hacer una fuerza por lo menos igual a F . Esta sería la potencia y el peso P la resistencia. Por eso se dice que la con-

dición de equilibrio en el plano inclinado es que la potencia sea a la resistencia como la altura del plano es a su longitud.

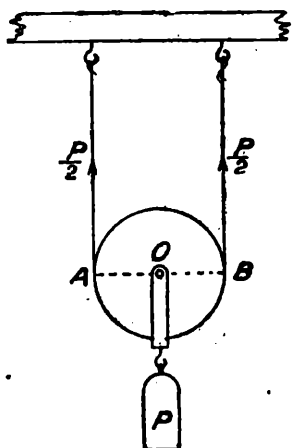


Fig. 65.

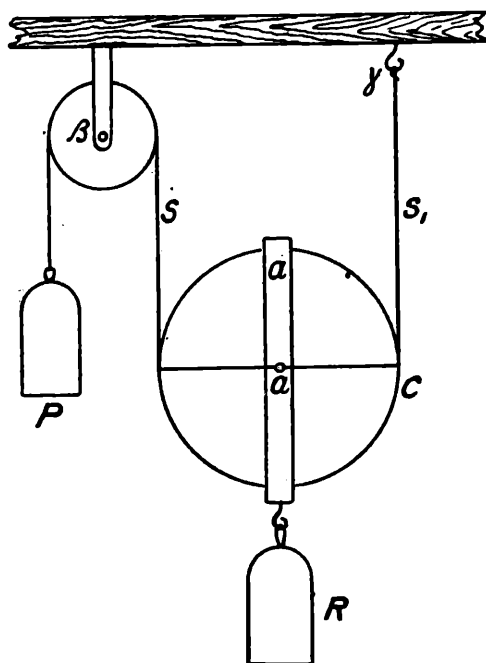


Fig. 66.

2. POLEA MÓVIL Y TROCLAS. Si la Polea (fig. 65) está suspendida de dos hilos paralelos, e indicamos con P el peso total de la carga y del material de aquella, es evidente

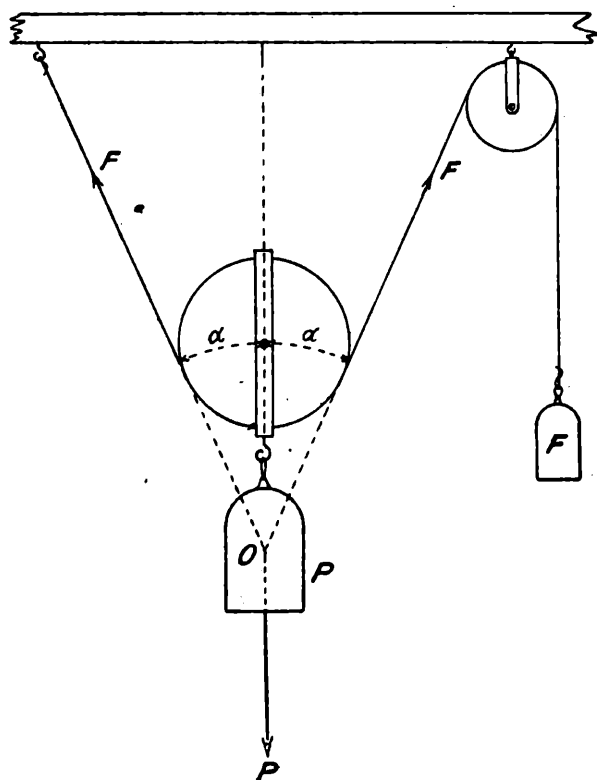


Fig. 67.

que cada hilo tiene que soportar la acción de una fuerza igual a la mitad de P , pues los hilos no solamente son paralelos a la fuerza P , sino que están colocados simétricamente a uno y otro lado, ya que se tiene $OA = OB$.

Si se fija únicamente uno de los extremos del hilo, será necesario, para mantener el equilibrio, aplicar en el otro extremo una fuerza igual a la mitad.

Esto ocurre en la instalación de la figura 66, que consta de una polea móvil y de una fija que, como sabemos, no modifica la tensión del hilo.

Por consideraciones semejantes a las del número anterior, se dice que la polea móvil está en equilibrio cuando la potencia P es la mitad de la resistencia R .

Si los hilos no fuesen paralelos (fig. 67) en la posición de equilibrio, formarán con la vertical ángulos α iguales, es decir, limitarán entre ellos el ángulo 2α ; soportarán, además, la misma tensión F . Las tres fuerzas P , F y F siendo coplanares y estando en equilibrio deben pasar por un mismo punto y satisfacer la regla del paralelogramo. La diagonal del paralelogramo construído sobre F y F será, pues, igual y opuesta a P , de suerte que se tiene

$$P^2 = F^2 + F^2 + 2F^2 \cos 2\alpha = 2F^2 (1 + \cos 2\alpha) \quad [36]$$

y por la relación

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} \quad [37]$$

resulta para F el valor

$$F = \frac{P}{2 \cos \alpha}, \quad [38]$$

que es la generalización del resultado anterior.

Si los hilos son paralelos, es

$$\alpha = 0, \quad \cos \alpha = 1 \quad \text{y} \quad F = \frac{P}{2};$$

en cambio, para lograr que el hilo se mantenga recto, es decir para que sea $\alpha = 90^\circ$, es menester que F sea muy grande.

En una instalación como la representada en la figura 68, que se designa con el nombre de trocla, el equilibrio se produce cuando se cumple la igualdad:

$$F = \frac{P}{2^n}, \quad [39]$$

donde n es el número de poleas móviles. En efecto, en el hilo A sólo hay que aplicar una fuerza igual a la mitad de R ; en el hilo B , la mitad de la tensión de A , es decir, la cuarta parte de R ; en el C , la octava parte, y así siguiendo, de tal manera que las tensiones de los hilos decrecen según las potencias enteras de dos, siendo el exponente el número de poleas móviles intercaladas.

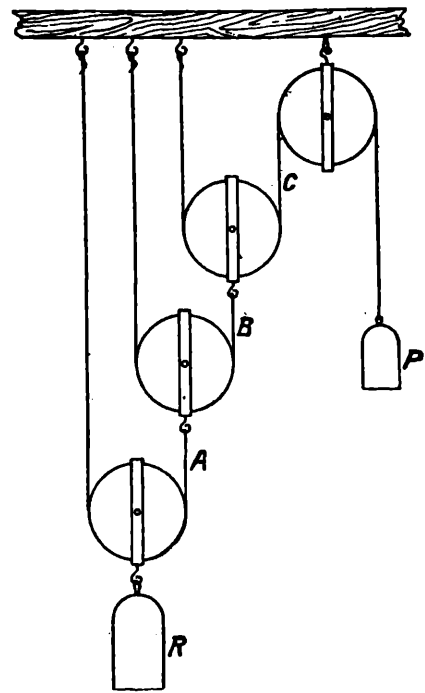


Fig. 68.

3. TORNO. El torno (fig. 69) consiste en un cilindro, comúnmente de madera, provisto de un eje, que coincide con el de figura, y que

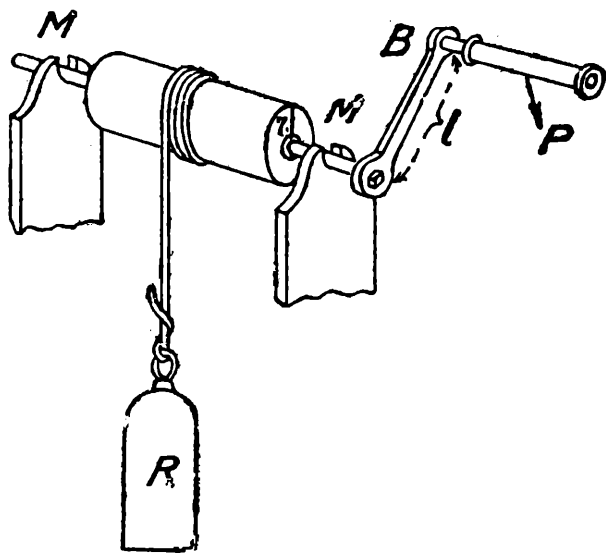


Fig. 69.

se hace girar en cojinetes que llevan los montantes MM , por la acción de una fuerza aplicada en el manubrio del brazo B . Una cuerda fija por uno de sus extremos en el torno, sostiene, en el otro, el cuerpo que se desea desplazar, esto es, la resistencia. Por la giración del manubrio, la resistencia R sube, a medida que la cuerda se va arrollando.

La condición de equilibrio se obtiene sin dificultad, aplicando el teorema de los momentos. Si indicamos con P la potencia, con l el largo del brazo B y con r el radio del cilindro, debe ser, evidentemente,

$$R \cdot r = P \cdot l. \quad [40]$$

4. ENGRANAJES. Los engranajes consisten en un sistema de ruedas dentadas montadas en ejes que forman cualquier ángulo y que *engranan* unas en otras. Un sistema tal es, en realidad, una combinación de tornos.

Consideremos, primeramente (fig. 70), el caso de una combinación de dos ruedas, una de las cuales se acciona por un brazo o manubrio B de longitud L , en cuyo extremo se aplica la fuerza P . La otra lleva fijo un cilindro de radio l , en el cual se arrolla una cuerda, en cuyo extremo pende una carga o resistencia R . Sean r_1 y r_2 los radios respectivos de las ruedas y F la fuerza entre los dientes, mientras el sistema está en equilibrio. Se tendrá:

$$PL = F r_1 \quad [41]$$

y

$$Rl = F r_2,$$

de donde resulta que

$$P = R \frac{l}{L} \cdot \frac{r_1}{r_2}. \quad [42]$$

Però, puesto que los dientes deben ser iguales, su número es en cada rueda proporcional al radio. Si se indican con n y N , respectivamente, se tiene:

$$P = R \frac{l}{L} \frac{n}{N}. \quad [43]$$

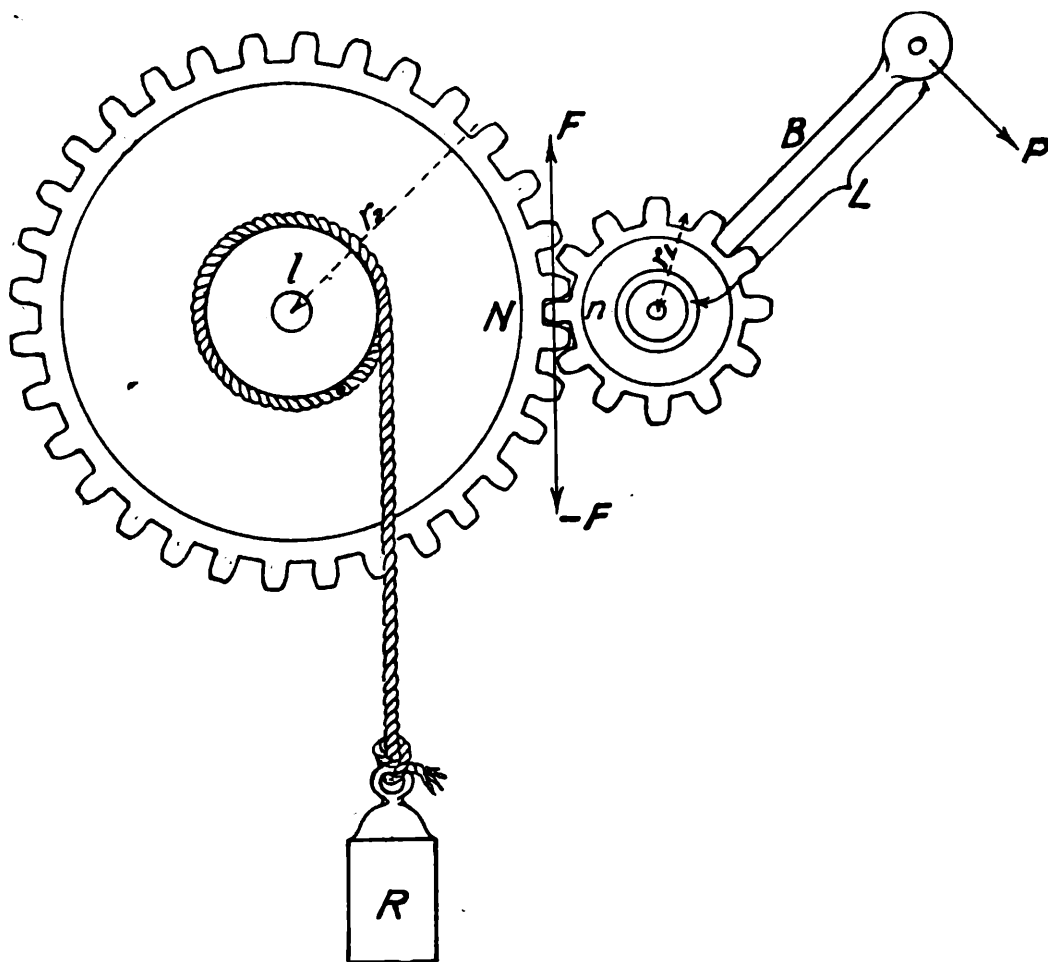


Fig. 70.

Si el brazo L estuviese aplicado directamente al cilindro l , esto es, si no estuviesen las ruedas, la condición de equilibrio sería $P = \frac{Rl}{L}$. La presencia de las ruedas disminuye, entonces, la potencia P en la relación $n:N$ del número de dientes.

Si se acoplan dos ejes más, con engranajes, tal como indica la figura 71, siendo $N_1 n_1$ y $N_2 n_2$ los dientes que corresponden a cada uno de los sistemas agregados, resulta, de la misma manera que antes:

$$P = R \frac{l}{L} \frac{n n_1 n_2}{N N_1 N_2}. \quad [44]$$

Se ve así que, por acoplamiento de ruedas, puede disminuirse la potencia tanto como se quiera.

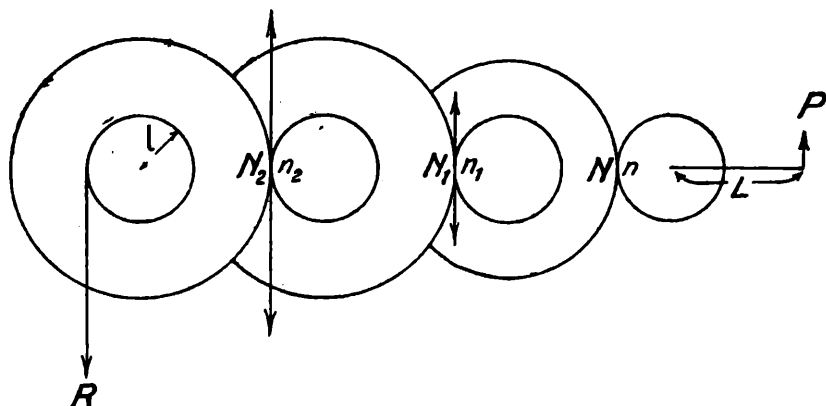


Fig. 71.

En el capítulo VI veremos un principio general que permite encontrar con facilidad las condiciones de equilibrio, y nos ocuparemos de algunos otros mecanismos.

27. Extensión de las reglas anteriores a cuerpos de forma variable. — Consideremos una cuerda fija en sus extremos A y B

(fig. 72) sometida a la acción de la gravedad; tomará una forma como la representada en la figura.

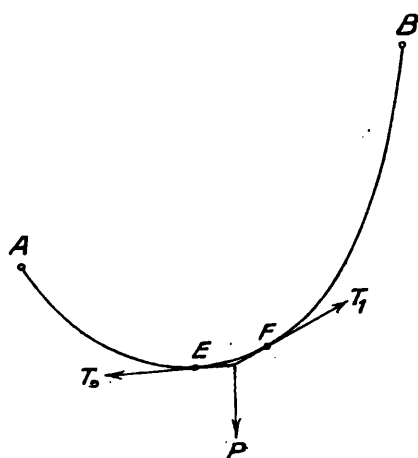


Fig. 72.

Una parte cualquiera de ella EF puede ser substituída por una barra rígida de la misma forma y peso, sin que el equilibrio sea perturbado en lo más mínimo.

Sobre esta parte actúa la gravedad, esto es su peso P aplicado a su centro de gravedad y las tensiones T_1 y T_2 de la cuerda en E y F .

Para el equilibrio es necesario, según se ha visto, que las tres fuerzas P , T_1 y T_2 sean concurrentes y que cada una de ellas sea la diagonal del paralelogramo construído sobre las otras dos.

Por otra parte, es evidente que las fuerzas T_1 y T_2 se producen por la presencia de P ; de antemano se sabe que son iguales y opuestas a las componentes de P en la dirección de las tangentes, es decir, T_1 y T_2 son las fuerzas que habría que agregar para prescindir de las porciones AE y FB de la cuerda, sin que el equilibrio del segmento considerado sufriera modificación alguna.

Un segundo ejemplo de esta naturaleza lo proporciona el equilibrio de una masa líquida. Es claro que puede considerarse sólida a una parte de ella que se encuentra en el interior de una superficie virtual cerrada, sin que su volumen se modifique. Las fuerzas que actúan sobre ese elemento deben cumplir, en el caso de equilibrio, las mismas condiciones que valen para el cuerpo rígido. En el caso de líquidos existen, además, otras condiciones de equilibrio, pues se pueden concebir, finalmente, casos de fuerzas que estarían en equilibrio en un cuerpo rígido y no lo están actuando sobre un líquido.

SEGUNDA PARTE
DINÁMICA DEL PUNTO

CAPITULO III

ELEMENTOS DE CINEMÁTICA. LOS PRINCIPIOS
DE NEWTON O PRINCIPIOS DE LA DINÁMICA

A. — ELEMENTOS DE CINEMÁTICA. MOVIMIENTO DE CAÍDA

1. **Traslación. Rotación. Punto material.** — Se designa con el nombre de movimiento al proceso del cambio de lugar de los cuerpos.

Los puntos del cuerpo que se mueve describen líneas en el espacio que se denominan *trayectorias*.

El movimiento de un cuerpo se llama de *traslación* si la recta AB (fig. 73) que une dos cualesquiera de sus puntos se mantiene durante el desplazamiento paralela a sí misma. Todos los puntos recorren caminos iguales en la misma dirección, esto es, tienen la misma velocidad; las trayectorias de los puntos son idénticas, y pueden, por lo tanto,

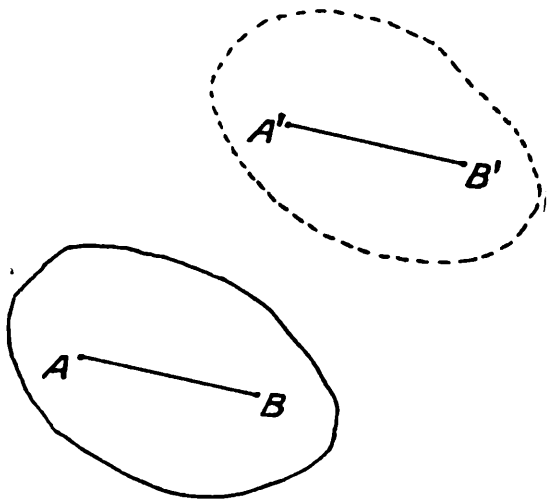


Fig. 73.

superponerse, es decir, son coherentes, lo que no entraña la condición de que sean paralelas.

Se dice que un movimiento es de *rotación* cuando todos los puntos describen arcos de círculos situados sobre planos normales a cierta línea que se llama el *eje de rotación* y sobre la cual se encuentran los centros de los arcos de círculo.

Muchas veces ocurre que el objeto del estudio del movimiento se satisface fijando la atención en uno de los puntos del cuerpo y prescindiendo de las particularidades del movimiento de los demás. Ese punto que representa al cuerpo se designa con el nombre de *punto material*. Con frecuencia tiene tal carácter el centro de gravedad del cuerpo.

El movimiento de un punto material queda perfectamente determinado si se conoce su trayectoria y la posición que ocupa sobre ella en un instante cualquiera.

La ciencia del movimiento se designa con el nombre de *dinámica* y su objeto es, como lo dice Kirchhoff, «describir los movimientos que se producen en la naturaleza de la manera más completa y sencilla».

El estudio de los movimientos en sí, prescindiendo de las causas que los determinan, se designa con el nombre de *cinemática*.

2. **Movimiento uniforme. Definición de velocidad.** — Si un punto material se mueve sobre una línea recta y recorre en tiempos iguales espacios iguales, se dice que su movimiento es uniforme. El camino que recorre en la unidad de tiempo se llama velocidad. Si indicamos con v la velocidad, el espacio e que recorre el punto en t unidades de tiempo, será:

$$e = vt. \quad [1]$$

Si en virtud de la ecuación [1] creyéramos poder admitir sin ninguna limitación a la expresión

$$v = \frac{e}{t} \quad [2]$$

como una definición general de la velocidad, un sencillo razonamiento haría notoria su insuficiencia. Si, por ejemplo, medimos el espacio recorrido por un móvil en un minuto, puede ocurrir que los caminos recorridos en minutos cualesquiera sean iguales sin que el movimiento sea en realidad un movimiento uniforme. Así, por ejemplo, un punto que recorre 20 metros en cada minuto puede estar en reposo durante 30 segundos y recorrer en los 30 segundos restantes los 20 metros. Otro observador que hubiese comenzado a medir el camino recorrido en otro instante, o que midiera el camino recorrido por segundo, encontraría que el movimiento no es uniforme. Se ve claramente que nos acercáramos tanto más a la realidad cuanto menor fuese la unidad de tiempo elegida, al fin de cuyo transcurso determinamos la posición del punto. Cualquiera que fuese el movimiento de

éste, se lograría, pues, captar la realidad, con gran aproximación, si se determinasen sus posiciones en instantes sucesivos separados por intervalos muy pequeños de tiempo. Si los espacios recorridos en todos los intervalos, supuestos iguales, fuesen iguales, también, podríamos afirmar que el movimiento es uniforme; en general esto no sucederá, los espacios recorridos en intervalos iguales muy pequeños de tiempo serán diferentes.

Lo que precede hace notorio que es menester considerar como velocidad al cociente de dividir el camino recorrido en un intervalo de tiempo muy pequeño por este mismo intervalo. El cociente será, en general, distinto a partir de los diferentes instantes, esto es, la velocidad variará de un momento a otro.

Según estas consideraciones, si a partir del instante t el punto ha recorrido en el intervalo Δt , muy pequeño, el espacio Δe , la velocidad en el intervalo comprendido entre t y $t + \Delta t$ es:

$$v = \frac{\Delta e}{\Delta t}, \quad [3]$$

donde la letra Δ antepuesta a la letra e o t indica un incremento pequeño del espacio o del tiempo, es decir, si t_1 y t_2 son instantes de tiempos muy próximos, es $\Delta t = t_1 - t_2$, y si e_1 y e_2 son los espacios recorridos en t_1 y t_2 segundos, respectivamente,

$$\Delta e = e_1 - e_2.$$

Se dice que la velocidad v corresponde al instante t si el intervalo de tiempo Δt se hace infinitamente pequeño. En el análisis matemático se designa a estos infinitamente pequeños con el nombre de diferenciales. Un incremento infinitamente pequeño del tiempo se indica escribiendo dt y se lee diferencial del tiempo; del espacio, de .

La velocidad en un instante determinado, en un movimiento cualquiera, será, pues,

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{de}{dt}, \quad [4]$$

que se lee derivada del espacio respecto al tiempo y que representa el límite de la expresión [3] cuando Δt se hace infinitamente pequeño.

En el caso del movimiento uniforme es

$$v = \frac{de}{dt} = \text{constante}, \quad [5]$$

lo que significa que la velocidad no depende del tiempo. Si representamos gráficamente la velocidad de un movimiento uniforme a partir de un instante cualquiera, que tomamos como origen del tiempo, se obtiene una línea recta, figura 74, AB paralela al eje de los tiempos; OA representa la magnitud de la velocidad. El espacio recorrido en cierto tiempo t_1 será numéricamente igual al área del rectángulo del dibujo.

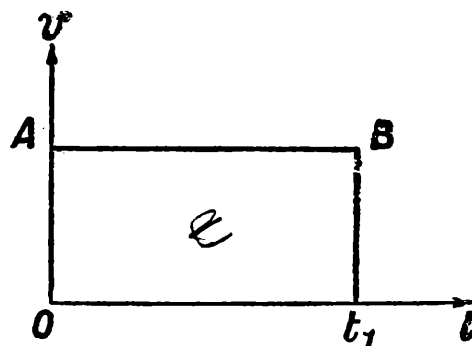


Fig. 74.

3. Movimiento uniformemente variado.

— En los cuerpos que se mueven en la superficie de la tierra se observa muy raramente un movimiento uniforme. Un tren, por ejemplo, recorre durante su marcha, en tiempos iguales espacios muy diferentes y la misma observación se puede hacer en otros casos.

Si se representa gráficamente la velocidad del movimiento de un cuerpo en función del tiempo, entre dos instantes cualesquiera t_1 y t_2 , las ordenadas que representan la velocidad en los diversos instantes

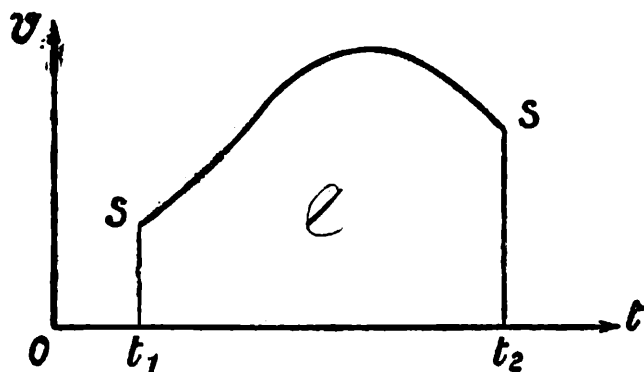


Fig. 75.

tendrán diferente longitud, y esas diferencias variarán de muy distintos modos en cada movimiento. Es claro que la velocidad no cambiará bruscamente, sino de una manera continua, de tal manera que estará representada por una línea curva, como la SS por ejemplo (fig. 75).

El más simple de estos movimientos en los que la velocidad no es constante, es aquel en que, moviéndose el punto sobre una recta, su velocidad varía proporcionalmente al tiempo o, en otras palabras, varía en cantidades iguales en tiempos iguales. Si se indica con la letra a la constante de proporcionalidad, se tiene, si se mide el tiempo a partir del instante en que el cuerpo inició su movimiento,

$$v = at. \quad [6]$$

La constante a es el incremento de la velocidad en la unidad de tiempo y se denomina *aceleración del movimiento*. Un movimiento de esa naturaleza se llama *uniformemente variado*.

Las mismas consideraciones que hemos hecho a propósito de la definición de la velocidad son aplicables, como es evidente, a la aceleración, puesto que ésta es una variación de aquella.

La posibilidad de conocer con exactitud la realidad es tanto más grande cuando menor es el intervalo de tiempo al fin de cuyo transcurso consideramos la velocidad del movimiento.

La definición de la aceleración en un instante dado será, pues:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 e}{dt^2}, \quad [7]$$

es decir, la derivada de la velocidad, o la derivada segunda del espacio con respecto al tiempo.

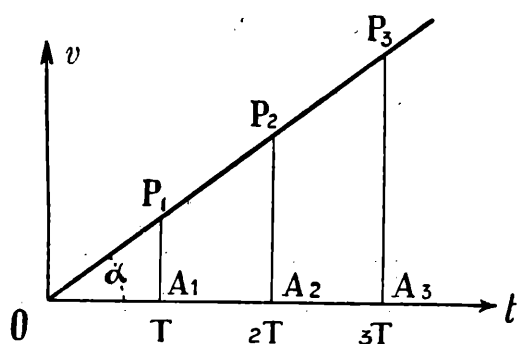


Fig. 76.

Si se representa gráficamente la velocidad de este movimiento, suponiendo que se mide el tiempo desde el preciso instante en que el punto comenzó a moverse, se obtiene (fig. 76), una recta OP_3 que pasa por el origen de coordenadas bajo cierta inclinación. Las coordenadas $A_1 P_1, A_2 P_2, \dots$, representan las velocidades en ciertos instantes $T, 2T, \dots$, de donde resulta que la tangente del ángulo α es numéricamente igual a la aceleración, pues una ordenada cualquiera es igual al tiempo transcurrido por la tangente del ángulo mencionado.

instantes $T, 2T, \dots$, de donde resulta que la tangente del ángulo α es numéricamente igual a la aceleración, pues una ordenada cualquiera es igual al tiempo transcurrido por la tangente del ángulo mencionado.

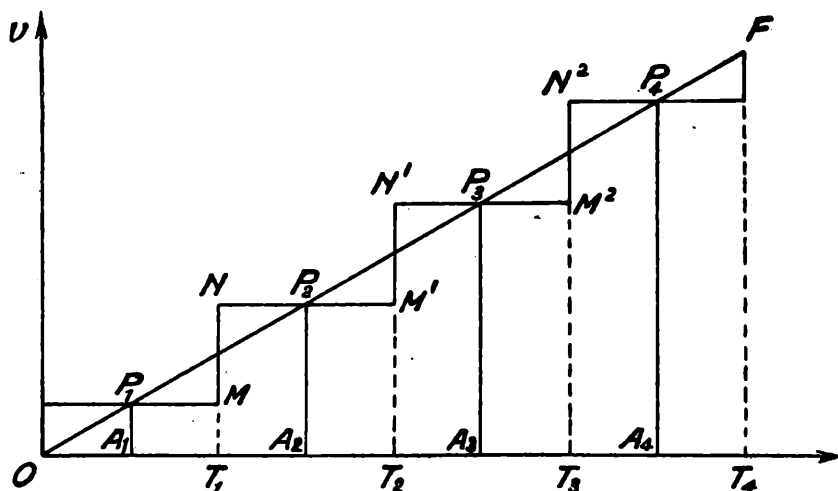


Fig. 77.

4. **Determinación del espacio recorrido en el movimiento uniformemente acelerado.** — El cálculo del espacio se puede efectuar de la manera siguiente. Consideremos (fig. 77) intervalos iguales

de tiempo comprendidos entre los instantes $O, T_1, T_2, T_3, T_4, \dots$, y supongamos que el punto en lugar de moverse con velocidad creciente se mueve en cada intervalo con una velocidad constante e igual a la velocidad media entre la velocidad inicial y final. Es decir, entre O y T_1 la velocidad constante sería A_1P_1 , entre T_1 y T_2, A_2P_2 , y así siguiendo. El pasaje de un punto tal como el M al N admitimos que se realiza instantáneamente. Es claro que nos acercamos indefinidamente al movimiento verdadero a medida que los intervalos de tiempo considerados se hacen más y más pequeños; dentro de intervalos de tiempo infinitamente pequeños puede suponerse constante a la velocidad.

El espacio recorrido en un tiempo dado es el mismo para el movimiento verdadero que para el movimiento discontinuo con el cual se le substituye, puesto que la velocidad de éste es la media de la de aquél en cualesquiera de los intervalos de tiempo que se considere.

Los espacios recorridos por el punto animado de movimiento uniforme en los intervalos OT_1, T_1T_2, \dots , son numéricamente iguales a las áreas de los rectángulos de bases OT_1, T_1T_2 , etc., y de alturas A_1P_1, A_2P_2 , etc. El espacio recorrido hasta el instante T_4 es igual a la suma de las áreas de los rectángulos correspondientes a todos los intervalos y esa suma es igual al área del triángulo OFT_4 , pues los triangulitos opuestos por el vértice son iguales.

El área del triángulo OFT_4 es igual a la mitad del producto de la ordenada del punto F , que es la velocidad en el instante T_4 , por el tiempo transcurrido. En general, si indicamos con v la velocidad en el instante t , el espacio recorrido en t segundos con movimiento uniformemente variado será, pues,

$$e = \frac{1}{2} v \cdot t, \quad [8]$$

y por la relación [6]

$$e = \frac{1}{2} at^2. \quad [9]$$

El movimiento uniformemente variado puede ser acelerado o retardado según que la velocidad aumente o disminuya; en el segundo caso la aceleración es negativa.

El método que hemos utilizado para calcular el espacio está vinculado a algunos conceptos del análisis matemático que son de importancia.

La realidad estará representada, según dijimos, de la mejor manera cuanto menor sea el intervalo de tiempo que se considere.

Si descomponemos un tiempo finito, comprendido entre el instante que tomamos como origen e indicamos con cero y el instante t , en elementos de tiempo dt_1, dt_2, dt_3, \dots , dentro de cada uno de ellos las velocidades pueden considerarse constantes e iguales a v_1, v_2, v_3, \dots , respectivamente. El espacio recorrido en los t segundos será, por lo tanto,

$$e = v_1 dt_1 + v_2 dt_2 + v_3 dt_3 \dots \quad [10]$$

o

$$e = \sum v dt.$$

Una suma de productos de esa naturaleza se conoce con el nombre de integral y se escribe:

$$e = \int v dt. \quad [11]$$

Si se conoce la velocidad en función del tiempo, el espacio recorrido entre dos instantes, t_1 y t_2 , se determina por una sencilla integración, siendo los límites del integral los tiempos t_1 y t_2 que limitan el intervalo del tiempo que se considera.

5. Movimiento cualquiera.

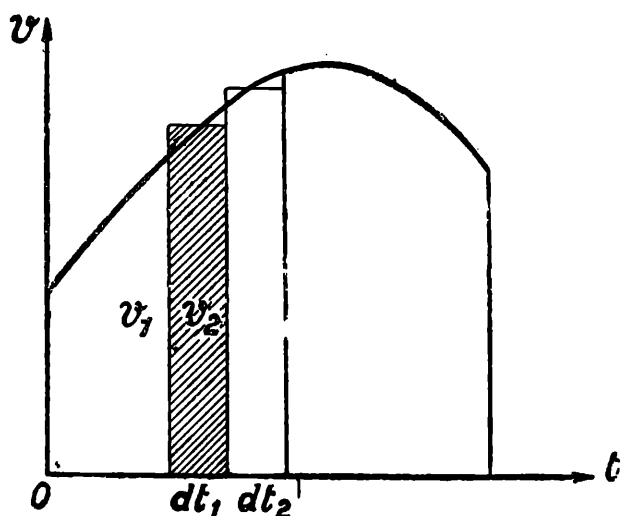


Fig. 78.

Las definiciones de velocidad y de aceleración y el método para calcular el espacio son, como es fácil comprenderlo, absolutamente generales y aplicables, de consiguiente, a cualquier movimiento. Supongamos que el punto material se mueve sobre un plano, y que su velocidad en función del tiempo esté representada por la curva de la figura 78; el espacio recorrido en t segundos será numéricamente igual a

la suma de las áreas de los rectángulos elementales de bases dt_1, dt_2, \dots , y alturas v_1, v_2, \dots , esto es:

$$e = \int v dt.$$

6. Las dimensiones de la velocidad y de la aceleración. — Al introducir en la física un nuevo concepto, surge la necesidad de establecer una unidad de medida de la magnitud que lo representa.

Para los conceptos de velocidad y de aceleración no es preciso establecer tales unidades, por cuanto ellas pueden ser expresadas utilizando las unidades de longitud y de tiempo. Las expresiones que muestran en qué forma resulta la medida de la velocidad y de la aceleración de la medida del espacio y del tiempo, se llaman dimensiones de la velocidad, de la aceleración, respectivamente. Puesto que una velocidad resulta de dividir una longitud L por un tiempo T , la dimensión de la velocidad, que se indica encerrando a la letra representativa entre corchetes, es:

$$[v] = \frac{L}{T} = LT^{-1}, \quad [12]$$

y ya que la aceleración se obtiene dividiendo una velocidad por un tiempo, su dimensión debe ser:

$$[a] = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}. \quad [13]$$

Si se miden las longitudes en centímetros y el tiempo en segundos será:

$$[v] = \frac{cm}{seg}, \quad [a] = \frac{cm}{seg^2}.$$

7. Movimiento de caída. — Hemos visto en otro párrafo que un cuerpo cuyo estado de movimiento se modifica está sometido a la acción de una fuerza y se ha establecido un método según el cual esas fuerzas pueden ser comparadas.

Surge en seguida la necesidad de estudiar la relación existente entre las fuerzas y los movimientos, y la conveniencia de estudiar primeramente aquellos producidos por fuerzas constantes. Puesto que el peso de un cuerpo es invariable en el mismo lugar de la tierra, el movimiento de caída se realiza bajo la acción de una fuerza constante.

La investigación ha de comenzar por averiguar si el cambio de substancias tiene alguna influencia en el fenómeno de la caída. Abandonados a sí mismos, cuerpos distintos caen al través del aire con diferente rapidez; los cuerpos llamados livianos, como el corcho, plumas, etc., lo harán con lentitud. Excluyendo el aire, que es un factor ente-

ramente extraño en el estudio del fenómeno, encerrando los cuerpos en un tubo en que se ha hecho el vacío, todos caen simultáneamente

Si la tierra es la causante del fenómeno, resulta de esta experiencia que ella no tiene predilección por ninguna materia y la ley que siga el fenómeno ha de ser la misma para todas las substancias.

Esta experiencia, debida a Newton, carece de precisión, siendo solamente una experiencia de clase. Como se hará notorio, con el péndulo se obtiene, por observaciones muy exactas, el mismo resultado.

8. **Máquina de Morin.** — Esta máquina, que permite realizar un estudio cuidadoso de la caída libre (fig. 79), consiste en lo siguiente:

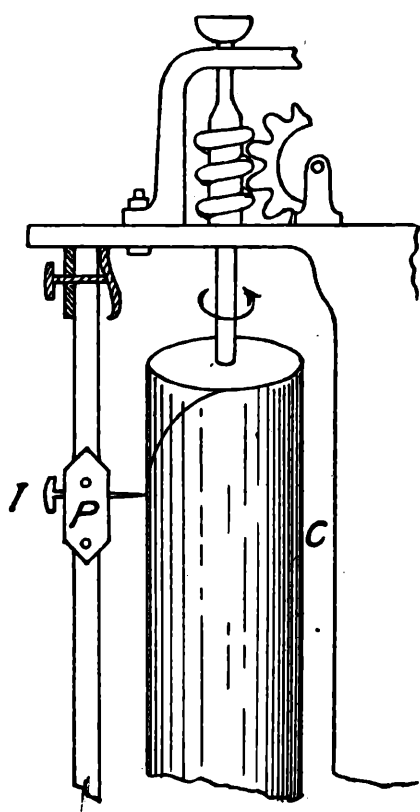


Fig. 79.

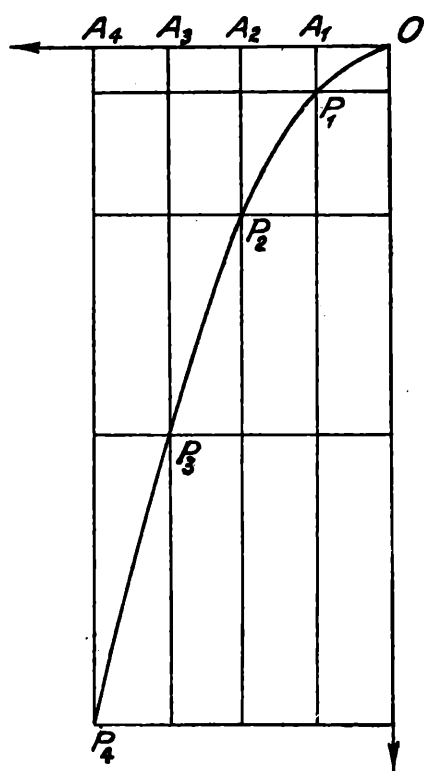


Fig. 80.

Un cilindro P de hierro, alargado y terminado en cono, a fin de disminuir el roce con el aire, cae guiado por dos hilos finos de acero, paralelos y bien tendidos. La punta de un índice I que lleva ese cuerpo apoya muy suavemente sobre un papel arrollado en un cilindro C que gira al rededor de un eje vertical con movimiento uniforme, accionado por una máquina de relojería, marcando sobre él el trazo de la caída.

Si el aparato está bien construído y ajustado, el roce del peso con los hilos y del lápiz con el cilindro son enteramente despreciables con respecto al peso del cuerpo mismo y todo ocurre como si éste

cayera libremente. Si se mantiene fijo el peso P , el índice marca un círculo horizontal, o, lo que es lo mismo, una línea horizontal sobre la hoja supuesta desarrollada; las longitudes de los segmentos de línea que traza en tiempos iguales son iguales.

Si, por el contrario, el cilindro está inmóvil y cae el cuerpo, el índice marca una línea vertical.

Haciendo caer el cuerpo mientras gira el cilindro, se obtiene una curva como la O, P_1, P_2, P_3 y P_4 de la figura 80. El tiempo está indicado por el eje horizontal y los espacios recorridos por las ordenadas. Si se divide aquél en partes iguales OA_1, A_1A_2, \dots , se tienen intervalos de tiempos iguales.

Es evidente que el espacio vertical recorrido por el cuerpo en el tiempo OA_1 es $A_1P_1 = e_1$; en el tiempo $OA_2 = 2OA_1$ el espacio recorrido es $A_2P_2 = e_2$ y así siguiendo. El resultado del estudio es que el movimiento es *uniformemente acelerado*, esto es, que dos espacios cualesquiera e_4 y e_3 , por ejemplo, están entre sí como los cuadrados de los tiempos en que han sido recorridos, es decir:

$$\frac{e_4}{e_3} = \frac{A_4P_4}{A_3P_3} = \frac{OA_4^2}{OA_3^2} = \frac{4^2}{3^2}. \quad [14]$$

No teniendo predilección la tierra por ninguna substancia diremos ahora *que todos los cuerpos caen en el vacío con la misma aceleración*.

La aceleración de la caída libre se denomina aceleración de la gravedad y se indica con la letra g . Su valor se obtiene con exactitud por medio del péndulo, siendo en La Plata, aproximadamente:

$$g = 979,7 \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}.$$

Las leyes de la caída se expresan, por lo tanto, con las ecuaciones:

$$v = gt \quad [15]$$

$$e = \frac{1}{2} gt^2. \quad [16]$$

El descubrimiento de las leyes de la caída se debe a Galileo Galilei, quién nació en Pisa en el año 1564 y murió, ciego y sordo, en el año 1642. Los hombres cuyas creencias abatían sus descubrimientos se concitaron en su contra haciéndolo víctima de persecuciones y vejámenes, debiendo sufrir hasta los rigores de la cárcel. Sus restos descansan en Florencia junto a los de otros espíritus eminentes de Toscana.

Aristóteles sostenía que, si no actuase sobre ellos la resistencia del aire, los cuerpos caerían con movimiento uniforme y que los más pesados lo harían más rápidamente porque las partes de arriba empujaban a las de abajo. Un cuerpo de doble peso que otro caería con doble velocidad.

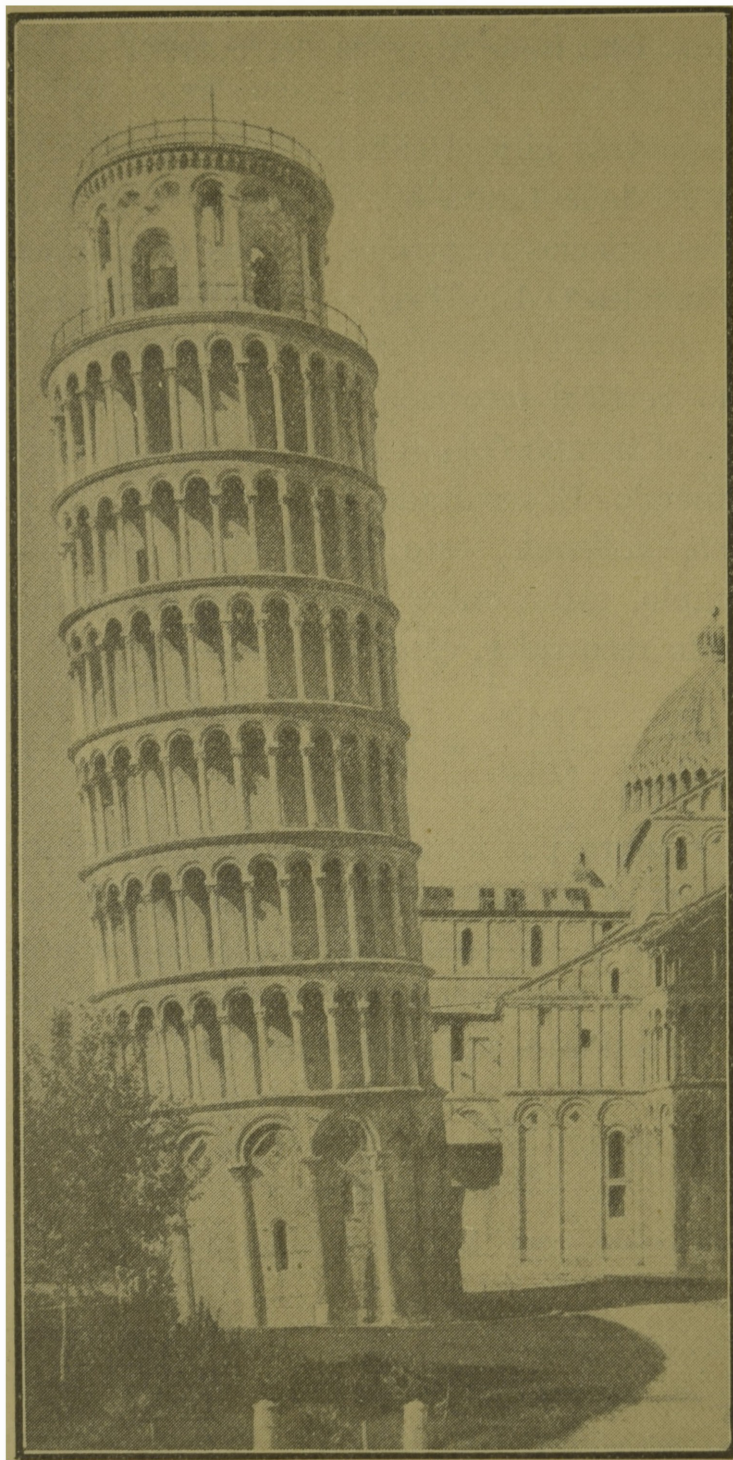


Ilustración n° 1.

perfiles de los mismos no eran muy grandes en relación a sus pesos *todos caían con la misma velocidad.*

Galileo observó un día, en el año 1583, de acuerdo con un testimonio de Viviani, que dos lámparas de la catedral de Pisa de diferente tamaño, pero de la misma longitud, oscilaban en tiempos iguales, de cuyo hecho infirió que cuerpos de diferente peso caen al mismo tiempo, lo que contradecía las ideas de Aristóteles. La enorme autoridad de éste lo indujo, seguramente, a pensar en un *experimentum crucis* que probase de un modo directo la simultaneidad de la caída. Ese experimento consistió en dejar caer cuerpos de diferente peso del campanile de la catedral antes citada, que aparece en la ilustración n° 1. Comprobó que cuando las su-

9. Caída por un plano inclinado. — El estudio de la caída sobre un plano inclinado se produce también por la acción de una fuerza constante. Su estudio puede realizarse con medios sencillos, y con

bastante exactitud, por cuanto el movimiento no es, como en el de la caída libre, demasiado rápido. Ofrece, además, la gran ventaja de que la fuerza que determina el movimiento de un cuerpo puede ser cambiado con sólo modificar la inclinación del plano. La fuerza que produce la caída es igual a la fuerza que hay que oponer paralelamente al plano para que el cuerpo no se mueva. Si es a la altura del plano inclinado, l su longitud y P el peso del cuerpo, esa fuerza tiene el valor

$$F = P \frac{a}{l} \quad [17]$$

o

$$F = P \operatorname{sen} \alpha, \quad [18]$$

si α indica la inclinación.

Si el rozamiento del cuerpo sobre el plano es muy pequeño puede suponerse que el cuerpo cae bajo la acción exclusiva de la fuerza F . El movimiento es uniformemente acelerado y la aceleración aumenta con la inclinación del plano, es decir, es tanto mayor cuanto mayor es la fuerza F que produce el movimiento.

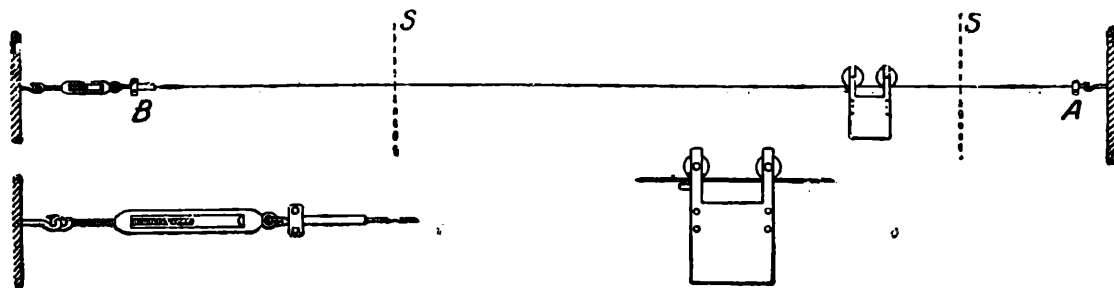


Fig. 81.

La determinación experimental puede efectuarse con suficiente exactitud con una instalación (fig. 81) que consiste en un hilo de acero fuertemente tendido y en un carrito formado por un disco cuadrangular de hierro, provisto de dos ruedas que giran con entera facilidad sobre los ejes. El roce es así muy pequeño y con la forma del carro se disminuye muchísimo la influencia del aire.

Se mide con un cronómetro el tiempo que tarda en recorrer una distancia elegida de antemano, comprendida entre dos señales, S , para lo cual se pone en movimiento el reloj en el momento en que el carro pasa por delante de la primera señal y se para cuando pasa por la segunda. Si se hace la misma medida para diversas distancias se observará que éstas están entre sí como los cuadrados de los tiempos en que han sido recorridos.

Si se tiende el hilo bajo otra inclinación y se usa, como suponemos, el mismo carro, el cuerpo que se mueve no se modifica, pero cambia la fuerza que lo hace caer. El movimiento es, en todos los casos, como ya dijimos, uniformemente acelerado; la caída es más rápida para mayor inclinación, lo que significa que la aceleración es tanto mayor cuanto mayor es la fuerza que actúa sobre el cuerpo.

Como experiencia de clase es mejor utilizar un metrónomo, situando las señales S de tal manera que cada golpe de aquél coincida con el pasaje del carro por una señal. Los espacios recorridos estarán entre sí como 1^2 , 2^2 , 3^2 , . . . , si se mide a partir del instante en que el carro se pone en movimiento.

La instalación anterior es enteramente semejante a la que utilizara Galileo con el mismo objeto.

Resulta de los casos estudiados que un cuerpo sometido a una fuerza constante, se mueve con movimiento uniformemente acelerado. Como veremos, este principio es válido cualquiera que sea la naturaleza de las fuerzas.

B. — LOS PRINCIPIOS DE NEWTON O PRINCIPIOS DE LA DINÁMICA

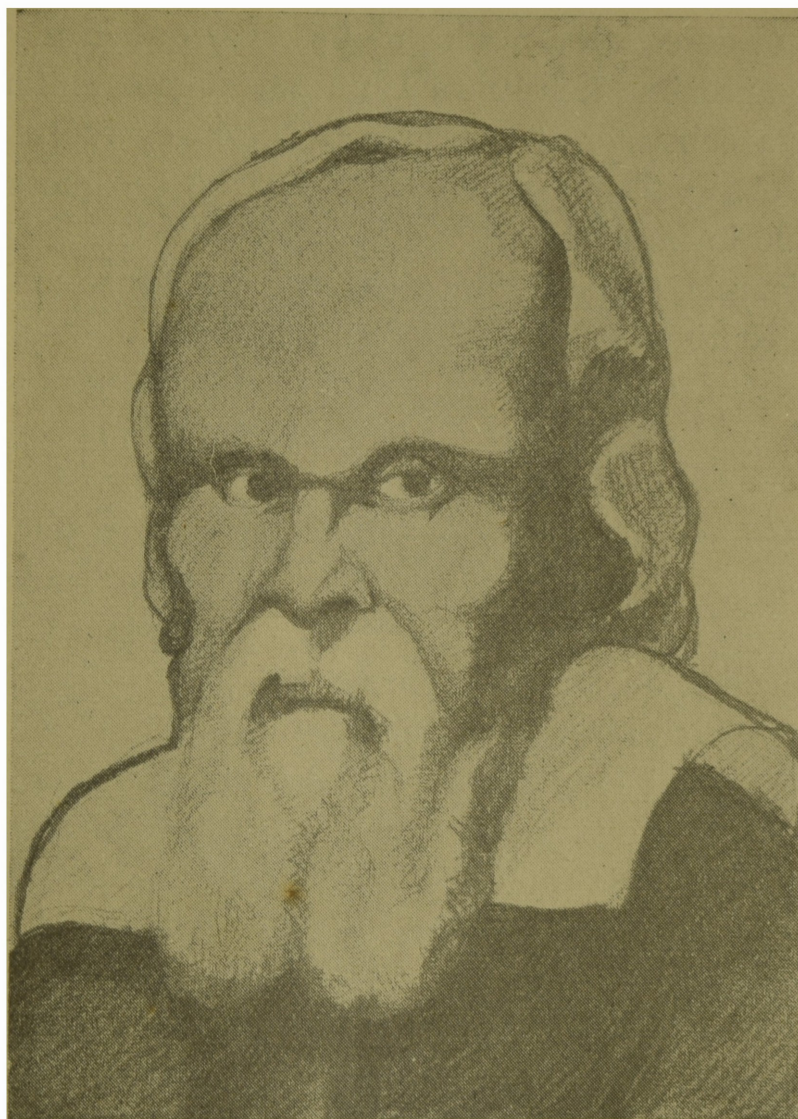
10. **El principio de inercia.** — Se ha vinculado ya desde los primeros párrafos el concepto de fuerza al de variación en el estado de movimiento y es ahora el momento oportuno de dar un sentido preciso a tal vinculación.

Durante mucho tiempo creyeron los antiguos físicos y filósofos que todo estado de movimiento, diferente del reposo, requería la acción permanente de una causa, esto es, de una fuerza. Algunos conceptuaban verdad irrefutable el contenido del siguiente razonamiento: « como lo finito no puede engendrar lo infinito, un cuerpo no podrá permanecer en movimiento durante un tiempo ilimitado si la fuerza que lo mueve actúa durante un tiempo finito ». Algunos autores se lo atribuyen al mismo Aristóteles. Su lenguaje carece de claridad cuando examina el proceso del cual nos ocupamos. Así, p. ejem., en el tomo V de su obra dedicado a la Física ⁽¹⁾ dice: « Ninguna persona podría precisar porque un cuerpo, una vez puesto en movimiento, debe detenerse en alguna parte, y, en tal caso ¿porqué aquí y no allá?. Por lo tanto debe quedar en reposo o bien conservar indefini-

(¹) Véase EDMOND HOPPE. *Histoire de la Physique Payot*. París 1928. Traducción del alemán de Henri Besson.

damante su movimiento en el espacio, mientras que una fuerza mayor no se oponga a ello».

Fué un adelanto inmenso el realizado por Galileo al descubrir que la existencia de una causa, es decir, de una fuerza, se revela en la existencia de una aceleración.



GALILEO 1564-1642.

Que un cuerpo que pasa de repente del estado de reposo al de movimiento debe estar sometido a la influencia de una causa que antes no obraba, resulta de la raíz misma de los principios que rigen nuestra mente en la interpretación de los hechos de la experiencia. No ocurre lo mismo con la consideración de un cuerpo cuyo estado de movimiento — diferente al reposo — no se modifica. El mero cambio de lugar sugería erróneamente a los espíritus la acción de una causa cuya inexistencia fué evidente al genio de Galileo.

El expresó su pensamiento diciendo que un cuerpo no puede alterar su estado de reposo o de movimiento sin la intervención de una causa, esto es, de una fuerza.

Newton ha enunciado ese principio, conocido con el nombre de principio de inercia, de la siguiente manera: *Un punto material sobre el cual no actúa ninguna fuerza se encuentra en reposo o animado de un movimiento rectilíneo y uniforme.*

La exactitud de esta ley resulta de observar que el movimiento de un cuerpo se aproxima tanto más a un movimiento uniforme, cuanto mejor se logra abstraer al cuerpo a la acción de fuerzas y, porque jamás se ha observado un movimiento variado sin que se encuentre una causa que lo motive.

Así, por ejemplo, si una esferita (fig. 82) cae sobre un plano inclinado, que se continúa en una plataforma horizontal, cuando la esfera



Fig. 82.

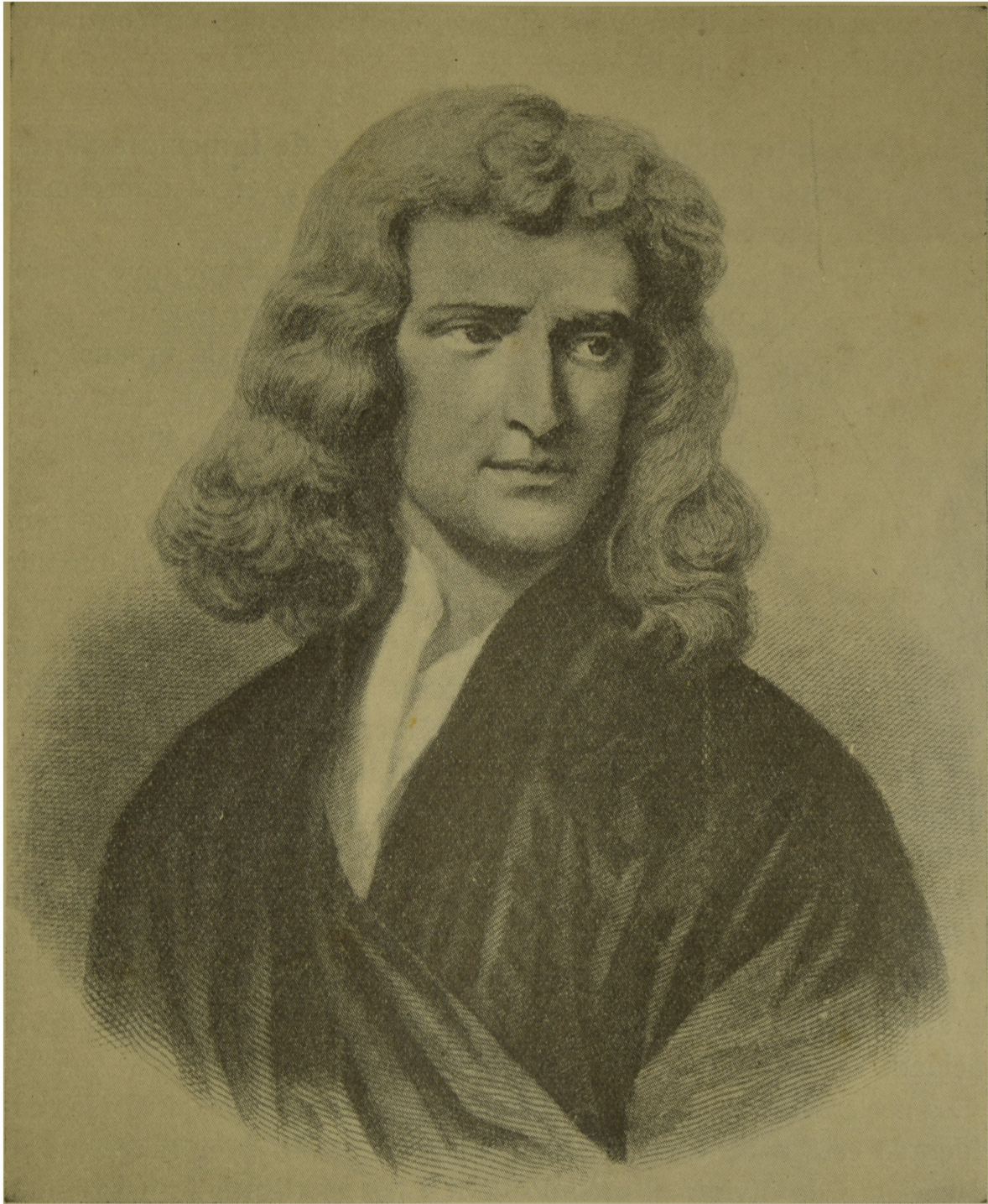
llega en su caída al punto *P*, la componente de la gravedad en la dirección de su movimiento se anula y éste se continuará sobre la pla-

taforma. A medida que se pulen más y más, tanto la esfera como el plano, el movimiento se acerca más y más también a un movimiento uniforme. Si el plano fuera perfectamente horizontal y el roce nulo, el cuerpo estaría enteramente abstraído a la acción de fuerzas. La experiencia muestra que cuanto mejor se satisfacen esas condiciones ideales, tanto más se acerca el movimiento a ser uniforme.

Galileo usó en sus observaciones el método que acabamos de esbozar. Las observaciones se efectúan dejando caer la esfera de diferentes posiciones del plano y midiendo con un cronómetro el tiempo que tarda en recorrer espacios iguales sobre el plano horizontal. Resulta que el movimiento es, en todos los casos, uniforme, si bien la velocidad depende de la posición del plano inclinado donde se abandonó la esfera a la acción de la gravedad.

Consideraciones enteramente idénticas corresponden al caso en que la esfera se pone en movimiento, sobre el plano horizontal, por un choque.

De este principio resulta que *no es posible develar el movimiento de un sistema, cuando es rectilíneo y uniforme, por experimentos mecánicos realizados en él.*



Is. Newton

Este enunciado es de importancia fundamental en el estudio de la teoría de la relatividad. Ya veremos en el último tomo de ésta obra que aquélla imposibilidad abarca no solamente a los experimentos mecánicos sino también a los ópticos, eléctricos, etc. en contraposición a lo que postula la ciencia clásica.

11. Concepto vectorial de la velocidad y de la aceleración. — Por el principio de inercia resulta que un cambio en la dirección del movimiento significa la existencia de una causa.

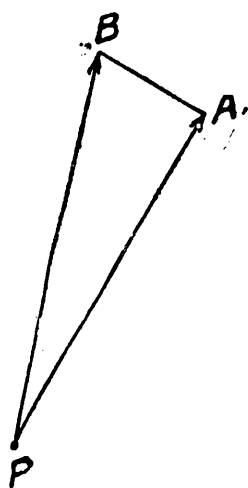


Fig. 83.

La experiencia enseña, efectivamente, que siempre que la dirección del movimiento se modifica, se encuentra una influencia exterior que la produce. Así, por ejemplo, nadie va a dudar que si la luna gira al rededor de la tierra, es debido a una influencia de ésta.

Es entonces, claro hasta la evidencia, que tanto desde el punto de vista filosófico como del dinámico una velocidad no puede quedar determinada por el número que la mide, esto es, por su módulo, sino que es necesario conocer su dirección, lo que significa reconocerle el carácter de *vector*.

Un cambio en la dirección del movimiento, aun cuando no se modifique su módulo, significa, pues, la existencia de una fuerza y, por lo tanto, de una aceleración.

Sean PA y PB (fig. 83) los vectores que representan en magnitud y dirección las velocidades de un punto material en dos instantes separados por el intervalo de tiempo dt . La diferencia de esos dos vectores es el vector AB , que representa, por lo tanto, el cambio de velocidad.

La aceleración es también, evidentemente, un vector; en el caso considerado está dada en dirección por el vector AB y en magnitud por el cociente de dividir el módulo de AB por el tiempo infinitésimo dt .

12. El principio de masa o segundo principio. — De la consideración que antecede surge la necesidad de investigar qué relación de dependencia existe entre las fuerzas y las aceleraciones que determinan sobre los cuerpos en que actúan.

El plano inclinado permite producir en el mismo cuerpo, según se vió, aceleraciones diferentes, con fuerzas diversas, para lo cual es suficiente modificar su inclinación.

La aceleración a puede determinarse, en cada caso, midiendo el tiempo t que tarda el carro en recorrer un espacio dado e mediante la ecuación

$$e = \frac{1}{2} at^2.$$

Se determina la fuerza que corresponde a una inclinación dada, midiendo la diferencia de nivel entre los extremos A y B del hilo (figura 81) y la distancia entre los mismos puntos.

La experiencia enseña que cualquiera sea la inclinación del plano, el cociente de dividir la fuerza que actúa sobre el cuerpo por la aceleración del movimiento de éste es, para el mismo cuerpo, invariable, es decir, que si sobre un determinado cuerpo actúan, sucesivamente, fuerzas $F_1, F_2, F_3 \dots, F_n$, las aceleraciones $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ que determinan en él serán tales que:

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \dots = \frac{F_n}{a_n} = \text{const.}$$

Si el cuerpo en cuestión cae libremente, la fuerza que lo mueve es su peso P y la aceleración es la de la gravedad, que indicamos con g . El cociente $P:g$ tiene el mismo valor que los anteriores.

Por lo que precede, es evidente que esa relación constante para todo cuerpo entre la fuerza aplicada y la aceleración producida no depende ni de la fuerza ni de la aceleración, ni de la velocidad, por lo tanto, sino del cuerpo mismo. Este cociente no se modifica para un mismo cuerpo, cualquiera que sea su estado y cualquiera que sea la naturaleza de la fuerza que lo acelera, debemos admitir que *representa, por lo menos en apariencia, una calidad invariable y medible de la materia*. Se llama *masa de la materia*.

Si indicamos con m a la masa, la propiedad encontrada se expresará por la ecuación:

$$\frac{F}{a} = m \quad \text{o} \quad F = ma, \quad [\text{I}]$$

donde F es la fuerza que produce la aceleración a , y m la masa de la materia en movimiento.

La ecuación $F = ma$ fué establecida por Newton y elevada por él mismo a la categoría de principio, en cuyo carácter la reconoceremos de aquí en adelante.

Según ese principio, la existencia de una aceleración implica la existencia de una fuerza exterior, esto es, de una influencia proveniente de otros cuerpos o de estados de los mismos.

La fuerza actuante sobre un cuerpo en una dirección, *cualquiera que sea su naturaleza*, está dada por el producto de la masa por la aceleración según esa misma dirección, es decir, *la fuerza es un vector paralelo al vector aceleración*. Si la aceleración es constante en magnitud y dirección, la fuerza es también constante y de la misma dirección.

Este principio contiene, en cierto sentido, el principio de inercia, pues si la fuerza es nula, no pudiendo ser nula la masa, debe serlo la aceleración. El cuerpo estará en reposo o animado de un movimiento rectilíneo y uniforme.

La ecuación de Newton puede escribirse de la siguiente manera, poniendo en lugar de la aceleración a su definición diferencial:

$$F = m \frac{d^2 e}{dt^2}, \quad [I_1]$$

es decir, que la fuerza es igual a la masa por la derivada segunda del espacio con respecto al tiempo dos veces.

Importante es también la siguiente forma:

$$F = m \frac{dv}{dt} \quad \text{o} \quad F = \frac{d(mv)}{dt}, \quad [I_2]$$

pues m es una constante.

El producto mv se conoce con el nombre de *cantidad de movimiento* y la ecuación de Newton dice que la fuerza es igual a la variación en el tiempo de la cantidad de movimiento, puesto que $d \cdot mv$ es la diferencia entre las cantidades de movimiento correspondientes a dos instantes infinitamente próximos separados por el intervalo de tiempo dt .

De las consecuencias importantes de este principio nos ocuparemos en el capítulo siguiente.

13. Algunas experiencias sencillas. — La dependencia entre la fuerza y la aceleración puede ponerse de manifiesto, cualitativamente, en una forma muy sencilla. Se toma un hilo de coser y se muestra que puede soportar un peso de un kilogramo, si no se tira con brusquedad del hilo, mientras que suspendiendo pesos mucho más pequeños, 50 gramos, por ejemplo, y dando un tirón, el hilo se corta.

La explicación es que, si se mueve bruscamente la mano hacia arriba, se trata de imprimir a la masa suspendida una velocidad muy grande en un tiempo muy pequeño, esto es, se trata de comunicarle una aceleración muy grande. La fuerza correspondiente al producto de la masa pequeña por la aceleración grande debe soportarla el hilo, y ocurre que, para un movimiento repentino, el producto sobrepasa la resistencia de aquél y, por lo tanto, se rompe.

Por el mismo motivo una puerta puede cerrarse empujándola suavemente con un dedo, mientras que un proyectil de una arma de fuego la perfora sin moverla.

Una experiencia que llama la atención es la siguiente: una esfera E (fig. 84) de plomo, está suspendida de un hilo; un hilo de la misma clase está atado a la esfera por debajo. Si se tira de éste, aumentando lentamente la tensión, el hilo de arriba se alarga hasta que por fin se corta, pues soporta aquella tracción y el peso del cuerpo. Si en lugar de aumentar lentamente la fuerza, se hace una tracción brusca, se rompe el hilo de abajo, pues se trata de imprimir a la masa una aceleración tan grande que corresponde a una fuerza que el hilo no puede resistir. Cuando la masa no ha recorrido el espacio en que puede alargarse el hilo de arriba sin romperse, la fuerza que tiene que soportar el de abajo es tan grande que se corta.

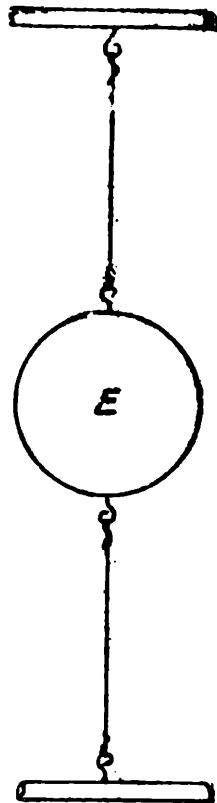


Fig. 84.

14. **Comparación de masas.** — Dada la importancia del concepto de masa, se hace indispensable establecer un método de comparación de masas, el cual resulta fácilmente de la ecuación de Newton, y del hecho experimental de que todos los cuerpos caen libremente con la misma aceleración g .

Si indicamos con P_1 y P_2 los pesos de dos cuerpos y con m_1 y m_2 sus masas, se tiene:

$$P_1 = m_1 g \quad P_2 = m_2 g \quad [19]$$

y, por lo tanto,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{P_1}{P_2}, \quad [20]$$

igualdad que nos muestra que la relación entre las masas de dos cuerpos es la misma que entre sus pesos. Toda pesada, en una balanza es, según eso, al mismo tiempo, una comparación de masas.

15. Centro de masa. — La introducción del concepto de masa permite dar otro alcance al centro de gravedad de los cuerpos.

Las coordenadas de ese punto están dadas por las relaciones

$$\xi = \frac{\sum px}{P} \quad , \quad \eta = \frac{\sum py}{P} \quad \text{y} \quad \zeta = \frac{\sum pz}{P} \quad ,$$

donde p es el peso de un elemento de coordenadas x, y, z y $P = \sum p$ el peso total del cuerpo.

Por la ecuación de Newton se tiene

$$p = mg \quad \text{y} \quad P = Mg \quad ,$$

si se indica con m la masa de un elemento cualquiera y con M la masa total. Reemplazando en las ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$\xi = \frac{\sum mx}{M} \quad , \quad \eta = \frac{\sum my}{M} \quad \text{y} \quad \zeta = \frac{\sum mz}{M} \quad . \quad [21]$$

Por este motivo al centro de gravedad se le designa también centro de masa.

El centro de masa tiene sentido en todo movimiento, cualquiera que sea la naturaleza de la fuerza que lo produzca.

16. La máquina de Atwood. — La máquina de Atwood se presta cómodamente a la comprobación de los principios anteriores. Consiste (fig. 85) en una polea montada sobre un eje horizontal que puede girar, debido a la pequeñez del roce, con entera facilidad. Situada exactamente debajo de ella se encuentra una regla vertical dividida, a la que se adaptan dos planchetas, N , corredizas, de las cuales una tiene en su parte media una abertura cilíndrica.

Si de los extremos de un hilo delgado que pasa por la garganta de la polea penden dos masas M iguales, el sistema estará en equilibrio, por lo visto en el capítulo precedente.

Si en uno de los lados se agrega una sobrecarga, esto es, una pequeña masa m , se inicia un movimiento que consiste en un mo-

vimiento de rotación de la polea y en un movimiento de conjunto de las masas ligadas por el hilo.

Vamos a suponer en lo que sigue que podemos prescindir del movimiento de rotación de la rueda, sin analizar por el momento su influencia, lo cual realizaremos más adelante.

17. Comprobación del principio de inercia. — Se coloca sobre la masa M de la izquierda una masa m pequeña, de forma alargada, a fin de que la plataforma anular pueda detenerla.

El movimiento de caída se inicia en el momento en que se desee, dejando caer la plataforma girable I , sobre la cual descansa la masa con la sobrecarga. Esta es detenida por el anillo, y a partir de este momento el movimiento se continúa por inercia.

Se mide con un cronómetro el tiempo transcurrido entre el instante en que la sobrecarga es abandonada y aquel en que la masa choca con la plataforma inferior. Repitiendo la experiencia y situando la plataforma a distancias doble, triple, etc., se observará que los tiempos son también el doble, el triple, etc. Naturalmente, la distancia entre la plataforma girable y el anillo debe ser invariable.

• Como experiencia de clase conviene usar un metrónomo y disponer las cosas de tal manera que iniciándose el movimiento en el preciso instante de uno de los golpes, el abandono de la sobrecarga coincida con el golpe siguiente y la llegada a la plataforma inferior, con el tercero o el cuarto, etc. Las distancias entre las plataformas N serán doble, triple, etc.

18. Comprobación del principio de masa. — Que mientras existe la sobrecarga, el movimiento es uniformemente acelerado, puede

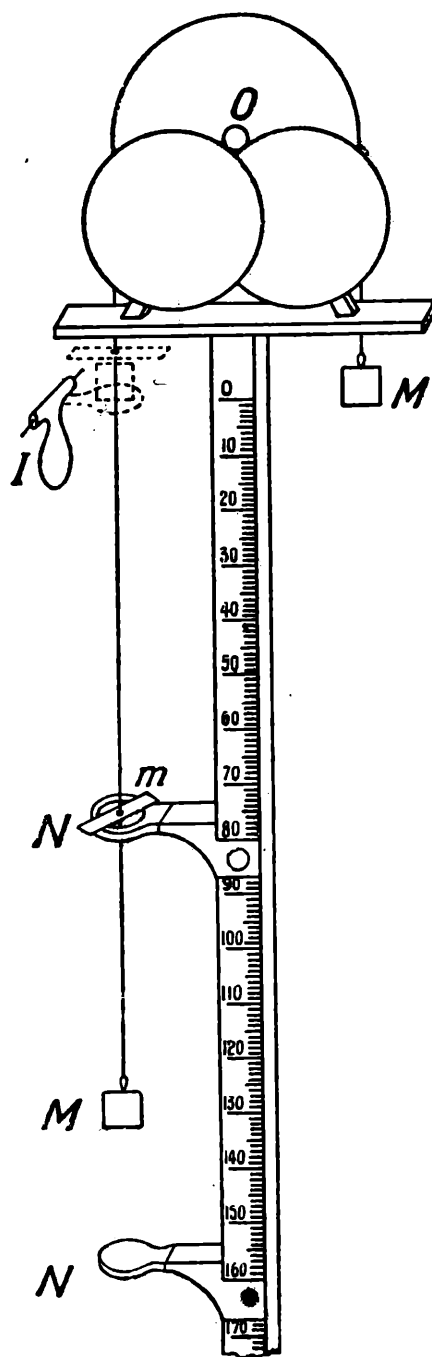


Fig. 85.

comprobarse situando el anillo anular a distancias tales de la plataforma girable que la sobrecarga sea abandonada al fin del primer golpe del metrónomo o del segundo, etc. Se verá que esas distancias están entre sí como 1^2 , 2^2 , 3^2 .

Para comprobar el principio de masa se toman tres pequeñas sobrecargas iguales y se sitúan en una primera experiencia dos en el extremo de la izquierda y una en la de la derecha, y en una segunda experiencia las tres a la izquierda. Así, en ambos casos, la masa que se mueve es la misma, pero la fuerza que produce el movimiento es, en el segundo caso, triple que en el primero.

Midiendo en cada una de las experiencias el espacio recorrido en tiempos iguales, a contar del momento en que se inicia la caída, resulta que cuando la fuerza es triple, el espacio es también tres veces mayor, lo que significa que la aceleración ha aumentado en la misma proporción, pues, por las leyes del movimiento uniformemente acelerado, los espacios recorridos en tiempos iguales están entre sí como las aceleraciones.

El cociente de dividir la fuerza por la aceleración ha permanecido invariable, como lo exige el principio de Newton.

19. Aceleración en la máquina de Atwood.— Por la aplicación de la ecuación de Newton

$$F = ma \quad [I]$$

puede calcularse en forma sencilla la aceleración de la caída en la máquina de Atwood.

Sean M y M las masas iguales que penden en los extremos del hilo y m la masa de la sobrecarga que produce la caída; la fuerza que causa el movimiento es el peso de la masa m . Si lo indicamos con p , por la misma ecuación de Newton es:

$$p = mg.$$

La masa que se mueve es $M + M + m$. Si reemplazamos en la [I] se tiene:

$$mg = (2M + m) a, \quad [22]$$

de donde resulta para la aceleración buscada el valor

$$a = \frac{m \cdot g}{2M + m} \quad [23]$$

20. El principio de la igualdad de la acción y de la reacción. — Este principio debido a Newton, que ya hemos citado, se enuncia diciendo:

La reacción es igual y contraria a la acción, o las acciones que dos cuerpos ejercen, uno sobre otro, son iguales y de sentidos opuestos.

Un imán atrae a un trozo de hierro con cierta fuerza, pero éste a su vez atrae a aquel como una fuerza igual y contraria.

Si se deforma un resorte por un peso, una espiral metálica, por ejemplo, la reacción de ésta es igual y contraria a la acción de aquél.



Fig. 86.

Ilustremos estas explicaciones con un experimento. Tengamos un cañoncito (fig. 86) con dos bocas en cada una de las cuales puede adaptarse con buen ajuste un proyectil. Si está uno solo de éstos y se inflama la pólvora, no se produce otro movimiento que la salida de los productos de la combustión por el extremo abierto. Si están puestos los dos a la vez, la explosión produce el movimiento de los dos proyectiles, lo que prueba que la expansión se apoya sobre un proyectil para empujar al otro y recíprocamente. Sean los proyectiles de masas iguales o enteramente diferentes, el cañoncito mismo no se mueve, lo que prueba que las fuerzas actúan sobre ellos son iguales y opuestas.

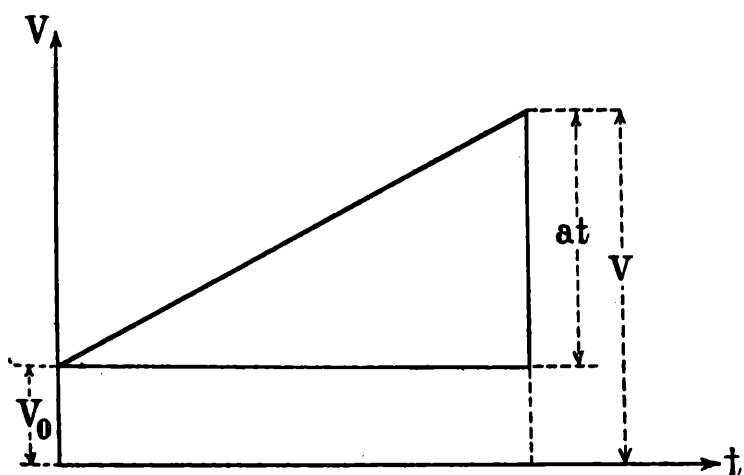
A menudo encontraremos en el curso de nuestro estudio ejemplos de diversa índole que corroboran este principio.

CAPITULO IV

CONSECUENCIAS DE LOS PRINCIPIOS DE LA DINÁMICA. APLICACIONES

A. — CONSECUENCIA DE LOS PRINCIPIOS DE LA DINÁMICA

1. **Ecuaciones generales del movimiento uniformemente variado.** — Consideramos en este primer apartado movimientos simultáneos que se producen en la misma dirección. La ley del movimiento que componen



se deduce mediante el *principio de superposición*, que está contenido en el de masa, y que estudiaremos, en su forma general, en el número que sigue.

Si un cuerpo de masa m se mueve con la aceleración a , actúa sobre él en la dirección

de ésta, según el segundo principio de la dinámica, una fuerza dada por la expresión

$$F = ma. \quad [I]$$

Si en un instante dado la fuerza deja de actuar, el cuerpo conservará, por el *principio de inercia*, la velocidad que poseía en ese momento. Según esto, todo movimiento puede descomponerse en todo instante en dos partes: uno que es la continuación del anterior y otro que es producido por la fuerza que actúa; lo que resulta, ade-

más, evidente de la consideración de que produciendo una fuerza constante una aceleración constante ésta es independiente de la velocidad.

Si en un movimiento de esa naturaleza contamos el tiempo a partir de un instante en el cual la velocidad tenga el valor v_0 , la velocidad t segundos más tarde, será, por lo que antecede:

$$v = v_0 \pm at. \quad [1]$$

Corresponde el signo más o el menos según que el movimiento sea acelerado o retardado (figuras 87 y 88).

El espacio estará dado por la relación

$$e = e_0 + v_0 t \pm \frac{1}{2} at^2, \quad [2]$$

donde e_0 es el espacio recorrido entre el momento en que se inició el movimiento y el instante en que se empezó a contar el tiempo.

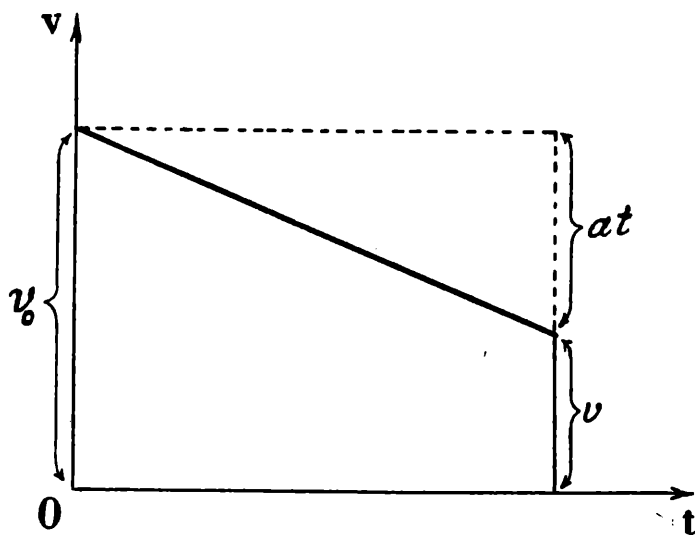


Fig. 88.

2. El principio de superposición de los movimientos. — Si una fuerza constante actúa sobre un cuerpo en reposo, determinará en él, como se sabe, un movimiento uniformemente acelerado en su misma dirección. Cualquiera sea el instante que se considere, esto es, cualquiera sea la velocidad del cuerpo, la fuerza producirá en él la misma aceleración que si estuviese en reposo.

Por otra parte, puesto que fuerzas $F, 2F, 3F, \dots$, producen en el mismo cuerpo aceleraciones $a, 2a, 3a, \dots$, es evidente que fuerzas que actúan en la misma dirección, del mismo sentido u opuestas, producen el mismo efecto que si estuviesen solas.

Ya de aquí resultaría que si dos fuerzas actúan simultáneamente sobre un mismo cuerpo, cualquiera que sea el ángulo que forman entre sí, cada una de ellas produce el mismo efecto que si estuviese sola, pues tal cosa vale para 0° y 180° .

Además, por el principio de inercia, un cuerpo sobre el cual no actúa ninguna fuerza se moverá con movimiento uniforme y rectilíneo; si la

velocidad es v en la dirección AB (fig. 89), este movimiento perdurará en magnitud y dirección indefinidamente.

Si en un momento dado actúa una fuerza en la dirección AC , el móvil sufrirá un cambio continuo de movimiento en esa dirección, en virtud del segundo principio, de tal manera que en cierto intervalo de tiempo dt la velocidad pasa del valor y dirección AB al AB_1 , que se obtiene sumando geoméricamente el vector BB_1 igual en magnitud y dirección al producto de la aceleración que produce la fuerza por el tiempo dt . En el intervalo de tiempo siguiente la velocidad alcanza el valor y dirección que representa el vector AB_2 que resulta de sumar al vector AB_1 el vector B_1B_2 igual en magnitud y dirección al BB_1 .

La construcción anterior se funda en la ecuación de Newton — supuesto todavía que actúa una sola fuerza — pues no figurando en ella la velocidad, resulta que la acción de una fuerza sobre un cuerpo no depende ni de la magnitud ni de la dirección de aquélla, de la cual

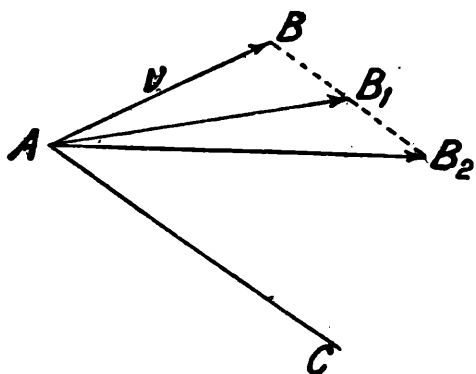


Fig. 89.

se puede, por lo tanto, hacer completa abstracción. Si actúan dos fuerzas formando un ángulo cualquiera, sus acciones respectivas deben ser independientes entre sí, en virtud de la advertencia hecha más arriba. Además, puesto que dinámicamente el efecto de una fuerza es modificar la velocidad del cuerpo sobre el que actúa, es claro que otra fuerza que actúe simultáneamente producirá el

mismo efecto que produciría si estuviese sola, pues su acción no depende ni de la magnitud ni de la dirección de la velocidad del movimiento que determina la otra.

De las consideraciones anteriores resulta que si sobre un cuerpo actúan simultáneamente fuerzas cualesquiera cada una de ellas produce la misma aceleración que si estuviese sola. Este es un principio que se conoce con el nombre de principio de independencia o superposición de las fuerzas.

Aun cuando ya Newton hizo notar que el principio de la independencia de las fuerzas y por lo tanto, como se verá en seguida, la regla de paralelogramo, están esencialmente contenidos en el principio de masa y de que lord Kelvin y Tait, Helmholtz y otros han hecho resaltar esta circunstancia, existen autores que consideran, a este prin-

principio independiente de los anteriores y formulan un cuarto principio de la mecánica.

Supongamos (fig. 90) que sobre un cuerpo de masa m actúan dos fuerzas F_1 y F_2 de direcciones diferentes. Las aceleraciones a_1 y a_2 que imprimirían, respectivamente, al cuerpo actuando solas están definidas por las relaciones:

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = m. \quad [3]$$

Por el principio de independencia, la posición del punto al fin de un intervalo de tiempo Δt se obtiene dejando actuar una fuerza después de la otra. La fuerza F_1 llevaría el punto de la posición P a la P_1 donde $PP_1 = \frac{1}{2} a_1 \Delta t^2$; haciendo actuar la otra fuerza el punto se movería paralelamente a ella en el camino

$$P_1 P_2 = \frac{1}{2} a_2 \Delta t^2.$$

Es claro que el pasaje de la posición P a la P_2 , bajo la acción simultánea de las dos fuerzas, se realizará sobre cierta línea, que podemos suponer, para más generalidad, curva. Si el tiempo Δt es suficientemente pequeño, esta línea será diagonal del paralelogramo infinitamente pequeño construido sobre PP_1 y $P_1 P_2$.

El pasaje del punto de la posición P a la P_2 puede suponerse, por lo tanto, como debido a la acción de una sola fuerza, R , que actuase en dirección PP_2 y tal que determinase una aceleración en la misma dirección, definida por las relaciones

$$PP_2 = \frac{1}{2} a \Delta t^2 \quad [4]$$

$$\frac{R}{a} = m = \frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} \quad [5]$$

lo cual es posible únicamente si R y a son las diagonales de los paralelogramos construidos sobre F_1 y F_2 , a_1 y a_2 , respectivamente (fig. 91).

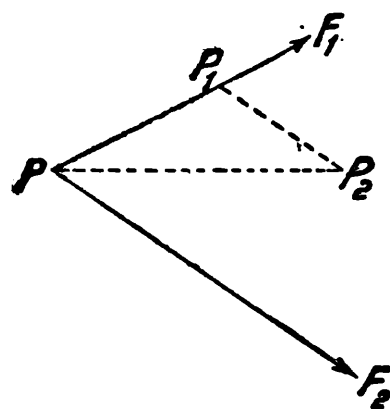


Fig. 90.

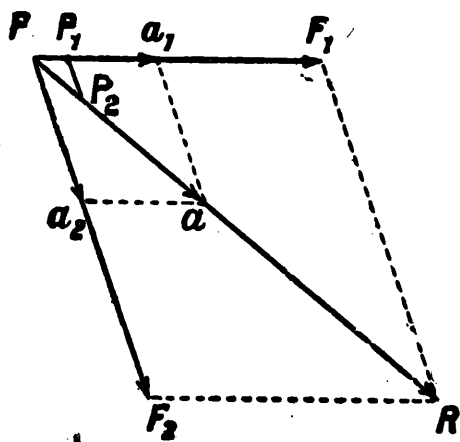


Fig. 91.

Por lo tanto, si un número cualquiera de fuerzas actúa sobre un punto material, el efecto sobre él es idéntico al que produciría una sola fuerza igual a la resultante que se obtuviera por la regla del paralelogramo; la aceleración resultante se obtiene con la misma regla aplicadas las aceleraciones correspondientes a las fuerzas.

Del principio de superposición fluye también la regla de paralelogramo de las velocidades.

La regla del paralelogramo resulta entonces de las leyes de la dinámica; la característica del equilibrio de fuerzas aplicadas sobre un cuerpo será la ausencia de aceleración en el movimiento de éste, esto es, el cuerpo estará en reposo o animado de un movimiento uniforme.

Según este principio, un movimiento puede ser descompuesto en otros cuya superposición dé un movimiento idéntico.

3. Experimentos. — Consideremos algunas experiencias que comprueban lo que antecede y que corroboran por lo tanto, la ley de Newton.

Dos esferitas de madera *A* y *B* (fig. 92) pueden ser puestas en movimiento levantando y dejando caer el martillo *M*, el cual, al chocar en la varilla flexible *V*, deja caer verticalmen-

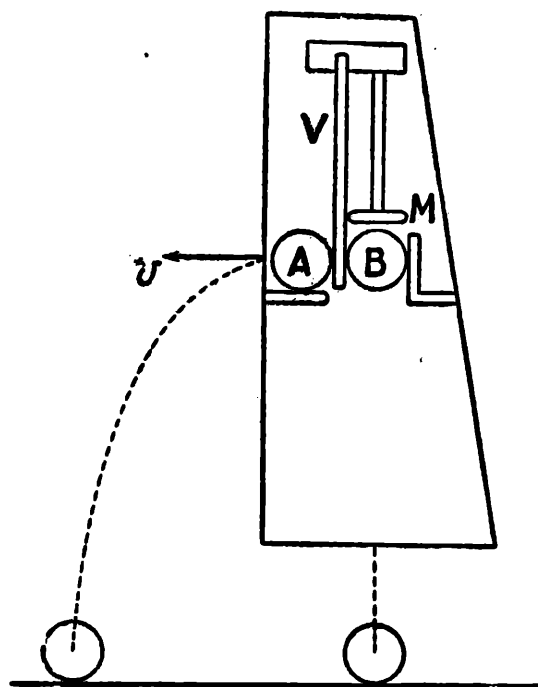


Fig. 92.

te a *B* por un orificio de la plataforma y lanza a *A* con una velocidad horizontal *v*. La esfera *A* cumple simultáneamente el movimiento correspondiente a *v* y una caída vertical. La experiencia muestra que ambos cuerpos llegan a un plano horizontal al mismo tiempo, lo que significa que el movimiento de caída de *A* se realiza como si estuviese solo.

Una experiencia muy ilustrativa y convincente es la que sigue: un carrito (fig. 93) provisto de cuatro ruedas que pueden girar sin frotamiento sensible, está provisto de un cañoncito vertical *C* a resorte, el cual se pone en juego presionando sobre la palanca *P*. Como proyectil se utiliza una pequeña esfera de madera, vidrio o metal, según la fuerza del resorte.

Se pone el carrito en movimiento sobre rieles horizontales, dejándolo caer, por ejemplo, por un trayecto inclinado de la vía. Un tope, T , colocado entre aquéllos, acciona el resorte, y la esferita es lanzada hacia arriba, mientras que el carro continúa, por inercia, con una velocidad igual a la que tenía en el momento del disparo. El proyectil cumple en el aire un movimiento curvo y va a caer precisamente en la boca del cañón.

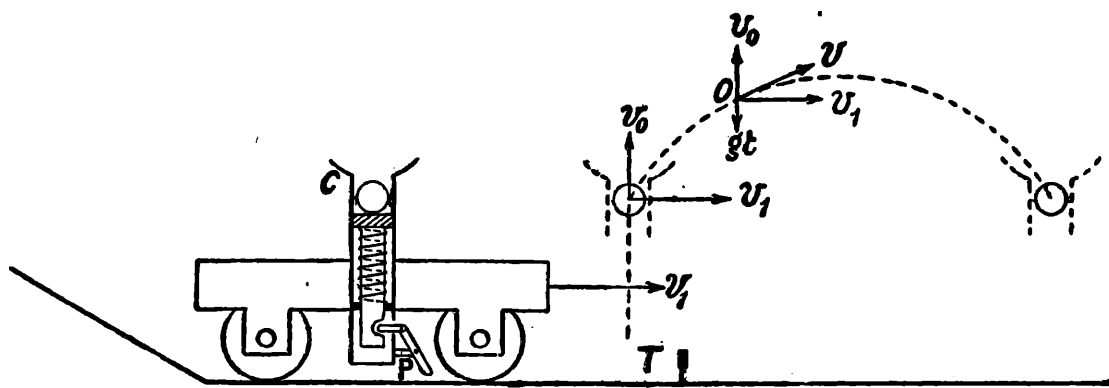


Fig. 93.

Discutamos detenidamente ese hecho. La esferita va animada de la misma velocidad horizontal v_1 del carrito, de tal manera que en el preciso momento del disparo el proyectil está bajo la acción de la velocidad horizontal v_1 y de la vertical v_0 que le comunica el resorte hacia arriba. En seguida comienza a actuar la gravedad y se le superpone un tercer movimiento, que es el de la caída, de tal manera que, en cierto instante t , el cuerpo está sometido a la velocidad horizontal v_1 , a la vertical v_0 hacia arriba y la vertical gt hacia abajo. La velocidad resultante es la v , que cambia de magnitud y dirección continuamente, resultando como trayectoria la curva del dibujo.

La experiencia corrobora, pues, no sólo el principio de inercia, puesto que la velocidad v_1 se ha conservado, sino también el principio de la independencia de los movimientos, ya que en nada ha sido influido el movimiento horizontal de velocidad v_1 por los otros dos.

Exactamente el mismo experimento es el que consiste en saltar verticalmente hacia arriba en un tren en marcha; se cae, como es sabido, en el mismo lugar del vagón. No es necesario recurrir al tren en movimiento, pues la tierra misma se mueve con una velocidad de consideración; en ella nos movemos con la misma facilidad en todas direcciones, a pesar de lo complejo de su movimiento, lo que constituye una prueba irrefragable del principio de independencia.

4. **Movimiento sobre un plano inclinado.** — Se ha visto anteriormente, que un cuerpo abandonado a sí mismo sobre un plano inclinado cae sobre él con un movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado. Si se le comunica en una dirección cualquiera una velocidad inicial, ésta se conserva por inercia, superponiéndosele el movimiento de caída. El movimiento resultante será, en general, un movimiento curvo. Puede inscribirse situando sobre el plano una hoja de papel delgado debajo de una hoja de papel de calcar y lanzando encima una esferita metálica.

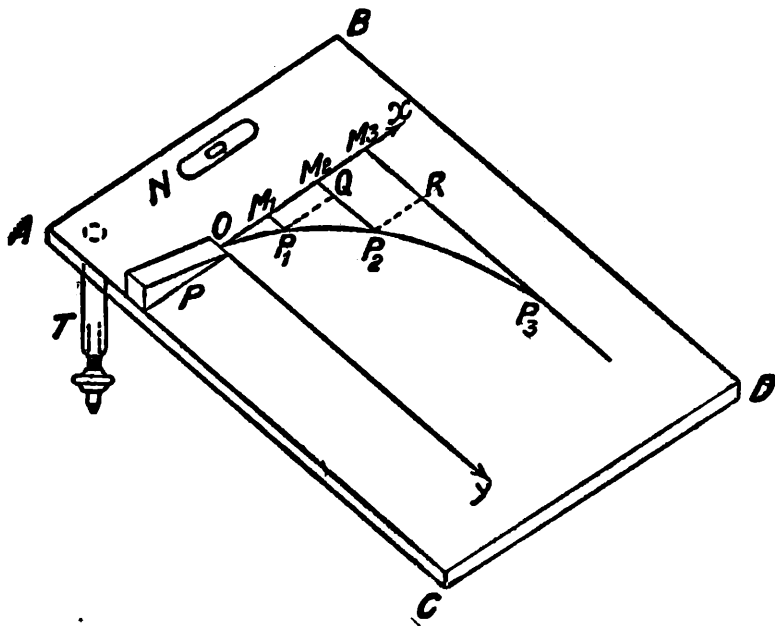


Fig. 94.

La experiencia se realiza cómodamente con un plano como el del dibujo (fig. 94). Se sitúa el lado AB en dirección horizontal por medio de los tornillos T y un nivel N y se deja caer una esferita metálica por el planito inclinado P , de suerte que llegue a O con cierta velocidad en la dirección Ox , paralela a AB . Si el plano no estuviese inclinado en la dirección de AC , la esfera se movería con movimiento rectilíneo y uniforme, a partir de O , en dirección Ox . Por la inclinación del plano actúa la gravedad y se superpone a aquel movimiento el de caída, resultando un movimiento cuya trayectoria es la curva OP_1, P_2, \dots

Por el principio de superposición las posiciones sucesivas del punto se obtienen dividiendo el tiempo en intervalos pequeños y produciendo en esos intervalos un movimiento después del otro. Puesto que el movimiento según Ox es uniforme, podemos dividir el eje en partes iguales OM_1, M_1M_2, \dots , y considerar esas partes como correspondientes a intervalos iguales τ de tiempo.

En el primer intervalo comprendido entre O y M_1 el movimiento según Ox conduce al móvil de O a M_1 siendo $OM_1 = v\tau$, si v es la velocidad con que llega a O la esferilla al caer sobre el planito P ; el movimiento de caída aplicado en seguida conduce la esferita a la posición final P_1 , siendo $M_1P_1 = \frac{1}{2}a\tau^2$ si a es la aceleración del movimiento en

inicial, ésta se conserva por inercia, superponiéndosele el movimiento de caída. El movimiento resultante será, en general, un movimiento curvo. Puede inscribirse situando sobre el plano una hoja de papel delgado debajo de una hoja de papel de calcar y lanzando encima una esferita metálica.

dirección Oy . En el intervalo siguiente pasamos, primeramente, de P_1 a Q y luego de Q a P_2 . El primer pasaje no ofrece dificultad; en el segundo, de Q a P_2 , no debe olvidarse que existe un movimiento de inercia en dirección de Oy por la velocidad $a\tau$ adquirida en esa dirección en el primer intervalo, de modo que $QP_2 = a\tau^2 + \frac{1}{2} a\tau^2 = \frac{3}{2} a\tau^2$.

