

Libros de **Cátedra**

Notas de Geometría Diferencial

Curvas, superficies y variedades

Matías I. Caruso, Cora I. Tori y Marcela Zuccalli

FACULTAD DE
CIENCIAS EXACTAS

e
exactas


EDITORIAL DE LA UNLP



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE LA PLATA

Notas de Geometría Diferencial

Curvas, superficies y variedades

Matías I. Caruso
Cora I. Tori
Marcela Zuccalli

Facultad de Ciencias Exactas



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE LA PLATA



Índice

1	Curvas	7
1.1	Curvas parametrizadas	7
1.2	Curvatura	12
1.3	El triedro de Frenet–Serret	15
2	Superficies	23
2.1	Superficies regulares	23
2.2	Espacios tangentes	31
2.3	Funciones suaves sobre superficies	34
2.4	Diferencial de funciones suaves	36
2.5	Superficies orientables	40
3	Cuestiones métricas	47
3.1	Primera forma fundamental	48
3.2	Isometrías	55
3.3	Aplicaciones equiáreas y conformes	61
4	La curvatura de una superficie	67
4.1	Curvaturas normales	67
4.2	La aplicación de Gauss	69
4.3	La curvatura de Gauss	71
4.4	Segunda forma fundamental	73
4.5	Secciones normales y curvatura geodésica	75
4.6	Líneas de curvatura y curvas asintóticas	77
4.7	Clasificación de puntos	78
4.7.1	La indicatriz de Dupin	83
4.8	La aplicación de Gauss en coordenadas locales	84
4.8.1	Coeficientes de la segunda forma fundamental	84
4.8.2	Curvatura de Gauss y curvatura media	86
4.9	El Teorema Egregium de Gauss	89
4.9.1	Símbolos de Christoffel	89
4.9.2	Fórmula de Gauss	91
4.9.3	Ecuaciones de compatibilidad y Teorema de Bonnet	93
5	Geodésicas y transporte paralelo	97
5.1	Geodésicas: definición y ejemplos	97
5.2	Derivada covariante y campos paralelos	99
5.3	Geodésicas: existencia y unicidad	101
5.4	Transporte paralelo	102
5.5	Valor algebraico de la derivada covariante	103
5.6	El Teorema de Gauss–Bonnet	106

6	Variedades suaves	117
6.1	Algo de topología	117
6.2	Variedades suaves	120
6.3	Funciones suaves	123
6.4	Espacios tangentes	125
6.5	Diferencial de funciones suaves	131
6.6	Fibrados tangente y cotangente	133
7	Formas diferenciales	137
7.1	Tensores	137
7.2	Formas diferenciales	143
7.3	Derivación exterior de formas	145
8	Integración en variedades	151
8.1	Variedades con borde	151
8.2	Integración de formas diferenciales	154
8.3	El Teorema de Stokes	156

Introducción

Este libro de cátedra está diseñado siguiendo los contenidos que corresponden a la asignatura Geometría Diferencial que se dicta para los alumnos de la carrera de Licenciatura en Matemática en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata.

Esta materia forma parte de los cursos de carácter obligatorio de la carrera del plan de estudios vigente y se desarrolla en el segundo cuatrimestre del tercer año. Tiene como asignatura correlativa “Complementos de Análisis” que se dicta en el segundo cuatrimestre del segundo año de la carrera, donde se tratan, entre otras cosas, los conceptos básicos de la topología de los espacios euclídeos, el cálculo diferencial en varias variables y algunos resultados de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias. Cabe mencionar que alumnos de otras carreras, como la Licenciatura en Física, algunas especialidades de Ingeniería y la Licenciatura en Astronomía, suelen realizar el curso como materia optativa de su plan de estudios.

Es muy importante destacar que este libro tiene como objetivo presentar algunos de los múltiples aspectos de la teoría de curvas, superficies y variedades de modo tal que puedan ser abordados en un curso de un semestre de duración.

Estos objetos geométricos resultan sumamente interesantes y son utilizados en diversas áreas de la matemática. Pero, por otro lado, su estudio tiene una riqueza incalculable ya que desde los más remotos tiempos hasta la actualidad aparecen como un marco natural para modelar problemas de distintas ciencias. De esta manera, la geometría diferencial de las curvas, superficies y variedades resulta ser una herramienta que ayuda a comprender la naturaleza y a impulsar muchos desarrollos científicos y tecnológicos.