De esa manera se obtienen las posiciones P_1, P_2, P_3 , etc., del punto al fin de intervalos sucesivos de tiempo de duración τ .

Nos aproximamos tanto más al movimiento real cuanto menor es τ .

Una comprobación cualitativa de estas consideraciones se obtiene en la siguiente forma: Se divide el eje Ox en partes iguales $OM_1, M_1M_2, M_2M_3, \dots$, a las que se hace corresponder, por las consideraciones antes enunciadas, intervalos iguales de tiempo. Trazando las ordenadas M_1F_1, M_2P_2, \dots , comprendidas entre los puntos de división y la curva obtenida, es claro que OM_1, OM_2, OM_3 representan los espacios recorridos por el móvil en dirección Ox con la velocidad constante igual a la de la caída desde P , en los tiempos respectivos $\tau, 2\tau, 3\tau$, mientras que M_1P_1, M_2P_2, M_3P_3 son los espacios recorridos por el móvil con el movimiento acelerado que corresponde a la caída en la dirección Oy .

Midiendo las longitudes $M_1P_1, M_2P_2, M_3P_3, \dots$, en milímetros, por ejemplo, se comprueba que están entre sí como los cuadrados de los tiempos empleados en recorrerlas, esto es, como $\tau^2 : (2\tau)^2 : (3\tau)^2 : \dots, \dots$

Una prueba cuantitativa consistiría, en este caso, en comprobar que la aceleración de la caída es igual a la que adquiere la esfera directamente abandonada sobre el plano.

B. — APLICACIONES

5. Tiro en el vacío. Tiro vertical. — La aplicación del principio de superposición permite comprender y describir este movimiento.

Supongamos que se hace, desde una altura, un disparo vertical hacia abajo; con un revólver, por ejemplo. La velocidad inicial v_0 con que sale el proyectil de la boca del arma, por obra de la explosión, se conserva, de acuerdo con el principio de inercia. Por el de coexistencia de los movimientos se le suma el provocado por la gravedad, de tal manera que la velocidad a los t segundos, contados desde la salida del proyectil, es

$$v = v_0 + gt \quad [6]$$

y el espacio recorrido

$$e = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 . \quad [7]$$

Si el disparo se hace verticalmente hacia arriba, las ecuaciones son:

$$v = v_0 - g t \quad [8]$$

y

$$e = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 , \quad [9]$$

pues los movimientos son de sentido opuestos.

La altura máxima H que alcanza un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba con la velocidad inicial v_0 se calcula fácilmente. Cuando el cuerpo ha alcanzado la altura máxima, su velocidad v es nula, de modo que si se indica con T ese instante, se tiene, por la ecuación [8]:

$$0 = v_0 - g T \quad [10]$$

y por la [9]

$$H = v_0 T - \frac{1}{2} g T^2 , \quad [11]$$

de las cuales, eliminando T , se obtiene:

$$H = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} , \quad [12]$$

o, en otras palabras, para que un cuerpo alcance la altura H es necesario arrojarlo con la velocidad inicial

$$v_0 = \sqrt{2 g H} . \quad [13]$$

6. Tiro oblicuo. — Si un proyectil es lanzado desde un punto O (fig. 95) con una velocidad inicial v_0 cuya dirección forma el ángulo α con la dirección horizontal, que supondremos es la de las x , su trayectoria puede dibujarse gráficamente, aplicando el principio de la independencia de los movimientos.

A no actuar la gravedad, el movimiento se cumpliría según la recta OP_1P_2 y los espacios recorridos en tiempos iguales serían iguales. Pero a ese movimiento se superpone el de caída, de tal modo que si en el primer segundo el móvil recorre el espacio $OP_1 = v_0$ cae al mis-

mo tiempo el espacio $P_1P_1' = \frac{1}{2} g t^2$; en los dos primeros segundos recorre el camino $OP_2 = 2 v_0$ al mismo tiempo que cae el camino $\frac{1}{2} g 2^2 = P_2P_2'$, y así sucesivamente.

Las posiciones del punto al fin de cada segundo son las P' , que determinan, por lo tanto, su trayectoria.

La velocidad en un instante dado se obtiene componiendo la velocidad v_0 con la velocidad del movimiento de caída en ese mismo instante; el vector así obtenido será, evidentemente, tangente a la trayectoria, pues indica también la dirección del movimiento. La aceleración es la de la caída, pues el otro movimiento es uniforme; el odógrafa de este movimiento es una línea recta vertical.

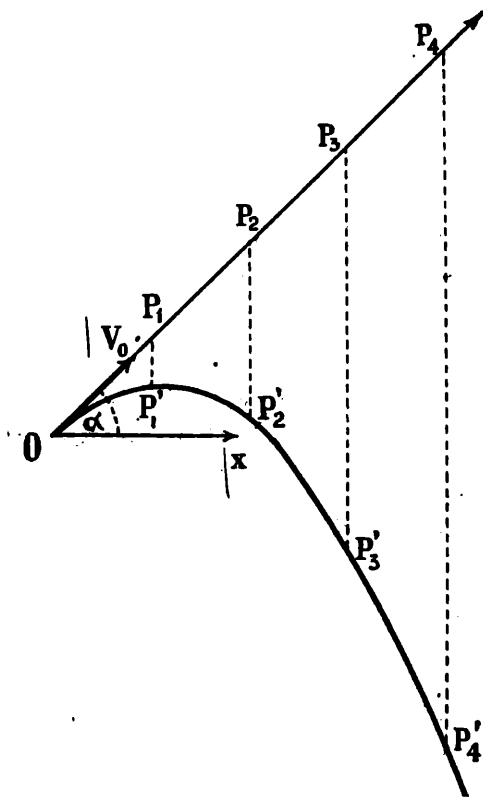


Fig. 95.

7. **Estudio analítico.** — El estudio analítico del movimiento permite hacer ostensibles algunas de sus características.

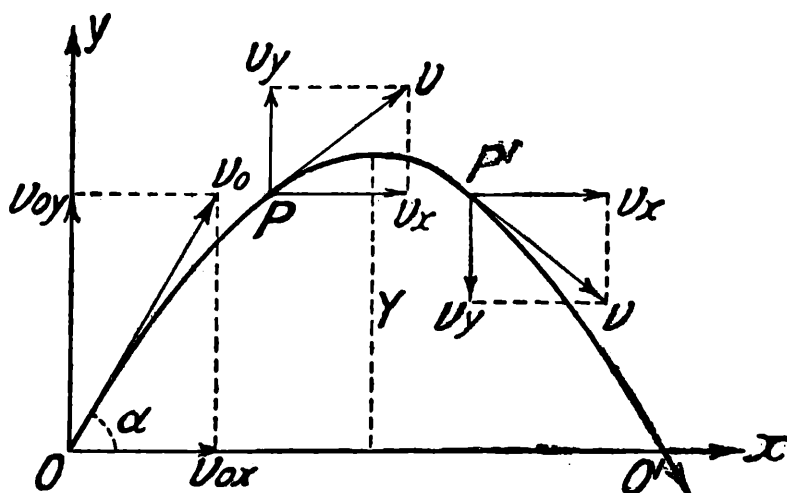


Fig. 96.

Refiramos la posición del proyectil a un sistema de coordenadas rectangulares en el plano del movimiento. Parta el proyectil del origen O bajo el ángulo α con una velocidad inicial v_0 (fig. 96). A este movimiento se superpone el de caída que origina la acción de la tierra.

La consideración del problema se simplifica descomponiendo al movimiento de velocidad v_0 , de acuerdo con el principio de superposición, en dos: en uno horizontal y en otro vertical y sumando a éste el de la caída.

Descompongamos v_0 . Su componente según el eje de la x es:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha \quad [14]$$

y la componente según y :

$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} \alpha. \quad [15]$$

La velocidad v_y del movimiento vertical es, de acuerdo con el principio de la independencia de los movimientos, la suma de la velocidad v_{0y} , y de la velocidad que en el instante t considerado corresponde al movimiento de caída. Se tiene, entonces,

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \operatorname{sen} \alpha - gt \quad [16]$$

y para la velocidad del movimiento horizontal

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \quad [17]$$

pues a este no se le superpone ningún otro movimiento.

La velocidad en un instante cualquiera, por ejemplo cuando el proyectil está en P o en P' , es la diagonal del paralelogramo construido sobre v_x y v_y , es decir,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad [18]$$

vector que es tangente a la curva.

Si ha tardado t segundos en alcanzar esa posición, el espacio vertical y recorrido será, por la [9], teniendo presente que la velocidad inicial en esa dirección es $v_0 \operatorname{sen} \alpha$:

$$y = v_0 \operatorname{sen} \alpha \cdot t - \frac{1}{2} gt^2 \quad [19]$$

y el espacio horizontal

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t. \quad [20]$$

Si se elimina al tiempo t entre las [19] y [20], se obtiene una ecuación que liga a x e y y parámetros que, conocidos, permiten, en ca-

da caso, conocer la línea descrita por el móvil. Se la designa, por eso, con el nombre de *ecuación de la trayectoria*; es

$$y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}, \quad [21]$$

que representa la ecuación de una parábola a eje vertical.

La altura máxima H a que llega el proyectil se deduce considerando únicamente el movimiento en dirección de las y , y tratando el problema como en el tiro vertical. Se obtiene, por la [12]:

$$H = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}, \quad [22]$$

pues en este caso la velocidad inicial es $v_0 \operatorname{sen} \alpha$. El valor máximo de H , para un valor dado de v_0 , corresponde al ángulo α que hace máximo a $\operatorname{sen}^2 \alpha$, es decir, la altura mayor posible se logra con el tiro vertical.

El punto en que el proyectil encuentra otra vez al plano horizontal, esto es, la distancia máxima o alcance del proyectil $OO' = X$ se calcula teniendo en cuenta que para ese punto la ordenada y se anula. Poniendo $y = 0$ en las [21] se obtiene

$$OO' = X = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot v_0^2}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}. \quad [23]$$

Puesto que el mayor valor del seno es la unidad, el alcance máximo corresponde a las inclinaciones

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad \frac{3\pi}{4}.$$

Si partiendo de la inclinación $\alpha = 45^\circ$ se consideran ángulos mayores o menores que α en la misma cantidad, es decir, si se escribe

$$\alpha = 45^\circ \pm \beta, \quad [24]$$

se obtiene para la distancia máxima X

$$X = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} (90^\circ - 2\beta) = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\beta, \quad [25]$$

ecuación que hace notorio que los alcances son iguales para inclinaciones simétricas con respecto a 45° .

Estas curvas pueden mostrarse por medio de un chorro de agua, que parte de un tubo cilíndrico (fig. 97), cuya inclinación puede disponerse arbitrariamente.

Se dibuja, o se proyecta iluminando el chorro, la trayectoria del líquido, sobre una pantalla situada paralelamente al plano de movimiento y en su inmediata proximidad.

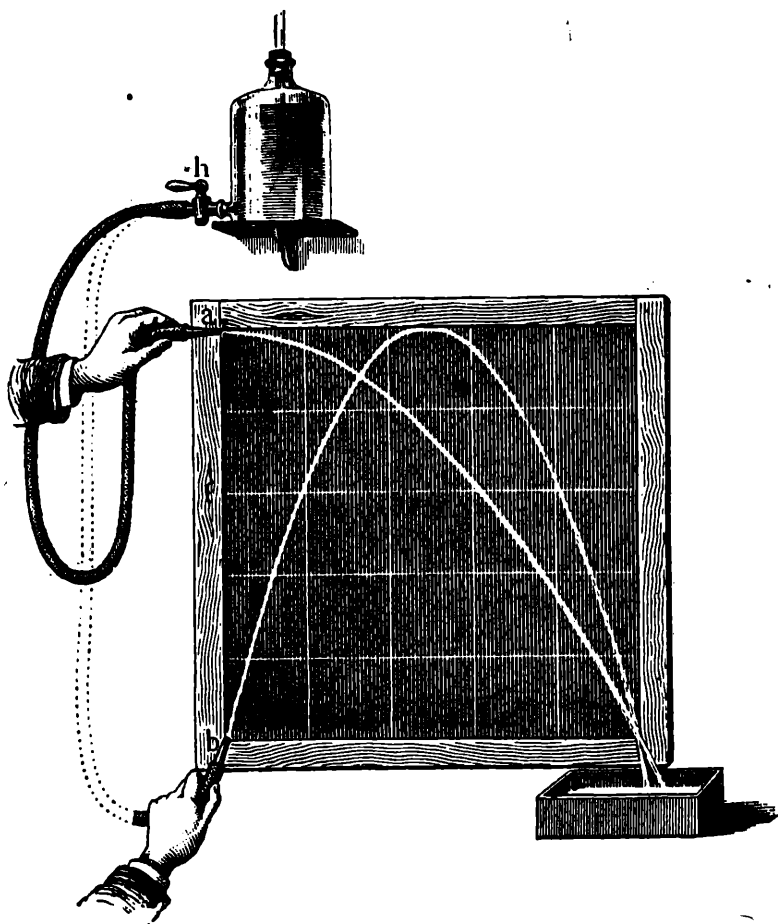


Fig. 97.

El líquido debe salir siempre con la misma velocidad para lo cual es suficiente mantener constante el nivel del recipiente.

El líquido debe salir siempre con la misma velocidad para lo cual es suficiente mantener constante el nivel del recipiente.

8. **Angulo de tiro para alcanzar un punto dado.** — De la ecuación de la trayectoria se deduce, teniendo presente que es

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha, \quad [26]$$

la ecuación

$$\tan^2 \alpha - \frac{2v_0^2}{gx} \tan \alpha + \frac{2v_0^2 y}{gx^2} + 1 = 0, \quad [27]$$

y, por lo tanto,

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{gx} \pm \frac{1}{x} \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2 - \frac{2v_0^2 y}{g} - x^2}, \quad [28]$$

fórmula que permite calcular el ángulo necesario para alcanzar, con una velocidad inicial v_0 dada, un punto de coordenadas x, y . Existirán, en general, dos ángulos, si el radicando es positivo.

Aquellos puntos para los cuales el radicando es imaginario no pueden ser alcanzados con la velocidad inicial dada. El límite entre las raíces reales e imaginarias se obtiene igualando a cero el radicando, en cuyo caso las dos raíces son iguales.

Los puntos para los cuales existe sólo un ángulo con el cual pueden ser alcanzados, están, pues, sobre una superficie cuya ecuación es

$$v_0^4 - 2gv_0^2y - g^2x^2 = 0, \quad [29]$$

que representa una parábola cuyo eje vertical es el eje de las y .

Para los puntos situados fuera de esa parábola el radicando sería negativo y las raíces imaginarias, lo que significa que no pueden ser alcanzados con la velocidad inicial dada. Por esa razón, esa parábola se denomina de seguridad.

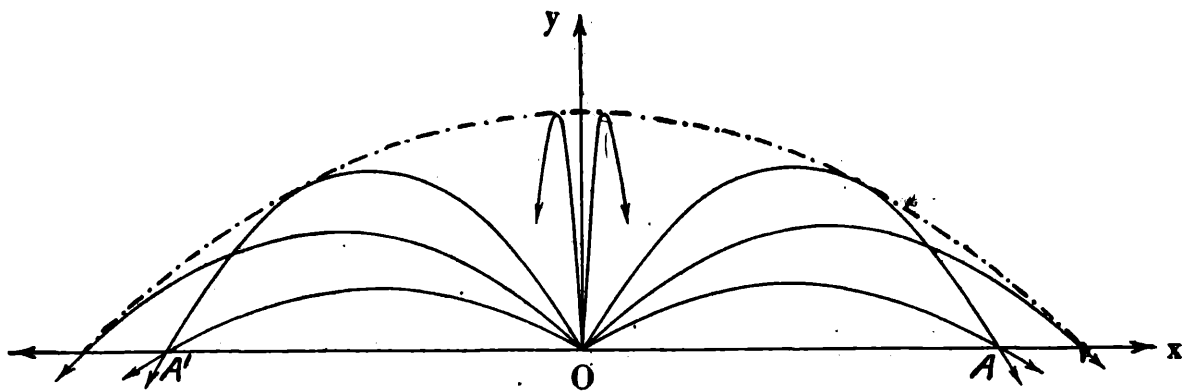


Fig. 98.

En la figura 98 se han dibujado las trayectorias de cuerpos arrojados con la misma velocidad inicial bajo diversos ángulos; los puntos A y A' representan las posiciones en que pasan por la horizontal proyectiles lanzados bajo direcciones situadas simétricamente con respecto a la de 45° ; la curva de puntos es la parábola de seguridad.

9. Influencia de la resistencia del aire. — En las deducciones precedentes se ha prescindido de la presencia del aire, el cual opone una resistencia al movimiento de los cuerpos.

En algunos textos se dice que dos cuerpos, uno «liviano» y otro «pesado», caerían en el aire con velocidades iguales si tuviesen la misma forma y tamaño exterior; lo que constituye un error muy conocido.

En efecto, lo único que puede afirmarse es que el aire opondría a ambos la misma resistencia, que indicaremos con R . Si es $P = mg$ el peso de un cuerpo, la aceleración a del movimiento de caída está dada, según el principio de masa, por la expresión

$$P - R = ma \quad \text{o} \quad mg - R = ma \quad [30]$$

y, por lo tanto,

$$a = g - \frac{R}{m}, \quad [31]$$

de tal modo que el cuerpo más liviano caería con una aceleración menor, pues le corresponde un valor mayor de $\frac{R}{m}$.

En lo que se refiere a la dependencia de la resistencia del aire de la velocidad del cuerpo que se mueve en él, la experiencia enseña, como se verá más adelante, que, para pequeñas velocidades, esa resistencia es proporcional a la velocidad.

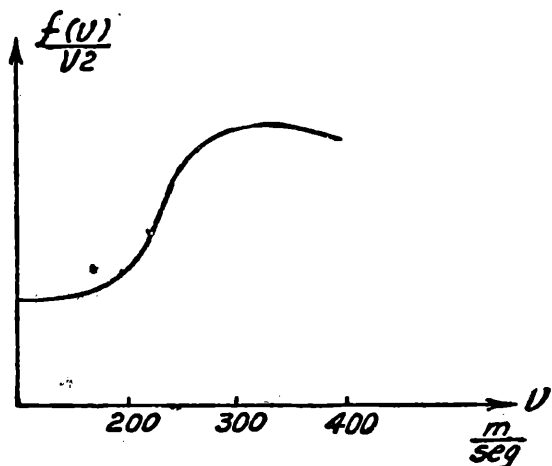


Fig. 99.

Newton había establecido que la resistencia era, para velocidades no muy pequeñas, proporcional al cuadrado de la velocidad. Determinaciones experimentales realizadas con los proyectiles de las armas de guerra enseñan que puede repre-

sentarse la resistencia R al movimiento por la fórmula

$$R = ar^2 \frac{d}{1206} v^2, \quad [32]$$

donde $2r$ es el diámetro del proyectil en metros y d la densidad del aire en kilogramos. El valor del coeficiente a depende, para un proyectil dado, de la velocidad,

es decir, es una función de ella, que indicamos escribiendo $a = f(v)$. Para un proyectil Krupp, cuya altura sea 1,3 veces su diámetro, es $a = 0,014$ para velocidades menores de 300 metros; y $a = 0,039$ para velocidades mayores de 400 m/seg. En la figura 99 está representada la curva

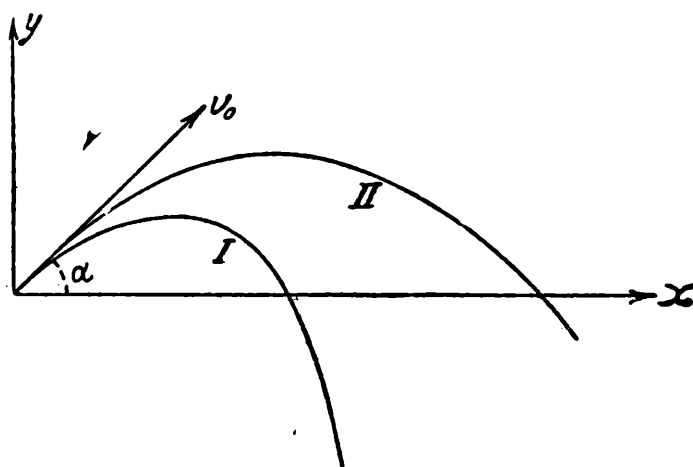


Fig. 100.

$\frac{f(v)}{v^2}$ en función de la velocidad. Para velocidades hasta 300 m/seg

el factor $\frac{f(v)}{v^2}$ es constante. Al rededor de los 340 metros por segundo, esto es, para una velocidad cercana a la del sonido, comienza a depender, otra vez, de la velocidad; para grandes velocidades es cons-

tante. En la figura 100 están representadas la trayectoria real I de un proyectil en el aire y la que tendría en el vacío representada por la curva II .

10. **Movimiento de un cuerpo en el caso que la resistencia del medio es proporcional a la velocidad.** — La experiencia enseña que para pequeñas velocidades la resistencia del medio es proporcional a la velocidad. Eso sucede cualesquiera sea el medio en que se mueve el cuerpo y la fuerza exterior que obra sobre éste. Abarca tanto el caso del movimiento de un cuerpo en el aire bajo la acción de la gravedad como el de un ión en el seno de un electrólito bajo la acción de la fuerza eléctrica.

Si, como suponemos, el cuerpo parte del reposo, en virtud de la existencia de esa fuerza resistente, la fuerza exterior no incrementa su velocidad indefinidamente, sino que ella crece hasta alcanzar un valor máximo que conserva y a partir del cual, por lo tanto, el movimiento es uniforme.

Si es m la masa del cuerpo, F la fuerza exterior y k la constante que multiplicada por la velocidad da la resistencia del medio, aquella velocidad máxima o límite, que representaremos con v_l , está dada por la expresión

$$v_l = \frac{F}{k} . \quad [33]$$

* PRUEBA. — Si es m la masa del cuerpo, F la fuerza exterior y $F' = kv$ la resistencia que opone el medio al movimiento de aquel, se tiene, de acuerdo con el principio de masa,

$$F - kv = m \frac{dv}{dt} , \quad [34]$$

donde v es la velocidad y, por lo tanto, dv/dt la aceleración.

Transponiendo términos se obtiene:

$$\frac{dv}{F - kv} = \frac{1}{m} dt \quad [35]$$

la cual por integración da:

$$-\frac{1}{k} \ln (F - kv) = \frac{1}{m} t + C , \quad [36]$$

donde C es una constante que permite satisfacer las condiciones iniciales. Si para $t = 0$ es, como suponemos, $v = 0$, de la [36] resulta

$$-\frac{1}{k} \ln F = C. \quad [37]$$

Introduciendo el valor de C en la [36] y tomando los números en lugar de los logaritmos resulta

$$v = \frac{F}{k} \left[1 - e^{-\frac{k}{m} t} \right]. \quad [38]$$

El término $e^{-\frac{k}{m} t}$, que es igual a la unidad para $t = 0$, decrece rápidamente con el decrecer de t , de modo que transcurrido cierto tiempo su valor es despreciable con respecto a la unidad. El valor de v alcanza, entonces, como dijimos, el valor límite

$$v_l = \frac{F}{k}. \quad [39]$$

11. Influencia de una aceleración vertical sobre la presión o tracción entre las masas. — A fin de que se comprenda claramente la significación de los principios de Newton discutiremos en seguida algunos problemas sencillos, que son de importancia.

Supongamos, por ejemplo, que sobre el platillo de una balanza de resorte situada en la cabina de un ascensor se encuentra un cuerpo C de masa m . La cabina tanto puede estar en reposo como en movimiento uniforme o acelerado, hacia arriba o hacia abajo. Preguntamos ¿qué relación existe entre la indicación de la balanza y el peso del cuerpo, en los diferentes casos?

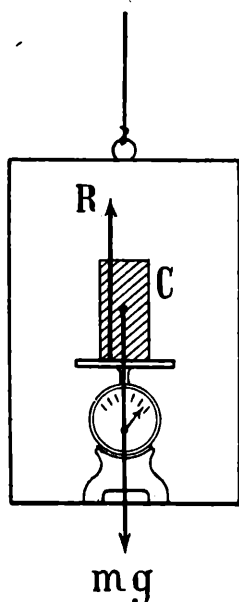


Fig. 101.

El problema se resuelve escribiendo la ecuación de movimiento de la masa m . Su aceleración es la de la cabina. Las fuerzas exteriores son el peso mg y la reacción R de la balanza que, por el principio de la igualdad de la acción y de la reacción, es igual a la presión que el cuerpo ejerce sobre ella, valor que indica su aguja. Aquella reacción es exterior

pues puede suponerse solo el cuerpo, substituyendo la cabina por esa fuerza R que proviene de su presencia.

Si el ascensor cae con la aceleración a se tiene la ecuación

$$mg - R = ma \quad [40]$$

$$R = m(g - a). \quad [41]$$

En cambio, si sube con esa misma aceleración, es

$$mg - R = -ma. \quad [42]$$

Si la aceleración a es nula, si el ascensor está en reposo o animado de un movimiento uniforme, se tiene

$$R = mg, \quad [43]$$

es decir, la fuerza con que aprieta la masa sobre la balanza es su propio peso; si en cambio existe una aceleración a , esa fuerza disminuye o aumenta en el valor ma , según que la aceleración tenga la dirección de la fuerza de gravedad o el sentido contrario. A esta causa se debe el efecto desagradable que se experimenta si el ascensor se pone en marcha bruscamente.

La fuerza R introducida es una fuerza exterior con respecto al cuerpo para el cual se escribió la ecuación de Newton, pero interior con respecto al sistema.

Lo mismo ocurre en la mecánica de los cuerpos continuos; si se desea escribir la ecuación de movimiento de cierta porción o elemento del cuerpo, son fuerzas exteriores, además de la posible acción de la gravedad, las acciones provenientes de la materia que lo rodea.

Si un cuerpo de masa m pende de una balanza de resorte o se encuentra sobre su platillo, la indicación de la misma da, pues, su peso únicamente si está en reposo o animada de un movimiento uniforme; la indicación aumenta o disminuye en ma según que el sistema suba o caiga con la aceleración a .

Si la caída tiene la aceleración de la gravedad, esto es, si es enteramente libre, la presión R entre las masas es nula.

Galileo tenía, en lo que se refiere a estos hechos, ideas exactas. Los adictos a la escuela aristotélica sostenían que los cuerpos más pesados caían con mayor velocidad a causa de que las partes de arriba empujaban a las de abajo. Galileo respondía a esta argumentación diciendo que si ello era así, atando a un cuerpo pesado uno liviano, éste debería retrasar la caída del otro; los cuerpos más pesados deberían caer entonces más lentamente que los livianos.

Esta contradicción se debe, decía Galileo, a que la hipótesis fundamental es falsa; una parte de un cuerpo que cae libremente no puede por su peso, hacer presión sobre el resto.

Acabamos de ver que si el ascensor se mueve con movimiento uniforme la balanza de resorte indica lo mismo que cuando está en reposo, es decir el peso. Se manifiesta en este hecho lo que dijimos al considerar el principio de inercia: *de que no era posible revelar el movimiento de un sistema cuando era rectilíneo y uniforme por experimentos mecánicos realizados en él.*

12. La balanza de Poggendorf. — Consideremos primeramente una instalación como la que indica la figura 102. Si las dos masas m_1 y m_2 son iguales, el sistema está en reposo y la tensión del hilo es mg .

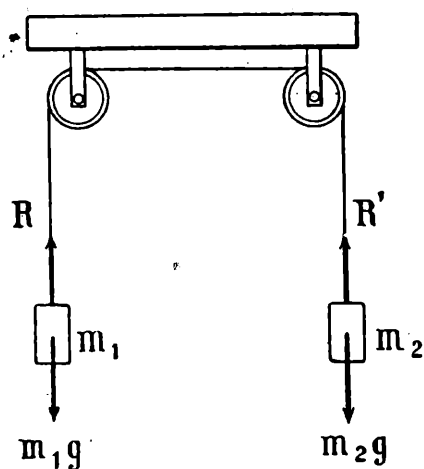


Fig. 102.

Si es $m_1 > m_2$ se produce un movimiento acelerado; la masa m_1 baja, la m_2 sube.

La masa total en movimiento es $m_1 + m_2$; la fuerza actuante $(m_1 - m_2) g$. Si es a la aceleración del movimiento, se tiene, por lo tanto,

$$(m_1 - m_2) g = (m_1 + m_2) a, \quad [44]$$

de donde resulta

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g. \quad [45]$$

Preguntemos ahora cuál es la tensión que soporta el hilo y cuáles son las fuerzas que soportan los ejes de las poleas. Para esto, lo mejor es escribir la ecuación del movimiento correspondiente a cada masa. Si consideramos la masa m_1 solamente, se puede substituir el vínculo con la otra masa, que constituye el hilo, por la fuerza R ; las fuerzas exteriores a m_1 son, por consiguiente, mg y R . Se tiene, por lo tanto,

$$m_1 g - R = m_1 a, \quad [46]$$

pues la masa se mueve en la dirección de su peso con la aceleración a .

Substituyendo en esta ecuación el valor de a resulta para R el valor

$$R = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g. \quad [47]$$

De la misma manera la ecuación de movimiento de la masa m_2 será

$$R' - m_2 g = m_2 a, \quad [48]$$

si R' es la fuerza proveniente de la existencia del vínculo con la otra masa. Si se reemplaza a a por su valor, se obtiene para R' el mismo valor que para R , como exige el principio de la igualdad de la acción y de la reacción. La tensión que soporta el hilo es, naturalmente, $R = R'$.

Pasemos ahora a determinar las presiones que soportan los ejes de las poleas. El problema se resuelve fácilmente, ya que las reacciones son las mismas que se manifiestan si, prescindiendo de las masas y manteniendo el hilo en reposo, tiramos de sus extremos con fuerzas iguales a $R = R'$, pues así se tiene la tensión que realmente soporta el hilo en virtud del movimiento de las masas m_1 y m_2 . Es evidente que los dos ejes soportan fuerzas iguales a R .

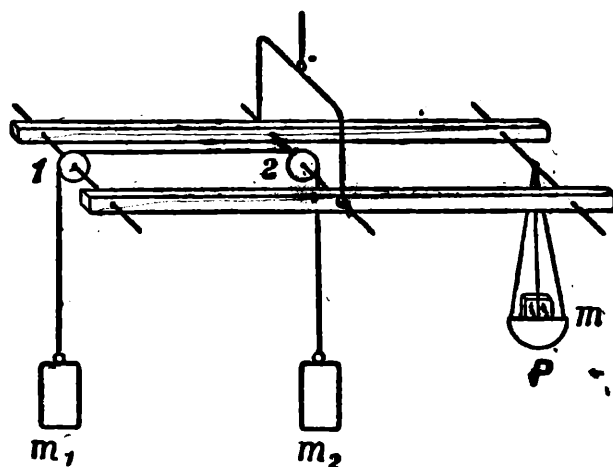


Fig. 103.

Tengamos ahora una instalación como la de la figura 103, que constituye la llamada balanza de Poggendorf. El eje de la polea central es el eje de rotación de la balanza, de modo que las fuerzas que él soporta no tienen ninguna influencia en el equilibrio, por cuanto sus momentos son constantemente nulos.

Si las masas m_1 y m_2 están en reposo, se consigue el equilibrio, esto es, la posición horizontal, colocando en el platillo P una masa $m = m_1$.

Si es $m_1 > m_2$, el sistema de masas se mueve, cayendo del lado de m_1 con la aceleración antes calculada.

La fuerza que actúa sobre el eje de la polea 1 es

$$R = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g, \quad [49]$$

de modo que la balanza sufre sobre el eje de la polea del extremo esta fuerza R y sobre el eje del platillo la fuerza mayor $m_1 g$, lo que significa que al ponerse el sistema de masas en movimiento, la balanza se levanta del lado de la polea extrema. Para restablecer el

equilibrio, mientras el sistema está en movimiento, hay que quitar del platillo P un peso igual a

$$m_1 g - \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{m_1 (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} g. \quad [50]$$

De manera idéntica puede calcularse lo que ocurre si es $m_1 < m_2$. Sin ninguna dificultad puede discutirse también el caso propuesto por Mach en que el hilo que une a las dos masas pasa solamente por la garganta de la polea extrema.

En todos los ejemplos considerados no se produce ninguna modificación si las masas se mueven con movimiento uniforme, *invariancia contenida esencialmente en las ecuaciones de Newton.*

TERCERA PARTE

UNIDADES

CAPITULO V

UNIDADES FUNDAMENTALES Y DERIVADAS. DIMENSIONES, HOMOGENEIDAD. EQUIVALENCIA ENTRE DOS SISTEMAS

1. **Generalidades.** — Puesto que medir un grandor físico es determinar la relación entre la magnitud dada y un grandor de la misma especie que se elige como unidad, es evidente que para poder expresar la *medida* de una longitud, de un tiempo, de una masa, etc., es necesario establecer las unidades respectivas. Como unidad de medida de un grandor físico, puede elegirse un grandor cualquiera de la misma especie, con tal que sea invariable y se pueda reproducir exactamente. Es claro que se podría fijar una unidad para cada especie de grandores físicos, y esto independientemente de las otras especies, por ejemplo, una unidad para medir superficies, etc.

En muchos casos esto no es posible, es muy incómodo. Así, por ejemplo, sería muy difícil, si no imposible, la fijación de unidades invariables de velocidad y aceleración y la comparación directa con ellas de magnitudes de la misma clase.

Se puede afirmar por esto que un *sistemas de mediciones* existe, desde que por medio de relaciones geométricas o físicas se ha logrado expresar las unidades de los grandores físicos en función de algunas pocas unidades fundamentales bien establecidas.

Está claro que se pueden imaginar infinitos sistemas de medidas, los cuales pueden diferir en algunos de los caracteres siguientes:

- 1° En el número de las unidades fundamentales;
- 2° Para el mismo número, en las especies de los grandores elegidos;
- 3° Para una misma especie en la magnitud;
- 4° En las fórmulas que **definen** a las unidades derivadas.

El Congreso de electricistas reunido en París en 1891 aceptó el sistema hoy universalmente usado, ideado por Gauss y propuesto, en 1863, por la Asociación Británica.

Ese sistema, que establece como grandores fundamentales la longitud, el tiempo y la masa, se llama absoluto. Sus dimensiones son sus propios símbolos: L = longitud; T = tiempo; M = masa. Esto se justifica, en cierto modo, por el hecho de que el espacio y el tiempo representan conceptos que existen *a priori* en nuestra razón y la masa se refiere a la propiedad aparente más general que encontramos tan pronto como nos ocupamos de la materia en su vinculación con aquéllas.

Las unidades de las otras magnitudes expresadas en función de éstas se denominan *unidades derivadas*. Así, las unidades de velocidad y aceleración se *derivan* de las unidades de espacio y tiempo, puesto que la unidad de velocidad es la de un móvil que recorre la *unidad* de longitud en la *unidad* de tiempo y la aceleración la de un punto cuya velocidad varía en una unidad en el mismo intervalo de tiempo.

La expresión que muestra en qué forma una magnitud resulta expresada por las magnitudes fundamentales se denomina *dimensión*, según se ha visto; a propósito de la velocidad y la aceleración, en el párrafo 6 del capítulo anterior.

2. Unidades fundamentales. — Se consideran como tales a magnitudes invariables, arbitrariamente elegidas, con la que se comparan los *grandores fundamentales* de la misma especie, es decir, espacio, tiempo y masa.

La unidad de longitud es el metro, la de tiempo el segundo, esto es, la 86.400 avas parte del día solar medio.

El concepto de masa está íntimamente vinculado con el segundo principio de la dinámica expresado por la relación

$$F = ma$$

de tal manera que, aun cuando representa una magnitud fundamental, la definición de su unidad de medida está ligada a esa ecuación.

En principio, lo que corresponde es elegir una unidad para medir la masa y deducir de ella la unidad derivada que corresponde a la fuerza, teniendo presente que la aceleración está expresada, como se ha visto, por las unidades de espacio y tiempo. Eso no obstante, se emplea también otro camino para definir la unidad de masa: se de-

fine, primeramente, la unidad de fuerza. Así se tienen dos sistemas: el *práctico* y el *absoluto*.

A. SISTEMA TÉCNICO O PRÁCTICO. — En este sistema se elige como unidad fundamental a la fuerza, o, lo que es, equivalente al peso. Las unidades usadas son:

- De longitud 1 metro (m)
- De tiempo. 1 segundo (seg)
- De fuerza el peso de un kilogramo a 45° de latitud.
- DE MASA 9,806 kilogramos.

El kilogramo es el peso de una masa de platino depositada en los archivos de pesas y medidas de París. Debíó ser, según los designios que se tuvieron al fundar el sistema métrico, igual al peso de un decímetro cúbico de agua destilada a 4° C de temperatura. Mediciones posteriores han demostrado la existencia de una pequeña diferencia.

Como el peso de los cuerpos varía con la latitud, es decir, la tierra aplica diferente fuerza sobre el mismo cuerpo en los diversos lugares de su superficie, es que se ha elegido en la definición de la unidad de fuerza la latitud de 45°.

Definida la unidad de fuerza, resulta la de unidad de masa de la relación

$$m = \frac{F}{g}.$$

La masa tendrá el valor uno si es $F = 9,806$ kilogramos, pues g , expresada en metros sobre segundos al cuadrado, tiene a 45° de latitud el valor $9,806 \text{ m/seg}^2$. Entonces, en este sistema la unidad de masa es la masa de 9,806 kilogramos.

B. SISTEMA ABSOLUTO. SISTEMA C G S. — En éste se elige como unidad fundamental a la masa. El sistema absoluto más usado es aquel en que las unidades son:

- De longitud el centímetro (cm)
- De tiempo. el segundo (seg)
- De masa la masa de un gramo (gr).

Es decir, la masa de un cuerpo cuyo peso es, por ejemplo, 100 gramos, son 100 gramos-masa o simplemente 100 gramos.

Este sistema se designa con el nombre de C G S, esto es, centímetro, gramo, segundo.

La unidad de fuerza que le corresponde lleva el nombre de *Dina* y es, por la ecuación $F = ma$, una fuerza tal que actuando sobre un gramo-masa le imprime una aceleración de un centímetro sobre segundo al cuadrado.

Como un gramo cae con una aceleración de $980,6 \text{ cm/seg}^2$ a la latitud de 45° , quiere decir que la tierra aplica sobre un gramo una fuerza, que es su peso, igual a $980,6$ dinas. Según esto, una dina es igual al peso de $1,0198$ miligramos y:

$$1 \text{ kilogramo peso} = 980.600 \text{ dinas}.$$

Puesto que la palabra gramo la usamos en diferente sentido, para expresar una vez una masa, otra un peso, según el sistema empleado, diremos en lo sucesivo, para evitar confusiones, gramo-peso, kilogramo-peso, si se trata de la unidad de fuerza o peso en el sistema técnico y gramo o kilogramo solamente, si se trata de la masa en el sistema absoluto.

3. Unidades derivadas y dimensiones. — Son, como se ha visto, unidades fundamentales las de longitud, tiempo y masa. Las unidades de otras magnitudes expresadas en función de aquéllas se llaman *unidades derivadas*. Sus dimensiones se obtienen multiplicando las dimensiones de las magnitudes que figuran en ellas.

De entre las unidades derivadas se pueden mencionar las siguientes:

A. AREA, S . — La unidad es el área de un cuadrado cuyo lado tiene un metro o un centímetro de lado, según el sistema elegido.

La expresión que muestra cómo resulta expresada el área en función de la magnitud fundamental es:

$$S = L^2, \quad [1]$$

esto es, el cuadrado de una longitud es su *dimensión*, que se indica encerrando la letra representativa entre corchetes:

$$[S] = L^2.$$

En el sistema $C G S$ sería:

$$[S] = \text{cm}^2. \quad [1']$$

B. VOLUMEN, V . — Se tiene:

$$[V] = L^3 \quad [2]$$

o

$$[V] = \text{cm}^3. \quad [2']$$

C. VELOCIDAD, v . — Puesto que una velocidad resulta de dividir un espacio por un tiempo, la unidad de velocidad, en un sistema cualquiera, será la de un móvil que recorre la unidad de longitud en la unidad de tiempo. En el sistema $C G S$ sería el centímetro por segundo.

La dimensión de la velocidad es:

$$[v] = \frac{L}{T} = LT^{-1}. \quad [3]$$

o, en el sistema $C G S$

$$[v] = \text{cm seg}^{-1}. \quad [3']$$

D. ACELERACIÓN, a . — Un cuerpo se mueve con la unidad de aceleración, si su velocidad varía constantemente en una unidad en la unidad de tiempo.

Su dimensión es:

$$[a] = \frac{L/T}{T} = LT^{-2} \quad [4]$$

o en el sistema, centímetro, gramo segundo,

$$[a] = \text{cm seg}^{-2}. \quad [4']$$

E. FUERZA, F . — La unidad en el sistema absoluto se denomina *Dina* y es una fuerza tal que actuando sobre un gramo le imprime una aceleración de un centímetro sobre segundo al cuadrado.

Su dimensión es:

$$[F] = MLT^{-2} \quad [5]$$

o

$$[F] = \text{cm gr seg}^{-2}. \quad [5']$$

En el sistema $C G S$ el peso de un cuerpo se expresa en dinas y se obtiene multiplicando su masa en gramos por el valor de la aceleración de la gravedad en centímetros sobre segundos al cuadrado.

En La Plata el valor de la aceleración sería, según las determinaciones de Alessio, $g = 979,75$, de tal modo que:

El peso de un gramo equivale a 979,75 **dinas**
 Y el de un kilogramo a 979.750 **dinas**.

F. MOMENTO, M . — El momento unidad resulta de multiplicar la unidad de fuerza por la unidad de distancia. Su dimensión es:

$$[M] = F \cdot l = ML^2 T^{-2} \quad [6]$$

o

$$[M] = cm^2 gr \text{ seg}^{-2}$$

4. **Homogeneidad.** — El concepto de *dimensión* fué establecido por Fourier, pero su introducción en las mediciones y la evidencia de su utilidad proviene de trabajos de Maxwell y Jenkin, publicados en 1863 y 1873. Aquél justifica su empleo diciendo que una ecuación entre magnitudes dadas dice no solamente que los números a que se reducen ambos miembros son iguales, sino, también, que son de la misma especie. Esto es lo que se quiere significar cuando se dice que en una ecuación debe existir *homogeneidad*.

Así, por ejemplo, cuando se dice que el espacio es igual a la mitad del producto de la aceleración por el cuadrado del tiempo, no sólo se significa igualdad numérica sino en especie. En efecto, así resulta pues es

$$e = \frac{1}{2} at^2$$

y recurriendo a las dimensiones se obtiene

$$[e] = \frac{L}{T^2} T^2 = L, \quad [7]$$

lo que prueba que el producto de una aceleración por el cuadrado de un tiempo es *homogéneo* con una longitud.

En la expresión que liga el impulso con la cantidad de movimiento:

$$F \cdot t = mv$$

se tiene

$$MLT^{-2} \cdot T = MLT^{-1} \quad [8]$$

lo que muestra que el producto de una fuerza por un tiempo es homogéneo con el de una masa por una velocidad. La dimensión, tanto del impulso como de la cantidad de movimiento, es:

$$[F \cdot t] = [mv] = MLT^{-1} \quad [9]$$

o

$$[Ft] = [mv] = gr \text{ cm seg}^{-1}. \quad [9']$$

Se comprende así que se puede utilizar el principio de homogeneidad para comprobar la exactitud de una ecuación cualquiera obtenida por razonamiento.

Lo mejor para dominar el uso de las ecuaciones de dimensión es aplicarlo a casos concretos, lo que haremos a propósito de las leyes que se vayan encontrando en nuestro estudio.

5. Equivalencia entre sistemas que difieren por la magnitud de las unidades elegidas. — Se ha dicho que el sistema absoluto más usado es aquel en el cual las unidades fundamentales son el centímetro, el segundo y el gramo, pero si se trata de expresar magnitudes muy grandes, es evidente la conveniencia de elegir otras unidades mayores, por ejemplo, el metro, el segundo y el kilogramo o el kilómetro, el segundo y la tonelada.

Veamos de qué manera se pasa de un valor de una magnitud dada expresada en ciertas unidades, a otro valor expresado con unidades de diferente tamaño.

Sean L, T, M , los símbolos que representan el número y la calidad de una longitud, de un tiempo y de una masa. El valor de una cantidad cualquiera, S , tendrá, según vimos, la forma:

$$S = L^\alpha T^\beta M^\gamma .$$

Si se eligen ahora unidades que sean λ, τ, μ veces mayores que las precedentes, la longitud primitivamente expresada por L , estará dada por $L_1 = \frac{L}{\lambda}$; el tiempo por $T_1 = \frac{T}{\tau}$; y la masa por $M_1 = \frac{M}{\mu}$.

Por lo tanto el grandor que primitivamente estaba expresado por S , lo estará por la relación

$$S_1 = L_1^\alpha T_1^\beta M_1^\gamma = \frac{L^\alpha T^\beta M^\gamma}{\lambda^\alpha \tau^\beta \mu^\gamma} = \frac{S}{\lambda^\alpha \tau^\beta \mu^\gamma} \quad [10]$$

o sea por un número $\lambda^\alpha \tau^\beta \mu^\gamma$ veces menor.

La nueva *unidad derivada* para medir ese grandor es, entonces, $\lambda^\alpha \tau^\beta \mu^\gamma$ veces mayor que la antigua, y se obtiene multiplicando esta última por $\lambda^\alpha \tau^\beta \mu^\gamma$.

Expresemos, por ejemplo, una fuerza en el sistema *C G S*, y luego pasemos al sistema metro, kilogramo, segundo.

Se tiene para la fuerza

$$F = LMT^{-2}$$

y el número que expresa la fuerza que actúa sobre un kilogramo a 45° de latitud en el sistema *C G S*, es:

$$F = 980.600.$$

Si se toman las otras unidades mencionadas es:

$$\lambda = 100 \quad \tau = 1 \quad \mu = 1000$$

y por consiguiente

$$F_1 = \frac{F}{\lambda^\alpha \tau^\beta \mu^\gamma} = \frac{F}{100 \cdot 1^{-2} \cdot 1000} = F \cdot 10^{-5} \quad F_1 = 9,806$$

será en el nuevo sistema el valor de la fuerza que actúa sobre un kilogramo. La unidad de fuerza en este sistema sería una fuerza que actuando sobre un kilogramo le imprimiría una aceleración de un metro sobre segundo al cuadrado.

??

CUARTA PARTE

LA ENERGÍA

CAPITULO VI

EL TRABAJO. ENERGIA CINÉTICA. CONSERVACION DE LA ENERGÍA. PRINCIPIOS GENERALES DE LA ESTÁTICA

A. — EL TRABAJO. ENERGÍA CINÉTICA. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

1. **Trabajo mecánico.** — Se ha visto que aplicando una fuerza sobre un cuerpo, o sobre un sistema de cuerpos, se puede modificar su posición o la posición relativa de las partes que lo constituyen.

La experiencia enseña que por medio de las fuerzas es posible producir los más variados cambios en el estado de los cuerpos. Así, nosotros podemos comunicar una velocidad a un cuerpo que está en reposo, deformar una espiral, levantar un peso, calentar un gas encerrado en un cilindro, desplazando un pistón, o un cuerpo cualquiera frotándolo con otro.

En todos esos casos el punto de aplicación de la fuerza ha cambiado de posición, recorriendo cierto camino. Si el punto de aplicación queda en reposo no se pueden producir ninguna de esas u otras modificaciones, lo que sugiere la necesidad de que se fije la atención no solamente en la magnitud de la fuerza, sino también en el desplazamiento de su punto de aplicación.

Se ha llegado así a la introducción de un concepto, que se designa con el nombre de *trabajo*, en el que se considera la fuerza y el desplazamiento del punto en que se aplica.

Se dice que una fuerza hace *trabajo* sobre un cuerpo, si su punto de aplicación se desplaza.

En la vida diaria se usa la palabra trabajo para designar las más variadas ocupaciones corporales e intelectuales, para las cuales no podemos concebir un método de comparación.

En algunos casos, ello es, sin embargo, posible. Si dos hombres, por ejemplo, levantan, por medio de una polea, dos pesos iguales a la misma altura, pensamos que hacen trabajos iguales, mientras que si uno levanta un peso doble, decimos que su trabajo es doble.

Una definición que está de acuerdo con nuestro sentimiento interior y que, como veremos, tiene un alcance extraordinario en la física moderna, es la que fija su magnitud como proporcional a la fuerza y al desplazamiento del punto de aplicación en la dirección de aquélla.

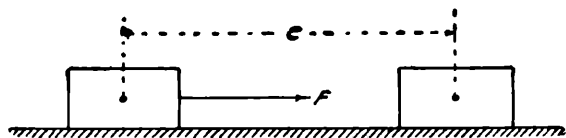


Fig. 104.

Si la fuerza, que indicamos con F , es constante y el desplazamiento, que designaremos con e , se realiza en su dirección (fig. 104), el trabajo, que representamos con la letra A , es

$$A = F \cdot e, \quad [1]$$

y para expresarlo por medio de un número será necesario elegir una unidad de comparación. En virtud de su definición, el trabajo no depende del tiempo que ha invertido la fuerza en pasar de una posición a otra.

La dimensión de un trabajo es, pues,

$$[A] = [Fe] = ML^2T^{-2},$$

o, en el sistema $C G S$,

$$[A] = gr \text{ cm}^2 \text{ seg}^{-2}.$$

2. Unidades. — La unidad de trabajo en un sistema dado de medida es el que ejecuta la unidad de fuerza cuando su punto de aplicación se desplaza la unidad de longitud, paralelamente a su dirección.

En el sistema técnico, es el trabajo que realiza una fuerza de un kilogramo si su punto de aplicación se desplaza un metro, en la dirección de aquélla. Recibe el nombre de *kilográmetro* y se indica escribiendo *kgm*.

En el sistema absoluto, la unidad de trabajo es el que realiza una dina si su punto de aplicación se desplaza un centímetro. Se designa

con el nombre de *erg*. Como el *erg* es una unidad muy pequeña, se ha introducido, con el nombre de *Joule*, una unidad 10^7 veces mayor. La relación entre un sistema y otro resulta fácilmente. Es

$$1 \text{ kgm} = 1000 \text{ gr} \times 100 \text{ cm}$$

y como $1 \text{ gr} = 980,6 \text{ dinas}$

$$1 \text{ kgm} = 980,6 \cdot 1000 \cdot 100 = 9,806 \cdot 10^7 \text{ erg} = 9,806 \text{ Joule}.$$

3. **Definición general de trabajo.** — Puede ocurrir que la magnitud de la fuerza varíe durante el desplazamiento y que ésta no coincida en dirección con aquélla, por cuyo motivo será necesario definir el trabajo en forma más general.

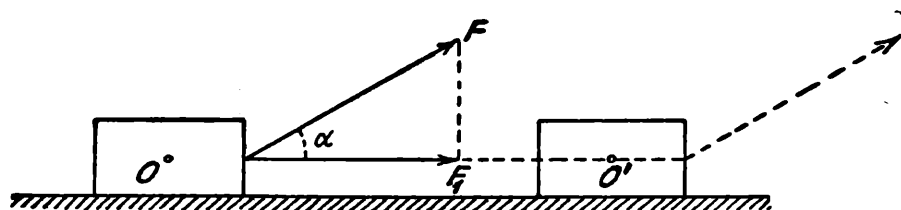


Fig. 105.

Así, figura 105, un cuerpo puede ser movido sobre una plataforma por una fuerza constante F que forma el ángulo α con la superficie de aquélla. Sea OO' el desplazamiento.

Según su definición, el trabajo está dado por el producto de la fuerza F por el desplazamiento que le es paralelo, es decir, por la proyección de $OO' = e$ sobre ella. Se tiene, pues,

$$A = F \cdot e \cdot \cos \alpha. \quad [2]$$

Esto resulta también de la consideración de que la componente de la fuerza normal al plano no contribuye en nada al desplazamiento del cuerpo sobre él. Todo el efecto es debido a la fuerza:

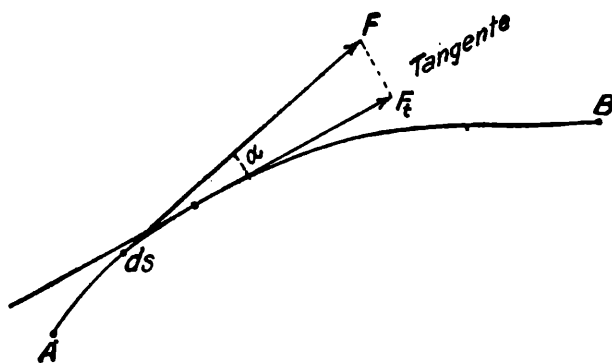


Fig. 106.

$$F_1 = F \cos \alpha \quad [3]$$

paralela al camino recorrido.

Si la fuerza, durante el desplazamiento, que puede producirse sobre una línea $A B$ cualquiera (fig. 106) varía de un punto a otro, dividimos la línea en elementos de longitud sumamente pequeños, dentro de cada uno de los cuales aquélla puede ser considerada constante, es decir, de magnitud y dirección invariable. El trabajo total entre dos puntos A y B será la suma de los trabajos elementales correspondiente a cada diferencial ds de la línea.

Si en un elemento ds la fuerza es F y forma el ángulo α con la tangente, el trabajo sobre él es:

$$dA = F ds \cos \alpha = F_t ds, \quad [4]$$

si se indica con F_t la componente de la fuerza tangencial a la línea, en el elemento considerado, pues su valor es:

$$F_t = F \cos \alpha. \quad [5]$$

El trabajo total será:

$$A = \sum_A^B F_t ds \quad [6]$$

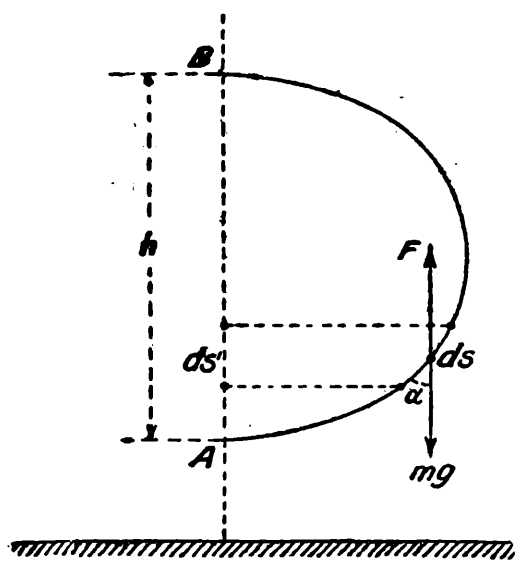


Fig. 107.

o

$$A = \int_A^B F \cos \alpha ds = \int_A^B F_t ds \quad [7]$$

que será la definición más general del trabajo.

El trabajo que hace una fuerza es positivo si el desplazamiento tiene su mismo sentido, negativo si tiene sentido contrario. Por ejemplo, si se levanta verticalmente un cuerpo de masa m aplicando una fuerza F , ésta hace un trabajo positivo mientras que la fuerza que representa el peso, esto es, mg , hace un trabajo negativo. No hay que confundir el trabajo de la fuerza F con el trabajo de la gravedad, pues, en general, son diferentes como resulta de la ecuación

$$F - mg = ma, \quad [8]$$

donde a es la aceleración del movimiento. Esta última consideración se ha de precisar en uno de los próximos párrafos.

Supongamos que el cuerpo de masa m es levantado desde la altura A hasta la altura B , siguiendo la línea curva del dibujo (fig. 107). El trabajo negativo que hace la fuerza de gravedad es la suma de los trabajos elementales correspondientes a los elementos de la línea.

Para un elemento ds el trabajo que realiza la fuerza de gravedad, cuya magnitud es mg , es

$$dA = mg \cos \alpha \cdot ds = mg ds' \quad [9]$$

pues se tiene

$$ds' = ds \cdot \cos \alpha \quad [10]$$

y análogamente para los demás elementos. El trabajo total entre A y B estará dado, pues, por la expresión

$$A = mgh, \quad [11]$$

es decir, por el producto de la fuerza por el camino total recorrido verticalmente.

El trabajo que efectúa la fuerza de gravedad entre dos puntos cualesquiera, no depende, entonces, del camino seguido para pasar de uno a otro, sino, exclusivamente, de la posición inicial y final.

4. Energía. — Puesto que todas las fuerzas que obran sobre los cuerpos provienen de la acción de otros, de modo que si un cuerpo ejecuta trabajo lo hace bajo la presión o tracción de otros, se puede hablar, con toda propiedad, del trabajo que un cuerpo ejecuta sobre otro. Así, por ejemplo, el vapor hace trabajo sobre el pistón del cilindro de una locomotora; los gases provenientes de una explosión en los pistones del motor de un automóvil; un peso que cae, o un resorte tendido, mueven la maquinaria de un reloj, etc. Uno de los cuerpos tiene siempre un papel activo, el otro uno pasivo.

La observación atenta de esos fenómenos enseña que *un cuerpo no puede jamás cumplir un trabajo sin sufrir cambios tales que lo hacen cada vez menos capaz de seguir produciéndolo*. Así, un peso que realiza un trabajo moviendo, por ejemplo, el mecanismo de un reloj, cae, y a medida que se acerca al suelo va perdiendo la capacidad de realizarlo, pues una vez en él no podrá seguir moviéndolo; si es un resorte el que produce la marcha, su tensión va desapareciendo y con ello llegará un momento en que no podrá realizar su trabajo.

Es, por otra parte, imposible que un cuerpo que ha ejecutado trabajo durante cierto tiempo vuelva por sí mismo al estado que tenía al comenzar; pues si después de ejecutar o, como se dice, entregar trabajo, retornase a su estado primitivo, se podría obtener de él trabajo en cantidades tan grandes como se quisiera sin consumir nada. La experiencia enseña que tal «perpetuum mobile» es imposible.

Se puede afirmar que en todos los casos *un cuerpo puede realizar solamente una cantidad limitada de trabajo. Todo cuerpo en un estado determinado posee cierta capacidad de trabajo que se denomina su energía.* Si el cuerpo ejecuta trabajo, su energía disminuye en una cantidad medida por el trabajo realizado.

5. Energía cinética. — El trabajo que es capaz de producir un cuerpo en virtud de su estado de movimiento se denomina su *energía cinética*. El hombre aprovecha, por ejemplo, el movimiento del agua para producir trabajo moviendo molinos o máquinas hidroleétricas, y el movimiento del aire para impulsar navíos o elevar el agua a cierta altura. Un tren en movimiento requiere una acción enérgica de los frenos para ser detenido; la energía del movimiento se consume en el trabajo que representa la fricción de aquellos y en la de las ruedas sobre los rieles.

Por otra parte, el estado de movimiento de un cuerpo no se modifica si no actúa una fuerza sobre él, de suerte que si el estado de movimiento de un cuerpo sufre un cambio, el cuerpo ha gastado trabajo en contra de fuerzas exteriores o fuerzas exteriores han hecho trabajo sobre él.

Supongamos, por ejemplo, que la velocidad de un cuerpo de masa m pasa de la velocidad v a la velocidad mayor v_1 . Es claro que ha actuado sobre él una fuerza, que puede suponerse constante en el intervalo considerado. Si se indica con a la aceleración del movimiento, el espacio e recorrido entre los dos instantes a los cuales corresponden las velocidades v y v_1 está dado por la expresión.

$$\frac{v_1^2 - v^2}{2a} = e, \quad [12]$$

que resulta, fácilmente, eliminando el tiempo entre las conocidas relaciones

$$v_1 = v + at$$

$$e = vt + \frac{1}{2} at^2.$$

Si se multiplican ámbos miembros de la [12] por la masa m se obtiene, por una simple transposición de términos,

$$\frac{1}{2} mv_1^2 - \frac{1}{2} mv^2 = mae = F \times e = \text{Trabajo}, \quad [13]$$

pues la fuerza F es igual a la masa m por la aceleración a . La [13] da el *quantum* del trabajo realizado por la fuerza F sobre el cuerpo. Análogamente, si el movimiento es retardado, la fuerza F se opone al desplazamiento, es decir, el cuerpo gasta trabajo en contra de la fuerza exterior F y ese trabajo es numéricamente igual a

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_1^2. \quad [14]$$

El cuerpo puede seguir entregando trabajo hasta que sea $v_1 = 0$. Por lo tanto, es

$$T = \frac{1}{2} mv^2 \quad [15]$$

la medida del trabajo total almacenado en forma de energía de movimiento en un cuerpo de masa m , animado de la velocidad v de traslación. Esa energía de movimiento se designa con el nombre de *energía cinética*.

Ese resultado, que está contenido en la [13], se expresa, de una manera general, diciendo: *La variación de la energía cinética de un cuerpo es igual al trabajo de las fuerzas exteriores*. Si el trabajo es positivo la energía cinética aumenta; si es negativo disminuye.

Si durante todo el recorrido efectuado por el cuerpo, la fuerza exterior no ha sido constante, es menester dividirlo en caminos elementales ds , dentro de los cuales se puede considerar constante la fuerza. Es claro que la variación de la energía cinética será igual a la suma de esos trabajos elementales, es decir:

$$\frac{1}{2} m (v_1^2 - v^2) = \int_A^B F_t ds, \quad [16]$$

donde A y B indican la posición inicial y final sobre la línea en que se ha movido el cuerpo y F_t la componente tangencial de la fuerza.

Si un cuerpo cae bajo la acción exclusiva de la gravedad, el aumento de la energía cinética es igual al trabajo que gasta esa fuerza.

En efecto, si parte del reposo, la velocidad que adquiere después de haber recorrido el camino vertical e será:

$$v^2 = 2 ge \quad [17]$$

de donde

$$\frac{1}{2} mv^2 = mge = Pe, \quad [18]$$

siendo $P = mg$ el peso del cuerpo y, por lo tanto, Pe el trabajo de la fuerza de gravedad.

Consideremos nuevamente el caso en que se levanta un cuerpo de masa m sobre la línea vertical. Para ello es menester aplicar una fuerza $F \geq mg$ y debe ser $F - mg = ma$ si es a la aceleración del movimiento. Es decir, la fuerza exterior total es $F - mg$ y, por lo tanto, el trabajo total de esta fuerza entre dos posiciones A y B situadas sobre esa vertical es, por la [16]:

$$\int_A^B (F - mg) ds = \frac{1}{2} m (v_B^2 - v_A^2), \quad [19]$$

si es v_B la velocidad en el punto B y v_A la velocidad en el punto A .

Como el peso mg del cuerpo es constante, si la distancia entre los puntos es h , resulta

$$\int_A^B F ds = mgh + \frac{1}{2} m (v_B^2 - v_A^2), \quad [20]$$

ecuación que nos muestra que el trabajo que es menester gastar para mover un cuerpo en contra de la acción de la gravedad desde una posición A hasta otra B es igual al trabajo de la fuerza de gravedad entre los mismos puntos más la variación de la energía cinética. El trabajo de la fuerza F será, en total, igual al trabajo de la fuerza de gravedad si la velocidad es la misma en ambos puntos.

6. Energía potencial. — Si se levanta un cuerpo de masa m de una posición A a otra B , entre las cuales existe la distancia vertical h , debemos gastar, según se ha visto, el trabajo mgh . Si el cuerpo cae después libremente, recorriendo el camino h en sentido contrario, almacena una energía cinética que es precisamente igual a mgh . Si el cuerpo hubiese quedado indefinidamente en reposo en la posición B , esta energía no se habría puesto de manifiesto. El trabajo gastado para llevarlo de una posición a otra queda almacenado bajo una nueva forma, que no se manifiesta en movimiento sino en el cambio

de posición con respecto a la tierra. Esta nueva forma de energía se llama *energía potencial* o de *posición*. Si se lanza un cuerpo de masa m verticalmente hacia arriba con la velocidad inicial v , de modo que quede sometido exclusivamente a la fuerza de gravedad, la energía cinética disminuye continuamente a medida que sube; para la altura máxima la velocidad es cero y la energía cinética ha desaparecido totalmente. El *quantum* de energía existente primitivamente en el cuerpo, bajo forma de energía cinética, no ha dejado de existir, sino que ha tomado otra forma proveniente del cambio de posición con respecto a la tierra, pues durante la caída adquiere nuevamente, en cada uno de los puntos, la misma velocidad, en sentido contrario, que la que llevaba durante la subida, es decir, aparece otra vez en cada posición el mismo *quantum* de energía cinética.

Puesto que la variación de la energía potencial entre dos posiciones es igual al trabajo que se pone en juego durante el pasaje de una posición a otra, es claro que, durante el movimiento del cuerpo, la suma de las energía potencial y cinética es constante, pues el aumento de energía potencial durante la subida será igual a la disminución de la energía cinética, y viceversa durante la caída.

Esto puede formularse matemáticamente como sigue, considerando los cambios de posición con respecto a la superficie de la tierra.

Supongamos que un cuerpo de masa m cae desde la posición A , situada a la altura h . Si es v la velocidad que tiene en la posición B situada a la distancia vertical e de A (fig. 108) se tiene

$$\frac{1}{2} mv^2 = mge \quad [21]$$

y sumando a ambos miembros el término mgh , escribiendo además la ecuación en otra forma,

$$\frac{1}{2} mv^2 + mg(h - e) = mgh, \quad [22]$$

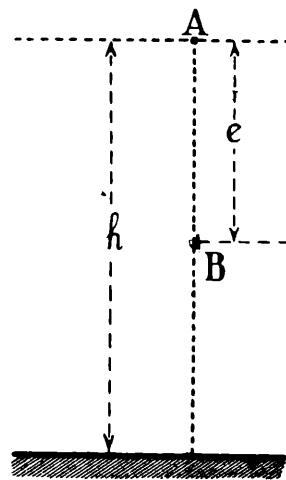


Fig. 108.

donde mgh es la energía total que bajo la forma de energía potencial posee el cuerpo supuesto en reposo en la posición A ; $1/2 mv^2$ la energía cinética en la posición B y $mg(h - e)$ la energía potencial que corresponde a la misma posición.

Como el punto B puede ser cualquiera, se sigue que, durante todo el movimiento, la suma de la energía potencial y cinética es constante e igual a la energía del cuerpo.

Ese resultado no es una consecuencia de las definiciones sino de la naturaleza de la fuerza de gravedad. La acción de la tierra sobre un cuerpo, supuesto en un instante en una posición cualquiera, no depende ni de la magnitud ni de la dirección de la velocidad con que el cuerpo pueda estar animado en ese momento, ni del instante de tiempo en que ocupa el cuerpo esa posición; la fuerza es función exclusiva de la posición, y por esta causa el cuerpo retoma, en todas las posiciones, durante la caída, la misma velocidad que durante la subida.

Si la fuerza dependiese, por ejemplo, de la velocidad o del tiempo, es evidente que las velocidades durante la caída serían diferentes que durante la subida.

Entonces la constancia de la suma de las energías cinética y potencial durante el movimiento de un cuerpo sometido a la acción exclusiva de la gravedad es consecuencia del hecho experimental de que la fuerza depende exclusivamente de la posición relativa, esto es, de la configuración. Solamente en este caso el trabajo que gastan las fuerzas durante el pasaje de una posición a otra no depende del camino ni de la manera como se realice el cambio.

Sistemas semejantes se llaman *conservativos* y las fuerzas, *fuerzas conservativas*.

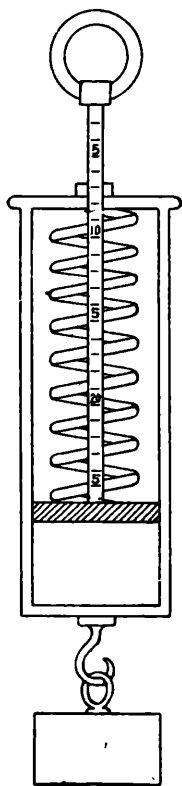


Fig. 109.

7. Energía de deformación elástica. — En una balanza de resorte (fig. 109) la experiencia enseña que las longitudes de la espiral que se observan cargando la balanza paulatinamente hasta una carga P son iguales a las que se observan para los mismos pesos cuando se la descarga.

Si el alargamiento total para la carga P es e , es claro que las fuerzas de gravedad han hecho sobre la espiral el trabajo

$$\frac{1}{2} P e, \quad [23]$$

pues durante el camino e la carga ha variado desde 0 hasta P y los alargamientos son proporcionales a los pesos.

Como por la observación antes referida el fenómeno es invertible, es decir, retirando los mismos pesos, se recorren los mismos caminos en sentido contrario, es evidente que el trabajo gastado había quedado almacenado en forma de energía de deformación elástica o potencial, puesto que depende solamente de la longitud de la espiral.

Según esto, un sistema formado por una espiral elástica de la que pende un peso P , esto es, un cuerpo sometido exclusivamente a la acción de la gravedad, es un sistema conservativo y, por lo tanto, la suma de la energía cinética y potencial debe ser constante.

La energía potencial aparece en forma de energía potencial de la gravitación y en energía potencial elástica de la espiral.

Consideremos, para más claridad, el siguiente caso: supongamos que se han suspendido de un espiral dos masas m_1 y m_2 que forman en conjunto la masa m (fig. 110); si el desplazamiento total es h y si el sistema está en reposo en la posición B , la energía total almacenada es la energía elástica

$$\frac{1}{2} mgh. \quad [24]$$

Si se desprende la masa inferior de modo que quede solamente la superior, cuya masa es m_1 , el resorte le comunicará un movimiento hacia arriba.

Si cuando la masa m_1 pasa por la posición C va animada de la velocidad v , su energía cinética ha aumentado en $\frac{1}{2} m_1 v^2$; si el camino recorrido entre B y C es e , la energía potencial de gravedad ha aumentado en $m_1 ge$; en cambio, en el resorte no queda almacenada más energía potencial que la que corresponde a su alargamiento entre A y C . Esta energía puede calcularse fácilmente, pues el alargamiento es proporcional al peso y, por lo tanto, si el peso $(m_1 + m_2)g = mg$ determinó el alargamiento h , para producir un alargamiento $h - e$ es necesario un peso:

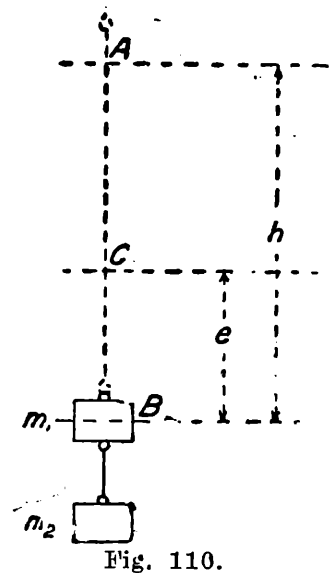
$$mg \frac{h - e}{h} \quad [25]$$

y, por lo tanto, el trabajo almacenado en forma de deformación elástica en la posición C es

$$\frac{1}{2} mg \frac{(h - e)^2}{h}. \quad [26]$$

Se tiene, por consiguiente, para la posición C , la siguiente expresión

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 + m_1 ge + \frac{1}{2} mg \frac{(h - e)^2}{h} = \frac{1}{2} mgh. \quad [27]$$



Es decir, en la posición *C*, de la energía total almacenada en forma de energía potencial del resorte, parte se ha convertido en energía cinética y potencial gravitacional de la masa m_1 ; y el resto se encuentra en forma de energía potencial elástica.

Lo mismo hubiese sido llevar directamente a la masa m_1 , por una tracción con la mano, hasta la posición *B* y abandonarla luego a la acción del resorte.

Con la ecuación 27 se puede discutir el movimiento de la masa m_1 . Si la masa estuviese sustraída a la acción de la gravedad, como ocurre en el caso que representa la figura 111, donde se supone que una masa esférica puede deslizarse sin roce sobre una barra metálica

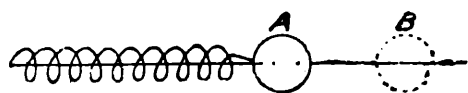


Fig. 111.

cilíndrica, llevándola de la posición *A* a la posición *B* se almacena una provisión de trabajo, en forma de energía elástica, que debe conservarse si se abandona la masa a sí misma; en todo momento no existirá más energía que la cinética de la masa y la potencial del resorte.

En los relojes, dándoles cuerda, se almacena, en una espiral elástica, cierta provisión de energía que se va consumiendo lentamente en el trabajo que requiere el movimiento de todo mecanismo.

En una barra elástica también se puede almacenar, por flexión, energía potencial, la cual puede convertirse en energía cinética, como ocurre, por ejemplo, en el arrojamiento de la flecha.

8. Desaparición de la energía cinética por choque y por roce.
— Si un cuerpo cae libremente desde cierta altura, el trabajo de la fuerza de gravedad se convierte en energía cinética; si se trata de una sustancia plástica, plomo, por ejemplo, y cae sobre un cuerpo rígido situado en el suelo, pierde por el choque su energía cinética y se observa en él un aumento de temperatura, esto es, la aparición de cierta cantidad de calor. La energía cinética de un tren desaparece merced al roce que determinan los frenos, en los cuales se produce una notable elevación de temperatura; durante la caída de un bólido el roce en el aire produce su calentamiento y el calor que así aparece es a costa del trabajo de la fuerza de gravitación; si no hubiese aire, no existiría ninguna fuerza que se opusiese al movimiento y todo el trabajo se manifestaría en un aumento de energía cinética y la aceleración del movimiento sería la de la caída en el vacío.

La experiencia enseña que siempre que aparece calor, se consume, como en los ejemplos enumerados, o energía cinética o energía potencial; en términos generales, se consume trabajo.

Entre la cantidad de trabajo desaparecido y la cantidad de calor producido existe una relación constante, que se llama el *equivalente mecánico del calor*, equivalente que se ha determinado cuidadosamente, según hemos de ver, por muy diversos procedimientos.

Recíprocamente, puede utilizarse el calor para producir trabajo y esta conversión sigue, naturalmente, la misma equivalencia.

Además de ese principio de equivalencia, los procesos en que se convierte calor en trabajo están regidos por otro principio que es de gran significación en la naturaleza y del cual nos hemos de ocupar en la teoría del calor.

9. El principio de conservación de la energía. — Conocemos hasta ahora tres clases de energía: energía cinética, energía potencial y calor, las cuales equivalen a trabajo. Existen todavía otras formas de energía, tales como la energía eléctrica, la energía química, etc. En todos los casos, la experiencia muestra que si desaparece un *quantum* de una clase de energía, aumenta el *quantum* de las otras energías y viceversa, existiendo entre cada dos formas una relación invariable de equivalencia. El trabajo mecánico, por ejemplo, puede convertirse en energía eléctrica y ésta a su vez en calor en un hilo, y este calor mantiene con el trabajo originario la misma relación de equivalencia que para la transformación directa.

La descomposición de 18 gramos de agua en sus elementos oxígeno e hidrógeno requiere un gasto de trabajo eléctrico que equivale a 68.400 calorías, y este número de calorías, precisamente, se pone en libertad si se obtienen, por combinación de los elementos, otra vez los 18 gramos de agua. *La energía cambia, pues, de forma y pasa de un cuerpo a otro pero se conserva.*

Si se considera un sistema aislado, esto es, un sistema tal que no pueda entregar ni recibir trabajo del exterior, el principio de conservación de la energía exige que si una de las formas de la energía aumenta, la suma de las otras disminuya en una cantidad equivalente.

En los sistemas conservativos aparecen sólo dos formas de energía: la energía potencial y la energía cinética; su suma será, por lo tanto, constante.

10. **Experimentos.** — Muy ilustrativas son las siguientes experiencias. Dos esferas de marfil de igual tamaño, *A* y *B*, cuelgan de dos hilos verticales, figura 112, de la misma longitud, estando en contacto mientras se encuentran en reposo. Si se deja caer a una de ellas la *A*, por ejemplo, desde la altura *h*, al chocar con la otra se detiene, lo que significa que le ha entregado toda su energía cinética.

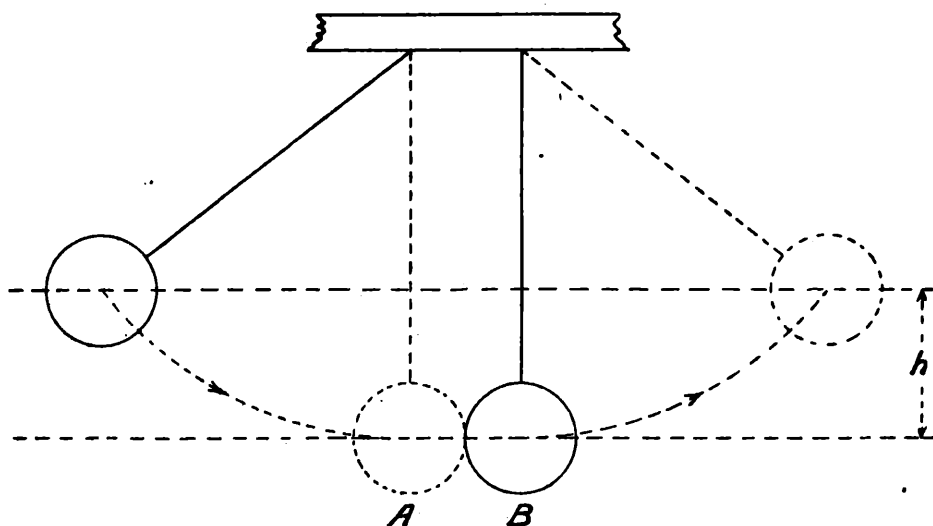


Fig. 112.

La *B* llega a la misma altura *h* del otro lado, lo que prueba que la energía cinética de la esfera *A* era equivalente al trabajo que hace la gravedad mientras aquélla recorre el camino vertical *h*.

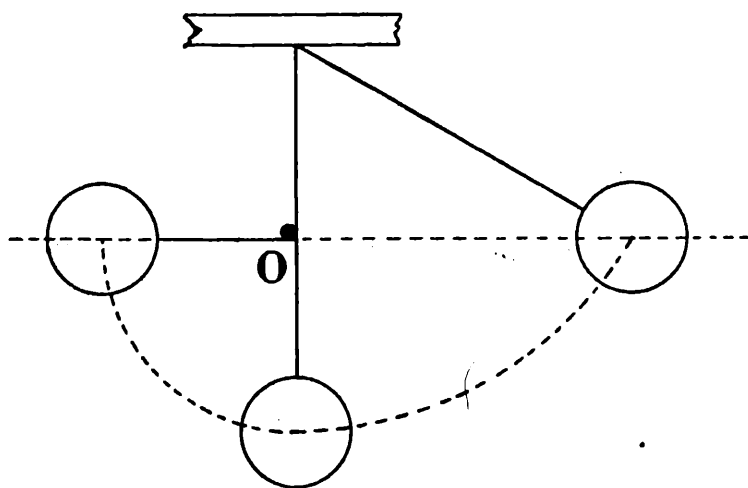


Fig. 113.

Si *B* no hubiera estado allí, *A* misma hubiese alcanzado la altura *h*. Este es el caso del péndulo, cuyo movimiento es una continua transformación de energía potencial en cinética y recíprocamente. En la posición extrema toda la energía es potencial, en la posición más baja toda la energía es cinética.

Si el sistema fuera puramente mecánico y estuviese aislado, esto es, si no hubiese producción de calor por roce y cesión de energía al aire puesto en movimiento, el péndulo se movería indefinidamente.

Una experiencia interesante es la del péndulo de Galileo. Un péndulo es soltado, figura 113, desde una altura *h*; el hilo encuentra un

obstáculo O , pero la masa alcanza, no obstante, igual altura del otro lado.

B. — PRINCIPIOS GENERALES DE LA ESTÁTICA

11. **Condición y clases de equilibrio.** — En la primera parte del libro, dedicado al estudio del equilibrio de las fuerzas, se ha considerado, implícitamente, como característico de ese estado el reposo del cuerpo sobre el cual se suponían aplicadas.

Dinámicamente hablando, el equilibrio de un sistema de fuerzas se manifiesta en la falta de aceleración del movimiento del punto material sobre el cual se aplican, pues de acuerdo con el principio de superposición, consecuencia del principio de masa, la resultante de esas fuerzas es, en tal caso, cero.

Es claro, entonces, que la condición general de equilibrio se enunciaría diciendo: *Un sistema de n fuerzas que actúan sobre un cuerpo están en equilibrio si no determinan una aceleración en él.*

Si el punto material estaba primitivamente en reposo, lo seguirá estando; si estaba en movimiento, éste se conservará invariado y su energía cinética permanecerá constante.

En un sistema conservativo, la energía total es la suma de la energía potencial, que indicaremos con U , y de la energía cinética, que representaremos con T , de tal manera que se tiene en todo momento:

$$U + T = \text{const}, \quad [28]$$

y no podrá existir ningún cambio que no consista en una variación de una de ellas y en una igual y opuesta de la otra.

Si la condición de equilibrio está dada por una ausencia de aceleración, es decir, por la constancia de la energía cinética, resulta que las fuerzas pueden estar en equilibrio únicamente en lugares donde la energía potencial U es constante, es decir, donde U no varía.

Así, si un cuerpo está sobre una superficie, podrá estar en reposo únicamente en los lugares donde el potencial Φ es máximo o mínimo.

Por ejemplo, un cuerpo sometido a la acción de la gravedad y obligado a estar sobre una superficie (fig. 114) cuyos puntos están a

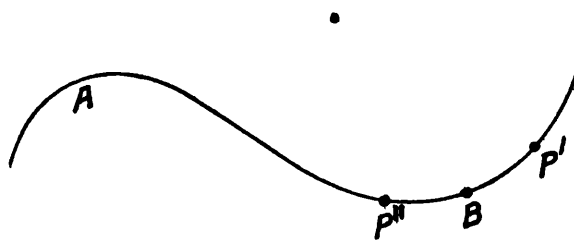


Fig. 114.

diferente altura de un plano horizontal, puede estar en reposo únicamente en A o en B , pues tanto en uno como en otro lugar, la altura, y, por lo tanto, el potencial, permanece constante dentro de una pequeña región.

Existe, empero, una diferencia esencial entre uno y otro caso. Supongamos que el punto esté en equilibrio en una posición para la cual la energía potencial es mínima, como la B , por ejemplo. Apartemos al punto por un pequeño golpe de su posición B . Como al apartarse de B la energía potencial aumenta, la energía cinética que le comunicamos se consumirá por el aumento de aquella y el punto alcanzará una posición como la P' . Como en P' no se cumple la condición de equilibrio el punto material comenzará otra vez a moverse y lo hará hacia B , pues la energía cinética que aparece debe producir una disminución de la potencial; en B posee una energía cinética que le permite continuar su movimiento hasta el punto P'' , en el cual toda ella se ha convertido en potencial; luego, por consideraciones como las de antes, debe volver hacia B y así siguiendo.

Si no hubiese roce, este movimiento oscilatorio continuaría indefinidamente; debido a la existencia de frotamiento, las oscilaciones se amortiguan hasta desaparecer y, finalmente, el punto queda en reposo en B .

Ese estado de equilibrio que sufre por un apartamiento solamente perturbaciones pasajeras se denomina *estable*.

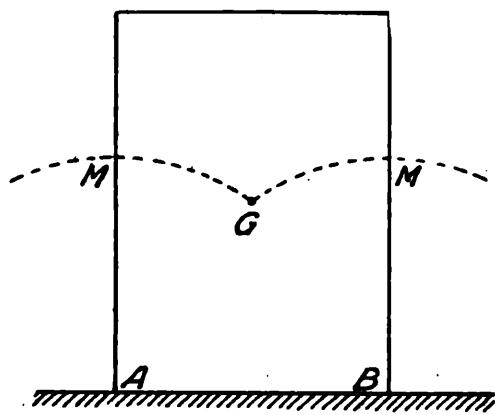


Fig. 115.

Si en cambio el punto estuviese en una posición para la cual la energía potencial es un máximo, como en A , un apartamiento significa una disminución continua de energía potencial y, por lo tanto, un aumento continuo de energía cinética. El punto se alejaría más y más de A . En este caso se dice que el equilibrio es *inestable*. De

este mismo carácter es el equilibrio en lugares en los que la superficie tiene la forma de una silla de montar.

Si la energía potencial no se modifica por un desplazamiento, se habla de *equilibrio indiferente*.

Un cuerpo suspendido estará en equilibrio cuando su centro de gravedad esté sobre la vertical que pasa por el punto de suspensión; será estable si está debajo, inestable si está arriba.

Si la suspensión se hace en el centro mismo de gravedad, el equilibrio será indiferente.

Un cubo sobre una mesa estará en equilibrio estable si está en la posición del dibujo (fig. 115); si se le gira al rededor de las aristas A o B el centro de gravedad describirá una curva como la de puntos. El equilibrio será inestable si G está en uno cualquiera de los puntos M .

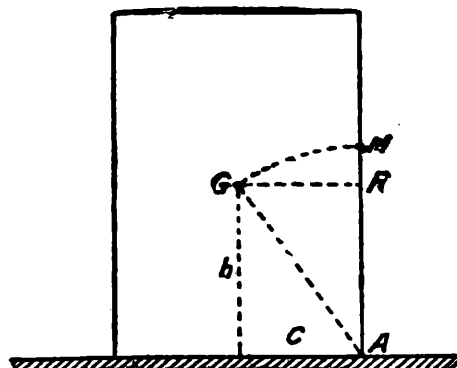


Fig. 116.

12. Estabilidad de un cuerpo apoyado.— Dinámicamente se define a la estabilidad de un cuerpo apoyado como el

trabajo que hay que gastar para llevarlo hasta una posición desde la cual deja de volver por sí mismo a la posición de equilibrio.

En el caso de un paralelepípedo (fig. 116), ese trabajo es igual al necesario para llevar el centro de gravedad hasta la posición M .

Si la masa del cuerpo es m , ese trabajo es:

$$A = mg \cdot MR = mg (AM - AR) \quad [29]$$

o también

$$A = mg (GA - AR) \quad [30]$$

$$A = mg (\sqrt{h^2 + c^2} - h) . \quad [31]$$

Si la altura h del centro de gravedad es grande con respecto a c , es:

$$\sqrt{h^2 + c^2} = h \sqrt{1 + \frac{c^2}{h^2}} = h \left(1 + \frac{c^2}{2h^2}\right) \quad [32]$$

y, por lo tanto, la estabilidad

$$T = mg \frac{c^2}{2h} . \quad [33]$$

Es claro que la estabilidad depende del canto que se considera para la giración.

Para un muro de altura a , longitud l y espesor e se tiene:

$$h = \frac{a}{2} , \quad c = \frac{e}{2} , \quad m = ael \cdot \rho ,$$

A. B. A.

donde se indica con ρ la densidad del material. La estabilidad será:

$$T = \frac{\rho g}{4} \cdot e^3 l, \quad [34]$$

es decir, proporcional al cubo del espesor e y a la longitud l .

13. **El principio de los trabajos virtuales.** — Se ha visto que un sistema de fuerzas aplicadas a un punto material se encuentra en equilibrio si no determina en él un movimiento acelerado, es decir, si no producen una variación de su energía cinética. De aquí resulta que si las fuerzas se equilibran, la suma de sus trabajos debe ser nula. Si las fuerzas cambian de valor con el cambio de posición del punto, los lugares donde el punto puede encontrarse en equilibrio, resultan de la propiedad enunciada.

Si el punto se encuentra en reposo, esto es, en un lugar de equilibrio, no existen desplazamientos reales; la condición de equilibrio se deduce imaginando que el punto cumple ciertos desplazamientos que, por ser imaginados y no reales, se llaman *virtuales*. El punto se encontrará en equilibrio únicamente en aquellos lugares donde la suma de los trabajos de las fuerzas para esos desplazamientos imaginados sea nula, o, en otras palabras, cuando la suma de los *trabajos virtuales* es cero. Si, como en el caso del párrafo anterior, un punto material se mueve sin roce sobre una superficie, bajo la acción de la gravedad, son fuerzas exteriores no sólo el peso sino también la reacción normal de la superficie. Los desplazamientos son entonces normales a la reacción y el trabajo de esta fuerza es, para cualquier desplazamiento sobre la superficie, nulo; los lugares de equilibrio serán, entonces, aquellos para los cuales el trabajo virtual del peso se anule y esto sólo puede ocurrir en lugares donde la fuerza de gravedad sea normal a los desplazamientos virtuales, esto es, en los lugares donde la superficie tiene como plano tangente, un plano horizontal.

Estos resultados se pueden generalizar en seguida al caso de un sistema de puntos materiales o cuerpos que están unidos rígidamente entre sí, o, por lo menos, ligados por medio de hilos rígidos inextensibles. Son fuerzas exteriores a cada uno de los puntos, no sólo las exteriores al sistema, sino las provenientes de las reacciones de los otros puntos y de las superficies con las que pueden estar en contacto.

Consideremos, por ejemplo, figura 117, un sistema formado por dos cuerpos, A y B , de pesos P_1 y P_2 , respectivamente, unidos por un hilo inextensible. Los cuerpos se encuentran, respectivamente, sobre

dos planos que forman los ángulos α y β con la horizontal; el hilo de unión pase por la garganta de una polea situada de tal manera que los tramos del hilo sean respectivamente paralelos a los dos planos. Se pregunta: cuál es la condición de equilibrio del sistema, bajo la suposición de que no existan fuerzas debidas al roce.

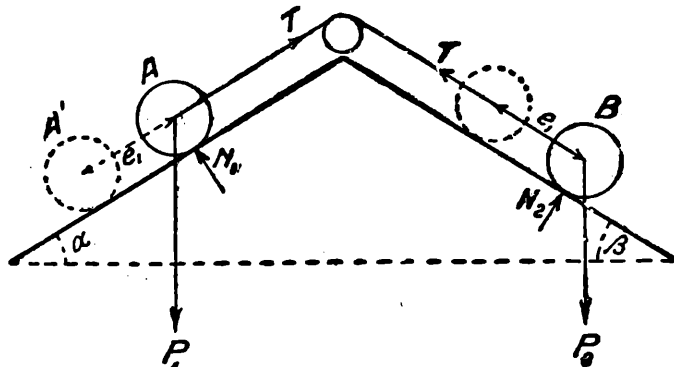


Fig. 117.

Hasta ahora conocemos solamente la condición de equilibrio de un punto material; debemos formular entonces la condición de equi-

librio que corresponde a cada uno de los puntos A y B . Por el principio de la igualdad de la acción y de la reacción, la fuerza que B aplica sobre A , por el hilo, es igual a la que A le aplica a su vez; esas fuerzas se han indicado con T . Son fuerzas exteriores a A , el peso P_1 la reacción N_1 del plano y la tensión T ; las fuerzas exteriores de B son el peso P_2 la reacción N_2 y la tensión T .

Si imaginamos que A sufre un desplazamiento virtual igual a e_1 , B sufre un desplazamiento virtual igual.

La condición de equilibrio para A es que sea

$$P_1 e_1 \operatorname{sen} \alpha - T e_1 = 0, \quad [35]$$

pues el trabajo de N_1 es cero y el desplazamiento paralelo a P_1 es $e_1 \operatorname{sen} \alpha$.

Al mismo tiempo debe encontrarse B en equilibrio y eso requiere que sea

$$- P_2 e_1 \operatorname{sen} \beta + T e_1 = 0, \quad [36]$$

de donde resulta, como condición de equilibrio para *el sistema*

$$P_1 e_1 \operatorname{sen} \alpha - P_2 e_1 \operatorname{sen} \beta = 0. \quad [37]$$

Se ve, pues, que en la condición de equilibrio del *sistema* no figuran nada más que los trabajos de las fuerzas exteriores a él y no figuran los trabajos de las fuerzas de reacción entre los puntos. Lo mismo ocurre si se trata de cuerpos rígidos que permanecen continuamente en contacto.

Esto puede generalizarse sin dificultad al caso de un número cualquiera de cuerpos rígidamente unidos.

Sin entrar en mayores consideraciones, que no corresponden a

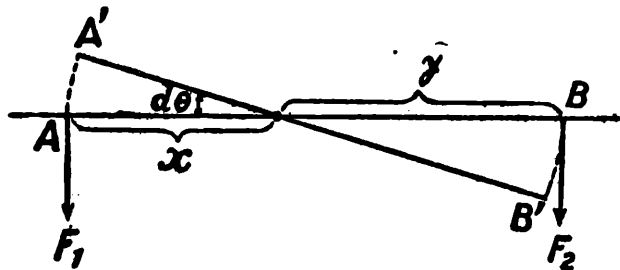


Fig. 118.

la naturaleza de este libro, sentaremos como condición general de equilibrio la siguiente: *Un sistema de cuerpos se encuentra en equilibrio, si la suma de los trabajos virtuales de las fuerzas que le son exteriores es nula.* Es claro que conside-

raremos como desplazamientos virtuales solamente los que son compatibles con los vínculos.

A fin de ilustrar este principio haremos algunas aplicaciones a las máquinas simples.

14. **Aplicaciones.** — A. PALANCA. — Supongamos (fig. 118) que las fuerzas F_1 y F_2 aplicadas en los puntos A y B se equilibran e imaginemos que la palanca gira en un ángulo $d\theta$ infinitamente pequeño.

Los desplazamientos virtuales de las fuerzas son, respectivamente:

$$AA' = xd\theta \quad BB' = yd\theta$$

y la suma de los trabajos virtuales es:

$$F_1 \cdot xd\theta - F_2 yd\theta = 0,$$

pues BB' es recorrido en sentido contrario al de la fuerza.

Resulta, por lo tanto, para la condición de equilibrio:

$$F_1 x = F_2 y,$$

que es el teorema ya conocido de los momentos.

Hemos supuesto, implícitamente, que la barra no tiene peso. En el caso real hay que considerar una fuerza igual al peso del cuerpo aplicado en el centro de gravedad del mismo, según lo hemos hecho notar en otra oportunidad.

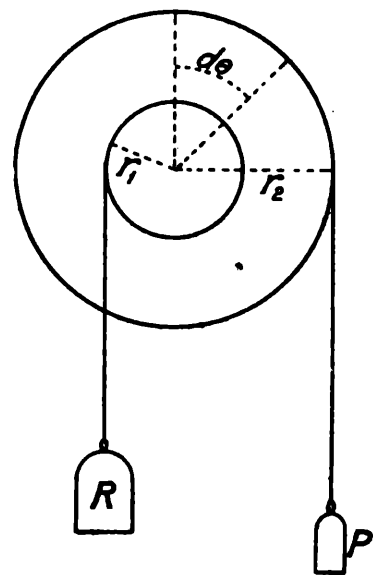


Fig. 119.

B. TORNO. — El caso del torno (fig. 119) es enteramente semejante; un peso R está suspendido de una cuerda que se arrolla en un

árbol horizontal cilíndrico de radio r_1 ; su desplazamiento se produce tirando con una fuerza P , por ejemplo, de otra cuerda arrollada sobre otro árbol del radio $r_2 > r_1$.

Si P y R están en equilibrio, para una giración virtual $d\theta$ se tiene

$$R \cdot r_1 d\theta - P \cdot r_2 d\theta = 0$$

de donde

$$R \cdot r_1 = P \cdot r_2,$$

es decir, los momentos de las fuerzas con respecto al eje de giración son iguales y de sentido contrario.

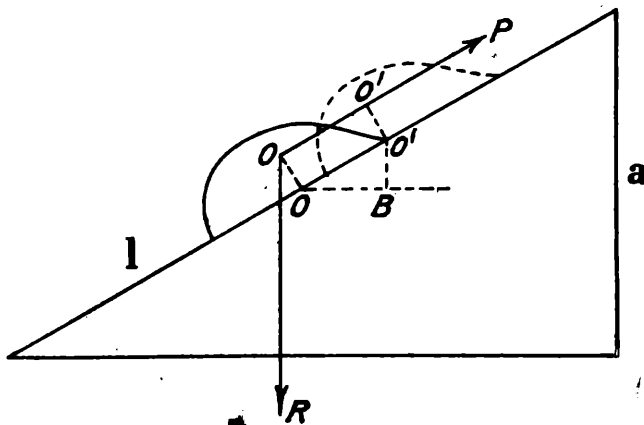


Fig. 120.

C. PLANO INCLINADO Y CUÑA. — En el plano inclinado las fuerzas son R y P (fig. 120). Si se produce un desplazamiento virtual del cuerpo, el punto de aplicación de P se mueve paralelamente a la fuerza en el camino virtual OO' , y el punto de aplicación de R en el camino BO' que le es paralelo. Por lo tanto, se tiene:

$$P \cdot OO' = R \cdot BO' \quad [1]$$

y por la semejanza de los triángulos $OO'B$ y el del plano inclinado de altura a y longitud l se tiene:

$$P \cdot l = R \cdot a, \quad [2]$$

igualdad ya deducida.

En la cuña (fig. 121), si se produce un desplazamiento virtual OO' , paralelo a P , se produce al mismo tiempo un desplazamiento BA paralelo a R , de tal modo que se tiene:

$$P \cdot AC = 2 R \cdot BA \quad [3]$$

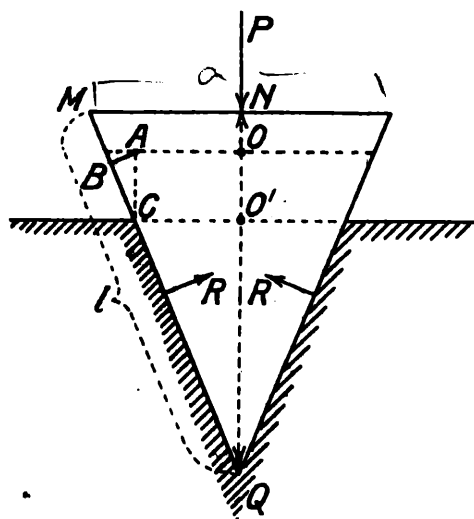


Fig. 121.

y por semejanza de los triángulos MNQ y ABC se tiene, si es a el ancho y l el canto de la cuña:

$$\frac{BA}{AC} = \frac{a/2}{l} \quad [4]$$

y, por lo tanto, la condición de equilibrio es

$$P \cdot l = R \cdot a. \quad [5]$$

D. POLEAS Y APAREJOS. — Si se trata de una polea fija, los desplazamientos virtuales son iguales y opuestos, y por consiguiente el sistema estará en equilibrio si es

$$P = R. \quad [1]$$

Si se combina una polea fija con una móvil (fig. 51), e imaginamos que el peso P se desplaza un camino e , el peso R se desplazará en sentido contrario un camino igual a $\frac{e}{2}$, pues la variación debe distribuirse por igual en los dos segmentos del hilo de que pende la polea móvil. La condición de equilibrio es, por lo tanto:

$$P = \frac{R}{2}. \quad [2]$$

Si se combina una polea fija con varias móviles formando una *trocla* (fig. 53), para un desplazamiento e de P , el punto A se desplazará la mitad en sentido contrario, el B la mitad de A y así siguiendo. Si son tres las poleas móviles, como en el dibujo, el peso R recorrerá en sentido contrario un camino igual a $e:2^3$, y si fuera n poleas móviles, ese desplazamiento sería $e:2^n$. La condición de equilibrio es, pues,

$$P = \frac{R}{2^n}. \quad [3]$$

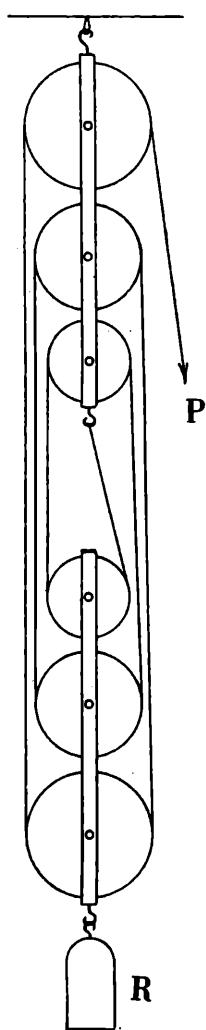


Fig. 122.

Si se hace, en cambio, una combinación como la de la figura 122, que se denomina *motón*, a un desplazamiento e de P , correspondería un desplazamiento de R en sentido contrario e igual a la sexta parte, pues el desplazamiento se debe dividir por igual en los seis hilos; si fueran n las poleas móviles, el camino de R sería la $2n$ ava

parte, y, por lo tanto, la condición de equilibrio se expresa por la igualdad

$$P = \frac{R}{2n}. \quad [4]$$

E. TORNILLO. — La presión que se puede efectuar por medio de un tornillo (fig. 123) se determina también sencillamente.

Sea h el paso del tornillo, es decir, el camino en que progresa verticalmente, si se gira en 360° . El trabajo que efectuaría la fuerza P en una vuelta sería:

$$P \cdot 2\pi r \quad [1]$$

y el de R

$$R h, \quad [2]$$

de donde es

$$R h = P \cdot 2\pi r.$$

Hemos hecho el cálculo para un desplazamiento finito, lo cual no es, en general, riguroso; en este caso como el camino vertical es proporcional al ángulo de giración el resultado sería el mismo.

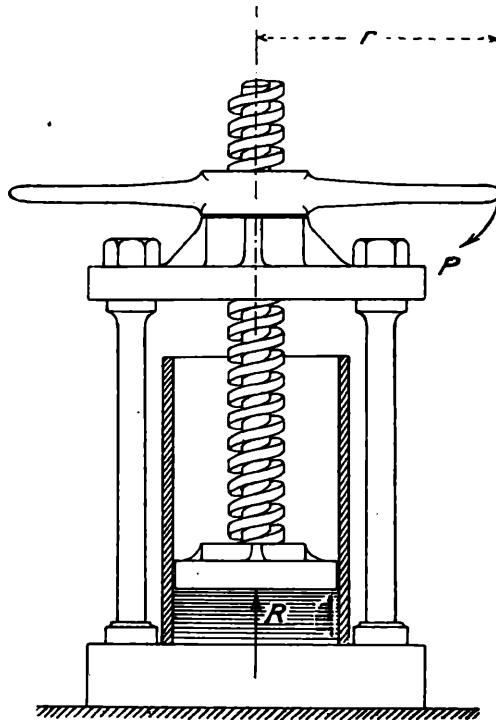


Fig. 123.

F. BÁSCULA, BALANZA DECIMAL. — La construcción se ve, esquemáticamente, en la figura 124. Si la palanca gira en el ángulo φ , los puntos a, b, c, \dots, g , pasan a las posiciones $a' b_1 c', \dots, g'$, y valen las relaciones:

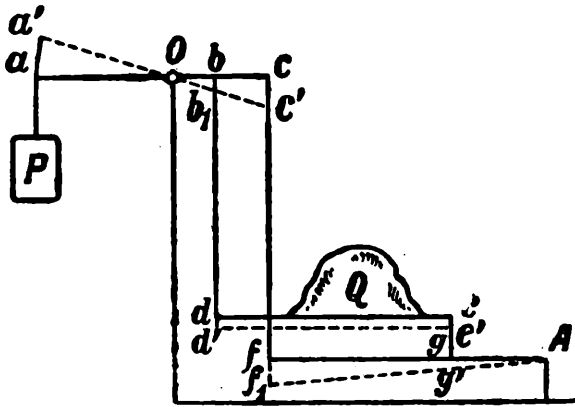
$$bb_1 = dd' \quad ; \quad cc' = ff_1 \quad ; \quad ee' = gg' \quad [1]$$

$$\frac{bb_1}{cc'} = \frac{ob}{oc} \quad \text{o} \quad bb_1 = cc' \cdot \frac{ob}{oc} \quad [2]$$

$$gg' = ff_1 \cdot \frac{Ag}{Af} = cc' \cdot \frac{Ag}{Af}. \quad [3]$$

Construyendo la balanza de tal manera que sea:

$$\frac{A g}{A f} = \frac{ob}{oc} \quad [4]$$



se tendrá

$$gg' = bb_1 \quad [5]$$

o, lo que es lo mismo:

$$ee' = dd', \quad [6]$$

Fig. 124.

es decir, el puente o plataforma de se deslaza paralelamente a sí

mismo, lo que hace indiferente el lugar en que se coloque, sobre ella, al peso Q .

La condición de equilibrio resulta del principio de los trabajos virtuales, fácilmente.

Debe ser

$$P \cdot aa' = Q bb_1 \quad [7]$$

o

$$P = Q \frac{bb_1}{aa'} = Q \frac{ob}{oa} \quad [8]$$

En la balanza decimal es $\frac{ob}{oa} = \frac{1}{10}$ y por lo tanto $P = \frac{Q}{10}$.

QUINTA PARTE EL FROTAMIENTO

CAPITULO VII

ROCE POR DESLIZAMIENTO Y POR RODADURA

ROCE EN LOS EJES. EJEMPLOS DE EQUILIBRIO CON Y SIN ROCE.
EL FRENO DE PRONY. UNIDADES DE POTENCIA

1. **Generalidades.** — Se designa con el nombre de roce o frotamiento a la resistencia que se oponen los cuerpos en contacto, al moverse uno de ellos sobre el otro.

Esa resistencia al movimiento no se limita al estado sólido de agregación, se presenta también, si bien obedeciendo a otras leyes, cuando un líquido se mueve sobre un sólido o sobre otro líquido, cuando una capa de gas se mueve sobre otra o sobre un cuerpo sólido.

Por el momento nos limitaremos al estudio de las leyes que se refieren al roce entre sólidos.

Es necesario distinguir entre roce por *resbalamiento* y roce por *rodadura*. En el primer caso una superficie se desliza sobre otra; en el segundo, un cilindro o una esfera rueda sobre otro cuerpo.

2. **Roce por deslizamiento. Coeficiente de frotamiento del reposo.** — Si un cuerpo de peso P cuya superficie ~~interior~~^{exterior} es plana, descansa (fig. 125) sobre una base horizontal de sustentación, es menester aplicar cierta fuerza horizontal F para ponerlo en movimiento.

La experiencia enseña que se cumple la relación:

$$F = \mu_0 P, \quad [1]$$

donde μ_0 es una constante que se denomina *coeficiente de frotamiento del reposo*.

La significación de la ecuación [1] resulta claramente de las consideraciones que siguen. Supongamos que durante las experiencias la naturaleza de las superficies en contacto ha sido la misma, por ejemplo, madera contra madera en cierto estado de pulimento. Esto sen-

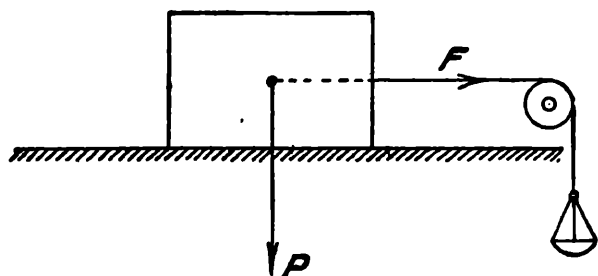


Fig. 125.

tado, se puede aumentar el peso del cuerpo, colocando pesos encima de él, o también disminuir la extensión de las superficies en contacto, haciendo al cuerpo un corte como el que indica la figura 126. En todos estos casos el cociente de dividir la fuerza

F , necesaria para iniciar el movimiento, por el peso total P del cuerpo, da el mismo valor numérico μ_0 .

Si el peso P es igual a la unidad, se tiene $F = \mu_0$. *El coeficiente de roce para el reposo es, entonces, numéricamente igual a la fuerza necesaria para mover la unidad de peso, supuesta horizontal la superficie de contacto.*

Es claro que si se cambia la naturaleza de una de las superficies, la constante μ_0 tiene otro valor.

Estos resultados fueron encontrados experimentalmente por Coulomb y se pueden enunciar como sigue:

1° La resistencia proveniente del roce es proporcional a la fuerza con que el cuerpo es apretado contra la superficie;

2° La constante de proporcionalidad, o, lo que es lo mismo, el coeficiente de frotamiento, depende de la naturaleza de las superficies en contacto, pero no de su extensión.

En muchos libros se dice que la resistencia que opone el roce al movimiento es proporcional a la presión normal de un cuerpo sobre el otro. Se trata no de un error de concepto, sino de un lenguaje físicamente incorrecto.

Se hace referencia en esos casos a la componente de la fuerza que es normal a las superficies en contacto. Propiamente hablando, la resistencia no depende de la presión, si como tal se entiende a la fuerza sobre cada unidad de superficie, pues, como se ha visto, aquella resistencia es independiente de la extensión de las superficies en contacto.

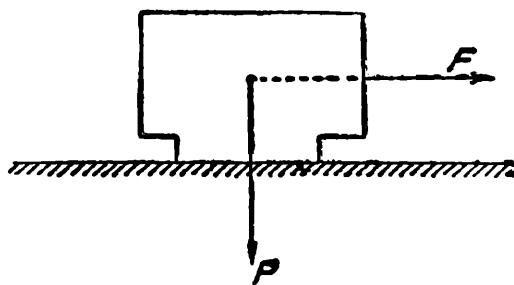


Fig. 126.

Eso es exacto para presiones pequeñas. Para presiones relativamente elevadas, el valor del roce aumenta en forma considerable con la presión.

Veamos ahora cuál es la reacción del plano sobre el cuerpo, en el preciso instante en que comienza el deslizamiento. Las fuerzas exteriores al plano y al cuerpo son el peso P y F (fig. 127), y es claro que el cuerpo no podría encontrarse en equilibrio si el plano no aplicase sobre el cuerpo fuerzas iguales y opuestas a F y P , respectivamente, o, en otras palabras, el plano debe reaccionar con una fuerza R igual y de sentido contrario que la resultante de P y F . Se ve así que, si existe roce, la reacción de la superficie no obra en la dirección de la normal sino que forma con ella un ángulo φ definido por la relación

$$\frac{F}{P} = \text{tang } \varphi = \mu_0, \quad [2]$$

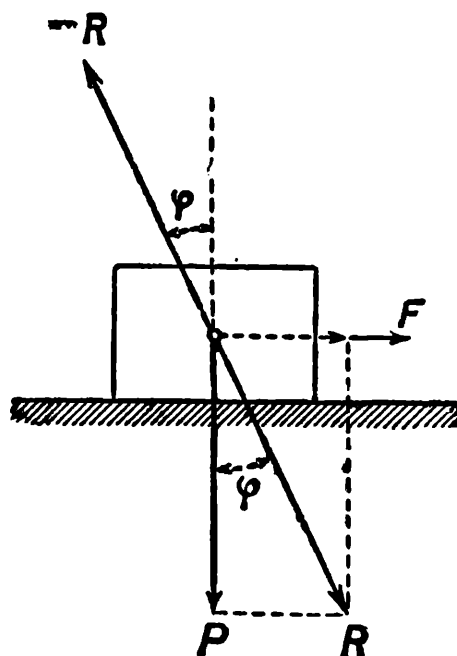


Fig. 127.

ángulo que se denomina *de roce*. Es claro, pues, que mientras el cuerpo está en reposo el ángulo φ está comprendido entre 0 y el valor que resulta de la ecuación anterior. Cuando se dice que un punto se mueve sin roce sobre una superficie, se significa, a la vez, que la reacción de la superficie tiene lugar según la dirección de su normal.

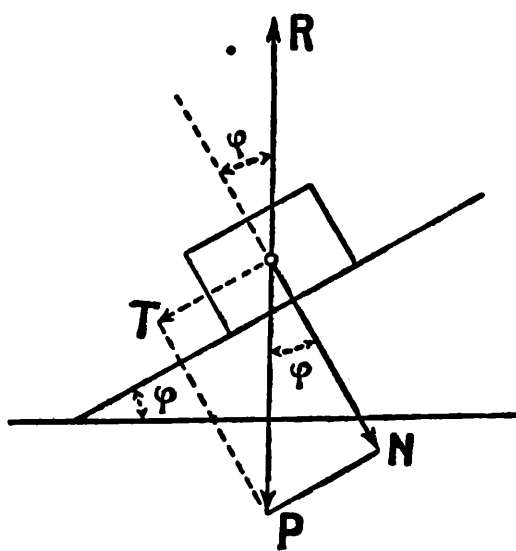


Fig. 128.

(fig. 128) y determinar la inclinación para la cual se inicia el movimiento de aquel.

3. **Determinación experimental de μ_0 .** — El valor del coeficiente μ_0 puede determinarse utilizando una instalación como la de la figura 125, para lo cual basta situar pesos en el platillo, hasta el preciso momento en que el cuerpo comienza a deslizarse. Más sencillo es situar el cuerpo sobre un plano inclinado a ángulo variable

La fuerza que hace caer al cuerpo es la componente T del peso que le es paralela, esto es,

$$T = P \operatorname{sen} \varphi, \quad [3]$$

si P es su peso y φ la inclinación del plano.

La resistencia debida al roce es igual al producto de la fuerza N normal al plano por el coeficiente de roce, es decir:

$$\mu_0 N = \mu_0 P \cos \varphi. \quad [4]$$

Para la inclinación en que se inicia el deslizamiento, debe ser:

$$P \operatorname{sen} \varphi = \mu_0 P \cos \varphi, \quad [5]$$

de donde

$$\mu_0 = \operatorname{tang} \varphi. \quad [6]$$

En el preciso instante en que se inicia el movimiento, la reacción R del plano debe ser igual y de sentido contrario que el peso P del cuerpo; forma con la dirección de la normal el ángulo φ de roce.

4. Influencia de la velocidad. — La experiencia muestra que el roce por deslizamiento disminuye continuamente con la velocidad.

Para que se mantenga el deslizamiento de un cuerpo sobre otro, a una velocidad constante, es necesario la acción de una fuerza F tal que

$$F = \mu P, \quad [7]$$

ecuación de idéntico contenido que la [1], siendo

$$\mu < \mu_0. \quad [8]$$

Para velocidades muy pequeñas, como ocurre con frecuencia en las aplicaciones técnicas, el roce depende muy poco de la velocidad.

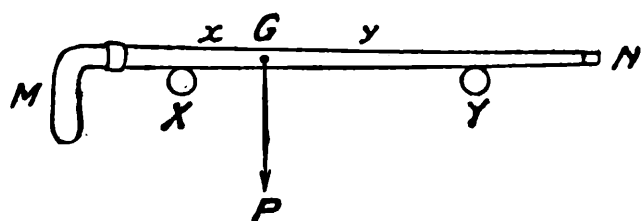


Fig. 129.

Sin embargo, aun en este caso, puede ponerse fácilmente de manifiesto que es menor la fuerza para mantener un cuerpo en movimiento que la fuerza necesaria para moverlo.

Sea, por ejemplo, MN , figura 129, un bastón que se mantiene horizontal sobre dos soportes de madera o sobre los dos dedos extendidos. Las fuerzas sobre los apoyos

sean X e Y . En el instante que representa la figura, es $X > Y$, por estar el apoyo de la izquierda más cerca que el otro del centro de gravedad G del bastón.

Si se trata de acercar los apoyos, el bastón se moverá conjuntamente con el apoyo de la izquierda, deslizándose sobre el de la derecha, pues es:

$$\mu_0 X > \mu_0 Y, \quad [9]$$

siendo $\mu_0 X$ y $\mu_0 Y$ las respectivas fuerzas del roce sobre los soportes.

Si el coeficiente de roce del movimiento fuese igual que el coeficiente para el reposo, el deslizamiento sobre el apoyo de la derecha continuaría hasta que fuese

$$Y = X, \quad [10]$$

o, lo que es lo mismo,

$$\mu_0 X = \mu_0 Y \quad [11]$$

y a partir de ese momento los dos apoyos se deslizarían debajo del bastón, acercándose más y más hasta tocarse debajo de G .

Pero las cosas no ocurren así. A causa de que el roce μ_0 para el reposo es mayor que el roce μ para el movimiento, el bastón se desliza sobre el soporte de la derecha hasta que Y tiene un valor tal, que

$$\mu_0 X = \mu Y; \quad [12]$$

y, puesto que es $\mu_0 > \mu$, se tiene, en ese instante,

$$Y > X. \quad [13]$$

En ese momento debe comenzar a deslizarse el bastón a la vez sobre el apoyo de la izquierda, de modo que en ese instante pasa la fuerza del roce sobre la izquierda del valor

$$\mu_0 X \quad \text{al} \quad \mu X$$

y, por lo tanto, siendo $Y > X$ es $\mu Y > \mu X$, lo que quiere decir que cesará el deslizamiento del bastón sobre el soporte de la derecha, continuándose sobre el de la izquierda. Luego se repite la misma cosa para el otro apoyo y así hasta que los soportes se unen por debajo de G .

Por esta experiencia puede determinarse la relación entre el coeficiente de roce para pequeñas velocidades y el coeficiente para el reposo, pues si medimos las distancias x , y , de los puntos de apoyo al centro de gravedad del bastón, en el momento en que vale la ecuación [12], se tiene.

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{X}{Y} = \frac{y}{x}. \quad [14]$$

Para velocidades grandes de deslizamiento, el roce disminuye considerablemente con la velocidad, lo cual debe tenerse muy en cuenta en los ferrocarriles, a los fines de la eficacia de la acción de los frenos.

Si se apretan los frenos, tanto que las ruedas no puedan girar, el convoy o la locomotora resbalarán sobre los rieles con una velocidad igual a la que llevaba el tren. La fuerza que retarda en ese caso la marcha es debida al roce de deslizamiento. Por lo dicho, resulta evidente que la acción de los frenos sería tanto menor cuanto mayor fuese la velocidad del convoy.

Si, en cambio, se apretan los frenos solo un poco, de modo que las ruedas puedan aún rodar, la velocidad de deslizamiento de las ruedas sobre los rieles será menor que la velocidad del tren y el roce, por lo tanto, mayor que en el caso anterior.

Se obtiene así el curioso resultado, que está de acuerdo con la experiencia, de que apretando menos los frenos se consigue una eficacia mayor.

Determinaciones experimentales realizadas en los ferrocarriles dan los siguientes valores del coeficiente del roce por deslizamiento de las ruedas sobre los rieles para diferentes velocidades.

$v =$	10	30	60	90	105 km/hora
$\mu =$	0,1923	0,1403	0,1083	0,0930	0,0878.

Una dependencia muy distinta existe para el roce entre el hierro y cuero, lo cual es de importancia en las transmisiones por medio de correas. En ese caso el roce por deslizamiento aumenta mucho con la velocidad, lo que quiere decir que con una correa se puede transmitir tanto más fuerza cuanto más resbale.

Todos los resultados que hemos mencionado se refieren a superficies limpias o con muy poco lubricante.

Si la lubricación es tal que el roce se realiza entre capas de lubricante, el fenómeno es de otra naturaleza, y le corresponden otras

consideraciones. La lubricación disminuye considerablemente el frotamiento. A continuación se da una tabla de valores de ese coeficiente.

COEFICIENTE DE ROZAMIENTO POR RESBALAMIENTO

Cuerpos frotantes	Estado de las superficies	Reposo	Movimiento
Hierro fundido sobre hierro fundido	sin lubricante	$\mu_0 = 0,18$	$\mu = 0,17$
	con lubricante	$\mu_0 = 0,12$	$\mu = 0,17$
Correas de cuero sobre madera . . .	secas	$\mu_0 = 0,47$	$\mu = 0,27$
Correas de cuero sobre hierro . . .	secas	$\mu_0 = 0,28$	$\mu = 0,56$
Madera sobre madera	secas	$\mu_0 = 0,50$	$\mu = 0,36$
	con lubricante	$\mu_0 = 0,44$	$\mu = 0,16$

Según mediciones muy exactas realizadas recientemente, los valores del coeficiente de roce entre correas de cuero y hierro, en función de la velocidad, son:

Velocidad en m/seg	μ	
	I	II
0,000	0,180	0,238
0,036	0,227	0,292
0,063	0,262	—
0,104	0,329	0,417
0,301	0,458	—
0,496	0,641	0,717
0,880	0,835	—

donde los valores de la columna indicada con I corresponden a correas engrasadas y los de la II a correas en estado natural.

5. **Roce de los ejes.** — Sea (fig. 130) P la carga que soporta el eje E , fuerza que suponemos pasa por el eje del cilindro; el cojinete C equilibra, por reacción, la fuerza P ; las fuerzas de reacción del cojinete serán normales a su superficie y, por lo tanto, al eje. Es decir, el peso P despierta en el cojinete que le sirve de apoyo fuerzas de reacción N normales, cuyo valor depende, como es evidente, de la región, pues es claro que en B la reacción ha de ser menor que en A . El equilibrio se produce si la suma de las componentes de las fuerzas N , paralelas a P , es igual a ésta. En cambio, la suma aritmética de las N es mayor que P , es decir:

$$\Sigma N > P. \quad [15]$$

Esa diferencia es tanto menor cuanto más cerca de A están distribuidas todas las N , y esta distribución depende, como es evidente, de la adaptación del eje al cojinete.

Se puede escribir:

$$\Sigma N = xP, \quad [16]$$

donde x es una magnitud de la que sabemos únicamente que es mayor que la unidad.

Si actúa además de la fuerza P una fuerza excéntrica p a la distancia r del centro, es claro que las

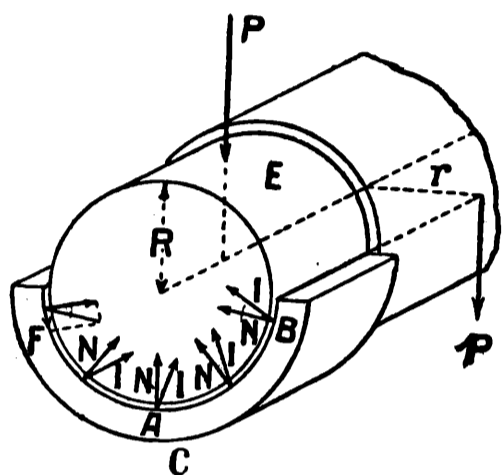


Fig. 130.

fuerzas N solas no pueden mantener el equilibrio, pues, por pasar por el eje, sus momentos con respecto a él se anulan. El equilibrio de la fuerza excéntrica p se produce por las fuerzas del roce entre las superficies en contacto. En lugar de las fuerzas N deben aparecer fuerzas I según direcciones que forman el ángulo de frotamiento φ con los radios del círculo del dibujo, y la resultante de esas fuerzas

I debe ser igual y opuesta a la resultante de P y p .

La condición analítica del equilibrio resulta descomponiendo cada I en una componente normal N y otra tangencial F , que es la fuerza del roce, y formando los momentos con respecto a P ; así se obtiene

$$pr = R \Sigma F, \quad [17]$$

donde R es el radio del eje, factor común de las F , las cuales varían de un lugar a otro, puesto que las componentes N de la reacción también son diferentes.

En todas partes vale la ecuación

$$F = \mu_0 N, \quad [18]$$

y, por lo tanto,

$$pr = \mu_0 R \Sigma N, \quad [19]$$

y por la [16]

$$M = \mu_0 x RP = \mu' RP, \quad [20]$$

donde $M = pr$ es el momento necesario para hacer girar el cuerpo; se denomina momento de roce. El coeficiente $\mu_0 x = \mu'$ se llama coefi-

ciente de roce para los ejes y debe ser mayor que μ_0 puesto que es $\alpha > 1$. En el hecho se encuentra a μ' mucho menor que μ_0 , debido a que en los ejes y cojinetes es posible un pulimento y una lubricación muchísimo mejor que en superficies planas de los mismos materiales.

El valor de μ' depende de la carga que soporta el eje, de la velocidad de rotación y de la temperatura. Es además menor en ejes verticales que en horizontales.

6. Roce por rodadura. — Cuando una rueda, o, más generalmente, un cilindro, rueda sobre una superficie plana, aparece en los puntos de contacto una fuerza que resiste al movimiento; resistencia que se atribuye, impropriamente, a un *roce de segunda especie o por rodadura*.

Coulomb estudió ese fenómeno colocando horizontalmente un cilindro C sobre dos soportes planos S (fig. 131). En el espacio libre entre los dos apoyos hacía pender pesos Q , fijos a los extremos de hilos que descansaban sobre el cilindro; variaba así la fuerza con que éste se apoyaba en los soportes.

En el medio del cilindro arrolló un hilo, uno de cuyos extremos fijó en él, suspendiendo del otro extremo un platillo. Determinó luego el peso que, en cada caso, debía pender del hilo del platillo para que se iniciase el movimiento.

El resultado de las experiencias fué que el momento necesario para hacer rodar un cuerpo es proporcional a la componente del peso o fuerza normal a la superficie de contacto.

A fin de comprender claramente el fenómeno, estudiemos las condiciones del equilibrio en el esquema de la instalación anterior, representado por la figura 132.

Si no existen cargas en el platillo, es decir, si $p = 0$, el equilibrio resulta debido a que el apoyo reacciona con una fuerza igual y opuesta al peso P .

Si existen cargas en el platillo, esto es, si p es diferente de cero, el equilibrio sólo es posible si aparece una reacción igual y contraria a la

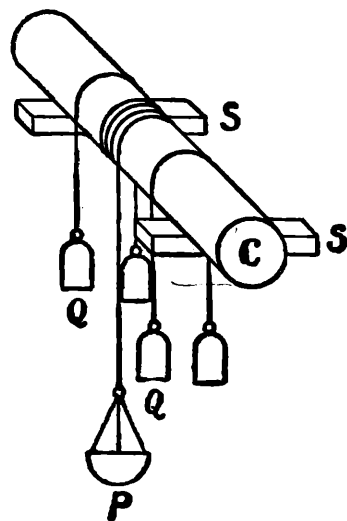


Fig. 131.

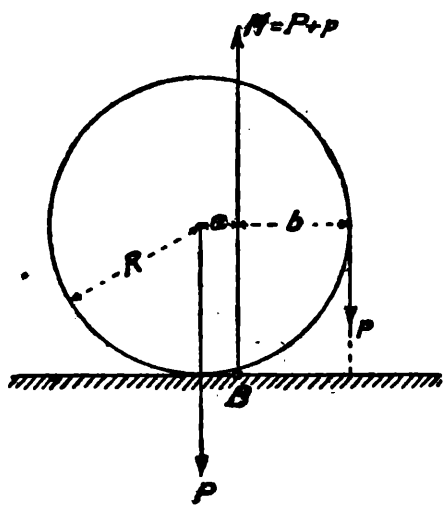


Fig. 132.

resultante $P + p$ de las fuerzas paralelas verticales P y p . Es decir, la fuerza de reacción debe ser una fuerza N vertical e igual a la suma $P + p$ y aplicada en el punto de aplicación de la resultante de P y p . Si la reacción N pasa por el punto B , debe ser

$$P a = p b. \quad [21]$$

Ahora bien, no se concibe una reacción vertical aplicada en B si no hay una deformación de la superficie del cilindro.

Si tal deformación no existiese, a sería nula, lo que significaría que con valores de p infinitamente pequeños, ya se iniciaría el movimiento. La experiencia muestra que p es muy pequeña con respecto a P , y, por consiguiente, que a es muy pequeña con respecto a b , de tal modo que se puede escribir R en lugar de b .

Escribiendo, además, ν en lugar de a , es decir, poniendo $a = \nu$ se tiene

$$p R = \nu P \quad [22]$$

$$M = \nu P, \quad [23]$$

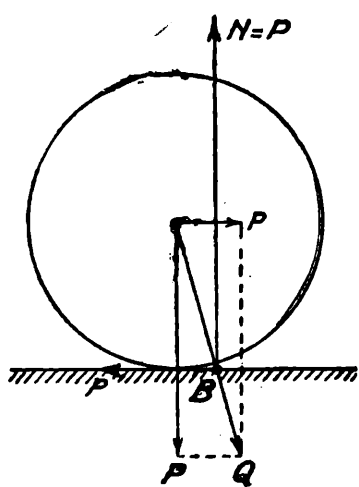


Fig. 133.

si se indica con M el momento actuante $p R$.

El coeficiente ν se llama coeficiente de roce por rodadura, siendo numéricamente igual al momento necesario para mover la unidad de carga; su valor es, en condiciones dadas, constante

Exactamente los mismos resultados se obtienen cuando la fuerza p es paralela a la superficie de los soportes (fig. 133), pues la reacción del soporte debe ser una fuerza aplicada en B de módulo igual y de sentido contrario que la resultante de las fuerzas $B p = p$ y $BN = P$. *de sentido contrario a P y R res.*

En los ferrocarriles, la rueda es mucho más rígida que el riel, de manera que debemos admitir que es éste el que se deforma.

Consideremos primero el caso en que la rueda sea completamente rígida y la superficie sobre la que se mueve plástica; se tiene entonces el caso de la figura 134. La reacción de la superficie debe pasar por

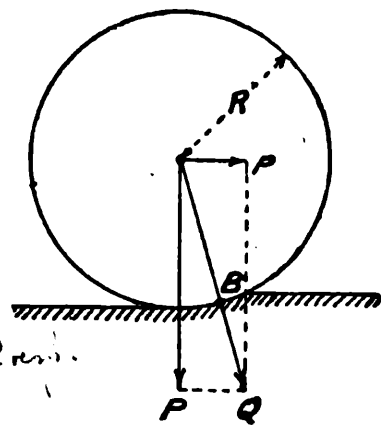


Fig. 134.

B y ser igual y opuesta a Q . Los momentos de p y P con respecto a B deben ser iguales y de signo contrario y se tiene, como antes,

$$pR = M = \nu P, \quad [24]$$

indicando con R el radio de la rueda.

Si, en cambio, la superficie es completamente elástica, como ocurre en los rieles, se tiene el caso de la figura 135. La reacción pasa por A misma, sin que por esto sea nulo el roce. Es mucho menor, pero no nulo; por la presión de las ruedas no sólo se produce una compresión, sino también una dilatación longitudinal del riel; el camino recorrido horizontalmente por la rueda en una vuelta es menor que su perímetro. Debe existir, por lo tanto, al mismo tiempo que la rodadura, un deslizamiento pequeño al que le corresponde cierto roce. Es, pues, notorio que cuanto mayor sea la rigidez de la rueda y del riel tanto menor será el frotamiento.

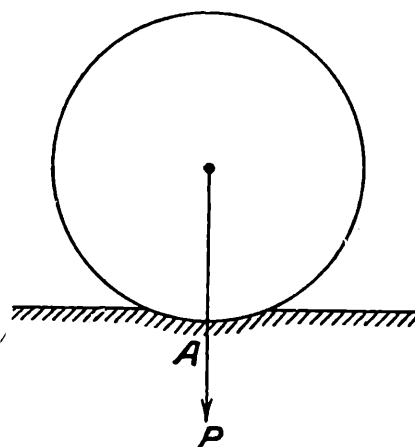


Fig. 135.

La existencia de ese deslizamiento puede mostrarse en clase, moviendo un carro pequeño, con una carga relativamente grande, sobre una lámina de goma. Se comprobará que el camino calculado por el número de vueltas de las ruedas es mayor que la distancia sobre la goma entre las posiciones inicial y final del carro.

En el caso de los ferrocarriles no sólo debe considerarse el roce entre el riel y las ruedas, sino también entre éstas y sus ejes. Por eso, lo mejor es escribir

$$F = \mu'' P, \quad [25]$$

si F es la fuerza que hay que aplicar horizontalmente en las cadenas para arrastrar la carga total P . Es claro que para las aplicaciones ferroviarias será mucho más cómodo usar el coeficiente μ'' así introducido, el cual puede determinarse fácilmente.

Se disminuye el roce en los ejes convirtiendo el roce por deslizamiento en roce por rodadura, situando entre el cojinete y el eje una serie de esferas de acero (fig. 136).

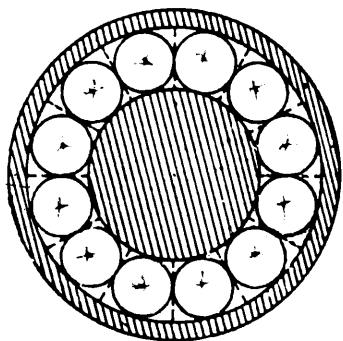


Fig. 136.

7. Ejemplos de equilibrio sin roce y con roce. — Sea AB , figura

137, una barra rígida cuyos extremos se apoyan sobre dos planos inclinados que forman los ángulos α y β con la horizontal. Preguntamos cuál es la posición de equilibrio, esto es, cuál es el ángulo que forma en ese caso con la vertical.

Si se supone que no hay roce, las reacciones R_1 y R_2 de los planos sobre los extremos de la barra tienen las direcciones de las normales respectivas; en la posición de equilibrio R_1 y R_2 son tales que cortan a la fuerza P , que representa el peso, en un

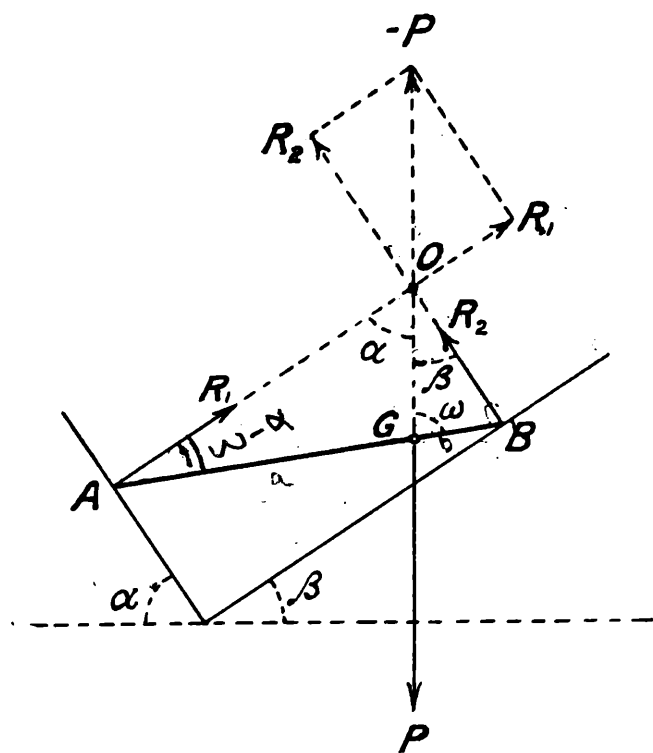


Fig. 137.

mismo punto O y admiten como resultante una fuerza igual y opuesta a P .

Si se escribe $AG = a$; $BG = b$ es:

$$\frac{OG}{a} = \frac{\text{sen}(\omega - \alpha)}{\text{sen } \alpha} \quad ; \quad \frac{OG}{b} = \frac{\text{sen}(\omega + \beta)}{\text{sen } \beta} \quad [1]$$

y, por lo tanto,

$$\frac{a \text{ sen}(\omega - \alpha)}{\text{sen } \alpha} = \frac{b \text{ sen}(\omega + \beta)}{\text{sen } \beta} \quad [2]$$

de donde

$$\text{cotg } \omega = \frac{a \text{ cotg } \alpha - b \text{ cotg } \beta}{a + b} \quad [3]$$

Si se trata de una barra homogénea, es $a = b$ y, por consiguiente,

$$\text{cotg } \omega = \frac{1}{2} (\text{cotg } \alpha - \text{cotg } \beta) \quad [4]$$

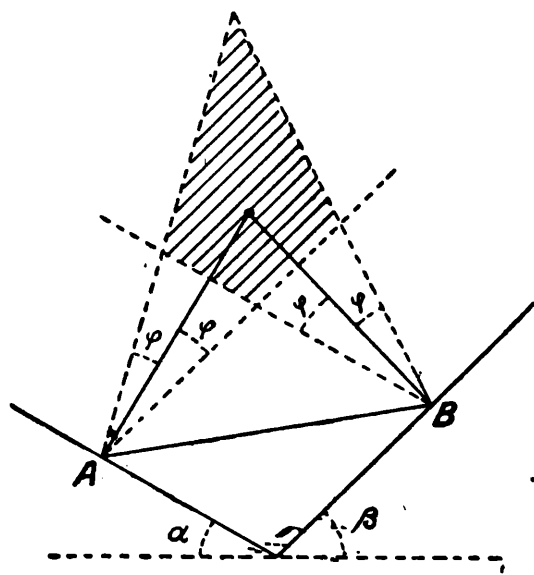


Fig. 138.

Si se tiene en cuenta el roce, las reacciones pueden estar comprendidas dentro de los ángulos φ de roce, trazados a uno y otro lado de

las normales en A y B a la superficie (fig. 138). El equilibrio se produce si las tres fuerzas que actúan sobre la barra se cortan en un punto del cuadrilátero sombreado. Si la vertical que contiene el centro de gravedad pasa por esa región se tiene una posición de equilibrio. La posición precisa del punto de concurrencia de las fuerzas no puede determinarse; el problema es estáticamente indeterminado.

8. El freno de Prony. Unidades de potencia. — El freno de Prony (fig. 139) permite determinar experimentalmente el trabajo que entrega por segundo una máquina funcionando a cierto número n de revoluciones por segundo.

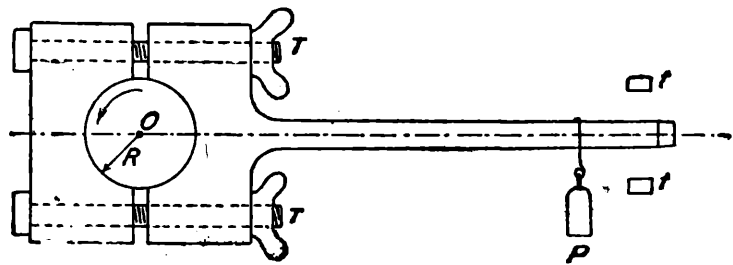


Fig. 139.

Para ello se desacopla la máquina del árbol o mecanismo que pone en

movimiento y se adapta sobre su eje el freno, apretando los tornillos T hasta que tenga el número n de revoluciones; luego se desplaza el peso P o se agregan sobrecargas hasta que el brazo quede en equilibrio entre los toques t . En esas condiciones el trabajo de la máquina se consume en el roce en el freno.

Si es F la fuerza del roce, la condición de equilibrio del freno requiere que sea

$$FR = PL, \quad [1]$$

donde L es el brazo de la fuerza P respecto al punto O .

El trabajo de la fuerza del roce es, por segundo,

$$W = n \cdot F 2\pi R = 2\pi n PL. \quad [2]$$

Si se mide P en kilogramos y L en metros el trabajo W está dado en kilográmetros por segundo. Se mide así la potencia útil de la máquina para el número n de revoluciones.

Como en la expresión de W no figura el radio R del eje, si éste es muy delgado, se le puede adaptar un cilindro de hierro sobre el que se aplica finalmente el freno.

El trabajo que realiza una máquina en la unidad de tiempo se denomina su *potencia*. En el sistema absoluto la unidad de potencia es

el erg por segundo; como esta unidad es muy pequeña se usa en la práctica el joule por segundo que recibe el nombre de *Watt*.

En el sistema técnico la unidad de potencia es el kilográmetro por segundo; en la práctica se usa el *caballo-vapor*, que se indica con el símbolo *HP*, y que equivale a 75 kilográmetros por segundo.

La dimensión de una potencia que representaremos, en adelante, con P se obtiene dividiendo la dimensión de un trabajo por la de un tiempo, resulta:

$$[P] = ML^2 T^{-3}$$

o en el sistema *C G S*

$$[P] = gr\ cm^2\ seg^{-3}.$$

SEXTA PARTE
MOVIMIENTOS CURVILÍNEOS. OSCILACIONES

CAPITULO VIII

MOVIMIENTO CURVILÍNEO PLANO: ACELERACIONES
TANGENCIAL Y NORMAL.
OSCILACIONES: OSCILACIONES LIBRES Y FORZADAS.
RESONANCIA

A. — ACELERACIÓN EN EL CASO DE MOVIMIENTOS CURVILÍNEOS.
MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

1. **Generalidades.** — Los movimientos curvilíneos que hemos considerado antes eran muy sencillos, siendo, en diversos casos, resultado de la combinación de un movimiento uniforme con uno uniformemente variado; la aceleración era de antemano conocida en magnitud y dirección.

Se trata ahora de expresar analíticamente la aceleración de un movimiento curvo plano cualquiera.

Consideremos, pues (fig. 140), un movimiento curvo de un punto, que supondremos, para más sencillez, que se cumple en un plano. En cierto instante t el punto se encontrará en la posición P ; su velocidad esté representada por el vector V , tangente a la curva. Transcurrido un intervalo Δt de tiempo el punto estará en otra posición P_1 y su velocidad, representada por el vector V_1 , será, en general, de diferente magnitud que V .

Si ni la dirección ni la magnitud hubiesen cambiado, la velocidad en P_1 estaría representada por el vector $P_1 V$ igual y paralelo a PV

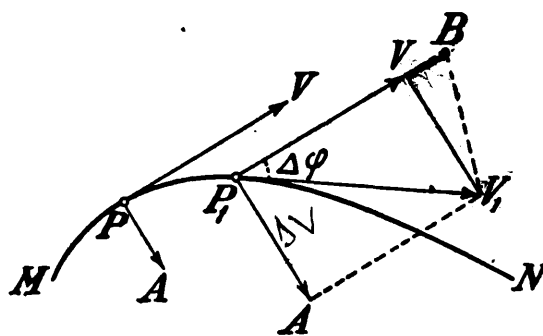


Fig. 140.

y, por consiguiente, la diferencia $P_1 A = V V_1$ de los vectores V y V_1 , que designaremos con ΔV , representa la variación que ha experimentado la velocidad V en el transcurso del tiempo Δt .

La aceleración media en el intervalo de tiempo considerado será $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ y su dirección es la de ΔV . La realidad estará representada de la mejor manera posible si Δt se hace infinitamente pequeño, en cuyo caso P_1 se acerca indefinidamente a P y se puede hablar de una aceleración en este punto, la cual no es sino el valor límite que toma la aceleración media $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ cuando Δt se hace sumamente pequeño, esto es, la derivada de la velocidad respecto al tiempo.

La aceleración en P se puede representar por un vector $PA = a$ de magnitud y dirección conveniente.

Cuando se dice que existe en P una aceleración de dirección y magnitud a , se significa, pues, como ya se sabe, que en el transcurso de un tiempo dt muy pequeño se superpone a la velocidad ya existente una velocidad paralela a a y de magnitud $adt = dv$. Esta consideración vale también aun cuando el movimiento no sea plano.

Al pasar de P a P_1 la velocidad cambia de magnitud y de dirección. *El incremento de la magnitud* lo hallamos tomando sobre la prolongación de $P_1 V$ un punto B tal que $P_1 B$ sea igual a V_1 .

La magnitud de un vector se indica encerrándolo entre barras; por lo tanto el aumento de magnitud de V , que es VB , lo indicamos con $\Delta |V|$. La variación que proviene del cambio de dirección se obtiene sumando a $P_1 B$ el vector $B V_1$, pues así resulta $P_1 V_1$.

*** 2. Aceleraciones normal y tangencial.** — Puesto que las velocidades V y V_1 corresponden a instantes de tiempo muy próximos forman un ángulo muy pequeño, $\Delta \varphi$. Por igual razón VB es muy pequeño también, de modo que, con gran aproximación, puede considerarse normal a $B V_1$.

En el triángulo rectángulo VBV_1 valen las relaciones

$$\overline{V V_1}^2 = \overline{\Delta V}^2 = \overline{\Delta |V|}^2 + \overline{B V_1}^2 = \overline{\Delta |V|}^2 + |V|^2 \cdot \overline{\Delta \varphi}^2. \quad [1]$$

Dividiendo por el cuadrado del tiempo Δt transcurrido resulta:

$$\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)^2 = \left(\frac{\Delta |V|}{\Delta t}\right)^2 + |V|^2 \left(\frac{\Delta \varphi}{\Delta t}\right)^2. \quad [2]$$

El primer término representa el cuadrado de la aceleración media en el intervalo Δt . La aceleración en P se obtiene haciendo a Δt infinitésimo, con lo cual P_1 se acerca indefinidamente a P y el ángulo $\Delta\varphi$ se hace sumamente pequeño. Resulta:

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 = a^2 = \left(\frac{d|V|}{dt}\right)^2 + |V|^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \quad [3]$$

Si se pone $RP_1 = ds$, indicando con ds el elemento diferencial de línea, se puede escribir, para los valores absolutos,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\varphi}{ds} \cdot |V|, \quad [4]$$

pues V es la velocidad en P . La derivada $\frac{d\varphi}{ds}$ se puede calcular te-

niendo presente que las normales OP y OP_1 (fig. 141) a las dos tangentes V y V_1 forman el mismo ángulo $d\varphi$ que éstas. Se tiene

$$\text{línea } PP_1 = ds = OP \cdot d\varphi \quad [5]$$

de donde

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{OP}. \quad [6]$$

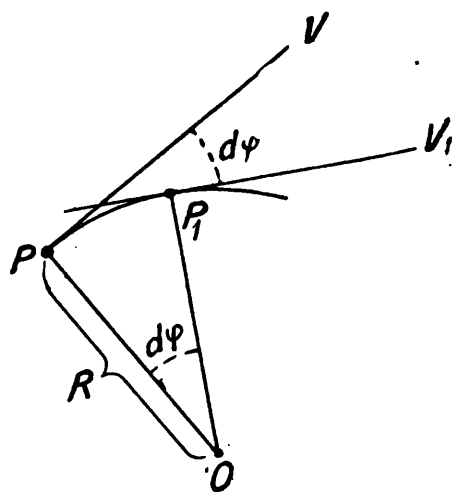


Fig. 141.

La magnitud $OP = R$ se llama el radio de curvatura de la línea en el punto P .

La ecuación [3] puede, por lo tanto, escribirse:

$$a^2 = \left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \frac{V^4}{R^2}, \quad [3]$$

indicando ahora sencillamente con V el valor absoluto de la velocidad.

Se tiene así expresada la aceleración total en función de la velocidad, de la variación de su valor absoluto y del radio R de la curva en el punto considerado. Puesto que es

$$V = \frac{ds}{dt}$$

se puede escribir, también,

$$a^2 = \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^4. \quad [7]$$

El primer término del segundo miembro se designa con el nombre de aceleración tangencial, pues tiene la dirección de V , que es tangente a la curva en P , y el segundo término se llama aceleración normal, pues tiene la dirección normal a la tangente, es decir, a la curva, puesto que BV_n , es normal a V .

Siendo a la aceleración total, el móvil está solicitado en todo instante por una fuerza

$$F = ma = m \sqrt{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^4} \quad [8]$$

cuyas componentes normal F_n y tangencial F_t a la curva son:

$$F_t = m \frac{d^2s}{dt^2} \quad [9]$$

$$F_n = m \frac{(ds/dt)^2}{R} = m \frac{V^2}{R}. \quad [10]$$

En estas ecuaciones aparece el hecho de que un movimiento curvo no existe sin una fuerza exterior; aun cuando el móvil recorra sobre la curva espacios iguales en tiempos iguales, con lo cual $F_t = 0$, se encuentra sometido a la fuerza F_n .

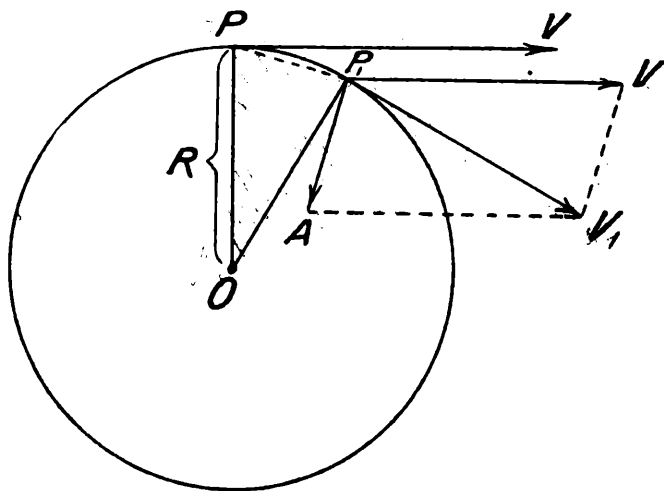


Fig. 142.

Un movimiento por inercia sólo es posible si es además $F_n = 0$, es decir, si $R = \infty$, o, en otras palabras, si la trayectoria es rectilínea.

3. Movimiento circular uniforme. — Supongamos que un punto material de masa m se mueve sobre un

círculo de radio R con la velocidad constante V . La aceleración tangencial es nula y, por lo tanto, la aceleración total es la aceleración normal y su valor será, según el párrafo anterior,

$$a = \frac{V^2}{R} \quad [11]$$

y dirigida hacia el centro de la curva.

Este resultado puede ser obtenido también, sin recurrir a las ecuaciones del número anterior, como sigue.

Sean P y P_1 (fig. 142) dos puntos próximos y PV y P_1V_1 las respectivas velocidades, de igual magnitud pero de diferente dirección.

La diferencia entre esos vectores proveniente del cambio de dirección se obtiene construyendo el paralelogramo de las velocidades entre P_1V_1 y el vector P_1V igual y paralelo a PV . Se ve así que esa diferencia se obtiene sumando al vector P_1V , es decir, a V , el vector $P_1A = VV_1$, el cual representa, entonces, el incremento de la velocidad en cierto intervalo τ de tiempo. La aceleración en ese intervalo es, pues, $\frac{P_1A}{\tau}$.

Los triángulos OPP_1 y AP_1V_1 son semejantes por tener dos lados perpendiculares entre sí y ser isósceles. Se tiene por eso:

$$\frac{R}{PP_1} = \frac{V}{P_1A}, \quad [12]$$

de donde resulta para el incremento P_1A de la velocidad en el tiempo τ el valor

$$P_1A = \frac{V}{R} PP_1 \quad [13]$$

y para la aceleración media \bar{a} :

$$\bar{a} = \frac{P_1A}{\tau} = \frac{V}{R} \cdot \frac{PP_1}{\tau}. \quad [14]$$

Si τ se hace infinitamente pequeño, P_1 se acerca indefinidamente a P , con lo cual la cuerda PP_1 toma la dirección de la tangente y P_1A la de PO . Se puede tomar, entonces, en lugar de la cuerda PP_1 el arco, con lo que se tiene:

$$\frac{PP_1}{\tau} = V$$

y para la aceleración, cuya dirección es, según lo que antecede, la del radio,

$$a = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{P_1A}{\tau} = \frac{V^2}{R}. \quad [11]$$

Este mismo resultado se ha obtenido con el hodógrafo del movimiento en el párrafo 17 del capítulo I.

Veamos cómo se puede conseguir que la masa m se mueva sobre un círculo. A fin de compenetrarnos del fenómeno, coloquemos sobre

el brazo acanalado de madera B , girable al rededor del punto O (figura 143), una esfera de hierro m .

Si se hace girar el brazo, la esfera recibe un movimiento, que debe conservar por inercia, en dirección de la tangente en P al círculo de radio OP . Cuando el brazo llegue a una posición B_1 la esfera estará

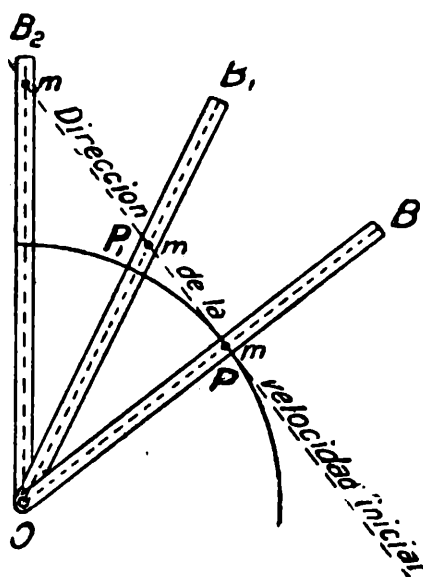


Fig. 143.

en P_1 , sobre la tangente PP_1 al círculo, es decir, la esfera se ha alejado de O a medida que el brazo giraba.

Para que la masa m permanezca sobre el círculo de radio OP será necesario atarla a un hilo metálico, por ejemplo, el cual impedirá que la masa se aleje de O . El hilo sufrirá entonces una tensión dirigida según el radio y hacia afuera; esa tensión recibe el nombre de *fuerza centrífuga*.

Por el principio de la igualdad de la acción y de la reacción, el hilo aplica una fuerza igual y de sentido contrario, fuerza que recibe el nombre de *fuerza centrípeta*.

Estas fuerzas son, entonces, despertadas por el movimiento de la masa sobre el círculo, y son las que corresponden a la aceleración normal; su valor es

$$F = m \frac{V^2}{R}. \quad [15]$$

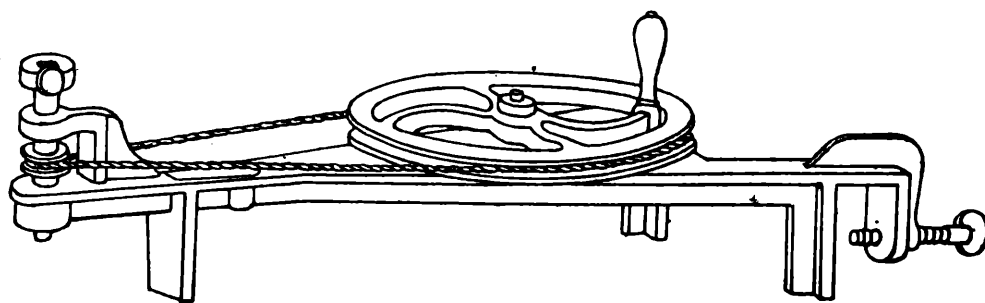


Fig. 144.

Si se representa con ω la velocidad angular del movimiento, es decir, al ángulo, expresado en fracciones de π , en que gira el cuerpo en la unidad de tiempo, se tiene

$$V = \omega R \quad [16]$$

$$F = m \omega^2 R, \quad [17]$$

ecuación que se presta más para las comprobaciones experimentales, puesto que es fácil medir el número de vueltas por segundos con que gira el eje. Hace notorio, además, que la fuerza es proporcional a la distancia que separa el punto de un punto fijo.

Para las experiencias se utiliza una máquina centrífuga (fig. 144) provista de varios accesorios que se adaptan al eje de rotación de la máquina. Un anillo elástico (fig. 145) es deformado por un movimiento de rotación, achatándose en las vecindades del eje, pues la fuerza centrífuga es mayor para los puntos más alejados. Dos esferas m_1 y m_2 de masas diferentes (fig. 146), tales que $m_2 = 2 m_1$, se mantienen en reposo, unidas por un hilo, para cualquier velocidad angular, si la mayor está a una distancia del eje igual a la mitad de lo que está la otra, pues siendo la velocidad angular la misma para todos los puntos del sistema que toman parte en la rotación, las fuerzas centrífugas opuestas de ambas esferas son de la misma magnitud, según la [17], si es

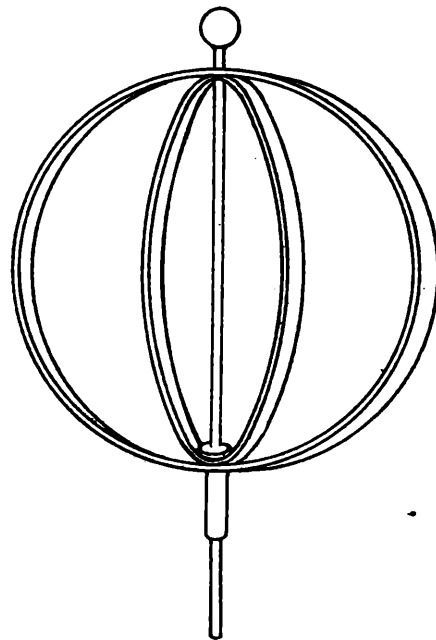


Fig. 145.

$$m_1 R_1 = m_2 R_2 .$$

Las fórmulas anteriores se pueden expresar también introduciendo el tiempo T que tarda el punto en dar una vuelta entera. El espacio recorrido en el tiempo T es igual a $2 \pi R$, de modo que se tiene:

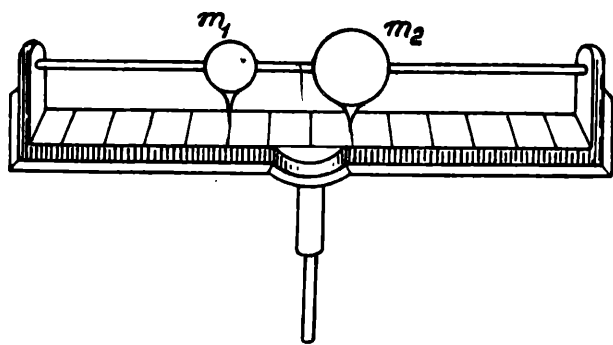


Fig. 146.

$$V = \frac{2 \pi R}{T} , \quad [18]$$

ecuación que no es sino otra forma de la [16], pues la velocidad angular ω es igual a $\frac{2 \pi}{T}$ y el número

mero n de vueltas por segundo igual a $\frac{1}{T}$.

Según esto, la aceleración puede escribirse así:

$$a = \frac{4 \pi^2}{T^2} R = 4 \pi^2 n^2 R \quad [19]$$

y la fuerza

$$F = m \frac{4 \pi^2}{T^2} R = 4 \pi^2 n^2 m R. \quad [20]$$

La dimensión de la velocidad angular es, evidentemente,

$$[\omega] = \frac{1}{\text{seg}}. \quad [21]$$

4. **El regulador de Watt.** — El regulador de Watt consiste, en principio, en una masa m suspendida de una varilla fija en un punto O de un eje vertical de rotación (fig. 147).

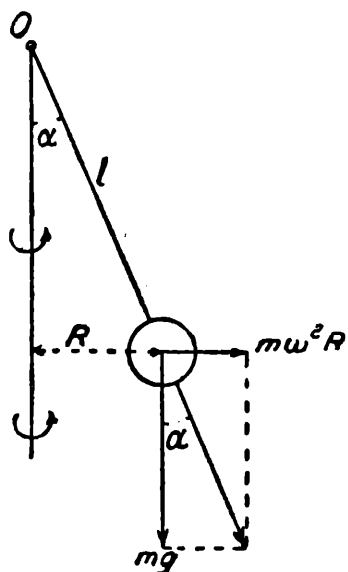


Fig. 147.

En el estado de equilibrio relativo, la masa m está sometida, en todo instante, a dos fuerzas: una vertical igual a su peso, mg , y otra horizontal, correspondiente a la fuerza centrífuga que se despierta por su movimiento sobre la circunferencia de radio R . La varilla tiene, en todo momento, la dirección de la resultante de esas dos fuerzas, de tal manera que se puede escribir:

$$\text{tang } \alpha = \frac{m \omega^2 R}{mg}. \quad [22]$$

Es, además,

$$R = l \text{ sen } \alpha \quad [23]$$

y, por lo tanto,

$$\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 l} = \left(\frac{\sqrt{g/l}}{\omega} \right)^2, \quad [24]$$

ecuación que permite discutir la dependencia del ángulo α de la velocidad ω de rotación.

Los valores de $\cos \alpha$ deben estar comprendidos entre $+1$ y -1 y, por consiguiente, mientras ω esté comprendido entre 0 y $\sqrt{g/l}$ no existe ningún valor real de α que pueda satisfacer la ecuación, es decir, entre $\omega = 0$ y $\omega = \sqrt{g/l}$ la masa m permanece junto al eje de rotación; cuando es $\omega = \omega_0 = \sqrt{g/l}$ comienza el movimiento. La

dependencia entre α y ω está representada por la curva de la figura 148; el valor $\alpha = 90^\circ$ se alcanza asintóticamente.

Si se introduce el tiempo T de una vuelta, se tiene, en virtud de la relación

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n,$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}}. \quad [25]$$

Tanto esta ecuación como las 24, permiten, midiendo en cada caso

α , calcular la velocidad del movimiento o recíprocamente.

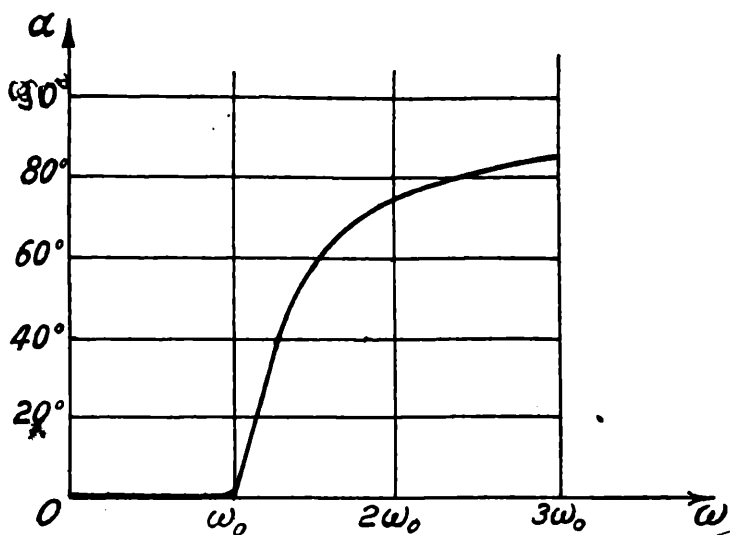


Fig. 148.

5. **Las curvas ferroviarias.** — Si un vagón de masa m se mueve sobre una curva de radio r con la velocidad v , se encuentra sometido a

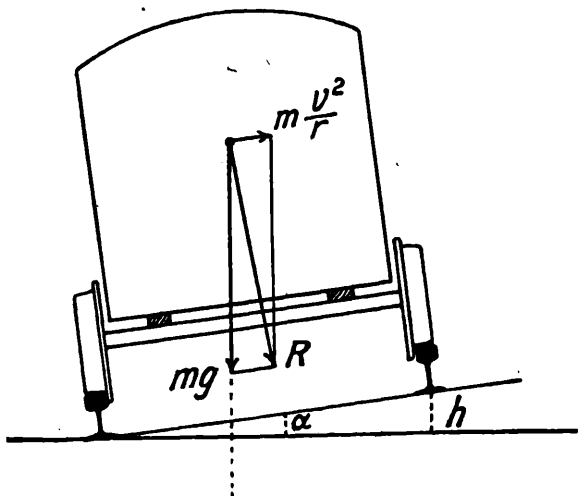


Fig. 149.

la acción de la fuerza radial $m v^2/r$, fuerza que produce un momento de giración al rededor del riel de afuera, el cual puede determinar el vuelco del vehículo. Eso se evita levantando el riel exterior (fig. 149) de modo que la resultante vertical del peso y de la fuerza centrífuga, que es paralela al plano de los rieles, den una resultante R normal al plano de los mismos.

Si es h la diferencia de nivel de los rieles, a el ancho de la trocha, y α el ángulo que forma el plano de los rieles con un plano horizontal, se tiene

$$\frac{m v^2/r}{mg} = \frac{h}{a} = \text{sen } \alpha, \quad [26]$$

de donde resulta

$$h = \frac{a}{g} \frac{v^2}{r}. \quad [27]$$

Entonces si se fija un valor máximo de la velocidad v del tren en la curva de radio r , se puede calcular h de modo que el movimiento sobre ella no ofrezca ningún peligro.

B. — MOVIMIENTO OSCILATORIO ARMÓNICO. PÉNDULO. OSCILACIONES LIBRES. DECRETIMIENTO LOGARÍTMICO DE LAS OSCILACIONES. OSCILACIONES FORZADAS. RESONANCIA

× 6. **Generalidades.** — La naturaleza ofrece un inmenso número de movimientos en los cuales el cuerpo o punto que se mueve está sometido a la acción de una fuerza proporcional a la distancia que lo separa de un punto fijo.

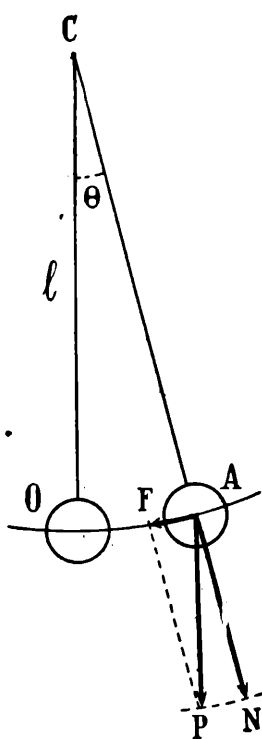


Fig. 150.

Eso sucede, por ejemplo, en el caso de las pequeñas oscilaciones de un péndulo. En efecto, si se aparta la masa m (fig. 150) de su posición de reposo O hasta la posición A , la fuerza $P = mg$ puede descomponerse en una componente N , según la dirección del hilo, la cual mantiene la tensión de éste, y en una fuerza F normal a esa dirección, bajo cuya influencia se cumple el movimiento. Si es l la longitud del hilo y θ el ángulo de desviación, que supondremos muy pequeño, se tiene:

$$F = mg \operatorname{sen} \theta = mg \frac{OA}{l}, \quad [28]$$

pues, por la pequeñez de θ , la perpendicular bajada desde A sobre OC coincide con OA .

El movimiento de la masa m del péndulo está, entonces, en todo instante, bajo la acción de una fuerza proporcional a la distancia AO que la separa del punto O de reposo.

Otro caso ilustrativo resulta pasando por la polea de la máquina de Atwood (fig. 151) un hilo provisto en sus extremos de masas M iguales y unidas por debajo por una cadenita homogénea. Si se levanta la masa de la izquierda desde A hasta B , la de la derecha bajará en un camino igual y sobre todo el sistema actuará, en la dirección de la flecha, una fuerza F proporcional al apartamiento BA , pues si $AB = d$ cm y m la masa de un centímetro de cadena, se tiene:

$$F = 2 mgd. \quad [29]$$

Resulta en este caso, lo mismo que en el péndulo, que las masas M cumplen oscilaciones que se debilitan, por causa del roce, hasta desaparecer.

En el estudio de otros fenómenos de la física, se admite que las moléculas de los cuerpos son desviadas bajo la acción de ciertos agentes físicos de su posición de reposo, y que se despiertan así fuerzas elásticas proporcionales a la distancia a su posición de equilibrio; con lo que la molécula se encontraría en las mismas condiciones que la masa del péndulo. Esta concepción es muy proficua en el estudio de diversos fenómenos naturales.

Vamos a estudiar, primeramente, un caso ideal, esto es, *el caso en que no existe ningún roce*. Supondremos, pues, que un punto se mueve exclusivamente bajo la acción de una fuerza proporcional a su apartamiento de cierto punto fijo. Esos movimientos se conocen con el nombre de *armónicos*, siendo el más sencillo el movimiento oscilatorio rectilíneo.

El movimiento circular uniforme es, según nuestra definición, *armónico*, pues la fuerza centrípeta es proporcional a la distancia que separa al punto del centro del círculo.

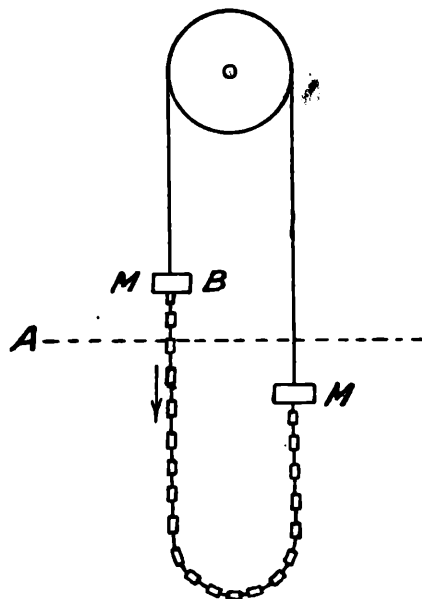


Fig. 151.

× 7. **Movimiento oscilatorio armónico rectilíneo.** — Por el principio de superposición deduciremos, del movimiento circular uniforme, las leyes del movimiento oscilatorio armónico rectilíneo. Consideremos un móvil que se mueve con la velocidad constante v sobre una circunferencia de radio A , y sea T el tiempo que tarda en dar una vuelta (fig. 152). Se tiene la relación

$$v = \frac{2 \pi A}{T} . \quad [30]$$

La aceleración está dirigida hacia el centro del círculo, es decir, es un vector cuya dirección coincide con la del radio y de magnitud

$$a = \frac{v^2}{A} = \frac{4 \pi^2}{T^2} A . \quad [31]$$

Por el principio de coexistencia se puede descomponer ese movimiento en dos movimientos rectilíneos y ortogonales entre sí, uno sobre la dirección Oy , el otro sobre la dirección Ox normal a la anterior.

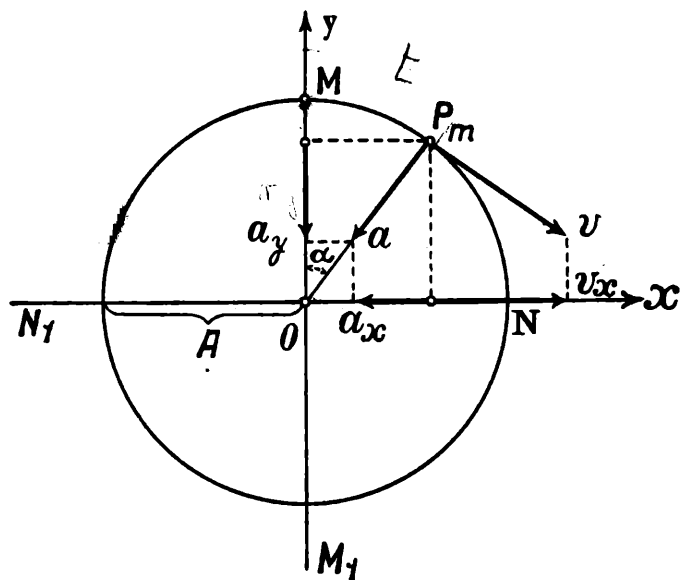


Fig. 152.

Es decir, en todo momento, se pueden descomponer la velocidad y la aceleración del movimiento en dos componentes, una según la dirección Oy , otra según Ox . Estos movimientos rectilíneos ortogonales serán, como es evidente, los de las proyecciones del punto m sobre los ejes.

Veamos lo que pasa con las proyecciones del punto m mientras éste da una

vuelta entera partiendo de M . La proyección sobre el eje de las y se dirige de M hacia O , llegando a este punto cuando m está en N . Mientras m se dirige de N a M_1 , aquél marcha de O a M_1 , llegando ambos al mismo tiempo a este último lugar.

El punto proyección de m vuelve de M_1 hasta M mientras aquél describe el semicírculo $M_1 N_1 M$. Si el movimiento de m continúa, su proyección oscila sobre MOM_1 , siendo O el punto medio de la oscilación. Cosa semejante ocurre con el movimiento de la proyección sobre el otro eje.

Elijamos como instante inicial aquel en que el punto está en M sobre la parte positiva del eje de las y y supongamos que el movimiento se realiza en el sentido de las agujas de un reloj. En cierto instante el punto estará en la posición P , formando el radio vector el ángulo α con el eje de las y . Las coordenadas del punto P son:

$$x = A \operatorname{sen} \alpha = A \operatorname{sen} \frac{2 \pi t}{T} \quad [32]$$

$$y = A \operatorname{cos} \alpha = A \operatorname{cos} \frac{2 \pi t}{T}, \quad [33]$$

pues si t es el tiempo transcurrido en el recorrido MP , o, lo que es lo mismo, en la descripción del ángulo α , la relación $\alpha:t$ debe ser

igual a la $2\pi:T$, puesto que en el tiempo T el móvil describe el ángulo 2π .

Esas expresiones muestran que los movimientos rectilíneos de las proyecciones no son uniformes, pues los espacios son proporcionales al seno o coseno de una constante $\frac{2\pi}{T}$ multiplicada por el tiempo.

Las velocidades de los movimientos componentes se obtienen descomponiendo la velocidad v , es decir, proyectándola sobre los ejes.

Resulta:

$$v_x = v \cos \alpha = \frac{2\pi A}{T} \cos \frac{2\pi t}{T} \quad [34]$$

$$v_y = -v \sin \alpha = -\frac{2\pi A}{T} \sin \frac{2\pi t}{T}. \quad [35]$$

Del mismo modo se obtienen las aceleraciones:

$$a_x = -a \sin \alpha = -\frac{4\pi^2}{T^2} A \sin \frac{2\pi t}{T} = -\frac{4\pi^2}{T^2} x \quad [36]$$

$$a_y = -a \cos \alpha = -\frac{4\pi^2}{T^2} A \cos \frac{2\pi t}{T} = -\frac{4\pi^2}{T^2} y. \quad [37]$$

Por la ecuación de Newton, $F = ma$, la fuerza a que está sometido el punto en cada uno de esos movimientos es:

$$F_x = -m \frac{4\pi^2}{T^2} x \quad [38]$$

$$F_y = -m \frac{4\pi^2}{T^2} y. \quad [39]$$

Estas relaciones hacen notorio que los movimientos rectilíneos ortogonales, componentes del movimiento circular uniforme, son armónicos, pues las fuerzas respectivas son proporcionales a las distancias x e y a un punto fijo O .

Consideremos uno solo de los movimientos simples; por ejemplo, el que se cumple sobre el eje de las x .

Se llama *amplitud* del movimiento armónico simple a la máxima elongación $ON = ON_1 = A$ que alcanza el punto en su movimiento.

Como hemos dicho ya, este movimiento armónico es el movimiento de la proyección sobre el eje de las x del circular uniforme. Se llama *argumento* del mismo al arco descrito en este último, hasta el ins-

tante que se considera a partir de una posición inicial. Su valor está dado por la relación $\frac{2 \pi t}{T}$ que figura en las ecuaciones establecidas.

Se llama período o tiempo de oscilación al tiempo T transcurrido entre dos pasajes por el punto de reposo O , en igual sentido. Por provenir de un movimiento circular uniforme, el tiempo transcurrido entre dos pasajes en el mismo sentido, es igual para todos los puntos del segmento de recta NN_1 .

El número n de oscilaciones por segundo está dado por la relación

$$n = \frac{1}{T}, \quad [40]$$

pues si una oscilación se cumple en T segundos, en un segundo se efectuará un número de oscilaciones igual a $1:T$.

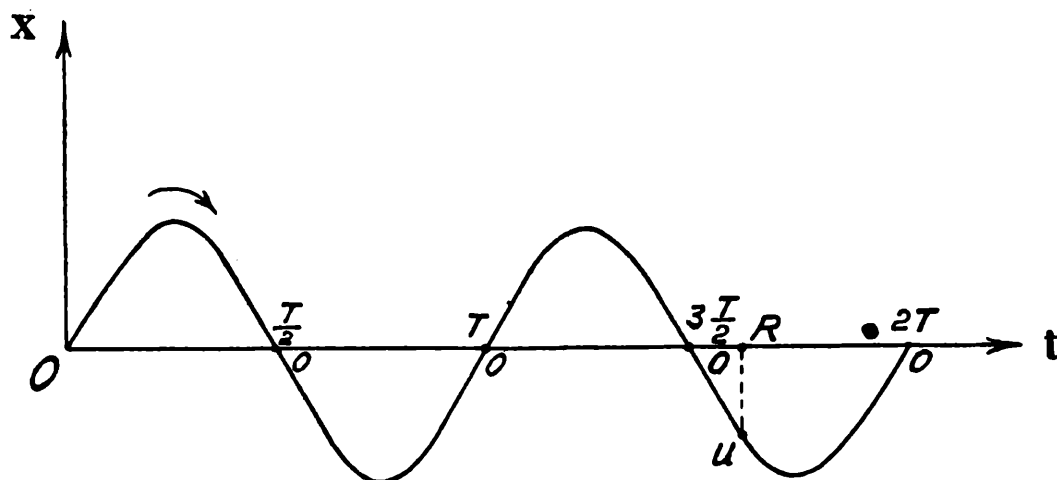


Fig. 153.

Se llama *fase* de un movimiento armónico simple en un instante dado, a la fracción del período total transcurrido desde el último pasaje en sentido positivo por el punto fijo O .

La representación gráfica del movimiento en función del tiempo, permite comprender mejor sus características. Para ello se lleva, en dirección horizontal, el tiempo transcurrido y en dirección vertical la distancia de la posición actual del punto al punto medio O , es decir, su coordenada o elongación x ; se obtiene así la curva de la figura 153.

El punto oscila entre dos posiciones extremas y pasa periódicamente por los mismos puntos en el mismo sentido, como lo enseña la figura y la ecuación

$$x = A \cdot \text{sen} \frac{2 \pi t}{T}, \quad [41]$$

donde el primer miembro tendrá el mismo signo y valor cada vez que sea

$$t = p T,$$

donde

$$p = 1, 2, 3, \dots$$

En la figura los puntos O corresponden a los pasajes por el punto medio; dos puntos O consecutivos corresponden a pasajes consecutivos por el punto fijo en sentidos opuestos, y dos puntos cualquiera alternados a pasajes consecutivos en el mismo sentido. Por esto, la distancia sobre el eje de las t entre dos puntos alternados representa un intervalo de tiempo igual al tiempo T de una oscilación.

La fase correspondiente al instante en que el punto está en una posición, U , por ejemplo, será, según la definición dada, el tiempo comprendido entre el punto R y el punto O que corresponde al instante T .

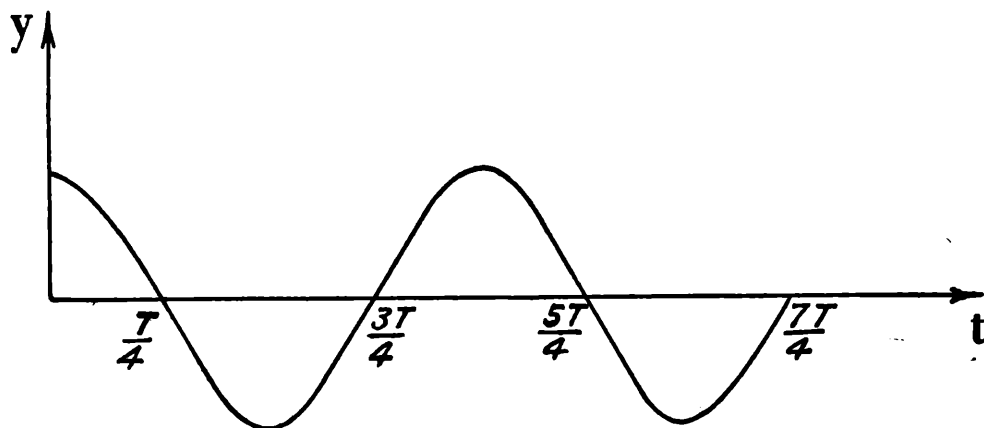


Fig. 154.

La oscilación que hemos definido, esto es, el movimiento cumplido entre dos pasajes consecutivos por el mismo punto *en el mismo sentido* se llama oscilación doble. Se suele considerar también la oscilación simple, es decir, el movimiento cumplido entre dos pasajes consecutivos por el mismo punto.

El tiempo de una oscilación simple es la mitad del de una oscilación doble y su número de oscilaciones por segundo dos veces las de aquéllas.

Dado un sistema mecánico, un péndulo o una instalación como la utilizada en la máquina de Atwood, o una substancia sólida cuyas moléculas suponemos susceptibles de ser alejadas transitoriamente de su posición de reposo, es claro que la fuerza está definida por sus cualidades.

En el caso del péndulo, para oscilaciones de pequeña amplitud, la magnitud $\frac{m}{l}$ está dada y, por lo tanto, también lo está la fuerza para todo apartamiento. En la otra instalación la fuerza está dada por la masa de la unidad de longitud de la cadena, y en la molécula desviada de su posición de reposo por las propiedades elásticas de la substancia.

Que la fuerza es *proporcional* a la distancia, según definición del movimiento mismo, significa, matemáticamente, que

$$F_x = - kx, \quad [42]$$

donde k es una constante y el signo menos expresa que la fuerza se opone al movimiento cuando el punto se aleja de su posición de reposo.

Con el sistema queda dada la constante k y, por consiguiente, la fuerza para cualquier elongación, pues esa constante está definida por calidades propias del sistema.

Por la relación antes establecida para F_x , ecuación [38], se tiene:

$$k = m \frac{4 \pi^2}{T^2}, \quad [43]$$

de donde

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad [44]$$

lo que nos muestra que el tiempo de oscilación depende exclusivamente de la masa del punto y de la constante k , siendo independiente de la *amplitud* del movimiento.

Si en un sistema dado conocemos la masa m y el tiempo de oscilación T , el sistema queda mecánicamente determinado, pues se puede calcular en seguida la constante k , o, lo que es lo mismo, la fuerza actuante.

Nosotros hemos deducido las leyes del movimiento vibratorio armónico, del circular uniforme. Otro camino que permite un análisis más a fondo consiste en la integración de la ecuación diferencial que resulta de la definición establecida. Esa ecuación es, para un movimiento que se cumple sobre el eje de las x ,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - kx, \quad [45]$$

que no es sino la ecuación de Newton, pues el primer miembro es el producto de la masa por la aceleración y el segundo la fuerza ac-

tuante. El signo menos se debe a que cuando x es positiva y crece la aceleración (que está siempre dirigida hacia O) tiene sentido negativo.

× 8. **Composición de oscilaciones.** — La descomposición del movimiento circular uniforme en dos oscilaciones ortogonales nos brinda, a la vez, invirtiendo el problema, un primer caso de composición de movimientos de tal naturaleza. Ambas oscilaciones tienen la misma amplitud y el mismo tiempo de oscilación, pero difieren en la fase. En efecto, si representamos gráficamente ambas oscilaciones en función del tiempo a partir del momento en que el punto está en M , la oscilación sobre el eje de las x estará representada por la figura 153 mientras que la oscilación sobre el eje de las y por la figura 154.

En el mismo instante t los puntos tienen una *diferencia de fase* igual a $\frac{T}{4}$; por ejemplo, en el instante $\frac{T}{4}$ el punto que se mueve sobre el eje de las x tiene la fase cero, mientras que el que se mueve sobre el eje de las y tiene la fase $\frac{T}{4}$. La diferencia de fase es, evidentemente,

igual para todos los instantes, por la uniformidad del movimiento circular y es, por definición, la fracción del período T comprendido entre los pasajes de los puntos que oscilan por la posición de reposo, igual a la cuarta parte del tiempo T de oscilación. También se suele llamar diferencia de fase al arco descrito en el intervalo en cuestión, así, si en tiempo la diferencia es $\frac{T}{4}$ en arco será

$$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Se puede decir entonces que oscilaciones ortogonales del mismo período y amplitud y con una diferencia de fase de un cuarto de período componen un movimiento circular uniforme.

Analíticamente el problema es el siguiente:

Componer las oscilaciones:

$$x = A \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} \quad [46]$$

e

$$y = A \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2} \right) = A \operatorname{cos} \frac{2\pi t}{T}, \quad [47]$$

las cuales tienen, por lo tanto, la misma amplitud y el mismo período; pero difieren en la fase en $\frac{\pi}{2}$.

La trayectoria del movimiento resultante se obtiene eliminando al tiempo. Elevando al cuadrado y sumando resulta:

$$x^2 + y^2 = A^2, \quad [48]$$

que es la ecuación de un círculo de radio A y cuyo centro es O . El movimiento resultante es, pues, circular.

La velocidad v del movimiento resultante se obtiene componiendo las velocidades componentes v_x y v_y por la regla del paralelogramo. Derivando las ecuaciones 46 y 47 con respecto al tiempo se obtienen las expresiones

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{T} A \cos \frac{2\pi}{T} t \quad [49]$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -\frac{2\pi}{T} A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t \quad [50]$$

y la velocidad total será:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{2\pi A}{T}. \quad [51]$$

El movimiento circular resultante es, por lo tanto, uniforme, pues tanto A como T son constantes.

Estos resultados son de suma importancia en el estudio de los fenómenos acústicos y ópticos; en su oportunidad volveremos a considerar con más detenimiento la composición de oscilaciones.

9. **La energía en un movimiento armónico rectilíneo.** — Se ha visto que la fuerza que determina un movimiento de tal naturaleza es proporcional, en todo momento, a la distancia que separa al punto de su posición de reposo. Tácitamente se ha admitido que esa fuerza no depende ni del tiempo ni del movimiento de que pueda estar animada la masa al pasar por él; el sistema es, por lo tanto, conservativo y la suma de la energía potencial y cinética debe conservar un valor constante que indicaremos con W , esto es, debe ser

$$U + T = W = \text{const.} \quad [52]$$

La energía total W debe ser igual a la energía que se le entrega al sistema en el primer momento; pues las oscilaciones se producen

dando al punto cierta elongación A y abandonándolo luego a sí mismo; A es la amplitud del movimiento.

La energía total W es, entonces, el trabajo almacenado en el sistema en el primer momento, bajo la forma de *energía potencial*, trabajo que se calcula como sigue: si el movimiento se produce sobre el eje de las y , por ejemplo, la fuerza actuante tiene el valor absoluto ky ; el trabajo elemental para el desplazamiento dy es $kydy$ y, por lo tanto, el trabajo consumido para producir la elongación inicial A es

$$W = \int_0^A kydy = \frac{k}{2} A^2, \quad [53]$$

o, reemplazando el valor de k dado por la [43],

$$W = 2 \pi^2 mn^2 A^2, \quad [54]$$

esto es, la energía es proporcional a la masa, al cuadrado del número de oscilaciones y al cuadrado de la amplitud. Que la ecuación [52] se satisface, se comprueba fácilmente, pues la energía potencial para una elongación y cualquiera es, evidentemente,

$$U = 2 \pi^2 mn^2 y^2 \quad [55]$$

y la energía cinética

$$T = \frac{1}{2} mv_y^2. \quad [56]$$

Reemplazando los valores de y y v_y dados por las [47] y [50] y substituyendo en la [52], se obtiene, efectivamente, una identidad.

Los valores de las energías cinética y potencial *oscilan*, en el tiempo de una oscilación, entre los mismos valores extremos, el mínimo cero y el máximo $2 \pi^2 mn^2 A^2$; en el instante en que la energía potencial tiene el valor máximo, la energía cinética tiene el valor cero y recíprocamente; los *valores medios* de ambas energías, en el intervalo de una oscilación, son iguales, puesto que oscilan entre los mismos límites, y el aumento de una de ellas, en cierto tiempo, es igual a la disminución que experimenta la otra en el mismo intervalo.

× 10. **El péndulo ideal o matemático.** — Bajo el nombre de péndulo ideal o matemático se comprende a un punto material sometido a la acción de la gravedad, que está obligado a permanecer, durante

su movimiento, sobre una superficie esférica. Este mecanismo estaría realizado, idealmente, por una masa infinitamente pequeña suspendida en un hilo sin peso, inextensible y completamente flexible.

La longitud del péndulo es el radio de la esfera, o, lo que es lo mismo, la longitud del hilo entre el punto de suspensión y la masa puntual.

En el número 7 se ha encontrado que el tiempo de oscilación de un movimiento vibratorio armónico rectilíneo está dado por la relación

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad [57]$$

donde m es la masa en movimiento y k la constante de proporcionalidad entre la fuerza y el apartamiento.

En el caso de las pequeñas oscilaciones de un péndulo, la constante tiene el valor

$$k = \frac{mg}{l}, \quad [58]$$

en virtud de la relación [28].

Se obtiene, así, la expresión

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad [59]$$

donde l es la longitud del péndulo y g la aceleración de la gravedad

Si las oscilaciones no son pequeñas, la fuerza es proporcional al seno del ángulo de desviación y la descripción del movimiento requiere la integración de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = - \frac{g}{l} \text{sen } \theta, \quad [60]$$

donde el primer miembro es el producto de la masa por la aceleración, y el segundo la fuerza actuante.

Esa ecuación se establece en seguida, pues si se representa con s la línea sobre la que se mueve el punto (un arco de círculo en este caso) se tiene, por el principio de masa,

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = - mg \text{sen } \theta,$$

donde el primer término es el producto de la masa por la aceleración sobre la línea y el segundo término la fuerza actuante en su dirección.

Si se mide la longitud de la línea s a partir de la posición de reposo del péndulo, la longitud de s , cuando aquel forma con la vertical el ángulo θ , es

$$s = l\theta,$$

relación que introducida en la ecuación anterior da la [60].

El resultado de aquella integración es que el tiempo de una oscilación está dado por la expresión:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{1}{2^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \right)^2 \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2} + \dots \right]. \quad [61]$$

Si la amplitud es pequeña; se pueden considerar únicamente los dos primeros términos del desarrollo y tomar el arco en lugar del seno; resulta:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta^2}{16} \right). \quad [62]$$

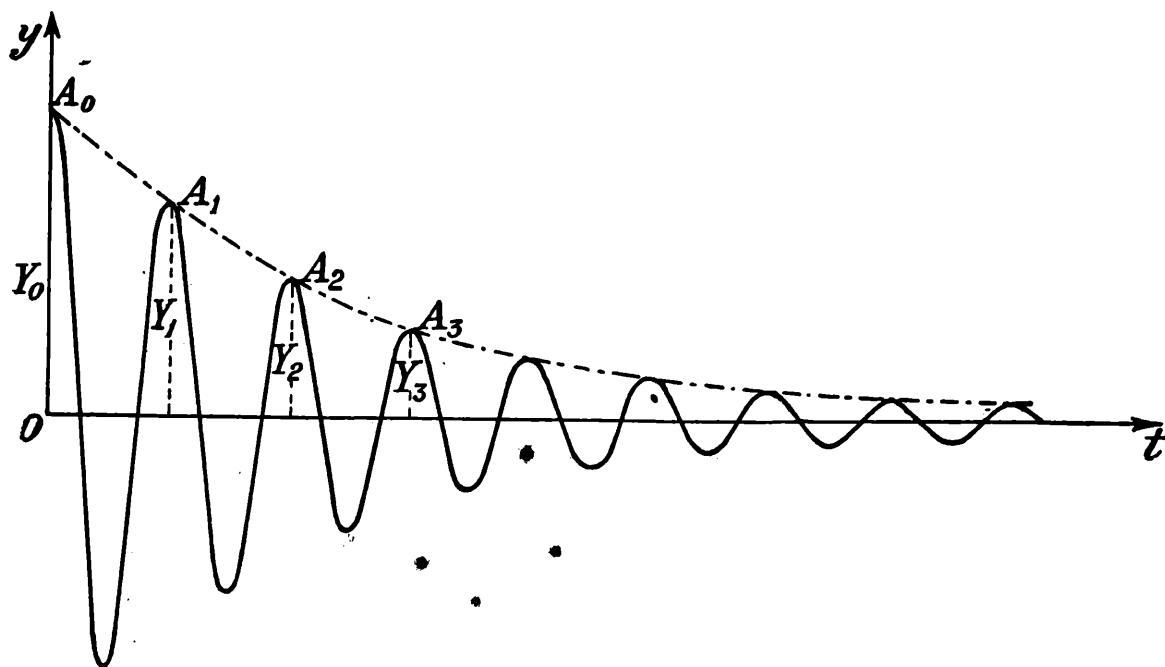
Esta fórmula permite comprobar si efectivamente todos los cuerpos, cualquiera que sea su substancia, caen con la misma aceleración; es decir, la independencia del tiempo de oscilación de la naturaleza de la masa debe verificarse experimentalmente *a posteriori*; no es una consecuencia de la fórmula, como con frecuencia se dice.

Los tiempos de oscilación de dos péndulos están entonces entre sí, en el mismo lugar de la tierra, como la raíz cuadrada de sus longitudes; los tiempos de oscilación del mismo péndulo en dos lugares distintos de la tierra estarían entre sí como la razón inversa de los cuadrados de las aceleraciones en los mismos puntos. Sobre la determinación de g véase el capítulo XIII.

× 11. **El amortiguamiento de las oscilaciones.** — La experiencia hace ostensible que las oscilaciones de un cuerpo cualquiera no perduran indefinidamente, sino que la amplitud va disminuyendo paulatinamente hasta anularse.

En el caso de un péndulo que se mueve en el aire, ese decrecer de la amplitud es debido a que el cuerpo arrastra en su movimiento masas de aquel fluido las que adquieren cierta provisión de energía cinética, a costa de la del cuerpo, y la energía cinética que se convierte en calor por el roce con el aire mismo. Cuando la amplitud decrece con el tiempo, se dice que las oscilaciones son amortiguadas.

Inscribiendo el movimiento se obtiene una curva como la de la figura 155, donde se ha exagerado ex profeso el amortiguamiento y en la cual puede estudiarse la manera cómo disminuye la amplitud de una oscilación a otra. Esto se puede investigar de una manera segura ob-



•Fig. 155.

servando, con anteojo y escala, los puntos $A_0, A_1, A_2, A_3 \dots$, de vuelta del péndulo, los que corresponden a los instantes $t = 0, t = T, t = 2T, \dots$, si consideramos como instante inicial aquel en que el péndulo está en A_0 y es T el tiempo de una oscilación. Resulta que las amplitudes y_0, y_1, y_2, \dots , guardan las relaciones

$$\frac{y_0}{y_1} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3} = \dots = \text{const.} \quad [63]$$

Se trata, por lo tanto, de un movimiento periódico cuya amplitud decrece en función del tiempo según una proporción geométrica.

La amplitud de un movimiento semejante está representado por una expresión como ésta ⁽¹⁾:

$$y = A e^{-\gamma \frac{t}{T}} \cos 2 \pi \frac{t}{T} \quad [64]$$

o, si n es el número de oscilaciones por segundo, por

$$y = A e^{-\gamma nt} \cos 2 \pi nt, \quad [65]$$

⁽¹⁾ En la expresión general de la elongación y aparece un segundo término proporcional a $\text{sen } 2 \pi \frac{t}{T}$ que se anula para $t = 0, T, 2T$ etc.

donde A es la amplitud para $t = 0$ y γ una constante numérica. En efecto es:

$$\begin{aligned} \text{para } t = 0 & \quad y = y_0 = A \\ \text{para } t = T & \quad y = y_1 = A e^{-\gamma} \\ \text{para } t = 2T & \quad y = y_2 = A e^{-2\gamma} \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{y_0}{y_1} = \frac{y_1}{y_2} = \dots = \frac{1}{e^{-\gamma}} = e^{\gamma}$$

y, por lo tanto,

$$\log_{nat} \frac{y_0}{y_1} = \log_{nat} \frac{y_1}{y_2} = \dots = \gamma, \quad [66]$$

lo que hace notorio que la constante γ introducida representa el logaritmo natural del cociente de dos amplitudes sucesivas; se la llama *decrecimiento logarítmico*. Esta misma forma de amortiguamiento ofrecen las oscilaciones eléctricas en un hilo metálico, oscilaciones que se producen si se unen con él las armaduras de un condensador cargado. El decrecimiento logarítmico juega un papel de suma importancia en todos los fenómenos oscilatorios.

La expresión [64] se escribe con frecuencia

$$y = A e^{-\delta t} \cos 2\pi \frac{t}{T}, \quad [67]$$

existiendo, por lo tanto, entre δ y γ la relación

$$\delta = \gamma n = \frac{\gamma}{T}. \quad [68]$$

La constante δ se denomina constante de amortiguamiento.

La teoría enseña que si es T_0 el período de las oscilaciones que cumple un sistema estando libre de amortiguamiento, cuando el decrecimiento logarítmico es γ , el período T está dado por la expresión

$$T = T_0 \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4\pi^2}}.$$

* PRUEBA. — En el caso de oscilaciones amortiguadas, se superpone, como es evidente, a la fuerza proporcional a la distancia, otra fuerza que se opone al movimiento, proviniendo, en el caso del péndulo, del roce con el aire y de la reacción de las masas de ese mismo fluido que desplaza.

Se puede deducir el valor de la segunda fuerza calculando previamente la fuerza total, pues si se deriva la ecuación [65] dos veces, se obtiene la aceleración del movimiento y multiplicándola por la masa el valor de aquélla.

Si se deriva la expresión [65] se obtiene como valor de la velocidad:

$$v = \frac{dy}{dt} = -\gamma ny - 2\pi n A e^{-\gamma nt} \operatorname{sen} 2\pi nt, \quad [69]$$

y derivando esta ecuación y haciendo algunas eliminaciones entre la ecuación obtenida, la misma [69] y la [65], resulta para la aceleración el valor

$$a = \frac{d^2y}{dt^2} = -(4\pi^2 n^2 + \gamma^2 n^2) y - 2\gamma n \frac{dy}{dt}, \quad [70]$$

ecuación que nos muestra, en virtud del principio de superposición, que actúa una fuerza proporcional a la elongación, como ya sabíamos, y cuyo valor es

$$m(4\pi^2 n^2 + \gamma^2 n^2) y = ky \quad [71]$$

— donde $k = (4\pi^2 n^2 + \gamma^2 n^2)$ es, según se ha hecho notar antes, una constante dada con el sistema — ⁽¹⁾ y una fuerza cuyo valor, proporcional a la velocidad, es

$$2\gamma nm \frac{dy}{dt} = p \frac{dy}{dt}, \quad [72]$$

donde $p = 2m\gamma n$ es también una constante definida con el sistema.

Si no hay amortiguamiento será $\gamma = 0$ y n toma el valor particular que indicamos con n_0 y se tiene, lo que estaba ya dado por la [43]:

$$k = m 4\pi^2 n_0^2, \quad [73]$$

y, por lo tanto,

$$4\pi^2 n^2 + \gamma^2 n^2 = 4\pi^2 n_0^2 \quad [74]$$

$$n = n_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4\pi^2}}}, \quad [75]$$

o

$$T = T_0 \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4\pi^2}}, \quad [76]$$

(1) Está claro que involucramos, también, al medio en que el sistema propiamente dicho se mueve.

relación que liga el tiempo de oscilación con amortiguamiento en función del tiempo de oscilación que tendría el sistema bajo la acción exclusiva de la fuerza ky , esto es, sin amortiguamiento. El tiempo de oscilación de un péndulo, suponiendo que la amplitud de sus oscilaciones no decrece, es

$$T_0 = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad [77]$$

mientras que lo que se mide directamente es T ; si se mide además a γ se puede calcular a T_0 . En el caso del movimiento de un péndulo en el aire el valor de γ es sumamente pequeño con respecto a 2π , de modo que puede ponerse directamente $T = T_0$.

* 12. **Estudio analítico.** — Todas las posibilidades y características del movimiento de un punto de masa m sometido a la acción simultánea de una fuerza como la ky y otra como la $p \frac{dy}{dt}$, se obtienen por la integración de la ecuación que resulta aplicando el principio de masa de Newton. Es

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - p \frac{dy}{dt}, \quad [78]$$

que es una expresión generalizada de la [70].

Esta ecuación se integra fácilmente escribiendo

$$y = e^{rt} \quad [79]$$

y, por lo tanto,

$$\frac{dy}{dt} = r e^{rt}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = r^2 e^{rt}$$

y substituyendo estos valores en la [78]. Se obtiene así la llamada ecuación característica que permite determinar r y que es

$$mr^2 + pr + k = 0, \quad [80]$$

de donde

$$r = -\frac{p}{2m} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}, \quad [81]$$

Esa ecuación enseña que existen dos valores de r (r_1 y r_2) que permiten que la [79] satisfaga a la ecuación [78], esto es, que existen dos soluciones de la ecuación diferencial. El significado físico es que el movimiento más general que puede cumplir el sistema se deja descomponer en dos movimientos más simples, según el principio de superposición. El movimiento más general resultará descrito por una expresión de la forma

$$y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}. \quad [82]$$

La [82] permite describir el movimiento a partir de condiciones iniciales cualesquiera, las cuales están definidas por la posición y la velocidad inicial. Las constantes C_1 y C_2 hacen posible adaptar la solución a esas condiciones.