En el contenido de estas notas se distinguen dos partes. La primera, conformada por los primeros cinco capítulos, se dedica al estudio de la teoría local de curvas y de las superficies regulares, llegando a presentar algunos resultados profundos de la geometría diferencial de curvas y superficies, como son el Teorema Egregium de Gauss y el Teorema de Gauss–Bonnet, entre otros. En la segunda parte, constituida por los capítulos restantes, se introducen las nociones de variedades suaves, formas diferenciales e integración, concluyendo finalmente con el celebrado Teorema de Stokes.

Capítulo 1

Curvas

En este capítulo seguiremos las exposiciones de [Car16], [CGP05] y [Tap16] para estudiar los aspectos fundamentales de la teoría local de curvas parametrizadas en espacios euclídeos. Si bien se podría considerar solamente el caso en que las curvas están contenidas en \mathbb{R}^3 , optamos por discutir muchas de las ideas en \mathbb{R}^n , ya que luego vamos a trabajar con variedades suaves de dimensión posiblemente mayor.

Al final del capítulo, sin embargo, restringiremos nuestra atención a curvas contenidas en \mathbb{R}^3 , que resulta ser un caso particularmente especial.

1.1 Curvas parametrizadas

Dado que muchos de los objetos con los que trabajaremos son subconjuntos no necesariamente abiertos del espacio ambiente que los contiene, resulta útil la siguiente definición.

Definición 1.1.1. Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ un subconjunto no necesariamente abierto. Decimos que $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una **función suave** si para todo $p \in X$, existen un entorno abierto U de p en \mathbb{R}^m y una función $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ suave que coincide con f en $X \cap U$, es decir, $\tilde{f}|_{X \cap U} = f|_{X \cap U}$.

Definición 1.1.2. Una **curva parametrizada** en \mathbb{R}^n es una función suave $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo (no necesariamente abierto). Llamamos **traza** de γ al conjunto $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$.

Notar que una función $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es suave si existen $\varepsilon > 0$ y una función suave $\tilde{\gamma} : (a - \varepsilon, b + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ que coincide con γ en $[a, b]$.

Ejemplo 1.1.3. El espacio de configuraciones de una única partícula moviéndose en el espacio tridimensional euclidiano es simplemente \mathbb{R}^3 . Luego, para un sistema de N partículas será \mathbb{R}^{3N} . Así, la curva que describe el movimiento del sistema es una curva en \mathbb{R}^{3N} .

Ejemplo 1.1.4. Consideremos $\gamma_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\gamma_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por

$$\gamma_1(t) := (\cos(t), \sin(t)) \quad \text{y} \quad \gamma_2(t) := (\cos(2t), \sin(2t)).$$

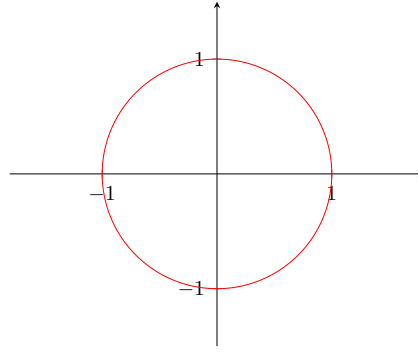


Figura 1.1: Taza de γ_1 y γ_2 .

Notar que son curvas parametrizadas diferentes, aun cuando ambas curvas tienen la misma traza: describen una circunferencia de radio 1 centrada en el origen. Si pensamos que representan el movimiento de una partícula en el plano, ambas recorrerían el mismo camino, pero a velocidades diferentes.

Tal como vimos recién, una misma traza puede estar representada por distintas curvas parametrizadas. Decimos que dos curvas parametrizadas con igual traza $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ son **equivalentes** si existe un difeomorfismo $J : I_2 \rightarrow I_1$ tal que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ J$. En tal caso, se dice que J es un **cambio de parámetros**.

Definición 1.1.5. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada. Definimos su **vector tangente** en $t \in I$ como el vector de \mathbb{R}^n dado por

$$\gamma'(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}.$$

Decimos que γ es **regular** si $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Ejemplo 1.1.6. Consideremos nuevamente la curva $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) := (\cos t, \sin t)$. Si pensamos que es la trayectoria que describe una partícula en el plano, el vector tangente de γ en un punto $t \in (0, 2\pi)$ representa su vector velocidad y está dado por $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$.

Por ejemplo, si $\gamma(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, tendríamos

$$\gamma'(\frac{\pi}{4}) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

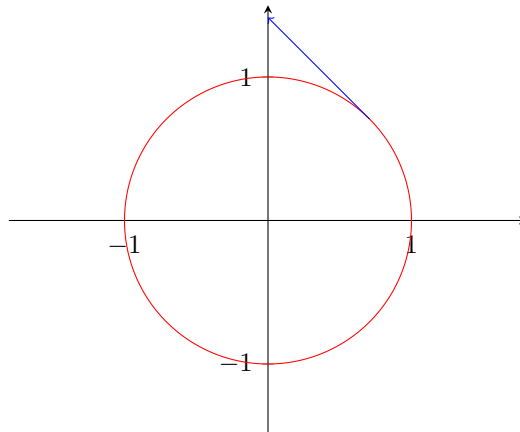


Figura 1.2: Vector velocidad (en azul) de γ en el punto $t_0 = \pi/4$.

Definición 1.1.7. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular¹. Dado $t_0 \in I$, llamamos *recta tangente* a γ en $\gamma(t_0)$ a la recta que pasa por $\gamma(t_0)$ con dirección $\gamma'(t_0)$. Geométricamente, es el conjunto

$$\gamma(t_0) + \text{span}\{\gamma'(t_0)\},$$

donde, para cada t fijo, $\text{span}\{\gamma'(t)\} := \{u\gamma'(t) : u \in \mathbb{R}\}$.

Llamamos *espacio tangente* a γ en $\gamma(t_0)$ al espacio vectorial $\text{span}\{\gamma'(t_0)\}$.

Como es usual, la recta tangente a γ en $\gamma(t_0)$ resulta ser la mejor aproximación lineal a la curva en el punto.

Un resultado relativamente intuitivo que uno tiene en mente cuando habla de rectas tangentes es que la recta tangente en un punto es el límite de las rectas secantes. Para ello, deberíamos ponernos de acuerdo primero en a qué nos referimos con la palabra “límite” en este caso. Para entender esto, fijemos $t_0 \in I$ y consideremos la siguiente parametrización de la recta secante que pasa por $\gamma(t_0)$ y $\gamma(t)$:

$$r(u) = \gamma(t_0) + u(\gamma(t) - \gamma(t_0)).$$

Si uno quisiera considerar $\gamma(t)$ muy cercano a $\gamma(t_0)$, es decir, si uno tomara límite $\gamma(t) \rightarrow \gamma(t_0)$, se encontraría con que, obviamente, $\gamma(t) - \gamma(t_0) \rightarrow 0$. Pero en ese caso, en el límite, el vector director de nuestra recta se anula y no tendría sentido pensar que el resultado del límite sea una recta.

Para evitar ese tipo de problemas, consideremos siempre el vector director unitario para esta recta, de modo que quede parametrizada como

$$r(u) = \gamma(t_0) + u \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}. \quad (1.1)$$

Ahora sí podemos enunciar el siguiente resultado.

Proposición 1.1.8. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular tal que γ es un homeomorfismo con su imagen. Entonces, la posición límite de las rectas secantes que pasan por $\gamma(t_0)$ y $\gamma(t)$ es la recta tangente en $\gamma(t_0)$.

Demostración. Aplicando el teorema de Taylor en cada función coordenada, vemos que existe una función suave $h : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\gamma(t) - \gamma(t_0) = (t - t_0)\gamma'(t_0) + h(t)$$

y $h(t)(t - t_0)^{-1} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow t_0$. Sea r_t la recta que pasa por $\gamma(t)$ y $\gamma(t_0)$ definida como en (1.1). Supongamos que $t > t_0$. Entonces,

$$\begin{aligned} r_t(u) &= \gamma(t_0) + u \left(\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \frac{t - t_0}{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|} \right) \\ &= \gamma(t_0) + u \left(\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \frac{\|t - t_0\|}{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|} \right). \end{aligned}$$

¹Notar que al decir que es regular estamos asumiendo que es una curva parametrizada. De aquí en adelante, usaremos la misma terminología.