Sea, por ejemplo,

$$y = 0 \quad [a] \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \quad [b]$$

para el instante inicial, esto es, para $t = 0$. Por la [a] se deduce de la [82] que

$$C_1 + C_2 = 0$$

y, por la [b], que

$$r_1 C_1 + r_2 C_2 = v_0,$$

de las cuales resulta:

$$C_1 = -C_2 = \frac{v_0}{r_1 - r_2}.$$

Introduciendo en la [82] esos valores de las C se tiene

$$y = \frac{v_0}{r_1 - r_2} (e^{r_1 t} - e^{r_2 t}). \quad [82']$$

Consideremos ahora los diversos casos que se presentan.

I. CASO APERIÓDICO. — Si es:

$$\frac{p^2}{4m^2} > \frac{k}{m}, \quad [83]$$

el radical de la [81] es real y las dos raíces r_1 y r_2 son reales y negativas, siendo el valor absoluto de r_2 mayor que el de r_1 , esto es,

$|r_2| > |r_1|$. Será, pues, y negativo para todos los valores de t , anulándose para $t = \infty$, de suerte que el movimiento es aperiódico. La elongación máxima corresponde al instante t para el cual es cero la velocidad, esto es al instante para el cual es $\frac{dy}{dt} = 0$, resultando de la [82']

$$t = \frac{\ln \frac{r_1}{r_2}}{r_1 - r_2}. \quad [84]$$

II. CASO PERIÓDICO. — Si es:

$$\frac{p^2}{4 m^2} < \frac{k}{m}, \quad [83']$$

el subradical es negativo y, por lo tanto, las raíces r_1 y r_2 imaginarias conjugadas. Esto es,

$$r_1 = -\frac{p}{2 m} + i \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{p^2}{4 m^2}}$$

[85]

y

$$r_2 = -\frac{p}{2 m} - i \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{p^2}{4 m^2}},$$

donde se ha escrito $\sqrt{-1} = i$.

Introduciendo esos valores de r_1 y r_2 en la [82'] resuta

$$y = \frac{v_0}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{p^2}{4 m^2}}} e^{-\frac{p}{2 m} t} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{p^2}{4 m^2}} \cdot t, \quad [82'']$$

la cual hace notorio que el punto cumple un movimiento armónico amortiguado.

La elongación y toma los mismos valores cada vez que es

$$\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{p^2}{4 m^2}} t = 2 \pi h \quad h = 1, 2, \dots$$

y, por consiguiente, el tiempo de oscilación es

$$T = \frac{2 \pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{p^2}{4 m^2}}}.$$

Si se introduce en esta relación los valores de T_0 y γ dados por las [73] y [72] se obtiene la relación [76].

III. CASO LÍMITE. — Si es:

$$\frac{p^2}{4 m^2} = \frac{k}{m}, \quad [83'']$$

el subradical es cero y las dos raíces r_1 y r_2 son reales e iguales, esto es,

$$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2 m}.$$

Introduciendo estos valores en la [82'] aparece en la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Esa indeterminación desaparece escribiendo

$$\frac{p^2}{4 m^2} - \frac{k}{m} = \varepsilon^2,$$

es decir,

$$r_1 = -\frac{p}{2 m} + \varepsilon$$

y

$$r_2 = -\frac{p}{2 m} - \varepsilon,$$

substituyendo en la [82'] y haciendo converger ε a cero. Así se obtiene

$$y = v_0 t e^{-\frac{p}{2 m} t}.$$

La elongación es por consiguiente, siempre positiva, vale decir, el movimiento es también aperiódico. La velocidad alcanza el valor cero en el instante

$$t = \frac{2 m}{p},$$

lo cual resulta igualando a cero a $\frac{dy}{dt}$ y, por consiguiente, la elongación máxima es

$$y_{max} = \frac{2 m v_0}{e p}.$$

C. — OSCILACIONES FORZADAS. RESONANCIA

13. **Los hechos más notorios.** — En los casos anteriores la masa oscilante era apartada de su posición de equilibrio y luego abandonada a sí misma. Las oscilaciones que cumple el sistema en esas condiciones se llaman *libres*. De gran importancia, tanto en la ciencia como en la técnica, es el estudio del movimiento oscilatorio de un sistema que está continuamente solicitado por una fuerza exterior periódica. Las oscilaciones así producidas se llaman *forzadas*.

Antes de deducir teóricamente las características de ese movimiento, conviene ver, experimentalmente, lo que ocurre en un caso concreto.

Tengamos un sistema susceptible de cumplir oscilaciones propias, constituido por una espiral metálica fuerte E y un peso P relativamente grande (fig. 156).

Uniendo el peso P por una espiral metálica débil e , a la barra B que mueve una excéntrica, colocada en el eje de un motorcito eléctrico, se puede hacer actuar una fuerza periódica sobre el sistema. Las oscilaciones que ejecuta en estas condiciones el sistema son forzadas.

La fuerza exterior carece de amortiguamiento, pues la amplitud del movimiento del punto N es invariable. El número de oscilaciones por segundo puede modificarse variando el número de revoluciones del motor.

Se trata de dos sistemas oscilantes unidos por la espiral e . De dos sistemas tales se dice que están *acoplados*, en este caso, con *débil acoplamiento*, pues la energía que puede transmitir la espiral e al otro sistema, en una vuelta del motor, es muy pequeña.

Si se hace girar el motor, con cualquier velocidad, la masa m cumple oscilaciones cuyo período es exactamente igual al del punto N o, lo que es lo mismo, al número de revoluciones del motor, es decir, el peso P se ve forzado a oscilar con una frecuencia diferente de la que corresponde a sus propias condiciones mecánicas.

Se observa que la amplitud de la oscilación de la masa permanece constante, y, por lo tanto, la energía almacenada por el sistema no varía. Si se corta la espiral e las oscilaciones se extinguen poco a poco

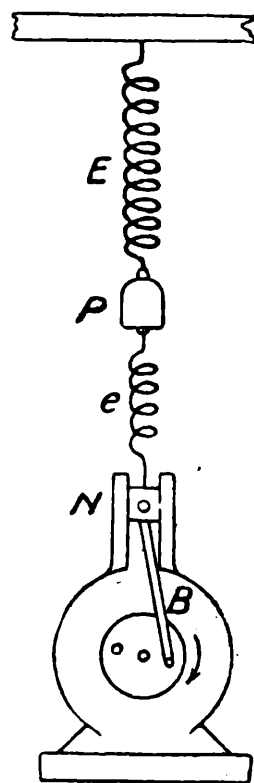


Fig. 156.

por las causas que conocemos. Quiere decir entonces que, para que la amplitud quede constante, el sistema debe recibir, en el intervalo de una oscilación, una cantidad de energía igual a la que se consume en el mismo tiempo, por roce del sistema en el aire y por la energía cinética que ésta recibe de la masa P en movimiento. Esa energía la entrega el motor y es a costa de la energía eléctrica de la fuente que lo alimenta.

Si se aumenta paulatinamente el número de revoluciones del motor, se observará que a medida que nos acercamos al número de oscilaciones que cumple la masa P bajo la acción exclusiva de la espiral E las oscilaciones se hacen más y más amplias; la energía almacenada en el sistema formado por la espiral E y el peso P es, pues, tanto mayor cuanto menos difiere el período de las oscilaciones forzadas del período de las oscilaciones libres del sistema.

Se alcanza al fin un número de oscilaciones, a partir del cual, si aumenta el número de oscilaciones de la fuerza exterior, la amplitud del movimiento de P comienza a decrecer.

Cuando el efecto es máximo se dice que los sistemas están en *resonancia*; el número de oscilaciones de la fuerza exterior es casi igual al número de oscilaciones propias de la masa m .

* 14. **Estudio analítico.** — La descripción cualitativa del fenómeno no ilustra suficientemente y es conveniente hacer una discusión teórica.

El movimiento observado se mantiene bajo la acción de las fuerzas propias del sistema, dadas por la ecuación [78] más la fuerza periódica exterior. Indiquemos a ésta con la expresión

$$A \cos 2 \pi n_1 t, \quad [89]$$

pues su número n_1 de oscilaciones es, en general, diferente de la frecuencia propia n del sistema sobre el cual actúa.

La ecuación del movimiento será, según el principio de masa:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - p \frac{dy}{dt} + A \cos 2 \pi n_1 t. \quad [90]$$

El movimiento forzado que cumple la masa m bajo la acción de la fuerza periódica exterior es del mismo período que ésta, y tendrá, en general, diferente amplitud y fase, esto es, se deja representar por una expresión de la forma

$$y = B \cos (2 \pi n_1 t - \varphi), \quad [91]$$

donde la constante B indica su amplitud y la constante φ su diferencia de fase con la fuerza exterior. Es decir, la expresión [91] es solución de la ecuación diferencial [90], lo que significa que por elección conveniente de B y φ , substituyendo en la [90] y efectuando las derivaciones, se obtiene una identidad. Procedamos a determinar B , de modo que ocurra tal cosa.

El procedimiento más expeditivo consiste en el uso de la fórmula de Euleró según la cual la fuerza periódica exterior es la parte real de

$$A e^{i 2 \pi n_1 t} . \quad [92]$$

De la misma manera la solución [91] representa la parte real de la expresión

$$B e^{i (2 \pi n_1 t - \varphi)} . \quad [93]$$

Si se pone en la [90] en lugar de la fuerza exterior la [92]; en vez de la solución [91] la [93] y se efectúan derivaciones y simplificaciones, se obtiene:

$$B e^{-i \varphi} = \frac{A}{m \left(\frac{k}{m} - 4 \pi^2 n_1^2 \right) + i 2 \pi n_1 p} \quad [94]$$

o introduciendo el número de oscilaciones n_0 que cumpliría el punto bajo la acción exclusiva de la fuerza ky , esto es, sin amortiguamiento, definidas por la [73]; resulta

$$B e^{-i \varphi} = \frac{A}{4 \pi^2 m \left\{ (n_0^2 - n_1^2) + i \frac{n_1 p}{2 \pi m} \right\}} \quad [95]$$

y poniendo

$$n_0^2 - n_1^2 = \rho \cos \theta \quad [96]$$

$$\frac{n_1 p}{2 \pi m} = \rho \sen \theta$$

donde debe ser

$$\rho = \sqrt{(n_0^2 - n_1^2)^2 + \left(\frac{n_1 p}{2 \pi m} \right)^2} \quad [97]$$

$$\text{tang } \theta = \frac{n_1 p}{2 \pi m (n_0^2 - n_1^2)} \quad [98]$$

(relaciones que se obtienen: la [97] elevando al cuadrado las [96] y sumando, y la [98] dividiéndolas entre sí) resulta

$$B e^{-i\varphi} = \frac{A}{4 \pi^2 m \rho} e^{-i\theta}. \quad [99]$$

La diferencia de fase es, pues, $\varphi = \theta$ y está dada por la [98] y la amplitud de la oscilación forzada

$$B = \frac{A}{4 \pi^2 m \rho} = \frac{A}{4 \pi^2 m \sqrt{(n_0^2 - n_1^2)^2 + \left(\frac{n_1 p}{2 \pi m}\right)^2}}, \quad [100]$$

lo que nos dice que ella es proporcional a la amplitud de la fuerza exterior e inversamente proporcional a la masa y a ρ .

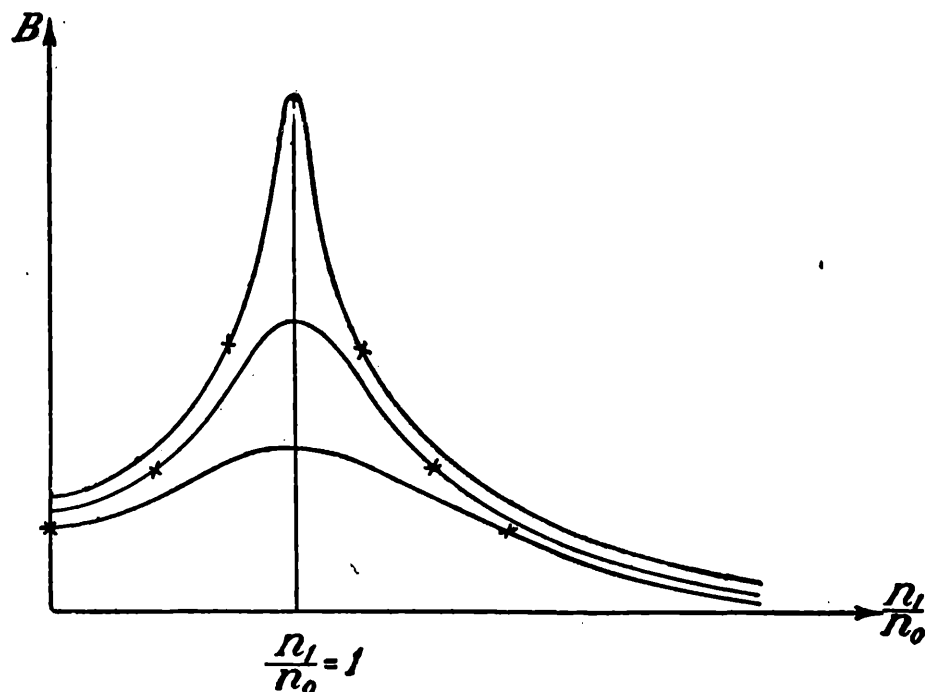


Fig. 157.

En el caso considerado la frecuencia n_0 es constante; lo que varía es la frecuencia n_1 de la fuerza exterior. A fin de discutir cómo varía la amplitud B con n_1 escribamos la [100] como sigue:

$$B = \frac{A}{4 \pi^2 m n_0^2 \sqrt{\left(1 - \frac{n_1^2}{n_0^2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2 \pi m} \frac{n_1}{n_0^2}\right)^2}}, \quad [101]$$

donde se ve que la amplitud tiene un máximo tanto más pronun-

ciado y tanto más cerca de $n_1 = n_0$ cuanto menor es el factor p de la fuerza que determina el amortiguamiento, es decir, cuanto menor sea el decrecimiento de las oscilaciones.

En la figura 157 se han representado algunas curvas de la amplitud B en función de n_1 para diferentes valores del amortiguamiento; tanto mayor es el amortiguamiento, tanto más achatada es la curva. Los valores de los decrecimientos logarítmicos pueden darse de antemano; se introducen en la relación [101] teniendo presente que es

$$\frac{p}{2m} = \gamma n = \gamma \frac{n_0}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4\pi^2}}};$$

así figuran sólo las constantes m , n_0 y γ .

La diferencia de fase se puede discutir fácilmente por la ecuación [98], donde conviene introducir, como se acaba indicar, el valor de γ reemplazando el valor de $p/2m$; esa discusión será un ejercicio interesante para el lector.

✓ 15. **El péndulo doble de Oberbeck.** — Se ha estudiado en los párrafos anteriores la acción de un sistema oscilante cuya amplitud se mantiene constante, sobre otro sistema oscilante. Es de mucha importancia el estudio de la acción de un sistema no sometido a esa condición sobre otro.

En la figura 158 está representado un caso de esa especie. Se trata de dos péndulos formados por masas m iguales que pueden fijarse en diferentes posiciones en dos varillas metálicas suspendidas de un soporte S por medio de cintas elásticas e de acero. Los sistemas pueden acoplarse uniendo dos de sus puntos por un hilo y suspendiendo de él un peso P . Es posible estudiar así, experimentalmente, la influencia del valor relativo

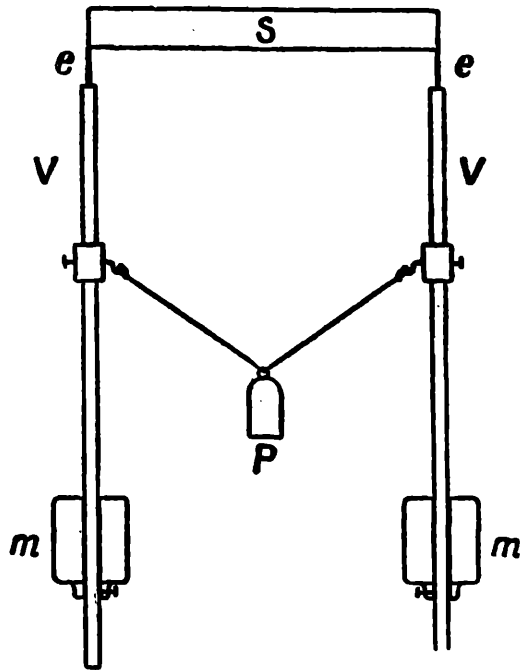


Fig. 158.

del período y del acoplamiento, pues éste puede variarse a voluntad modificando el peso P , y el número de oscilaciones por desplazamiento de las masas.

Supongamos, primeramente, que las dos masas están a la misma altura; los péndulos tendrán así iguales períodos, si oscilan libremente. Acoplando los sistemas, colgando un peso P del hilo y almacenando en uno de ellos cierta provisión de energía, desviándolo de su posición de reposo, se observa, si se les abandona a sí mismos, lo siguiente: el péndulo, que estaba en reposo, comienza a oscilar; su amplitud crece con el tiempo, al mismo tiempo que la del otro decrece hasta que alcanza una amplitud nula. Este reposo dura un corto intervalo de tiempo, pues en seguida el fenómeno ocurre en

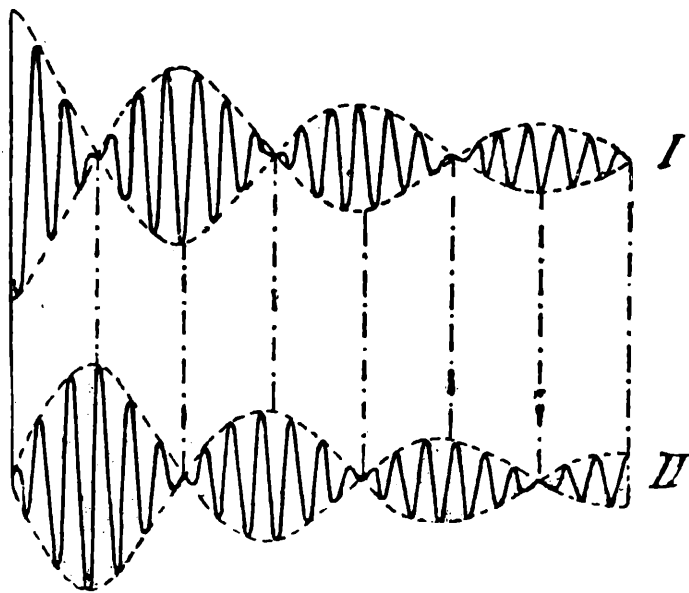


Fig. 159.

sentido contrario. La energía oscila, pues, entre los dos sistemas. Los estados de movimiento de los dos péndulos, de los cuales uno llamaremos primario, I , y el otro secundario, II , están representados en la figura 159.

Si no hubiese amortiguamiento, las amplitudes se repetirían periódicamente. Si se aumenta el acoplamiento suspendiendo un

peso mayor del hilo, los puntos de reposo se suceden más rápidamente; el intervalo de tiempo en que las masas están quietas, disminuye.

El estado de movimiento de uno cualquiera de los péndulos se deja descomponer en dos oscilaciones sinusoidales amortiguadas, de diferente período, los cuales dependen del acoplamiento.

Si los períodos de las oscilaciones libres no son iguales, el secundario es excitado tanto más débilmente cuanto más difieren; esto es, en todo momento posee sólo una pequeña parte de la energía del primario. La amplitud varía en la forma antes indicada, pero no existen instantes en que la energía sea cero, sino instantes en que su energía es un mínimo.

Este fenómeno tiene, en el estudio de circuitos eléctricos oscilantes acoplados, mucha importancia, habiendo sido estudiado teórica y experimentalmente por varios físicos.

16. **El eje flexible de la turbina de Laval.** — En las turbinas a vapor, cuyo uso se ha extendido extraordinariamente en los últimos años, las velocidades de giración son sumamente grandes.

Ocurría al principio, con frecuencia, que los ejes cedían y se producía la ruptura de todo el mecanismo. Laval obvió este inconveniente de una manera a primera vista curiosa: utilizó en lugar de ejes gruesos, ejes delgados, *flexibles*, más o menos del grueso de un dedo, consiguiendo con ello una centración automática de los mismos.

Si una barra AB (fig. 160) está situada en dos cojinetes, la experiencia enseña que la fuerza necesaria para que el punto medio, O , por ejemplo, sea llevado a una posición O' , próxima a O , es proporcional a la distancia OO' ; si la barra es apartada de su posición de equilibrio y se la abandona a sí misma, cumple oscilaciones transversales.

De dos barras circulares del mismo material y longitud, pero de distinta sección, oscila más rápidamente la de mayor sección. Laval utiliza, según eso, un eje cuyo número de oscilaciones por segundo sea pequeño con respecto al número de revoluciones que ejecuta la máquina, en funcionamiento normal.

La figura 160 representa un modelo esquemático de la turbina; el eje está representado por la barra cilíndrica AB ; el cuerpo de la turbina por el disco D , situado en la parte media de aquél.

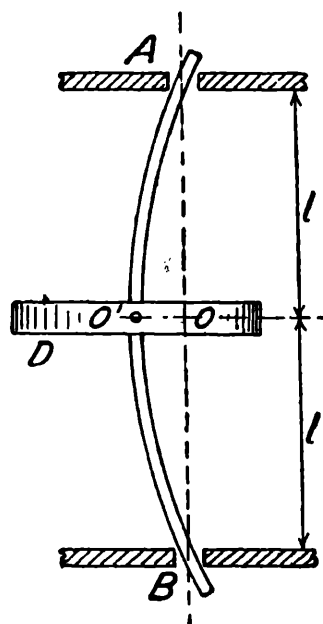


Fig. 160.

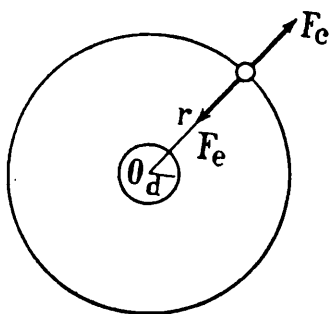


Fig. 161.

Supongamos que el centro de gravedad O' de la rueda coincide con el punto medio del eje; el punto O' no coincidirá exactamente con el punto O medio de la recta AB , pues el eje no será jamás rigurosamente rectilíneo.

Si el sistema gira, el punto O' se aleja más de O por obra de la fuerza centrífuga, y para una velocidad dada se moverá sobre un círculo de radio r .

Se puede representar el movimiento de una manera sencilla, del siguiente modo: el punto material O' , de masa m igual a la del disco, se mueve con cierta velocidad angular ω sobre un círculo de radio r (fig. 161); el punto O' , considerado en reposo

en diferentes posiciones, describe el círculo pequeño de radio d a causa de no ser el eje rigurosamente recto.

El punto O' , supuesto el sistema en movimiento, está bajo la acción de la fuerza centrífuga F_c y de la fuerza elástica F_e , ambas de dirección radial y de sentido opuesto; el punto se moverá sobre un círculo si esas fuerzas están en equilibrio, esto es, si se tiene

$$F_e = F_c. \quad [102]$$

La fuerza centrífuga tiene el valor

$$F_c = m r \omega^2 \quad [103]$$

y la fuerza elástica será

$$F_e = c (r - d), \quad [104]$$

pues hemos dicho que era proporcional a la elongación, la cual tiene el valor $r - d$; la constante c es la constante de proporcionalidad y

depende de las constantes elásticas del material de la barra y de sus dimensiones.

Las posiciones de equilibrio relativo resultan entonces de la relación

$$c (r - d) = m r \omega^2, \quad [105]$$

de donde

$$r = \frac{d}{1 - \frac{\omega^2}{c/m}}$$

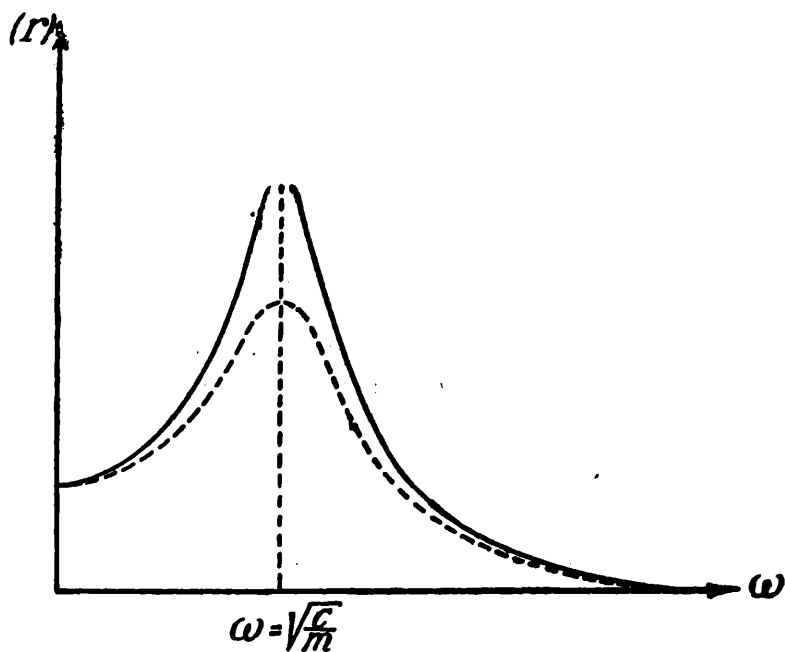


Fig. 162.

De esta ecuación resulta que si ω es muy pequeño con respecto a $\sqrt{c/m}$, el valor de r es casi igual a d ; si ω crece, el valor de r se hace cada vez mayor a medida que ω se acerca a $\sqrt{c/m}$, para cuyo valor sería $r = \infty$; r se mantiene aún en ese momento finito a causa de que para valores no pequeños de la elongación intervienen otras fuer-

zas que no hemos considerado; cuando $\omega > \sqrt{c/m}$ el valor de r es negativo, lo que significa que al pasar por la velocidad angular $\omega = \sqrt{c/m}$ la masa se mueve sobre una cuerda y va a ocupar una posición so-

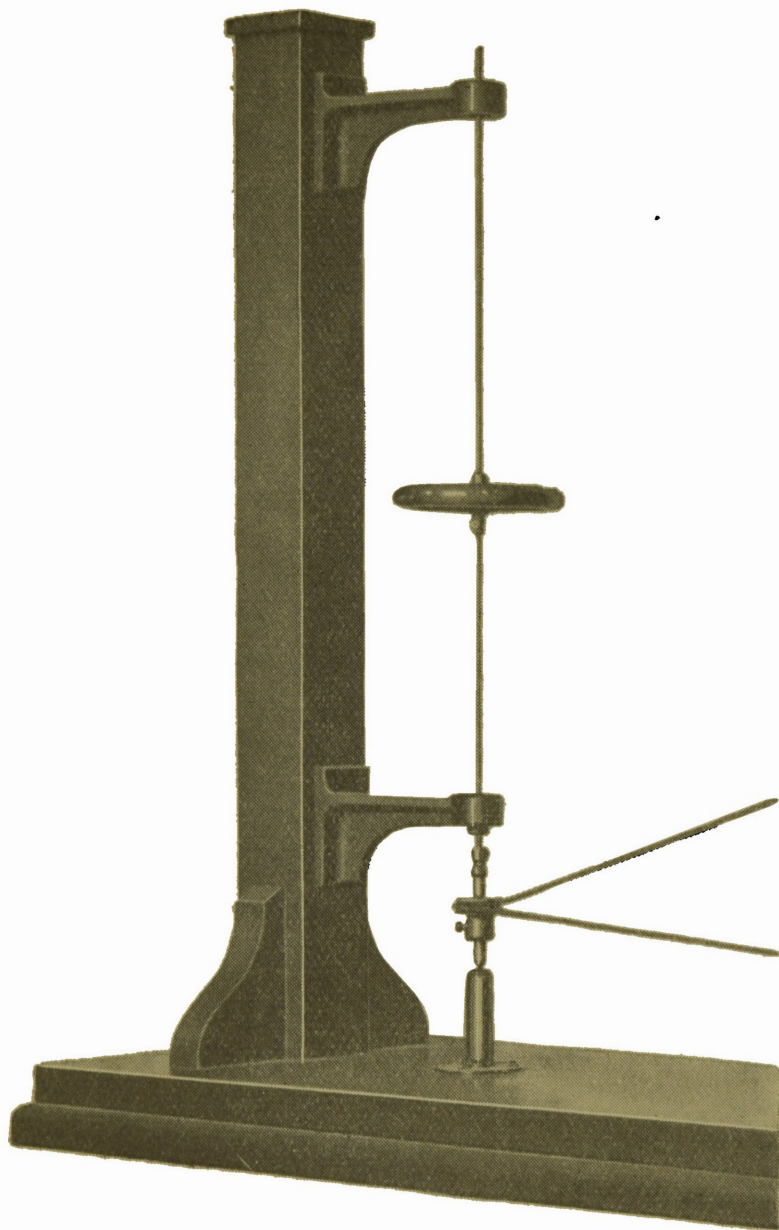


Fig. 163.

bre el otro lado del círculo; si ω sigue aumentando, r decrece más y más.

Como lo que interesa es el valor absoluto, representaremos a r en función de ω por medio del diagrama de la figura 162, donde los r se han llevado todos en el mismo sentido; la curva llena representaría las elongaciones que da la fórmula; la punteada, las elongaciones que se observan en realidad. Un estudio completo sólo puede hacerse dinámicamente. Se trata, en realidad, de un fenómeno de resonancia; el máximum de elongación se produce cuando la velocidad angular ω

es igual a la magnitud $\sqrt{c/m}$, que representa la frecuencia de las oscilaciones propias de la barra.

Entonces, por el dispositivo de Laval, la resonancia se produce para un número relativamente pequeño de revoluciones de la máquina; en la construcción se evitan en ese momento las grandes elongaciones del eje por medio de topes; luego, si aumenta ω hasta los valores grandes del funcionamiento normal, el eje se centra por sí mismo.

En el Instituto de Física de La Plata se ha construído, a fin de mostrar estos fenómenos en los cursos de física general, el modelo que se ve en la figura 163.

SEPTIMA PARTE
DINÁMICA DEL CUERPO RÍGIDO.
MOVIMIENTO DEL CENTRO DE UN SISTEMA DE MASAS

CAPITULO IX

ROTACIÓN DE UN CUERPO RÍGIDO
AL REDEDOR DE UN EJE. MOMENTOS DE INERCIA.
FUERZA Y MOMENTOS CENTRÍFUGOS. EJES LIBRES

× 1. **Rotación al rededor de un eje fijo.** — Consideremos, primeramente, un caso muy sencillo, como es la rotación de un cuerpo rígido (fig. 164) al rededor de un eje fijo EE . Un movimiento semejante se produce si actúa una fuerza que no pasa por ese eje y que admite una componente F situada en un plano normal al mismo. Los puntos del cuerpo se mueven sobre círculos con movimiento *uniformemente acelerado*.

Existirán, según sabemos, una aceleración tangencial y una aceleración centrífuga. Precisemos estas consideraciones.

Un punto P recorre en un intervalo de tiempo dt , muy pequeño, el camino $PP' = ds$ perteneciente al círculo de radio $r = OP$. La velocidad del punto P es, en el instante considerado,

$$v = \frac{ds}{dt} \quad [1]$$

Si se indica con $d\theta$ el ángulo POP' , expresado en fracciones de π , se tiene

$$ds = rd\theta \quad [2]$$

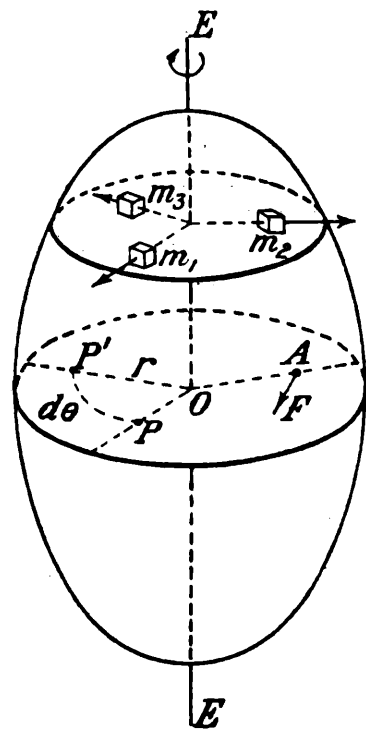


Fig. 164.

y, por lo tanto,

$$v = r \frac{d\theta}{dt}. \quad [3]$$

El cociente diferencial $\frac{d\theta}{dt}$ representa el ángulo descrito por el punto en una unidad de tiempo muy pequeña: se denomina *velocidad angular* del punto y se indica con la letra ω .

Se tiene así

$$v = r\omega. \quad [4]$$

La velocidad v del punto se denomina *lineal* o *tangencial* y representa el camino recorrido en una unidad de tiempo infinitamente pequeña.

Es evidente que todos los puntos del cuerpo rígido describen en el mismo intervalo de tiempo ángulos iguales, de modo que tiene la misma *velocidad angular*.

Por la acción de la fuerza F , el movimiento es, según dijimos, acelerado, lo que significa que la velocidad v de todo punto P varía con el tiempo. Si en un tiempo dt muy pequeño la velocidad tangencial del punto varía en dv , la aceleración tangencial de su movimiento será

$$a = \frac{dv}{dt}. \quad [5]$$

A una variación de la velocidad tangencial del punto corresponde una variación de su velocidad angular, esto es, existirá una aceleración angular que indicaremos con γ y cuya definición está dada por la expresión

$$\gamma = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{o} \quad \gamma = \frac{d^2\theta}{dt^2}. \quad [6]$$

La aceleración tangencial a está ligada a la aceleración angular por la relación

$$a = r\gamma, \quad [7]$$

como resulta dividiendo ambos miembros de la ecuación [4] por el tiempo o, más rigurosamente, derivándola con respecto al tiempo.

Es claro que la aceleración angular es, en todo instante, la misma para los diferentes puntos, mientras que la tangencial es proporcional a la distancia de los puntos al eje.

Si actuase una fuerza de momento constante con respecto al eje de rotación, la velocidad angular se incrementaría en cantidades iguales en tiempos iguales, esto es, la aceleración angular del movimiento sería constante. En tal caso, si el cuerpo estaba primitivamente en reposo, en un instante posterior t , la velocidad de un punto cualquiera estará dada por la relación

$$v = at = r \gamma t, \quad [8]$$

si r es su distancia al eje. El camino recorrido tendrá una longitud

$$e = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} r \gamma t^2. \quad [9]$$

Un movimiento de rotación se llama uniforme si la aceleración angular es cero, o, lo que es lo mismo, si la velocidad angular es constante.

Debido al movimiento de rotación, obra sobre todo punto una aceleración centrífuga, originándose así una fuerza que tiende a alejarlos del eje y cuya magnitud es

$$m \frac{v^2}{r}, \quad [10]$$

si m es la masa del punto que se considera, v su velocidad lineal, y r su distancia al eje. Por la rigidez del cuerpo, esto se manifiesta en una tracción sobre aquel.

Consideremos todos los elementos de masa m (fig. 164) comprendidos entre dos planos próximos, normales al eje. Cada cubo de masa m tira radialmente del eje hacia afuera con una fuerza dada por la [10]. El efecto total es, en todo instante, igual a la resultante de esas fuerzas, las que varían en magnitud y dirección continuamente. Es claro que será necesario considerar los elementos de todos los discos en que se puede dividir el cuerpo.

Se ve así que, en general, el eje estará sometido a la tracción de fuerzas despertadas por el movimiento cuya resultante depende de la distribución de las masas a su rededor.

La teoría enseña que ese sistema de fuerza se reduce, en general, a una fuerza y una cupla y de que por todo punto de un cuerpo rígido se pueden hacer pasar tres ejes ortogonales entre sí, tales que si el cuerpo gira al rededor de uno cualquiera de ellos la cupla es nula, no así la fuerza, y de que cuando el punto es el centro de gravedad,

para esas tres direcciones se anula la fuerza y la cupla. Esos tres ejes se llaman *libres* o *ejes principales de inercia*. (Véase el párrafo 12). Con respecto a dos de esos ejes, el momento de inercia tiene valores extremos: máximo para uno, mínimo para el otro.

Si en una construcción cualquiera se quiere evitar la acción de las masas girantes sobre el eje, es necesario que éste coincida con uno de los ejes principales de inercia que pasan por el centro de gravedad.

Una discusión más profunda de la cuestión muestra que el equilibrio dinámico es diferente para cada uno de esos ejes. Si el cuerpo está girando al rededor del eje con respecto al cual el momento de inercia tiene el valor menor posible, una pequeña desviación hace que el cuerpo trate de alejarse indefinidamente de su primitiva posición, lo que significa que el equilibrio es inestable; si el cuerpo gira, en cambio, al rededor del eje con respecto al cual el momento de inercia tiene el valor máximo, el equilibrio es estable.

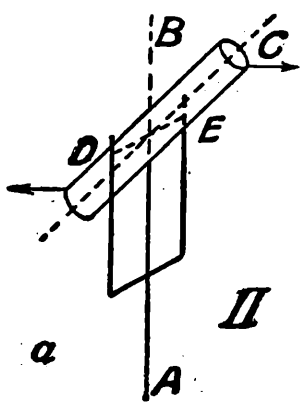


Fig. 165 a.

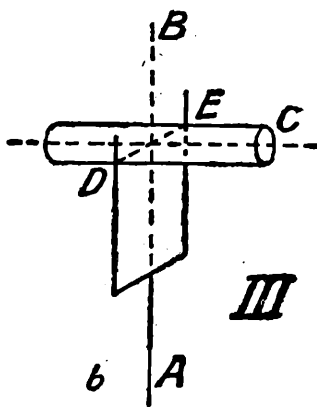


Fig. 165 b.

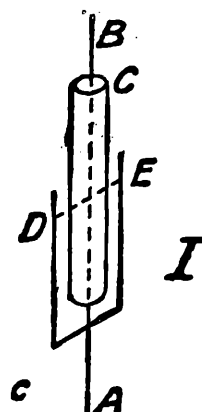


Fig. 165 c.

Se pueden ilustrar estas consideraciones con los siguientes experimentos (figs. 165 a, b, c). Sea *C* un cilindro macizo, de diámetro menor que su longitud y que puede girar al rededor de los ejes *AB* y *DE* que pasan por su centro de gravedad. Si se hace girar el cuerpo al rededor de *AB* mientras el cilindro está en la posición *I*, el cuerpo perdura en ese estado; basta la menor desviación como en *II* para que se aleje de esa posición hasta tomar la *III*, que es la posición más estable, correspondiente al momento de inercia mayor.

× 2. **Ecuación del movimiento.** — Es nuestra tarea determinar la relación entre el momento de la fuerza exterior *F* y la aceleración angular producida.

Actúe (fig. 166) en el punto *A* de un cuerpo rígido en reposo una fuerza *F* cuyo momento $F \cdot l$, con respecto a un eje que pasa por *O*,

sea constante; el punto, y por lo tanto el cuerpo, se moverá con movimiento uniformemente acelerado.

El cuerpo en movimiento representa una provisión de energía, que es, en todo instante, por el principio de conservación, igual al trabajo realizado por la fuerza F sobre él.

Su energía cinética E es igual a la suma de las energías cinéticas de todos los elementos de masa en que podemos imaginarlo descompuesto. Será, pues,

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \dots, \quad [11]$$

donde m_1, m_2, m_3, \dots , son las masas de los elementos y v_1, v_2, v_3, \dots , las velocidades de los mismos en el instante considerado.

Consideremos el instante t de tiempo, y supongamos que el punto A de aplicación de la fuerza está en la posición A' , a la que ha llegado recorriendo el arco $AA' = e$ de radio l . El trabajo de la fuerza será $F \cdot e$ y, por consiguiente,

$$F \cdot e = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \dots \quad [12]$$

Es, además, por la [8],

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 t = r_1 \gamma t \\ v_2 &= a_2 t = r_2 \gamma t \\ v_3 &= a_3 t = r_3 \gamma t, \end{aligned} \quad [13]$$

donde a_1, a_2, a_3 , son las aceleraciones lineales de los diferentes puntos, y

$$AA' = e = \frac{1}{2} l \gamma t^2, \quad [14]$$

pues $l \gamma$ es, por la [7], la aceleración tangencial del punto A . Reemplazando estos valores en la [12] y simplificando, se tiene:

$$F \cdot l = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots) \gamma. \quad [15]$$

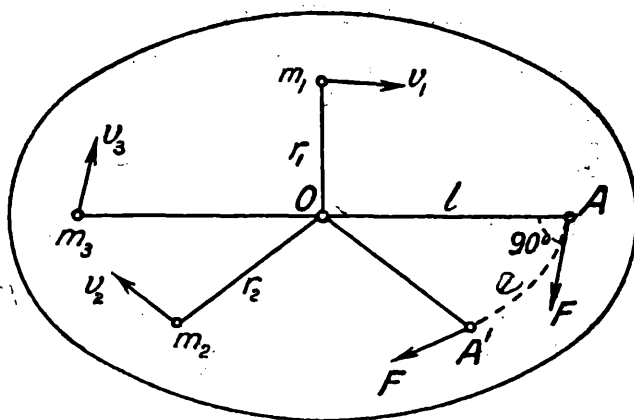


Fig. 166.

El valor de la suma entre paréntesis depende, exclusivamente, de la distribución de los elementos de masa con respecto al eje. Esa suma recibe el nombre de *momento de inercia* del cuerpo, siendo un factor de gran importancia mecánica.

Su definición es, por lo que antecede:

$$I = \sum mr^2. \quad [16]$$

El momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje se forma, entonces, sumando los productos de las masas de cada elemento por el cuadrado de sus respectivas distancias a aquel.

El producto del primer miembro de la [15] es el momento actuante o, como se dice, la cupla, puesto que una cupla del mismo momento produciría el mismo efecto. Indicando el momento o cupla con \mathcal{M} , la [15] da:

$$\mathcal{M} = I \gamma \quad \text{o} \quad \mathcal{M} = I \frac{d\omega}{dt}, \quad [15']$$

ecuación enteramente símil a la ecuación de Newton

$$F = ma \quad \text{o} \quad F = m \frac{dv}{dt},$$

figurando el momento en lugar de la fuerza y el momento de inercia en lugar de la masa.

Se ve, pues, que el momento de inercia es una magnitud que desempeña en las rotaciones el mismo papel que la masa en las translaciones.

Es claro que el momento de inercia no es una magnitud que representa como la masa, en apariencia, una calidad invariable de la materia, pues su valor se modifica si se considera otro eje de rotación.

El significado de la ecuación [15'] es, por idénticas consideraciones a las hechas al tratar el principio de masa de Newton y en virtud del raciocinio que le ha dado origen, el siguiente: Si en un instante dado un cuerpo gira al rededor de un eje con respecto al cual su momento de inercia es I , y si la aceleración angular es en ese mismo instante γ , actúa una cupla exterior cuyo eje coincide con el de rotación ⁽¹⁾ y cuya magnitud está dada por aquella relación.

⁽¹⁾ Ya veremos que esto es exacto sólo cuando, como en este caso, el eje es fijo o cuando no siéndolo coincide con un eje libre.

La ecuación [11] puede escribirse, introduciendo las relaciones

$$v_1 = \omega r_1 \quad , \quad v_2 = \omega r_2 \quad , \quad \text{etc.} ,$$

como sigue

$$E = \frac{1}{2} \omega^2 (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots) \quad [17]$$

o

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 , \quad [18]$$

es decir, la energía cinética de un cuerpo rígido que gira al rededor de un eje es igual a la mitad del producto de su momento de inercia por el cuadrado de la velocidad angular. Esta expresión es enteramente semejante a la expresión $\frac{1}{2} m v^2$, que se refiere a los movimientos de translación; en lugar de la masa figura el momento de inercia, y en lugar de la velocidad la velocidad angular.

La ecuación [18] muestra que para la misma velocidad angular, la energía almacenada en el cuerpo en movimiento es tanto mayor cuanto mayor es el momento de inercia. Esto explica la forma de los volantes, en los cuales se acumula la mayor parte de la masa en los bordes. Su función consiste en almacenar energía en el intervalo de tiempo en que actúa la presión del vapor, o la explosión de los gases sobre el pistón, para devolverlo en los momentos en que aquélla no se produce. El funcionamiento o la marcha de la máquina es así muchísimo más regular.

3. Influencia de la polea en el movimiento de las masas en la máquina de Atwood. — Veamos ahora qué influencia tiene la polea sobre el movimiento de translación de las masas M . Prescindimos aquí de la influencia de las ruedas en que se apoya el eje de la polea central (fig. 85).

Si las masas recorren el camino z , el trabajo A de la fuerza de gravedad es:

$$A = m g z , \quad [19]$$

trabajo que se almacena en forma de energía cinética de translación de la masa $2M + m$ y en energía cinética de rotación de la polea, cuyo momento de inercia con respecto a su eje indicaremos con I .

Si en el instante considerado la velocidad de translación es v y la velocidad angular de la rueda es ω , se tiene, por el principio de conservación de la energía,

$$\frac{1}{2} (2 M + m) v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = mgz. \quad [20]$$

La velocidad tangencial de un punto del borde de la rueda, cuyo radio sea r , es la de translación v del sistema, de modo que es

$$v = \omega r. \quad [21]$$

Si se introduce en la [20] el valor de ω que resulta de la [21] y se deriva con respecto al tiempo, se obtiene

$$v (2 M + m) \frac{dv}{dt} + v \frac{I}{r^2} \frac{dv}{dt} = mg \frac{dz}{dt}. \quad [22]$$

Pero $\frac{dv}{dt}$ es la aceleración a del movimiento de translación; $\frac{dz}{dt}$ es la velocidad v en el instante considerado, con lo que resulta de la [22]:

$$\left(2 M + m + \frac{I}{r^2} \right) a = mg \quad [23]$$

$$a = \frac{m}{2 M + m + \frac{I}{r^2}} g, \quad [24]$$

relación que muestra que el efecto de la rueda es el mismo que produciría una masa $M' = \frac{I}{r^2}$ concentrada a una distancia de su eje igual a r . Como se ve, conviene elegir una rueda de material liviano y de radio grande.

× 4. **Cálculo de los momentos de inercia.** — El momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje depende de la distribución de las masas a su rededor. Es evidente, por lo tanto, que su valor será, en general, distinto para los diferentes ejes que pasan por un punto.

Si se elige un sistema de coordenadas rectangulares, los momentos de inercia con respecto a los ejes están dados, respectivamente, por las expresiones

$$\begin{aligned} I_x &= \sum m (y^2 + z^2) \\ I_y &= \sum m (z^2 + x^2) \\ I_z &= \sum m (x^2 + y^2), \end{aligned} \quad [25]$$

pues para calcular, por ejemplo, el momento de inercia con respecto al eje x , debemos sumar los productos de cada una de las masas, por el cuadrado de sus respectivas distancias a ese eje, y esas distancias están

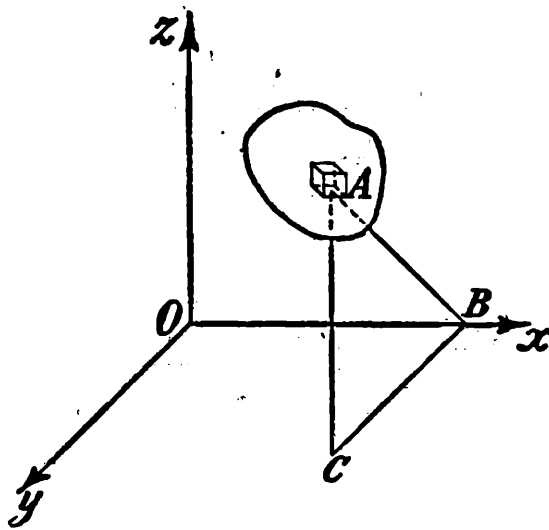


Fig. 167.

dadas por la relación $AB^2 = AC^2 + CB^2 = r^2 = y^2 + z^2$ (fig. 167), lo que explica la primera ecuación; del mismo modo resultan las demás.

Si indicamos con dv el elemento de volumen y con ρ la densidad de la substancia del cuerpo, la masa m de los elementos será ρdv , y el momento de inercia resulta expresado por la fórmula

$$I = \int \rho r^2 dv, \quad [26]$$

debiéndose extender el integral a todo el espacio limitado por el cuerpo.

En el caso de cuerpos homogéneos, geométricos, se puede, con el auxilio de esa ecuación, determinar el momento de inercia con respecto a diferentes ejes. Calcularemos ahora valores relativos a algunos cuerpos.

I. ESFERA. — El momento de inercia con respecto a un eje cualquiera que pasa por su centro es

$$I = \frac{2}{5} M R^2,$$

si M es la masa total y R el radio.

En efecto, por simetría, es, en este caso:

$$I_x = I_y = I_z, \quad [1]$$

y por estas relaciones y por la [25] resulta

$$3 I_x = 2 \Sigma m (x^2 + y^2 + z^2) = 2 \Sigma m r^2, \quad [2]$$

donde r es la distancia de la masa m al centro de la esfera. Por la [26] se tiene

$$I_x = \frac{2}{3} \int \rho r^2 dv. \quad [3]$$

Este integral se calcula fácilmente descomponiendo la esfera en capas esféricas concéntricas. Si una de ellas tiene el radio r y su espesor es dr , su volumen elemental es

$$dv = 4 \pi r^2 dr, \quad [4]$$

y por la [3]

$$I_x = \frac{2}{3} \int_0^R \rho 4 \pi r^4 dr = \frac{2}{3} 4 \pi \rho \frac{R^5}{5} = \frac{2}{5} M R^2,$$

pues hay que sumar todas las capas comprendidas entre el centro y la distancia o radio R , y la masa de la esfera es

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho.$$

II. CILINDRO. — Con respecto al eje de figura, el momento de inercia es:

$$I = \frac{1}{2} M R^2,$$

si R es el radio y M la masa total.

En efecto, si el eje del cilindro coincide con el eje de las x , el momento de inercia con respecto a él es:

$$I = \int \rho (y^2 + z^2) dv = \int \rho r^2 dv.$$

El integral se calcula descomponiendo el cilindro en capas cilíndricas elementales; el volumen de una de ellas, de radio r y espesor dr , si indicamos además con l su altura, es:

$$dv = 2 \pi r dr \cdot l$$

y, por lo tanto,

$$I = 2 \pi \rho l \int_0^R r^3 dr = \frac{2 \pi \rho l R^4}{4},$$

de donde resulta la expresión indicada más arriba, si se introduce la masa total que es $M = \pi R^2 l \rho$.

Con respecto a un eje normal al eje del cilindro, en su punto medio es:

$$I = M \left(\frac{l^2}{12} + \frac{r^2}{4} \right),$$

donde r es el radio y l la longitud.

III. PARALELEPÍPEDO RECTANGULAR. — Si a y b son dos aristas, el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el centro de gravedad, paralelamente a la tercera arista es:

$$I = \frac{M}{12} (a^2 + b^2).$$

IV. CILINDRO HUECO. — Si r_0 y r_1 son los radios interior y exterior, el momento de inercia con respecto al eje de figura es:

$$I = \frac{1}{2} M (r_0^2 + r_1^2).$$

Con respecto al eje perpendicular en su punto medio:

$$I = M \left(\frac{l^2}{12} + \frac{r_0^2 + r_1^2}{4} \right),$$

donde l es la longitud del mismo.

V. RADIO DE GIRACIÓN. — Se conoce con el nombre de radio de giración una magnitud k definida por la relación

$$M k^2 = \sum mr^2 = I,$$

es decir,

$$k^2 = \frac{I}{M}.$$

El significado de k es el siguiente: Si toda la masa M del cuerpo se supone concentrada en un punto a la distancia k del eje de rotación, se tendría el mismo momento de inercia que antes.

En el caso de un volante, el radio de giración es, aproximadamente, el radio medio del anillo exterior en el cual está acumulada toda la masa.

5. Determinación experimental. — El momento de inercia de cuerpos cuya forma es irregular no puede determinarse por medio del cálculo, sino que hay que recurrir a métodos experimentales. Así, por ejemplo, el momento de inercia de un cuerpo girable al rededor de un eje fijo que pasa por el centro de gravedad, puede determinarse como sigue: Se arrolla un hilo al rededor del eje y se suspende de un extremo un peso P . Si éste cae, el cuerpo comienza a girar con movimiento uniformemente acelerado. El trabajo que realiza el peso se convierte en energía cinética del volante y de él mismo.

Es evidente que en la instalación indicada la aceleración del peso P es muy pequeña con respecto a la de los demás puntos (véase párrafo 2), lo que significa que el cuerpo absorberá, con mucha aproximación, todo el trabajo de la fuerza P , o, en otras palabras, la energía cinética del volante será en todo instante muy grande con respecto a la de P , la cual puede, por lo tanto, despreciarse.

Si P recorre un camino e se tendrá, entonces, por la ecuación [18],

$$P \cdot e = \frac{1}{2} I \omega^2,$$

donde I es el momento de inercia del cuerpo y ω la velocidad angular en el instante preciso en que P ha terminado de recorrer el camino e .

Si se conoce el peso P , midiendo e y determinando ω por medio de un taquímetro o contando directamente el tiempo de cierto número de vueltas, a partir del instante mencionado, se calcula I . Naturalmente, este método supone que no existe roce, o que éste es muy pequeño, pues sino parte del trabajo de P se convertiría en calor.

En el caso de suspensiones, de uso tan común en la técnica y en la ciencia, se utilizan otros métodos, de los cuales hemos de ocuparnos con detenimiento.

× **6. Regla de Steiner.** — Esta regla permite determinar el momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje cualquiera, si se conoce el momento de inercia con respecto a un eje paralelo que pasa por el centro de gravedad.

Sea $E'E'$ el eje en cuestión (fig. 168); EE el eje paralelo que pasa por el centro G de gravedad del cuerpo y d la distancia entre am-

bos. Consideremos los elementos de masa contenidos en un plano normal a los ejes y que los corta en los puntos O y O' . El momento de inercia con respecto al eje que pasa por G será $I_G = \Sigma m r^2$, donde la suma se extiende a todos los elementos de aquel plano y de los demás. El momento de inercia con respecto a $E'E'$ será $I = \Sigma m r'^2$. Se tiene para todos los puntos la relación:

$$r'^2 = r^2 + d^2 - 2d \cdot ON, \quad [27]$$

donde ON es, en todos los casos, la proyección de r sobre una dirección fija en el plano de los dos ejes, y que sería la coordenada x de un sistema de coordenadas de origen en G , cuyos ejes fuesen uno, el de las z , por ejemplo, la recta EE , el de las x la línea OO' y el tercero normal a los ya definidos.

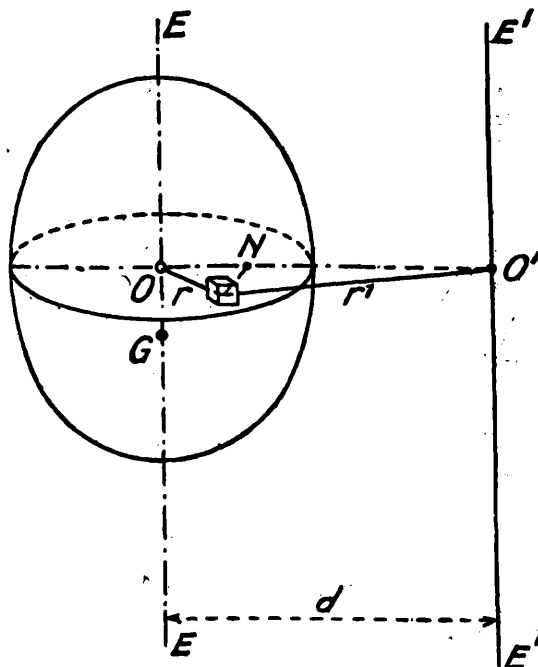


Fig. 168.

Es, entonces,

$$r'^2 = r^2 + d^2 - 2d \cdot x \quad [27']$$

y, por lo tanto,

$$\Sigma m r'^2 = \Sigma m r^2 + d^2 \Sigma m - 2d \Sigma mx, \quad [28]$$

pues d es constante.

Es, además, $\Sigma mx = 0$, puesto que el origen de coordenadas está en el centro de gravedad, lo que significa que en la relación

$$\xi = \frac{\Sigma mx}{M}$$

es

$$\xi = 0$$

y, por lo tanto,

$$\Sigma mx = 0.$$

Se obtiene así de las [28]

$$I = I_G + M d^2. \quad [29]$$

Es decir, que el momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje cualquiera, es igual al momento de inercia con respecto a un eje paralelo trazado por el centro de gravedad, más el producto de la masa total por el cuadrado de la distancia entre los dos ejes.

× 7. **Péndulo físico o compuesto.**— El péndulo matemático es, en realidad, una ficción, pues siempre se trata de un sistema de masas que

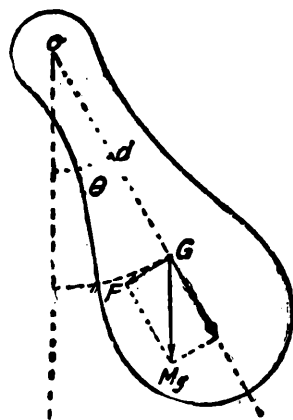


Fig. 169.

giran al rededor de un eje fijo. En un sistema rígido (fig. 169) que gira al rededor de un eje, o mejor dicho, que oscila, existen, como probaremos, puntos tales que oscilan exactamente de la misma manera que si estuviesen solos, es decir, como lo haría un péndulo matemático cuya longitud fuera igual a la distancia de uno de aquellos puntos al eje. Esa longitud se llama la longitud reducida del péndulo físico. El péndulo matemático correspondiente se llama péndulo sincrónico del compuesto.

Sea O el eje de rotación y G el centro de gravedad, sobre el cual actúa la fuerza vertical Mg , si M es la masa total del cuerpo.

La cupla actuante \mathcal{M} está en todo momento expresada por el producto de la componente F de la fuerza por la distancia d del centro de gravedad al eje O , de modo que se tiene

$$F = -Mg \sin \theta \quad [30]$$

y

$$\mathcal{M} = -Mg \sin \theta \cdot d, \quad [31]$$

donde el signo menos indica que la cupla tiende siempre a disminuir el ángulo θ .

Por la ecuación [15'] se tiene:

$$-Mg \cdot \sin \theta \cdot d = I \gamma = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}, \quad [32]$$

donde I es el momento de inercia con respecto al eje O .

El movimiento resulta enteramente conocido por la integración de esa ecuación diferencial. Se tendría así la posición de G en función del tiempo.

Se puede resolver el problema, fácilmente, en el caso de oscilaciones pequeñas, por un procedimiento elemental.

Si la amplitud del movimiento es muy pequeña, el arco del círculo que describe el punto G entre sus posiciones extremas, puede ser considerado como una recta y en lugar del seno puede tomarse el arco, esto es, el ángulo θ en fracciones de π . La fuerza será, en todo instante:

$$F = - M g \theta, \quad [33]$$

es decir, proporcional a la distancia del centro de gravedad a su posición de reposo, pues θ es igual a ese apartamiento dividido por d .

El centro de gravedad cumple un movimiento vibratorio armónico, cuya aceleración es, en todo instante, según la ecuación [31] del capítulo VIII:

$$a = - \frac{4 \pi^2}{T^2} x, \quad [34]$$

si T es el tiempo de una oscilación doble y x la distancia del punto a su posición de reposo.

La aceleración angular resulta de la relación $a = r \gamma$, siendo en este caso $r = d$.

Es, pues,

$$\gamma = \frac{a}{d} = - \frac{4 \pi^2}{T^2} \frac{x}{d} = - \frac{4 \pi^2}{T^2} \theta, \quad [35]$$

y substituyendo en la [32], donde en lugar del $\text{sen } \theta$ debe ponerse θ , se tiene

$$M g d = \frac{4 \pi^2}{T^2} I. \quad [36]$$

El tiempo de una oscilación es, según esa expresión,

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{I}{M g d}} = 2 \pi \sqrt{\frac{I}{D}} \quad [37]$$

en la que se ha puesto

$$D = M g d,$$

magnitud que representa, en virtud de las ecuaciones anteriores, el momento necesario para producir un ángulo θ igual a la unidad; recibe el nombre impropio de *fuerza directriz*.

× 8. **Péndulo simple sincrónico.** — El péndulo físico tiene, según la ecuación [37], el mismo tiempo de oscilación que tendría un péndulo matemático cuya longitud estuviese dada por la relación

$$l = \frac{I}{M d} \quad [38]$$

o, por el teorema de Steiner, por la expresión

$$l = d + \frac{I_G}{M d}, \quad [38']$$

la cual enseña que todo punto del péndulo físico cuya distancia al eje esté dado por la relación anterior, oscila como un péndulo matemático de longitud l ; esos puntos están situados a mayor distancia del eje que G . Aquel de entre ellos que está situado debajo de G y en la recta que une este punto con O , se llama *centro de oscilación*.

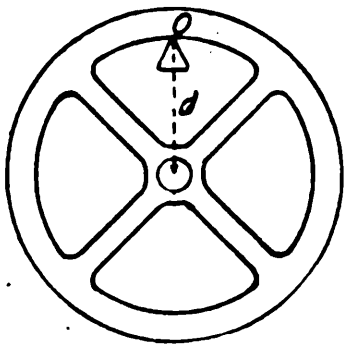


Fig. 170.

× 9. **Determinación del momento de inercia de un volante.** — La relación [37] permite determinar experimentalmente, con bastante exactitud, el momento de inercia de un volante. Se saca del eje y se le suspende como indica la figura 170. Si se lo desvía, el volante oscila como un péndulo físico y se puede medir su tiempo de oscilación; además, se conoce su peso Mg y la distancia d entre el eje de rotación y el centro de gravedad, situado, aproximadamente, en el eje de figura; lo único desconocido es entonces I .

ción y el centro de gravedad, situado, aproximadamente, en el eje de figura; lo único desconocido es entonces I .

× 10. **Péndulo reversible.** — El péndulo físico permite la determinación de la aceleración g de la gravedad. El tiempo T de oscilación puede determinarse con gran exactitud, midiendo con un reloj el tiempo de duración de cierto número de oscilaciones; la masa total M puede determinarse también, con mucha aproximación, por medio de la balanza; la determinación exacta de la distancia del centro de gravedad al eje, y del momento de inercia, no es tan sencilla. El valor de g así obtenido no tendría la exactitud que exige su importancia.

La dificultad se vence determinando bajo qué condiciones corresponde al péndulo físico una longitud dada de antemano.

Preguntemos: a qué distancia z del centro de gravedad se debe situar un eje para que la oscilación del péndulo a su rededor corresponda a la de un péndulo matemático de una longitud l dada.

Si indicamos con I_G el momento de inercia del cuerpo con respecto a un eje que pasa por el centro de gravedad y con I el relativo al eje de suspensión que le es paralelo a la distancia z , se tiene, por la regla de Steiner:

$$I = I_G + M z^2 \quad [39]$$

Por las condiciones enunciadas en la pregunta y por la ecuación [37] se tiene

$$\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{I_G + M z^2}{M z g}}, \quad [40]$$

relación que permite la determinación de z . Resulta

$$z^2 - lz + \frac{I_G}{M} = 0, \quad [41]$$

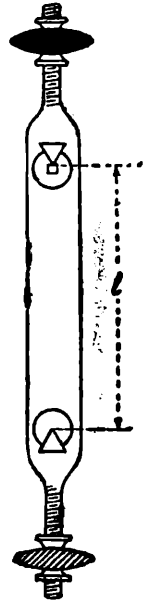


Fig. 171.

la que nos dice que existen dos valores de z que satisfacen aquellas condiciones. La suma de esas dos raíces z_1 y z_2 es, como es sabido, igual al coeficiente de z , esto es, a l .

Si se colocan dos ejes sobre una misma recta que pase por el centro de gravedad, uno a distancia z_1 y otro a distancia z_2 , el tiempo de oscilación será, pues, el mismo, cualquiera sea, de esos dos ejes, el que se utilice como eje de suspensión.

Si se tiene un péndulo que consiste en una barra provista de dos ejes triangulares y de dos masas movibles (fig. 171), es claro que por desplazamiento de éstas puede conseguirse que el tiempo de oscilación sea igual para los dos ejes, en cuyo caso la distancia entre los mismos es la longitud del péndulo sincrónico. Sobre métodos de medidas y correcciones véase el capítulo XIII.

11. Fuerza centrífuga de un disco rígido que gira al rededor de un eje. — Vamos a determinar, primeramente, la fuerza centrífuga de un disco delgado de contorno cualquiera, que gira al rededor de un eje perpendicular a sus caras (fig. 172). Sea el eje de rotación el eje de las z , de tal manera que la lámina es paralela al plano $x y$. La fuerza centrífuga de la placa es la resultante de las fuerzas de cada uno de los puntos.

La fuerza centrífuga que actúa sobre uno de los elementos de masa m , situado a la distancia r , es:

$$F = m \frac{v^2}{r} = mr \omega^2, \quad [42]$$

si v es su velocidad lineal y ω la velocidad angular, igual para todos los puntos.

Las componentes de esa fuerza, en dirección de los ejes, son:

$$X = F \cos \alpha = \frac{F x}{r} = \omega^2 mx \quad [43]$$

$$Y = F \sin \alpha = \frac{F y}{r} = \omega^2 my$$

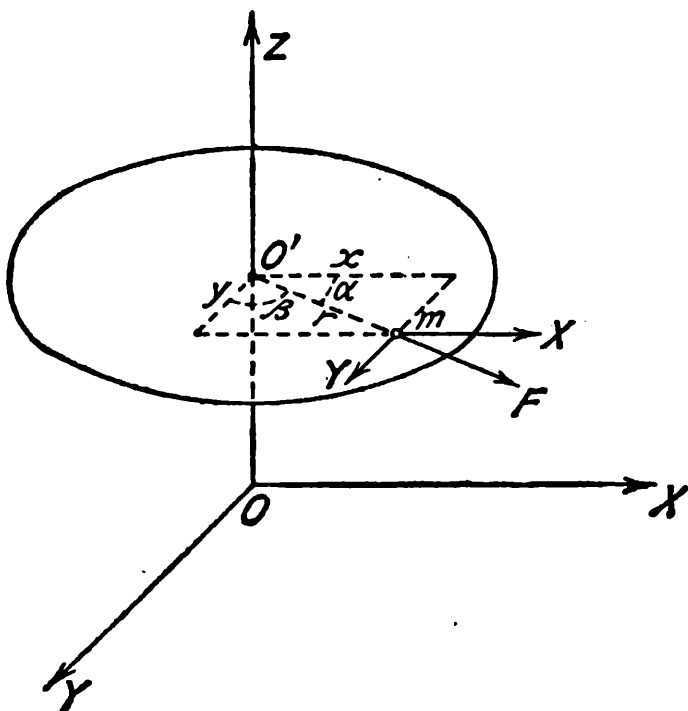


Fig. 172.

y expresiones semejantes para los demás elementos.

La componente total paralela al eje de las X será:

$$\Sigma X = X = \omega^2 \Sigma mx \quad [44]$$

y la paralela al eje de las y

$$\Sigma Y = Y = \omega^2 \Sigma my. \quad [45]$$

Si se representan con ξ y η las coordenadas del centro de gravedad, se tiene:

$$\Sigma mx = M \xi \quad [46]$$

$$\Sigma my = M \eta \quad [47]$$

y, por lo tanto,

$$X = \omega^2 M \xi \quad [48]$$

$$Y = \omega^2 M \eta. \quad [49]$$

La fuerza centrífuga es la resultante de esas dos fuerzas; indicándola con F se tiene

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = \omega^2 M \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \omega^2 MR, \quad [50]$$

si se representa con R la distancia del centro de gravedad al eje de rotación. Esta relación muestra que la fuerza está aplicada al centro de gravedad del disco.

La dirección de la fuerza F está dada, en todo momento, como es evidente, por la relación $Y:X$, que representa la tangente del ángulo que forma la dirección de F aplicada al centro de gravedad G , con la dirección del eje de las x (fig. 173), de modo que se tiene:

$$\text{tang } \varphi = \frac{Y}{X} = \frac{\eta}{\xi}. \quad [51]$$

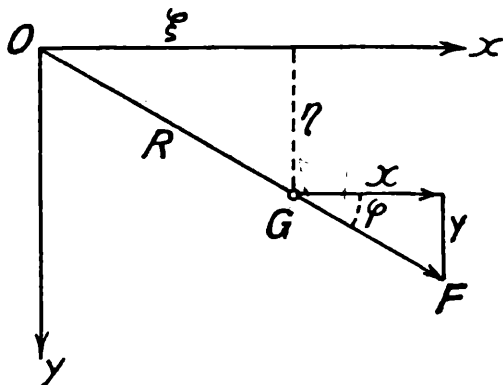


Fig. 173.

Esa expresión hace notorio que la dirección de F coincide con la de la recta que une al centro de rotación con el centro de gravedad G .

Si el eje de rotación pasa por el centro de gravedad de la placa, es decir, si $R = 0$, la fuerza centrífuga se anula, esto es, la fuerza centrífuga de las masas elementales se equilibran. El eje no sufre en ese caso ninguna fuerza debida a la rotación, por cuyo motivo se le designa con el nombre de *eje libre*.

12. Fuerzas y momentos centrífugos que obran sobre un cuerpo rígido que gira al rededor de un eje. — Con los elementos del párrafo anterior se puede calcular fácilmente la fuerza centrífuga que obra sobre un cuerpo rígido animado de un movimiento de rotación. Bastará, para ello, imaginarlo descompuesto en láminas delgadas, producidas por intersección con un sistema de planos paralelos entre sí, normales al eje de rotación, el cual coincida, como antes, con el eje de las z . En la figura 174 están dibujadas dos de esas láminas. Sean sus masas respectivas M_1, M_2, \dots ; $G_1 (\xi_1 \eta_1) G_2 (\xi_2 \eta_2) \dots$ sus centros de gravedad y z_1, z_2, \dots , las coordenadas de las intersecciones con el eje. El centro de gravedad del cuerpo sea $G (\xi \eta)$.

Las fuerzas centrífugas F_1, F_2, \dots , correspondientes a cada disco, y aplicadas al respectivo centro de gravedad, son normales al eje y sólo admiten, por lo tanto, componentes según x e y , que representaremos con las letras $X_1, Y_1; X_2, Y_2$; etc.

Las fuerzas $X_1, X_2, \dots, Y_1, Y_2, \dots$, equivalen, respectivamente, en general, según se ha visto, a una fuerza y una cupla, pues todas ellas pueden ser transportadas paralelamente a sí mismas a otro

punto cualquiera del cuerpo, agregando una cupla. Así, se pueden transportar paralelamente a sí mismas las fuerzas Y_1 e Y_2 al origen O de coordenadas, por ejemplo, agregando las cuplas de momento

$Y_1 z_1$ e $Y_2 z_2$, pues el traslado resulta de agregar en O dos fuerzas opuestas entre sí, una vez iguales y paralelas a Y_1 , otra vez iguales y paralelas a Y_2 (figs. 175 y 176).

Por superposición se obtiene una fuerza resultante de las Y_1, Y_2 , igual a su suma geométrica y paralela al eje de las y , y una cupla resultante de las dos cuplas $Y_1 z_1, Y_2 z_2$ e igual a la suma de estas.

Se ve así claramente que todas las fuerzas Y_1, Y_2, Y_3, \dots , se reducen a una única fuerza que llamaremos Y , igual a la suma geométrica de aquéllas, y a una única cupla de momento $Y_1 z_1 + Y_2 z_2 \dots$; lo mismo ocurre con las fuerzas X_1, X_2, X_3, \dots

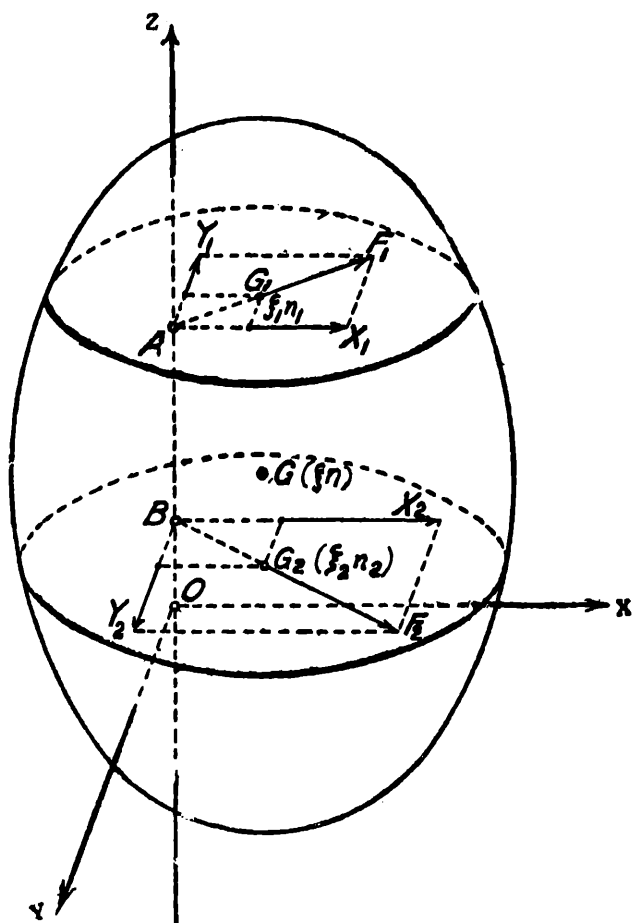


Fig. 174.

Así se tienen reducidas todas las fuerzas centrífugas de los discos en que se considera dividido el cuerpo a dos fuerzas normales entre sí y a dos cuplas situadas en plano también normales, esto es, de ejes momentos perpendiculares entre sí.

Las fuerzas centrífugas se equilibran en el eje, si la resultante de esas dos fuerzas y el momento de la cupla resultante de esas dos cuplas se anulan.

Dos fuerzas perpendiculares o dos cuplas de ejes normales no admiten una resultante nula sino en el caso en que cada componente por sí es cero, y, por lo tanto, para que la fuerza centrífuga no se haga sentir sobre el eje debe ser:

$$\begin{aligned}
 X_1 + X_2 + X_3 + \dots &= 0 \\
 X_1 z_1 + X_2 z_2 + X_3 z_3 + \dots &= 0 \\
 Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots &= 0 \\
 Y_1 z_1 + Y_2 z_2 + Y_3 z_3 + \dots &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{52}$$

Por las ecuaciones [48] y [49] del párrafo anterior es

$$\begin{aligned} X_1 &= \omega^2 M_1 \xi_1 \\ Y_1 &= \omega^2 M_1 \eta_1 \\ &\dots \dots \dots, \end{aligned} \quad [53]$$

y, por consiguiente,

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + X_3 + \dots = \omega^2 (M_1 \xi_1 + M_2 \xi_2 + \dots) = \omega^2 M \xi \\ Y &= Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots = \omega^2 (M_1 \eta_1 + M_2 \eta_2 + \dots) = \omega^2 M \eta, \end{aligned} \quad [54]$$

pues, en virtud de la definición del centro de gravedad, es

$$\begin{aligned} M \xi &= M_1 \xi_1 + M_2 \xi_2 + \dots \\ M \eta &= M_1 \eta_1 + M_2 \eta_2 + \dots \end{aligned} \quad [55]$$

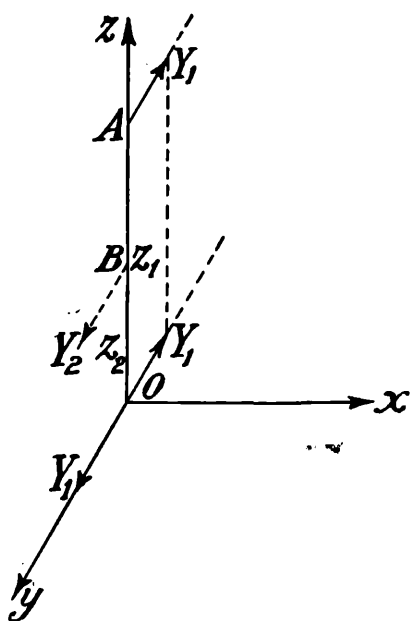


Fig. 175.

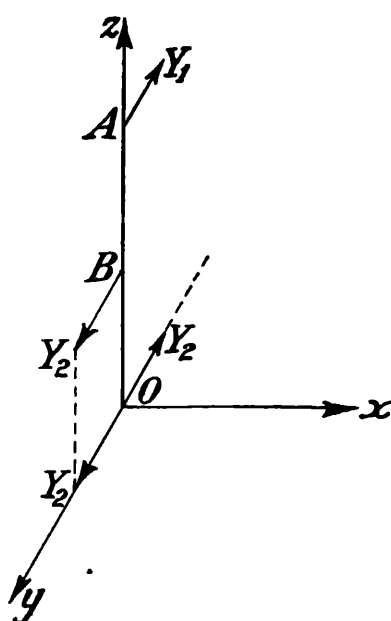


Fig. 176.

La fuerza resultante está dada por la expresión

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = M \omega^2 \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = M \omega^2 R, \quad [56]$$

si R es la distancia del centro de gravedad al eje de rotación.

Veamos ahora cuáles son las condiciones para que la cupla resultante sea nula. De las dos ecuaciones [52] restantes se obtiene, con el auxilio de la [53]:

$$\begin{aligned} M_1 \xi_1 z_1 + M_2 \xi_2 z_2 + \dots &= 0 \\ M_1 \eta_1 z_1 + M_2 \eta_2 z_2 + \dots &= 0 \end{aligned} \quad [57]$$

pues ω no es nula.

Como, además, es $M_1 \xi_1 = \Sigma mx$; $M_1 \eta_1 = \Sigma my$ sobre el primer disco, e idénticamente para los demás, resulta que el eje de las z será un eje libre, es decir, no sujeto a influencia alguna de las fuerzas centrífugas, en virtud de las relaciones [54] y [57], si es:

$$\Sigma mx = \Sigma my = 0, \quad [58]$$

$$\Sigma mxz = \Sigma myz = 0, \quad [59]$$

donde la suma se extiende a todos los elementos de masa del cuerpo.

Un eje cualquiera será eje libre si considerado como eje de las z valen las condiciones 58 y 59, que dependen, exclusivamente, como es notorio, de la distribución de las masas a su rededor.

Las expresiones Σmxz , Σmyz , ..., se denominan *momentos centrífugos o de desviación*. Si el cuerpo gira al rededor de un eje cualquiera, el primer producto origina un momento centrífugo al rededor del eje de las y , el otro un momento centrífugo al rededor del eje de las x , y así sucesivamente para el doble producto Σmxy .

Es decir, para que la fuerza centrífuga no se haga sentir, no es suficiente que el eje pase por el centro de gravedad, pues así se satisfacen únicamente las condiciones de la [58].

Se comprende la importancia técnica de estas cuestiones, si se tiene presente que, en casi todos los casos, las máquinas que utiliza el hombre consisten en cuerpos rígidos que giran al rededor de ejes fijos, y algunas, como las turbinas, por ejemplo, a gran velocidad.

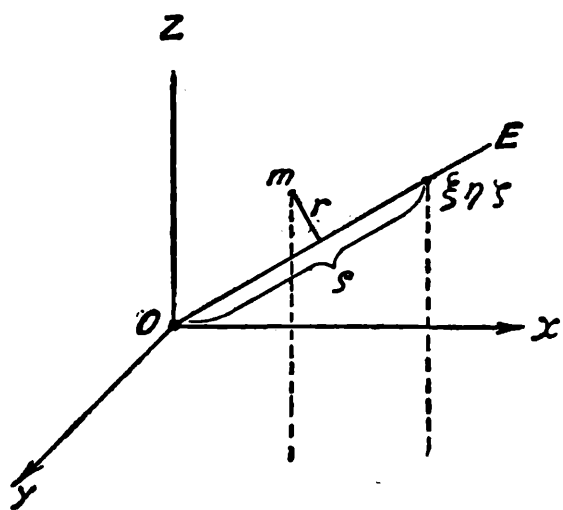


Fig. 177.

bre consisten en cuerpos rígidos que giran al rededor de ejes fijos, y algunas, como las turbinas, por ejemplo, a gran velocidad.

* 13. **Ejes principales de inercia.** — Vamos a demostrar que en todo cuerpo rígido existen tres direcciones ortogonales entre sí que pasan por el centro de gravedad y al rededor de cada uno de los cuales las fuerzas centrífugas de los elementos se equilibran.

La acción de la fuerza centrífuga al rededor de un eje cualquiera se reduce, según se ha visto, a una fuerza y a una cupla; la primera se anula si el eje pasa por el centro de gravedad. Nuestro problema consiste entonces en demostrar que se pueden hacer pasar por el centro de gravedad tres ejes ortogonales entre sí y solamente tres

con respecto a los cuales los productos Σmxy , Σmxz , Σmyz se anulan.

Sean x , y , z (fig. 177) un sistema cualquiera de ejes ortogonales cuyo origen coincide con el centro de gravedad del cuerpo.

Los momentos de inercia con respecto a los ejes son, respectivamente:

$$\begin{aligned} A &= \Sigma m (y^2 + z^2) \\ B &= \Sigma m (z^2 + x^2) \\ C &= \Sigma m (x^2 + y^2). \end{aligned} \quad [60]$$

Expresemos ahora el momento de inercia con respecto a un eje cualquiera OE que pasa por el origen de coordenadas y cuyos cosenos directores sean λ , μ y ν .

Para lograrlo hay que formar la suma

$$I = \Sigma mr^2 \quad [61]$$

de los términos que se obtienen multiplicando la masa m de cada elemento por el cuadrado de su distancia r al eje en cuestión.

La distancia r de un punto de masa m al eje OE se expresa en función de sus coordenadas y de los cosenos directores de OE por la igualdad

$$r^2 = (\mu z - \nu y)^2 + (\nu x - \lambda z)^2 + (\lambda y - \mu x)^2. \quad [62]$$

Por las expresiones [61] y [62] se tiene, ordenando convenientemente los términos:

$$\begin{aligned} I &= \Sigma m [\lambda^2 (y^2 + z^2) + \mu^2 (z^2 + x^2) + \\ &+ \nu^2 (x^2 + y^2) - 2\mu\nu yz - 2\nu\lambda zx - 2\lambda\mu xy] \end{aligned} \quad [63]$$

y puesto que λ , μ y ν son, para un eje dado, constantes, pueden sacarse fuera del signo de suma.

Teniendo en cuenta las relaciones [60] y poniendo además

$$D = \Sigma myz \quad E = \Sigma mzx \quad F = \Sigma mxy \quad [64]$$

resulta

$$I = A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 - 2\mu\nu D - 2\nu\lambda E - 2\lambda\mu F. \quad [65]$$

Por una interpretación geométrica de esta expresión podemos formarnos una imagen clara de las relaciones entre los momentos de inercia correspondientes a todos los ejes que pasan por un mismo punto. Para eso, tomemos sobre cada uno de los ejes que pasan por O , y a partir del mismo punto, una magnitud ρ tal que sea $I \rho^2 = 1$, donde I es el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje elegido.

Indicando con ξ , η y ζ las coordenadas del punto extremo del segmento ρ de eje, se tiene

$$\lambda = \frac{\xi}{\rho}, \quad \mu = \frac{\eta}{\rho}, \quad \nu = \frac{\zeta}{\rho} \quad [66]$$

y substituyendo en la [65] resulta

$$I \rho^2 = 1 = A \xi^2 + B \eta^2 + C \zeta^2 - 2 \xi \eta D - 2 \eta \zeta E - 2 \zeta \xi F. \quad [67]$$

Esta es la ecuación de un elipsoide, el cual resulta formado por las posiciones de los puntos extremos de ρ correspondientes a los ejes que pasan por el punto. Se le llama *elipsoide de inercia*.

Un elipsoide tiene únicamente tres ejes ortogonales entre sí que se denominan *ejes principales*, siendo uno el eje mayor y el otro el menor de entre todos los ejes.

Si se refieren las coordenadas del elipsoide a los ejes principales, su ecuación se reduce a una expresión de tres términos. En otras palabras, con respecto a los ejes principales del elipsoide desaparecen los términos en que figuran los productos de las coordenadas, esto es, los productos Σmxy ; Σmyz , ...

Se puede, por lo tanto, escribir

$$\mathcal{A} \xi^2 + \mathcal{B} \eta^2 + \mathcal{C} \zeta^2 = 1, \quad [68]$$

donde ξ , η y ζ son ahora las coordenadas de los puntos extremos del segmento ρ referidas al nuevo sistema de ejes. Las magnitudes \mathcal{A} , \mathcal{B} y \mathcal{C} son los momentos de inercia con respecto a esos mismos ejes y se denominan, por eso, momentos principales de inercia.

Resulta así probado que existen tres direcciones ortogonales, y solamente tres, que pasan por el centro de gravedad y con respecto a los cuales la acción de la fuerza centrífuga es nula.

Los ejes que coinciden con esas direcciones se llaman *ejes principales de inercia* o, también, *ejes libres*.

De la expresión

$$I \rho^2 = 1$$

resulta que al eje principal mayor le corresponde el menor momento de inercia y, recíprocamente, al eje menor el momento de inercia mayor.

Los cosenos directores de un eje cualquiera, OE , que pasa por O , con respecto al nuevo sistema de ejes, están dados por relaciones como las [66], donde ξ , η y ζ son las nuevas coordenadas. Si se introducen esos cosenos en la relación [68] resulta, para el momento con respecto a ese eje OE , la expresión

$$I = A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2. \quad [69]$$

Se ve así que, dados los momentos de inercia con respecto a los ejes principales, se puede calcular el momento de inercia con respecto a un eje cualquiera.

Las consideraciones que se han hecho valen para un punto cualquiera distinto del centro de gravedad perteneciente o no al cuerpo, como resulta de la demostración; a todo punto corresponden tres direcciones con respecto a las cuales se anulan la cupla que crea la fuerza centrífuga; no se anula, en cambio, la fuerza, pues la acción de la fuerza centrífuga se reduce a una cupla y a una fuerza y ésta sólo se anula en el caso en que los ejes pasan a la vez por el centro de gravedad.

CAPITULO X

EL MOVIMIENTO DEL CENTRO DE GRAVEDAD

× 1. **Leyes del movimiento del centro de masa.** — Se han estudiado hasta aquí movimientos de translación de puntos materiales y de rotación de cuerpos rígidos al rededor de un eje fijo, y se trata de discutir ahora el movimiento de un cuerpo o de un sistema de cuerpos rígidos que pueden moverse con entera libertad.

Es necesario para ello poner en evidencia algunas propiedades importantes del centro de masa, cuyas coordenadas x , y , z están dadas por las expresiones:

$$\begin{aligned} M x &= m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots \\ M y &= m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \dots \\ M z &= m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \dots, \end{aligned} \quad [1]$$

donde $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, \dots , son las coordenadas cartesianas ortogonales de los elementos de masa m_1 , m_2 , \dots , del cuerpo.

Supongamos que en el intervalo de tiempo dt el cuerpo se ha desplazado de tal manera que las coordenadas de todos sus puntos se han modificado en cantidades muy pequeñas. Como las ecuaciones anteriores valen para todo instante, existirá, entre la variación de las coordenadas del centro de gravedad y la variación de las coordenadas de los puntos, la relación

$$M \cdot dx = m_1 dx_1 + m_2 dx_2 + \dots, \quad [2]$$

y otras dos relaciones análogas para las y , z . Estas ecuaciones resultan, también, por simple diferenciación de las anteriores.

Si dividimos por dt se tiene:

$$M \cdot v = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 + \dots \quad [3]$$

donde v representa la velocidad del centro de gravedad y v_1, v_2, \dots , las velocidades de los diferentes puntos, en dirección de las x .

Esta ecuación nos dice que en todo momento la cantidad de movimiento del cuerpo, en dirección del eje de las x , es la misma que tendría el centro de gravedad en la misma dirección si toda la masa estuviese concentrada en él.

Puesto que esto vale en todo instante t de tiempo, valdrá en el instante $t + dt$. Si en el intervalo dt de tiempo las respectivas velocidades han sufrido cambios dv, dv_1, dv_2, \dots , existirá entre ellas, por lo tanto, la relación

$$M dv = m_1 dv_1 + m_2 dv_2 + \dots \quad [4]$$

y dividiendo por dt se tiene:

$$M \cdot \frac{dv}{dt} = m_1 \frac{dv_1}{dt} + m_2 \frac{dv_2}{dt} \dots, \quad [5]$$

donde $\frac{dv}{dt}$ es la aceleración del centro de gravedad y $\frac{dv_1}{dt}, \frac{dv_2}{dt}, \dots$, son las aceleraciones de los puntos m_1, m_2, \dots , en dirección de las x , en el instante considerado; su producto por la masa correspondiente representa, según sabemos, la fuerza actuante. Es decir, cada uno de los términos de la derecha representa la fuerza que actúa sobre el punto en dirección de las x . Si indicamos a esas fuerzas con X_1, X_2, \dots , se tiene:

$$X_1 + X_2 + X_3 \dots = M \frac{dv}{dt} = M a_x, \quad [6]$$

si se representa con a_x la aceleración del centro de gravedad en dirección de las x . El mismo resultado se obtiene con respecto a los otros ejes y, por lo tanto, podemos enunciar la siguiente ley:

1. *El punto llamado centro de gravedad del cuerpo se mueve como si contuviese toda la masa de éste y actuaran en él, con su respectiva magnitud y dirección, todas las fuerzas que determinan el movimiento.*

Resulta de este principio lo siguiente:

a) *Si sobre el cuerpo no actúa ninguna fuerza, el centro de gravedad está en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme. Esto vale, por ejemplo, para el centro de gravedad de nuestro sistema solar.*

b) *Un par de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido, no tiene influencia sobre el movimiento del centro de gravedad. Esto es evidente, pues trasladando esas fuerzas iguales y opuestas al centro de gravedad, se anulan.*

Si el cuerpo estaba primitivamente en reposo, bajo la acción de una cupla, girará al rededor de un eje que pasa por el centro de gravedad;

c) Una fuerza aplicada a un punto cualquiera determinará una traslación del centro de gravedad y una rotación al rededor de un eje que pasa por él.

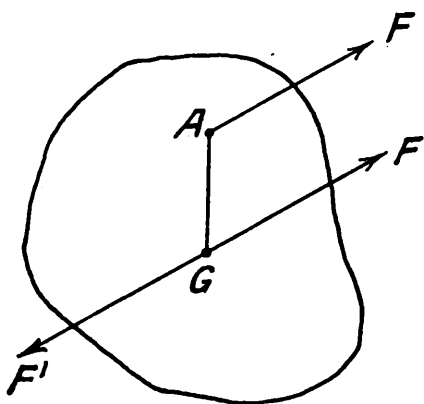


Fig. 178.

Esto resulta del hecho de que una fuerza puede trasladarse paralelamente a sí misma a otro punto que no está sobre la misma recta agregando una cupla, según vimos en la estática. Así, (fig. 178), la fuerza F aplicada al punto A equivale a la fuerza F aplicada en G y a la cupla $FAGE'$.

Estos resultados pueden comprobarse experimentalmente, como sigue:

Una plataforma G (fig. 179) puede girar con suma facilidad sobre otra plataforma horizontal, en virtud de descansar sobre esferas bien

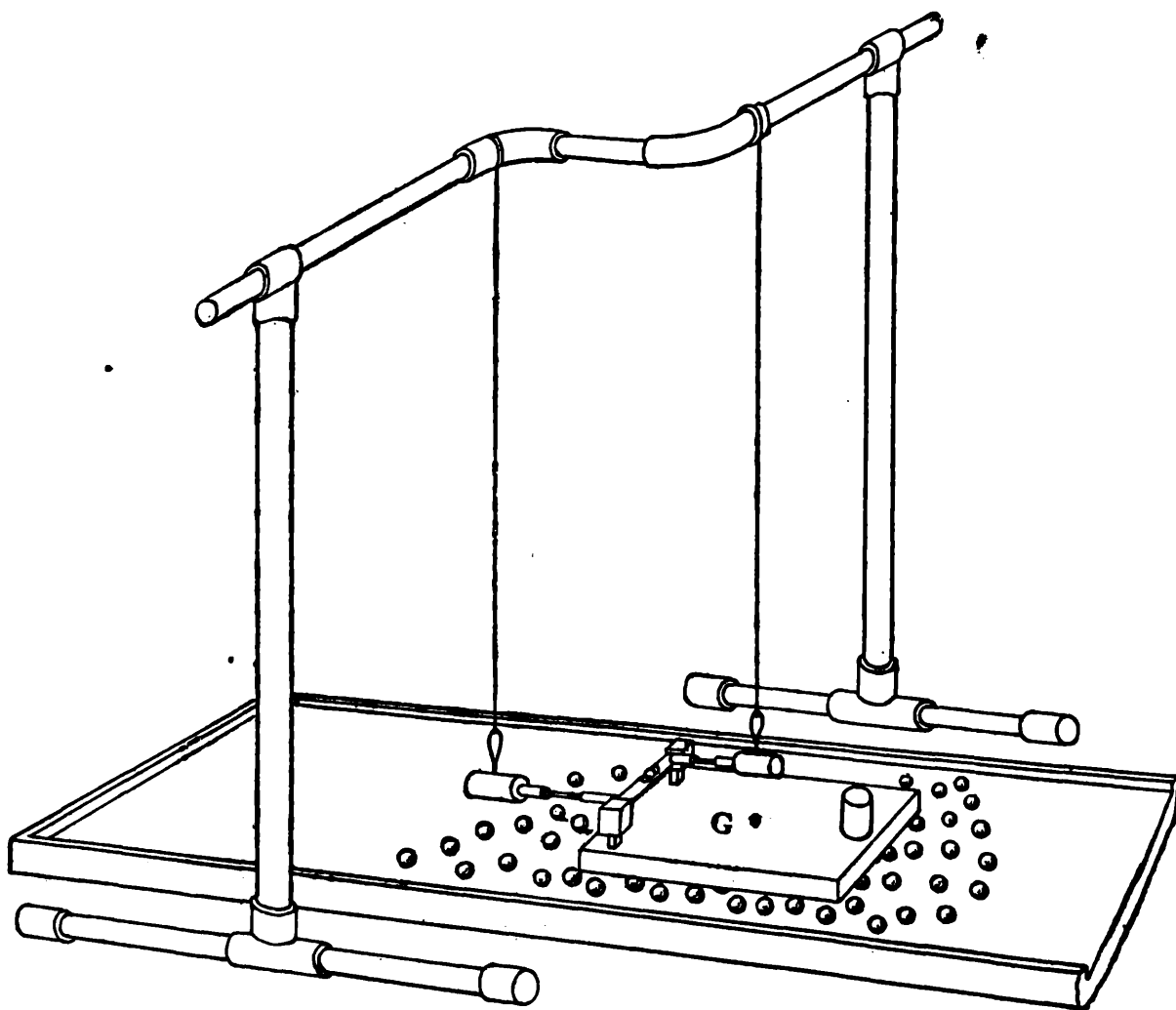


Fig. 179.

pulidas de acero. Además, las caras de las plataformas que se miran están construídas como las mesas de billar.

Por medio de un cañoncito se puede aplicar una fuerza, debido a la reacción que produce la salida del proyectil, en un punto cualquiera, o una cupla.

En el primer caso el cuerpo se traslada al mismo tiempo que gira al rededor del centro de gravedad G , en el segundo caso G permanece inmóvil y el cuerpo gira a su rededor.

Los resultados anteriores nos permiten decir que *las rotaciones* al rededor del centro de gravedad son independientes del movimiento de ese punto.

∧ **2. Acción de las fuerzas interiores sobre el movimiento de translación de un sistema de masas.** — Se ha visto en el párrafo anterior que el movimiento de translación de un cuerpo rígido está representado por el movimiento del centro de gravedad, supuesta la masa y todas las fuerzas concentradas en él.

Por este principio, y por la igualdad de la acción y de la reacción, el centro de gravedad de un sistema de masas no recibe ninguna aceleración bajo la acción exclusiva de fuerzas interiores, es decir, de fuerzas que actúan entre las masas.

En ese caso, la suma total de las fuerzas trasladadas al centro de gravedad es cero, y, por lo tanto, debe ser:

$$M a = 0, \quad [7]$$

si M es la suma total de las masas y a la *aceleración del centro de gravedad*. Será entonces, indicando con v su velocidad:

$$M v = \text{const}, \quad [8]$$

expresión idéntica a la

$$m v = \text{const} \quad [9]$$

encontrada en la mecánica del punto material, pues el centro de gravedad es el punto material mismo.

Esa expresión dice que fuerzas interiores no pueden modificar el movimiento de translación de un sistema de masas; como no existen fuerzas exteriores, la cantidad de movimiento debe conservarse. Se habla también de *conservación del impulso*, pues, como se sabe, una cantidad de movimiento equivale a un impulso.

Si el centro de gravedad del sistema estaba en reposo, lo seguirá estando; si en movimiento, su velocidad se conservará en magnitud y dirección. Además, debe ser, en todo momento, según la [3]:

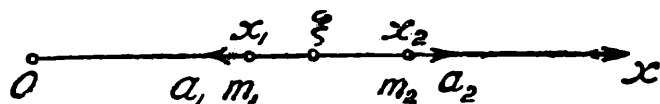
$$M v = m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots = \text{const} \quad (1) \quad [10]$$

de donde resulta que las masas individuales m_1 y m_2 pueden, bajo la acción de fuerzas interiores, ejecutar movimientos tales que en todo momento sea

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' + \dots = 0, \quad [11]$$

indicando con v_1' y v_2' , etc., las velocidades provenientes de las fuerzas interiores, pues ellas no deben modificar el valor de la constante de la ecuación [10].

Si se trata de dos masas m_1 y m_2 entre las cuales actúan en un momento dado fuerzas interiores, producidas por la acción de un resorte o de una explosión, por ejemplo, cada una de ellas se moverá, pero



el centro de gravedad del sistema conservará su movimiento.

Consideremos, por ejemplo, el caso de un cañón que efectúa un disparo; esquemáticamente representaremos la bala y el cañón por dos masas m_1 y m_2 situadas sobre un eje, el de las x (fig. 180).

Sean x_1 y x_2 las coordenadas respectivas de sus centros de gravedad y ξ la coordenada del centro de las dos masas juntas.

Se tiene, según las ecuaciones [21] de la página 84:

$$\xi = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \quad [12]$$

La explosión de la pólvora dura un tiempo τ muy pequeño. Admitamos que en ese intervalo de tiempo la fuerza F de expansión de los gases es constante; esto no es rigurosamente exacto, pero las conclusiones lo son. Es decir, entonces, que durante el tiempo τ las masas m_1 y m_2 han cumplido un movimiento uniformemente acelerado. Si a_1 y a_2 son las aceleraciones, se tiene, por la igualdad de la acción y de la reacción.

$$F = m_2 a_2 = - m_1 a_1, \quad [13]$$

pues el sentido del movimiento es opuesto en ambas.

(1) Suma vectorial, si v_1, v_2, v_3 , no tienen la misma dirección.

En el tiempo τ las masas m_1 y m_2 han recorrido los espacios $\frac{1}{2} a_1 \tau^2$ y $\frac{1}{2} a_2 \tau^2$; al fin de la explosión la posición del centro de gravedad es

$$\xi' = \frac{m_1 \left(x_1 - \frac{1}{2} a_1 \tau^2 \right) + m_2 \left(x_2 + \frac{1}{2} a_2 \tau^2 \right)}{m_1 + m_2} \quad [14]$$

y por la relación [13]

$$\xi' = \xi = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad [15]$$

lo que prueba la afirmación de que la posición del centro de gravedad del sistema no se modifica.

Las velocidades v_1 y v_2 del cañón y del proyectil al fin del tiempo τ resultan de la relación [11]. Es

$$m_1 v_1 = - m_2 v_2 \quad [16]$$

como lo exige la ecuación deducida.

3. Experimentos.— El resultado obtenido en el caso del cañón puede comprobarse experimentalmente en la siguiente forma: En un hilo de acero tendido horizontalmente se encuentran dos carritos que pueden deslizarse con muy poco frotamiento. Uno desempeña el papel de

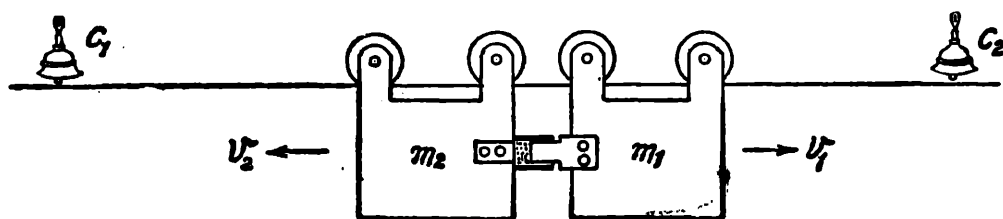


Fig. 181.

cañón, el otro el de proyectil (fig. 181). Si se ponen en movimiento por medio de la explosión de un poco de pólvora, para que se cumpla la relación [16], los carritos deben recorrer en el mismo tiempo espacios inversamente proporcionales a sus masas.

Si se colocan dos campanillas, c_1 y c_2 , a distancias de la posición inicial tales que guarden aquella relación, ambos carros chocarán en ellas al mismo tiempo.

4. **Caso en que actúan fuerzas exteriores.** — De lo que antecede resulta que una variación en el movimiento de traslación de un cuerpo sólo puede ser provocada por una fuerza exterior, y por el principio de la independencia de la acción de las fuerzas, la acción de fuerzas interiores es la misma que si aquéllas no estuviesen; el centro de gravedad del sistema cumplirá, entonces, bajo la acción de una fuerza exterior cualquiera, el *mismo movimiento*, existan o no fuerzas interiores.

Por ejemplo, si una granada explota en el aire, se moverán los pedazos en tal forma que el centro de gravedad seguirá la *misma* trayectoria que si el cuerpo hubiese permanecido intacto.

La trayectoria del centro de gravedad de un ser vivo será la *misma*, mueva o no sus miembros.

OCTAVA PARTE
DINÁMICA DEL CUERPO RÍGIDO

CAPITULO XI

ELEMENTOS DE CINEMÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO

χ 1. **Generalidades.** — En los párrafos anteriores se ha visto que las rotaciones de un cuerpo rígido libre se cumplen al rededor de ejes que pasan siempre por el centro de gravedad e independientemente del movimiento de traslación. Consideraremos, por ese motivo, las rotaciones, prescindiendo de las traslaciones, lo que equivale a suponer el centro de gravedad fijo.

Eso se realiza prácticamente por medio de una suspensión cardánica (fig. 182), El cuerpo (una esfera en el caso del dibujo) puede tomar cualquier posición en el espacio permaneciendo fijo únicamente el punto del mismo que coincide con el centro de los círculos.

El cuerpo puede girar a la vez al rededor de los tres ejes *I*, *II*, *III*, pues puede moverse al rededor del eje *I* mientras el anillo que lo sostiene gira al rededor del eje *II* y así sucesivamente.

Se hace notorio el sentido que tiene decir: *que el cuerpo cumple dos o más rotaciones simultáneas al rededor de ejes que pasan por un punto fijo.*

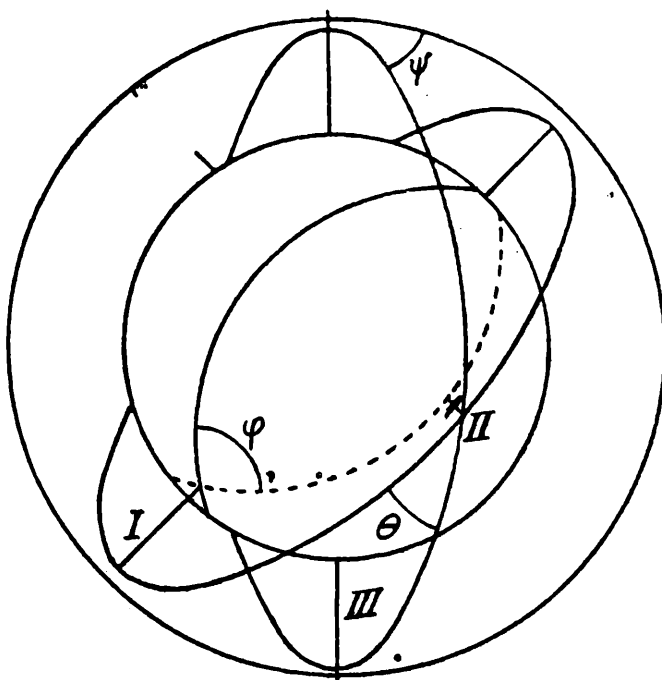


Fig. 182.

La posición del cuerpo en un instante dado queda determinada si se conocen, por ejemplo, los ángulos de Euler φ , θ , ψ , siendo φ el ángulo que forma un meridiano fijo del cuerpo con el plano del anillo interior. Es decir, que la solución de un problema de movimiento consistiría, en este caso, en determinar a φ , θ y ψ en función del tiempo.

A fin de facilitar la comprensión de cuestiones venideras conviene tratar cinemáticamente algunas relativas al movimiento de un cuerpo rígido al rededor de un punto fijo. El estudio que sigue vale *cualquiera que sea el punto del cuerpo que se fije*.

× **2. Teorema de Euler.** — Si un cuerpo rígido se mueve sujeto únicamente a la condición de que uno de sus puntos permanezca fijo, existe siempre una línea que pasa por ese punto que es común a dos posiciones cualesquiera.

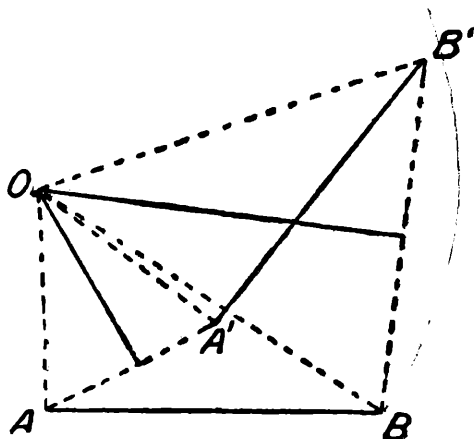


Fig. 183.

Eso equivale a decir que, dadas dos posiciones cualesquiera del cuerpo, se puede siempre pasar de una a otra por giración al rededor de esa recta común.

Demostremos, primeramente, que si una figura plana es desplazada en su plano, plano ideal que se supone fijo, existe siempre un punto común a dos posiciones cualesquiera y que se puede pasar de una posición a otra por una simple rotación a su rededor.

Sean, en efecto, A y B (fig. 183) dos puntos de la figura plana pertenecientes a la primera posición sobre el plano fijo y A' y B' los mismos puntos en la segunda posición.

Las perpendiculares levantadas en los puntos medios de las líneas AA' y BB' se cortan en un punto O común a las dos posiciones.

En efecto, a causa de las igualdades $OA = OA'$, $OB = OB'$ y $AB = A'B'$, los triángulos OAB , $OA'B'$ son idénticos, y, por lo tanto, O está situado similarmente con respecto a AB y $A'B'$, lo que significa que es el mismo punto de la figura.

Volvamos ahora al cuerpo rígido. Consideremos una porción esférica del cuerpo de centro en el punto fijo. Se puede imaginar el movimiento del cuerpo al rededor del punto fijo como el movimiento de la superficie de esa porción esférica sobre otra superficie esférica del mismo centro y radio fija en el espacio.

Es evidente que, si se conoce el movimiento de una figura esférica fija al cuerpo, sobre la superficie esférica fija en el espacio, el movimiento del cuerpo queda determinado.

El mismo razonamiento efectuado a propósito del movimiento de una figura plana sobre un plano puede hacerse para el movimiento de una figura esférica sobre una superficie esférica.

En la figura 184 AB y $A'B'$ son dos posiciones distintas de un mismo arco de meridiano fijo en el cuerpo sobre la superficie esférica fija en el espacio. El punto O' de intersección de dos círculos máximos normales a las líneas AA' y BB' , en sus respectivos puntos medios, es el punto al rededor del cual hay que hacer girar al arco AB sobre la esfera fija en el espacio para pasar a la posición $A'B'$.

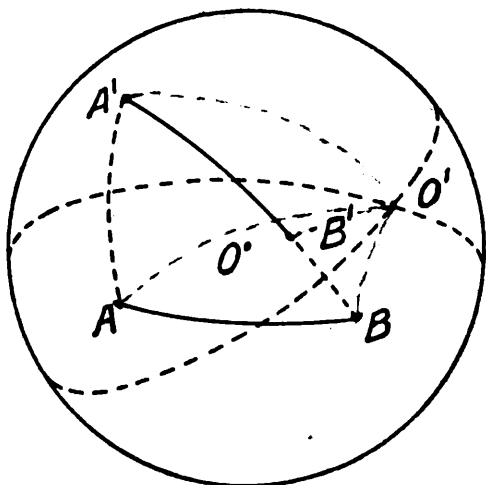


Fig. 184.

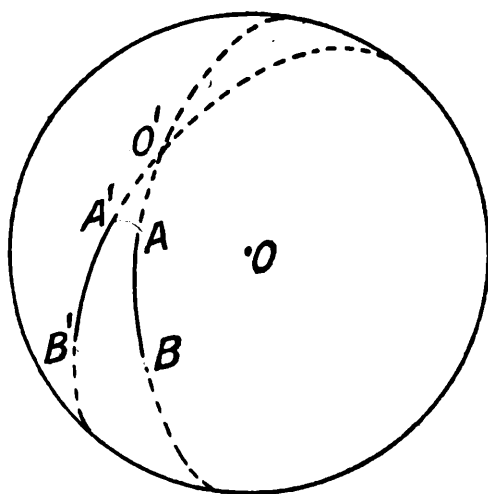


Fig. 185.

Se ve así entonces, claramente, que se puede pasar de una posición del cuerpo rígido a la otra, por giración al rededor del eje que pasa por el punto O' y por el punto fijo O .

Puede ocurrir (fig. 185) que los dos círculos máximos normales a AA' y BB' se confundan. En ese caso el punto O' buscado es la intersección de los círculos máximos a que pertenecen AB y $A'B'$.

La posición del cuerpo, en un momento dado, está determinada si se conoce la posición de la esfera móvil (fija al cuerpo) con respecto a la esfera fija en el espacio: esto es, si se conocen los ángulos de Euler.

∠ 3. **Composición de velocidades angulares.** — Por medio del teorema de Euler y del principio de superposición se pueden reducir dos o más rotaciones sucesivas o simultáneas al rededor de ejes que pasan por un punto a una rotación al rededor de un eje que pasa por el mismo punto.

Para obtener el movimiento resultante de un punto material, sometido a movimientos simultáneos, es menester, según se ha visto en el capítulo IV, dividir el tiempo en intervalos infinitamente pequeños y dejar actuar, en cada intervalo, uno después del otro, los movimientos simples; solamente así se obtendrá un movimiento que representa la realidad. Es decir, entonces, que el movimiento verdadero lo obtendremos, en el caso propuesto, componiendo rotaciones infinitamente pequeñas, esto es, dejando actuar, una después de la otra, durante un intervalo de tiempo infinitamente pequeño, las diferentes velocidades angulares.

Sean OA y OB dos ejes al rededor de los cuales un cuerpo gira con las velocidades angulares ω_1 y ω_2 , respectivamente. Consideremos

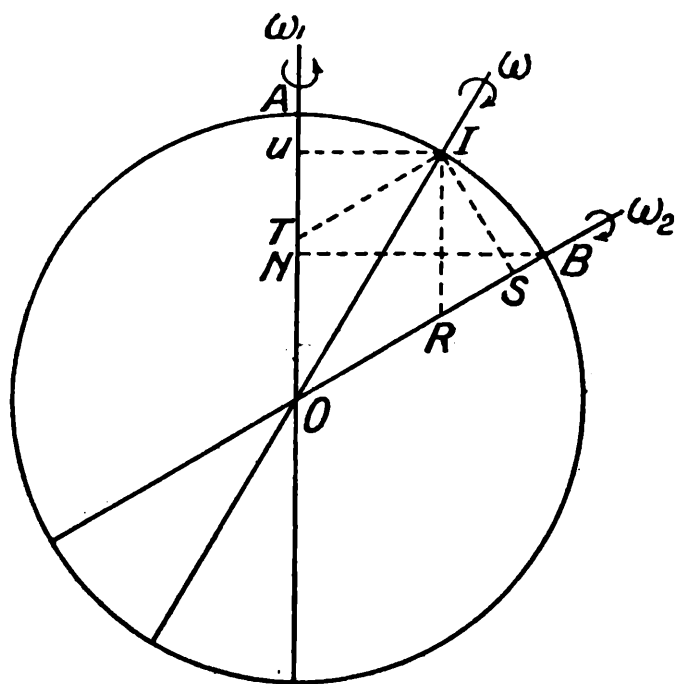


Fig. 186.

(fig. 186) una porción esférica del cuerpo de radio igual a la unidad y con centro en el punto O . Dos posiciones cualesquiera correspondientes a dos instantes diferentes, tienen, según el teorema de Euler, una recta común.

Tomemos sobre la esfera supuesta un punto I situado en el plano AOB y supongamos que la rotación al rededor de OA tiende a moverlo hacia atrás y que la rotación al rededor de OB tiende a moverlo hacia arriba. Si existiese solamente la rotación al

rededor de OA , el desplazamiento de I hacia ~~abajo~~^{atrás} en un intervalo de tiempo τ infinitamente pequeño sería $\omega_1 \cdot IU \cdot \tau$; si existiese solamente la otra rotación, el desplazamiento de I sería hacia ~~abajo~~^{arriba} y de valor $\omega_2 \cdot IS \cdot \tau$.

Por el principio de superposición esos desplazamientos no se modifican si se producen simultáneamente. El punto I , y, por lo tanto, todos los puntos del cuerpo situados sobre la línea OI , están en reposo durante el intervalo τ de tiempo, si el desplazamiento de I es cero, es decir, si es

$$\omega_1 \cdot IU \cdot \tau = \omega_2 \cdot IS \cdot \tau \quad [1]$$

de donde

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{IS}{IU}. \quad [2]$$

Si esa condición se cumple, la línea OI está instantáneamente en reposo; las dos rotaciones al rededor de OA y OB se componen en una rotación al rededor de OI . Trazando desde I rectas IR e IT paralelas a OA y OB , respectivamente, se forma un paralelogramo $OTIR$, cuya área, expresada de dos maneras diferentes, da la igualdad

$$OR \cdot IS = OT \cdot IU \quad [3]$$

o, en virtud de la relación [2],

$$\frac{OR}{OT} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad [4]$$

Por lo tanto, si a lo largo de los ejes OA y OB se llevan, a partir de O , magnitudes proporcionales a ω_1 y ω_2 , la diagonal del paralelogramo construído sobre ellas es el eje de rotación.

Veamos ahora cuál es el valor de la velocidad angular resultante, que indicaremos con ω . Tracemos desde B la perpendicular BN sobre el eje OA ; el desplazamiento de B (punto del eje OB) puede considerarse como producido por la rotación al rededor de OA o por la rotación resultante al rededor de OI , de manera que debe ser

$$\omega \cdot IS = \omega_1 \cdot BN, \quad [5]$$

pues el primer miembro da el valor del desplazamiento al rededor de OI , y el segundo el valor del desplazamiento al rededor de OA , debiendo ser los dos iguales.

Se tiene, por lo tanto,

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{BN}{IS}. \quad [6]$$

Es, por otra parte, por *triángulo de triángulo*

$$\frac{BN}{IS} = \frac{OB}{OI} = \frac{OI}{OT} \quad [7]$$

y, por consiguiente,

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{OI}{OT}. \quad [8]$$

Del mismo modo resulta

$$\frac{\omega}{\omega_2} = \frac{OI}{OR} . \quad [9]$$

Resulta, entonces, que las magnitudes OR y OT son proporcionales a las velocidades angulares ω_1 y ω_2 , y, por consiguiente, la diagonal del paralelogramo construído sobre ellas no sólo da la dirección del eje resultante, sino también la magnitud de la velocidad angular resultante, en la misma escala.

Se ve así que se puede representar la velocidad angular por un vector coincidente con el eje de rotación y de longitud igual, en una escala dada, a su valor. Eligiéremos como sentido positivo aquel en que progresa un tirabuzón que gira en el mismo sentido que el cuerpo.

Las velocidades angulares se componen, por lo tanto, según la regla del paralelogramo. †

× 4. **Descomposición de una velocidad angular según tres ejes ortogonales.** — Recíprocamente, si un cuerpo gira en un instante dado con una velocidad angular ω al rededor de un eje fijo en el cuerpo, el movimiento puede considerarse como resultante de tres rotaciones simultáneas al rededor de tres ejes cualesquiera fijos en el cuerpo, que pasan por el punto fijo.

Si se indican con ω_1 , ω_2 y ω_3 las velocidades angulares al rededor de esos tres ejes, que supondremos ahora rectangulares, con ω la velocidad angular resultante y con λ , μ , ν los cosenos de los ángulos que forman el eje resultante con los ejes componentes, resultan, de la regla deducida, las relaciones:

$$\omega_1 = \lambda \omega \quad \omega_2 = \mu \omega \quad \omega_3 = \nu \omega . \quad [10]$$

× * 5. **El movimiento más general de un cuerpo rígido al rededor de un punto fijo. Cono rodante.** — Comencemos, como antes, con el movimiento de una figura plana en su plano. Fijemos para ello nuestra atención en las posiciones sucesivas de una recta AB de la figura sobre el plano; sabemos que se pasa de una posición a otra por una simple rotación al rededor de un punto común a ambas posiciones.

Es claro que el caso más general será aquel en que cada dos posiciones tengan un punto común diferente del que tienen otras dos posiciones cualesquiera.

Las rotaciones sucesivas se realizan, por lo tanto, al rededor de puntos diferentes de la figura, coincidentes, en el momento de la rotación, con un punto del plano.

Supongamos, por ejemplo (fig. 187), que la primer rotación se realizó al rededor del punto A del *cuerpo*, las siguientes al rededor de B , C , D , E , etc., respectivamente. Al comenzar la rotación, A coincide con el punto O del plano. Cuando la figura gira al rededor de B , aquel punto coincidirá, en virtud del movimiento anterior, con cierto punto O_1 del plano; cuando al rededor de C , ese punto coincidirá con el O_2 del plano, y así sucesivamente.

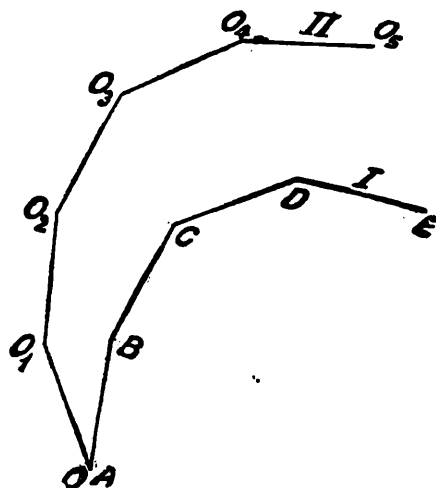


Fig. 187.

Como los cambios se verifican de una manera continua, los puntos A , B , C , D , ..., y los O , O_1 , O_2 , ..., deben determinar curvas continuas. El movimiento se puede, por lo tanto, representar por un movimiento de rodadura de una curva I fija en la figura, sobre una curva II fija en el plano.

Los puntos O , O_1 , O_2 , ..., son los *centros momentáneos de rotación*; se designan también con el nombre de *polos del movimiento*. La curva correspondiente en el plano se llama *curva polar*.

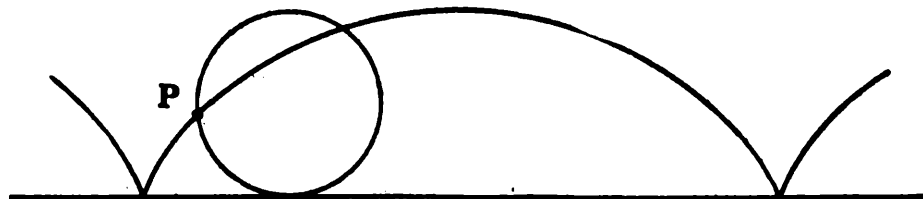


Fig. 188.

Son interesantes los movimientos de rodadura de un círculo sobre una recta o sobre un círculo trazado en el plano.

En el primer caso un punto P de la circunferencia describe una curva que recibe el nombre de *cicloide* (fig. 188).

Si un círculo rueda sobre otro puede hacerlo por fuera o por dentro. En el primer caso un punto P describe una curva que se denomina *epicicloide*, en el otro caso *hipocicloide*. En las figuras 189 *a* y *b* están representadas una *epicicloide* y una *hipocicloide*.

El centro de rotación es en todo momento el punto de contacto de las curvas.

Las mismas consideraciones valen para el movimiento de una figura esférica sobre una superficie esférica. El movimiento de un cuerpo rígido al rededor de un punto fijo se puede, por lo tanto, representar por el movimiento de rodadura de una curva fija sobre la esfera material sobre una curva fija en la superficie esférica inmóvil en el espacio.

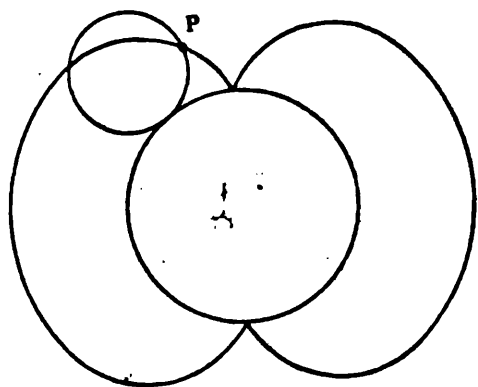


Fig. 189 a.

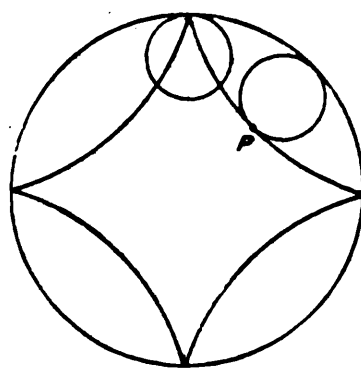


Fig. 189 b.

El eje al rededor del cual gira el cuerpo en cada instante es la recta que une al punto fijo del cuerpo con el punto de contacto de las curvas. Ese es el *eje momentáneo de rotación*, pues cambia con el tiempo de posición, en el cuerpo y en el espacio.

El movimiento más general de un cuerpo rígido al rededor de un punto fijo, se puede entonces representar por la rodadura de un cono fijo en el cuerpo, sobre un cono fijo en el espacio. El vértice de ambos es el punto fijo; las generatrices son las rectas que unen a este punto con los puntos de las respectivas figuras trazadas sobre la esfera material y sobre la superficie esférica inmóvil; la generatriz de contacto es, en todo momento, el eje de rotación.

¶ 6. **Movimiento de un cuerpo libre.** — Un cuerpo rígido que puede moverse con entera libertad puede pasar de una posición a otra infinitamente próxima por una traslación del centro de gravedad y una rotación a su rededor, como resulta evidente del estudio anterior. La traslación y la rotación pueden cumplirse, en virtud del principio de superposición de pequeños movimientos, en cualquier orden o simultáneamente. El movimiento resultante se llama *helicoidal*.

¶ 7. **Grados de libertad.** — Un cuerpo libre puede trasladarse según tres direcciones ortogonales en el espacio o cumplir rotaciones al rededor de ellas. Se dice, por esto, que un cuerpo rígido tiene *seis grados de libertad*.

Si uno de sus puntos es fijo, sólo puede cumplir rotaciones al rededor de tres ejes ortogonales que pasan por él; los grados de libertad son entonces tres.

El número de grados de libertad representa a la vez el número de magnitudes independientes que se requieren para determinar la posición del cuerpo; así, por ejemplo, si el cuerpo tiene un punto fijo, es necesario conocer los tres ángulos de Euler φ, ψ, θ . Si el cuerpo es enteramente libre sería necesario conocer, además, las tres coordenadas del centro de gravedad, esto es, seis magnitudes.

Un cuerpo con un eje fijo no puede cumplir otro movimiento que girar a su rededor; su posición queda determinada conociendo el ángulo descrito por uno de sus puntos; el cuerpo tiene un grado de libertad. Si además pudiese deslizarse sobre el eje, sus grados de libertad serían dos.

CAPITULO XII

EL MOVIMIENTO DE UN CUERPO RÍGIDO AL REDEDOR DE UN PUNTO. ELEMENTOS DE LA TEORÍA DEL GIRÓSCOPO Y DE SUS APLICACIONES

A. — EL MOVIMIENTO DEL GIRÓSCOPO SIMÉTRICO. CASO EN QUE SU VELOCIDAD DE ROTACIÓN PROPIA ES MUY GRANDE

1. **Cinemática del movimiento del giróscopo simétrico. Estudio de la precesión regular.** — Observemos, primeramente, las características que ofrece el movimiento de un giróscopo al rededor de un punto fijo, bajo la acción de una cupla. Supongamos que se le

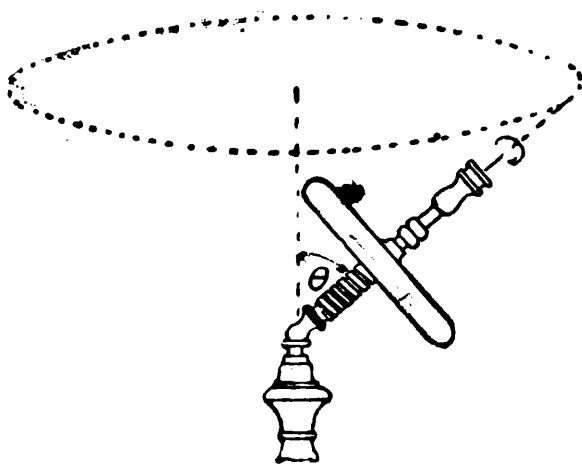


Fig. 190.

imprime un movimiento rápido de rotación al rededor del eje y que luego se apoya su extremo, que termina en una punta delgada, de un soporte (fig. 190). Queda así sometido a la acción continua de la gravedad, que determina un momento al rededor del punto fijo y en el plano vertical que contiene el eje del giróscopo.

Se observa que, para valores grandes de la velocidad de rotación, el giróscopo se mueve con movimiento casi uniforme al rededor del punto fijo, de tal manera que el eje de rotación propia mantiene una inclinación muy aproximadamente invariable, es decir, los puntos del eje se mueven con velocidades constantes sobre círculos cuyos centros se encuentran sobre la vertical que pasa por el punto fijo. Este movimiento se designa con el nombre de *precesión* y aquella vertical se llama *eje de precesión*.

Para velocidades pequeñas de rotación, la inclinación θ oscila, a

ojos vista, periódicamente, entre dos valores extremos y la velocidad de la precesión no es constante. El movimiento consistió en una giración al rededor del eje vertical que pasa por el punto fijo, movimiento de precesión, y en un movimiento periódico del eje en el plano vertical que pasa por aquella línea. A este movimiento de cabeceo se le designa con el nombre de *nutación*.

Si, como se ha supuesto implícitamente, el centro de gravedad del giróscopo está situado encima del punto fijo, el sentido de giración del movimiento de precesión es el mismo que el de la rotación propia. Si, por el contrario, el punto fijo está por encima del centro de gravedad, lo que se consigue con un giróscopo como el que indica la figura 191 o suspendiendo uno común de un hilo, los sentidos de giración de aquellos movimientos son opuestos.

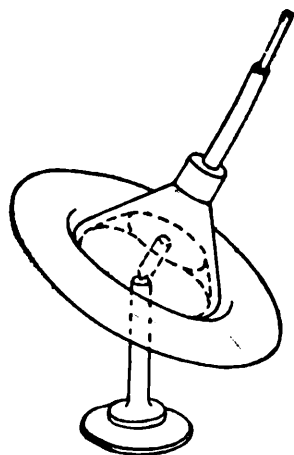


Fig. 191.

Supongamos que el movimiento es tal que la inclinación θ y, por lo tanto, la velocidad del movimiento de precesión son invariables. Se dice, en ese caso ideal, que la precesión es *regular*, siendo nuestro objeto, por el momento, su estudio cinemático.

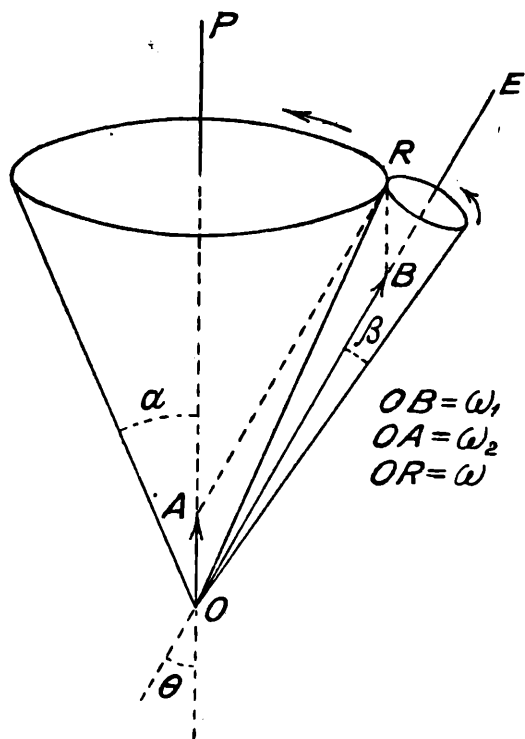


Fig. 192.

El eje instantáneo de rotación se encuentra componiendo en cada instante las velocidades angulares de los movimientos existentes. En la figura 192) OE es la dirección, en un instante determinado, del eje del giróscopo; la velocidad angular ω_1 de la rotación propia está representada por el vector OB . El otro movimiento, que es el de precesión, es una rotación al rededor de OP , cuya velocidad angular ω_2 está representada por el vector OA .

El eje instantáneo de rotación es el vector resultante de OA y OB , es decir, el OR . Como los dos movimientos, según se ha admitido, tienen velocidad angular constante, es claro que el vector OR no sólo conserva su valor absoluto sino su posición respecto a OP , esto es, su extremo describirá un

círculo horizontal en el espacio cuyo centro está sobre esa recta. Es, además, evidente que las posiciones sucesivas del eje instantáneo de rotación OR , a través de la materia del giróscopo, o de su extensión imaginada, forma un cono recto fijo, cuyo eje es el del giróscopo. El movimiento se concibe entonces como el rodar de este cono fijo en el cuerpo sobre un cono fijo en el espacio. La figura 192

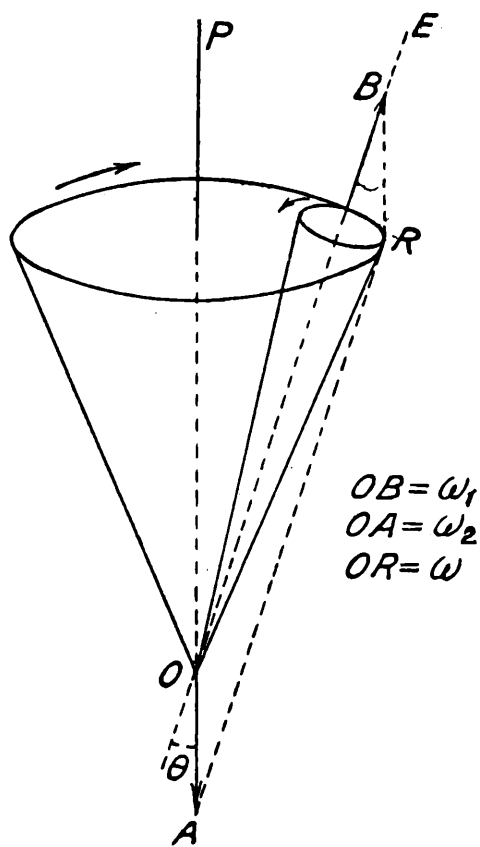


Fig. 193.

se refiere a la precesión *progresiva* y la 193 a la precesión *retrograda*. En el primer caso las velocidades tienen el mismo sentido, resultando el cono móvil exterior al cono fijo.

El segundo caso se produce en un giróscopo como el de la figura 191; es decir, cuando el centro de gravedad está por debajo del punto fijo, las velocidades angulares son opuestas y el cono rodante es exterior.

Si se indica con ω la velocidad angular resultante y con θ el ángulo de inclinación del giróscopo resulta del paralelogramo $OARB$ la expresión

$$\omega = \omega_1^2 + \omega_2^2 + 2 \omega_1 \omega_2 \cos \theta. \quad [1]$$

Si α y β son las aberturas respectivas de los conos fijo y móvil, de los triángulos AOR y ORB se deducen las relaciones

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \theta} \quad [2]$$

$$\frac{\omega_2}{\omega} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \theta},$$

de donde

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta}. \quad [3]$$

Como la velocidad ω_2 de la precesión es siempre pequeña respecto a la velocidad ω_1 de la rotación propia, como se verá más adelante, resulta, de la relación [3], que $\text{sen } \beta$, y por lo tanto β , debe ser muy pequeño con respecto a α y en sí mismo.

2. **La precesión de la tierra.** — Debido al achatamiento de la tierra las fuerzas de atracción de la luna y del sol no pasan por el centro de gravedad de aquélla. Resulta así la existencia de un momento exterior con respecto al centro de gravedad. Esto puede entenderse, en seguida, considerando la acción de uno cualquiera de los cuerpos celestes mencionados. En la figura 194 se ha dibujado la tierra, simétricamente abultada con respecto a su eje. Es claro que la atracción del sol o de la luna sobre la parte interna esférica, pasa por el centro de masa, no así, en cambio, las resultantes de las fuerzas de atracción sobre las partes sombreadas, pues la atracción sobre la porción *A* es mayor que sobre la *B* y de aquí el origen del momento exterior a que nos hemos referido.

El momento resultante de las atracciones de la luna y del sol determinan sobre la tierra un movimiento de precesión tal que su eje describe en 26.000 años, al rededor de la normal a la eclíptica, un cono, bajo la inclinación de $23^{\circ}5'$. El movimiento es retrógrado.

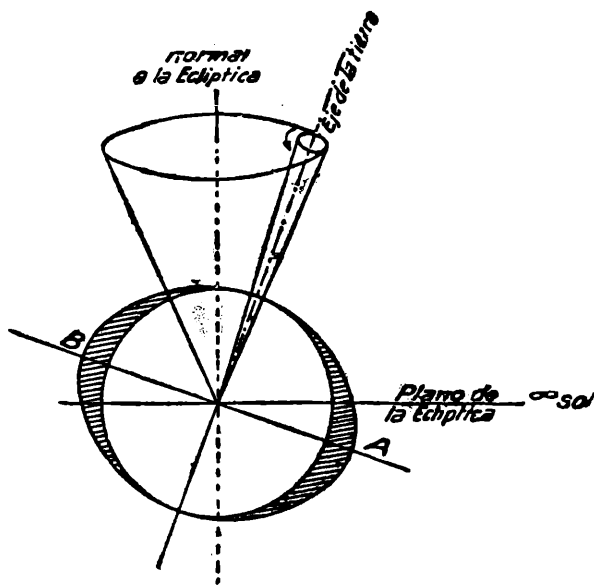


Fig. 194.

La abertura del cono fijo a la tierra puede calcularse por las relaciones del párrafo anterior. Calcularemos el radio del círculo que resulta de la intersección de ese cono con la superficie terrestre. Si se toma como unidad de tiempo el día, se tiene:

$$\omega_1 = 2\pi \quad ; \quad \omega_2 = \frac{-2\pi}{365 \cdot 26000} \quad [4]$$

y por lo tanto

$$\text{sen } \beta = - \frac{\text{sen } \alpha}{365 \cdot 26000} \quad [5]$$

Por la pequeñez de β puede tomarse en lugar del seno el arco; además en lugar de $\alpha + \beta$, que es el ángulo que forma con el eje de precesión el eje instantáneo de rotación, en el caso del movimiento retrógrado, puede tomarse α . El cono fijo en el espacio es, entonces, muy aproximadamente, de una abertura de $23^{\circ}5'$. Si es R el radio de la

tierra, el radio r del círculo que determina sobre la superficie el cono fijo será

$$r = R \beta = \frac{R \operatorname{sen} \alpha}{365 \cdot 26000} \quad [6]$$

Calculando en números redondos resulta

$$r = 27 \text{ cm.}$$

El movimiento consiste en la rodadura de este cono de abertura pequeña sobre un cono fijo en el espacio de abertura de $23^\circ 5'$.

La tierra cumple también un movimiento de nutación cuyo período es de 19 años.

3. Influencia del número de grados de libertad en el movimiento del giróscopo. — En el caso considerado anteriormente, el

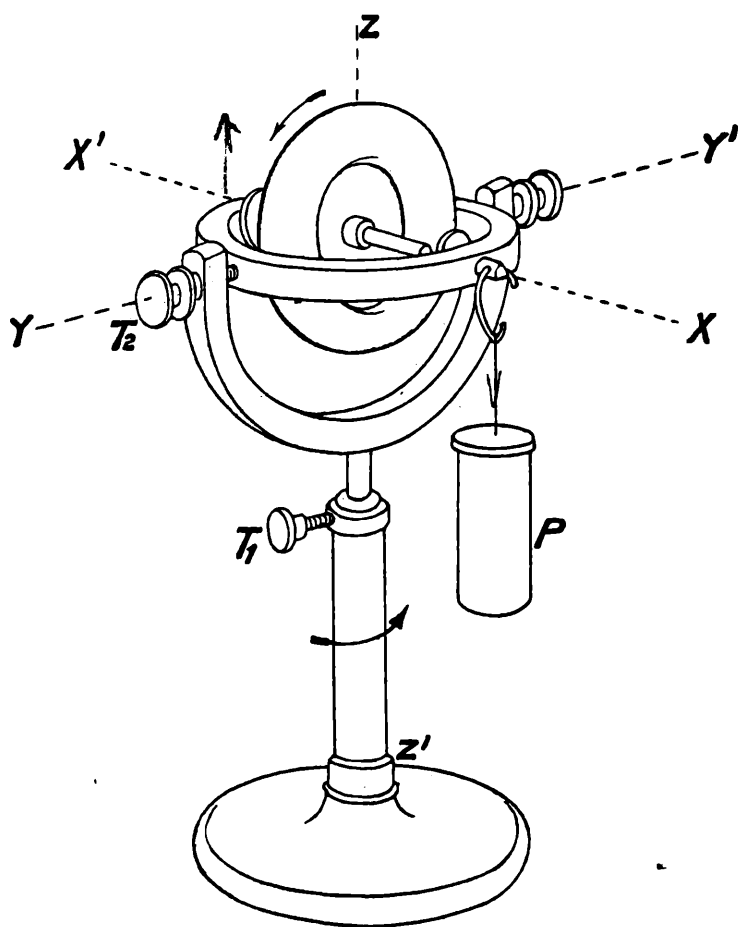


Fig. 195.

número de grados de libertad eran tres, puesto que en todo instante el giróscopo podía cumplir rotaciones al rededor de tres ejes ortogonales pasantes por el punto fijo y uno de los cuales era su eje mismo. Un montaje que permite observar racionalmente el movimiento es el que indica la fig. 195. Si los tornillos de presión T_1 y T_2 están sin ajustar, el giróscopo tiene tres grados de libertad, pues puede girar al rededor de los ejes xx' , yy' y zz' . Para

que esta última giración pueda producirse, el eje vertical termina en una punta. Si se fija el tornillo T_1 restan dos grados de libertad, lo mismo si se ajustan los T_2 y se deja libre el T_1 .

Haciendo girar el giróscopo *rápidamente* en el sentido indicado en la figura, dejando primeramente los tres grados de libertad y colgando un peso P en el extremo de su eje, que coincide con xx' , de manera que actúe constantemente un momento cuyo eje sea en todo instante yy' , se observa que el giróscopo gira al rededor del eje de las zz' en el sentido de la flecha, con velocidad angular constante. Se trata, en realidad, de un movimiento de precesión bajo la inclinación de 90° . El eje del giróscopo — eje xx' — permanece, para velocidades grandes de la rotación propia, siempre en el plano horizontal, si se prescinde de las pequeñas oscilaciones de la nutación; para velocidades pequeñas sufre inclinaciones periódicas apreciables, según ya se dijo en el número 1.

En cambio, si se fija el tornillo T_1 , con lo que se suprime un grado de libertad, cualquiera que sea la velocidad de rotación del giróscopo al rededor de su eje, al colgar el peso en el extremo del eje xx' , el giróscopo se inclina, tanto como lo permite la instalación.

4. Explicación mecánica objetiva de los fenómenos anteriores. Cupla de inercia o acción giroscópica. — A fin de entender

claramente los fenómenos, hagamos una nueva experiencia tomando ahora el eje del giróscopo (en este caso, una rueda semejante a las de bicicleta, y con una cinta de plomo en lugar de cámara de aire) con las dos manos, en la forma que indica la figura 196. Gire la rueda en el sentido indicado por la flecha. Si desplazando A y B en dirección de las f se la hace girar al rededor del eje zz' , en el sentido que indica la flecha 2, de suerte que su eje se conserve en el plano xy , se observa que el

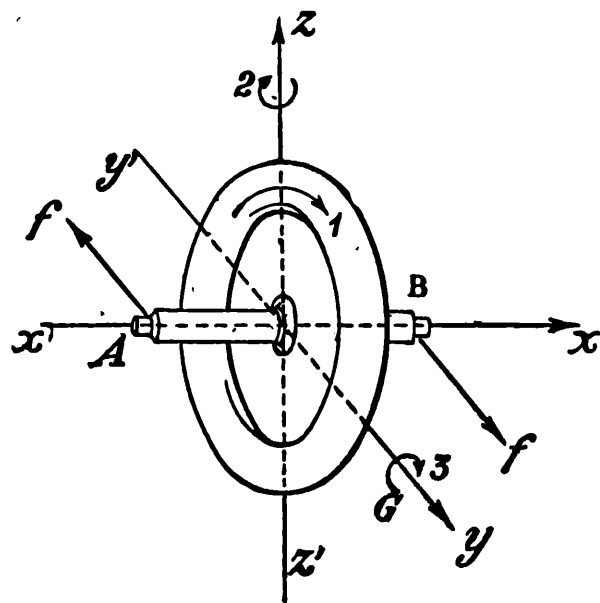


Fig. 196.

giróscopo no opone ninguna resistencia a esa rotación al rededor de zz' , y que tiende a girar alrededor del eje yy' en el sentido que indica la flecha (3), de tal manera que para mantener al eje, durante su desplazamiento, en el plano yx hay que contrarrestar la acción de una cupla G que tiende a hacerlo girar al rededor del eje yy' , es decir, es menester aplicar una cupla igual y de sentido contrario que G .

La cupla o momento que tiende a hacer girar al giróscopo al rededor de un eje normal al eje de rotación propia y situado en el plano del desplazamiento de éste, se designa con el nombre de *cupla de inercia* o *momento giroscópico*. Esta cupla actúa, en todo momento, al rededor de una dirección definida del espacio, con la que coincide, en el instante considerado, uno de los ejes ecuatoriales del giróscopo. En la figura, esa dirección es, para el caso supuesto, yy' .

El momento giroscópico es tal que tiende a situar el eje de la rotación propia de manera que su dirección y el sentido de ésta coincidan con el de la rotación agregada.

La rotación agregada es la que indica la flecha (2) y el momento G tiende a hacer girar el giróscopo al rededor de yy' . Bajo su acción el eje AB del giróscopo llegaría a coincidir con zz' y el sentido de su rotación coincidiría con el de la flecha (2).

Este resultado podía inferirse del primer experimento del número anterior, pues si no hay nutación, esto es, si el eje se mueve en el plano horizontal, como hemos hecho con la rueda, es evidente que el mantenimiento del eje en ese plano requiere la acción permanente de un momento de *reacción* o *giroscópico* igual y opuesto al momento exterior que determina el peso.

Los hechos que preceden hacen ostensible las siguientes consecuencias de la teoría (1): Que en el caso del giróscopo simétrico que

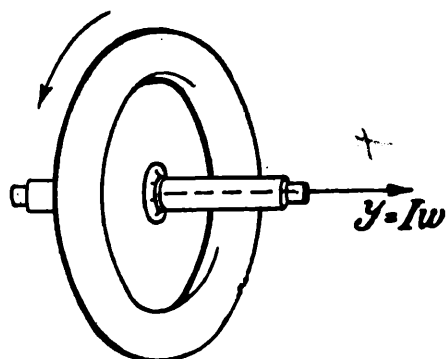


Fig. 197.

gira al rededor de su eje con gran velocidad, como ocurre siempre en las aplicaciones, los momentos giroscópicos se originan por los cambios de dirección que experimenta el vector impulso propio

$$\mathcal{J} = I \omega,$$

donde I es el momento de inercia con respecto al eje y ω la velocidad angular a su rededor y cuya dirección coincide

con el mismo eje, figura 197. (Se elige como sentido positivo aquel en que progresa un tirabuzón que gira en el sentido de la rotación.) Los valores de esos momentos se deducen de la ecuación

$$\mathcal{M} = \frac{d}{dt} (I \omega), \quad [7]$$

(1) Quien desee ahondar en este asunto, debe estudiar el apartado B de este capítulo.

ya deducida en el párrafo 2 del capítulo IX. Aquí tiene una significación más amplia, que es ésta: si en el instante t el vector tiene la dirección OA (fig. 197 *a*), y en el $t + dt$ la OB , el vector momento de la cupla que actúa sobre el giróscopo en el instante t es paralelo a AB y su magnitud está dada por el cociente de dividir AB por dt .

Calculemos, por ejemplo, el momento giroscópico correspondiente al experimento de la figura 196.

Si se gira el giróscopo al rededor del eje z , con la velocidad angular Ω , en el sentido de la flecha (2) (fig. 198), manteniéndolo en el plano xy , se produce una variación del impulso que se calcula, de acuerdo con lo dicho más arriba, de este modo: si en el tiempo dt el eje pasa de la posición OA a la posición OB , la variación del impulso es $AB = OB'$ siendo

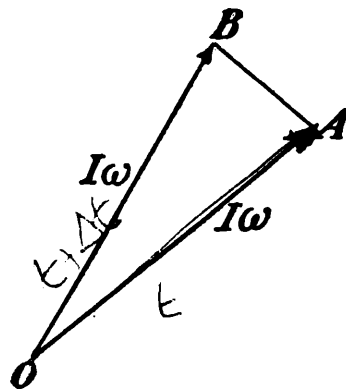


Fig. 197 *a*.

$$OB' = I\omega \cdot d\psi = I\omega \Omega dt, \quad [8]$$

pues es

$$d\psi = \Omega dt. \quad [9]$$

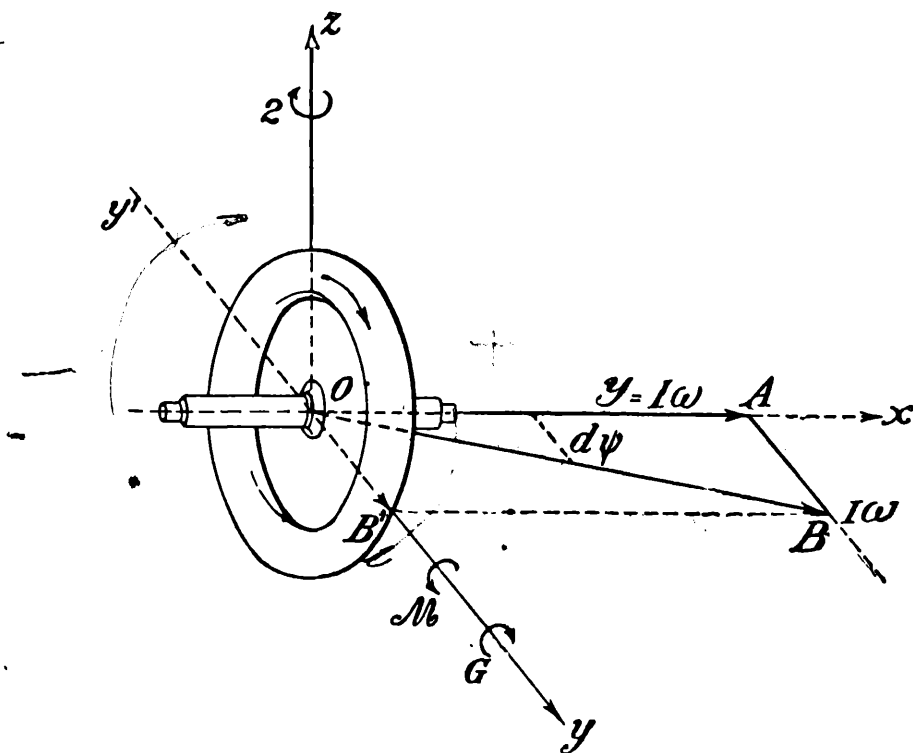


Fig. 198.

La variación en la unidad de tiempo es

$$\mathcal{M} = I\omega \Omega, \quad [10]$$

donde \mathcal{M} representa el momento que es menester aplicar para mover el gir6scopo de la manera indicada, o, en otras palabras, \mathcal{M} es el momento con que se contrarresta la *cupla girosc6pica* G , es decir el valor de G es

$$G = - I \omega \Omega \quad [11]$$

o tambi6n

$$G = - I \omega \frac{d\psi}{dt}, \quad [12]$$

donde el sentido resulta de la regla antes establecida.

5. **Estabilizaci6n por medio del gir6scopo.** — Con los momentos girosc6picos podremos ahora explicar, en forma objetiva, los fen6menos del p6rrafo 3 y mostrar c6mo acciona un gir6scopo estabilizador. En la figura 199 se ha dibujado 6nicamente el disco, a fin de hacer m6s

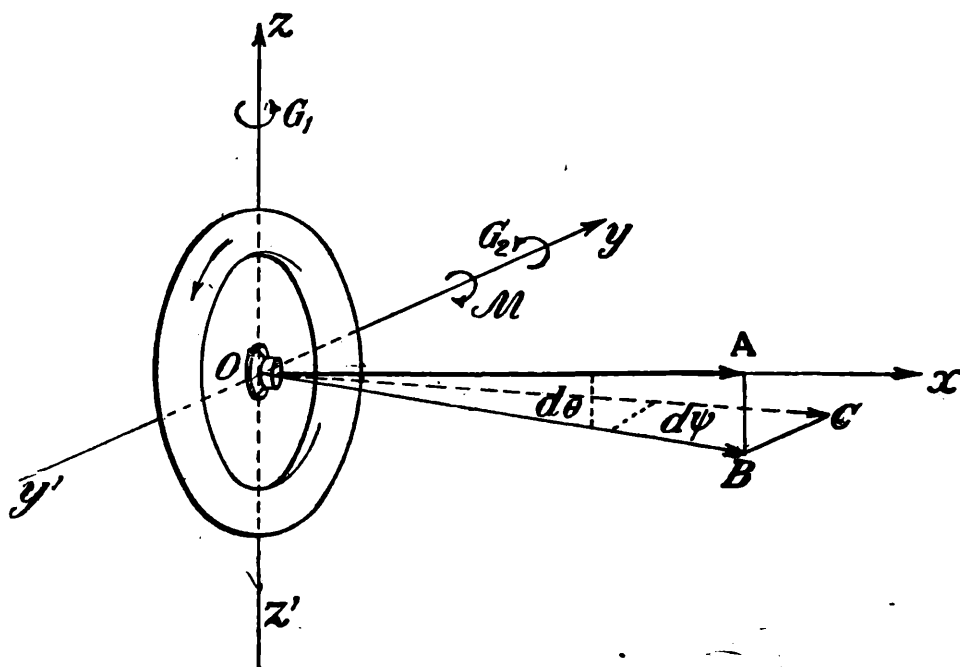


Fig. 199.

clara la explicaci6n, pero consid6rese siempre la existencia del peso P en el extremo del eje, peso que determina el momento \mathcal{M} al rededor de yy' .

La acci6n de una fuerza sobre un cuerpo no depende, de acuerdo con el segundo principio de la din6mica, del estado de movimiento en que se encuentra; si existen o si se despiertan otras fuerzas, los efectos se superponen. Bajo la acci6n del momento exterior \mathcal{M} que determina la fuerza P , el gir6scopo comienza a girar al rededor del eje yy' ; en un intervalo de tiempo infinitamente peque1o el extremo

del vector impulso pasa de la posición A a la posición B lo cual origina un momento giroscópico

$$G_1 = I \omega \frac{d\theta}{dt} \quad [13]$$

al rededor del eje zz' . Si el giróscopo no está privado de girar al rededor de ese eje, la giración se produce, ya que la cupla G_1 actúa como si el momento \mathcal{M} no existiese. El extremo del vector impulso pasa así, en un intervalo de tiempo muy pequeño, de B a C , lo que origina una cupla de eje paralelo al yy' de valor

$$G_2 = I \omega \frac{d\psi}{dt} \quad [14]$$

y de sentido opuesto a la cupla exterior \mathcal{M} . Se hace así notorio que si el giróscopo no puede moverse al rededor del eje zz' no se origina el momento giroscópico G_2 y por lo tanto la cupla exterior \mathcal{M} inclina más y más al eje.

Se tienen así los momentos que actúan, en todo instante, al rededor de los distintos ejes.

* DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA DEL MOVIMIENTO. — Las ecuaciones de movimiento se obtienen escribiendo que la suma de los momentos con respecto a uno cualquiera de esos ejes, que son ejes libres, es igual al momento de inercia con respecto a él por la aceleración del movimiento de rotación a su rededor. Así resulta

$$G_2 - \mathcal{M} = -J \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \text{rotación al rededor de } yy' \quad [15]$$

$$G_1 = J \frac{d^2\psi}{dt^2} \quad \text{rotación al rededor de } zz', \quad [16]$$

o, introduciendo los valores de G_1 y G_2 ,

$$\mathcal{M} - I \omega \frac{d\psi}{dt} = J \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad [17]$$

$$I \omega \frac{d\theta}{dt} = J \frac{d^2\psi}{dt^2} \quad [18]$$

De la [18] se obtiene por integración

$$I \omega \theta = J \frac{d \psi}{dt} \quad [19]$$

y substituyendo en la [17] el valor de $\frac{d \psi}{dt}$ que da esta última, resulta

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{(I \omega)^2}{J} \theta - \mathcal{M} = 0. \quad [20]$$

La solución de esta ecuación, cuyo tipo conocemos es, suponiendo a \mathcal{M} constante:

$$\theta = \frac{J \mathcal{M}}{(I \omega)^2} + A \cos \frac{I \omega}{J} t + B \operatorname{sen} \frac{I \omega}{J} t, \quad [21]$$

donde las constantes A y B se calculan por las condiciones iniciales.

Hasta ahora se ha medido a θ a partir del eje vertical, z en este caso; a fin de dar una forma más sencilla a la solución, lo mediremos a partir del eje horizontal x .

Supongamos, lo cual puede realizarse fácilmente, que en el momento inicial, esto es, para $t = 0$, tanto θ como $\frac{d \theta}{dt}$ sean nulos; así resulta

$$A = - \frac{J \mathcal{M}}{(I \omega)^2} \quad ; \quad B = 0 \quad [22]$$

y, por lo tanto,

$$\theta = \frac{J \mathcal{M}}{(I \omega)^2} \left(1 - \cos \frac{I \omega}{J} t \right). \quad [23]$$

Esta relación enseña que el eje de figura oscila entre

$$\theta_0 = 0 \quad \text{para} \quad \frac{I \omega}{J} t = 0$$

y

$$\theta_1 = \frac{2J \mathcal{M}}{(I \omega)^2} \quad \text{para} \quad \frac{I \omega}{J} t = (2n + 1) \pi \quad [24]$$

si $n = 0, 1, 2, \dots$

Como es notorio, θ_1 es muy pequeño si $I \omega$ es muy grande respecto a $J \mathcal{M}$.

El tiempo de una oscilación del movimiento de nutación es, por la [23]:

$$T = 2 \pi \frac{J}{I \omega}, \quad [25]$$

es decir, las oscilaciones son, para valores grandes del impulso propio, de muy pequeña amplitud y muy rápidas.

Poniendo el valor de θ en la [18] se obtiene, por simple integración, para el movimiento de precesión, teniendo presente que para $t = 0$ es $\psi = 0$:

$$\psi = \frac{\mathcal{M}}{I \omega} t - \frac{\mathcal{M} J}{(I \omega)^2} \operatorname{sen} \frac{I \omega}{J} t. \quad [26]$$

El movimiento de precesión consiste, entonces, en un movimiento progresivo continuo, representado por el primer término, al cual se le superponen oscilaciones de tanta menor amplitud cuanto mayor es el impulso propio $I \omega$.

El movimiento que hemos descrito es el de un giróscopo, para el caso particular en que la inclinación es de 90° . Además, se trata de una discusión tanto más rigurosa cuanto mayor es $I \omega$ (es decir es un caso de la técnica), pues en ese caso las variaciones de θ son muy pequeñas y se puede considerar a \mathcal{M} constante.

6. Acción de las fuerzas interiores. — Está claro ⁽¹⁾ que si sobre un giróscopo no actúa ningún momento exterior, su impulso se conserva invariado en magnitud y dirección. Por consiguiente, el eje de rotación de un giróscopo que pueda moverse sin roce al redor de un punto fijo, como ocurre en el giróscopo llamado de Bohnenberg, figura 200, conservará su dirección fija en el espacio. Esto ocurre, efectivamente, como puede comprobarse, girando, por ejemplo, el soporte.

Las deducciones anteriores son aplicables al caso de un sistema de cuerpos rígidos o a un cuerpo articulado, como un ser vivo por ejemplo.

Averiguemos cuál es la acción de las fuerzas interiores sobre un movimiento de rotación existente. Una modifica-

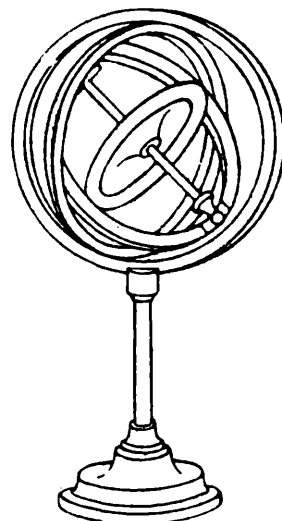


Fig. 200.

(1) Las ecuaciones generales que se establecen en el apartado B permiten la comprensión racional de lo que se dice en este párrafo.

ción del impulso no es posible pues esto sólo puede ser producido por una fuerza exterior. Cada una de las partes puede cumplir, entonces, bajo la acción de fuerzas interiores, sólo movimientos de rotación tales que la suma geométrica de las variaciones de los impulsos sea nula.

Dado que el momento de las fuerzas de gravedad con respecto al centro de masa es nulo y, que un cuerpo libre sólo puede girar al rededor de ejes que pasan por él, es evidente que un cuerpo que cae bajo la acción de aquellas fuerzas, un ser vivo por ejemplo, no puede alterar, por las acciones musculares, el valor del impulso correspondiente a una rotación inicial. Supongamos, para mayor sencillez, que la rotación se cumpla al rededor de un eje principal. Si I es el momento de inercia y ω la velocidad angular, el valor del impulso es

$$\mathcal{J} = I \omega, \quad [27]$$

el cual, por la ecuación

$$\mathcal{M} = \frac{d}{dt} (I \omega),$$

debe permanecer constante, ya que es $\mathcal{M} = 0$.

Un ser vivo puede aumentar o disminuir el valor del momento de inercia, estirándose o encogiéndose; determina con ello una disminución o un aumento de la velocidad angular. Así se explica el simple y el doble salto mortal y algunas de las posibilidades que tiene, por ejemplo, un gato para caer de pie.

Además, puede, girando parte de sus masas en un sentido, la parte de delante por ejemplo, producir giraciones de todo el cuerpo en sentido contrario.

En una silla dotada de un eje vertical de rotación, una persona sentada puede girar su cuerpo a voluntad de muchas maneras. Si toma una barra y enarbolándola sobre la cabeza la hace girar en un plano horizontal con la velocidad angular ω_1 , el cuerpo y la silla deben girar en sentido contrario con una velocidad angular ω_2 tal que en todo instante se cumpla la condición enunciada más arriba, donde la constante debe tener el valor cero, si el sistema estaba primitivamente en reposo.

Como todos los puntos del cuerpo y de la silla tienen la misma velocidad angular ω_2 y todos los de la barra tienen la misma velocidad ω_1 aquella expresión da:

$$I_1 \omega_1 + I_2 \omega_2 = 0, \quad [28]$$

donde I_1 e I_2 son los momentos de inercia de las partes mencionadas con respecto al eje. Como I_1 e I_2 son magnitudes esencialmente positivas, es claro que ω_1 y ω_2 son rotaciones de diferente sentido, siendo, por otra parte, las velocidades angulares con respecto a un sistema fijo; son las velocidades que obtendría un experimentador que, de pie sobre el piso, con un dispositivo conveniente y un taquímetro las midiese.

La experiencia resulta en forma notable si la persona empuña el eje de una rueda (figura 201) que se hace girar a gran velocidad manteniéndola en un plano vertical. Si se la lleva a una posición cualquiera distinta, todo el sistema gira rápidamente en sentido contrario, pues se introduce una componente de rotación al rededor del eje; si el sentido de giración de la rueda es el que muestra la figura, al pasar de la posición vertical de su plano a la posición en que aparece en el dibujo, todo el sistema gira en el sentido que muestra la flecha f .

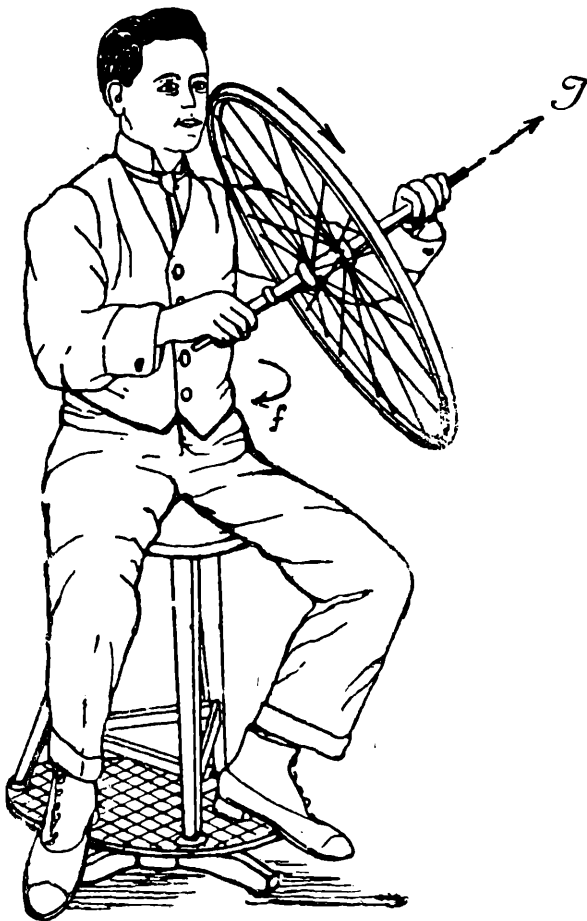


Fig 201.

De la misma manera, un remero, de pie sobre el bote, puede hacerlo girar a voluntad, empuñando un remo por el extremo y haciéndolo girar sobre la cabeza en uno u otro sentido.

Si una persona se encuentra sobre un piso completamente pulimentado y la ausencia de roce es total, de modo que no existe ninguna fuerza exterior aparte de la gravedad, solo podrá caer o girar a voluntad alrededor de la vertical que pasa por el centro de gravedad. La marcha es posible en virtud del roce única y exclusivamente.

Cuando se hace un disparo con un cañón, el rayado del mismo obliga al proyectil, por la acción de la pólvora, a girar en un sentido y es claro que el cañón debe girar en sentido contrario, pero siendo su masa muchísimo más grande que la de aquel, su velocidad de rotación será en todo instante muchísimo menor.

7. Aplicaciones. — 1ª La dirección de los torpedos es mantenida por medio de un giróscopo que gira al rededor de un eje normal al eje de simetría (fig. 202).

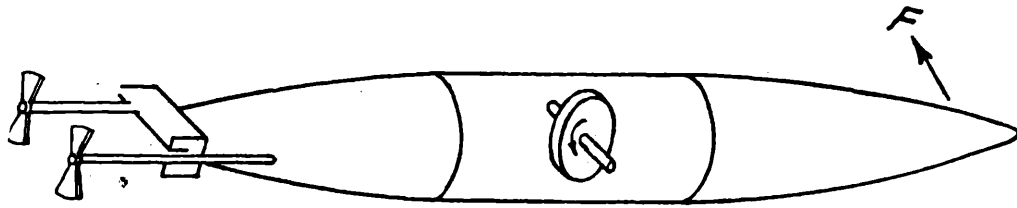


Fig. 202.

El giróscopo debe tener, como se sabe, tres grados de libertad, uno de los cuales existe, en este caso, por la posibilidad que tiene el torpedo de girar bajo la acción de cuplas exteriores, provenientes del movimiento del agua, al rededor de un eje vertical que pasa por el centro de gravedad.

El giróscopo está fijo al cuerpo del torpedo por el eje zz' (fig. 203), es decir por el anillo exterior. Si actúa una fuerza lateral F , el giróscopo gira al rededor del eje zz' , lo cual engendra una cupla giroscópica al rededor de yy' y el giróscopo inicia un movimiento de rotación al rededor de ese eje, lo que produce un momento giroscópico al rededor de zz' , de sentido opuesto al momento exterior inicial y lo contrarresta.

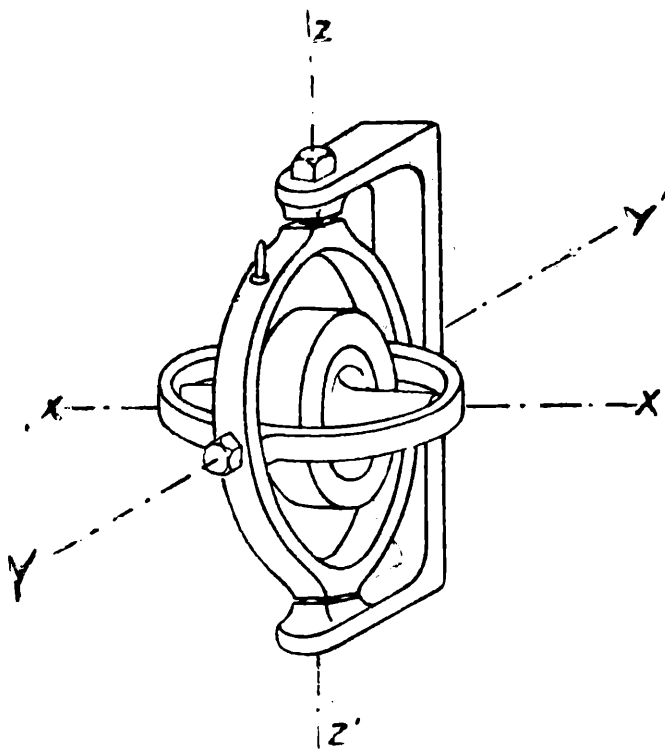


Fig. 203.

Esos fenómenos pueden hacerse ostensibles con la instalación representada en la figura 204. Si, presionando lateralmente en un punto P , se aplica un momento de eje paralelo al eje de las z , la suspensión se desplaza paralelamente a sí misma, pero no cambia de orientación, siempre que el giróscopo esté animado de un rápido movimiento de rotación y pueda girar al rededor de las y .

Si, en cambio, mediante una pieza adecuada se unen rígidamente los dos anillos del dispositivo de Cardani, con lo que la posibilidad

de la giración al rededor de las y desaparece, es suficiente la presión más insignificante para que las barras de la suspensión cambien de orientación.

Por el mismo fenómeno giroscópico se obtiene la estabilización en el monorriel y se evitan las oscilaciones transversales de los navíos, o mejor dicho, se amortiguan muchísimo. Uno de los grados de libertad está ligado al navío.

2ª En las armas de fuego, el rayado del tubo comunica al proyectil un rápido movimiento de rotación, el cual en los cañones alcanza a cien vueltas por

segundo y en los fusiles hasta más de tres mil. El movimiento del proyectil en su marcha a través del aire es el siguiente, si definimos como trayectoria la sucesión de las posiciones ocupadas por el centro de gravedad.

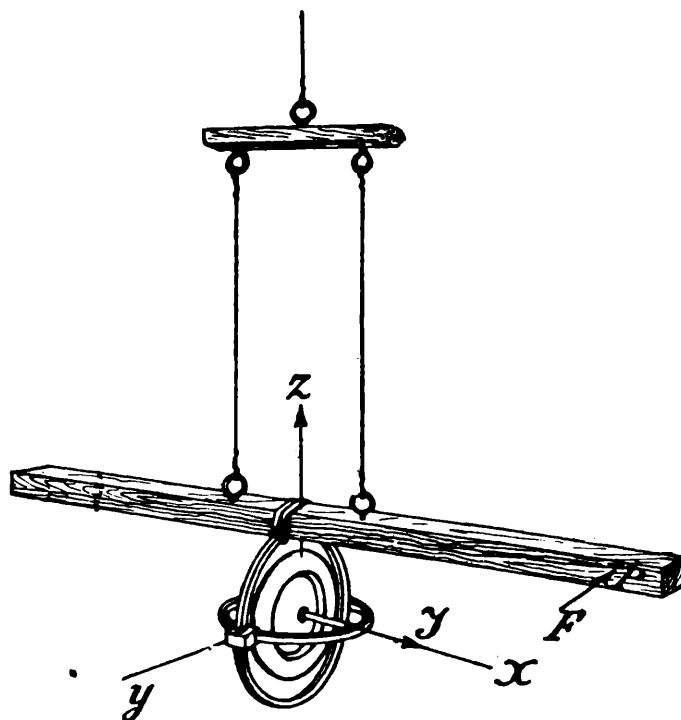


Fig. 204.

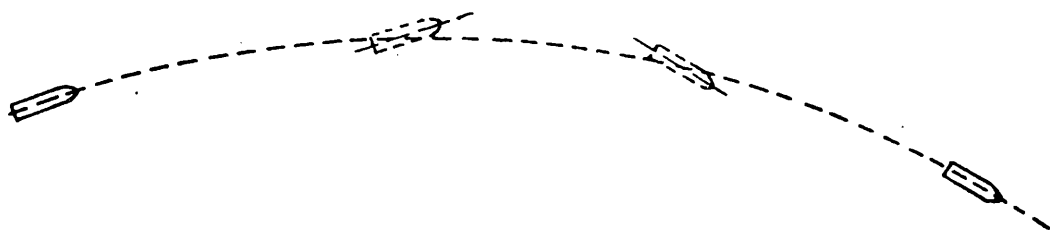


Fig. 205.

En la primera parte de ella, el eje del proyectil describe un cono, cuyo eje es tangente a la trayectoria; luego, hacia la mitad de la carrera, se sitúa por sí mismo en la dirección de la tangente a la trayectoria, la cual se desvía, por otra parte, hacia la derecha o hacia la izquierda, según que la rotación del proyectil sea en uno u otro sentido, respectivamente.

La explicación de estos hechos requiere, además de los conocimientos del giróscopo, que ya poseemos, algunos relativos a la aerodinámica, razón por la cual postergamos este problema para más adelante.

La marcha del proyectil será entonces la que indica la figura 205 y no la indicada por la figura 206. Podemos, pues, decir que un buen proyectil cae siempre de punta.



Fig. 206.

8. **Otros experimentos y aplicaciones.** — 1° Si se fija el tornillo T_1 del giróscopo de la figura 195 y tomándolo con la mano en la forma que indica la figura 207 se le hace girar en el sentido que muestra la flecha, el giróscopo comienza a moverse al rededor del eje horizontal hasta que el eje de la rotación propia coincide con el eje de la rotación agregada, esto es, con la vertical. Eso se explica teniendo en

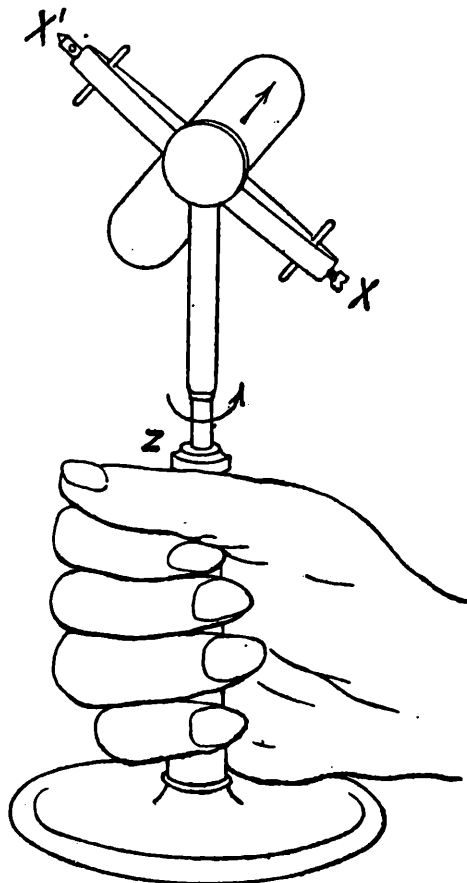


Fig. 207.

cuenta que para la giración agregada, esto es en el ángulo α (fig. 208), el impulso propio pasa de la dirección OA a la OB ; su variación es AB lo que corresponde a una cupla giroscópica que mueve el giróscopo en la forma descrita.

Si se continúa la giración en el mismo sentido, no se produce ninguna modificación, es decir, el equilibrio es estable.

Si se gira, en cambio, en sentido contrario, la falta menor de coincidencia entre el eje de giración propia y el eje de la giración que producimos con la mano será suficiente para que el eje del giróscopo gire en 180° , lo que significa que el equilibrio es inestable. El fenómeno se explica fácilmente,

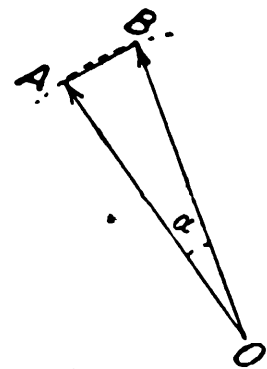


Fig. 208.

teniendo presente que la cupla giroscópica cambia de signo.

2° Si se tiene un giróscopo cuyo punto de suspensión (fig. 209) coincide exactamente con el centro de gravedad, pueden hacerse las

siguientes experiencias, cuya explicación fluye sin dificultad de las consideraciones anteriores.

Girando en el sentido indicado por la flecha, si se hace una tracción momentánea en un sentido, el eje se mueve en dirección normal a la tracción.

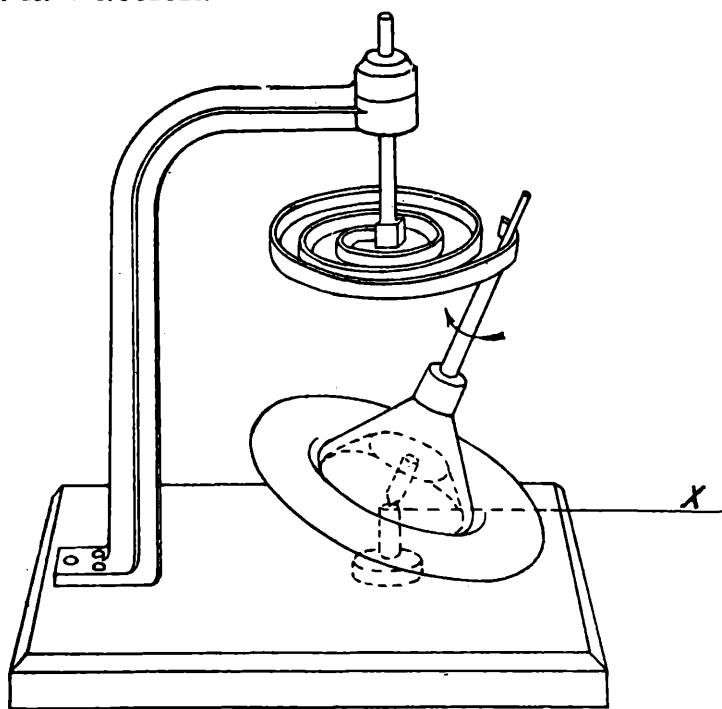


Fig. 209.

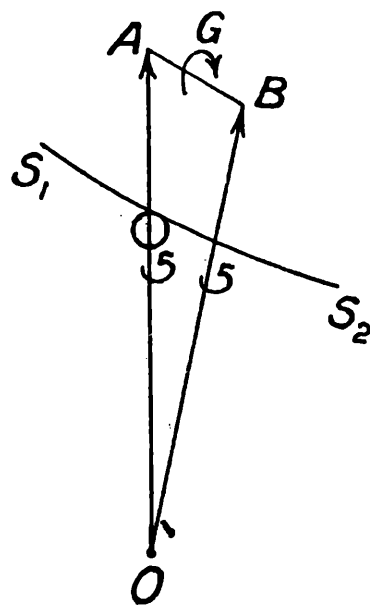


Fig. 210.

Si se apoya el eje sobre una cinta metálica, por ejemplo, el eje rodará, evidentemente, sobre esa guía, ejerciendo al mismo tiempo una presión sobre él, pues si $S_1 S_2$ (fig. 210) es la línea sobre la que rueda el eje del giróscopo y si OA es en magnitud y dirección el valor del impulso propio (O es el punto fijo, OA la dirección del eje) en un cierto instante, un momento después tendrá el mismo valor pero la dirección OB y la variación AB significa la existencia de un momento giroscópico, G , que se manifiesta en una presión del eje contra la guía. Esta presión es tanto mayor cuando mayor es el impulso propio.

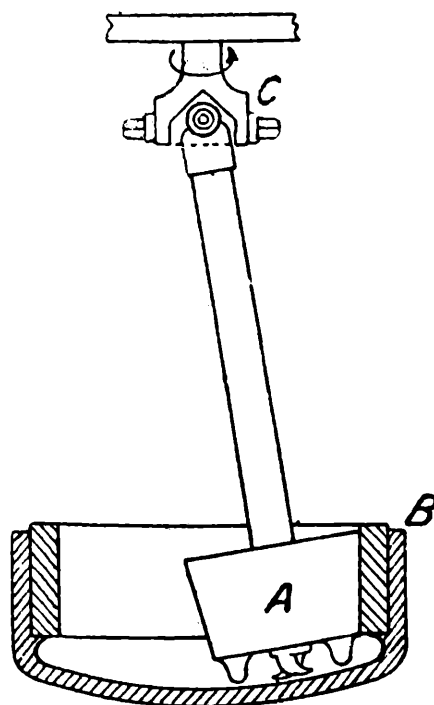


Fig. 211.

En esto se funda la moledora giroscópica de Griffín (fig. 211). Un disco macizo, A , cuyo eje pende de una junta universal, rueda a gran velocidad sobre el contorno interior de un recipiente, B , de fundición. La presión es así muy grande.

* B — LAS ECUACIONES GENERALES DEL MOVIMIENTO DE UN
CUERPO RÍGIDO AL REDEDOR DE UN PUNTO FIJO.
APLICACIÓN AL GIRÓSCOPO SIMÉTRICO

9. **Las ecuaciones de movimiento.** — El movimiento de un cuerpo rígido al rededor de un punto fijo sólo puede ser producido por la acción de fuerzas que tengan con respecto a ese punto un momento diferente de cero.

A fin de establecer las ecuaciones, se puede imaginar al cuerpo descompuesto en elementos infinitamente pequeños de masa m y considerar el movimiento de cada uno de ellos con respecto a un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales en el espacio cuyo origen coincida con el punto fijo, que indicaremos con O .

Por el segundo principio de la dinámica, la fuerza exterior aplicada en una dirección dada, sobre un punto material, es igual a la variación que experimenta en el tiempo la componente, según esa dirección, de su cantidad de movimiento. El sistema de coordenadas de referencia debe estar fijo en el espacio.

Entre las fuerzas exteriores a un elemento de masa m es menester contar también a las fuerzas provenientes de la acción de los elementos de masa que lo rodean. Se trata de fuerzas interiores con respecto al cuerpo, pero *exteriores* con respecto al elemento de masa que se considera. De esas fuerzas puede prescindirse, por cuanto no producen desplazamientos de los puntos del cuerpo, ya que éste se ha supuesto rígido.

Si en un instante dado la velocidad lineal de un elemento de masa m admite como componentes según los ejes a v_x , v_y , y v_z , las fuerzas exteriores debidas a acciones que provienen de *fuera del cuerpo* tienen por componentes, en el mismo instante, a las siguientes:

$$X = \frac{d}{dt} (mv_x) \quad , \quad Y = \frac{d}{dt} (mv_y) \quad , \quad Z = \frac{d}{dt} (mv_z) \quad [29]$$

y expresiones idénticas para las demás partículas.

Los momentos de esas fuerzas con respecto a los tres ejes se calculan según las fórmulas expuestas en la página 47. Sumando las componentes de los momentos de todas las partículas, resulta, para el momento según el eje de las x , momento que indicamos con \mathcal{M}_x ,

$$\Sigma (z Y - y Z) = \mathcal{M}_x = \Sigma m \left[z \frac{dv_y}{dt} - y \frac{dv_z}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \left\{ \Sigma m (zv_y - yv_z) \right\} \quad [30]$$

como es fácil deducir, efectuando la derivación indicada en el último miembro, y recordando que es

$$v_y = \frac{dy}{dt} \quad , \quad v_z = \frac{dz}{dt} .$$

De la misma manera resulta para los momentos según los otros ejes:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_y &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum m (xv_z - zv_x) \right\} \\ \mathcal{M}_z &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum m (yv_x - xv_y) \right\} . \end{aligned} \quad [30]$$

Antes se ha visto que los momentos gozan de las propiedades de los vectores y como tales consideramos a \mathcal{M}_x , \mathcal{M}_y y \mathcal{M}_z , representándolos por segmentos de rectas cuyas direcciones coinciden con los ejes x , y , z , respectivamente, y cuyos sentidos resultan aplicando la regla del tirabuzón. Por lo tanto, las magnitudes entre llaves deben ser también, necesariamente, vectores cuyas direcciones son las de los ejes, es decir, esas magnitudes pueden considerarse como las componentes \mathcal{I}_x , \mathcal{I}_y , \mathcal{I}_z , según los ejes de un vector \mathcal{I} .

Las magnitudes \mathcal{I}_x , \mathcal{I}_y , \mathcal{I}_z no son sino *los momentos de la cantidad de movimiento* al rededor de los ejes x , y , z , respectivamente, como es fácil verlo haciendo con las componentes mv_x , mv_y y mv_z de la cantidad de movimiento lo análogo a la que se hizo con las componentes X , Y y Z de la fuerza, en el párrafo 18 del capítulo II.

En las translaciones la componente de la fuerza exterior actuante, en una dirección cualquiera, está dada por la variación en el tiempo de la componente de la cantidad de movimiento según esa misma dirección; en las rotaciones, la componente del momento exterior actuante está dado por la variación de la componente respectiva del momento de la cantidad de movimiento.

El vector momento de la cantidad de movimiento, esto es el vector \mathcal{I} , se denomina *vector-impulso*.

Todos los vectores mencionados los representamos trazados a partir del punto fijo O .

Por la notación introducida, las ecuaciones [30] se escriben

$$\mathcal{M}_x = \frac{d \mathcal{I}_x}{dt} \quad , \quad \mathcal{M}_y = \frac{d \mathcal{I}_y}{dt} \quad , \quad \mathcal{M}_z = \frac{d \mathcal{I}_z}{dt} \quad [31]$$

y son las ecuaciones fundamentales de la rotación.

Es evidente la analogía entre estas relaciones y las relativas a las traslaciones. En éstas la fuerza está dada por la variación en el tiempo del vector cantidad de movimiento o impulso; en las rotaciones el momento lo está por la variación en el tiempo del vector impulso \mathcal{J} .

Si \mathcal{M} es el momento resultante cuyas componentes son \mathcal{M}_x , \mathcal{M}_y , \mathcal{M}_z , las ecuaciones anteriores se resumen en una sola, escribiendo:

$$\mathcal{M} = \frac{d\mathcal{J}}{dt}, \quad [32]$$

donde, repetimos, \mathcal{M} es el momento resultante e \mathcal{J} el impulso resultante, es decir

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^2 &= \mathcal{M}_x^2 + \mathcal{M}_y^2 + \mathcal{M}_z^2 \\ \mathcal{J}^2 &= \mathcal{J}_x^2 + \mathcal{J}_y^2 + \mathcal{J}_z^2. \end{aligned} \quad [33]$$

La significación de la ecuación [32] es la siguiente: el vector \mathcal{J} cambiará en general de magnitud y dirección en el transcurso del tiempo, debido a la acción de los momentos de las fuerzas exteriores, de tal manera que, en dos instantes separados por un intervalo de tiempo muy pequeño, que elijeremos como unidad, el vector tendrá, por ejemplo, las magnitudes y direcciones que indica la figura 212, donde $OA = \mathcal{J}_1$ corresponde a la primera posición y $OB = \mathcal{J}_2$ a la segunda; la variación en el tiempo, del impulso, está representada en magnitud y dirección por el vector AB ; ese cambio es producido según la [32] por la acción de fuerzas exteriores cuyo momento respecto a O está representado por un vector cuyo módulo y cuya dirección son idénticos a los de AB .

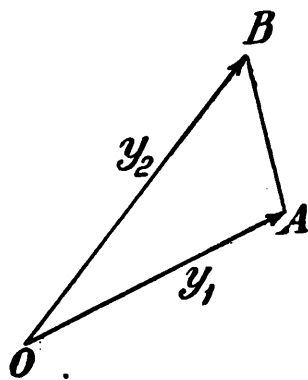


Fig. 212.

10. Posición relativa de los vectores velocidad angular e impulso. Otra forma de las ecuaciones. — Se pueden transformar las ecuaciones [30] introduciendo las componentes de la velocidad angular ω al rededor de los ejes x , y , z . Sean, por ejemplo, las componentes del vector ω las velocidades ω_x , ω_y , ω_z (fig. 213), que tienen las direcciones positivas de los ejes; los sentidos de giración, dados por la regla del tirabuzón, están indicados por las flechas. Las componentes de la velocidad lineal de un punto de coordenadas x , y , z se deter-

minan fácilmente utilizando el principio de superposición. Hagamos cumplir primeramente la rotación al rededor del eje de las x ; el punto de coordenadas x, y, z gira al rededor del eje de las x con la velocidad angular ω_x ; su velocidad lineal es, entonces (fig. 213 a),

$$v' = \omega_x \sqrt{y^2 + z^2} \quad [34]$$

y sus proyecciones sobre los ejes son

$$\begin{aligned} v_x' &= 0, \\ v_y' &= v' \operatorname{sen} \alpha = \omega_x z, \\ v_z' &= -\omega_x y. \end{aligned} \quad [35]$$

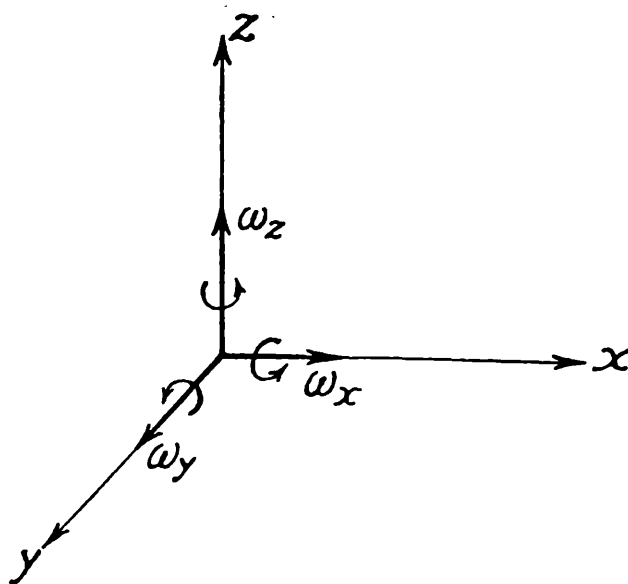


Fig. 213.

Consideremos, ahora, únicamente la rotación al rededor del eje de las y ; la velocidad angular del punto es ω_y ; su velocidad lineal (fig. 213 b)

$$v'' = \omega_y \sqrt{x^2 + z^2} \quad [34']$$

y sus proyecciones sobre los ejes son

$$v_x'' = -v'' \operatorname{sen} \beta = -\omega_y z, \quad v_y'' = 0, \quad v_z'' = \omega_y x. \quad [35']$$

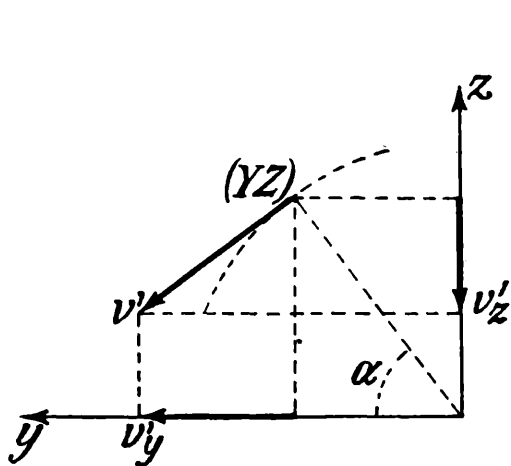


Fig. 213 a.

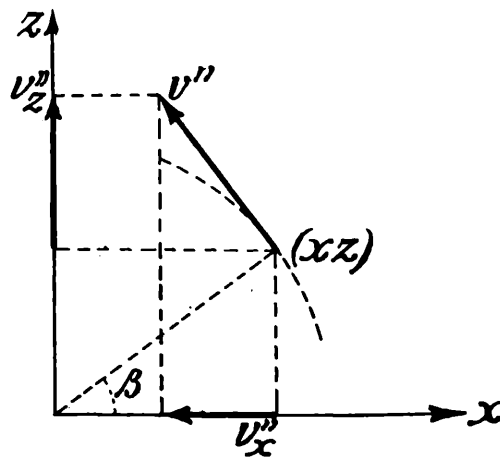


Fig. 213 b.

Haciendo lo mismo con la rotación al rededor del eje de las z , resulta

$$v''' = \omega_z \sqrt{x^2 + y^2} \quad [34'']$$

$$v_x''' = \omega_z y, \quad v_y''' = -\omega_z x, \quad v_z''' = 0. \quad [35'']$$

Las velocidades de las partículas en dirección del eje de las x , cuando las tres rotaciones se producen simultáneamente, estarán dadas por la expresión general.

$$v_x = v_x' + v_x'' + v_x'''$$

y lo mismo para los otros ejes, con lo que resulta

$$\begin{aligned} v_x &= y \omega_z - z \omega_y \\ v_y &= z \omega_x - x \omega_z \\ v_z &= x \omega_y - y \omega_x. \end{aligned} \quad [36]$$

Si se introducen estas expresiones en las ecuaciones [30], teniendo en cuenta que $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ tienen en todo instante los mismos valores para todos los puntos, de modo que pueden sacarse fuera de la suma, resulta

$$\mathcal{M}_x = \frac{d}{dt} \left\{ \omega_x \Sigma m (y^2 + z^2) - \omega_y \Sigma m x y - \omega_z \Sigma m x z \right\},$$

y utilizando las notaciones introducidas en la página 215:

$$\mathcal{M}_x = \frac{d}{dt} \left\{ A \omega_x - F \omega_y - E \omega_z \right\} \quad [I]$$

y las dos ecuaciones análogas

$$\mathcal{M}_y = \frac{d}{dt} \left\{ B \omega_y - D \omega_z - F \omega_x \right\} \quad [I]$$

$$\mathcal{M}_z = \frac{d}{dt} \left\{ C \omega_z - E \omega_x - D \omega_y \right\},$$

donde las expresiones entre paréntesis son las componentes del impulso.

Supongamos, por ejemplo, que exista una única rotación al rededor del eje de las x , es decir, sean en un instante dado $\omega_y = 0, \omega_z = 0$; por las ecuaciones anteriores se ve que en tal caso aunque el vector velocidad angular tiene, por lo supuesto, la dirección de las x , el impulso admite además de la componente $\omega_x \Sigma m (y^2 + z^2)$, la componente $-\omega_x \Sigma m y x$ según el eje de las y , y la componente $-\omega_x \Sigma m z x$ según el eje de las z . *El vector impulso no coincide entonces, en general, con el*

véctor velocidad angular, cuya dirección es en todo momento la del eje instantáneo de rotación.

Si el eje de rotación x al rededor del cual gira el cuerpo coincidiera con uno de los ejes principales de inercia, se anulan los dobles productos Σmyx y Σmzx , y sólo queda la componente del impulso paralelo al eje de las x cuyo valor es $\omega_x \Sigma m (y^2 + x_2)$.

Resulta, pues, que solamente cuando el eje de rotación del cuerpo coincide con uno cualquiera de sus ejes principales de inercia, el impulso tiene la misma dirección que el vector que representa la velocidad angular. Cuando eso sucede, su magnitud está dada por el producto de la velocidad angular por el momento de inercia con respecto al mismo eje. El cuerpo no está sometido, lo que es notorio, a la acción de los momentos centrífugos.

Un giróscopo, por ejemplo, satisface esas condiciones (fig. 197), pues la masa del disco está distribuída simétricamente al rededor del eje. Si el momento de inercia es I y la velocidad angular ω , el impulso tiene, según las relaciones anteriores, el valor $I\omega$ y está representado por un vector llevado en la dirección del eje del giróscopo, de tal manera que su sentido es aquel en que progresa un tirabuzón que gira en el sentido de la rotación del cuerpo.

Justificaremos ahora las consideraciones del párrafo 4. En el caso del giróscopo simétrico, al cual acabamos de referirnos, las cuplas centrífugas se anulan para los ejes normales al eje de rotación propia. Por lo tanto, las componentes del impulso según tres direcciones ortogonales, una de las cuales es el eje, trazadas a partir del punto fijo, en un giróscopo con tres grados de libertad (fig. 195), serán $I\omega$ en la dirección de su eje propio, $J\Omega$ en la dirección z , si J es el momento de inercia con respecto a un eje ecuatorial, y Ω la velocidad angular al rededor de zz' (velocidad de la precesión) y $J\theta'$ en la dirección yy' , si θ' es la velocidad angular instantánea de la nutación. Ahora bien, en las aplicaciones ω es siempre muy grande (lo que hace a la vez a Ω muy pequeña) con respecto a Ω y θ' , de suerte que, en tal caso, puede considerarse, sin cometer error sensible, como impulso total, al impulso propio $\mathcal{J} = I\omega$. Notorio se hará lo que venimos de decir en el párrafo siguiente.

11. Descripción matemática del movimiento de un giróscopo simétrico. — A. LAS ECUACIONES. — Por las ecuaciones [31] sabemos que el momento de las fuerzas exteriores al rededor de un eje fijo en el espacio es igual a la variación en el tiempo de la componente del

impulso según ese mismo eje. Como el momento de la gravedad al rededor de la vertical z que pasa por el punto fijo O es constantemente cero, se sigue que la componente del impulso, según esa dirección, debe ser invariable.

Para obtener la componente del impulso según la vertical, calculemos, primeramente, sus componentes según tres ejes que sean de inercia para el punto O , tales como (fig. 214) el eje mismo z' del giróscopo, el y' normal al anterior, situado en el plano vertical $z O z'$, y un tercer eje x' normal a los dos precedentes.

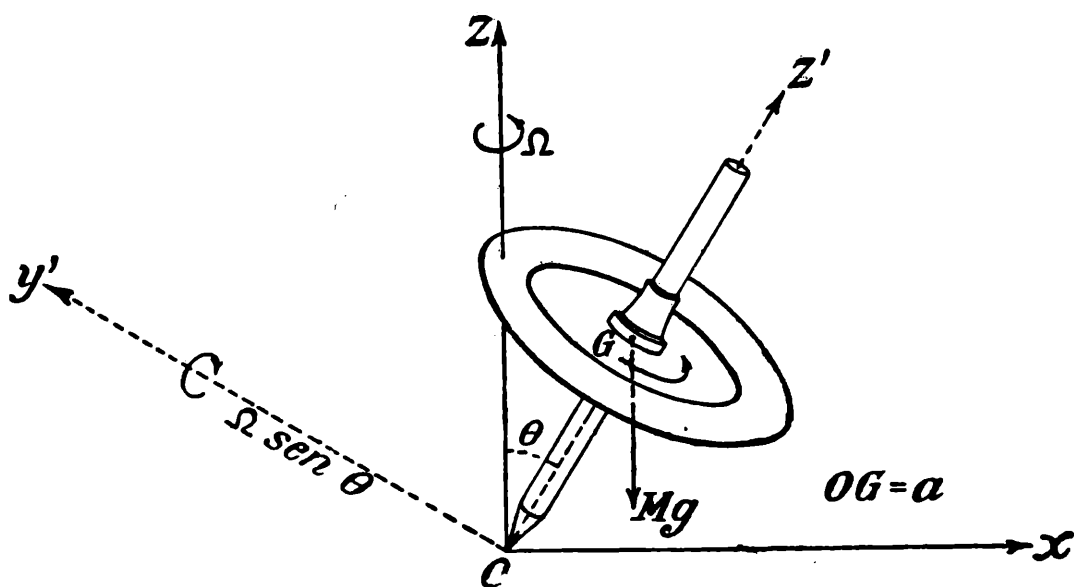


Fig. 214.

Las componentes del impulso para esos ejes de inercia se obtienen, según se ha visto, multiplicando el momento de inercia respectivo por la velocidad de rotación a su rededor.

Si indicamos con Ω la velocidad de la precesión al rededor de z y con θ' la velocidad del movimiento de nutación al rededor de x' , se tiene para las velocidades de las rotaciones:

al rededor de z'	ω
» y'	$\Omega \text{ sen } \theta$
» x'	θ'

Si I es el momento de inercia del giróscopo al rededor de su eje y J el momento de inercia al rededor de un eje normal al anterior y que pasa por O , se tiene para los impulsos:

según z'	$I \omega$
» y'	$J \Omega \text{ sen } \theta$
» x'	$J \theta'$

De estos tres impulsos sólo admiten una componente, según z , los dos primeros. El impulso según la vertical es, entonces:

$$I \omega \cos \theta + J \Omega \operatorname{sen}^2 \theta = \text{constante} = I \omega \cos \theta_0 \quad [37]$$

o

$$J \Omega \operatorname{sen}^2 \theta = I \omega (\cos \theta_0 - \cos \theta), \quad [37']$$

si en el momento inicial, antes de abandonarlo a sí mismo, lo manteníamos en una posición fija, bajo la inclinación θ_0 . La componente inicial del impulso según z es entonces la expresión del segundo miembro de la ecuación anterior.

Además, debe conservarse la energía, es decir, la suma de las energías cinética y potencial debe ser constante.

La energía cinética se calcula sumando las energías de las rotaciones al rededor de los ejes primas; la energía potencial es el trabajo gastado para levantar el centro de gravedad del giróscopo desde el plano horizontal que pasa por el punto fijo O , por ejemplo. Si es a la distancia del centro de gravedad al punto O y M la masa del giróscopo, ese trabajo tiene el valor

$$M g a \cos \theta .$$

Se tiene, pues, por la constancia de la energía, la expresión

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} J \Omega^2 \operatorname{sen}^2 \theta + \frac{1}{2} J \theta'^2 + M g a \cos \theta &= \text{constante} = \\ &= \frac{1}{2} I \omega^2 + M g a \cos \theta_0 \end{aligned} \quad [38]$$

o

$$J \Omega^2 \operatorname{sen}^2 \theta + J \theta'^2 = 2 M g a (\cos \theta_0 - \cos \theta) . \quad [38']$$

B. EL GIRÓSCOPO CUMPLE EL MOVIMIENTO DE PRECESIÓN OSCILANDO ENTRE DOS VALORES LÍMITES DE θ . VALOR DE Ω EN ESOS LÍMITES. — Calculemos, en efecto, los valores de θ para los cuales es $\theta' = 0$, es decir, los valores para los cuales el movimiento de nutación alcanza sus posiciones extremas.

De la ecuación [37] se obtiene para la velocidad de la precesión

$$\Omega = \frac{I \omega}{J} \frac{\cos \theta - \cos \theta_0}{\operatorname{sen}^2 \theta} . \quad [39]$$

Introduciendo esta relación en la [38] y poniendo $\theta' = 0$ se tiene para los valores extremos de θ la expresión

$$[\cos \theta - \cos \theta_0] [2 M J g a \operatorname{sen}^2 \theta - I^2 \omega^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta)] = 0, \quad [40]$$

es decir, el movimiento de nutación alcanza sus posiciones extremas para

$$\theta = \theta_0 \quad [41]$$

y para los valores de θ que resultan de la expresión

$$2 M J g a \operatorname{sen}^2 \theta - I^2 \omega^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta) = 0. \quad [42]$$

Poniendo

$$\frac{I^2 \omega^2}{2 M J g a} = 2 u \quad [43]$$

se obtiene de la [42]

$$\cos^2 \theta - 2 u \cos \theta + 2 u \cos \theta_0 - 1 = 0, \quad [44]$$

de donde

$$\cos \theta = u \pm \sqrt{1 - 2 u \cos \theta_0 + u^2}. \quad [45]$$

Si $u < 1$ y se opera con el signo más del radical, se obtiene, puesto que $\cos \theta_0 < 1$:

$$\begin{aligned} u + \sqrt{1 - 2 u \cos \theta_0 + u^2} &> u + \sqrt{1 - 2 u + u^2} \\ &> u + (1 - u) \\ &> 1, \end{aligned} \quad [46]$$

lo que significa que el valor de θ correspondiente a esa raíz es imaginario.

Tomando el signo negativo se obtiene para la otra raíz θ un valor real, siendo

$$\cos \theta_1 = u - \sqrt{1 - 2 u \cos \theta_0 + u^2}. \quad [47]$$

Lo mismo ocurre si es $u > 1$. Entonces, es $\theta' = 0$, esto es, el giróscopo deja de subir o caer para

$$\begin{aligned} \theta = \theta_0 & \quad \text{límite superior} \\ \theta = \theta_1 & \quad \text{límite inferior,} \end{aligned}$$

pues de la [38'] resulta, para cualquier valor de θ' , que $\cos \theta_0 > \cos \theta$, es decir, $\theta_0 < \theta$.

Además si, como ya se ha supuesto en realidad, la velocidad de rotación propia es constante — lo cual ocurre en efecto, como puede demostrarse rigurosamente, cuando el giróscopo es simétrico al rededor de su eje, — es claro que la energía cinética que aparece por las rotaciones Ω y θ' debe ser a costa de la energía potencial del cuerpo, lo que significa que θ_0 no puede ser sobrepasado.

En lo que se refiere a la velocidad Ω de la precesión, pueden calcularse, fácilmente, sus valores para las posiciones extremas de la nutación.

Una posición es la que corresponde a $\theta = \theta_0$, siendo en ella, por la relación [39],

$$\Omega = 0.$$

Es claro que siendo $\omega = \text{const}$ y $\theta' = 0$ y habiendo alcanzado la energía potencial su valor inicial, la conservación de la energía exige que el movimiento de precesión se anule en ese momento.

Para $\theta = \theta_1$ es también $\theta' = 0$ y vale la relación [42], obteniéndose de la [38'] para la velocidad de la precesión en ese instante

$$\Omega = \frac{2 M g a}{I \omega}. \quad [48]$$

Es evidente que es éste el valor máximo de la velocidad del movimiento de precesión, pues en esa posición alcanza el centro de gravedad del giróscopo en movimiento su posición más baja, y la disminución total de la energía potencial está almacenada en forma de energía cinética del movimiento de precesión, pues el de nutación es, en ese momento, nulo.

La velocidad de la precesión disminuye por la [48] si aumenta el impulso $I \omega$ de la rotación propia; para valores grandes de ω el movimiento de precesión de un giróscopo es entonces muy lento.

C. ¿DE QUÉ DEPENDE LA DIFERENCIA ENTRE θ_0 Y θ_1 ? — Si en la relación [39] se pone $\theta = \theta_1$, y se substituye Ω por el valor que le corresponde para ese ángulo, se tiene:

$$\cos \theta_0 - \cos \theta_1 = \frac{2 M g a \cdot J}{(I \omega)^2} \text{sen}^2 \theta_1 \quad [49]$$

relación que nos muestra que θ_0 y θ_1 difieren tanto menos cuanto mayor es el impulso propio $\mathcal{J} = I \omega$.

En las figuras 215 y 215 *a* están representadas en proyección horizontal las trayectorias de la cabeza de un giróscopo cuyo centro de gravedad está encima del punto fijo. En ambos casos el giróscopo es abandonado a sí mismo bajo ángulos de inclinación iguales, sin velocidad inicial; en el de la figura 215 *a* la velocidad angular de la ro-

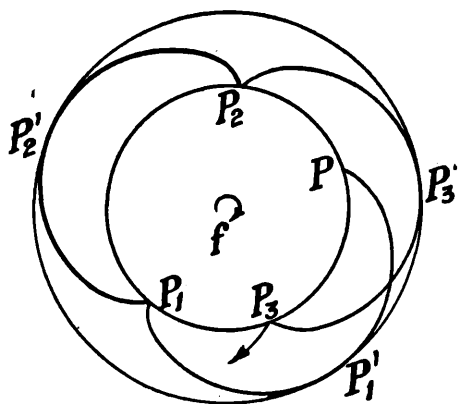


Fig. 215.

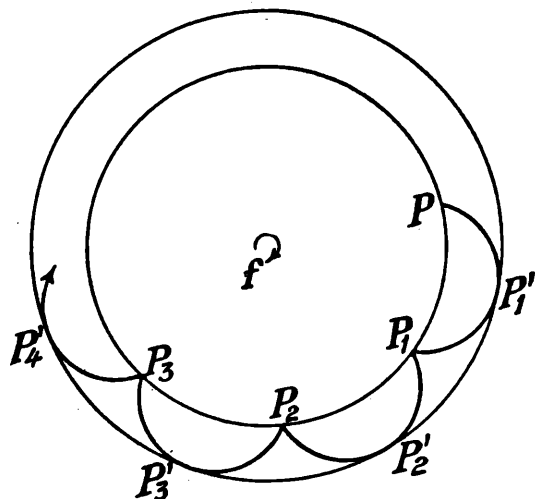


Fig. 215 *a*.

tación propia es mayor que en el de la figura 215. La posición inicial es P , el giróscopo cae al mismo tiempo que cumple el movimiento de precesión hasta P_1' luego se levanta hasta P_1 cayendo luego otra vez hasta P_2' . En los puntos P, P_1, P_2, P_3, \dots , las velocidades de precesión y de nutación tienen el valor cero; en P_1', P_2', P_3' , la velocidad de nutación es cero y la de precesión tiene el valor máximo.

C. — PRUEBA DE LA ROTACIÓN DE LA TIERRA

12. **El experimento de Foucault.** — Consideremos un péndulo, suspendido de un punto, al rededor del cual pueda oscilar libremente, en cualquier dirección, lo cual se logra, con mucha aproximación, por medio de una suspensión cardánica. Si se lo desvía y se lo abandona con velocidad inicial nula a la acción de la gravedad, el péndulo debe oscilar, indefinidamente, en un plano de posición invariable en el espacio, que coincide con el plano vertical en el cual fué desviado en el instante inicial.

Ese hecho se comprueba experimentalmente en los cursos de la manera siguiente: un péndulo simple, suspendido de un arco que sostiene una plataforma girable (fig. 216), no modifica su plano de oscilación aun cuando se dé un movimiento de rotación al soporte.

Volviendo al caso de la tierra, imaginemos primeramente, para más sencillez, que el péndulo está oscilando en uno de sus polos; un observador cualquiera gira con ésta y recibe, por lo tanto, la impresión de que es el plano de oscilación del péndulo el que gira en sentido contrario.

El arco aparente ψ en que gira en una unidad de tiempo el plano de oscilación del péndulo será:

$$\psi = \omega, \quad [50]$$

si ω es la velocidad angular de la tierra. En un día la giración es de 2π . El camino aparente seguido por la masa del péndulo en su movimiento sobre la superficie de la tierra es semejante al representado en la figura 217, solamente que el número de lazos descritos por un péndulo que batiese el segundo sería alrededor de 43.200.

Si el péndulo se encuentra en un punto P cualquiera cuya latitud es φ , el arco en que gira aparentemente el plano del péndulo se calcula recurriendo a la regla del paralelogramo de las velocidades angulares.

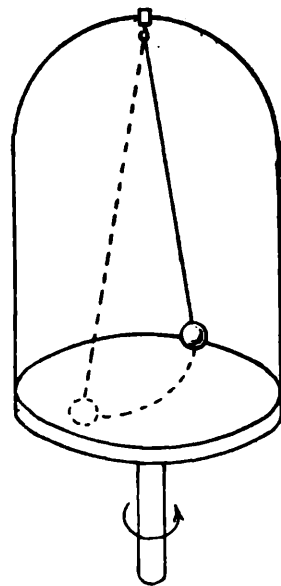


Fig. 216.

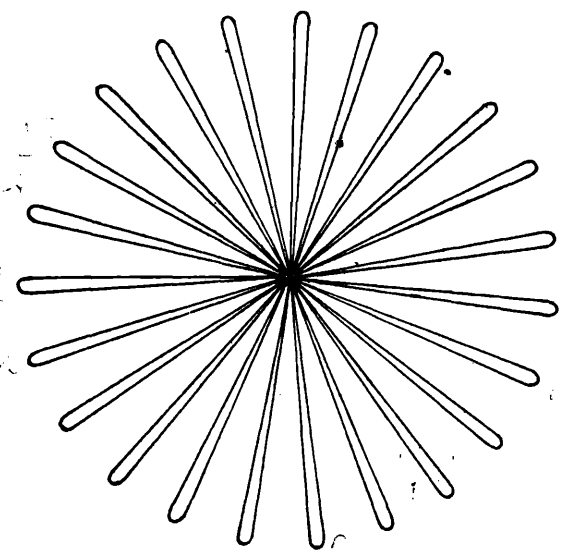


Fig. 217.

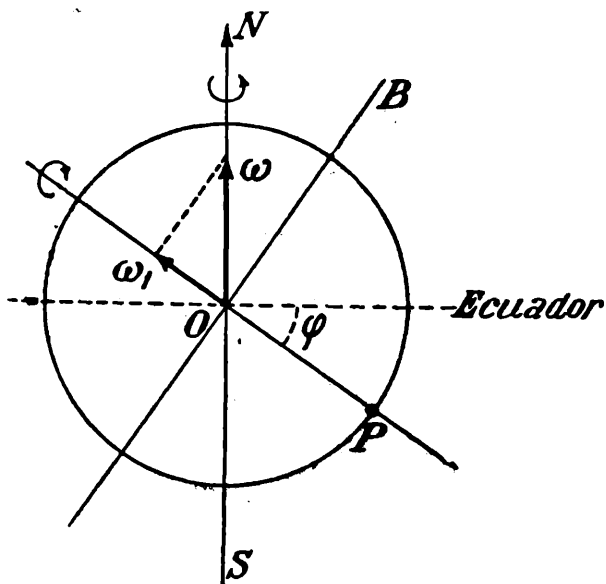


Fig. 218.

La rotación de la tierra alrededor de su eje puede considerarse como el movimiento resultante de dos movimientos de rotación, uno según OP y otro según la dirección normal OB (fig. 218).

Es claro que la componente ω_1 según OP desempeña con respecto al péndulo en P el mismo papel que ω con respecto al péndulo situado en el polo.

Puesto que se tiene

$$\omega_1 = \omega \operatorname{sen} \varphi, \quad [51]$$

el arco ψ que gira aparentemente en la unidad de tiempo el plano de oscilación del péndulo en P estará dado por la expresión

$$\psi = \omega \operatorname{sen} \varphi. \quad [52]$$

La experiencia puede realizarse, en clase, en unos minutos, con una instalación como la de la figura 219. Una masa esférica de hierro de 11 centímetros de diámetro, provista en su parte inferior de un pequeño imán I pende de un hilo de acero de 3,5 metros de largo, atado a una suspensión cardánica. Un pequeño brazo aH , provisto en su extremo de un trocito prismático de hierro dulce, puede girar alrededor del eje vertical aa' situado en la vertical del péndulo. Se hace oscilar a éste en un plano, por medio de los impulsos magnéticos de un electromán recto que se sitúa horizontalmente en la dirección del centro de la esfera. Si se coloca la palanca aH en el plano de oscilación del péndulo, perdurará en él, por la acción del imán I sobre el trocito de hierro H . Un espejillo, e , que lleva adherido el eje aa' , permanece, entonces, durante la experiencia, en una posición invariable en el espacio.

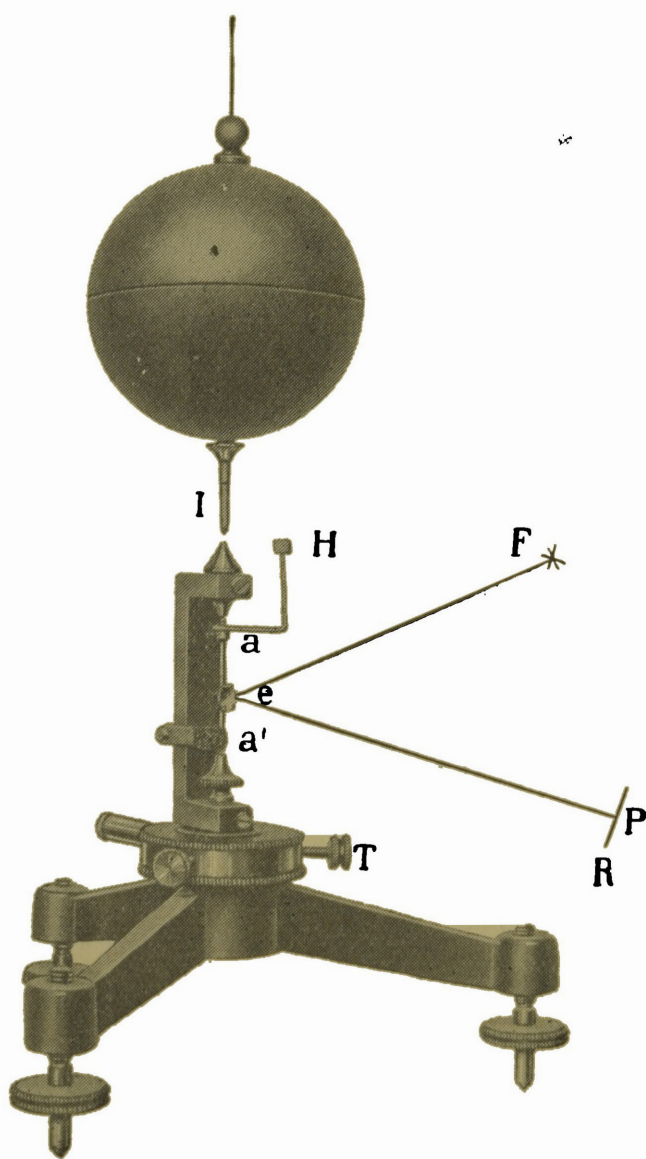


Fig. 219.

Si un rayo de luz parte de una fuente F y reflejándose sobre el espejo cae sobre el punto P de la regla R , es claro que como el foco F y la regla giran por la rotación de la tierra en el mismo sentido, el rayo incidente debe girar

en el mismo sentido mientras que el rayo reflejado debe hacerlo en sentido contrario; la mancha luminosa se desplaza, entonces, sobre la regla, en sentido opuesto al de la rotación de la tierra. En este hemisferio (considérese la figura 218) el rayo reflejado se aleja de F , si F está, como en el caso del dibujo, a la derecha.

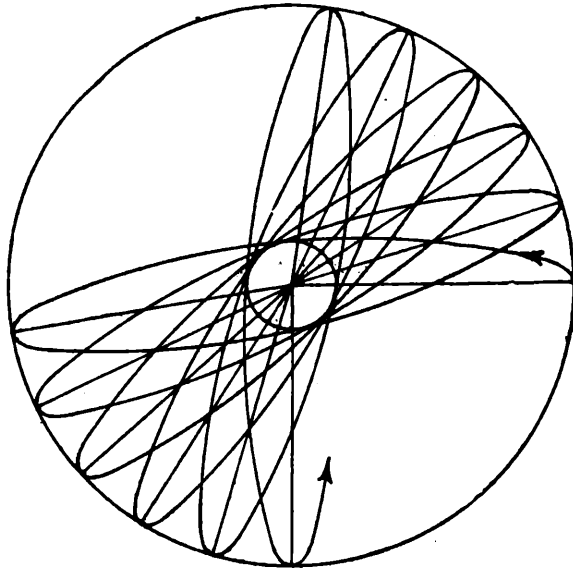


Fig. 220.

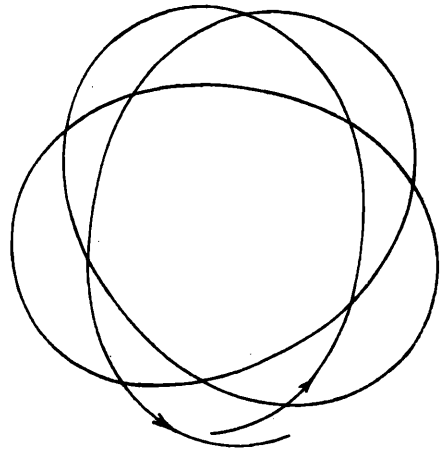


Fig. 221.

Es condición indispensable para el buen resultado de la experiencia que la masa del péndulo no reciba en el momento inicial una componente lateral de velocidad, en cuyo caso el centro de gravedad de la masa se mueve sobre una esfera cuyo radio es la distancia que separa ese punto del punto de suspensión; se tiene así, no un péndulo plano, sino un péndulo esférico. La proyección de la trayectoria del movimiento de un péndulo esférico sobre un plano horizontal está representada en las figuras 220 y 221 para dos velocidades laterales distintas, siendo en el segundo caso mayor que en el primero. Estas curvas se pueden obtener, experimentalmente, suspendiendo de la parte inferior del péndulo — suspendido cardánicamente — una pequeña lámpara incandescente y situando debajo una cámara fotográfica, cuyo eje óptico coincida con la vertical del péndulo.

Se ve que el lugar en que alcanza el péndulo su máxima elongación se mueve sobre un círculo. Si en el caso de la experiencia de Foucault la oscilación no fuese absolutamente plana, se observaría la superposición del efecto debido a la rotación de la tierra y del de la giración de la posición extrema que se produce en el péndulo esférico.

Foucault mismo tuvo la idea de utilizar, para el mismo objeto, la conservación en el espacio de la dirección del eje de un giróscopo con tres grados de libertad.

NOVENA PARTE
* EL MOVIMIENTO RELATIVO

CAPITULO XIII

ELEMENTOS DE LA TEORÍA DEL MOVIMIENTO RELATIVO

A. — DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES

1. **Generalidades.** — La ecuación de Newton que contiene el se-
do postulado de la dinámica se refiere a un sistema de coordenadas
en reposo en el espacio.

Si un punto se mueve y se conocen en todo momento sus coorde-
nadas con respecto a un sistema de *ejes fijos en el espacio*, se puede
determinar, por aquella ecuación fundamental, *la fuerza exterior*, es
decir, se puede dar una medida de la acción que ejercen otro u otros
cuerpos en cualquier instante sobre el punto material en movimiento.

Si se conocen, en cambio, solamente las coordenadas con respecto
a un sistema en movimiento, las derivadas segundas de aquellas no
dan, en general, la aceleración total a que se refiere el principio de
Newton y, por lo tanto, no podría determinarse cuál es la fuerza que
actúa. Si ésta fuese conocida, con ella y con aquellas derivadas no
podría escribirse la ecuación de movimiento. El problema se resuel-
ve si se conoce, además, el movimiento de aquel sistema de ejes con
respecto a un sistema de ejes fijos en el espacio.

Antes de tratar el problema conviene dar algunos ejemplos y de-
finiciones.

Si un punto se mueve sobre un sistema S' que se desplaza a su vez
con respecto a otro sistema S , supuesto fijo en el espacio, el movi-
miento del punto con respecto a S' se dice *relativo* y su movimiento
respecto a S *resultante* o *absoluto*.

Si una esfera, por ejemplo, rueda sobre la cubierta de un buque, la trayectoria que describe es la del movimiento relativo; es la curva que se obtiene si se determinan sus posiciones sucesivas con respecto a un sistema de ejes fijos en ella.

La velocidad y aceleración de ese movimiento se designan con el nombre de *velocidad y aceleración relativas*.

Como el punto es a la vez *arrastrado* por el movimiento del buque, es claro que en todo instante participa, además, del movimiento del punto del buque con el cual coincide en ese mismo instante. La velocidad y aceleración correspondientes a esta circunstancia se llaman *velocidad y aceleración de arrastre*.

El movimiento resultante se obtiene por superposición de los movimientos relativos y de arrastre.

A fin de considerar el caso más general, debemos suponer que el buque cumple un movimiento helicoidal, es decir, que al mismo tiempo que se traslada gira.

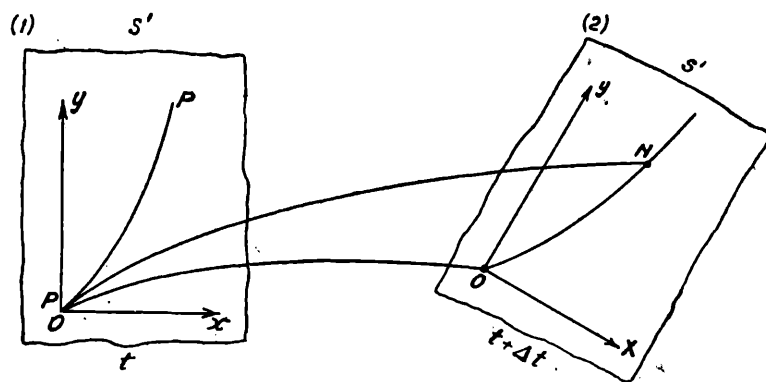


Fig. 222 a.

Fig. 222 b.

La figura 222 a representa el instante t ; el punto se supone en el origen O de coordenadas; la trayectoria relativa, que describe a partir de ese instante, es la curva PP . La figura 222 b representa el instante $t + \Delta t$; las coordenadas fijas al buque han girado alrededor del origen O al mismo tiempo que O se desplazaba sobre la curva OO ; el punto se ha movido sobre la trayectoria relativa desde O hasta N , de tal manera que su trayectoria absoluta será una curva como la ON .

Se trata ahora de determinar la velocidad y la aceleración total del punto, conociendo los movimientos relativo y de arrastre, para lo cual se deben considerar dos posiciones separadas por un intervalo de tiempo infinitamente pequeño.

El principio de superposición simplifica el problema, pues el movimiento de arrastre puede descomponerse, en todo instante, en un

movimiento de traslación y en un movimiento de rotación alrededor del origen O de las coordenadas móviles.

Es decir, si (1) y (3) (fig. 223) son las posiciones de los ejes móviles que corresponden a los instantes t y $t + \Delta t$, ese movimiento resulta

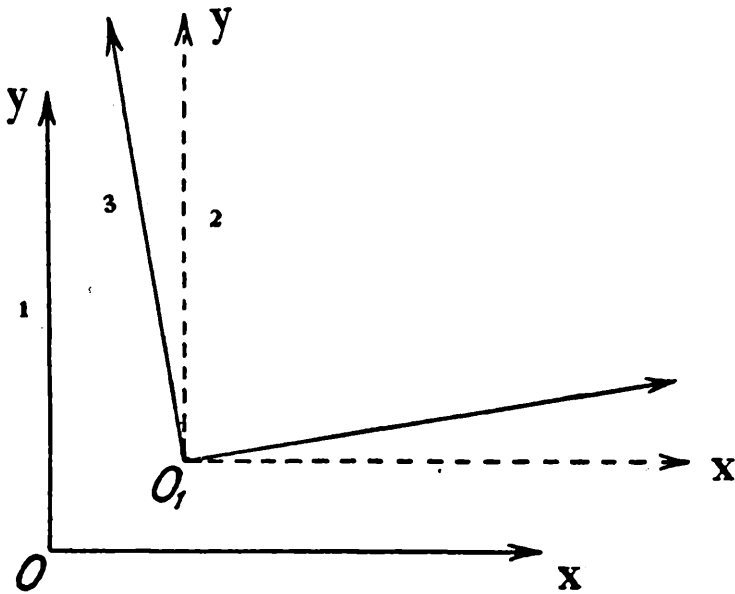


Fig. 223.

de la realización sucesiva o simultánea del pasaje por traslación pura de la posición (1) a la (2) y por la rotación pura de la (2) a la (3). La realidad estará representada de la mejor manera, según sabemos, si Δt es infinitamente pequeño.

Es, entonces, evidente que el problema queda resuelto considerando sucesivamente dos casos: primero, un movimiento de arrastre que sea una traslación, luego un movimiento de arrastre que consista en una rotación pura. Nos limitaremos a movimientos en un plano.

2. El sistema se traslada. — A fin de que se comprenda a fondo la cuestión, insistiremos sobre algunas ideas ya antes mencionadas. Si un punto P se mueve y se conocen las coordenadas con respecto a un sistema fijo en el espacio, se puede calcular, en seguida, la velocidad y la aceleración total y, por lo tanto, la fuerza exterior.

Si el sistema de coordenadas de referencia se mueve, coincide en cada instante con direcciones definidas, fijas en el espacio, y la cuestión es determinar cuál es la velocidad y la aceleración total con respecto a esas direcciones definidas del espacio con las que coincide en el instante considerado el sistema móvil de coordenadas. Sea xy el sistema móvil, que coincide en el instante t , posición (1) (fig. 224), con

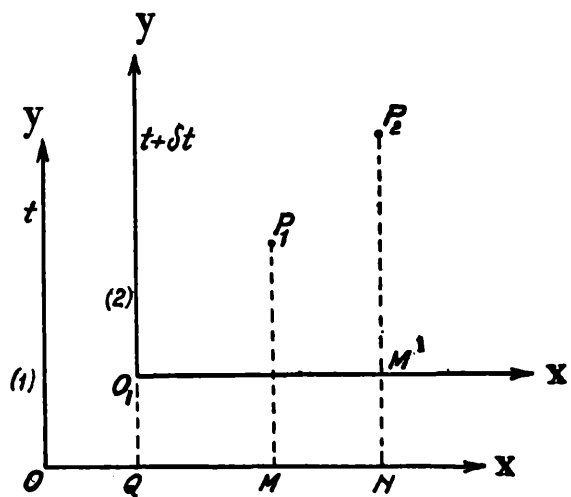


Fig. 224.

respecto a esas direcciones definidas del espacio con las que coincide en el instante considerado el sistema móvil de coordenadas. Sea xy el sistema móvil, que coincide en el instante t , posición (1) (fig. 224), con

direcciones definidas del espacio y se quiere determinar la velocidad y la aceleración total en ese instante, con respecto a esas direcciones, de un punto P que se mueve sobre ese sistema. Supongamos que el sistema se traslada únicamente, lo que significa que los ejes se mueven paralelamente a sí mismos. Sean (1) y (2) dos posiciones sucesivas de los ejes móviles correspondientes a los tiempos t y $t + \Delta t$, y P_1 y P_2 las posiciones del punto móvil. Las coordenadas en cada uno de esos instantes con respecto a los ejes móviles son:

$$\begin{aligned} OM &= x && \text{para el instante } t \\ O_1 M' &= x + \Delta x && \text{para el instante } t + \Delta t \end{aligned} \quad [1]$$

y expresiones semejantes para las otras coordenadas.

La componente u de la velocidad según la dirección fija del espacio con la cual coincide el eje de las x en el instante t es:

$$u = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MN}{\Delta t} \quad [2]$$

o, puesto que es:

$$MN = ON - OM = ON - x \quad [3]$$

y

$$ON = OQ + O_1 M' = OQ + x + \Delta x,$$

$$u = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{OQ}{\Delta t} + \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = u_a + u_r, \quad [4]$$

dado que $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{OQ}{\Delta t}$ es la componente, que indicamos con u_a , de la velocidad de arrastre en dirección de las x , y $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ es la componente que indicamos con u_r de la velocidad relativa en la misma dirección. Resultado enteramente semejante se obtiene con respecto a la otra dirección, cuya componente de velocidad indicaremos con v .

Es, pues, notorio que en el caso considerado la velocidad total o absoluta del punto se obtiene componiendo por la regla del paralelogramo las velocidades de arrastre y relativa.

La *aceleración total* o *absoluta* con respecto a las direcciones fijas del espacio, con las cuales coinciden en cierto instante t los ejes móviles, se calcula, fácilmente, llevando en esas direcciones del espacio y en las direcciones con las que coinciden en el instante $t + \Delta t$ las velocidades absolutas.

Es decir, si en el instante t los ejes, que son ahora de las u y de la v , respectivamente, tienen la posición (1) (fig. 224) llevamos sobre ellos los vectores $u = u_a + u_r$ y $v = v_a + v_r$ que dan las velocidades *totales*, según las direcciones definidas fijas del espacio con las cuales coinciden en ese momento. El punto P_1 que determinan esas coordenadas representa el estado de movimiento del punto en ese mismo momento. En el instante $t + \Delta t$ el punto figurativo será un punto tal como el P_2 y sus coordenadas serán las componentes $u + \Delta u$ y $v + \Delta v$ de la velocidad total. Es decir, es ahora:

$$\begin{aligned} OM &= (u_a + u_r)_t = u \\ O_1 M' &= (u_a + u_r)_{t + \Delta t} = u + \Delta u, \end{aligned} \quad [5]$$

donde los subíndices indican que se trata de los instantes t y $t + \Delta t$, respectivamente.

El cambio total de la velocidad en dirección ON es, evidentemente, $O_1 M' - OM$ y la aceleración total en esa misma dirección, que indicaremos con a_1 ,

$$a_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{O_1 M' - OM}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{du}{dt}. \quad [6]$$

Si se introduce en las [6] el valor de u deducido en el párrafo anterior, resulta:

$$a_1 = \frac{du_a}{dt} + \frac{du_r}{dt}. \quad [7]$$

De la misma manera se obtiene para la aceleración total a_2 según el otro eje:

$$a_2 = \frac{dv_a}{dt} + \frac{dv_r}{dt}. \quad [8]$$

Entonces, si el movimiento de arrastre es únicamente de traslación, tanto la velocidad como la aceleración total se obtienen componiendo por la regla del paralelogramo las velocidades y aceleraciones de arrastre y relativa, respectivamente. Si la masa del punto es m la fuerza exterior que actúa sobre él tiene por componente a las fuerzas $X = ma_1$ e $Y = ma_2$ de modo que es, para el eje de las x :

$$\begin{aligned} X &= m \frac{du_a}{dt} + m \frac{du_r}{dt} \\ X &= m \frac{du_a}{dt} = m \frac{du_r}{dt}. \end{aligned} \quad [9]$$

La [9] enseña que se puede prescindir en todo instante de la aceleración del sistema de coordenadas en dirección de las x si se agrega a la fuerza exterior X , en esa dirección, la fuerza $-m \frac{du_a}{dt}$, que proviene de su existencia; es decir, se puede así suponer al sistema en reposo. Analogamente para el otro eje.

3. El movimiento de arrastre es una rotación. — El problema es idéntico al anterior. Un punto se mueve sobre un sistema que gira alrededor de un punto fijo y se trata de determinar el movimiento resultante o absoluto conociendo el movimiento del punto sobre el sistema móvil y el movimiento de éste.

El movimiento del punto sobre el sistema se obtiene refiriendo sus posiciones a ejes fijos en él, es decir, que participan de su movimiento. Limitémosnos a un movimiento plano y sea el origen de las coordenadas móviles el punto fijo O de giración (fig. 225).

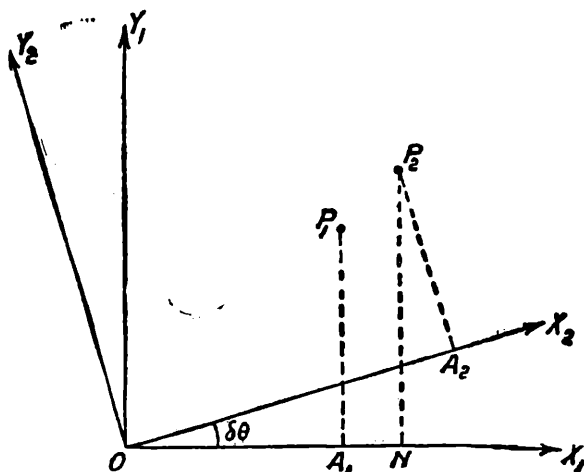


Fig. 225.

Los ejes coinciden en todo instante con direcciones definidas fijas en el espacio y se trata de determinar la velocidad y la aceleración total, en un instante cualesquiera, con respecto a ellas. Sean Ox_1y_1 y Ox_2y_2 dos posiciones sucesivas del sistema de coordenadas móviles, separadas por el intervalo de tiempo Δt y Ox_1, Oy_1 las direcciones fijas del espacio con respecto a las cuales queremos determinar la velocidad y la aceleración total. El punto en movimiento ocupa en esos instantes las posiciones P_1 y P_2 , respectivamente. Indicando con x e y los valores de las coordenadas en ese sistema móvil, se tiene:

$$\begin{aligned} OA_1 = x & \quad ; \quad P_1 A_1 = y ; \\ OA_2 = x + \Delta x & \quad ; \quad P_2 A_2 = y + \Delta y , \end{aligned} \quad [10]$$

si $\Delta x, \Delta y$ son las variaciones de las coordenadas en el intervalo Δt .

La velocidad total del punto en la dirección Ox_1 del espacio es:

$$u = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A_1 N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{ON - OA_1}{\Delta t} . \quad [11]$$

La línea ON es la suma de las proyecciones de los segmentos OA_2 y $A_2 P_2$ sobre la dirección de Ox_1 , de tal manera que se tiene:

$$ON = (x + \Delta x) \cos \Delta \theta - (y + \Delta y) \operatorname{sen} \Delta \theta \quad [12]$$

$$OA_1 = x.$$

Substituyendo en la [11] y pasando al límite resulta, despreciando las magnitudes de segundo orden:

$$u = \frac{dx - y d\theta}{dt} = \frac{dx}{dt} - y \frac{d\theta}{dt}. \quad [13]$$

De la misma manera se obtiene para la componente v de la velocidad total del punto en la dirección Oy_1

$$v = \frac{dy}{dt} + x \frac{d\theta}{dt}. \quad [14]$$

Las velocidades relativas son, como antes, $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ y las de arrastre $-y \frac{d\theta}{dt}$ y $x \frac{d\theta}{dt}$, donde $\frac{d\theta}{dt}$ es la velocidad angular, que indicaremos con ω , del sistema móvil con respecto a un sistema en reposo.

La velocidad de un punto en reposo situado a la distancia r del origen es, como se sabe, $r\omega$ y las proyecciones sobre los ejes son $y\omega$ y $x\omega$ como se ha obtenido para la velocidad de arrastre. La velocidad total se obtiene, entonces, componiendo por la regla del paralelogramo a las velocidades relativa y de arrastre.

La *aceleración total* se obtiene llevando, como se ha hecho antes, sobre los ejes móviles, vectores iguales a los componentes de la *velocidad total* en esas direcciones. Considerando dos posiciones muy próximas (fig. 225) se tiene:

$$\begin{aligned} OA_1 &= u & P_1 A_1 &= v \\ OA_2 &= u + \Delta u & P_2 A_2 &= v + \Delta v. \end{aligned} \quad [15]$$

La componente de la aceleración total según la dirección Ox_1 del espacio es:

$$a_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A_1 N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{ON - OA_1}{\Delta t}, \quad [16]$$

y puesto que es

$$\begin{aligned} ON &= (u + \Delta u) \cos \Delta \theta - (v + \Delta v) \operatorname{sen} \Delta \theta \\ OA_1 &= u \end{aligned} \quad [17]$$

resulta, pasando al límite y despreciando los términos de orden superior,

$$a_1 = \frac{du}{dt} - v \frac{d\theta}{dt}. \quad [18]$$

Para el otro eje se obtiene, análogamente,

$$a_2 = \frac{dv}{dt} + u \frac{d\theta}{dt}. \quad [19]$$

Se pueden expresar estas aceleraciones totales en función de las coordenadas móviles y de la velocidad angular, introduciendo en estas últimas ecuaciones los valores de u y v . Nos limitaremos al caso en que es $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$, es decir, al caso en que el sistema gira con velo-

cidad angular constante, esto es, al caso en que es $\frac{d\theta}{dt} = \omega = \text{const.}$

Resulta

$$a_1 = \frac{d^2 x}{dt^2} - 2\omega \frac{dy}{dt} - \omega^2 x \quad [20]$$

$$a_2 = \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\omega \frac{dx}{dt} - \omega^2 y. \quad [20']$$

Si un observador no tuviese conocimiento del movimiento del sistema, lo supondría en reposo y tomaría como aceleraciones totales a $\frac{d^2 x}{dt^2}$ y $\frac{d^2 y}{dt^2}$ y como componentes de las fuerzas en esas direcciones a los productos de esas aceleraciones por m , mientras que en realidad las aceleraciones totales son, a causa del movimiento de rotación, los valores dados por la [20] y las componentes de las fuerzas exteriores son

$$X = ma_1, \quad Y = ma_2. \quad [21]$$

Si el sistema de ejes móviles cumple un movimiento simultáneo de traslación y rotación, la velocidad y aceleración total se obtienen por

superposición de las velocidades y aceleraciones correspondientes a los dos casos considerados. Se tiene así el llamado teorema de Coriolis. Las ecuaciones [21] son las ecuaciones de movimiento.

B. — APLICACIONES

4. Los movimientos relativos y de arrastre son uniformes. — Un problema interesante que discuten Kelvin y Tait en su *Natural Philosophy* es el siguiente. Un bote cruza transversalmente un río, siendo impelido uniformemente por los remos de tal manera que está dirigido constantemente hacia un punto fijo, P , de la orilla.

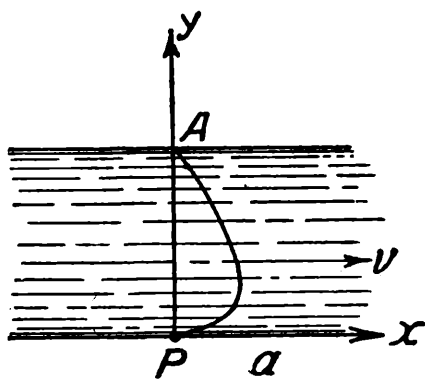


Fig. 226 a.

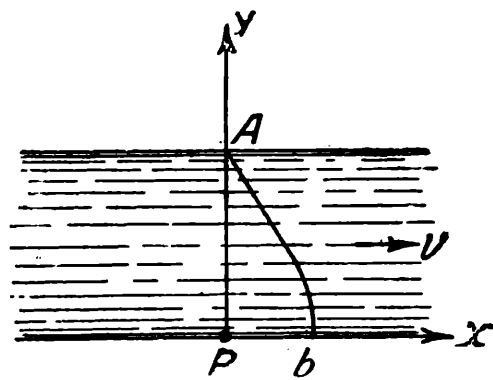


Fig. 226 b.

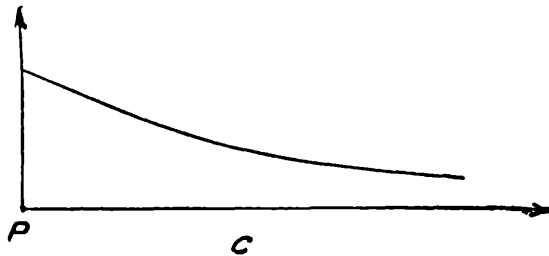


Fig. 226 c.

El bote se mueve uniformemente sobre el agua, pero ésta tiene a su vez un movimiento que supondremos uniforme y del mismo valor en todas partes. El movimiento de arrastre es debido, entonces, a la corriente del río. Se pregunta cuál es la trayectoria resultante del bote y en qué caso se alcanza el punto fijo de la otra orilla. En las figuras 226 a, b, c, están representadas las trayectorias de tres casos, en los cuales la relación entre la velocidad de arrastre y la velocidad relativa es diferente. En el primero, la velocidad relativa es mayor que la de arrastre y el bote alcanza el punto; en el segundo, las dos velocidades son iguales, el bote logra la otra orilla pero nunca el punto fijo; en el tercero, la velocidad relativa es la menor y el bote es arrastrado por la corriente. La velocidad resultante es en cada movimiento igual

a la diagonal del paralelogramo construído sobre las dos velocidades mencionadas; la aceleración resultante del bote — mejor dicho de su centro de gravedad — es nula.

5. El movimiento relativo es un movimiento circular uniforme. Cicloide. — Supongamos que un carro o un vagón (fig. 227) se mueve con un movimiento rectilíneo y uniforme. Si se imagina un sistema de ejes móviles, fijos con respecto al cuerpo del vehículo,

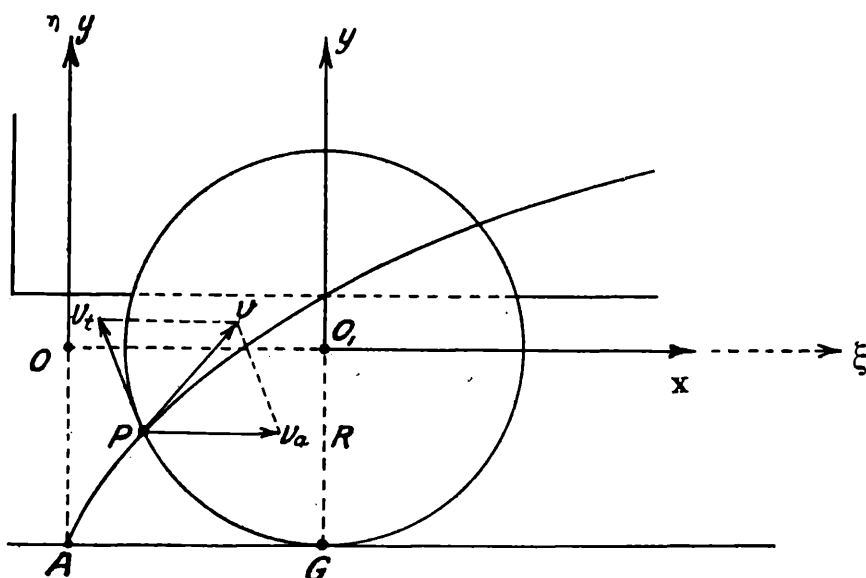


Fig. 227.

un punto de una rueda se mueve en relación a ellos con movimiento circular uniforme. Esos ejes sufren a la vez un movimiento de arrastre que consiste en una traslación uniforme. Se trata de determinar el movimiento resultante o absoluto de un punto P de la rueda con respecto a un sistema de ejes fijos en el espacio. Sea la posición inicial aquella en que P coincide con A ; los ejes móviles coinciden en ese momento con las direcciones o ejes fijos en el espacio $\xi\eta$. Si ω es la velocidad angular del punto P alrededor de O_1 y R el radio de la rueda, la velocidad total del punto P en el instante representado en el dibujo es el vector v , que resulta de componer la velocidad relativa v_t de dirección tangente a la rueda y de valor ωr con la velocidad de arrastre v_a , paralela al pavimento.

Como en el mismo tiempo que el punto P da una vuelta, es decir, mientras que recorre el camino relativo $2\pi R$, la rueda recorre también el camino $2\pi R$ sobre el pavimento, resulta que las velocidades relativas y de arrastre tienen el mismo módulo. Cuando P ha alcanzado el punto más alto las dos velocidades son paralelas y del mismo sentido, el punto tiene la velocidad resultante máxima igual al doble

de la velocidad de arrastre; en cambio, cuando P se encuentra en la posición más baja, las velocidades son paralelas pero de sentido contrario, de suerte que la velocidad instantánea del punto es nula. Este resultado se podía esperar de antemano pues los puntos G son los centros instantáneos de rotación.

La ecuación de la trayectoria, llamada en este caso *cicloide*, como ya se dijo, se obtiene por eliminación del tiempo entre las siguientes relaciones que pueden establecerse sin dificultad:

$$\begin{aligned} \xi &= u_a t + R \cos \omega t \\ \eta &= R \operatorname{sen} \omega t. \end{aligned} \quad [22]$$

Es fácil establecer, con auxilio de las consideraciones de los párrafos anteriores, que la aceleración total es la aceleración del movimiento relativo, es decir, igual en valor a $\omega^2 R$ y dirigida constantemente hacia el centro de la rueda.

6. Estudio dinámico de algunos casos. — 1° Consideremos primeramente el siguiente caso sencillo. Un cuerpo de masa m , un insecto, por ejemplo, se mueve sobre la barra OB (fig. 228) con la velocidad v constante, mientras que la barra gira alrededor de O con la velocidad angular ω , también invariable. Se trata de averiguar a que fuerzas está sometido el cuerpo.

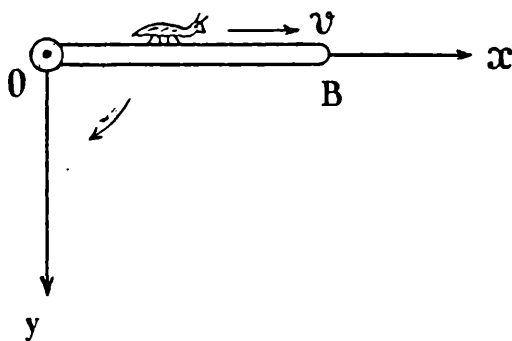


Fig. 228.

Por las ecuaciones [20] se tiene para las aceleraciones totales en las direcciones fijas del espacio con las que coinciden en un instante dado los ejes móviles:

$$a_1 = -\omega^2 x \quad \text{en dirección del eje } x$$

$$a_2 = 2\omega \frac{dx}{dt} \quad \text{en dirección del eje } y,$$

pues es constantemente

$$y = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 0.$$

Es decir, en todo momento el insecto debe contrarrestar en la dirección de las x la acción de la fuerza $m\omega^2 x$, que tiende a arrastrarlo a

lo largo de OB ; al mismo tiempo debe contrarrestar la fuerza $m 2\omega \frac{dx}{dt}$ en dirección de las y , fuerza que lo apreta contra la barra o tiende a desprenderlo de ella, según el lado en que se encuentre. Además de estas fuerzas debe, para mantener constante su velocidad, compensar el roce contra la barra. Si el insecto tuviese prisa y acelerara su marcha en cada momento debería hacer, además, una fuerza igual a

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} .$$

2° Supongamos que una masa m , una esfera metálica, por ejemplo, pueda deslizarse sin roce sobre una varilla metálica cilíndrica que pasa por un agujero diametral hecho en aquélla.

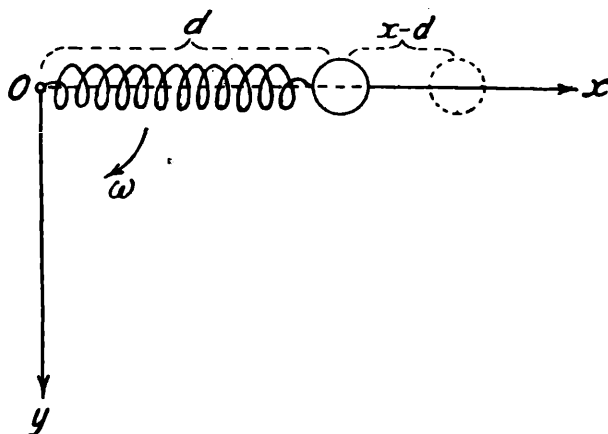


Fig. 229.

Esté la esfera atada en un espiral elástica (fig. 229) y gire la varilla alrededor de un eje que pasa por O con una velocidad angular ω constante. Se pregunta cuál es el movimiento de la masa m .

Por las ecuaciones [20] las aceleraciones totales son, si se eligen los ejes como indica la figura:

$$a_1 = \frac{d^2 x}{dt^2} - \omega^2 x \quad [1]$$

$$a_2 = 2 \omega \frac{dx}{dt} . \quad [2]$$

Como la masa no puede moverse en la dirección y la segunda ecuación indica que la masa presiona sobre la barra con una fuerza igual a ma_2 . La ecuación de movimiento en la dirección x se obtiene teniendo presente que la *fuerza exterior* que actúa sobre la masa es la del resorte, fuerza que es proporcional a su apartamiento del punto de reposo; si la distancia de este punto al origen de coordenadas es d , la fuerza será $-k(x-d)$, donde k es la constante de proporcionalidad y el signo menos indica que, cuando el punto se mueve en la dirección positiva del eje, la fuerza tiene el sentido negativo.

La ecuación de movimiento es, pues,

$$ma_1 = m \frac{d^2 x}{dt^2} - m \omega^2 x = -k(x-d) . \quad [3]$$

Si se tiene presente que es $4 \pi^2 n_0^2 = \frac{k}{m}$, donde n_0 es la frecuencia de las oscilaciones libres, esto es, de las oscilaciones que cumpliría la masa bajo la acción del resorte, si el sistema no girase, y si se introduce, además, para mayor sencillez, la frecuencia en 2π segundos, esto es, $\nu_0 = 2 \pi n_0$, la ecuación [3] puede escribirse:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + (\nu_0^2 - \omega^2) x = \nu_0^2 d. \quad [4]$$

Para integrarla, escribamos

$$x = u + \frac{\nu_0^2 d}{\nu_0^2 - \omega^2}, \quad [5]$$

donde u debe satisfacer, por la [4], la ecuación

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + (\nu_0^2 - \omega^2) u = 0 \quad [6]$$

cuyo integral es, según se sabe,

$$u = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}, \quad [7]$$

donde r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación característica

$$r^2 + \nu_0^2 - \omega^2 = 0. \quad [8]$$

Resulta, por lo tanto,

$$x = A_1 e^{\sqrt{\omega^2 - \nu_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\omega^2 - \nu_0^2} t} + \frac{\nu_0^2 d}{\nu_0^2 - \omega^2}. \quad [9]$$

Las constantes A_1 y A_2 permiten satisfacer las condiciones iniciales del movimiento.

Mientras es $\omega < \nu_0$ los exponentes de e son imaginarios, lo que significa que los dos primeros términos de la [9] representan movimientos oscilatorios; esos movimientos se extinguen a causa de que en realidad existe roce. Luego, mientras es $\omega < \nu_0$ existe para toda velocidad de rotación ω una posición de reposo relativo dado por el último término.

Si $\omega > \nu_0$ los exponentes son reales; el primer término representa un movimiento que aumenta exponencialmente con el tiempo, el segundo uno que disminuye. En ese caso no existiría, por lo tanto,

una posición de reposo. Se puede demostrar también, determinando A_1 y A_2 , que para $\omega = v_0$ el valor de x es finito.

7. La caída libre en la superficie de la tierra. — La tierra constituye un sistema animado de un movimiento de traslación y otro de rotación uniforme alrededor de un eje. Puesto que no es posible comprobar un efecto mecánico debido a su traslación, se debe admitir, de acuerdo con el principio de inercia, que tal movimiento puede ser considerado, dentro de intervalos de tiempo relativamente grandes, como rectilíneo y uniforme. Debemos entonces preocuparnos únicamente de su movimiento de rotación.

El hombre observa la posición de cuerpos en reposo o en movimiento sobre la tierra o en sus cercanías, con respecto a puntos fijos de ella, vale decir, refiere las posiciones de los cuerpos a sistemas de ejes que se mueven con ella; los problemas correspondientes deben resolverse teniendo en cuenta las reglas establecidas para el caso de un sistema de ejes móviles.

Vamos a tratar un caso en el cual es suficiente la consideración de dos direcciones. Se trata de la caída libre de un cuerpo de masa m en el plano que pasa por el ecuador; sea ese plano el del papel. Tomemos en él (fig. 230) un sistema de coordenadas planas xy tal que el origen O esté sobre el eje de la tierra, el cual por lo tanto es normal al plano del papel.

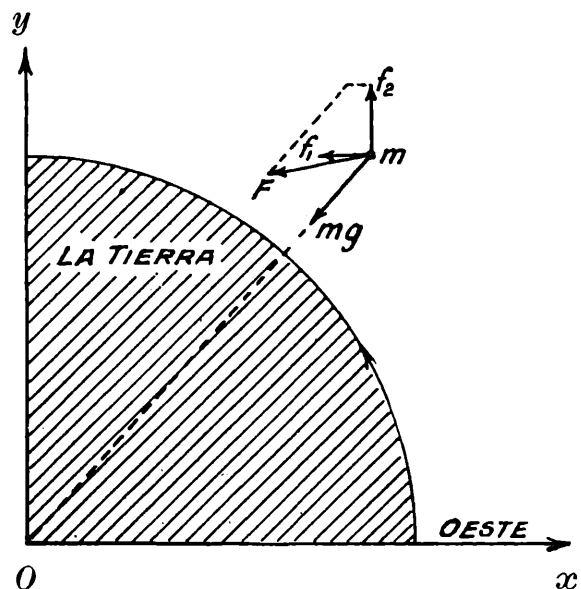


Fig. 230.

Si la tierra y por lo tanto los ejes estuviesen en reposo, las aceleraciones serían $\frac{d^2 x}{dt^2}$, $\frac{d^2 y}{dt^2}$ las cuales multiplicadas por las masas serían, por el principio de Newton, iguales a las componentes en esas direcciones del peso del cuerpo. Pero los ejes son móviles, giran alrededor de O con la velocidad angular ω de la tierra y, por lo tanto, las aceleraciones totales con respecto a las direcciones fijas del espacio, con las que coinciden en el instante considerado los ejes móviles, están dados por las relaciones [20], es decir, el movimiento del punto con respecto a los ejes móviles es igual al movimiento que se obtiene suponiendo fijos los ejes pero agregando a las componentes

de la fuerza exterior, las fuerzas ficticias a que nos hemos referido antes.

Veamos entonces cuáles son las fuerzas que deben suponerse actuando sobre el punto, para poder prescindir del movimiento de la tierra.

Las componentes de la atracción pura según los ejes y las componentes de las fuerzas contrífugas mw^2x y mw^2y dan una resultante que es igual al peso del cuerpo mg que observamos en las medidas y que tiene como dirección la de la vertical. Además como $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dx}{dt}$ son negativas, actúan en dirección x la fuerza ficticia $-2m\omega \frac{dy}{dt} = f_1$ y la

fuerza ficticia $2m\omega \frac{dx}{dt} = f_2$ en la dirección y . Es decir, el movimiento del punto con respecto a la tierra en movimiento, bajo la acción de la fuerza de atracción, es el mismo que se obtiene si, supuesta la tierra en reposo, se hace actuar sobre el cuerpo la fuerza centrífuga que juntamente con la atracción da el peso que medimos mg , y las fuer-

zas ficticias f_1 y f_2 . Se ve así claramente que en virtud del movimiento de la tierra el cuerpo no cae sobre la vertical sino que se adelanta un poco hacia el Este.

Es muy instructivo calcular este fenómeno, aproximadamente, de una manera muy elemental.

En la figura 231 el arco de círculo representa, como antes, el paralelo correspondiente al ecuador y P el punto más alto de una torre PM .

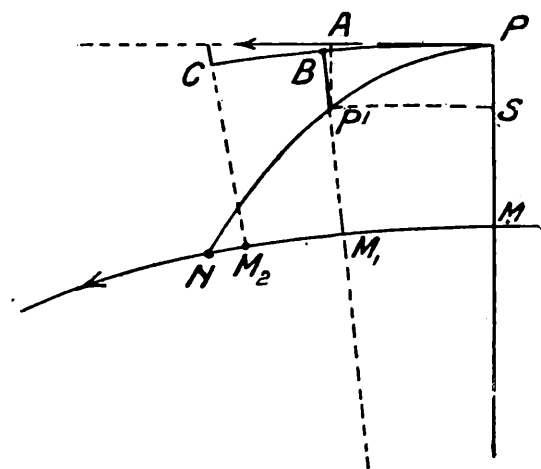


Fig. 231.

Si la tierra estuviese en reposo, un

cuerpo abandonado en P a sí mismo caería según la vertical PM . Debido al movimiento terrestre el cuerpo participa en P del movimiento del sistema que corresponde a esa posición; por el principio de inercia debe conservar la dirección dada por AP y la magnitud de esa velocidad cuyo valor es $\omega(R+h)$, si ω es la velocidad angular de la tierra, R su radio y h la altura PM de la torre. A ese movimiento se le superpone el producido por la atracción terrestre, resultando así para el movimiento del cuerpo en el espacio la trayectoria elíptica $PP'N$. Nosotros no observamos esa trayectoria, pues mientras el cuer-

po se mueve sobre ella la tierra se ¹desplaza. Después de un corto intervalo de tiempo τ , está el punto en la posición P' de su trayectoria, la torre está en BM_1 ; el camino vertical recorrido por el cuerpo es AP' mientras que nosotros consideramos como tal al camino BP' . La diferencia entre el camino verdadero en el espacio y el que observamos es AB .

Por un teorema de la geometría se tiene, escribiendo $r = R + h$,

$$AB \cdot 2r = \overline{AP}^2 = \omega^2 r^2 \tau^2,$$

pues AP es el camino recorrido horizontalmente en el tiempo T con la velocidad horizontal inicial $w(R + h) = \omega r$.

Resulta:

$$AB = \frac{1}{2} (\omega^2 r) \tau^2,$$

lo que nos dice que el camino AB es el que recorrería un cuerpo con la aceleración $\omega^2 r$ en el tiempo τ . Es decir, el desplazamiento vertical que observamos en nuestro sistema en movimiento durante el tiempo τ es el que recorrería un cuerpo con respecto a un sistema en reposo, si actuaran sobre él, además de la fuerza de atracción, una fuerza igual y del mismo sentido que la fuerza centrífuga que corresponde al movimiento de rotación de la tierra. Esto equivale a decir que la aceleración de la caída libre que observamos en la superficie de la tierra es igual a la aceleración debida a su atracción disminuída en la aceleración centrífuga.

Veamos ahora lo que ocurre con el desplazamiento horizontal. Sea t el tiempo que tarda el cuerpo en alcanzar la superficie de la tierra en el punto N ; la torre esté en ese instante en la posición CM_2 . Se tiene:

$$MN = \omega (R + h) t$$

$$MM_2 = \omega R t$$

$$MN - MM_2 = \omega h t.$$

Es, además, aproximadamente.

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

y, por lo tanto, el cuerpo cae delante de la torre, hacia el este, a la distancia:

$$NM_2 = \omega h .$$

A la latitud φ esa desviación sería, como la muestra un sencillo cálculo, igual a la que corresponde al ecuador multiplicando por $\cos \varphi$.

El físico Reich ha comprobado experimentalmente esta desviación, dejando caer libremente cuerpos desde una altura de 158,5 metros en Freiberg, a la latitud de $50^\circ 57'$, encontrando una desviación de 28,4 milímetros. Un cálculo más riguroso que el que nosotros hemos efectuado haría esperar una desviación de 27,5 milímetros, lo cual está muy de acuerdo con la experiencia.

Si se quiere estudiar con rigor el movimiento de los cuerpos en la superficie de la tierra, es menester establecer las ecuaciones de movimiento con respecto a un sistema de ejes fijos en la tierra, es decir, en movimiento con ella. El movimiento de un péndulo es entonces, como es evidente, influenciado por esta causa. La teoría del péndulo de Foucault, cuyo fin es precisamente revelar el movimiento de rotación de la tierra, debe estudiarse, en particular, rigurosamente, teniendo en cuenta estas circunstancias.

DECIMA PARTE

GRAVITACIÓN

CAPITULO XIV

LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD

§ 1. **Las observaciones de Newton y Bessel.** — La comprobación más rigurosa de que todos los cuerpos, cualquiera sea su tamaño y substancia, caen en el vacío con la misma velocidad, se realiza por medio del péndulo.

Ya Newton lo utilizó a ese fin, quien dice de sus experiencias lo siguiente:

«Hace ya mucho tiempo que ha sido observado por otros, que cuerpos pesados de la más variada naturaleza descienden a la tierra (si se toma en cuenta la desigualdad del atraso que sufren a causa de la pequeña fuerza resistente del aire) desde alturas iguales en tiempos iguales. Se puede comprobar, con mucha exactitud, la igualdad de los tiempos, con el auxilio de péndulos. Yo comprobé tal cosa con oro, plata, plomo, vidrio, arena, sal común, madera y trigo. Me proveí para ello de dos cajas de madera esféricas e iguales. Llené una con madera y suspendí en el centro de oscilación de la otra (tan exactamente como me fué posible) igual peso de oro.

«Esas cajas, colgadas de cuerdas iguales de once pies de largo, formaban un par de péndulos enteramente iguales en peso y figura, y a los cuales oponía el aire la misma resistencia. Puestos en movimiento al mismo tiempo uno al lado del otro, observé que marchaban juntos. hacia adelante y hacia atrás, durante mucho tiempo. Sus vibraciones eran, pues, iguales. Por consiguiente, la cantidad de materia en el oro era a la cantidad de materia en la madera, como la acción de la fuerza motriz (*o vis motris*) sobre todo el oro era a la acción de la misma so-

bre toda la madera; vale decir, como el peso del uno al peso de la otra. Y lo mismo ocurrió con los demás cuerpos. Mediante estos experimentos en cuerpos de igual peso, podría yo manifiestamente haber descubierto una diferencia en la cantidad de materia, menor de la milésima parte del total, si tal diferencia hubiese existido».

Newton designa con el nombre de «cantidad de materia» a lo que nosotros denominamos masa; de sus medidas resulta que todas las substancias caen con la misma aceleración. Se puede, por lo tanto, comparar las masas por los pesos.

Una verificación rigurosa de ese hecho era por ese motivo, de importancia. Es claro que la primera cuestión estriba en el estudio mismo de la exactitud, vale decir, de las causas de error, que pueden aparecer en las determinaciones de la aceleración de la gravedad por medio del péndulo.

El astrónomo alemán Bessel fué, sin duda alguna, quien hizo los estudios más completos y, puede decirse, definitivos a este respecto.

En el año 1830 determinó el valor de g para el hierro, plomo, latón, plata, oro mármol y cuarzo, encontrando exactamente el mismo valor. Sus medidas, que tienen una exactitud de 1:100.000, prueban que la tierra no tiene predilección por ninguna substancia.

La constancia de la acción de la tierra en un lugar de su superficie resulta también del hecho de que un péndulo oscila un día después de otro o varios años después con el mismo tiempo de oscilación.

Si se pasa de un lugar a otro de la tierra, el tiempo de oscilación de un mismo péndulo sufre variaciones que provienen, en parte, de la fuerza centrífuga del movimiento de rotación de nuestro globo, y en parte de la distribución de sus masas. Del estudio de las variaciones de g se puede inferir, por eso, cuál es la forma de la tierra.

× 2. **La determinación de Borda.** — La primera determinación, bastante exacta, del valor de g , la realizaron Borda y Cassini en el Observatorio Astronómico de París, en el año 1792, utilizando un péndulo simple formado por un hilo metálico delgado de 3,8 metros de largo, del cual pendía una esfera de platino de 36 milímetros de diámetro, esfera que aún se conserva en los archivos de aquel Instituto.

Si d es la distancia entre el centro de la esfera y r el radio de ésta, se tiene, para el tiempo T de una oscilación simple:

$$T = \pi \sqrt{\frac{d + \frac{2r^2}{d}}{g}}, \quad [1]$$

según se ha visto anteriormente. Borda tenía en cuenta, además, la presencia del hilo, en cuyo caso la fórmula sufre una pequeña modificación, fácil de calcular.

Una seria dificultad, en las mediciones con un péndulo simple, lo ofrece la indeterminación del punto de suspensión, cuya posición es menester precisar a fin de poder medir la longitud de una manera exacta.

Esa indeterminación la hizo desaparecer Borda fijando el hilo a un prisma (fig. 232) de tal manera que las oscilaciones se realicen alrededor de una arista, arista que se apoya sobre una plataforma metálica plana, muy sólida.

A fin de no introducir con el prisma una posible influencia extraña sobre el movimiento del péndulo, hacía que el tiempo de oscilación de la pieza que lleva el prisma, alrededor de la arista de éste, tuviese el mismo tiempo de oscilación que el péndulo. Esto lo lograba modificando la posición relativa de la pieza cilíndrica AB con respecto al prisma, accionando la tuerca T .

Determinaron la longitud d estableciendo contacto entre la parte inferior de la esfera y una plataforma plana P de cobre (fig. 233) y midiendo luego la distancia entre ésta y la plataforma que servía de suspensión al péndulo. Utilizaron a ese fin una regla de platino de 12 pies de largo, que en su parte superior terminaba en T , lo que permitía apoyarla y dejarla suspendida en la plataforma de suspensión. Sobre la regla se movía una corredera provista de nonius, la que se llevaba a contacto con la plataforma de cobre, obteniéndose así un valor muy aproximado de la distancia. Para obtener el valor de d se deducía de la longitud medida el radio de la esfera.

El alargamiento que experimentaba la regla por su propio peso y por la temperatura fué tenido en cuenta. De veinte series de medidas resultó en el valor de la longitud del péndulo, si se define como tal a $d + 2r^2/d$, un error probable de 0,003 milímetros.

Midieron el tiempo de oscilación por las coincidencias con las oscilaciones del péndulo de un reloj fijado al mismo muro — muro muy

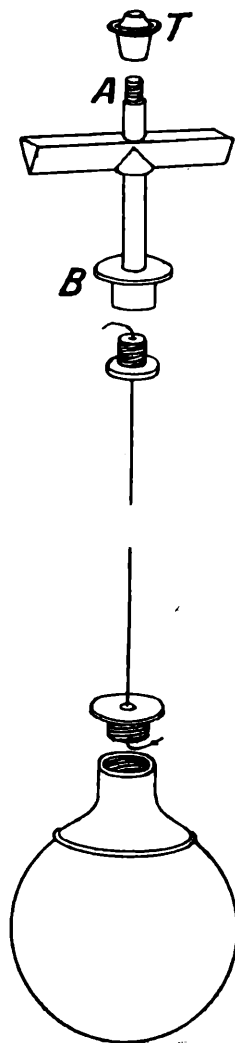


Fig. 232.

sólido que fué construído aislado, expresamente con tal objeto — y cuya marcha se contraloreaba astronómicamente.

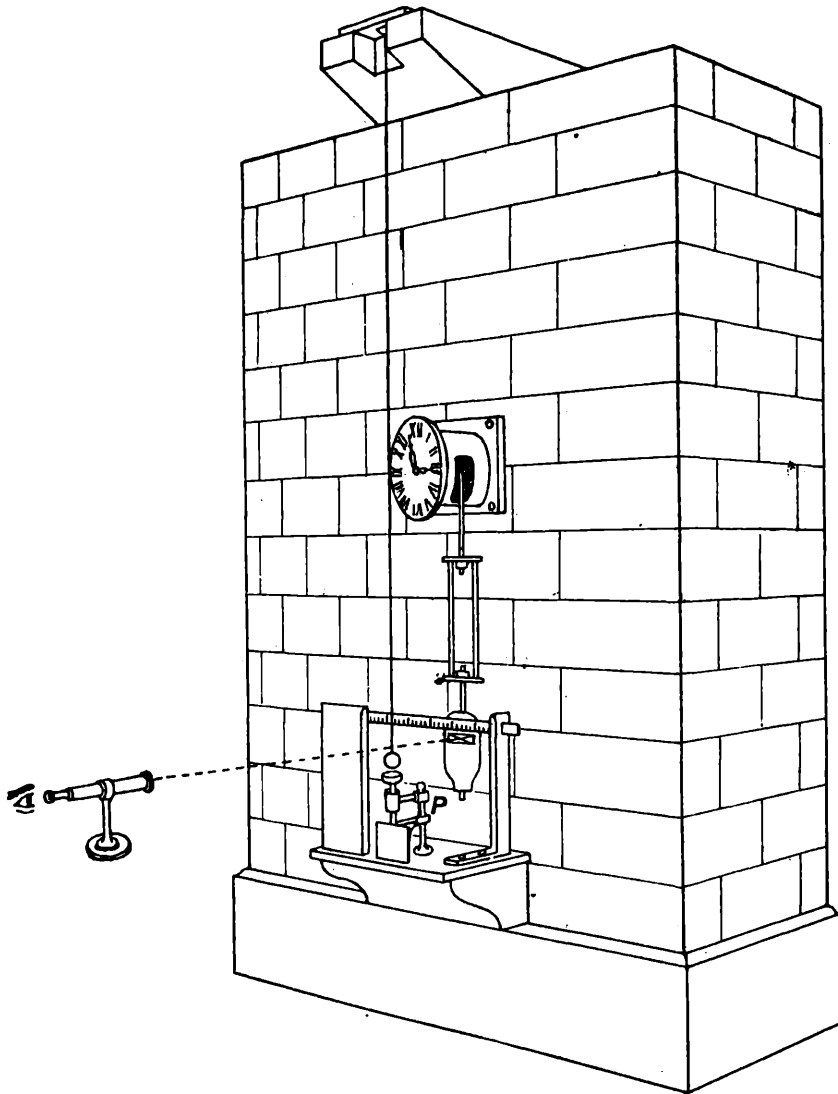


Fig. 233.

3. **Método de las coincidencias.** — Si dos péndulos de frecuencias diferentes oscilan uno frente de otro, ambos pasarán, después de un cierto tiempo, simultáneamente, en la misma dirección, por la vertical que corresponde a la posición de reposo, en cuyo caso se dice que ha tenido lugar una *coincidencia*.

En efecto, designemos con A y B , dos péndulos, de los cuales el primero tenga un tiempo de oscilación menor que el otro. En cierto instante de tiempo pasará B por el punto de reposo O (fig. 234) moviéndose hacia la derecha;

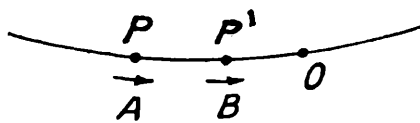


Fig. 234.

encuéntrese el otro A en ese instante en P , moviéndose en el mismo sentido. Transcurrido un intervalo igual al tiempo de oscilación de B , éste se encontrará otra vez en O , mo-

viéndose en el mismo sentido. Transcurrido un intervalo igual al tiempo de oscilación de B , éste se encontrará otra vez en O , mo-

viéndose hacia la derecha, mientras que A debe encontrarse por lo supuesto en P' y así siguiendo llegarán a coincidir. Borda observó las coincidencias marcando sobre la lenteja del péndulo del reloj una cruz de trazos inclinados, en una posición tal que estando en reposo ambos péndulos (fig. 233) y vistos de frente, el hilo del péndulo de medida pasara por el cruce de los trazos. Las observaciones de las coincidencias las realizó con un telescopio.

Es evidente que en el tiempo comprendido entre dos coincidencias el péndulo más rápido debe haber cumplido una oscilación doble más que el otro péndulo. El tiempo entre dos coincidencias lo da directamente el reloj y es numéricamente igual al número N de oscilaciones simples que ha ejecutado su péndulo, que suponemos bate el segundo. El otro, si es menos rápido, ha cumplido, según lo establecido más arriba, $N - 2$ oscilaciones simples. El tiempo de una oscilación simple es, por lo tanto,

$$T = \frac{N}{N - 2} = \frac{1}{1 - \frac{2}{N}}. \quad [2]$$

Es claro que el tiempo transcurrido entre dos coincidencias será tanto mayor cuando menor sea la diferencia entre los tiempos de oscilación de los dos péndulos.

El momento preciso de la coincidencia no puede determinarse, por cuanto los péndulos pasan juntos por la vertical, en el mismo sentido, durante algunas oscilaciones, antes que sea visible una diferencia. La elección de un instante de ese intervalo como instante de la coincidencia produce, en el cálculo del tiempo, un error que es pequeño si la inseguridad es una pequeña fracción del tiempo total.

En efecto, sea de n segundos el error entre dos coincidencias, es decir que en lugar de N se observen $N \pm n$ y en lugar de $N - 2$ oscilaciones del otro péndulo $N - 2 \pm n$. El tiempo que resulta de las observaciones será, pues,

$$T = \frac{N \pm n}{N \pm n - 2} = \frac{1}{1 - \frac{2}{N \pm n}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{N} \left(\frac{1}{1 \pm n/N} \right)} \quad [3]$$

y si nos limitamos al primer término del desarrollo en $\frac{n}{N}$ se tiene

$$T = \frac{1}{1 + \frac{2}{N} \left(1 \mp \frac{n}{N} \right)} = \frac{1}{1 + \frac{2}{N} \mp \frac{2n}{N^2}}, \quad [4]$$

donde se ve claramente que si el error posible n , en la apreciación del tiempo entre dos coincidencias, es una pequeña parte del tiempo total, el error en el valor de T es muy pequeño. La exactitud aumenta si en lugar de dos coincidencias se observan varias.

El tiempo entre dos coincidencias era en el caso de Borda más o menos de 3000 segundos, es decir, $N = 3000$ y la inseguridad en la apreciación de las coincidencias 30 segundos, de modo que el valor máximo de n era de 60 segundos, y, por lo tanto,

$$\frac{2n}{N^2} = \frac{2 \cdot 60}{3000^2} = 1,3 \cdot 10^{-5} \quad [5]$$

magnitud sumamente pequeña con respecto a $1 + 2/N$ y que puede, por lo tanto, despreciarse. Borda y Cassini observaron, además, no el intervalo entre dos coincidencias, sino el tiempo entre cinco coincidencias, con lo que disminuía aún más el error en la medida del tiempo.

4. **Las correcciones.** — A. EL AMORTIGUAMIENTO. — Las oscilaciones disminuyen continuamente de amplitud en virtud de diferentes causas. Por las medidas mismas de Borda resulta que ellas decrecen logarítmicamente, esto es, el cociente entre dos amplitudes sucesivas es constante. Este amortiguamiento produce una modificación en el tiempo de oscilación, de tal modo que si T_0 es el tiempo que corresponde a la ausencia completa de amortiguamiento, el tiempo observado es:

$$T = T_0 \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4\pi^2}}, \quad [6]$$

según se ha visto en el estudio de las oscilaciones, donde γ es el decrecimiento logarítmico. Su valor es muy pequeño con respecto a 2π en los sistemas que oscilan en el aire con pequeña velocidad, de suerte que no influye en el valor de T .

B. INFLUENCIA DE LA AMPLITUD. — Las oscilaciones, si bien pequeñas, no pueden considerarse como de amplitud infinitésima y es menester, por esa causa, introducir una corrección, siendo suficiente multiplicar el segundo miembro de la ecuación por $1 + \theta^2/16$, como ya se dijo. Para tiempos grandes de observación las amplitudes llegan

a tener valores muy diferentes a los valores iniciales, lo que no constituye una dificultad, pues se demuestra que si son θ_i y θ_f los arcos que corresponden a las amplitudes inicial y final del intervalo de tiempo que han durado las observaciones, el tiempo de una oscilación es:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{32} \frac{\theta_f^2 - \theta_i^2}{\ln \frac{\theta_f}{\theta_i}} \right). \quad [7]$$

* PRUEBA. — Supongamos que el tiempo de oscilación se ha medido por el método de las coincidencias, observando varios pasajes simultáneos en el mismo sentido. El número n de oscilaciones será, pues, muy grande.

Sean:

$$\theta_1 = \theta_i, \quad \theta_2, \theta_3, \quad \dots, \quad \theta_n = \theta_f$$

los arcos sucesivos y,

$$T_1, T_2, T_3, \quad \dots, \quad T_n$$

los tiempos de duración de tales oscilaciones simples. Es, pues, con mucha aproximación,

$$T_1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_1^2}{16} \right),$$

$$T_2 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_2^2}{16} \right),$$

.....

$$T_n = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_n^2}{16} \right).$$

Si es T el tiempo total entre las coincidencias que comprenden a las n oscilaciones, se tiene:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(n + \frac{\theta_1^2}{16} + \frac{\theta_2^2}{16} + \dots + \frac{\theta_n^2}{16} \right),$$

la cual, teniendo presente que las oscilaciones decrecen logarítmicamente y que, por lo tanto, es:

$$\begin{aligned} \theta_2 &= k \theta_1 \text{ (}^1\text{)} \\ \theta_3 &= k^2 \theta_1 \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \\ \theta_n &= k^{n-1} \theta_1, \end{aligned}$$

se convierte en

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{\theta_1^2}{16} [1 + k^2 + \dots + k^{2(n-1)}]$$

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{\theta_1^2}{16} \frac{k^{2n} - 1}{k^2 - 1}.$$

Por otra parte, es

$$k = \left(\frac{\theta_n}{\theta_1}\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

o, puesto que n es muy grande,

$$k = \left(\frac{\theta_n}{\theta_1}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Con esta expresión el tiempo T se expresa así:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{16} \frac{\theta_n^2 - \theta_1^2}{\left(\frac{\theta_n}{\theta_1}\right)^{\frac{2}{n}} - 1}.$$

Si se desarrolla en serie a $\left(\frac{\theta_n}{\theta_1}\right)^{\frac{2}{n}}$, teniendo presente que $2:n$ es un número muy pequeño, resulta, con mucha aproximación,

$$T = n \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{1}{32} \frac{\theta_n^2 - \theta_1^2}{\ln \frac{\theta_n}{\theta_1}} \right].$$

(¹) Es, véase el capítulo VIII (n° 10), $\frac{\theta_1}{\theta_2} = e^{\frac{\gamma}{2}}$ si γ es el decrecimiento logarítmico, y, por consiguiente, $k = \frac{1}{\gamma/2}$.

El tiempo medio de una oscilación es, como es notorio, la enésima parte de T . Se tiene así la fórmula establecida.

χ C. INFLUENCIA DEL EMPUJE DEL AIRE. — El empuje del aire disminuye el valor de la fuerza que mueve el péndulo. Si se indican con G y P la aceleración y el peso del cuerpo, y con g y $P - p$ la aceleración y el peso del cuerpo que se observan en el aire, es claro que se tiene:

$$\frac{G}{g} = \frac{P}{P - p} \quad [8]$$

Si ρ representa la densidad del material de la esfera del péndulo y ρ_0 la densidad del aire es

$$\frac{P}{p} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad [9]$$

puesto que es p el empuje, esto es, el peso de un volumen de aire igual al volumen del péndulo. De las dos relaciones anteriores resulta

$$G = g \frac{\rho}{\rho - \rho_0}, \quad [10]$$

fórmula con la cual se corrigen las observaciones de la llamada acción aerostática del aire.

Las medidas de Borda fueron calculadas introduciendo las correcciones enunciadas hasta aquí, resultando para el valor de g en París

$$g = 9,80882 \frac{m}{seg^2}$$

y, por lo tanto, el péndulo que bate el segundo en ese lugar tendría la longitud

$$l = 993,827 \text{ mm.}$$

Existe todavía otra causa de error sobre la cual llamó la atención primeramente Bessel, proveniente de las masas de aire que arrastra el péndulo en su movimiento.

Sobre la manera de eliminar esta causa de error hablaremos, por creerlo más pertinente, en las determinaciones con péndulos reversibles. Mencionaremos también, en esa oportunidad, otras correcciones.

De acuerdo con determinaciones posteriores muy precisas el valor de la aceleración de la gravedad a 45° de latitud es:

$$g_{45^\circ} = 980,616 \text{ cm seg}^{-2}.$$

× 5. **Determinaciones con el péndulo reversible.** — Las determinaciones con el péndulo simple resultan, como se ha visto, bastante complicadas. La corrección proveniente de las masas de aire puestas en movimiento no es tan sencilla.

Además, algunos físicos han estudiado la influencia del hilo encontrando que el error posible es tanto más grande cuanto más delgado es aquel.

La teoría de la reversibilidad de los ejes de suspensión y giración había sido desarrollado por Huygens. Las dificultades que ofrecía la determinación de la longitud del péndulo simple indujeron a Prony, en 1792, a proponer a la Academia de París el uso de un péndulo reversible. La memoria permaneció desconocida, siendo publicada por Defforges veinte años después.

Bohnenberg utilizó también, en 1811, un péndulo reversible para determinar la longitud del péndulo que bate el segundo.

Kater, sin conocer el trabajo de Bohnenberg, construyó un péndulo reversible en el año 1817, con el cual hizo una serie de determinaciones en Londres.

Es, sin embargo, a Bessel a quien se debe el estudio completo de este péndulo. El demostró que si el péndulo tenía una figura exterior simétrica con respecto a su punto medio, las causas de error provenientes de la presencia del aire quedaban eliminadas. La distribución de las masas no puede, en forma alguna, ser simétrica con respecto al centro de figura; la condición de simetría de la figura exterior se puede satisfacer, no obstante, si una de las masas movibles es hueca, como está dibujado en la figura 171. Esta condición no la satisfacía el péndulo de Kater.

Laplace había hecho notar, además, que la arista de un prisma debía considerarse, en realidad, cilíndrica y no como si fuese la intersección de dos planos; esto determinaba, está claro, un error en la medida de longitud. Bessel demostró que si las dos aristas fuesen, en realidad, cilindros iguales, el error quedaba eliminado por la inversión, y si no lo eran, haciendo una nueva determinación, cambiando los cuchillos uno con otro.

Los tiempos de oscilación se obtienen, con mucha exactitud, por el método de las coincidencias. Cuando los tiempos de oscilación que

corresponden a los dos cuchillos son iguales, el péndulo equivale, como ya se ha visto, a un péndulo matemático cuya longitud fuese igual a la distancia entre las dos aristas.

Bessel ha demostrado también que no es menester hacer los dos tiempos exactamente iguales. En efecto, si son z_1 y z_2 las distancias de las aristas de las cuchillas al centro de gravedad del péndulo cuya masa sea M , los tiempos T_1 y T_2 de la oscilación doble están dados por las expresiones:

$$T_1^2 = 4 \pi^2 \frac{M z_1^2 + I_G}{M g z_1} \quad [11]$$

$$T_2^2 = 4 \pi^2 \frac{M z_2^2 + I_G}{M g z_2}, \quad [12]$$

si I_G es el momento de inercia con respecto a un eje paralelo a los cantos de los cuchillos y que pasa por el centro de gravedad.

Si se multiplican esas relaciones por z_1 y z_2 , respectivamente, y se restan dividiendo luego por $z_1 - z_2$ se tiene

$$\frac{z_1 T_1^2 - z_2 T_2^2}{z_1 - z_2} = \frac{4 \pi^2}{g} (z_1 + z_2) \quad [13]$$

y puesto que cuando los tiempos son exactamente iguales, y ese tiempo es T , se tiene

$$T^2 = \frac{4 \pi^2}{g} (z_1 + z_2), \quad [14]$$

en virtud de la propiedad conocida, resulta, comparando las ecuaciones [13] y [14]:

$$T^2 = \frac{z_1 T_1^2 - z_2 T_2^2}{z_1 - z_2}. \quad [15]$$

Si se escribe

$$\tau^2 = \frac{T_1^2 + T_2^2}{2}, \quad \epsilon^2 = \frac{T_1^2 - T_2^2}{2}, \quad [16]$$

es decir,

$$T_1^2 = \tau^2 + \epsilon^2, \quad T_2^2 = \tau^2 - \epsilon^2 \quad [17]$$

y se ponen estos valores en la [14] resulta

$$T^2 = \tau^2 + \epsilon^2 \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = \frac{T_1^2 + T_2^2}{2} + \frac{T_1^2 - T_2^2}{2} \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}. \quad [18]$$

Si son T_1 y T_2 muy poco diferentes se determina a T , con mucha exactitud, midiendo, aunque sea groseramente, las distancias z_1 y z_2 para ello se hace balancear el péndulo alrededor de una arista o de un hilo tendido horizontalmente.

6. **El péndulo de Repsold.** — La Comisión internacional que corría con los trabajos relativos a la medición de un grado en la Europa

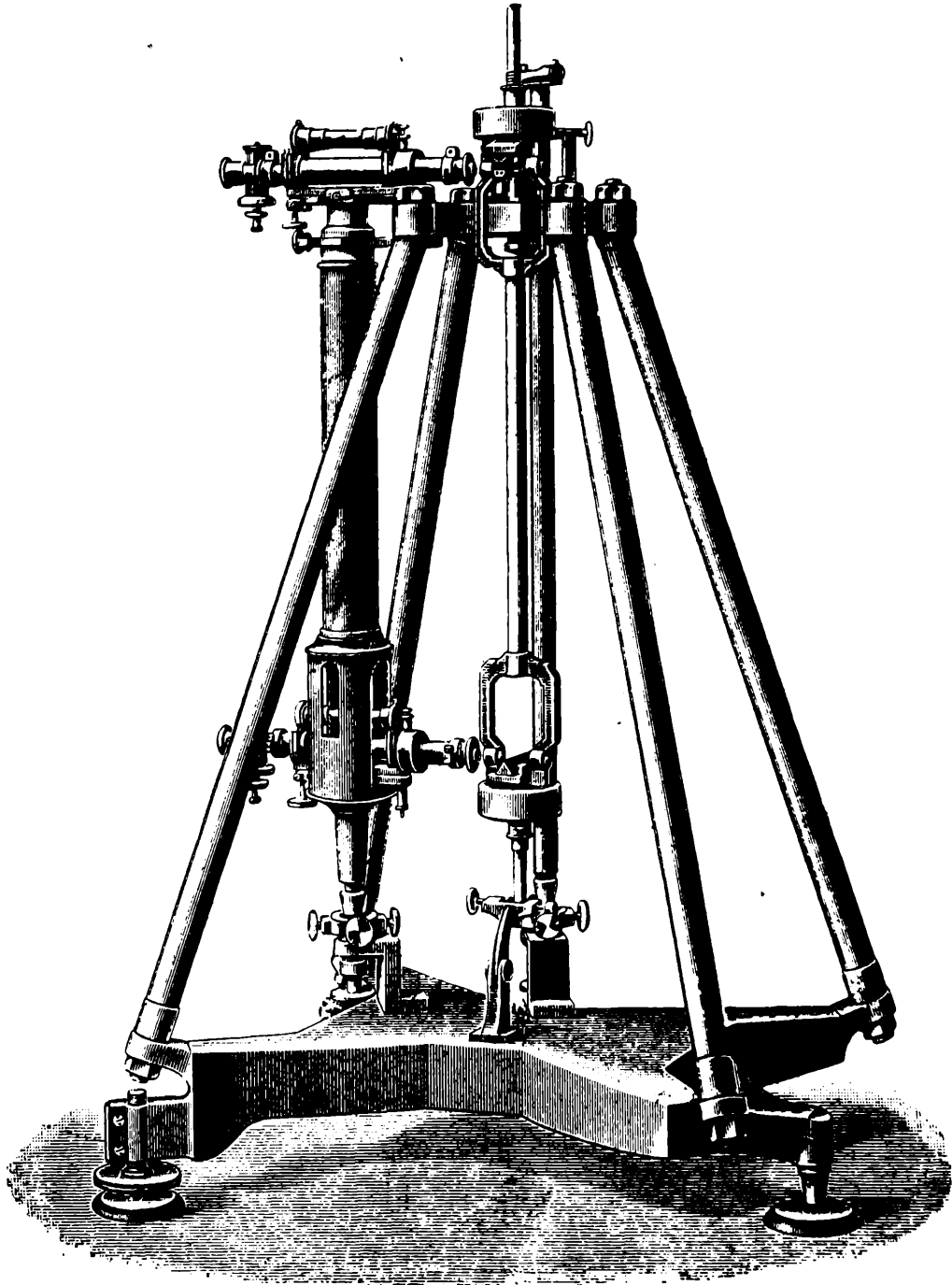


Fig. 235.

media, incluyó en el programa determinaciones de la aceleración de la gravedad y encargaron a Repsold, de Hamburgo, la construcción del péndulo reversible que se utilizaría al efecto.

Repsold construyó, en el año 1860, un péndulo semejante al representado en la figura 235, ajustándose rigurosamente a las prescripciones que derivaban de los trabajos de Bessel. Los cuchillos son intercambiables y la figura completamente simétrica al rededor del punto medio.

El soporte construído por Repsold era de tres pies. En la figura se trata de una construcción de la Sociedad de Ginebra.

El soporte lleva lateralmente un comparador para la medida de la distancia entre las cuchillas.

Las oscilaciones del péndulo hacen vibrar al soporte, fenómeno que puede influir mucho en la exactitud de las determinaciones. Particularmente en los soportes transportables es necesario atender a ese hecho. Existen diferentes métodos para determinar la influencia de tales oscilaciones.

El comandante Defforges ha construído un sistema constituído por dos péndulos reversibles, del mismo peso pero de distinta longitud, y con un solo par de cuchillos adaptable a ambos. La teoría muestra que por la medida de los tiempos de oscilación T_1 y T_2 con los dos péndulos de longitudes l_1 y l_2 pueden eliminarse todas las causas de error, incluso las debidas a las oscilaciones del soporte, siendo

$$T_1^2 - T_2^2 = \frac{4\pi^2}{g} (l_1 - l_2). \quad [19]$$

× 7. La variación de g en la superficie de la tierra. — A. LAS FÓRMULAS DE CLAIRAUT Y DE HELMERT. — La primera comprobación de que la aceleración de la gravedad no tiene el mismo valor en todos los lugares de la superficie de la tierra, es debida al astrónomo Richer, quien viajó en el año 1672, de París (latitud $48^\circ 50'$) a Cayena, latitud $4^\circ 46'$, a fin de efectuar observaciones del planeta Marte. La expedición llevaba consigo un reloj cuyo péndulo batía en París el segundo. Se comprobó que en Cayena adelantaba 2 y medio minutos por día, siendo menester acortarlo 3 milímetros para que su marcha fuese normal; de regreso a París fué necesario alargar el péndulo en esos 3 milímetros.

Huygens y Newton explicaron el hecho diciendo que, teniendo en cuenta la ley de atracción de las masas, era necesario admitir que la forma de la tierra no era esférica. Ambos habían establecido, además, ya antes, que puesto que primitivamente la tierra debería haberse encontrado en estado pastoso, la rotación tenía que haber pro-

ducido un achatamiento en los polos y un abultamiento en el ecuador. La atracción terrestre debería aumentar, por lo tanto, desde el ecuador hacia los polos.

Newton calculó el achatamiento, esto es, el cociente entre la diferencia de los diámetros ecuatorial y polar y el primero, haciendo, para simplificar los cálculos, la suposición de que la tierra tuviese una densidad constante, encontrando el valor $1/230$.

Ese achatamiento debía revelarse por mediciones directas, pues, en ese caso, la longitud de arcos de meridiano de un grado aumentaría también del ecuador hacia los polos.

Para la investigación de esa cuestión, la Academia francesa mandó dos expediciones encargadas de determinar la longitud del arco de meridiano de un grado: una a Perú y otra a Suecia. La primera fué dirigida por Bouger y por La Condamine; la segunda por Maupertuis, quien tuvo como colaboradores a Clairaut y a Celsius. Estas expediciones realizaron sus medidas entre los años 1735 y 1736.

El resultado de las medidas fué la confirmación de la existencia de un achatamiento en los polos; el valor de la excentricidad era del mismo orden que el encontrado teóricamente por Newton.

Otra causa de la variación de g con la latitud es debida a la fuerza centrífuga que despierta el movimiento de la tierra.

Clairaut publicó en 1743 su tratado *Théorie de la figure de la terre*, donde, bajo la suposición de que la tierra es un elipsoide achatado de revolución, animado de un movimiento de rotación, deduce, que entre las aceleraciones de la gravedad en el polo, esto es, a la latitud 90° y en el ecuador, latitud 0° , la aceleración centrífuga f_0 en el ecuador y la excentricidad ϵ de la tierra, debe existir la relación

$$\frac{g_{90} - g_0}{g_0} + \epsilon = \frac{5}{2} \frac{f_0}{g_0} \quad [20]$$

y que los valores de la aceleración sobre la superficie terrestre deben estar representados por una expresión de la forma

$$g_\varphi = g_0 (1 + n \operatorname{sen}^2 \varphi) \quad [21]$$

donde n es una constante cuyo valor está dado, como resulta de la misma fórmula, por la expresión

$$n = \frac{g_{90} - g_0}{g_0}, \quad [22]$$

es decir, por la diferencia entre los valores de la aceleración de la gravedad en el polo y en el ecuador dividido por esta última.

Como el valor de g_{90° no es accesible a las medidas, el camino que hay que seguir es determinar n empíricamente, esto es, determinar un valor de n tal que se pueda, por medio de la [21], representar de una manera correcta los valores de g que se conocen.

Helmert ha dado un valor de n que permite la representación de una manera muy aproximada de todos los valores de g que se conocen sobre el globo terrestre. Ese valor es

$$n = 0,00531 . \quad [23]$$

Se tiene así

$$g_\varphi = 978,00 (1 + 0,00531 \operatorname{sen}^2 \varphi) \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2} , \quad [24]$$

donde se ha puesto el valor de la aceleración g_0 en el ecuador, fórmula que se conoce con el nombre de fórmula de Helmert. De la [24] resulta para la aceleración en el polo el valor

$$g_{90} = 983,19 \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2} .$$

Por la [20] se puede calcular ahora el valor de la excentricidad e . La aceleración centrífuga en el ecuador es

$$f_0 = \omega^2 R , \quad [25]$$

si ω es la velocidad angular de la tierra y R su radio ecuatorial. Es, por otra parte,

$$\omega = \frac{2 \pi}{86164,09} \frac{1}{\text{seg}} \quad [26]$$

y

$$R = 6.370.284 \text{ m} \quad [27]$$

y, por lo tanto,

$$\frac{f_0}{g_0} = 0,0034635 . \quad [28]$$

Así resulta de la [20]

$$\epsilon = \frac{1}{298,7} \quad [29]$$

Los valores de ϵ obtenidos por medición directa de los arcos de meridiano y por otros métodos astronómicos están próximos a

$$\epsilon = \frac{1}{297} \quad [30]$$

Se ve así, claramente, la importancia de las determinaciones de g como medio de conocer la forma de la tierra.

B. LA ACCIÓN EXCLUSIVA DE LA FUERZA CENTRÍFUGA. — La acción exclusiva de la fuerza centrífuga puede calcularse de una manera sencilla, suponiendo que la tierra es esférica.

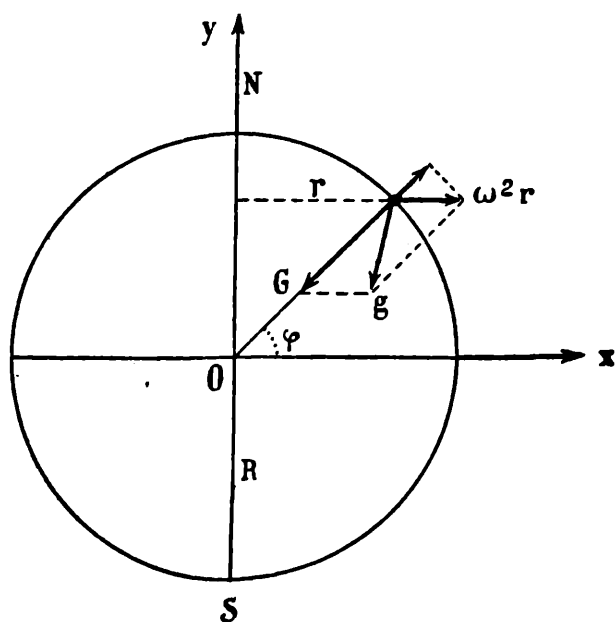


Fig. 236.

Si la tierra estuviese en reposo, ejercería, sobre la unidad de masa de un cuerpo cualquiera, una fuerza de atracción dirigida hacia el centro, fuerza que indicaremos con G . Pero en virtud de la rotación, actúa, a la vez, sobre todo cuerpo inmóvil sobre ella, una fuerza centrífuga. El valor de esta fuerza sobre la unidad de masa situada a la latitud φ es $\omega^2 r$, si ω es la velocidad angular de la tierra y r la distancia al eje (fig. 236). La resultante de G y $\omega^2 r$ es la ace-

leración g que observamos en las mediciones directas; su dirección difiere de la vertical.

Si se indica con R el radio de la tierra, se tiene

$$\omega^2 r = \omega^2 R \cos \varphi = f_0 \cos \varphi \quad [31]$$

aceleración que alcanza su mayor valor en el ecuador donde es $\varphi = 0$. Por la [28] del párrafo anterior se tiene

$$f_0 = 0,0034635 g_0, \quad [32]$$

lo que hace notorio que $\omega^2 r$ es muy pequeña respecto a g_0 y, por lo tanto, respecto a G . Puede, entonces, escribirse

$$\begin{aligned} g^2 &= G^2 + (\omega^2 r)^2 - 2 \omega^2 r G \cos \varphi \\ &= G^2 - 2 \omega^2 r G \cos \varphi \end{aligned} \quad [33]$$

de donde

$$g = G \sqrt{1 - \frac{2 \omega^2 r \cos \varphi}{G}} = G - \omega^2 r \cos \varphi$$

o

$$g_\varphi = G - \omega^2 R \cos^2 \varphi = G - f_0 \cos^2 \varphi \quad [34]$$

y, por consiguiente,

$$g_0 = G - f_0, \quad [35]$$

fórmula ésta que no es aproximada sino rigurosa.

Introduciendo en la [34] el valor G que da la [35] resulta

$$g_\varphi = g_0 - f_0 \operatorname{sen}^2 \varphi \quad [36]$$

y por la [31] se obtiene, finalmente,

$$g_\varphi = g_0 (1 - 0,0034635 \operatorname{sen}^2 \varphi). \quad [37]$$

En el coeficiente 0,0034635 se manifiesta la acción de la fuerza centrífuga, mientras que el coeficiente 0,00531 que figura en la fórmula [24] proviene a la vez de esa causa y del achatamiento de la tierra.

C. DETERMINACIÓN DE LAS VARIACIONES DE g . EL PÉNDULO DE STERNECK. — El valor de la aceleración de la gravedad en un lugar se determina haciendo una serie de determinaciones en él y en sus alrededores, pues existen variaciones pequeñas provenientes de diversas causas, como las diferencias de nivel, la proximidad de montañas, etc.

Para las determinaciones de las variaciones de la gravedad entre dos lugares cercanos, esto es, para determinar las pequeñas variaciones locales, von Sterneek ha construído un péndulo que bate el medio segundo, resultando así un aparato fácilmente transportable.

En la figura 236 *a* puede verse una de las construcciones. El péndulo *G S* tiene una longitud de 25 cm y está construido, por lo común,

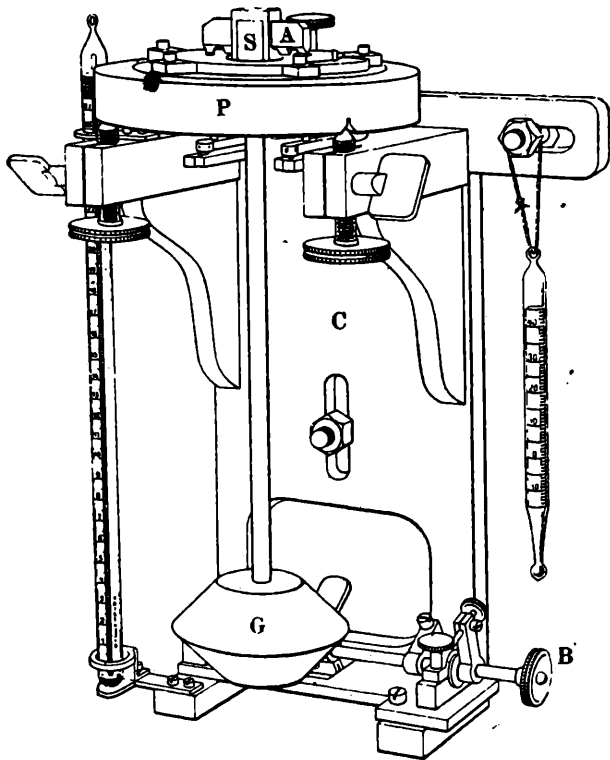


Fig. 236 *a*.

de bronce que se recubre electrolíticamente de una capa de oro. La lenteja *G* cuyo peso es de 1 Kg, aproximadamente, tiene la forma de dos conos truncados unidos por la base, siendo la altura total de 4 cm, el diámetro mayor de 8 cm y los dos menores de 4 cm. La barra cilíndrica de la cual pende es de 8,5 mm de espesor. En el otro extremo lleva el dispositivo de fijación de un prisma de ágata *A* una de cuyas aristas es el eje de rotación y un pequeño espejo *S*. El soporte está construido de modo que son poco menos que imposible las oscilaciones forzadas.

Lo importante es, sin embargo, el método propuesto por él, y que consiste en comparar simultáneamente, con el mismo reloj, los péndulos situados en las dos estaciones de referencia; el reloj interrumpe cada medio segundo un circuito eléctrico, originando cada medio segundo una chispa, las que se reflejan sucesivamente en espejitos fijos en la parte superior de los péndulos, normalmente al plano de oscilación.

Si los péndulos están en reposo y se observan las chispas a través de los espejos por medio de un telescopio, éste puede desplazarse hasta que las imágenes de aquella se formen sobre el hilo horizontal del retículo. Si los péndulos están en movimiento, esto ocurre únicamente en el momento de las coincidencias.

Para la demostración en clase puede hacerse una instalación como la que indica la figura 237. Por reflexión sobre los dos espejos, se proyecta con una lente *L* sobre la escala *E*, la imagen de un foco de luz *F*; cuando los dos péndulos están en coincidencia la imagen perma-

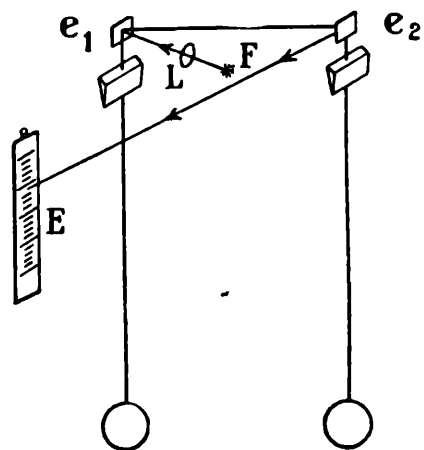


Fig. 237.

necé quieta sobre la escala; en los demás casos oscila sobre ella, al rededor de la posición que corresponde al estado de reposo.

Este mismo método se ha empleado haciendo que uno de los péndulos sea el de un reloj astronómico.

8. La balanza gravitacional de Threlfall y Pollock. — Threlfall y Pollock han construído alrededor del año 1899 una balanza a torsión-portátil, que permite medir estáticamente, con mucha exactitud, variaciones muy pequeñas de la gravedad.

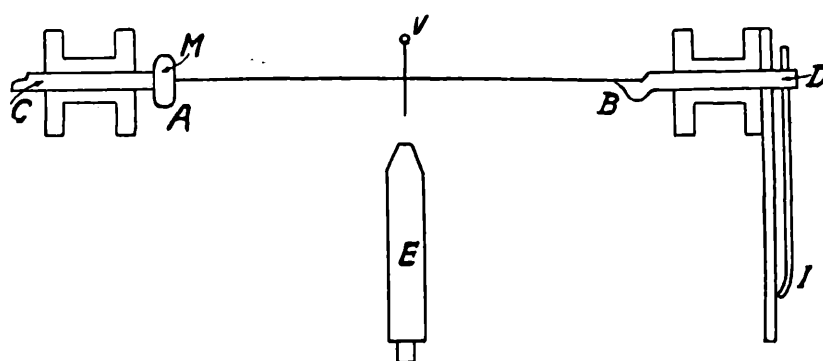


Fig. 238.

El aparato consiste (fig. 238) en un hilo delgado *AB* de cuarzo, fijo a los dos cilindros *C* y *D*; la tensión se regula desplazando el cilindro *C*, y es mantenida por el muelle *M*. El hilo tiene soldado en su punto medio una varillita *V* de bronce dorado de 5,3 centímetros de largo y de un peso de 0,018 gramos; el centro de gravedad no cae sobre el hilo, resultando, así, una cupla que lo tuerce. Para mantener la varilla en posición horizontal, lo que se observa con un microscopio *E*, es menester torcer el hilo de cuarzo en sentido contrario, girando el índice *I*, que está provisto de nonius y que se mueve sobre un limbo graduado. Eran necesario para ello, en la construcción de referencia, tres vueltas completas.

Si se pasa de un lugar a otro, donde la gravedad es mayor, aumenta la cupla de torsión de la varilla y es menester, para mantenerla horizontal, girar más el índice *I*. El instrumento se calibra determinando las posiciones del índice en dos estaciones de las cuales se conocen los valores absolutos de *g*.

9. La Balanza de Eötvöss. — Las medidas más precisas con los péndulos de Sterneck y similares solo permiten determinar variaciones de la aceleración de la gravedad iguales o superiores a $0,001 \text{ cm seg}^{-2}$. Quedan fuera del alcance de esos instrumentos las perturba-

ciones de la gravitación producidas por pliegues de las masas de la costra terrestre o por la presencia de masas de densidad diferente a la de sus rocas.

El conocimiento de esas perturbaciones es de gran importancia no solo para la geología y, por lo tanto, para la minería sino también para algunos de los problemas de la geodesia. Para observarlas Eötvös ha ideado una balanza de torsión que no mide la aceleración mis-

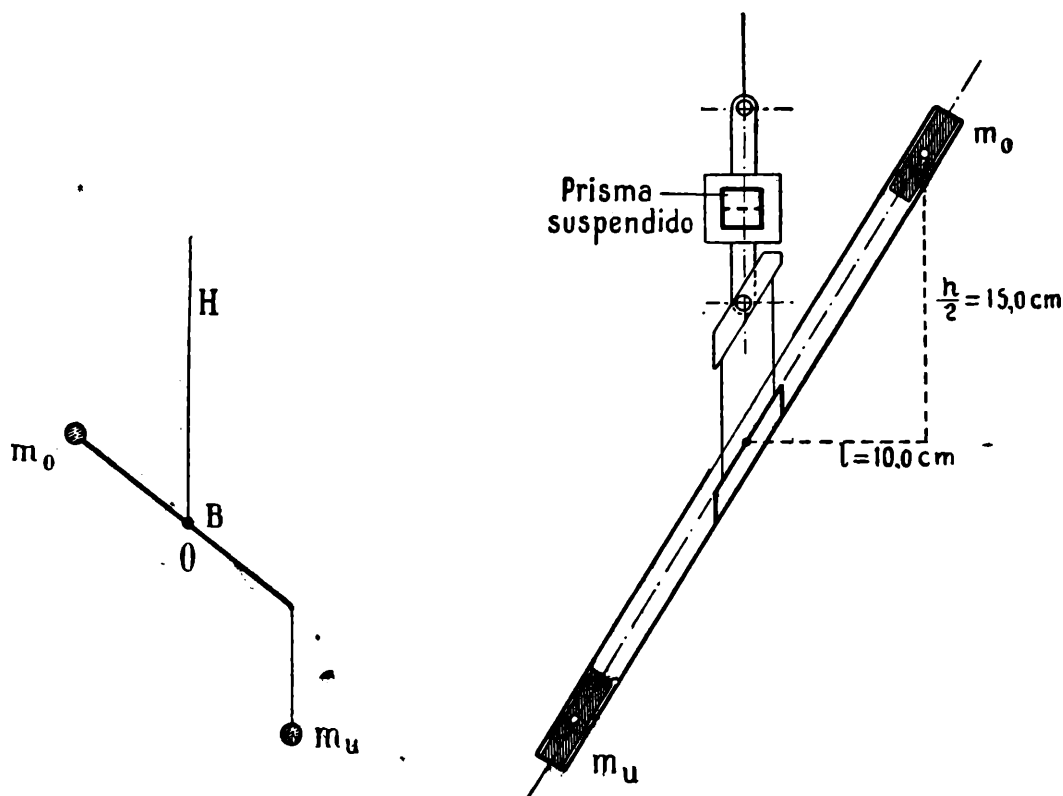


Fig. 238 a.

Fig. 238 b.

ma de la gravedad sino su gradiente horizontal y ciertas magnitudes que permiten conocer la forma de las *superficies de nivel* del campo gravitacional (1).

Damos a continuación la idea de su construcción y funcionamiento. De un hilo H de platino-iridio, fig. 238 a, de 0,04 mm de diámetro y unos 56 cm de longitud pende un tubo de aluminio B de 40 cm de longitud cuyos extremos están cargados con masas m_0 y m_u de

(1) Nos saldríamos del marco de esta obra si desarrolláramos la teoría matemática de este instrumento. El lector puede informarse de la misma entre otros artículos en los siguientes: R. EÖTVÖSS, *Untersuchungen über Gravitation und Erdmagnetismus Wied. Ann.* 59, 354, 1896; W. SCHWEYDAR, *Die photographisch registrierende Eötvösche Torsionswaage etc. Zeitschrift für Instrumentenkunden*, XLI, 175, 1921.

30 gramos cada uno. La primera está fija al extremo mismo del brazo y la otra pende de un delgado hilo de 60 cm de longitud.

Si el campo gravitacional fuese homogéneo en el lugar en que se encuentra la balanza no se produciría ni giración del brazo B ni torsión del hilo de suspensión. Eso sucedería si las superficies de nivel de aquel campo fuesen esféricas pues en tal caso la fuerza de gravedad se encuentra en el plano que forman el eje de la barra B y el hilo H . A causa de la forma general de la tierra y de las irregularidades de la distribución de las masas en su superficie y debajo de ésta el campo gravitacional no es homogéneo; las superficies de nivel se apartan, más o menos, en todo lugar de la forma esférica. Las fuerzas que obran sobre las masas m_o y m_u , respectivamente, no caen en el plano antes citado, de suerte que se engendra un momento de rotación que hace girar al brazo B y que tuerce al hilo H .

Con estas balanzas se pueden determinar gradientes del orden 1×10^{-9} CGS. La suspensión pende de un soporte especial y está protegida por tres camisas metálicas. Es menester determinar las posiciones de la suspensión para varios azimutes, lo que se logra registrándolos fotográficamente.

La casa Askania construye una balanza en la cual el brazo de la suspensión que lleva las masas m_o y m_u está inclinada como indica la figura 238 b. En la figura 238 c se ve el aspecto exterior de la balanza de este tipo que acaba de adquirir el Instituto de Física de la Universidad de La Plata.

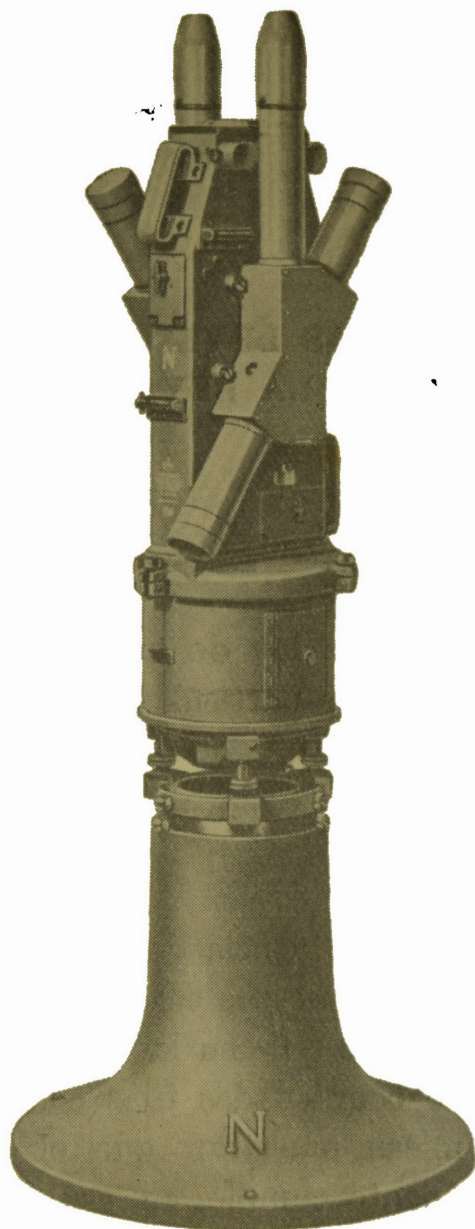


Fig. 238 c.

CAPITULO XV

LAS LEYES DEL MOVIMIENTO DE LOS PLANETAS. LA LEY DE LA ATRACCIÓN DE LAS MASAS. BALANZAS DE PRECISIÓN

A. — LEYES DE KEPLER. LEY DE ATRACCIÓN DE NEWTON

× 1. **La ley de atracción.** — La ley de atracción de Newton dice que dos partículas cualesquiera de masas m_1 y m_2 situadas a la distancia r una de otra se atraen con una fuerza proporcional a

$$\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

La evidencia de esta ley resulta de la observación del movimiento de los cuerpos celestes.

Si se refieren las posiciones de un planeta cualquiera a un sistema de coordenadas fijas con respecto al sol, las observaciones astronómicas muestran que el movimiento cumple, en ese sistema de coordenadas, las siguientes leyes, deducidas primeramente por Kepler de las observaciones de Tycho Brahe:

1ª Cada uno de los planetas se mueve sobre un elipse, en uno de cuyos focos se encuentra el sol;

2ª El segmento de recta que une al sol con el planeta — radio vector — describe en tiempos iguales áreas iguales;

3ª El cociente de dividir el cuadrado de la duración del año por el cubo del eje mayor de la elipse, tiene el mismo valor para todos los planetas.

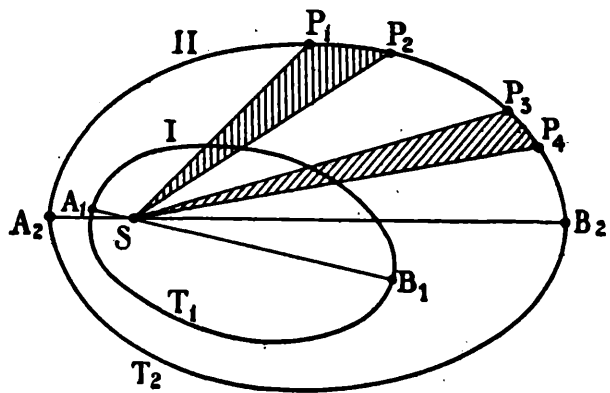


Fig. 239.

La significación de estas leyes es la siguiente. Sean (fig. 239) las líneas señaladas con los números romanos *I* y *II* las trayectorias de dos cuerpos celestes, trayectorias que estarán, en general, en diferente plano. Por la primera ley son elipses en uno de cuyos focos se encuentra el sol, *S*; por la segunda ley, si el planeta que se mueve sobre la *II*, por ejemplo, ha tardado el mismo tiempo en recorrer el segmento $P_1 P_2$ que el $P_3 P_4$, las áreas sombreadas son iguales; por la tercera ley si T_1 y T_2 son los tiempos de revolución de los dos cuerpos considerados y $A_1 B_1$ y $A_2 B_2$ los ejes mayores de sus respectivas elipses es:

$$\frac{T_1^2}{A_1 B_1^3} = \frac{T_2^2}{A_2 B_2^3} = \text{const.}$$

La forma de una elipse está determinada por su excentricidad, es decir, por la relación entre la distancia que separa a los focos y el eje mayor.

La excentricidad es, en el caso del planeta Marte, alrededor de 0,09; en la órbita de Mercurio es mayor, pero en la de los demás planetas mucho menor. Las órbitas son, pues, con mucha aproximación, círculos.

Veamos cómo se cumple la tercera ley de Kepler tomando los datos relativos a la Tierra y a Marte.

En lugar de los ejes mayores, podemos hablar de los diámetros de los círculos correspondientes. Es claro que también el cociente entre el cuadrado del tiempo de revolución y el cubo de los radios de esos círculos debe ser constante. Se tiene:

para Marte:

$$r_1 = 226,5 \cdot 10^6 \text{ Km} = 2,265 \cdot 10^{13} \text{ cm}$$

$$T_1 = 686,98 \text{ días} = 5,9355 \cdot 10^7 \text{ seg}$$

$$\frac{r_1^3}{T_1^2} = 3,2985 \cdot 10^{24} \frac{\text{cm}^3}{\text{seg}^2}$$

y para la Tierra:

$$r_2 = 148,65 \cdot 10^6 \text{ Km} = 1,4865 \cdot 10^{13} \text{ cm}$$

$$T_2 = 365,25 \text{ días} = 3,1558 \cdot 10^7 \text{ seg}$$

$$\frac{r_2^3}{T_2^2} = 3,2982 \cdot 10^{24} \frac{\text{cm}^3}{\text{seg}^2}$$

En el caso de la Tierra y Marte la exactitud de la ley es, pues, muy grande.

En el movimiento de los planetas se puede, por lo tanto, substituir con buena aproximación, las elipses por circunferencias en cuyo centro se encuentra el Sol.

Los radios r de esos círculos, o, lo que es lo mismo, las distancias medias al Sol y los tiempos T de revolución a su rededor, están dados, con buena aproximación, en el cuadro que sigue, donde se ha tomado como unidad de distancia la que separa a la Tierra de Sol, cuyo valor es $r = 148,65 \cdot 10^6$ K.m.

	Radio	Tiempo
Venus	0,723	325 días
La Tierra	1	365 días = 1 año
Marte	1,524	1 año, 322 días
Júpiter	5,203	11 años, 315 días
Saturno	9,54	29 años, 167 días

2. Deducción elemental de la ley de gravitación. — Considerando circulares a las órbitas se deduce, fácilmente, de las leyes de Kepler, la ley de gravitación.

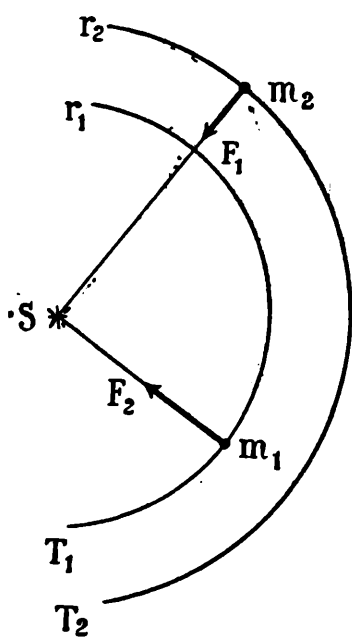


Fig. 240.

Puesto que los planetas describen trayectorias curvas, debe actuar sobre ellos una fuerza centrípeta que compense, en todo punto, la acción de la fuerza centrífuga.

Newton tuvo el pensamiento de que esa fuerza centrípeta proviene de la atracción del Sol sobre los planetas, y de que esa atracción era exactamente de la misma naturaleza que la que determina la caída de los cuerpos en la superficie de la Tierra.

Si la trayectoria es un círculo, la segunda ley dice que la velocidad angular del movimiento es constante. Existe, entonces, solamente una aceleración dirigida hacia el centro

es decir, hacia el Sol, cuyo valor vamos a calcular. Consideremos dos planetas cuyas trayectorias circulares tengan los radios r_1 y r_2 ; sean m_1 y m_2 sus masas y T_1 y T_2 los tiempos respectivos de revolución (fig. 240).

Las fuerzas centrípetas F_1 y F_2 que provienen, como se supuso, de la atracción del Sol son:

$$F_1 = \frac{4 \pi^2 m_1 r_1}{T_1^2} \quad [1]$$

$$F_2 = \frac{4 \pi^2 m_2 r_2}{T_2^2} \quad [2]$$

de donde

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 r_1}{T_1^2} \cdot \frac{T_2^2}{m_2 r_2} \quad [3]$$

Por la tercera ley de Kepler se tiene:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \quad [4]$$

de modo que la [3] puede escribirse

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{m_1}{r_1^2}}{\frac{m_2}{r_2^2}}, \quad [5]$$

relación que se cumple únicamente si es

$$F_1 = C \frac{m_1}{r_1^2} \quad F_2 = C \frac{m_2}{r_2^2}, \quad [6]$$

donde C es una constante.

Como los planetas pueden ser cualesquiera, resulta que la constante C es la misma para todos ellos.

La fuerza de atracción que ejercería el Sol sobre la unidad de masa de diferentes planetas, supuestos colocados a la misma distancia, sería exactamente la misma, o, lo que es igual, las aceleraciones centrípetas $\frac{C}{r_1^2}$, $\frac{C}{r_2^2}$, ..., $\frac{C}{r_n^2}$ serían iguales para todos los planetas supuestos situados a la misma distancia del Sol.

Es decir, las ecuaciones [6] nos dicen que el Sol no tiene favoritos entre sus satélites, sino que los atrae a todos en la misma forma. Esto corresponde a nuestra experiencia terrestre, según la cual todos los cuerpos caen con la misma aceleración.

La suposición de Newton de que aquellas aceleraciones indican fuerzas de la misma naturaleza que las de la experiencia en la Tierra,

conduce a admitir el principio de la igualdad de la acción y de la reacción, de donde resulta que todo planeta reacciona sobre el Sol atrayéndolo con una fuerza igual y opuesta a la que éste ejerce sobre él.

Si es γ la aceleración que el Sol produce sobre un planeta de masa m , por ejemplo, y Γ la aceleración que el planeta determina sobre el Sol, el principio de la igualdad de la acción y reacción exige que sea

$$m \gamma = M \Gamma, \quad [7]$$

si M indica la masa del Sol.

La constante C debe ser, para que esta igualdad se cumpla:

$$C = k M \quad [8]$$

pues así la fuerza de atracción entre el Sol y el planeta es

$$F = k \frac{m M}{r^2} \quad [9]$$

y

$$\gamma = k \frac{M}{r^2} \quad \Gamma = k \frac{m}{r^2} \quad [10]$$

las aceleraciones que se imprimen recíprocamente el Sol y el planeta en virtud de la ecuación fundamental de la dinámica. Con estas relaciones [10] queda satisfecha, efectivamente, la [7].

Está claro que la magnitud k no depende de la naturaleza de los cuerpos: es una constante universal que representa la fuerza con que se atraen dos masas unitarias situadas a la unidad de distancia. Se denomina *constante de gravitación*.

3. Comprobación de la hipótesis de Newton por el movimiento de la Luna. — Indiquemos ahora con M la masa de la Tierra y con m la masa de la Luna. Si R es la distancia entre los centros de masa de ambos cuerpos, la fuerza de atracción es, suponiendo las masas concentradas en aquellos puntos:

$$F = k \frac{M m}{R^2}. \quad [11]$$

La aceleración γ que determina en la Luna la atracción de la Tierra es, entonces:

$$\gamma = k \frac{M}{R^2}. \quad [12]$$

En la superficie de la Tierra, una masa μ cualesquiera cae con la aceleración g , por obra de la fuerza de atracción de aquella, cuya medida es el peso P . Se tiene, pues:

$$P = \mu g = k \frac{M \mu}{r^2}, \quad [13]$$

si r es el radio de la Tierra. Al poner la misma constante k en esta última fórmula se hace uso de la suposición de Newton de la identidad entre las atracciones terrestre y cósmica.

La aceleración g es, por lo tanto,

$$g = k \frac{M}{r^2}. \quad [14]$$

Comparando la [14] con la [12] se obtiene para la aceleración de la Luna:

$$\gamma = \frac{r^2}{R^2} g. \quad [15]$$

La distancia entre el centro de la Tierra y el de la Luna es, en números redondos, 60 veces el radio de la Tierra, esto es $R = 60 r$. Tomando para g el valor 981 cm/seg^2 se tiene:

$$\gamma = \frac{1}{60^2} g = \frac{981}{3600} = 0,272 \text{ cm seg}^{-2}. \quad [16]$$

Por otra parte, la aceleración γ de la Luna es, como es evidente, la aceleración centrípeta, es decir:

$$\gamma = \frac{4 \pi^2 R}{T^2}, \quad [17]$$

donde T es el tiempo de revolución de la Luna, que es casi de 28 días. Como el valor de r es 6.370.284 metros, resulta

$$\gamma = 0,270 \text{ cm seg}^{-2}.$$

Se obtiene, como se ve, una concordancia muy grande entre los dos valores de g obtenidos por métodos diferentes, lo que prueba la exactitud de la hipótesis de Newton.

*** 4. Algo más sobre la mecánica de los cuerpos celestes.**—Mecánicamente la observación del movimiento de los planetas es de im-

portancia, por cuanto se obtiene así una comprobación categórica de las leyes de la mecánica, vale decir, de los tres principios fundamentales: el principio de inercia, el principio de masa y el de la igualdad de la acción y de la reacción.

Consideremos dos cuerpos celestes vecinos, de masas m_1 y m_2 y prescindamos por el momento del resto de los cuerpos, lo que significa admitir que no están sometidos a otra influencia que la atracción recíproca.

Si existe, como ya se ha supuesto, una fuerza recíproca de atracción sobre la línea de unión, y si vale el principio de la igualdad de la acción y de la reacción, el centro de gravedad del sistema estará en reposo o animado de un movimiento rectilíneo y uniforme. Además, el sistema puede girar alrededor del centro de gravedad de tal manera que el momento de inercia del sistema con respecto a él, multiplicada por la velocidad angular, sea constante, pues de la ecuación.

$$\mathcal{M} = \frac{d\mathcal{J}}{dt}, \quad [19]$$

donde \mathcal{M} es el momento de las fuerzas exteriores con respecto al centro de gravedad e \mathcal{J} el impulso, resulta, puesto que $\mathcal{M} = 0$:

$$\mathcal{J} = \text{const} \quad [20]$$

cuyo valor, en el caso que nos ocupa, es

$$\mathcal{J} = I \omega,$$

si I es el momento de inercia del sistema alrededor del centro de giración y ω la velocidad angular.

La ecuación [20] dice que el vector $I\omega$ es constante en magnitud y dirección,

esto es, el plano en que se mueven los dos cuerpos tiene una posición invariable en el espacio. Sea ese plano el del dibujo y supongamos, lo que es permitido por el principio de independencia entre las rotaciones y las traslaciones, que el centro de gravedad G está en reposo, o, lo que es lo mismo, que estudiamos el movimiento situándonos sobre el plano mencionado, que se mueve a su vez con la velocidad de traslación de G .

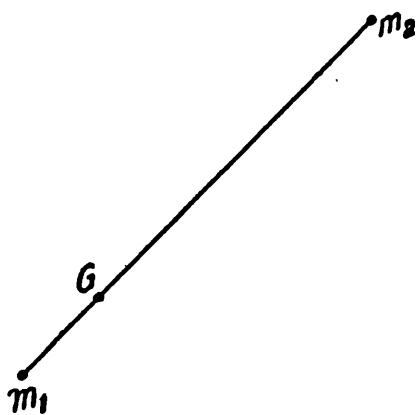


Fig. 241.

El movimiento de m_1 y m_2 sobre ese plano consiste en lo siguiente: en todo momento la recta que une a m_1 con m_2 (fig. 241) pasa por el punto G fijo sobre el plano dado, debiendo ser siempre:

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 \quad [21]$$

si r_1 y r_2 son las respectivas distancias al centro elegido como origen.

Las masas m_1 y m_2 pueden alejarse o girar de tal manera que se cumplan a la vez la [21] y la [20] que es para este caso:

$$(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \omega = \text{const}, \quad [22]$$

si ω es la velocidad angular con que gira el segmento de recta que une los cuerpos.

En la figura 242 está representado el movimiento. Si P_1 y P_2 son las posiciones de los dos cuerpos en un momento dado, en un instante posterior las posiciones serán, por ejemplo, las P_1' y P_2' tales que la recta de unión pasa por G y que se cumplen, según la [21], las relaciones

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{GP_2}{GP_1} = \frac{GP_2'}{GP_1'}. \quad [23]$$

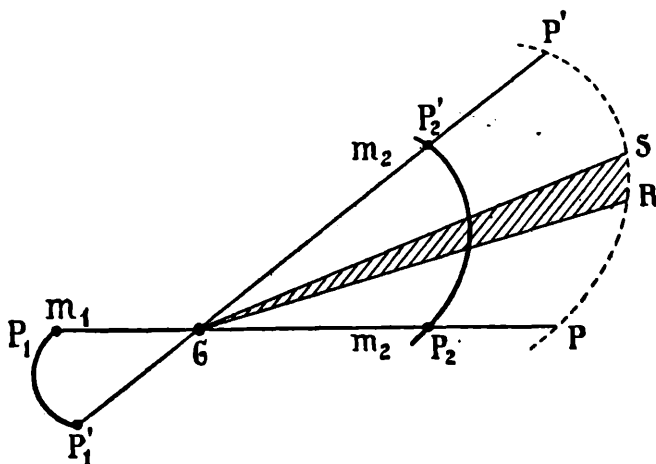


Fig. 242.

Los habitantes de los cuerpos no percibirán el movimiento propio en el espacio;

los de un planeta verán el movimiento del otro como si ellos mismos estuviesen en reposo y el otro cuerpo se moviera a su alrededor.

El movimiento aparente de m_2 , visto desde m_1 , se obtiene llevando a partir de G , donde supondremos a m_1 en reposo, y en dirección del otro astro, las magnitudes $r = r_1 + r_2$ que corresponden a los instantes considerados. Se obtiene así la curva punteada.

Que ese es, efectivamente, el movimiento que se observa, resulta de hecho de que sólo es posible medir, desde uno de los cuerpos, el valor de r en una cierta época y su giración θ en un intervalo dado.

Introduciendo en la [22] los valores:

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r$$

$$r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r$$
[24]

que resultan de la [21] se obtiene:

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \omega = \text{const},$$
[25]

de donde

$$r^2 \omega = r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const}.$$
[26]

La expresión $r^2 \omega$ representa el doble del área descrita por el radio vector en la unidad de tiempo.

Multiplicando la [26] por dt resulta

$$r^2 \omega dt = r^2 d\theta,$$
[27]

que representa el doble del área descrita por el radio vector en el tiempo dt , pues si en ese tiempo el cuerpo ha pasado de R a S el área descrita es la sombreada, cuyo valor es:

$$\frac{1}{2} r^2 d\theta,$$
[28]

puesto que se trata de un triángulo de lados r y $r + dr$ que forman el ángulo $d\theta$; despreciando los términos de orden superior, se obtiene el resultado indicado.

Se ha deducido así la ley de las áreas o segunda ley de Kepler, bajo la suposición de fuerzas interiores, dirigidas según los radios e iguales y opuestos.

Es de observar que, cualesquiera sean esas fuerzas, cualesquiera sean, por ejemplo, sus dependencias de las masas y de la distancia, resultaría satisfecha la ley de las áreas, pues esta ley proviene únicamente de la existencia de fuerzas cuya suma de los momentos con respecto al centro de gravedad se anula.

Fuerzas que pasan constantemente por un punto fijo — en nuestro caso el punto G fijo en el plano elegido — se llaman centrales.

Por lo visto, fuerzas centrales de cualquier naturaleza determinan movimientos que cumplen la ley de las áreas.

Calculando la aceleración según r , es decir, de un cuerpo hacia el otro, operando con las trayectoria elípticas de la ley de Kepler y utilizando la tercera ley, se obtienen los mismos resultados que antes, es decir, se llega a la ley de gravitación de Newton.

***5. Comprobación de la ley de Newton por la órbita de los cometas** ⁽¹⁾. — La naturaleza del movimiento de los cometas era totalmente desconocida antes de Newton aun para Kepler mismo.

Newton, que había deducido de las leyes de Kepler la ley de atracción universal, utilizó en seguida las ecuaciones de la mecánica, que él mismo había establecido, a la resolución del problema inverso, es decir, a la determinación de la trayectoria de un astro sometido a la atracción del Sol. Dedujo que esa trayectoria podía ser una elipse o una parábola. Newton sospechó en seguida que el movimiento de los cometas estaba regido también por la atracción solar y que el Sol debía ocupar el foco de sus trayectorias; la diferencia con los planetas consistiría en que en éstos las curvas son casi círculos, mientras que en aquéllos se trataría de elipses sumamente alargadas o de parábolas.

Las observaciones astronómicas que se iniciaron en seguida, como consecuencia de estos trabajos de Newton, comprobaron plenamente los resultados dados por la teoría. Los trabajos posteriores no han hecho sino corroborar esos hechos.

***6. Perturbaciones. El descubrimiento de Neptuno** ⁽²⁾. — En las consideraciones mecánicas relativas al movimiento de los cuerpos celestes se ha prescindido de la presencia de los demás. En esas condiciones la trayectoria aparente de cada uno de ellos visto desde el otro es, realmente, una elipse.

Es evidente que en virtud de la ley de Newton la trayectoria de los planetas no puede ser rigurosamente elíptica, pues no sólo están sometidos a la atracción del Sol, sino también a las atracciones recíprocas.

Haciendo abstracción de los asteroides y de los satélites, el estudio del movimiento de los diversos cuerpos del sistema solar consiste en el siguiente problema mecánico:

⁽¹⁾ y ⁽²⁾ Véase TISSERAND-ADOYER, *Leçons de Cosmographie*.

«Siete puntos materiales de masas dadas — el Sol y los planetas — ocupan en un momento determinado posiciones conocidas; van animados de velocidades dadas en magnitud y dirección; estos puntos están solicitados los unos hacia los otros por fuerzas que actúan conformemente a la ley de gravitación universal: se pregunta qué posición ocuparán en una época determinada».

La resolución analítica rigurosa de ese problema ofrece dificultades que no han podido ser vencidas, ni siquiera limitando el problema a tres cuerpos, problema éste célebre y que lleva el nombre de *problema de los tres cuerpos*.

Las cosas están dispuestas, felizmente, en nuestro sistema solar, de tal manera que son accesibles soluciones aproximadas, suficientes, en general, a las necesidades de la astronomía.

Puesto que la masa del Sol es aproximadamente 700 veces mayor que la masa de todos los planetas juntos, y no siendo, en general, pequeñas las distancias recíprocas entre los planetas, la atracción del Sol; sobre un planeta cualquiera, es sumamente grande con respecto a la acción de los demás planetas.

Si la Tierra, por ejemplo, se viese libre, en un momento dado, de todas las fuerzas que actúan sobre ella, recorrería en línea recta aproximadamente 106.000 kilómetros por hora.

El Sol la hace caer en el mismo tiempo 38 kilómetros; el planeta más grande, Júpiter, en su posición más próxima a la Tierra, desvía a ésta en el mismo tiempo 2,10 metros, es decir, 18.000 veces menos que el Sol. Venus produce en las mismas condiciones una caída de 1,25 metros.

Estas pequeñas fuerzas provenientes de los demás planetas, son *fuerzas perturbatrices* que modifican la órbita elíptica del cuerpo, efecto que se designa con el nombre de *perturbación*.

Herschel redescubrió, accidentalmente, el planeta Urano en 1781, pues se comprobó que ese mismo cuerpo había sido observado veinte veces entre el 1690 y el 1771. El planeta fué motivo de nuevas observaciones hasta el año 1820. Más tarde, Bouvard, astrónomo del Observatorio de París, trató de representar la órbita de Urano por una elipse modificada sucesivamente por las perturbaciones debidas a la acción de Júpiter y de Saturno; no logró su objeto a pesar de que aplicó ecuaciones correctas deducidas por Laplace. Se formó en seguida la opinión de que las irregularidades del movimiento de Urano podrían provenir muy bien de la acción de un planeta vecino desconocido.

Árago señaló a Le Verrier ese problema, el cual se ocupó de la cuestión durante dos años. El 31 de agosto de 1845 anuncia Le Verrier a la Academia de Ciencias que había resuelto el problema del movimiento de Urano, deduciendo de la perturbación de su órbita, mediante las leyes de la mecánica y la ley de atracción de Newton, la existencia de un planeta desconocido, indicando a la vez, aproximadamente, su órbita.

El 18 de septiembre de 1846 Le Verrier escribía a Galle, astrónomo de Berlín, quien poseía cartas del cielo y antejo apropiado, rogándole buscara el planeta. Galle recibió la carta el 23 encontrando esa misma noche al planeta desconocido, es decir, a Neptuno. El éxito de la teoría de Newton no podía ser más grande.

Al mismo tiempo que Le Verrier, el astrónomo inglés Adams había resuelto el problema, si bien con menos exactitud y sin publicar a tiempo sus resultados.

7. Las determinaciones de la constante k de gravitación. Método de Cavendish. — En la ecuación

$$F = k \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad [29]$$

figuran los grandores físicos, longitud, masa y fuerza, para los cuales se han establecido unidades de medidas, que son, en el sistema C, G, S , el centímetro, el gramo y la dina. No se puede, por lo tanto, disponer arbitrariamente de la constante k , sino que es menester determinarla experimentalmente.

En el año 1798, Cavendish logró hacer notorio la atracción entre las masas y determinar el valor de k , por una experiencia terrestre de laboratorio, empleando una instalación ideada por el párroco Jhon Michell. Veamos en qué consiste el método. De un hilo de cuarzo muy fino pende una varillita delgada de madera o marfil (fig. 243) en cuyos extremos se encuentran dos pequeñas esferas metálicas e de masa m . Otras dos esferas metálicas bastante grandes, de masa M , se pueden situar por la instalación que se ve en la misma figura en las posiciones A_1B_1 y A_2B_2 (fig. 244), es decir, a una distancia del centro O de giración igual a la distancia a que se encuentran las esferitas; la altura es además la misma. Si las esferas grandes se sitúan primeramente en A_1 y B_1 , por las fuerzas de atracción entre las masas de las esferas, resulta un momento actuante sobre la suspensión, que comenzará por esto, a oscilar; al momento producido por la atracción entre las masas se

superpone el momento de las fuerzas elásticas que despierta la torsión del hilo; si el sistema alcanzara la posición de reposo, en ella, esos momentos serían iguales. Como el roce es sumamente pequeño,

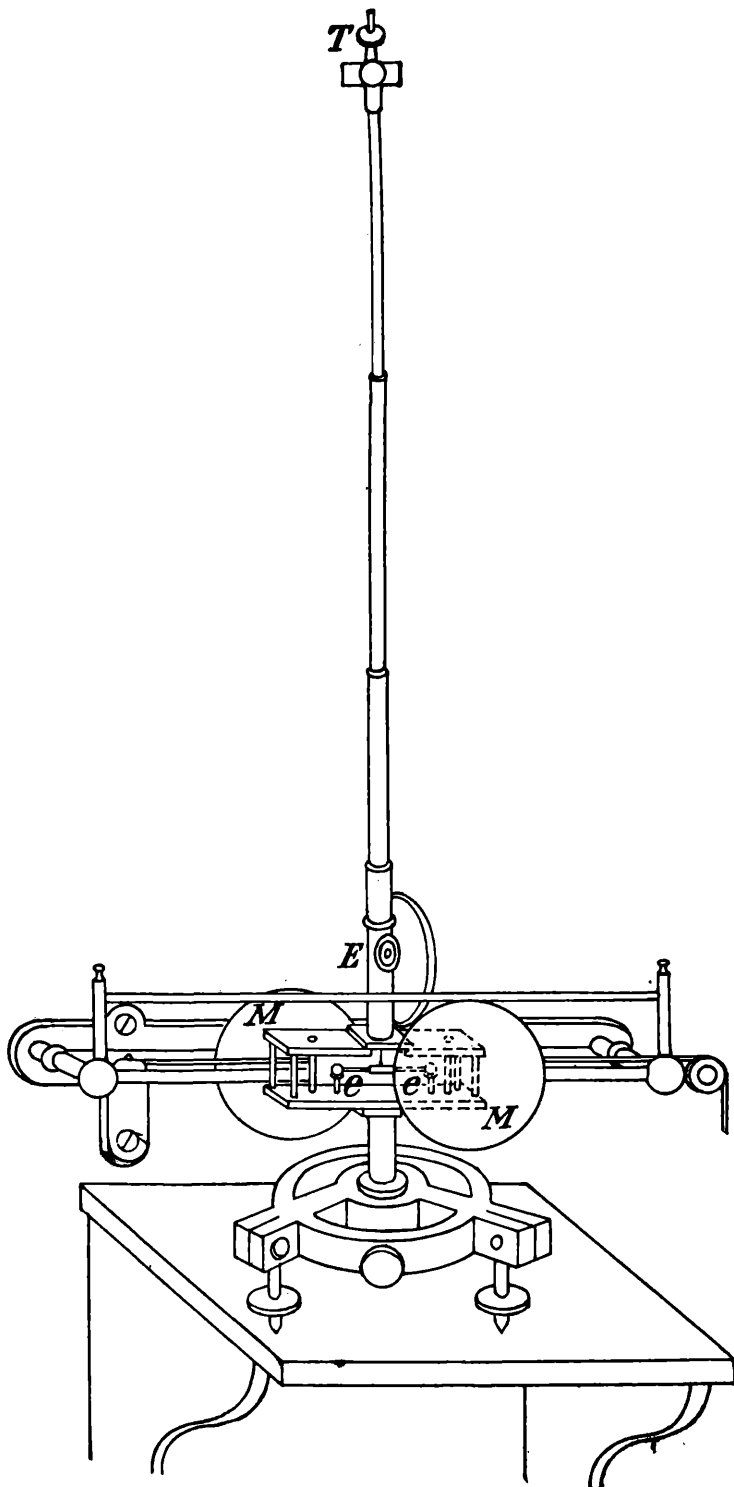


Fig. 243.

el sistema oscila un tiempo muy largo antes de detenerse; la posición de reposo se determina, a causa de esto, observando con anteojo y escala las posiciones extremas que toma sobre una escala un haz de luz que se refleja sobre un espejito de que está provista la suspensión. La posición media de esas posiciones extremas da el punto de reposo. Si se conoce además la posición de reposo que adopta el sistema cuando no está sometido a la acción de las masas M , se puede calcular el ángulo de desviación. Mejor es determinar un ángulo doble, llevando las esferas grandes a las posiciones A_2 y B_2 ; el sistema desvía hacia el otro lado y se determina, lo mismo que antes, la nueva posición de reposo. Si esas posiciones son OR_1 y OR_2 , la desviación que producen

las fuerzas de atracción entre las esferas es la mitad del ángulo R_1OR_2 .

Si además T es el tiempo de una oscilación del sistema cuando no actúan las masas M , D la fuerza directriz del hilo e I el momento de inercia de la suspensión, se tiene

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \quad [30]$$

El momento de inercia I de una suspensión puede determinarse experimentalmente, con mucha exactitud (véase cap. XV). Conociendo I , se calcula D en seguida. Si el ángulo de desviación medido es θ , la cupla de torsión del hilo será

$$C = D\theta \quad [31]$$

y esa cupla debe ser igual al momento de las fuerzas de atracción. Si

si se indica con F la fuerza de atracción entre cada dos esferas y si es a la distancia a que se encuentran las esferitas del centro O de rotación, el momento que determinan las fuerzas F tienen el valor $2Fa$ y, por lo tanto, es:

$$2Fa = D\theta \quad [32]$$

$$F = \frac{D\theta}{2a}, \quad [33]$$

con la que se calcula F .

Si es r la distancia entre los centros de las esferas, correspondientes a la posición de reposo, se tiene

$$F = k \frac{Mm}{r^2}, \quad [34]$$

de donde, con el auxilio de las relaciones anteriores, se deduce el valor de k .

En la experiencia misma de Cavendish — cuya instalación no fué la que aparece en el dibujo — las magnitudes eran las siguientes:

$$\begin{aligned} M &= 158 \text{ Kg} \\ m &= 0,730 \text{ Kg} \\ a &= 91,44 \text{ cm} \\ T &= 1680 \text{ seg} \\ r &= 20,32 \text{ cm} \\ \theta &= \frac{\delta}{a} = \frac{1,946}{91,44}, \end{aligned} \quad [35]$$

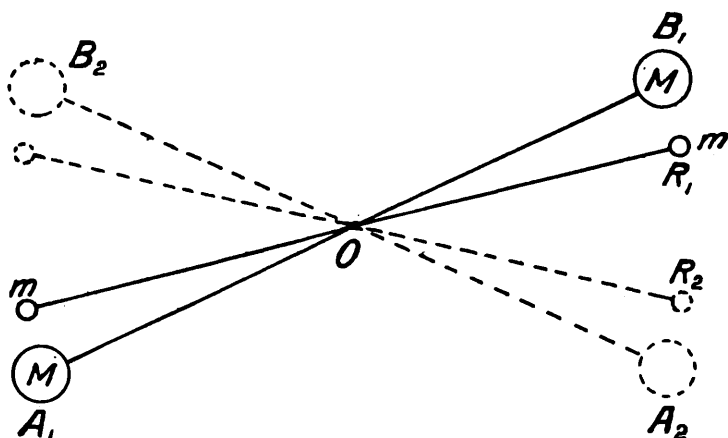


Fig. 244.

donde δ es la elongación hasta la posición de reposo, esto es, la distancia entre la posición inicial de las esferitas y la que les corresponde cuando están sometidas a la fuerza de atracción de las otras esferas.

El hilo de suspensión era de cobre plateado, las esferas de plomo, y la barra que lleva las esferitas de madera, provistas de tensores fijos en sus extremos, para evitar la flexión.

Si se desprecia la masa de la barra y los momentos de inercia de las esferitas con respecto a ejes que pasan por sus centros, se tiene, como momento de inercia de la suspensión,

$$I = 2 m a^2 \quad [36]$$

y por la [30]

$$D = \frac{8 \pi^2 m a^2}{T^2} \quad [37]$$

de donde

$$D = \frac{8 \pi^2 \cdot 730 \cdot 91,44^2}{1680^2} = 170,75 \text{ dinas cm} \quad [38]$$

y por la [33]

$$F = \frac{D \delta}{2 a^2} = \frac{170,75 \cdot 1,946}{2 \cdot 891,44^2} = 0,01987 \text{ dinas} \quad [39]$$

De la [34] resulta, finalmente,

$$k = 7,11 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ gr}^{-1} \text{ seg}^{-2}. \quad [40]$$

Como valor medio de 29 observaciones y verificadas algunas correcciones que nosotros no hemos discutido, Cavendish obtuvo el valor

$$k = 6,717 \cdot 10^{-8}. \quad [41]$$

Por la importancia del conocimiento del valor de k se creyó conveniente efectuar nuevas medidas cuidadosas, para lo cual el gobierno inglés facilitó en el año 1837 la suma de 5600 pesos, más o menos, para costear los gastos de los experimentos.

La teoría y las fórmulas analíticas fueron deducidas por G. Airy — no se trata, naturalmente, de la teoría elemental desarrollada más arriba — mientras que Baily formuló el plan de operaciones, eligió

las instalaciones e hizo las medidas. El método fué, en esencia, el de Michell y Cavendish; el resultado obtenido fué muy poco diferente del obtenido por éste.

Reich hizo también en 1837 y 1849, en Alemania, una determinación por el mismo método; sus medidas están de acuerdo con las anteriores. Lo mismo puede decirse de las determinaciones de Boys y del padre jesuita Braun.

8. Las determinaciones de Jolly, Richarz y Krigar Menzel, y Poynting con la balanza común. — Jolly fué el primero en emplear la balanza común en la determinación de la constante de gravitación.

Su método consistía (fig. 245) en determinar el peso de una masa m , sometida, además de la atracción de la Tierra, a la de una esfera

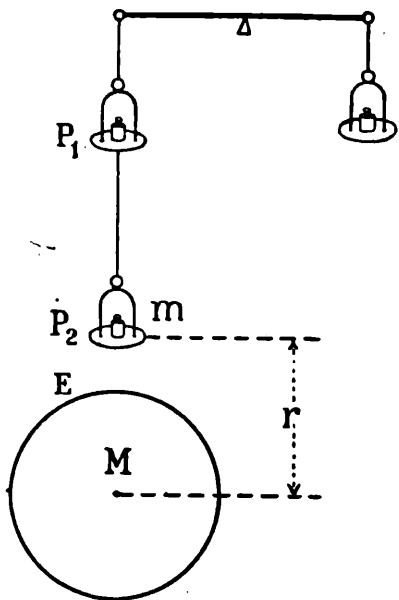


Fig. 245.

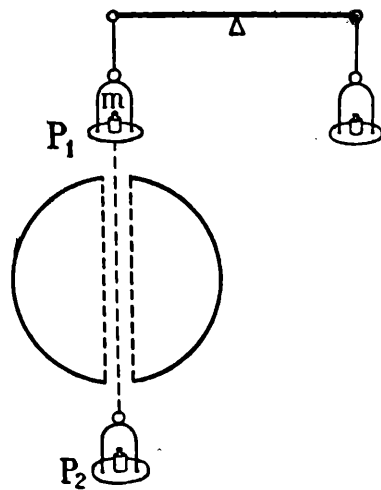


Fig. 246.

E de plomo de 1000 kilogramos, una vez colocándola en el platillo P_1 , situado bastante distante de la esfera E , y otra vez en el platillo P_2 , muy próximo a ella. La acción proveniente de la esfera puede desprejarse en el primer caso; la de la tierra puede considerarse igual en ambos casos.

Si se ha observado una diferencia de μ gramos en ambas pesadas, debe ser, por lo tanto,

$$\mu g = k \frac{m M}{r^2}, \quad [42]$$

donde M es la masa de la esfera y r la distancia de su centro a la masa m . Así se puede calcular k .

Richarz y Krigar Menzel han utilizado un procedimiento enteramente semejante, pero más conveniente. En lugar de una esfera de 1000 kilogramos han utilizado una de 100.000 kilogramos provista de un agujero diametral, a través del cual pasa el hilo que une los platillos P_1 y P_2 (fig. 246). Se determina el cambio de peso de una masa m colocada sucesivamente en ambos platillos; se observa así el doble de la fuerza de atracción de la masa de plomo.

Poynting ha hecho también mediciones con la balanza común, con una instalación diferente de las dos anteriores.

Los resultados obtenidos en este método y con los anteriores están consignados en la tabla siguiente:

Con la balanza de torsión	{	Boys	}	$6,658 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ seg}^{-2} \text{ gr}^{-1}$	
		Braun			
Con la balanza común	{	Poynting	}	$6,698 \cdot 10^{-8}$	>
		Richarz y Krigar Menzel		$6,685 \cdot 10^{-8}$	>

Se considera hoy como valor más exacto el siguiente.

$$k = [6,664 \pm 0,002] \cdot 10^{-8} \text{ dina} \cdot \text{cm}^2 \text{ gr}^{-2} .$$

9. La masa y la densidad media de la Tierra. — En el párrafo 3 se ha hecho uso, sin expresarlo, de la suposición de que la acción de la Tierra sobre un cuerpo situado en su superficie es la misma que resultaría si toda su masa estuviese concentrada en su centro. Podemos decir, por los resultados de la experiencia, que tal suposición es exacta; ella puede, además, probarse teóricamente.

Si mg es el peso de un cuerpo, M la masa de la Tierra, y R su radio, se tiene, según eso, por la ley de gravitación:

$$mg = k \frac{M m}{R^2} , \tag{43}$$

de donde

$$M = \frac{1}{k} g R^2 . \tag{44}$$

Sustituyendo los valores de k , g y R resulta

$$M = 5,96 \cdot 10^{28} \text{ gr} .$$

Si ρ_m es la densidad media de la Tierra se tiene

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_m , \tag{45}$$

y, por lo tanto,

$$\rho_m = \frac{3g}{k 4 \pi R} = 5,50 \text{ gr cm}^{-3}. \quad [46]$$

Es decir, el peso medio de un centímetro cúbico de la substancia terrestre es de 5,5 gramos. Como la densidad media de las substancias que forman la corteza terrestre es de 2,5 gr/cm³, es menester admitir que en el interior de la Tierra se encuentran substancias de bastante mayor densidad.

El valor más exacto de la densidad media de la tierra es.

$$\rho_m = [5,522 \pm 0,002] \text{ gr} \cdot \text{cm}^{-3}.$$

Los únicos conocimientos seguros que se poseen respecto a la constitución interior de la Tierra provienen de las observaciones sísmicas. De la medida de la velocidad de propagación de las ondas sísmicas, se puede deducir un valor medio del módulo de elasticidad de su substancia, pues esa velocidad depende únicamente, como hemos de ver, de la densidad y del módulo de elasticidad de la misma.

En el estado actual de la sísmica se admite que la Tierra está constituida, a partir de la superficie, por una envoltura de substancias rocosas, llamada litosfera, en la que las ondas tienen una velocidad de 7,3 Km/seg; por una capa en la cual la velocidad de las ondas varía con el tiempo, alcanzando el valor máximo de 12 Km/seg y por fin por un núcleo metálico que el gran sismólogo Wiechert supone constituido por hierro y nickel, a grandes presiones.

10. La masa de los cuerpos celestes. — Consideremos el movimiento de un satélite de masa m alrededor de un cuerpo celeste de masa M ; por ejemplo, un planeta alrededor del Sol, la Luna alrededor de la tierra, etc. La giración se produce alrededor del centro de gravedad de los dos cuerpos, pero si la masa m es pequeña en comparación con M , como ocurre en general con los planetas y el Sol, puede suponerse que la giración se produce alrededor de la masa mayor. Si r es la distancia media entre los cuerpos, por la igualdad entre la fuerza de atracción y la fuerza centrífuga se tiene

$$m \frac{4 \pi^2}{T^2} r = k \frac{m M^*}{r^2}, \quad [47]$$

si T es el tiempo de revolución del satélite. De esa relación resulta

$$M = \frac{1}{k} 4 \pi^2 \frac{r^3}{T^2}. \quad [48]$$

Si se trata del Sol y uno de los planetas, la relación [48] da la masa del primero, cualquiera que sea el planeta que se considere, pues por la tercera ley de Kepler $\frac{r^3}{T^2}$ es constante.

Para la Tierra y Marte se tiene, como valor medio,

$$\frac{r^3}{T^2} = 3,2983 \cdot 10^{24}, \quad [49]$$

de modo que

$$M = \frac{4 \pi^2 \cdot 3,3 \cdot 10^{24}}{6,664 \cdot 10^{-8}} = 1,95 \cdot 10^{33} \text{ gr}. \quad [50]$$

De la misma manera puede calcularse la masa de un planeta cualquiera por la órbita de uno de sus satélites. Venus carece de satélites, de modo que este método no le es aplicable.

11. El potencial de gravitación. — La presencia de una masa M en el espacio determina un campo de fuerzas, que se revela tan pronto como se introduce otra masa m en él. La presencia de esta última modifica el campo primitivo, pues le superpone su propio campo.

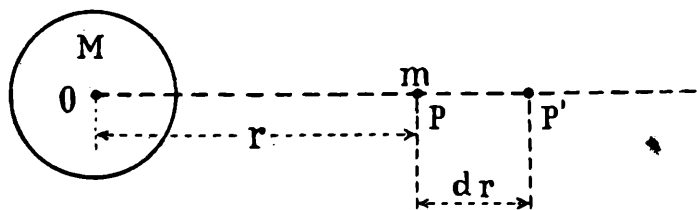


Fig. 247.

La presencia de esta última modifica el campo primitivo, pues le superpone su propio campo.

Supongamos que la masa m es tan pequeña que no produce modificaciones sensibles en el campo primitivo. Si se imagina la masa m situada en la posición P (fig. 247) a la distancia r actúa una fuerza

$$F = k \frac{m M}{r^2}. \quad [51]$$

Para llevar la masa m de la posición P a la P' , situada a la distancia $r + dr$, moviéndola en contra de las fuerzas del campo, sería necesario gastar el trabajo

$$F \cdot dr = k \frac{m M}{r^2} dr, \quad [52]$$

y para alejar la masa hasta la distancia r

$$T = k m M \int_r^{r_1} \frac{dr}{r^2} = m k M \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right], \quad [53]$$

y para alejarla hasta al infinito, es decir, hasta que sea $r_1 = \infty$

$$T = k \frac{m M}{r}. \quad [54]$$

El trabajo gastado por cada unidad de masa se denomina el potencial, que representaremos con la letra V . Es, pues,

$$V = k \frac{M}{r}. \quad [55]$$

Entonces el potencial V de una masa M , en un punto situado a la distancia r , es igual al trabajo que se consumiría para llevar la masa de 1 gramo en contra de su fuerza de atracción desde ese punto hasta el infinito.

Es notorio por la [55] y [51] que.

$$F = - \frac{\partial V}{\partial r}, \quad [56]$$

es decir que la fuerza es igual al gradiente del potencial (véase el n° 18 del capítulo I).

Los lugares geométricos de los puntos de igual potencial se llaman *superficies de nivel* o *equipotenciales*. Por la forma general de la tierra y por las irregularidades de la distribución de las masas arriba y abajo de su superficie las superficies equipotenciales de la tierra no son esféricas.

12. La caída de un aerolito. — VELOCIDAD INICIAL NECESARIA PARA ALEJAR DE LA TIERRA A UN CUERPO. — Si el aerolito viene desde una distancia r_1 , el trabajo gastado por la fuerza de la gravitación por cada gramo es, según la relación [53],

$$T = k M \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{r_1} \right], \quad [57]$$

si son M la masa de la Tierra y R su radio. Si admitimos, además, que viene desde muy lejos, esto es que r_1 es muy grande con respecto a R se tiene

$$T = k \frac{M}{R}. \quad [57']$$

Este trabajo se convierte en energía cinética que se extingue por roce en la atmósfera y por choque en la superficie de la Tierra.

La velocidad v de llegada del aerolito resulta de la relación

$$\frac{m}{2} v^2 = k \frac{M}{R} \quad [58]$$

y puesto que $k \frac{M}{R^2} = g$ se obtiene

$$v = \sqrt{2 g R} = 11176 \text{ m seg}^{-1}. \quad [59]$$

Si se quiere arrojar un cuerpo de la Tierra, para que no vuelva a ella, es menester comunicarle una velocidad inicial, mínima, igual al valor dado por la [59].

13. **Las mareas.** — Ya Newton había comprendido que el fenómeno de las mareas era un fenómeno de gravitación, proveniente, sobre todo, de la atracción lunar.

La Luna cae continuamente hacia la Tierra, la Tierra constantemente hacia la Luna, a pesar de que la distancia queda invariada.

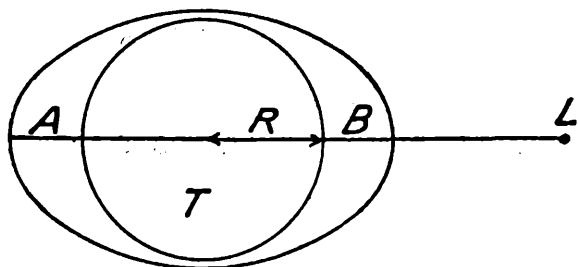


Fig. 248.

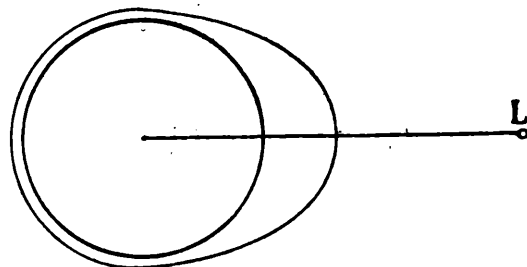


Fig. 249.

Mientras que la Tierra se mueve como un cuerpo rígido teniendo, por lo tanto, con respecto a la Luna, una aceleración centrípeta igual a la de su centro de gravedad, no ocurre lo mismo con el agua de sus mares.

Si L (fig. 248) es la Luna, T la Tierra, la aceleración centrípeta del agua en B , esto es, la fuerza de atracción sobre la unidad de masa, es

$$a_B = k \frac{M}{(r - R)^2}, \quad [60]$$

si M es la masa de la Luna, R el radio de la Tierra y r la dis-

tancia entre ambos cuerpos celestes; la del agua en *A* es, en cambio:

$$a_A = k \frac{M}{(r + R)^2} \quad [61]$$

mientras que la de la Tierra es

$$a = k \frac{M}{r^2}. \quad [62]$$

Es, pues $a_B > a > a_A$, lo que significa que el agua sufre un atraso en *A* y un adelanto en *B* en el movimiento de caída, y el agua se distribuye como indica la figura 248; si la Tierra y la Luna estuviesen en reposo relativo, la distribución sería la de la figura 249.

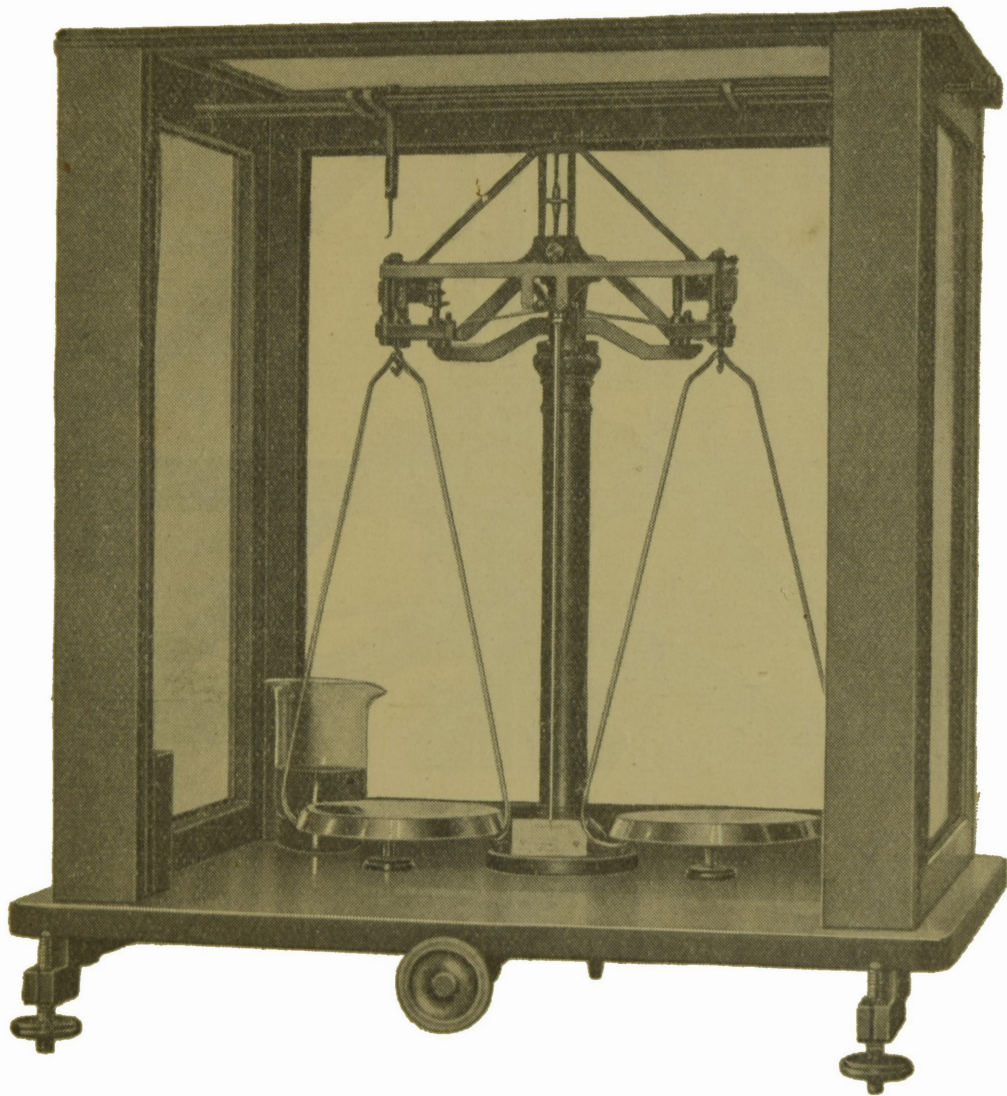


Fig. 250.

B. — BALANZAS DE PRECISIÓN

14. **Generalidades.** — Se ha visto que por medio de la balanza se pueden comparar los pesos o las masas de los cuerpos, pues toda pesada es, a la vez, una comparación de masas.

Las balanzas de precisión consisten, generalmente, en una palanca del primer género denominada *cruz*, girable alrededor de su punto medio y que soporta en sus extremos, por una suspensión apropiada, los platillos en que han de colocarse el cuerpo y las pesas (fig. 250).

A fin de obtener una rigidez conveniente, es decir, para disminuir en lo posible las flexiones elásticas, sin aumentar demasiado su peso — lo cual es como se verá, inconveniente — la cruz se construye, en general, calando una pieza continua por cortes que determinan tramos rectos de sección rectangular, los cuales se continúan así, unos en otros, sin soldaduras de ninguna especie (fig. 251); se distribuyen de ese modo las tensiones en forma conveniente.

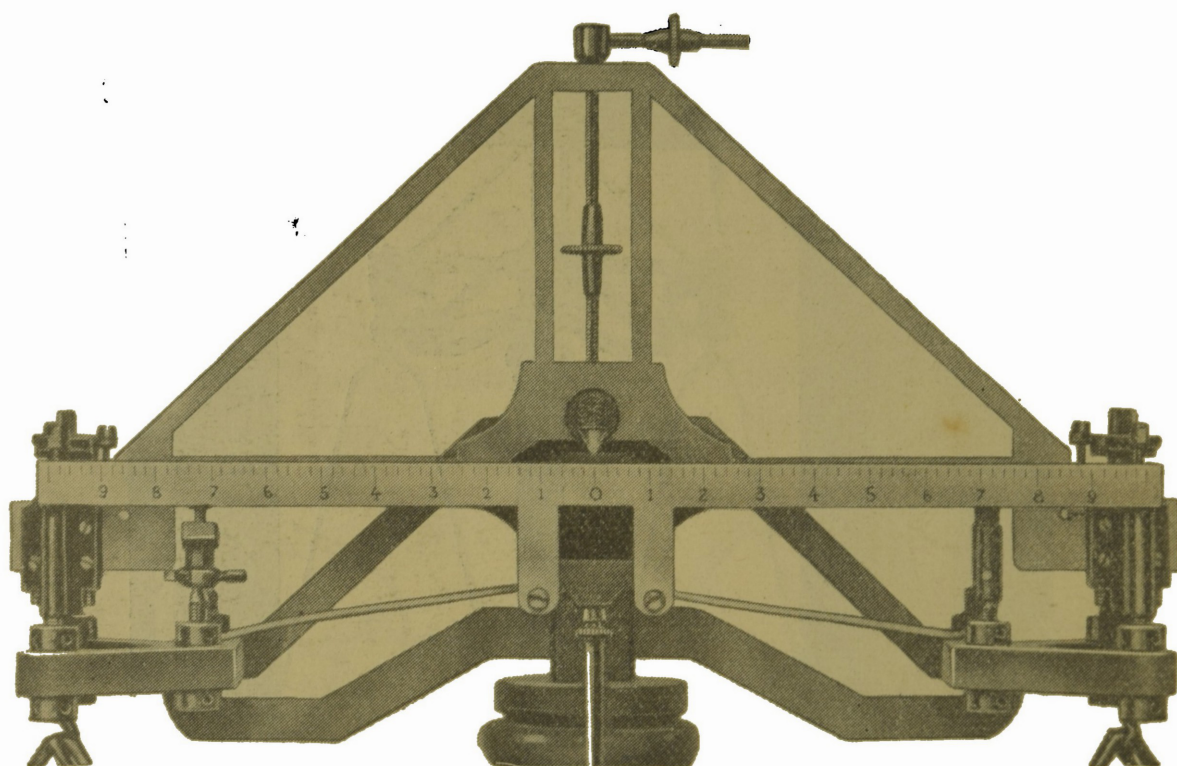


Fig. 251.

La cruz (fig. 251) lleva tres prismas de ágata, de aristas horizontales muy vivas; el del medio con una arista hacia abajo y los otros dos con una arista hacia arriba. La arista del prisma central descansa sobre un plano horizontal de ágata, situado en la parte superior de una columna metálica que sirve de soporte a toda la suspensión; el roce no se hace sentir así mayormente en la giración de la palanca.

La suspensión de los platillos (fig. 251 a) consta de dos partes: *la horquilla y el platillo*. La horquilla lleva una placa de ágata cuyo plano horizontal mira hacia abajo, apoyándose sobre la arista del prisma del extremo de la cruz. El platillo puede girar con respecto a la horquilla alrededor de un eje situado en un plano perpendicu-

lar al plano en que gira la horquilla alrededor de la arista en que se apoya. El platillo tiene así la posibilidad de girar alrededor de dos ejes de dirección ortogonal, de tal manera que cualquiera que sea la posición de la carga sobre el plato, éste se orienta de tal modo que el centro de gravedad de toda la suspensión (cuerpo, plato, horquilla) se encuentre sobre la vertical que pasa por la arista del prisma. La longitud del brazo correspondiente al peso total de la suspensión con la carga no dependerá así de la posición de la carga sobre el platillo.

Para que el centro de gravedad de la carga solamente esté sobre la vertical que pasa por el filo de la cuchilla, es menester, como es evidente, situar el cuerpo sobre el platillo de tal manera que la posición de éste, con respecto al piso de la caja de la balanza, no se modifique.

La cruz lleva también un índice vertical terminado en punta, que permite acusar sus desviaciones sobre una pequeña escala horizontal que lleva la columna en su parte inferior.

La caja de la balanza está provista de tornillos que permiten, utilizando un nivel de aire, *nivelar la balanza*; el índice pasará así, aproximadamente, por la división media de la escala.

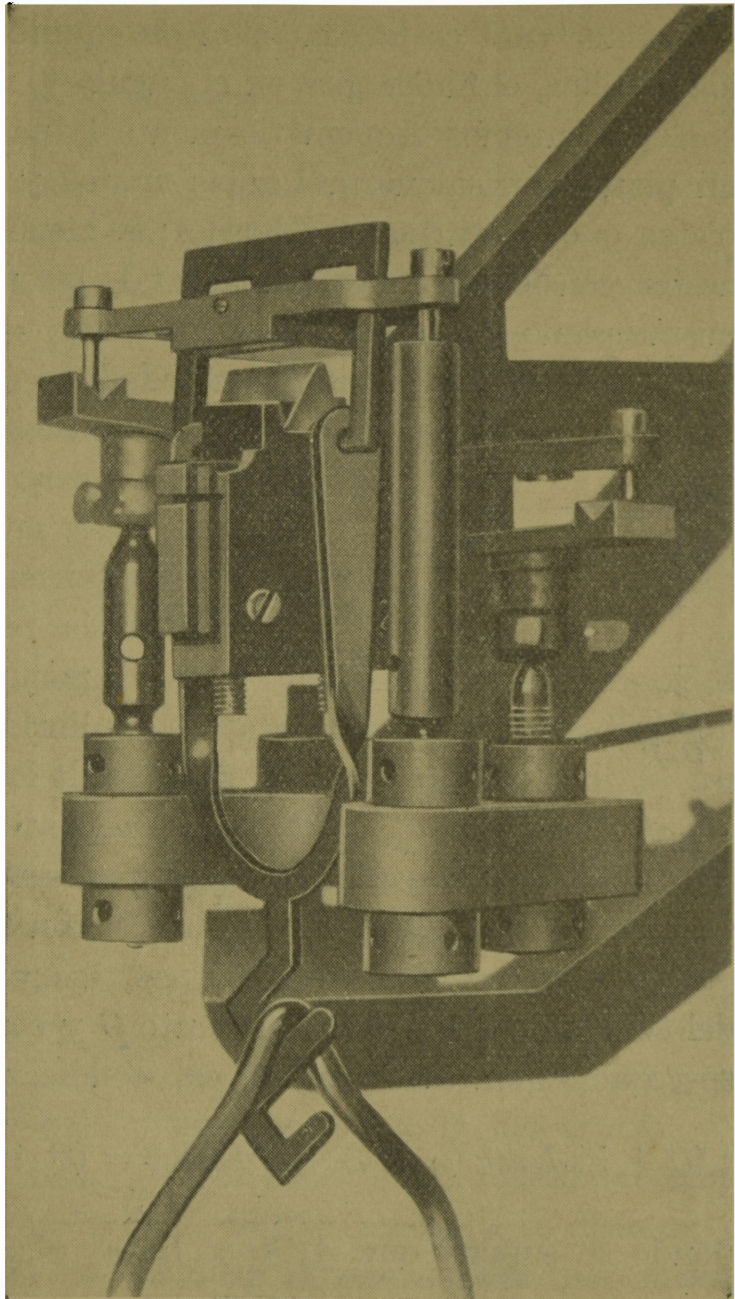


Fig: 251 a.

15. Equilibrio de la balanza. Sensibilidad. — Consideremos, primero, solamente la cruz. Esta tendrá una posición de equilibrio

estable únicamente si el centro de gravedad se encuentra sobre la vertical que pasa por la arista del prisma central. El fabricante dispone las piezas de tal manera que, en esa posición, las aristas de los prismas extremos estén sobre el mismo plano horizontal y de que el índice fijo a la cruz contenga el centro de gravedad y pase, aproximadamente, por el centro de la escala, cuando la plataforma está, nivelada.

Veamos cuál es la condición de equilibrio, si, colocando pesos en los platillos, el índice gira en el ángulo θ , muy pequeño.

Representemos esquemáticamente la palanca cortando la cruz por un plano vertical normal a las aristas y tracemos en ese plano las rectas que pasan por sus bordes; se tiene así la palanca que es menester considerar, pues, en general, las tres aristas no están en el mismo plano (fig. 252). Sea $OA_1 = OA_2 = L$ el largo de los brazos y G la posición del centro de gravedad. Si se coloca en uno de los platillos la carga P y en el otro la carga muy poco diferente $P + p$, la cruz adquiere una nueva posición de reposo que forma con la primitiva el ángulo θ , muy pequeño. En la posición de equilibrio la suma de los momentos de las cargas, de los pesos de los platillos, que suponemos iguales a Q , y del peso G de la cruz con respecto a O , se anulan. Si se representa con d la distancia del centro de gravedad G al punto O y con L el largo de los dos brazos, que suponemos iguales, esa condición se expresa así:

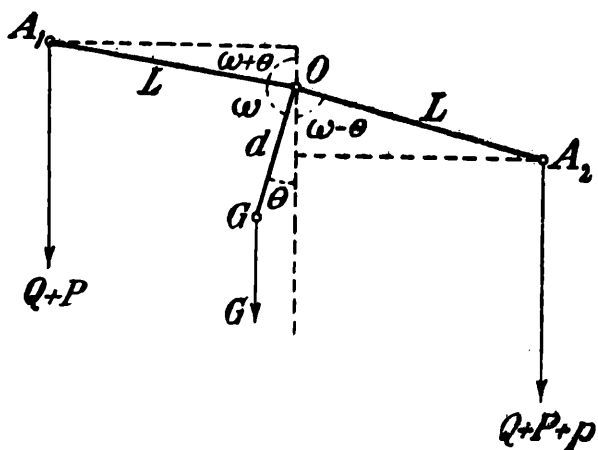


Fig. 252 (1).

Si se representa con d la distancia del centro de gravedad G al punto O y con L el largo de los dos brazos, que suponemos iguales, esa condición se expresa así:

donde se supone que $\widehat{A_1OG} = \widehat{GOA_2} = \omega$. De la [1] resulta:

$$(Q + P) L \operatorname{sen} (\omega + \theta) + G d \operatorname{sen} \theta = (Q + P + p) L \operatorname{sen} (\omega - \theta), \quad [1]$$

donde se supone que $\widehat{A_1OG} = \widehat{GOA_2} = \omega$. De la [1] resulta:

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{p L \operatorname{sen} \omega}{G d + [2 (Q + P) + p] L \operatorname{cos} \omega} \quad [2]$$

Como p es siempre muy pequeño con respecto $2 (Q + P)$ y ω muy poco diferente de 90° , es decir, que:

$$90^\circ = \omega + \varepsilon, \quad [3]$$

(1) El ángulo señalado en la figura con $\omega + \theta$ es $180^\circ - (\omega + \theta)$.

donde ϵ es un ángulo muy pequeño, aquella igualdad se transforma en

$$\text{tang } \theta = \frac{p L}{G d + 2 (Q + P) L \text{ sen } \epsilon}, \quad [4]$$

puesto que, por la [3], es

$$\text{sen } \omega = \text{cos } \epsilon = 1 \quad [5]$$

y

$$\text{cos } \omega = \text{sen } \epsilon. \quad [6]$$

Para ángulos de desviación muy pequeños, como supondremos en los sucesivos, puede escribirse θ en lugar de $\text{tang } \theta$.

Se denomina *sensibilidad* de la balanza para una carga P dada, al ángulo de desviación que se produce con esa carga, si se agrega a uno de los platillos la sobrecarga de un milígramo. La sensibilidad que representaremos con e , es pues, el cociente θ/p . Según esa definición se tiene, por la [4],

$$e = \frac{\theta}{p} = \frac{L}{G d + 2 (Q + P) L \text{ sen } \epsilon}. \quad [7]$$

La sensibilidad es, pues, tanto mayor cuanto mayor es el brazo L , menor la distancia d y cuanto más liviana es la cruz. Para disminuir d , se dispone de un tornillo T , fig. 250, encima (o debajo) de la cruz sobre el índice. Si $\epsilon = 0$, es decir, $\omega = 90^\circ$, la sensibilidad es proporcional a la longitud del brazo e inversamente proporcional al peso de la cruz y a la distancia de su centro de gravedad al eje de giración; no depende, en cambio, de la carga. En la realidad el valor de ϵ es siempre diferente de cero; su valor puede ser positivo o negativo, pues ω puede ser mayor o menor que 90° , esto es, las cuchillas extremas pueden estar por debajo o por encima de la del centro.

Si ϵ es positivo, es decir, si $\omega < 90^\circ$ la sensibilidad disminuye siempre con la carga puesto que por la flexión creciente ϵ disminuye; si ϵ es negativo, es decir, si las cuchillas extremas están por encima de la arista central, la sensibilidad aumenta con la carga, pues ϵ aumenta y el denominador disminuye.

En la realidad ocurre que aumentando la carga, por la flexión de la cruz, ϵ llega a anularse, luego se hace negativo; la sensibilidad aumenta así con la carga hasta que las tres cuchillas están en el mismo plano, disminuyendo después.

La flexión de la cruz hace alejar también el centro de gravedad de O , con lo que disminuye la sensibilidad.

En general, las buenas balanzas tienen el máximo de sensibilidad para la mitad de la carga.

Si se tiene en cuenta la flexión de la barra, es necesario discutir un poco más la ecuación [7]. Supongamos que sea ϵ tan pequeño que podamos escribir:

$$e = \frac{L}{Gd}, \quad [7']$$

lo que es permitido dado el objeto de estas consideraciones.

Según esta ecuación la sensibilidad es tanto mayor cuanto menor es d y mayor el coeficiente entre la longitud del brazo y su peso. Primitivamente se pretendía aumentar la sensibilidad, haciendo tan grande como fuese posible la relación $L:G$. Un sencillo raciocinio muestra que, así, la sensibilidad disminuye y no aumenta.

Si se hace la cruz más larga es necesario aumentar también las otras dimensiones, para que tenga suficiente rigidez.

Como se verá, para la misma carga, la flexión de una barra horizontal, cargada en un extremo, es proporcional al cubo de la longitud; el espesor, y, por lo tanto, la masa de la cruz, debe aumentar en una relación mayor.

Bunge, de Hamburgo, fué el primero en darse cuenta de este error, construyendo las primeras balanzas de brazos cortos, los cuales tienen además la ventaja de tener un tiempo de oscilación muy pequeño.

× 16. **Estudio más racional.** — El estudio dinámico permite juzgar las calidades de una balanza con más exactitud.

Se ha visto que el platillo y su carga se acomodan con respecto a la cruz de tal manera que el centro de gravedad caiga en la vertical que pasa por la arista del prisma correspondiente. Esta condición no se modifica si la cruz oscila. Suponiendo a la carga $Q + P$ concentrada en la arista respectiva, el movimiento oscilatorio de la balanza tendrá un tiempo T de oscilación dado por la relación

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}, \quad [8]$$

si I es el momento de inercia de las masas de la cruz y de las $Q + P$, con respecto al centro de oscilación O , y D la fuerza directriz, es decir, el momento que produce la unidad de desviación.

Para el momento de inercia se tiene (1)

$$I = I_G + 2 (Q + P) L^2, \quad [9]$$

si I_G es el momento de inercia del fiel con respecto al eje de giro. Indicando con S el radio de giración de la masa G del fiel se tiene

$$I_G = GS^2. \quad [10]$$

Podemos introducir, por comodidad, un coeficiente U tal que sea

$$I_G = GS^2 = UGL^2. \quad [11]$$

Por medio de la ecuación [11] se ve que se puede substituir, idealmente, la cruz por una barra rígida sin peso, de longitud L , en cuyos extremos penden las cargas $\frac{1}{2} UG$; el momento de inercia de estos pesos reducidos, con respecto al centro de giración, daría el valor del momento de inercia de la palanca real.

De la [9] y [11] resulta

$$I = [UG + 2 (Q + P)] L^2. \quad [12]$$

El momento de la cupla que produce la giración θ es (fig. 252)

$$\mathcal{M} = p L \text{ sen } (\omega - \theta) \quad [13]$$

o, puesto que θ es muy pequeño y ω difiere poco de 90° ,

$$\mathcal{M} = p L, \quad [13']$$

La fuerza directriz es, pues,

$$D = \frac{\mathcal{M}}{\theta} = \frac{p L}{\theta}. \quad [14]$$

o, por la definición de sensibilidad,

$$D = \frac{L}{e}. \quad [14']$$

(1) Se desprecian los momentos de inercia de $(Q + P)$ con respecto a su centro de gravedad.

Introduciendo en la [8] los valores I y D que dan las [12] y [14'] se tiene

$$T^2 = 4 \pi^2 e [UG + 2(Q + P)] L. \quad [15]$$

Indicando con M el peso total propio de la balanza que pende del extremo de la barra ideal sin peso de longitud L , es decir, escribiendo

$$M = \frac{1}{2} UG + Q \quad [16]$$

resulta

$$T^2 = 8 \pi^2 e (M + P) L, \quad [17]$$

llamándose a M el *peso muerto* y a $M + P$ el peso total reducido.

Para cierto peso total y un tiempo de oscilación dado, la sensibilidad es inversamente proporcional a la longitud de los brazos y al peso total reducido.

La exactitud de una pesada es proporcional a la sensibilidad y, por lo tanto, proporcional al cuadrado del tiempo de oscilación.

Para comparar las sensibilidades de dos balanzas es, pues, necesario reducirlas a igual tiempo de oscilación, lo que se logra, como es sabido, por desplazamiento de un tornillo que está situado, por lo común, sobre el índice.

El peso total reducido se deduce de la [17] midiendo L y la sensibilidad e que corresponde a un tiempo dado T de oscilación.

Atendiendo a la construcción, es decir, a la resistencia mecánica de las diversas piezas, la carga que puede soportar una balanza sin que sus cualidades se alteren, tiene un valor límite que se llama *carga máxima*.

El tipo más común de balanza de laboratorio permite una carga máxima de 200 gramos. Damos algunos datos numéricos referentes a balanzas de ese tipo:

Carga máxima	Longitud de la cruz $2L$	Peso de la cruz G	Peso de un platillo	Tiempo de oscilación
200 gr	15 cm	92 gr	30 gr aprox.	de 6 a 10 seg
	14 cm	82 gr		

Se logra obtener una rigidez suficiente con una cruz liviana utilizando aleaciones que unan a un pequeño peso específico un módulo de elasticidad elevado.

17. **Determinación del cero.** — La posición final de equilibrio que corresponde a cargas dadas resulta mejor definida por la observación de las oscilaciones que por el estado final de reposo.

Para determinar la posición del índice sobre la escala, que correspondería al equilibrio, es necesario, a causa del amortiguamiento de las oscilaciones, hacer un número impar de lecturas. Si las oscilaciones no decrecieran en el tiempo, sería suficiente tomar el punto medio entre dos posiciones extremas, consecutivas, del índice.

Conviene elegir como *cero de la escala* el primer trazo de la izquierda. Si se indican con a_1, a_2, a_3 tres lecturas consecutivas de las posiciones extremas del índice sobre la escala, la posición de equilibrio que indicamos con a_0 , este es, el *cero de la balanza*, está dado por la expresión

$$a_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{a_1 + a_3}{2} + a_2 \right] = \frac{1}{4} (a_1 + 2a_2 + a_3). \quad [18]$$

Para pesadas muy exactas conviene determinar cinco *puntos de vuelta*, a_1, a_2, \dots, a_5 , siendo, en tal caso,

$$a_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{a_1 + a_3 + a_5}{3} + \frac{a_2 + a_4}{2} \right). \quad [19]$$

* PRUEBA. — En la figura 253 está dibujada la curva del movimiento oscilatorio de la cruz de la balanza. Se supone, lo que es muy aproximado a la realidad, que las amplitudes decrecen logarítmicamente, de suerte que, de acuerdo con la ecuación [64] del capítulo VIII, se tiene

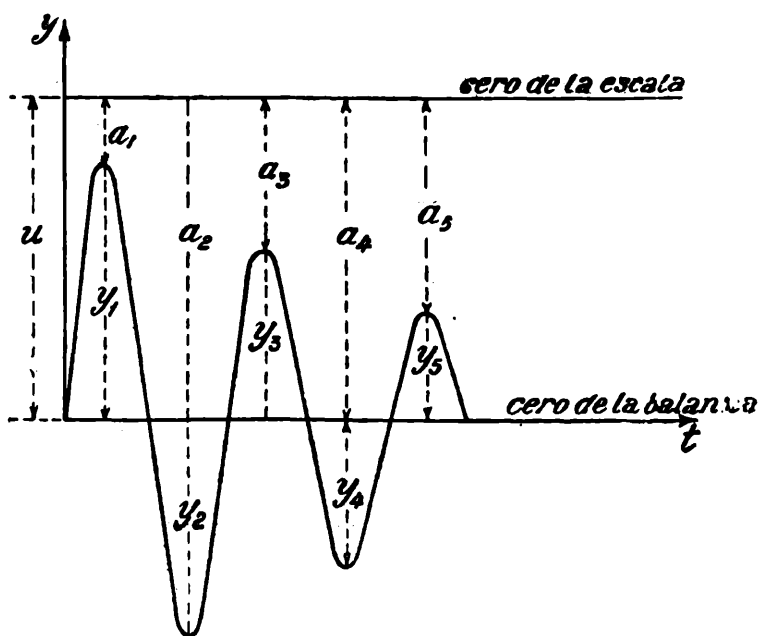


Fig. 253.

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3} = \frac{y_3}{y_4} = \text{etc.} = \text{const} = e^{\frac{\gamma}{2}} = 1 + \epsilon, \quad [20]$$

donde γ es el decrecimiento logarítmico y ϵ un número pequeño respecto a la unidad.

El cero de la balanza está dado, con gran aproximación, por la expresión

$$a_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{y_1 + y_3 + y_5}{3} - \frac{y_2 + y_4}{2} \right), \quad [21]$$

pues es, por la [20],

$$\begin{aligned} y_1 &= y_5 (1 + \epsilon)^4 & y_2 &= y_5 (1 + \epsilon)^3 \\ y_3 &= y_5 (1 + \epsilon)^2 & y_4 &= y_5 (1 + \epsilon), \end{aligned} \quad [22]$$

y despreciando los términos en ϵ^2 ,

$$\frac{y_1 + y_3 + y_5}{3} = y_5 (1 + 2\epsilon) \quad [23]$$

e

$$\frac{y_2 + y_4}{2} = y_5 (1 + 2\epsilon), \quad [24]$$

de modo que, como debía ocurrir, el paréntesis de la [21] es igual a cero (hasta menos los términos en ϵ^2). La diferencia de dos amplitudes sucesivas, por ejemplo $y_1 - y_2 = \epsilon y_2$, puede, en cambio, diferir mucho de cero.

Como el cero es desconocido, las elongaciones extremas se miden a partir de un punto arbitrario, que se denomina *cero de la escala*.

La posición a_0 del cero buscado está dado por cierta distancia u (fig. 235). Aquella posición resulta dada por la expresión

$$a_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{a_1 + a_3 + a_5}{3} + \frac{a_2 + a_4}{2} \right). \quad [25]$$

En efecto, es

$$\begin{aligned} a_1 &= u - y_1; & a_2 &= u + y_2; \\ a_3 &= u - y_3; & e & \quad a_4 = u + y_4. \\ a_5 &= u - y_5; \end{aligned} \quad [26]$$

valores que introducido en la [25] la convierten en

$$a_0 = u, \quad [27]$$

si se tienen presente los resultados de más arriba. Es decir, que se logra así, efectivamente, el cero de la balanza.

× 18. **Métodos de pesar.** — La determinación del peso P de un cuerpo se logra, con mucha exactitud, por interpolación.

Supongamos que con las pesas P_1 la posición de equilibrio, deducida de la observación de las oscilaciones, esté dada por la lectura a_1 de la escala situada a la derecha, por ejemplo, del cero a_0 de la balanza y que con el peso $P_2 < P_1$ por la lectura a_2 , a la izquierda de a_0 . El peso P está dado, como es notorio, por la expresión

$$P = P_1 + (P_2 - P_1) \frac{a_0 - a_1}{a_2 - a_1}, \quad [28]$$

puesto que debe ser

$$\frac{P - P_1}{P_2 - P_1} = \frac{a_0 - a_1}{a_2 - a_1}. \quad [29]$$

A fin de eliminar la influencia de una posible desigualdad de los brazos se recurre al método de la *doble pesada*, el que permite, a la vez, determinar la relación entre las longitudes de aquéllos.

Sean L_1 y L_2 las respectivas longitudes de los brazos e indiquemos con P el peso del cuerpo cuyo valor se quiere determinar. Situándolo en uno de los platillos se obtendrá, por los procedimientos indicados, el valor P_1 ; cambiándolo de platillo se obtendrá el valor:

$$P_2 = P_1 + p, \quad [30]$$

donde p será, en general, muy pequeño respecto a P_1 .

Por la ley de equilibrio de la palanca se tienen las relaciones:

$$P L_1 = P_1 L_2 \quad [31]$$

$$P_2 L_1 = P L_2 \quad [32]$$

de las que resulta

$$P^2 = P_1 P_2 \quad ; \quad P = \sqrt{P_1 P_2} \quad [33]$$

o, por la [30]

$$P = \sqrt{P_1 (P_1 + p)} = P_1 \sqrt{1 + \frac{p}{P_1}} \quad [34]$$

de la que se obtiene, por desarrollo en serie, atento a la pequeñez de p en relación a P_1 ,

$$P = P_1 + \frac{p}{2} = \frac{P_1 + P_2}{2}, \quad [35]$$

relación que muestra que si p es muy pequeño respecto a P_1 el peso verdadero es igual a la media aritmética entre los dos valores obtenidos.

19. **La relación de los brazos.** — Por multiplicación de las expresiones [31] y [32] se obtiene, para la relación entre las longitudes de los brazos,

$$\frac{L_1}{L_2} = \sqrt{\frac{P_2}{P_1}} \quad [36]$$

o

$$\frac{L_2}{L_1} = \sqrt{\frac{P_1 + p}{P_1}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{p}{P_1} \quad [37]$$

Muy cómodo para eliminar la influencia de la desigualdad de los brazos es el método de *substitución*. Se equilibra el cuerpo, colocando en el otro platillo pesas, las cuales no es menester que sean exactas; se retira luego el cuerpo y se colocan en su lugar pesas exactas, hasta obtener la posición que correspondía al equilibrio anteriormente. Las pesas colocadas en reemplazo del cuerpo dan su peso.

20. **Instalación, prueba y manejo de la balanza.** — Lo mejor que podemos hacer, en este caso, es transcribir, en gran parte, las prescripciones de la conocida obra de Kohlrausch, refiriéndola al tipo de balanza de las figuras.

Las cuchillas, platos y lugares de retención de la cruz deben estar completamente limpios, libre de polvo y de sustancias grasas. Lo mismo debe ocurrir con los elementos de limpieza: pinceles y paños; estos últimos deben ser blandos y al lavarlos deben enjuagarse muy bien.

Se nivela la balanza por medio de la plomada de que están provistas con frecuencia, o con un nivel auxiliar que se sitúa en su plataforma; se deja en seguida en libertad la cruz, sin carga, y se corrige una posible diferencia grosera en los momentos con el tornillo lateral de la parte de arriba de la cruz (fig. 251) y se observa si el equilibrio es estable. Si no lo es, se le da tal carácter desplazando hacia abajo el tornillo central.

La sensibilidad de la balanza se modifica por el desplazamiento de este último tornillo; se puede juzgar de su valor teniendo en cuenta que es proporcional al cuadrado del tiempo de oscilación, el cual pue-

de medirse rápidamente. El tiempo de oscilación de las balanzas de brazos más largos es de 10 hasta 15 segundos y de las de brazos más cortos de 6 hasta 10 segundos.

Luego se debe conseguir, por desplazamiento del tornillo lateral, que oscile, sin cargas, alrededor del trazo medio de la escala.

En lo que se refiere a la prueba de la balanza, hay que comprobar en primer lugar, si puesta en libertad, sucesivamente, corresponde, en todos los casos, a sus oscilaciones, la misma posición de reposo; irregularidades en esto pueden provenir de falta de limpieza en los lugares antes mencionados, de una forma inconveniente de los prismas o de su deterioro. Detenida la cruz, el fiel debe indicar un trazo vecino al central de la escala. El ginetillo, situado en cero, no debe influenciar la posición de reposo de las oscilaciones.

La igualdad de brazos se prueba con cargas grandes; permutándolas, el equilibrio no debe alterarse.

Es conveniente probar también si el equilibrio no se modifica situando las mismas cargas en diferentes lugares de los platillos.

La balanza debe estar protegida en contra de un calentamiento desigual de la cruz; lámparas cercanas, colocadas lateralmente, contactos con las manos en sus extremos, influyen desastrosamente en las pesadas.

Las pesas deben situarse en los platos deteniendo previamente la cruz.

UNDECIMA PARTE
ELASTICIDAD DE LOS SÓLIDOS. EL CHOQUE

CAPITULO XVI
ELASTICIDAD

1. **Coefficiente de ruptura. Módulo de Young.** — Ya en las primeras lecciones se ha dicho que todos los cuerpos son deformados por la acción de una fuerza, aun cuando ésta sea pequeña. Nos ocuparemos ahora del estudio de las deformaciones en sí y de sus relaciones con las fuerzas que las producen.

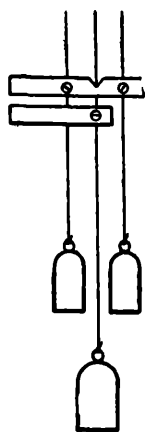


Fig. 254.

El caso más simple lo ofrece un hilo metálico sometido a la acción de dos fuerzas opuestas, aplicadas en sus extremos; la deformación consiste, en ese caso, no sólo en un alargamiento, sino también en una contracción transversal.

Para medir el cambio de longitud se usan instalaciones apropiadas, como la representada en la figura 254. De un soporte fijo en el muro parten tres hilos del mismo material; uno de ellos, el del medio, es el que ha de sufrir el alargamiento, por cuyo motivo termina en un platillo. Lleva además, fija, una chapita rectangular cuyo borde superior es horizontal. Los dos hilos restantes terminan en pesos de grandor suficiente para que queden tendidos; llevan, a su vez, una chapita rectangular cuyo borde inferior es paralelo y está situado a muy pequeña distancia del borde de la chapa antes citada.

Colocando pesos en el platillo, el hilo se alarga, y el alargamiento es igual al aumento de separación entre los bordes de las placas, separación que se mide con un microscopio provisto de micrómetro ocular. La flexión del soporte queda eliminada, pues ambas chapitas se desplazan, por esa causa, en el mismo trayecto.

Es evidente que la dilatación que produce una carga en un hilo de cierta substancia depende de su longitud y de su sección, por cuyo motivo conviene considerar la fuerza correspondiente a la unidad de sección y el alargamiento de la unidad de longitud, para lo cual basta dividir el peso P aplicado por la sección S del hilo y el alargamiento ΔL por la longitud.

Designaremos con el nombre de tensión N la fuerza por cada unidad de superficie y con el de elongación λ el alargamiento correspondiente a la unidad de longitud, es decir, que

$$N = \frac{P}{S} \quad \lambda = \frac{\Delta L}{L} \quad [1]$$

El resultado de las investigaciones realizadas en hilos metálicos, está representado en la figura 255, donde la curva da las elongaciones en función de las tensiones.

Primeramente entre O y A la elongación aumenta *proporcionalmente* a la tensión, es decir, la línea OA es una recta; luego aumenta más rápidamente hasta que se alcanza un punto B , a partir del cual, mantenida constantemente la tensión, el hilo se alarga, primero bruscamente y luego con lentitud, hasta un punto C , alcanzado el cual es necesario aumentar otra vez la tensión para producir una nueva dilatación. Por fin se alcanza una región EE' en la cual se produce la ruptura. La carga que produce la ruptura de un hilo de la unidad de sección se llama *coeficiente o módulo de ruptura*.

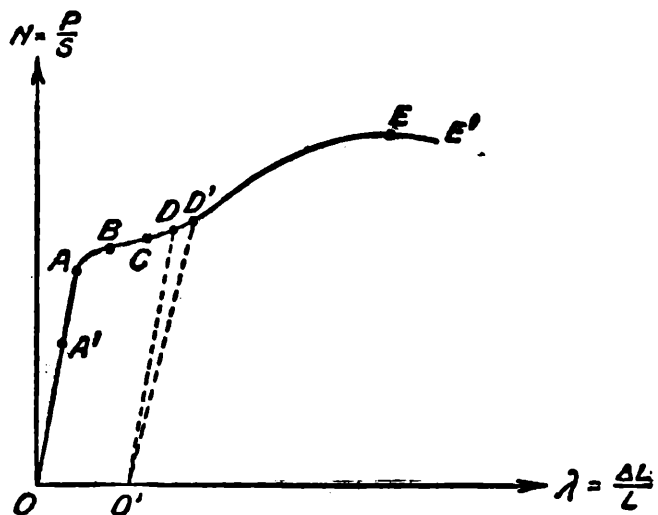


Fig. 255.

Si alcanzando un punto cualquiera situado después de A , el D , por ejemplo, se descarga y carga nuevamente el platillo, se obtiene la curva $DO'D'$, es decir, descargado totalmente el plato, el hilo queda con un alargamiento OO' ; de lo que se infiere que el hilo ha sufrido una modificación íntima permanente. En cambio, descargando el platillo en un punto A' comprendido entre O y A el punto representativo se mueve sobre esa recta y alcanza otra vez, para carga nula, el punto origen, es decir, el hilo recobra exactamente su longitud pri-

mitiva. Por ese motivo se dice que la región OA es la región de la *elasticidad perfecta* y el punto A , a partir del cual resta una deformación permanente, se le designa con el nombre de punto límite de elasticidad.

Es evidente, que en la región OA , la deformación despierta fuerzas interiores que se oponen a la fuerza exterior y que tienen la propiedad de restituir al cuerpo a su forma primitiva. Estas fuerzas se llaman *elásticas*.

Puesto que en la región de perfecta elasticidad la elongación y la tensión N son proporcionales, se puede escribir:

$$N = E \lambda, \quad [2]$$

donde la constante E de proporcionalidad se llama un módulo de elasticidad.

Su significación física es la siguiente: *El módulo de elasticidad E es la tensión interior que nace por cada unidad de elongación.* El producto $E \lambda$, da la tensión total interior que se opone y equilibra a la tensión total exterior.

La ecuación [2], que establece proporcionalidad entre la tensión y la elongación, es un caso particular de una ley fundamental en la teoría de la elasticidad, la ley de Hooke, que establece proporcionalidad dentro de los límites de elasticidad perfecta, entre una deformación cualquiera y la fuerza que la produce.

Introduciendo los valores de N y λ en la [1] se tiene:

$$\Delta L = \frac{1}{E} \frac{PL}{S}, \quad [2']$$

forma con que se expresa ordinariamente la [1] en los textos y que dice que el alargamiento ΔL es proporcional a la carga y a la longitud L , e inversamente proporcional a la sección y al módulo E de elasticidad.

La dimensión del módulo de Young E resulta de la [2'], es:

$$[E] = \frac{[Fuerza]}{[Superficie]},$$

es decir, la dimensión es la de una presión.

En la técnica se expresa la fuerza en kilogramos pesos y la sección de un hilo en milímetros cuadrados.

En el sistema C. G. S. la fuerza se expresa en dinas y la superficie en centímetros cuadrados. Como un kilogramo peso equivale a 981000 dinas y un mm^2 es la centésima parte de una cm^2 , resulta que para expresar un módulo de elasticidad dado en $\frac{\text{Kg. peso}}{\text{mm}^2}$ en $\frac{\text{dinas}}{\text{cm}^2}$ hay que multiplicarlo por 98.100.000.

2. Contracción transversal. — Al mismo tiempo que el hilo se alarga sufre una contracción transversal.

Se llama coeficiente de Poisson o de contracción transversal el cociente de dividir la contracción transversal por la elongación longitudinal.

Navier y Poisson habían deducido, por medio de teorías inexactas, que el valor de tal coeficiente era constante para todos los materiales e igual a $\frac{1}{4}$.

Cagniard de Latour creyó comprobar experimentalmente ese resultado. Su método, que no describimos, no era muy exacto.

Wertheim, por consejo de Regnault, utilizó el siguiente procedimiento: un tubo cilíndrico AB (fig. 256) termina en dos piezas macizas de mayor diámetro; la inferior tiene un anillo donde pueden suspenderse las cargas que han de estirar al cilindro; la superior tiene un orificio al cual se adapta un tubo capilar T . Se llena el interior del cilindro con agua destilada hasta cierta altura, visible en el capilar de vidrio. Si se coloca un peso P se produce una dilatación y una contracción tal como si el cilindro fuese macizo; el nivel del líquido sube en el capilar.

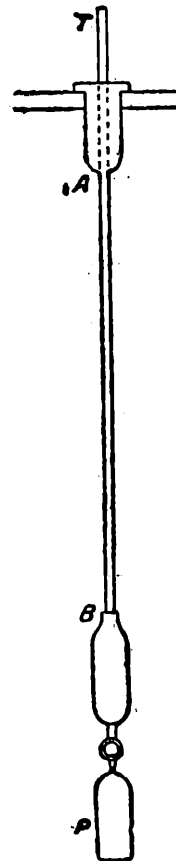


Fig. 256.

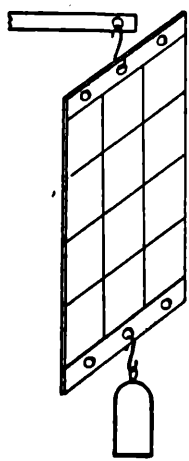


Fig. 257.

No existe interés en conocer los detalles del cálculo de la experiencia; es suficiente con saber que Wertheim encontró que el coeficiente de contracción no solo no coincidía con el valor 0,25, sino que variaba de un material a otro.

Como experiencia de curso puede hacerse la siguiente, debida a Wertheim mismo. Se toma una placa rectangular de caucho y se dibuja una red de cuadrados; por una tracción uniforme, en el sentido de su longitud (figura 257), se convierte en una red de rectángulos.

Si en lugar de un hilo metálico se operase con una barra, por compresión, se obtienen resultados idénticos; en lugar de una elongación se trataría de una contracción, en lugar de una contracción transversal, aparecería una dilatación.

3. Trabajo almacenado en un cuerpo deformado elásticamente. — Dentro de los límites de la elasticidad perfecta, las deformaciones elásticas son, según se ha visto, completamente reversibles. El trabajo gastado por las fuerzas exteriores es almacenado en el material, el cual, al recobrar su forma primitiva, lo restituye al exterior.

Puesto que las fuerzas que se despiertan en el material, iguales en todo momento a la fuerza exterior — si el medio elástico no está animado de ninguna velocidad, — dependen exclusivamente de la longitud del hilo, admiten una potencial. El trabajo gastado por las fuerzas exteriores se almacena entonces en el medio elástico en forma de energía potencial.

Para producir en un hilo de cierta longitud y sección un alargamiento ΔL , podemos aumentar paulatinamente la carga desde el valor cero hasta el valor P , al cual corresponde la dilatación ΔL . En esa forma, en ningún caso ha aparecido energía cinética y el cálculo se simplifica. Puesto que la fuerza es proporcional al alargamiento y ella ha variado desde el valor cero hasta el valor P , se puede suponer que el desplazamiento ΔL ha sido realizado por la fuerza media $\frac{1}{2} P$; el trabajo convertido en energía de deformación elástica será:

$$A = \frac{1}{2} P \cdot \Delta L . \quad [3]$$

Este resultado puede deducirse, con todo rigor, por una simple integración.

Si en la ecuación [3] se substituyen los valores de P y ΔL que resultan de las relaciones [1], se tiene

$$A = \frac{1}{2} N \cdot \lambda \cdot SL . \quad [4]$$

Puesto que el volumen del hilo es SL , *la energía almacenada en cada unidad de volumen es igual a la mitad del producto de la tensión por la elongación.*

4. **Las deformaciones elásticas en su relación con las fuerzas que las determinan.** — La consideración del caso sencillo de la dilatación de un hilo metálico nos facilita un estudio más general de las deformaciones elásticas. Nos limitamos a cuerpos *homogéneos é isotropos*, esto es, a cuerpos que están constituidos idénticamente en todas partes y cuyas propiedades no dependen de la dirección que se considere.

Fijemos primeramente nuestra atención en algunos casos sencillos de equilibrio de cuerpos deformados por fuerzas exteriores, pues así tendremos una idea de las fuerzas que aparecen en los diferentes lugares del cuerpo.

1° Si en el extremo libre de una varilla metálica V (fig. 258), fija en su extremo superior (o un hilo, como el caso tratado al principio), actúa una fuerza P , determina en aquélla un pequeño alargamiento, al cual sigue, en todas partes, un estado de equilibrio. Si imaginamos una superficie S normal a la varilla, el cuerpo queda, por lo menos en el pensamiento, dividido en dos partes y el equilibrio de una de ellas resulta de sus relaciones con la otra. El equilibrio de la parte inferior, por ejemplo, se explica únicamente si la parte de arriba aplica en S , sobre el tramo de abajo, una fuerza F igual y contraria que la suma del peso P aplicado, más el peso propio mg de la porción inferior.

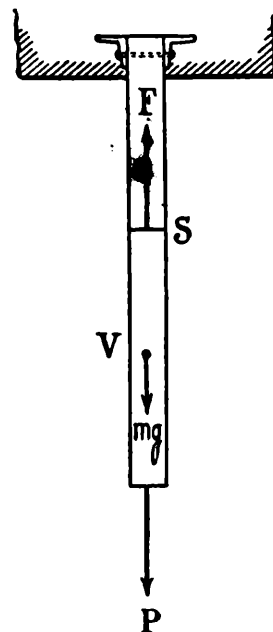


Fig. 258.

Es claro que el tramo de arriba puede imaginarse eliminado, poniendo en su lugar una fuerza exterior de la magnitud y dirección de F . El equilibrio de la porción inferior consistiría en el equilibrio de las tres fuerzas exteriores P , mg y F aplicadas sobre el cuerpo. En general, el peso propio del material es despreciable con respecto a la carga, por cuyo motivo no será tomado en cuenta en lo sucesivo.

La fuerza F es, con respecto al tramo inferior, una fuerza exterior proveniente de la acción de la porción de arriba. Esa fuerza actúa normalmente a la superficie de separación y si admitimos que está distribuída uniformemente sobre ella, la tensión, normal en este caso, es, como se sabe, $N = F/S$.

La dimensión de una tensión es la de una presión, usándose la palabra tensión para designar las fuerzas interiores que se despiertan por las deformaciones, esto es, para las fuerzas elásticas;

2° En lugar de la fuerza P , puede actuar sobre el extremo libre de la barra una cupla de momento \mathcal{M} (fig. 259). El equilibrio del tramo inferior se explica si la porción de arriba aplica en S una cupla del momento \mathcal{M}' igual y contrario que \mathcal{M} . En este caso las tensiones sobre la superficie de separación son *tangenciales*. Lo mismo que en el caso anterior, el tramo de arriba puede suponerse substituído por una cupla de momento \mathcal{M}' igual y de sentido contrario que \mathcal{M} ; el

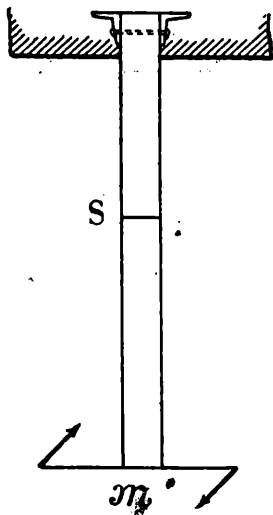


Fig. 259.

equilibrio de la parte inferior de la barra resulta del equilibrio de las cuplas \mathcal{M} y \mathcal{M}' aplicadas sobre ella;

3° Tengamos ahora una barra MN (fig. 260) fijada a un muro por uno de sus extremos y sometida en el otro a la acción de una carga P . Como la fuerza P puede trasladarse hasta el lugar de la superficie S , agregando una cupla cuyo momento sea el producto de P por su distancia a S , el equilibrio de la porción NS resulta únicamente si la porción MS le aplica una fuerza P' igual y contraria que P y una cupla FF de momento igual y contrario que el de P respecto a S .

Es claro que la cupla dibujada es la resultante de cuplas elementales, pues las fuerzas normales F están distribuidas con intensidad variable en toda la sección S . Que existen las fuerzas F dibujadas es fácil concebirlo si se supone el corte real y la unión mantenida por medio de resortes.

En suma, sobre la sección S actúan fuerzas normales y tangenciales; en cada punto tienen una resultante que no será normal a la superficie. Las cuplas F determinan un *momento flector* y las fuerzas tangenciales P' un *esfuerzo de corte*.

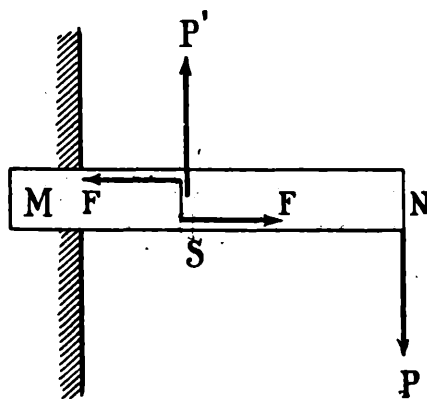


Fig. 260.

Queremos dar más amplitud a los raciocinios que nos han permitido estudiar estos casos, ocupándonos del equilibrio de una porción limitada del cuerpo; no se trata ahora únicamente de una porción real, sino de una porción arbitraria, real o imaginada. Sobre la superficie que la limita actúan las tensiones que transmite el resto del medio y su equilibrio se produce si esas tensiones, provenientes de la materia que la rodea, se equilibran. Esas fuerzas son, respecto al elemento considerado, fuerzas exteriores, si

bien con respecto al medio total son interiores. De la misma manera, el movimiento de aquel elemento estaría determinado por esas fuerzas exteriores.

Eso encierra el principio fundamental de la teoría de la elasticidad que se enuncia: *Toda porción real o imaginada de un cuerpo constituye, por sí, un cuerpo sobre el cual se pueden aplicar las leyes de la mecánica.*

Si en un medio elástico consideramos una porción elemental, un paralelepípedo, por ejemplo (fig. 261), la acción sobre él del resto de la materia consistirá en fuerzas que actúan sobre sus caras. Si se descomponen según ejes ortogonales coincidentes o paralelos a tres aristas concurrentes del paralelepípedo, se tendrá sobre cada cara una fuerza normal y dos fuerzas tangenciales. Este será el sistema más general de fuerzas a que puede estar sometido un elemento semejante.

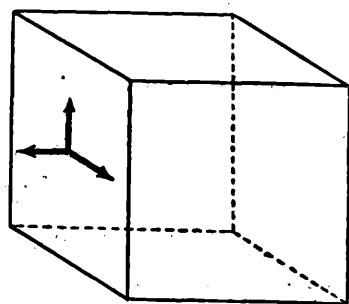


Fig. 261.

La deformación resultante, si ella es infinitamente pequeña, se obtiene *superponiendo* las deformaciones correspondientes a los diferentes sistemas de fuerzas.

*** 5. Las deformaciones simples o elementales en una sustancia homogénea e isótropa: dilatación uniforme y deslizamiento.**

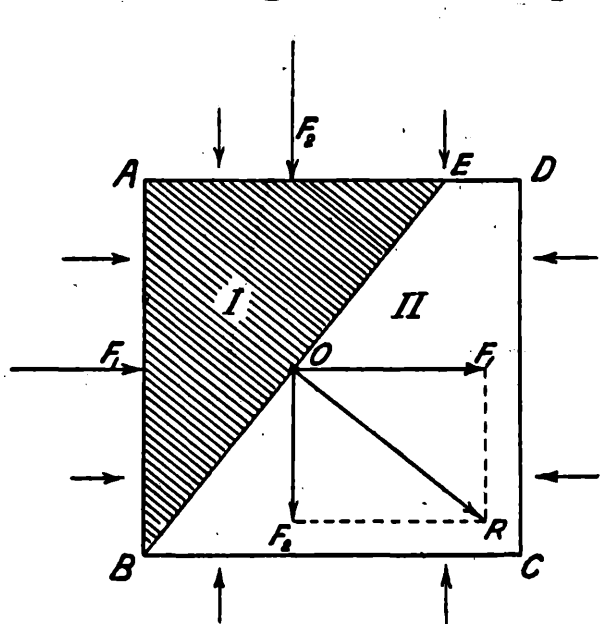


Fig. 262.

Una de las condiciones que deben llenar una sustancia para ser definida como isótropa, elásticamente, es que si a una porción de ella, esférica o cúbica, por ejemplo, se la somete a una compresión normal uniforme, es decir, del mismo valor en todas partes de la superficie, experimenta sólo un cambio de volumen, pero ningún cambio de forma, pues por la definición de isotropía, la acción de fuerzas del mismo mó-

dulo no depende de la dirección; la esfera debe convertirse en una esfera menor y el cubo en un cubo de menores dimensiones. Al revés, si se tratase, no de una compresión, sino de una tracción uniforme.

Si la presión es, como hemos supuesto, normal y uniforme sobre la superficie exterior de una porción de la substancia, la tensión que se ejerce sobre una superficie cualquiera imaginada en su interior es, como veremos enseguida, normal a ella y del mismo valor que sobre la superficie exterior.

Trátese, por ejemplo, de un cubo elemental sometido a una presión uniforme normal a las caras y consideremos lo que ocurre en una sección normal a una de sus aristas, la que pasa por su punto medio, por ejemplo. Sobre cada lado del cuadrado así obtenido (fig. 262) supondremos distribuída uniformemente la fuerza total que actuaba sobre la cara del cubo en que se encuentra. Se tiene así un cuadrado sometido a una presión uniforme que indicaremos con p y que actúa normalmente sobre sus lados.

Si imaginamos dividido el elemento en dos porciones I y II por un plano normal a las caras paralelas a la sección supuesta y que pase por una recta como la BE , es claro que el equilibrio de la porción I proviene del equilibrio de las fuerzas aplicadas sobre AE y AB con las fuerzas que le transmite la porción II y que se aplican sobre el lado EB . Para calcular estas últimas fuerzas recurrimos, sencillamente, a las reglas de la estática, considerando a la porción I como rígida, lo cual es permitido, pues las condiciones de equilibrio no se modifican con ello.

La fuerza total sobre AB es $F_1 = p AB$ y la fuerza sobre AE es $F_2 = p AE$, si se indican con AB y AE las áreas de las caras, fuerzas que pasan, evidentemente, por los puntos medios de AB y AE y las rectas que las contienen se cortan en el punto medio O de la recta BE . es claro, entonces, que las fuerzas que le transmite la porción II tienen como resultante una fuerza R aplicada en O e igual y de sentido contrario que la diagonal del paralelogramo construído sobre F_1 y F_2 . De consideraciones geométricas sencillas resulta en seguida que R es normal a EB e igual a $p EB$, y como el tamaño del elemento puede ser cualquiera, resulta que R debe estar distribuído uniformemente sobre EB , con lo que queda demostrada la afirmación sentada al principio.

Además, puesto que la superficie que pasa por O puede ser cualquiera, resulta que la tensión en el punto O no depende de la dirección; la tensión y la deformación son iguales en todas direcciones.

Es notorio también que cualquiera sea la posición y orientación de una figura elemental sólida imaginada dentro de la substancia así deformada, por ejemplo, un cubo en cualquiera posición y orien-

tación dentro del cubo antes supuesto, no sufrirá ningún cambio que no consista únicamente en un cambio de volumen, conservando una forma idéntica.

Una deformación con esas características se designa con el nombre de *dilatación uniforme*.

La isotropía exige, además, que si actúan sobre las caras de un paralelepípedo cualquiera, un cubo, por ejemplo, fuerzas tangenciales, debe producirse únicamente un cambio de forma, pero no un cambio de volumen, es decir, en ninguna parte debe aparecer una dilatación o una contracción, que es una dilatación negativa; deben modificarse solamente los ángulos.

Si una fuerza tangencial diese origen a una dilatación positiva, por ejemplo, una fuerza tangencial igual y de sentido contrario debería dar

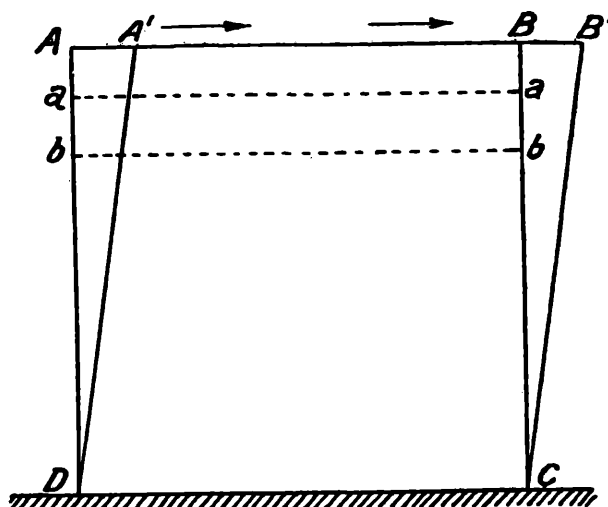


Fig. 263.

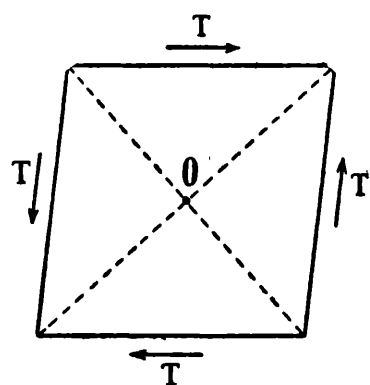


Fig. 264.

lugar a una dilatación negativa y del mismo valor absoluto, pues por el principio de superposición, si imaginamos que actúan los dos sistemas al mismo tiempo, la deformación debe ser nula. El cuerpo no sería, en contra de lo supuesto, isótropo.

Si, por ejemplo, sobre la cara superior AB de un cubo, cuya base CD (fig. 263) suponemos fija, actúa una fuerza tangencial distribuída uniformemente, la deformación debe consistir únicamente en un *deslizamiento* relativo de las capas elementales aa y bb , en que puede imaginarse descompuesto el cubo por planos paralelos a la base fija; el desplazamiento de cada capa será proporcional a la distancia

que lo separa de la base y el cubo se convertirá en el paralelepípedo $A'B'DC$. Un ejemplo ilustrativo lo brinda el caso de un juego de naipes sobre el que apoyando la mano empujamos horizontalmente; la carta inferior permanece en reposo mientras que las demás avanzan, en dirección de la fuerza, caminos proporcionales a sus distancias al plano inferior fijo. En esta deformación sólo han variado, lo cual es ostensible, los ángulos; el volumen ha quedado el mismo, es decir, no existe ninguna dilatación.

Si un paralelepípedo elemental está en equilibrio bajo la acción de fuerzas tangenciales que actúan sobre sus caras, la suma de los momentos de las fuerzas con respecto a un punto debe ser cero.

Si un paralelepípedo de caras iguales se encuentra en equilibrio bajo la acción de fuerzas tangenciales a sus caras, aquella condición se cumple, únicamente, si las tensiones son numéricamente iguales sobre todas las caras y orientadas como nuestra la figura 264, donde se considera, como antes, una sección normal a una de las aristas. La suma de los momentos con respecto al punto O , por ejemplo, es así cero.

Las fuerzas tangenciales T , son como ya se ha dicho, las fuerzas exteriores que actúan sobre el elemento y que provienen de la materia que lo rodea.

Como el sistema más general de fuerzas a que puede estar sometido un elemento consiste en un sistema de fuerzas normales y en un sistema de fuerzas tangenciales, es claro que la deformación más general que puede sufrir un elemento de una substancia homogénea e isotrópa, debe consistir en una superposición de dilataciones uniformes y de deslizamientos.

***6. Las deformaciones de los cuerpos isotrópos son homogéneas. Ejes principales.** — Tanto en la dilatación como en el

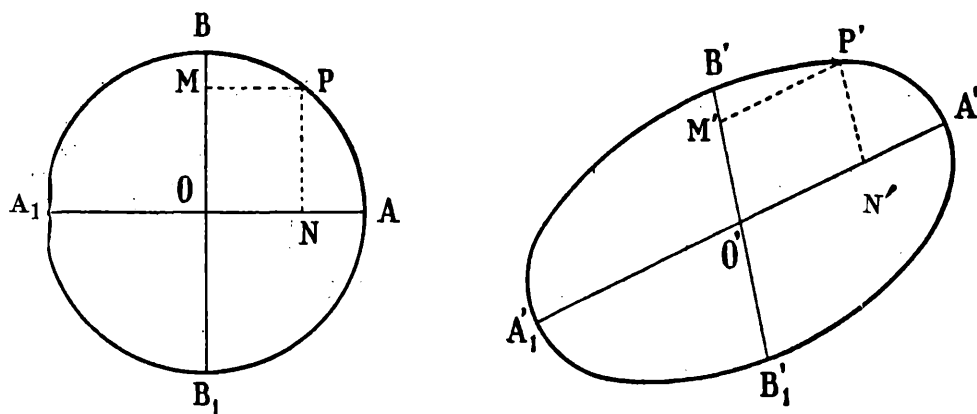


Fig. 265.

deslizamiento, es fácil ver que dos rectas que eran iguales y paralelas antes de la deformación serán iguales y paralelas después de la deformación. Si el cuerpo sufre una deformación después de la otra, es evidente que el paralelismo y la igualdad de dos rectas dadas no se alteran. Deformaciones que gozan de tal propiedad se dicen *homogéneas*, y es claro que todas las posibles deformaciones de una substancia isotrópa lo son.

De la definición resulta que una deformación homogénea no modifica la relación entre las longitudes de dos líneas paralelas.

Con este resultado se puede probar que en el caso de una deformación cualquiera, de una substancia isótropa, existe por lo menos un sistema, y en general sólo uno, de tres direcciones ortogonales entre sí, que permanecen perpendiculares a pesar de la deformación, las cuales se denominan *ejes principales*. Nos limitaremos, como hemos hecho hasta ahora, y por razones de simplicidad, a una deformación plana. Vamos a probar que un círculo BAB_1A_1 (fig. 265) se convierte en un elipse $B'A'B_1'A_1'$. Sea P un punto del círculo y PM y PN las coordenadas con respecto a dos diámetros perpendiculares entre sí; después de la deformación O está en O' , P en P' , M en M' , N en N' , etc.

Según las definiciones establecidas debe ser

$$\frac{PM}{OA} = \frac{P'M'}{O'A'}$$

$$\frac{PN}{OA} = \frac{P'N'}{O'B'}$$

Pero puesto que P y A son puntos de un círculo, se tiene:

$$\frac{PM^2}{OA^2} + \frac{PN^2}{OA^2} = 1$$

y, por lo tanto,

$$\frac{P'M'^2}{O'A'^2} + \frac{P'N'^2}{O'B'^2} = 1$$

es decir, el punto P' se encuentra sobre una elipse. Estaría sobre un círculo si se tratase de una dilatación uniforme.

Entonces, un círculo se convierte en una elipse; dos diámetros a ángulo recto se convierten en dos diámetros conjugados, y puesto que la elipse tiene solamente dos ejes conjugados perpendiculares entre sí, resulta que existen dos, y solamente dos, direcciones ortogonales que permanecen ortogonales después de la deformación.

Las elongaciones en dirección de esos ejes se llaman *elongaciones principales*. De las consideraciones que preceden resulta que si se conocen las elongaciones principales es posible calcular las elongaciones que corresponden a otras direcciones cualesquiera.

El volumen de un cubo cuyas aristas tenían la unidad de longitud, después de haber sufrido una deformación tal que los ejes principales fuesen paralelos a tres de sus aristas, sería

$$(1 + l) (1 + m) (1 + n) = 1 + l + m + n ,$$

si l , m y n indican las elongaciones principales, y si se tienen en cuenta que siendo magnitudes muy pequeñas es permitido despreciar sus productos.

Cuando es $l = m = n$, la deformación consiste en una dilatación uniforme; en todos los demás casos, se trata de deformaciones compuestas por las deformaciones simples que ya conocemos.

***7. Descomposición de una deformación homogénea en compresiones y dilataciones según los ejes principales.** —

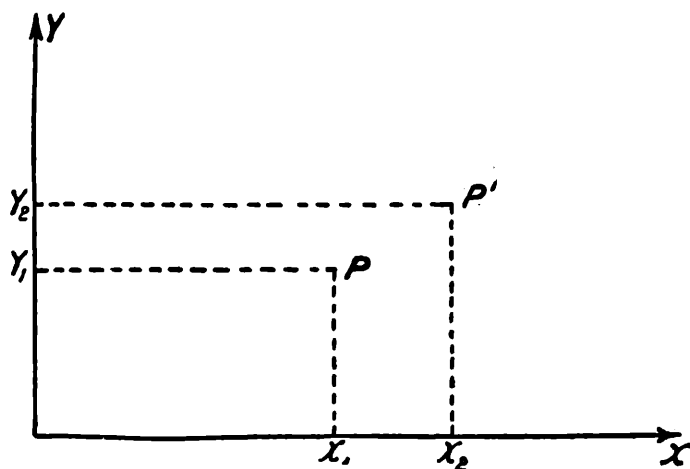


Fig. 266.

Consideremos nuevamente una dilatación plana. Sean (fig. 266) oy y ox dos direcciones ortogonales paralelas a los ejes principales.

Un punto P pasa, por la deformación, a ocupar la posición P' . Si l y m son las elongaciones en las direcciones x e y , esto es, las dilataciones correspondientes a la unidad de longitud,

los desplazamientos paralelos a los ejes son:

$$x_2 - x_1 = \xi = lx_1 = \frac{1}{2} (l + m) x_1 + \frac{1}{2} (l - m) x_1$$

$$y_2 - y_1 = \eta = my_1 = \frac{1}{2} (l + m) y_1 - \frac{1}{2} (l - m) y_1 ,$$

expresiones que muestran que la dilatación dada de elongaciones l , m , según los ejes, puede substituirse por dos dilataciones, una *uniforme* de elongación $\frac{1}{2} (l + m)$ y otra que consiste en una *elongación* $\frac{1}{2} (l - m)$ según x , y en una *contracción* $\frac{1}{2} (l - m)$ según y .

La dilatación uniforme no modifica la forma, sino el tamaño de los elementos, según se ha visto, mientras que la dilatación que consiste en elongaciones iguales, pero de sentido contrario, según los ejes, no modifica el tamaño de los elementos, pero sí su forma, según se verá.

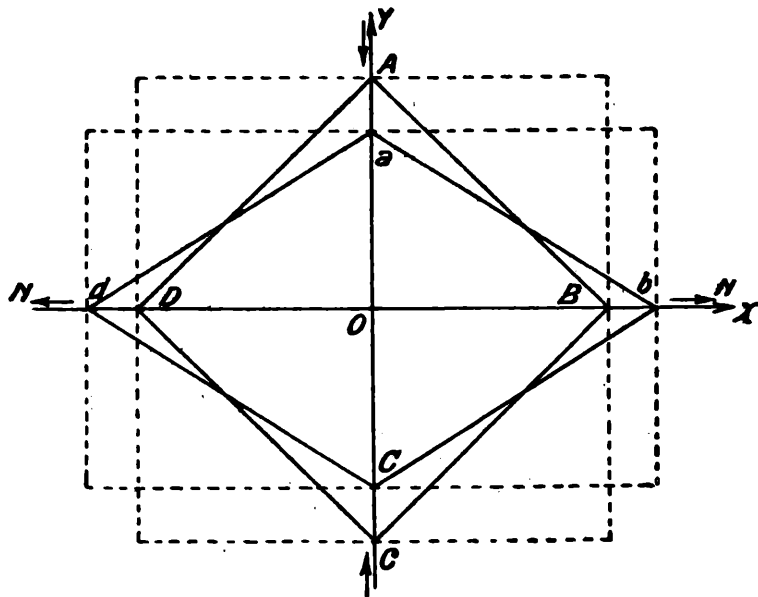


Fig. 267.

Si escribimos $1/2 (l - m) = \epsilon$, la unidad de longitud se convierte por una deformación semejante en $1 + \epsilon$ según un eje y en $1 - \epsilon$ según el otro; un cuadrado de lados iguales a la unidad y paralelos a los ejes se convierte en un cuadrado de área $(1 + \epsilon)(1 - \epsilon) = 1 - \epsilon^2 = 1$, pues ϵ es una magnitud sumamente pequeña.

Conviene considerar esta deformación de otro modo. Sean (fig. 267) Ox y Oy los ejes principales; $ABCD$ es una figura que antes de la deformación es un cuadrado tal que $OA = OB = OC = OD = 1$; su área es, por consiguiente,

$$S = \overline{AB}^2 = 2.$$

La deformación lo convierte en el cuadrilátero $abcd$, cuya área S' se obtiene teniendo presente que es ahora

$$Oa = 1 - \epsilon$$

$$Ob = 1 + \epsilon,$$

donde ϵ tiene la significación dada antes.

Resulta

$$S' = \overline{ab}^2 = (1 + \epsilon)^2 + (1 - \epsilon)^2 = 2 + 2\epsilon^2$$

o, por la pequeñez de ϵ ,

$$S' = S = 2$$

y

$$ab = AB.$$

Se puede girar ahora el cuerpo como si fuese rígido, lo cual, no produciendo desplazamientos relativos entre las partes del mismo, no despierta fuerzas elásticas, que son las únicas de que nos ocupamos en este momento. Se puede así hacer coincidir la línea ab con su igual AB , y se tienen de este modo, si excluimos la rotación de conjunto, las dos posiciones, inicial y final del cuerpo, como indica la figura 268.

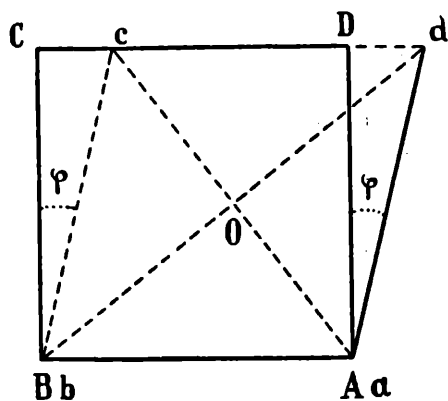


Fig. 268.

Podemos pasar de una posición a otra manteniendo fija una de las caras, la AB , por ejemplo, y haciendo desplazar cada

uno de los puntos, paralelamente a AB , en un camino proporcional a la distancia que los separa de esa línea. Para esto es menester, como sabemos, la acción de fuerzas tangenciales.

Se ve, entonces, que la deformación que consiste en una contracción según un eje principal y en una dilatación igual según el otro eje es la deformación simple que hemos denominado *deslizamiento*. El deslizamiento se mide por el arco φ que forman las posiciones inicial y final de las caras perpendiculares a la cara fija AB . Si los lados del cubo son, como hemos supuesto, iguales a la unidad, y puesto que se trata de deformaciones infinitamente pequeñas, es

$$Cc = Dd = \text{tang } \varphi = \varphi.$$

La relación entre la medida circular de φ y la elongación o contracción ϵ según los ejes se encuentra fácilmente.

Se tienen las relaciones:

$$\text{tang } BA d = \text{tang } 2 BAO = - \cot \varphi = - \frac{1}{\varphi}$$

$$\text{tang } BAO = \frac{OB}{OA} = \frac{Bd}{Ac} = \frac{Bd/BD}{Ac/AC} = \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}$$

como resulta claramente de la figura 268.

Si se tiene, además, presente la relación que vincula a la tangente del doble de un ángulo en función de la tangente del mismo ángulo y recordando además que se puede escribir

$$(1 + \epsilon) (1 - \epsilon) = 1$$

resulta

$$\text{tang } BA d = \frac{2 (1 + \epsilon)}{1 - \left(\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}\right)^2} = - \frac{1}{2 \epsilon}$$

y, por lo tanto,

$$\varphi = 2 \epsilon .$$

De lo que antecede resulta que un deslizamiento en un cubo elemental, o una deformación plana en un cuadrado elemental, puede suponerse producido por una dilatación según un eje y una contracción igual según el otro eje, es decir, por una contracción en la dirección de una diagonal y una compresión igual según la otra diagonal (fig. 267), o por la aplicación de una fuerza tangencial uniformemente distribuída sobre la cara paralela a una cara fija AB . Se trata ahora de averiguar que relación existe entre las fuerzas normales del primer procedimiento y la fuerza tangencial del segundo.

A fin de simplificar las deducciones imaginemos que dentro de un cuerpo o porción de cuerpo, sufre un deslizamiento un cubo elemental, o limitándonos a una deformación plana, que sobre los lados de un cuadrado actúan, como muestra la figura 269, las fuerzas tangenciales T ; los ejes principales tienen, según se sabe, las direcciones de las diagonales.

El equilibrio de una porción como la I (fig. 269) requiere evidentemente que la porción II le aplique normalmente a CB la tracción N de valor numérico igual a la tensión tangencial T , pues si las fuerzas $F_1 = T \cdot CD$, $F_2 = T \cdot DB$ y $R = N \cdot CB$ están en equilibrio, deben pasar por un mismo punto y R debe ser igual y opuesta a la dia-

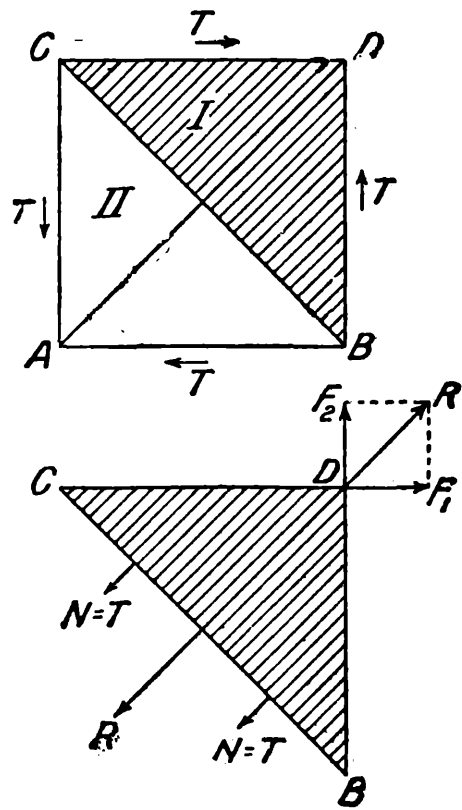


Fig. 269.

gonal del paralelogramo construido sobre F_1 y F_2 , y por sencillas consideraciones geométricas se obtiene

$$T = N. \quad [6]$$

De la misma manera se encontrará la fuerza que actúa sobre la otra diagonal, fuerza que es también numéricamente igual a T , pero normal a la cara.

Es decir, el deslizamiento que se obtiene por los dos procedimientos tiene el mismo valor si la tensión tangencial del segundo método es igual a la presión o tracción del primero.

8. Resumen de los números 5, 6 y 7. Deformaciones elementales. Homogeneidad de las deformaciones. Ejes principales.

— Una substancia se dice elásticamente isótropa si sus cualidades elásticas no dependen de la dirección. En una substancia isótropa toda deformación elástica consiste en la superposición de dos clases de deformaciones elementales: una que consiste en un cambio de volumen sin que los ángulos se modifiquen, vale decir, sin que la forma se altere; y otra en la que el volumen permanece invariado, alterándose los ángulos. La primera se denomina *dilatación uniforme* y la segunda *deslizamiento*.

La dilatación uniforme es producida por presiones normales y uniformes, vale decir, que tienen el mismo valor en todas partes. Por ejemplo, si un cubo de cobre es comprimido por presiones normales a sus caras, del mismo valor en todas partes, vale decir, uniformes, se convertirá en un cubo de menor volumen; si se tratase de una esfera, en una esfera de menores dimensiones. Si las cualidades elásticas dependiesen de la dirección, tanto el cubo como la esfera cambiarían de forma geométrica por obra de la compresión, a pesar de ser ésta uniforme.

La medida de una dilatación uniforme está dada por la variación de volumen de la unidad de volumen, esto es, por el cociente $\Delta V:V$, si V es el volumen del cuerpo y ΔV su variación total.

El deslizamiento es producido por la acción de *fuerzas tangenciales*. Si apoyando la mano, por ejemplo, sobre un juego de cartas le aplicamos una fuerza tangencial, todas las cartas avanzan en el sentido de su acción en un camino que es proporcional a sus distancias respectivas a la base sobre la que descansa el mazo. Vale decir que las cartas se *deslizan* unas sobre otras. Si se tratase de un paralele-

pípedo $ABCD$, figura 268, de una substancia isótropa cualquiera, cobre, por ejemplo, bajo la acción de fuerzas tangenciales adquiriría la forma $abcd$. Es notorio que su volumen no se modifica.

La medida de un deslizamiento está dado por el ángulo φ (figura 268).

En una substancia isótropa dos rectas que son iguales y paralelas antes de una deformación cualquiera, lo son también después. Se dice, por eso, que las deformaciones de las substancias isótropas son *homogéneas*. Consecuencia de esto es que existe por lo menos un sistema y, en general, sólo uno de tres direcciones ortogonales entre sí que permanecen perpendiculares a pesar de la deformación. Esas tres direcciones se denominan *ejes principales*.

9. Definición de las constantes características o módulos. — Se ha visto que toda deformación puede descomponerse en dos deformaciones simples: una que modifica el tamaño, pero no la forma; otra que modifica la forma, pero no el volumen de los elementos. Está claro, entonces, que una substancia homogénea isótropa debe quedar definida elásticamente si se conocen las tensiones que se despiertan en ella en cada una de esas deformaciones.

Tales magnitudes pueden ser definidas utilizando la ley de Hooke, según la cual toda deformación, dentro de los límites de la elasticidad perfecta, es proporcional a la tensión, de suerte que se puede escribir, en forma completamente general,

$$\text{Tensión} = C \cdot \text{deformación}, \quad [7]$$

donde la constante C se dice un *módulo de elasticidad*.

Si el material está sometido a una presión uniforme, los elementos cambian de volumen, pero no de forma; la deformación, que es una dilatación uniforme, está medida por la variación de volumen que experimenta cada unidad de volumen; en este caso la constante C se llama *módulo de compresión* y lo designaremos con la letra Ψ . Se tiene, si indicamos con N a la tensión normal uniforme,

$$N = \Psi \frac{\Delta V}{V}.$$

Si la deformación consiste únicamente en un cambio de forma, vale decir, en un deslizamiento, C se llama el *módulo de rigidez* o de *torsión* y lo indicaremos con la letra Φ .

Si T es la tensión tangencial que produce el ángulo φ de deslizamiento, la relación de Hooke se escribe en este caso ⁽¹⁾:

$$T = \Phi \cdot \varphi. \quad [8]$$

Con los módulos Ψ y Φ quedan definidas las calidades elásticas de las substancias isótropas. Esto significa que el módulo E de Young, introducido en el párrafo 1, y la contracción transversal σ no son magnitudes independientes, sino funciones de Ψ y Φ . La teoría — que desarrollamos en el número siguiente — enseña que existen las siguientes relaciones:

$$\Psi = \frac{\Phi E}{3 (3 \Phi - E)} \quad [9]$$

y

$$\frac{E}{\Phi} = 2 (1 + \sigma) \quad \text{o} \quad \sigma = \frac{E - 2 \Phi}{2 \Phi}. \quad [10]$$

La forma en que se han escrito esas ecuaciones es debido al hecho de que se mide experimentalmente E y Φ , en vez de Ψ y Φ , pues es más fácil la medida de E que la de Ψ . Conocidos E y Φ , se calculan por ellas Ψ y σ .

DIMENSIONES DE LOS MÓDULOS. — La dimensión del módulo E de Young ya ha sido establecida anteriormente.

Las dimensiones de todos los módulos son iguales, pues la tensión tiene siempre la dimensión de una fuerza sobre una superficie y la deformación se mide por un número; en el caso de la extensión de un hilo, es el cociente entre el alargamiento y la longitud del hilo; si se trata de una compresión, la deformación se mide por la relación numérica entre la variación del volumen y el volumen mismo; en el deslizamiento la deformación se mide por un ángulo, que es un número. Se puede escribir entonces

$$[E] = [\Psi] = [\Phi] = \frac{\text{Fuerza}}{\text{Superficie}}.$$

En la técnica, los módulos se expresan midiendo la fuerza en kilogramos-pesos y la superficie en mm^2 .

⁽¹⁾ Puesto que, como se dedujo en el párrafo 7, es $\varphi = 2 \epsilon$ y $T = N$, en lugar de la expresión [8] puede escribirse también, $N = 2 \Phi \epsilon$.

Dados los módulos en $\frac{\text{Kg} \cdot \text{peso}}{\text{mm}^2}$ se puede expresar en $\frac{\text{dinas}}{\text{cm}^2}$ multiplicándolos por 98100000, como ya se vió en el caso del módulo de Young.

* 10. **Deducción de las relaciones generales.** — Consideremos un cubo cuya arista sea la unidad (fig. 270) y actúen sobre sus caras las tensiones normales N_1 , N_2 y N_3 iguales dos a dos y de sentido contrario.

Por el principio de superposición de las pequeñas deformaciones, el efecto de cada par de fuerzas opuestas no se altera por la presencia de las demás: cada par de fuerzas produce su efecto como si estuviese solo.

Si actúan únicamente las dos tensiones N_1 , las aristas paralelas al eje x sufrirán un alargamiento proporcional a N_1 , mientras que las otras dos direcciones ortogonales sufrirán una contracción, también proporcional a N_1 .

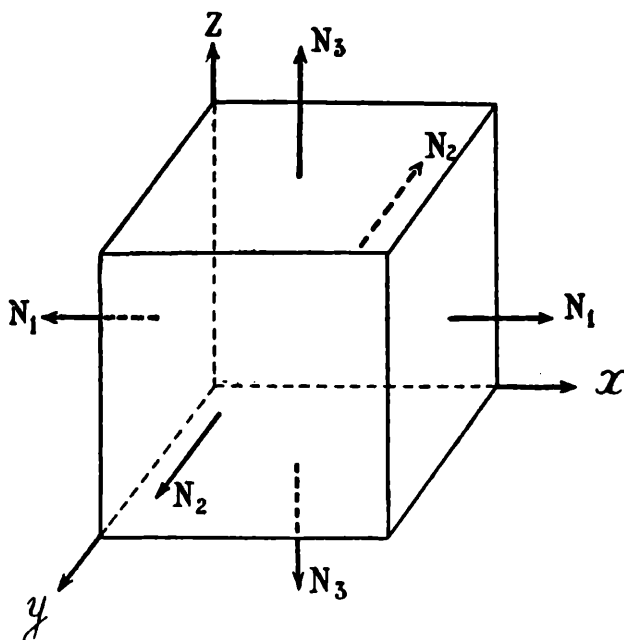


Fig. 270.

Lo mismo ocurre con respecto a las N_2 y N_3 . Si actúan todas las fuerzas simultáneamente, la superposición de todas las dilataciones y contracciones según las tres direcciones, da la elongación correspondiente a cada una de éstas. Indicando, como antes, con l, m, n las elongaciones respectivas en las direcciones x, y, z , y con α, β , respectivamente, los coeficientes de proporcionalidad de los alargamientos en dirección de las fuerzas y de las contracciones en direcciones normales, se tiene

$$\begin{aligned} l &= \alpha N_1 - \beta N_2 - \beta N_3 \quad \text{dirección } x \\ m &= -\beta N_1 + \alpha N_2 - \beta N_3 \quad \text{dirección } y \quad [9] \\ n &= -\beta N_1 - \beta N_2 + \alpha N_3 \quad \text{dirección } z. \end{aligned}$$

Especializando las fuerzas, deduciremos de estas ecuaciones las relaciones que buscamos.

A. DILATACIÓN O COMPRESIÓN UNIFORME. — En este caso se tiene:

$$N_1 = N_2 = N_3 = N$$

$$m = n = l.$$

La variación del volumen unidad del cubo es $3l$, y, por lo tanto, según la definición del módulo de compresión se tiene:

$$N = \Psi \cdot 3l \quad [10]$$

$$l = \frac{N}{3\Psi}$$

mientras que de las relaciones [9] resulta

$$l = N (\alpha - 2\beta) \quad [11]$$

y, por consiguiente,

$$\frac{1}{3\Psi} = \alpha - 2\beta. \quad [I]$$

B. DESLIZAMIENTO. — Consideremos un deslizamiento en un plano normal a la dirección de las y . Debe ser

$$N_1 = -N_3 \quad N_2 = 0$$

$$l = -\varepsilon \quad m = 0 \quad n = \varepsilon.$$

De las ecuaciones [9] resulta:

$$\varepsilon = N (\alpha + \beta) \quad [12]$$

y por la relación [8']

$$\varepsilon = \frac{N}{2\Phi},$$

si Φ es el módulo de rigidez o torsión. Por consiguiente, se tiene

$$\frac{1}{2\Phi} = \alpha + \beta. \quad [II]$$

C. EXTENSIÓN. — Si actúa únicamente uno de los pares de fuerzas se tiene el primer caso tratado; la constante E de proporcionalidad entre la tensión y la elongación es el módulo de Young.

Si la extensión tiene lugar en dirección de las z debemos escribir

$$N_1 = N_2 = 0 \quad N_3 = N \quad n = \lambda.$$

Por la tercera ecuación [9] debe ser

$$\lambda = \alpha N \quad [13]$$

y por la [2] la [13] es

$$E = \frac{1}{\alpha}. \quad [III]$$

De las relaciones I y II se obtiene

$$\alpha = \frac{3 \Psi' - 2 \Phi}{18 \Phi \Psi'} \quad [15]$$

y por la relación III

$$\beta = \frac{3 \Psi' + \Phi}{9 \Phi \Psi'} \quad [15]$$

$$E = \frac{9 \Phi \Psi'}{3 \Psi' + \Phi}. \quad [16]$$

El coeficiente de Poisson, que indicamos con σ , es la relación entre la contracción lateral y la dilatación longitudinal, es decir,

$$\sigma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{3 \Psi' - 2 \Phi}{2 (3 \Psi' + \Phi)}. \quad [17]$$

Se tienen así expresadas las constantes E y σ en función de las constantes elegidas como características, que son el módulo de compresión o de elasticidad de volumen Ψ' y el módulo de rigidez o torsión Φ .

Experimentalmente es más fácil determinar E y Φ , de modo que es conveniente expresar a Ψ' y σ en función de ellas.

De la [16] resulta

$$\Psi' = \frac{\Phi E}{3 (3 \Phi - E)} \quad [18]$$

y por las [16], [17] y [18]

$$\frac{E}{\Phi} = 2 (1 + \sigma), \quad [19]$$

de donde

$$\sigma = \frac{E - 2 \Phi}{2 \Phi}, \quad [19']$$

relación que muestra que el número σ no puede tener un valor fijo para todas las substancias.

11. **Torsión.** — A. VALOR DEL MOMENTO. — Consideremos el caso de un hilo o barra cilíndrica fija en uno de sus extremos y torcida por la acción de una cupla aplicada en el extremo libre.

Es claro que los puntos situados sobre un mismo plano perpendicular giran todos en el mismo ángulo, no existiendo, además, por razones de simetría, ningún desplazamiento radial, pues si, por ejemplo, actuando una cupla en sentido contrario a las agujas de un reloj el hilo sufriese un aumento de diámetro, cuando la cupla actuara en el otro sentido, debiera esperarse una contracción, lo cual es absurdo. Por idéntico motivo quedan excluidos los desplazamientos longitudinales; se trata, por lo tanto, de un deslizamiento.

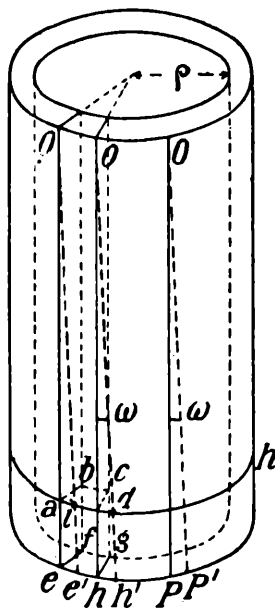


Fig. 271.

Por otra parte, es evidente que el ángulo en que gira una sección cualquiera es proporcional a la distancia que la separa del extremo fijo; líneas tales como las oe, oh (fig. 271), paralelas al eje del cilindro y trazadas sobre su superficie, se convierten por la torsión en las $oe' oh'$, que son líneas espirales.

El momento \mathcal{M} necesario para hacer girar en el ángulo α al extremo inferior de la barra, que suponemos maciza, de radio r y longitud l es:

$$\mathcal{M} = \frac{\pi}{2} \Phi r^4 \frac{\alpha}{l}, \quad [20]$$

donde Φ es el módulo de torsión o de deslizamiento.

Los caminos circulares en que se desplazan los diferentes puntos de una misma sección son proporcionales a sus distancias al eje, por cuyo motivo se debe imaginar descompuesto el cilindro en una serie de tubos concéntricos de pequeño espesor. En la figura se ha dibujado uno de ellos, el exterior.

* PRUEBA. — Consideremos el paralelepípedo elemental $abcde fgh$, perteneciente al tubo dibujado; los puntos de la cara superior que suponemos a la distancia l del corte superior fijo se desplaza en el camino

$$ai = \omega l, \quad [21]$$

si ω es el ángulo señalado en el dibujo.

La cara inferior $ef\ gh$ situada a la distancia h , muy pequeña, de la anterior, se desplaza paralelamente en el camino circular

$$ee' = \omega (l + h). \quad [22]$$

La diferencia entre los caminos recorridos es

$$ee' - ai' = \omega h. \quad [23]$$

El elemento puede considerarse, suprimiendo el desplazamiento de conjunto, como si hubiese sufrido el deslizamiento que muestra la figura 272. Se tiene

$$ee'' = hh'' = ff'' = gg'' = \omega h. \quad [24]$$

El ángulo de deslizamiento será entonces

$$\frac{ff''}{h} = \omega. \quad [25]$$

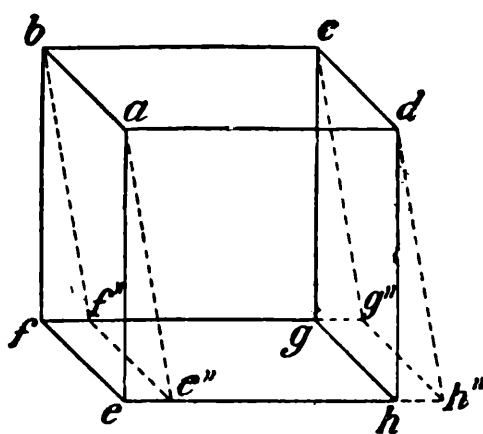


Fig. 272.

Si α es el ángulo en que gira la base inferior y ρ la distancia de la capa al eje del cilindro, se tiene, despreciando ωh con respecto a ωl :

$$ee' = \alpha \rho = \omega l,$$

de donde

$$\omega = \frac{\alpha \rho}{l}. \quad [26]$$

La fuerza tangencial que actúa sobre la unidad de superficie de la cara inferior del tubo en cuestión es $\Phi \omega = \Phi \frac{\alpha \rho}{l}$ y, por lo tanto, sobre toda el área $2 \pi \rho d \rho$ del corte la fuerza será

$$T = 2 \pi \Phi \frac{\alpha}{l} \rho^2 d \rho. \quad [27]$$

El momento de esta fuerza es

$$M = 2 \pi \Phi \frac{\alpha}{l} \rho^3 d \rho. \quad [28]$$

Si se trata, como se ha supuesto, de un cilindro macizo el momento total se obtiene sumando los momentos de todos los tubos elementales, es decir, integrando la expresión [28]; resulta

$$\mathcal{M} = 2 \pi \Phi \frac{\alpha}{l} \int_0^r \rho^3 d \rho = \frac{\pi}{2} \Phi r^4 \frac{\alpha}{l}. \quad [29]$$

El momento \mathcal{M} es el momento producido en *toda la sección* por las fuerzas interiores despertadas por la torsión y que equilibran en todo instante la cupla exterior. Es decir, si existe equilibrio \mathcal{M} , es igual al momento exterior aplicado.

Se tiene así un método estático para determinar el módulo de rigidez o torsión.

12. Flexión de barras. — A. BARRA A UN EXTREMO FIJO. — Ya consideramos antes el equilibrio de una barra con un extremo fijo cargada en el extremo libre con un peso P . Trátase aquí de mostrar cómo

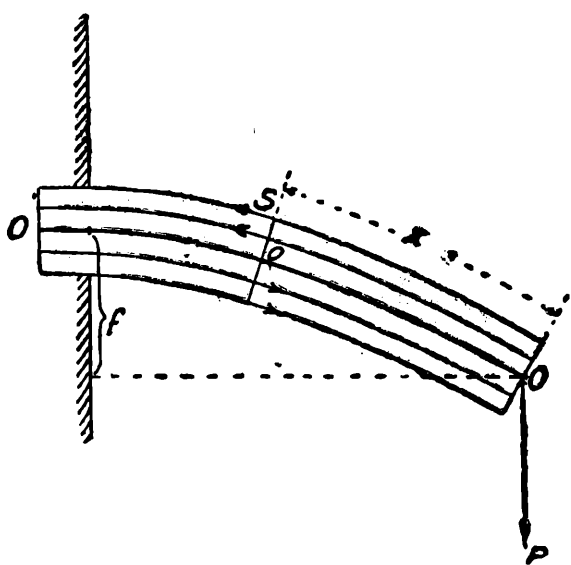


Fig. 273.

nacen, por obra de las deformaciones elásticas, las cuplas que compensan en las diversas secciones de la barra, el momento de la fuerza exterior y dar la expresión de la flecha f en función de sus dimensiones y de los módulos (aparece el de Young, solamente).

En la figura 273 está representada, con exageración, la deformación producida en una barra por la acción de una carga.

Si se la imagina descompuesta en capas delgadas, en la forma que enseña el dibujo, la flexión produce un alargamiento de las capas de arriba y una contracción de las inferiores.

La capa central, representada por la línea OO' , no experimenta cambio de longitud, designándosele por ese motivo con el nombre de capa neutra y a la línea OO' con el de línea neutra.

El equilibrio de una sección como la S requiere la acción de una fuerza igual y opuesta a P y de una cupla de momento igual y de sentido contrario que el de P con respecto a S . Este momento lo producen las fuerzas elásticas que se engendran en las capas superiores

por el alargamiento y en las inferiores por la contracción; las fuerzas en capas simétricas con respecto a la capa neutra son iguales y opuestas.

La teoría, que desarrollamos más abajo, enseña que en una barra de sección constante la flecha f que produce un peso P aplicado al extremo de una barra de longitud L es

$$f = \frac{P}{EI} \frac{L^3}{3}, \quad [30]$$

donde es E el módulo de Young e

$$I = \int z^2 dS \quad [31]$$

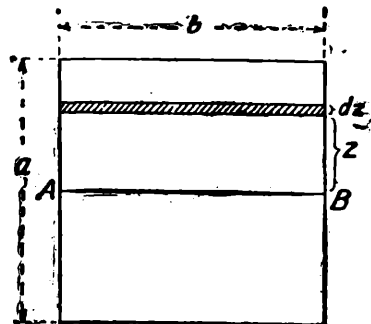


Fig. 274.

el momento de inercia de la sección con respecto a la traza de la capa neutra. Es decir que las z son las distancias de los elementos de área ds a esa línea. Por ejemplo, en la figura 274 está representada la sección de una *barra rectangular* de lados a y b , en la cual la línea AB es la traza de la capa neutra. Un elemento de superficie ds es el sombreado; su distancia a la línea AB es z . La [31] se expresa, en este caso, así:

$$I = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} z^2 dS = b \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} z^2 dz = \frac{1}{12} ba^3,$$

puesto que es

$$dS = b dz.$$

La flecha estará dada, pues, por la expresión

$$f = \frac{4P}{E} \frac{L^3}{a^3 b}. \quad [32]$$

La [30] hace notorio que la flecha será tanto menor cuanto mayor sea I . Conviene, pues, para la misma cantidad de material, que éste se distribuya de modo que el momento de inercia de la sección sea lo mayor posible. Esto explica la forma de los rieles, tirantes de acero, etc.

*DEDUCCIÓN DE LOS MOMENTOS Y DE LA FLECHA. — Sea I , I (fig. 275) la posición de una sección antes de la flexión, II , II su posición

una vez aplicada la carga. Un elemento filiforme de sección dS , paralelo a la línea neutra, tal como el sombreado, sufre un alargamiento $\Delta L = \lambda$, que da origen a una fuerza dF , cuyo valor es según la relación [2']

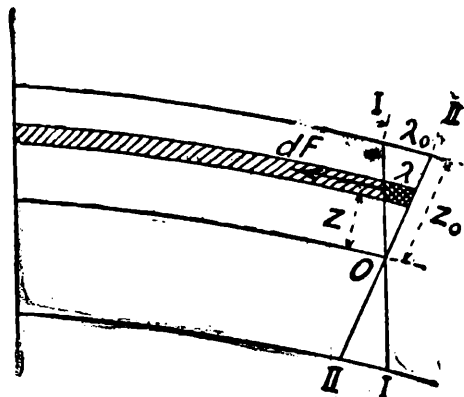


Fig. 275.

$$dF = E \frac{\lambda dS}{L}, \quad [33]$$

si se indica con L la longitud del elemento a partir de la sección fija.

La relación anterior puede escribirse de tal modo que se refiera a uno cualquiera de los elementos filiformes cuyos extremos están sobre el corte II, II , para lo cual basta escribir el alargamiento λ en función de la posición de los elementos con respecto a la línea neutra. Sea z la distancia del elemento a la línea neutra; z_0 la correspondiente a la línea superior, y λ_0 su alargamiento, se tiene:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{z}{z_0}. \quad [34]$$

y, por lo tanto,

$$dF = \frac{E \lambda_0}{L z_0} z dS. \quad [35]$$

El momento de esta fuerza con respecto a O es

$$d\mathcal{M} = \frac{\lambda_0}{z_0} \frac{E}{L} z^2 dS. \quad [36]$$

El momento total se obtiene integrando sobre toda la sección II, II . Es

$$\mathcal{M} = \frac{\lambda_0}{z_0} \frac{E}{L} \int z^2 dS. \quad [37]$$

Al integral $\int z^2 dS$ podemos llamarlo, por su forma, momento de inercia de la superficie S e indicarlo con I , esto es:

$$I = \int z^2 dS. \quad [38]$$

El momento \mathcal{M} equilibra al de la fuerza P con respecto a la sección S . Si la flexión es pequeña, el momento de P con respecto a la

sección, es Px , si x indica la distancia de la fuerza P a la sección considerada.

Se tiene entonces

$$\frac{\lambda_0}{z_0} \frac{E}{L} I = P \cdot x. \quad [39]$$

Es conveniente introducir la flecha f que determina la carga. La giración que produce la flexión de una sección I dada contribuye a la formación de la flecha f (fig. 276) con la magnitud

$$df = x \cdot d\theta = x \frac{\lambda_0}{z_0}, \quad [40]$$

pues es

$$\lambda_0 = z_0 d\theta. \quad [41]$$

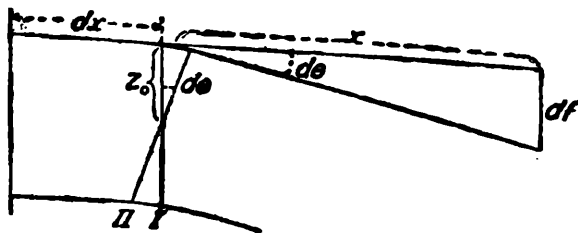


Fig. 276.

Como la flecha total se obtiene sumando las flechas elementales que resultan de la giración sucesiva de todas las secciones a partir de la sección fija, escribiremos la ecuación refiriéndola a una sección I que dista el intervalo $L = dx$ de aquella sección. Reemplazando en la

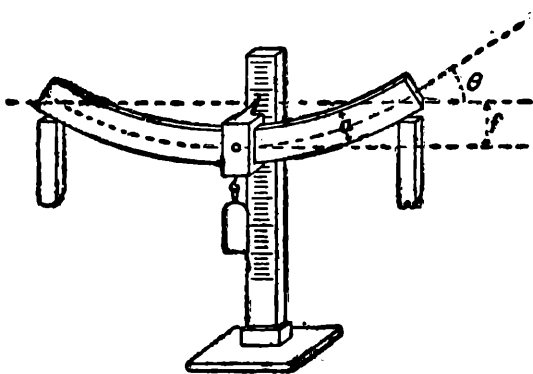


Fig. 277.

[40] el valor de $\frac{\lambda_0}{z_0}$ que resulta de la [39] se tiene:

$$df = \frac{P}{EI} x^2 dx, \quad [42]$$

e integrando entre O y L resulta, como afirmamos,

$$f = \frac{P}{EI} \frac{L^3}{3}. \quad [43]$$

C. BARRA DE CORTE RECTANGULAR APOYADA EN DOS PUNTOS. — Si la barra se *apoya* en dos puntos, una carga P , en su punto medio, la flexiona en la forma que indica la figura 277. Las reacciones de los puntos de apoyo serán iguales a $P/2$.

La flecha f será entonces la que corresponde a una barra de longitud $\frac{L}{2}$ con un extremo fijo, y con una carga en su extremo libre igual a $\frac{P}{2}$, de modo que se tiene:

$$f = \frac{1}{4} \frac{P}{E} \frac{L^3}{a^3 b}. \quad [44]$$

Como se ve, tanto en este caso como en el anterior, la flecha es inversamente proporcional al cubo de la altura. Si una barra ha de

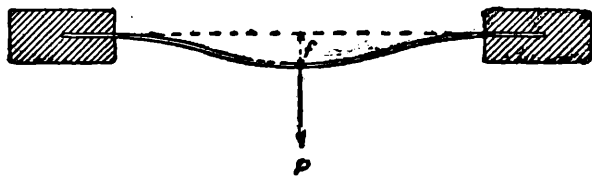


Fig. 278.

soportar una carga conviene ubicarla de tal manera que la dimensión transversal mayor constituya la altura.

Si, en cambio, la barra tuviese los dos extremos fijos (fig. 278)

la flecha estaría dada por la relación que damos sin deducir

$$f = \frac{1}{16} \frac{P}{E} \frac{L^3}{a^3 b} \quad [45]$$

13. Determinación experimental del módulo de Young por medio de la flexión. — Por la flexión de una barra rectangular apoyada en dos puntos, cargada en el punto medio de la distancia que separa a éstos, se puede determinar el módulo E , midiendo sus dimensiones y la flecha que produce una carga P .

Para esto puede hacerse uso de un esferómetro que forma parte de un circuito eléctrico, de modo que al establecerse el contacto entre la extremidad, que debe ser aguda, de su tornillo y la barra suene una campanilla eléctrica.

Mejor es medir en lugar de la flecha el ángulo θ (fig. 277) en que giran los extremos de

la barra. Por la introducción de θ , la [44] se convierte en:

$$\theta = \frac{3}{4} \frac{P}{E} \frac{L^2}{ba^3} \quad [46]$$

o

$$E = \frac{3}{4 \theta} \frac{PL^2}{ba^3} \quad [46']$$

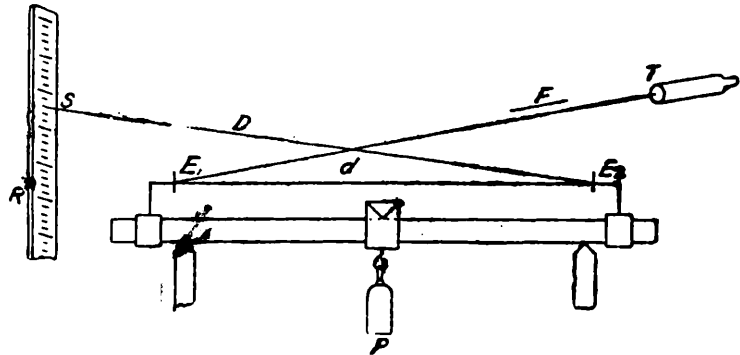


Fig. 279.

El ángulo θ se puede medir muy exactamente por el siguiente procedimiento debido a König (fig. 279).

La barra está provista de dos pequeños espejos E_1 y E_2 . Por medio de un telescopio T se observa a través de ellos, en la forma dibujada, el desplazamiento aparente de las divisiones de la regla R , con respecto al hilo horizontal del retículo del antejo, producido por la flexión de la barra.

A fin de determinar la relación que liga al desplazamiento n de la escala con el ángulo θ , supongamos que un rayo de luz cae en la dirección invariada F sobre el espejo E_1 . El rayo, reflejándose sobre E_2 , caerá sobre cierta división de la regla. Si los espejos giran en el ángulo θ por la acción de la carga P , el rayo reflejado por E_1 gira en 2θ y el reflejado por E_2 en 4θ . El desplazamiento n sobre la escala será, evidentemente,

$$n = 2\theta d + 4\theta D = (2d + 4D)\theta, \quad [47]$$

si d es la distancia entre los espejuelos y D la que separa al E_2 de la escala, relación con la que se calcula θ .

La ventaja de este método es que, con deformaciones muy pequeñas de la barra, se pueden producir desplazamientos n lo suficientemente grandes como para que sean medidos exactamente.

* PRUEBA. — El ángulo elemental $d\theta$ resulta de las relaciones [40] y [42], y es

$$d\theta = \frac{P}{EI} x dx \quad [48]$$

e integrando

$$\theta = \frac{P}{EI} \frac{x^2}{2}. \quad [49]$$

La giración del extremo de una barra apoyada en dos puntos es igual a la que se produce cuando su punto medio está fijo y su extremo bajo la acción de la carga $P/2$, de modo que es

$$\theta = \frac{1}{16} \frac{P}{E} \frac{L^2}{I},$$

y puesto que para una barra de corte rectangular es $I = \frac{ba^3}{12}$ se tiene

$$\theta = \frac{3}{4} \frac{P}{E} \frac{L^2}{ba^3}$$

o

$$E = \frac{3}{4\theta} \frac{PL^2}{ba^3}. \quad [50]$$

14. **Cóntantes elásticas de algunas substancias.** — Se dan a continuación los módulos de Young y de torsión, el coeficiente de Poisson y la carga de ruptura de diversos materiales que se usan con frecuencia en las construcciones.

Substancia	Módulo de Young $E \frac{\text{Kg. peso}}{\text{mm}^2}$	Módulo de torsión $\Phi \frac{\text{Kg}}{\text{mm}^2}$	Coficiente de Poisson	Carga de ruptura Kg/mm^2
Aluminio	6300-7200	2300-2700	0,33	20-30
Hierro forjado.	20000-22000	7000-8300	0,28	40-60
Acero.	20000-22000	8000-8300	0,28	80-160
Cobre	10000-13000	3900-4800	0,34	40
Cinc	8000-13000	4000	0,2-0,3	13
Latón	8000-10000	2700-3700	0,3-0,4	60

* 15. **Espirales elásticas.** — Una espiral elástica se forma, generalmente, arrollando sobre un cilindro circular, casi normalmente a sus generatrices, un hilo o varilla metálica de sección circular (fig. 280). Supongamos que una fuerza P actúa sobre la espiral en dirección a su eje; el equilibrio en un punto Q cualquiera existe si la porción superior de la espiral aplica sobre la inferior, en Q , una fuerza vertical igual y de sentido contrario que P y una cupla tangencial, sobre el corte normal al hilo, de momento PR , si R es el radio de la espiral.

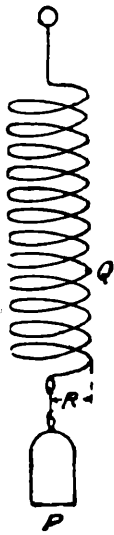


Fig. 280.

Esta cupla de torsión es constante y produce, por lo tanto, una torsión uniforme.

Si se indica con x el ángulo de giración de una sección que está a la distancia l del extremo fijo y con r el radio del hilo o varilla, se tiene (véase torsión):

$$P \cdot R = \frac{\pi}{2} \Phi r^4 \frac{x}{l} . \quad [49]$$

Las espiras, supuestas normales a las generatrices, formarán con ellas, por la deformación producida, un ángulo constante igual a $90^\circ - \omega$. Un cálculo, que no desarrollamos, muestra que si ω es lo suficientemente pequeño como para escribir $\cos \omega = 1$ y $\text{sen } \omega = \omega$ se tiene

$$x = l \frac{\omega}{R} \quad [50]$$

o, por la relación anterior,

$$\omega = \frac{2PR^2}{\pi \Phi r^4} . \quad [51]$$

El camino que recorre verticalmente un punto situado a la distancia l del punto fijo, o, lo que es lo mismo, el alargamiento de una espiral de longitud l , será, evidentemente,

$$\Delta l = l \omega \quad [52]$$

y por la [51]

$$\Delta l = \frac{2}{\pi} \frac{P}{\Phi} \frac{R^2 l}{r^4}. \quad [53]$$

Es decir, el alargamiento es proporcional a la carga P , a la longitud l y al cuadrado del radio de la espiral, e inversamente proporcional al módulo de rigidez o torsión Φ y a la cuarta potencia del radio del hilo o varilla.

Las balanzas comunes de resortes tienen, por la proporcionalidad entre el alargamiento y la carga, una escala con trazos equidistantes. Se determinan experimentalmente dos trazos extremos y luego se divide el intervalo en partes iguales.

16. Suspensiones. Cálculo del módulo de torsión. — A. DETERMINACIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA Y DE LA FUERZA DIRECTRIZ. — En las mediciones científicas y técnicas se usan, con muchísima frecuencia, instrumentos cuya parte esencial consiste en una suspensión de un hilo cuya cupla de torsión equilibra la acción de las fuerzas que se desea medir.

Los procedimientos de medida no son, por otra parte, siempre estáticos, sino con frecuencia dinámicos, como por ejemplo, en los métodos balísticos. Los métodos dinámicos permiten deducir con más exactitud que los estáticos las características mismas de la suspensión.

Si el hilo de la suspensión es cilíndrico, de radio r y longitud l , el momento que se despierta por la giración en el arco α es, de acuerdo con la [20],

$$\mathcal{M} = \frac{\pi}{2} \Phi \frac{r^4 \alpha}{l}. \quad [51]$$

Si la suspensión es abandonada luego a sí misma, cumple oscilaciones armónicas, dado que existe proporcionalidad entre el momento y el arco de giración.

El instrumento será tanto más sensible cuanto menor sea el momento necesario para hacer girar la suspensión en el arco unidad, esto es, cuanto menor sea la cupla directriz

$$D = \frac{\mathcal{M}}{\alpha} = \frac{\pi}{2} \Phi \frac{r^4}{l}. \quad [52]$$

La sensibilidad será tanto mayor cuanto menor sea el radio y mayor la longitud del hilo. Aumentando la longitud se gana relativamente muy poco, y el aparato resulta de dimensiones exageradas, por lo menos en altura, mientras que disminuyendo el radio, apenas un poco, se obtiene una disminución muy grande en el valor de la fuerza directriz. Conviene entonces utilizar un hilo corto y muy delgado.

El tiempo de una oscilación está dada por la relación.

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{I}{D}}, \quad [53]$$

donde I es el momento de inercia con respecto al eje de giración y D la fuerza, o mejor dicho, la cupla directriz.

Con frecuencia es menester el conocimiento de D ; su valor puede deducirse si se conoce el tiempo de oscilación — lo que se obtiene por medición directa — y el momento de inercia I , cuya determinación se hace de la siguiente manera.

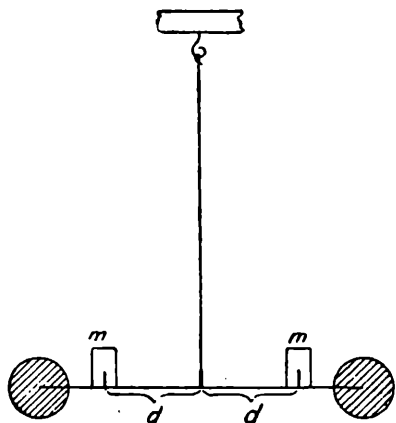


Fig. 281.

Supongamos el caso de la suspensión usada por Cavendish para determinar la constante universal de gravitación (fig. 281). Indiquemos con I_0 el momento de inercia y con T_0 el tiempo de oscilación, se tiene:

$$T_0 = 2 \pi \sqrt{\frac{I_0}{D}}. \quad [54]$$

Si a distancias iguales d del centro de giración se agregan dos pequeñas masas m , cilíndricas, por ejemplo, la fuerza directriz D no se modifica, mientras que el momento de inercia se aumenta en el momento de inercia I_1 que corresponde a la masa m . Si se trata de cilindros de radio r , es, por la ley de Steiner:

$$I_1 = m (2 d^2 + r^2), \quad [55]$$

cuyo valor puede determinarse exactamente, pues m se obtiene con la balanza, d puede medirse con un comparador, y r , cuyo valor

será, en general, sólo una fracción de d , por medio de un compás de espesores.

El tiempo de oscilación será, en esas condiciones:

$$T_1 = 2 \pi \sqrt{\frac{I_0 + I_1}{D}} \quad [56]$$

De las relaciones [54] y [56] resulta

$$I_0 = I_1 \frac{T_0^2}{T_1^2 - T_0^2} \quad [57]$$

y por la relación [54] se calcula el valor de la cupla directriz:

$$D = 4 \pi^2 \frac{I_0}{T_0^2} \quad [58]$$

B. DETERMINACIÓN DEL MÓDULO DE TORSIÓN O DE RIGIDEZ. — Este procedimiento para obtener el valor de la cupla directriz puede utilizarse para determinar el módulo de rigidez o torsión de un material cualquiera. Se hace un hilo o varilla del material dado y se construye una suspensión, cuyo momento de inercia y cuya cupla directriz se obtiene por el procedimiento anterior. Por la relación [52] se calcula el valor de Φ midiendo previamente el radio del hilo y su longitud.

C. DETERMINACIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA. — Las suspensiones se usan también para determinar momentos de inercia aun de cuerpos regulares, cuando sus valores se requieren con exactitud. En ese caso la suspensión recibe la forma que se ve en la figura 282. Las masas m y m , dibujadas de puntos, son las que se agregan para determinar el momento de inercia I_0 de la suspensión misma. Si se quiere determinar, por ejemplo, el momento de inercia de un paralelepípedo rectangular con respecto a un eje normal a dos de sus caras en su punto medio, aquellas masas se colocan en los pitones P y P de manera que la dirección vertical EE del hilo pase por los puntos antes mencionados. Si I_1 es el momento de inercia del pa-

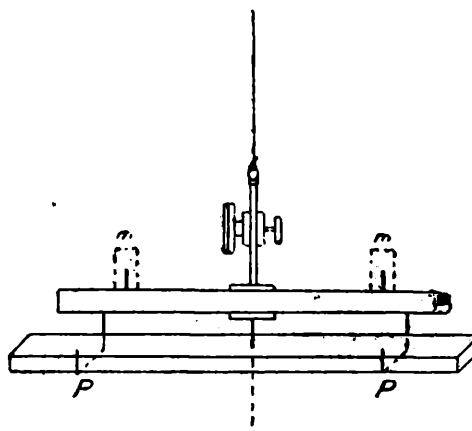


Fig. 282.

ralelepípedo y T_0 y T_1 los tiempos de oscilación de la suspensión sola y de la suspensión con el cuerpo, respectivamente, se tiene:

$$I_1 = I_0 \frac{T_1^2 - T_0^2}{T_0^2}. \quad [59]$$

17. Influencia del amortiguamiento. — En general existirá un amortiguamiento; las oscilaciones decrecerán logarítmicamente. Si γ es el decrecimiento, el tiempo de oscilación será, según se ha visto en el capítulo relativo a oscilaciones,

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{I}{D}} \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma^2}{2 \pi}\right)^2}, \quad [60]$$

de cuya ecuación es menester hacer uso, para las determinaciones anteriores, si $\frac{\gamma}{2 \pi}$ no es despreciable con respecto a la unidad. En general, γ es muy pequeño, de manera que no es menester el cálculo de la corrección.

CAPITULO XVII

ELEMENTOS DE LA TEORÍA DEL CHOQUE

1. **Generalidades.** — Si dos cuerpos que se hallan en diferente estado de movimiento se ponen en contacto, experimentan cambios de velocidad y se dice que se ha producido un *choque* entre ellos.

Esos cambios de velocidad provienen de las fuerzas que se aplican recíprocamente mientras están en contacto, las cuales, de acuerdo con el tercer principio de la mecánica, son iguales y opuestas.

Desde el momento en que los cuerpos se ponen en contacto, comienza a producirse en ellos una deformación, que aumenta, evidentemente, hasta el momento en que la velocidad relativa de los cuerpos es nula. En el instante de la máxima deformación, los cuerpos tienen la misma velocidad.

Si la deformación cae dentro de los límites de la *elasticidad perfecta*, el trabajo de la fuerza exterior a cada cuerpo, proveniente de la acción del otro, se almacena en forma de energía de deformación elástica, energía que se restituye en seguida a partir del momento en que la velocidad relativa es cero. En ese caso la energía mecánica del sistema se conserva.

Si la deformación cae fuera de los límites de la elasticidad perfecta ella no es reversible; gran parte del trabajo se convierte en calor en el interior del material; la energía mecánica no se conserva.

2. **Choque central y excéntrico.** — Si se desea estudiar el efecto del choque sobre uno de los cuerpos, conviene distinguir, previamente, los diferentes casos que pueden presentarse.

Se llama normal del choque, la normal a la superficie de contacto de los cuerpos. Si esa recta pasa por el centro de gravedad del cuerpo que se considera particularmente, se dice que el choque es *central*. Por su acción no se produciría ningún movimiento de rotación.

Si la normal no pasa por el centro de masa, se dice del choque que es *excéntrico*; su efecto consistirá en modificar tanto el movimiento de traslación como el estado de rotación del cuerpo.

Es menester, todavía, distinguir entre *choque normal* y *oblicuo*. El choque es normal, si el cuerpo que lo produce va animado de un movimiento de traslación cuya dirección coincide con la normal a la superficie de contacto. Si esto no se realiza, se dice que el choque es oblicuo.

El choque entre dos esferas será, en todos los casos, central, pudiendo ser normal u oblicuo.

3. Choque central y normal. — Este caso es el más sencillo de todos, por cuanto no aparecen en él rotaciones.

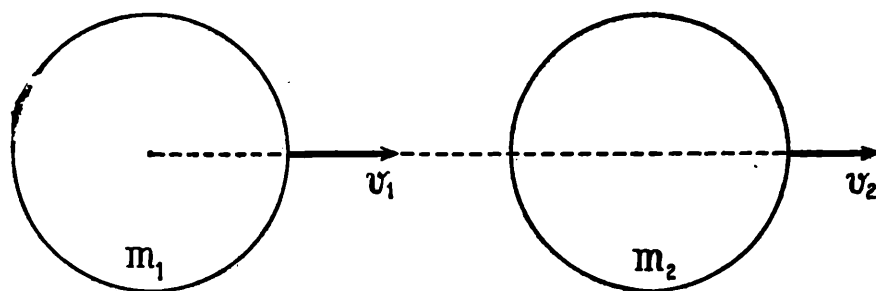


Fig. 283.

Supongamos que los cuerpos sean dos esferas — lo cual no es indispensable — de masas m_1 y m_2 que se mueven por inercia sobre una línea recta, en el mismo sentido, con las velocidades v_1 y v_2 respectivamente. Como es nuestro objeto estudiar el efecto del choque, prescindimos de la existencia de otras fuerzas; por eso supusimos que los cuerpos se movían por inercia.

Si se mueven (fig. 283) en el sentido indicado por las flechas, el contacto puede producirse únicamente si $v_1 > v_2$. El sistema formado por las dos masas m_1 y m_2 no está sometido a ninguna fuerza exterior; en el momento del choque actúan entre las masas fuerzas interiores, las cuales, según se ha visto anteriormente, sólo pueden determinar en las masas variaciones tales de las cantidades de movimiento que la suma de todas ellas sea cero, es decir, las fuerzas interiores no pueden modificar jamás el valor de la cantidad de movimiento del sistema (véase el n.º 2 del cap. X).

Si se indican con v_1' y v_2' las velocidades después del choque, debe ser, por lo tanto:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'. \quad [1]$$

Es evidente que esta ecuación vale en cualquier caso, haya o no producido el choque una deformación permanente. Las cantidades de movimiento se han sumado, por cuanto las velocidades v_1 y v_2 tienen el mismo signo.

Si la deformación cae dentro de los límites de la elasticidad perfecta, la energía mecánica, en este caso la energía cinética, se conserva, y, por lo tanto, se tiene una segunda ecuación que es:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2. \quad [2]$$

Las magnitudes dadas son m_1 , m_2 , v_1 y v_2 y las incógnitas v_1' y v_2' ; se tienen entonces dos incógnitas y dos ecuaciones para determinarlas.

Resolviendo las ecuaciones [1] y [2] con respecto a v_1' y v_2' se obtienen las expresiones:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad [I]$$

y

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad [II]$$

Hagamos algunas aplicaciones de las ecuaciones anteriores.

A. CUERPOS DE LA MISMA MASA ANIMADOS DE VELOCIDADES IGUALES EN SENTIDO CONTRARIO.

Sea:

$$m_1 = m_2 = m \quad [3]$$

$$v_1 = v$$

$$v_2 = -v. \quad [4]$$

De las ecuaciones [I] y [II] resulta, enseguida:

$$v_1' = -v \quad \text{y} \quad v_2' = v$$

Este resultado se obtiene directamente de las ecuaciones [1] y [2]. Por la primera es:

$$v_1' + v_2' = v - v = 0, \quad [5]$$

y, por lo tanto,

$$v_1' = -v_2'. \quad [6]$$

Por la ecuación [2] y las [3], [4] y [6] se tiene

$$v^2 = v_1'^2 \quad [7]$$

de donde resulta

$$v_1' = -v$$

y por la [6]

$$v_2' = +v. \quad [8]$$

Las esferas tienen después del choque la misma velocidad absoluta, pero el sentido del movimiento es el opuesto. Se puede decir que los cuerpos intercambian sus velocidades.

B. CUERPOS DE MASAS IGUALES, DE LAS CUALES UNO ESTÁ EN REPOSO. — Este caso queda resuelto por el anterior, pues si uno de los cuerpos estaba en reposo, mediante el choque adquiere la velocidad del otro, que pasará, a su vez, al estado de reposo. Esta experiencia ha sido mencionada en el capítulo VI.

4. Casos de cuerpos plásticos. — En los llamados cuerpos plásticos el límite de elasticidad corresponde a fuerzas tan pequeñas que, en cualquier choque, ese límite es sobrepasado, produciéndose deformaciones que perduran.

La ecuación [1], que establece la conservación de la cantidad de movimiento, vale, como ya se ha dicho, en cualquier caso, y por lo tanto en éste.

Si los cuerpos son, como supondremos, perfectamente plásticos, la deformación alcanzada en el momento que la velocidad relativa es nula no desaparece, y, por consiguiente, no existirá, a partir de ese instante, ninguna fuerza entre las masas, las que continuarán moviéndose con la misma velocidad v' . Se tiene entonces:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'. \quad [9]$$

La ecuación [2] no vale ahora, pues el trabajo gastado por la fuerza que actúa sobre cada cuerpo se convierte en calor; una cantidad equivalente de energía cinética desaparece del sistema. Esta pérdida de energía cinética puede calcularse sin dificultad, utilizando la ecuación [9].

Antes del choque la energía cinética es:

$$L = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2. \quad [10]$$

Después del choque tiene el valor:

$$L' = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2 = \frac{1}{2} \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1 + m_2}. \quad [11]$$

La energía cinética convertida en calor es, pues,

$$L - L' = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2. \quad [12]$$

5. Choque elástico oblicuo. — Consideremos el choque entre dos esferas de masas m_1 y m_2 animadas de las velocidades v_1 y v_2 (fig. 284) que forman con la dirección $O_1 O_2$ del choque los ángulos θ_1 y θ_2 .

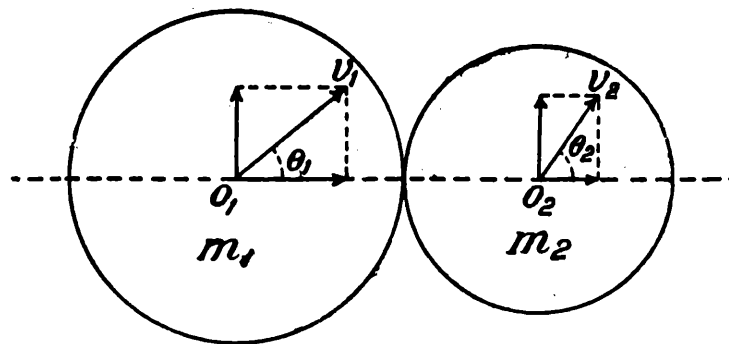


Fig. 284.

El problema se resuelve descomponiendo las velocidades en componentes de dirección $O_1 O_2$ y de dirección normal a $O_1 O_2$.

Las componentes normales a $O_1 O_2$ son:

$$v_1 \operatorname{sen} \theta_1 \quad , \quad v_2 \operatorname{sen} \theta_2,$$

las cuales no sufren ningún cambio por el choque.

Las componentes según $O_1 O_2$ son:

$$v_1 \operatorname{cos} \theta_1 \quad \text{y} \quad v_2 \operatorname{cos} \theta_2,$$

velocidades que determinan el choque y que, por lo tanto, son modificadas por él. El cambio se calcula por las ecuaciones antes establecidas.

La velocidad de cada esfera, después del choque, se obtiene superponiendo a la velocidad de cada una de ellas según $O_1 O_2$ después del choque, las velocidades $v_1 \text{ sen } \theta_1$, $v_2 \text{ sen } \theta_2$, respectivamente.

Supongamos, por ejemplo, el caso de dos bolas de billar de masas iguales a m . Si una de ellas, la m_2 , está en reposo, se tiene:

$$v_2 \text{ sen } \theta_2 = v_2 \text{ cos } \theta_2 = 0.$$

La componente $v_1 \text{ cos } \theta_1$ de la esfera en movimiento, pasa por el choque a la esfera en reposo, ésta se moverá en dirección $O_1 O_2$ y la otra en dirección normal a $O_1 O_2$, pues sólo le resta la componente de velocidad $v_1 \text{ sen } \theta_1$.

6. Las fuerzas del choque. — Hablamos de fuerzas del choque en el estricto sentido dinámico que se explica a continuación.

En un sistema de masas las fuerzas provenientes de las demás que actúan sobre una cualquiera de ellas son, con respecto a éstas, fuerzas exteriores. Todo cambio en el movimiento de esa masa es debido a la acción de esas fuerzas.

En el caso del choque de dos masas, las fuerzas que cada una de ellas aplica a la otra son iguales entre sí.

Si se indica con m la masa de una de ellas y con v su velocidad, el valor de la fuerza aplicada, proveniente de la acción de la otra, está dada por la ecuación de Newton:

$$F = \frac{d}{dt} (mv). \quad [14]$$

Esta ecuación da, como se sabe, el valor de la fuerza en todo instante. En el choque de cuerpos elásticos, la fuerza tiene un valor máximo en el momento inicial del choque, disminuye en seguida hasta anularse cuando la velocidad relativa es cero, luego crece, con signo cambiado, hasta alcanzar un valor máximo en el instante en que los cuerpos han recuperado su forma primitiva.

No siempre es posible determinar, cuantitativamente, la fuerza correspondiente a un instante cualquiera comprendido dentro del intervalo del choque, pero sí el impulso total.

La ecuación anterior puede escribirse:

$$F dt = d \cdot mv. \quad [15]$$

Si se suman todos los productos $F dt$ y los elementos dmv comprendidos dentro del tiempo de la duración del choque que indicamos con t , se tiene:

$$\int_0^t F dt = mv_i - mv_f, \quad [16]$$

si se indica con v_i la velocidad en el momento inicial del choque y con v_f la velocidad en el momento final.

El integral de la izquierda representa la suma de los impulsos elementales; es, por lo tanto, el impulso total de la cantidad de movimiento. Estos resultados ya habían sido deducidos anteriormente.

Por las ecuaciones [I] y [II] se conoce la velocidad final de cualquiera de las masas y se puede calcular la variación de la cantidad de movimiento.

Como en todo instante las fuerzas entre las masas son iguales y opuestas y el choque dura lo mismo para las dos masas, resulta que los impulsos, y, por lo tanto, la variación de la cantidad de movimiento, son iguales para ambos cuerpos.

El impulso total dado por el integral que figura en la [16] puede escribirse de otro modo, introduciendo un valor medio de los valores absolutos de la fuerza, que podemos indicar con \bar{F} , es decir, ponemos:

$$\int_0^t F dt = \bar{F} t \quad [17]$$

y, por lo tanto,

$$\bar{F} t = mv_i - mv_f. \quad [18]$$

Por las ecuaciones [I] y [II] el cambio de la cantidad de movimiento depende exclusivamente de las velocidades y de las masas.

Por la [18] el valor de la fuerza es tanto mayor cuanto menor es la duración t del choque; si los cuerpos fuesen rígidos, el tiempo de duración del choque sería infinitamente pequeño y la fuerza infinitamente grande. No pudiendo los cuerpos sufrir deformaciones se romperían.

Se comprende así también el efecto de los resortes en los wagones de ferrocarril, adelante y también debajo. Su efecto es aumentar, en caso de choque o sacudimiento, el valor de t , disminuyendo, por lo tanto, el de la fuerza.

7. **Tiempo de duración del choque.** — Consideremos un caso muy sencillo, que ilustrará, sin embargo, lo suficiente sobre la cuestión,

Supongamos que dos coches de ferrocarril de igual masa m se mueven sobre la misma vía recta, en sentidos opuestos, con igual velocidad v ; los resortes de los paragolpes sean, además, idénticos, e indiquemos, como siempre, con la letra k la constante de proporcionalidad entre la fuerza y el cambio de longitud de aquéllos.

Producido el choque, los resortes comienzan a deformarse hasta un máximo que corresponde al instante en que toda la energía cinética de los vagones se ha almacenado en ellos, si suponemos que no existe disipación de energía por producción de calor, esto es, si se admite la perfecta elasticidad de las espirales.

Está claro que en los dos pares de resortes existe en ese momento, una provisión de energía igual a la energía cinética de cada uno de los vagones.

Por consiguiente, si la deformación de uno cualquiera de los cuatro resortes es A , se tiene, según el párrafo 8 del capítulo VIII,

$$\frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{4} m v^2 \quad [19]$$

de donde:

$$A = \frac{v}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad [20]$$

relación que muestra que la deformación de los resortes alcanza, en el momento del choque, un valor proporcional a la velocidad.

Después, los resortes comienzan a alargarse hasta adquirir la longitud primitiva; la energía aparece, otra vez, en forma de energía cinética de los vagones, que se mueven en sentido contrario.

El tiempo transcurrido entre el momento inicial del choque y el instante en que los resortes tienen nuevamente la longitud primitiva, es el tiempo de duración del choque.

Ese tiempo se calcula, en este caso, en seguida, pues por simetría el punto de contacto de los paragolpes queda fijo en el espacio; uno cualquiera de esos dos resortes se encuentra exactamente en las mismas condiciones en que se encontraría si uno de sus extremos fuese fijo y pendiese del otro una masa m ; cualquiera que fuese, en esas condiciones, la velocidad con que pasase por su posición de reposo, en virtud de una elongación dada, el tiempo transcurrido entre ese instante y aquel en que alcanzará la máxima deformación sería, como se

sabe, constante, e igual a la mitad del tiempo de una oscilación simple. El tiempo de duración del choque será, entonces, evidentemente, el tiempo de oscilación simple, esto es:

$$T = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad [21]$$

donde se ve que el tiempo de duración del choque no depende de la velocidad del convoy. Este resultado es completamente general. Si se tratara de vagones de masas m_1 y m_2 que se mueven en sentido contrario con velocidades cualesquiera, y si a sus resortes corresponden las constantes k_1 y k_2 , la teoría muestra que el tiempo de duración del choque es:

$$T = \pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}}. \quad [22]$$

El valor medio \bar{F} de la fuerza durante el choque se calcula fácilmente, en el primer caso tratado. Puesto que después del choque los vagones se mueven en sentido contrario con la misma velocidad v es, por la [18]:

$$\bar{F} \cdot t = \bar{F}T = 2mv, \quad [22]$$

de donde:

$$\bar{F} = \frac{2mv}{T} = \frac{2}{\pi} \sqrt{km} \cdot v, \quad [23]$$

relación que muestra que el valor medio de la fuerza es proporcional a la velocidad.

8. Centro de percusión. — Consideremos, figura 285, una barra rectangular homogénea que puede girar alrededor de un eje OO' , y supongamos que actúa durante un corto intervalo de tiempo, normalmente a una de las caras paralelas al eje de rotación, una fuerza F . Sea G el centro de masa de la barra, d la distancia entre el punto P del choque y el centro de gravedad y z la distancia entre P y OO' .

La fuerza F determinaría sobre el cuerpo, si éste fuese completamente libre, un movimiento de traslación y un movimiento de rotación alrededor de G .

La velocidad de la traslación es, por la relación $F = \frac{d}{dt} (mv)$:

$$v = \frac{\int F dt}{m}. \quad [24]$$

La velocidad de la rotación es, por la ecuación $\mathcal{M} = I \frac{d\omega}{dt}$:

$$\omega = \frac{\int \mathcal{M} dt}{I}, \quad [25]$$

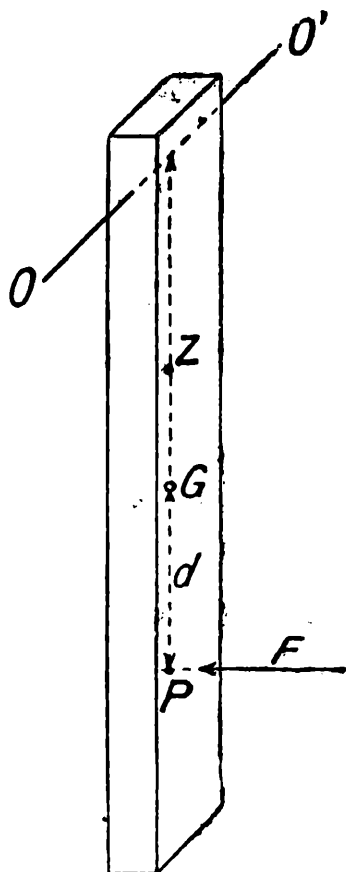


Fig. 285.

y puesto que el momento \mathcal{M} que produce la rotación está ligado a la fuerza F por la expresión:

$$\mathcal{M} = F \cdot d \quad [26]$$

la [25] puede escribirse:

$$\omega = \frac{d}{I} \int F dt. \quad [25']$$

Los puntos situados sobre OO' se moverían hacia la derecha en el movimiento de rotación y hacia la izquierda en el de traslación. Si el valor absoluto de ambas velocidades fuese el mismo, los puntos situados sobre OO' no se moverían; si el cuerpo no fuese libre y existiese el eje, éste no sufriría ninguna acción a causa del choque en P .

Las dos velocidades son iguales en valor absoluto si:

$$v = \omega (z - d), \quad [27]$$

que se transforma por las [24] y [25'] en:

$$\frac{1}{m} = \frac{d}{I} (z - d), \quad [28]$$

de donde:

$$z = \frac{I + md^2}{md}, \quad [29]$$

relación que da la posición que debe tener el punto P de choque para que el eje no sufra ninguna acción. El punto P que goza de esa propiedad se llama *centro de percusión* con respecto al eje OO' .

La distancia z dada por la [29] es precisamente la longitud del péndulo simple sincrónico del compuesto que constituye la barra; el centro de oscilación y de percusión son, entonces, el mismo punto.

FIN DEL PRIMER TOMO

**Este libro se terminó de imprimir el 23 de Marzo de 1936,
en el Est. Gráfico "Tomás Palumbo" - La Madrid 325 - Buenos Aires**