Como γ es un homeomorfismo con su imagen, cuando $\gamma(t) \rightarrow \gamma(t_0)$, se tiene que $t \rightarrow t_0$. Entonces, por un lado

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = \gamma'(t_0).$$

Por otro lado, como $\|\cdot\|$ es continua, usando propiedades de los límites,

$$\frac{\|t - t_0\|}{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|} \rightarrow \|\gamma'(t_0)\|^{-1}.$$

Así,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r_t(u) = \gamma(t_0) + u \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}.$$

Es decir, el límite de las rectas secantes $r_t(u)$ es la recta tangente en $\gamma(t_0)$. ♣

La hipótesis de que γ sea un homeomorfismo con su imagen no puede omitirse, tal como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.9. Consideremos la *lemniscata*² parametrizada por $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) := \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4} \right).$$

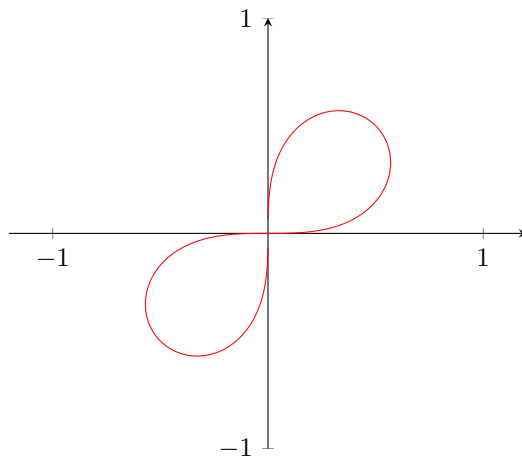


Figura 1.3: Taza de la lemniscata.

Notar que el límite de las rectas que unen los puntos $\gamma(0)$ y $\gamma(n)$, $n \in \mathbb{N}$, es el eje y . Sin embargo, la recta tangente en $\gamma(0)$ es el eje x . El problema es que γ no es un homeomorfismo con su imagen: $\gamma(n) \rightarrow \gamma(0)$ pero $n \not\rightarrow 0$.

Como observamos en el ejemplo anterior, la traza de una curva regular puede cortarse a sí misma. Sin embargo, toda curva regular es localmente inyectiva.

Ejercicio 1.1.10. Mostrar que toda curva regular es localmente inyectiva.

²Del latín *lemniscatus* “decorado con moños”. Esta curva fue descrita en 1694 por el matemático suizo J. Bernoulli (1655–1705).

Definición 1.1.11. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada. Definimos la *longitud de arco* de γ entre $t_1 \in I$ y $t_2 \in I$ como

$$L_\gamma(t_1, t_2) := \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(u)\| \, du.$$

Fijando $t_0 \in I$, podemos definir la *función longitud de arco* como

$$S(t) := \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| \, du,$$

que mide la longitud de la curva desde $\gamma(t_0)$ hasta $\gamma(t)$.

Notemos que si $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva regular, entonces $S(t)$ es (localmente) invertible, ya que, por el Teorema Fundamental del Cálculo, $S'(t) = \|\gamma'(t)\| \neq 0$. Así, $S : I \rightarrow S(I)$ es un difeomorfismo e induce un cambio de parámetros.

Luego, si consideramos a t como función del parámetro $s = S(t)$, esta reparametrización satisface

$$\frac{d}{ds} \gamma(S^{-1}(s)) = \gamma'(t) \frac{d}{ds} S^{-1}(s) = \frac{\gamma'(t)}{S'(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

Notar que eso dice que el vector tangente de la curva reparametrizada tiene norma 1. Siempre que esto suceda, lo llamaremos de la siguiente manera.

Definición 1.1.12. Decimos que una curva regular γ está *parametrizada por longitud de arco* si $\|\gamma'(s)\| = 1$ para todo $s \in I$. En tal caso, decimos que s es su *parámetro longitud de arco*.

Usaremos siempre el parámetro s cuando se trate de una curva parametrizada por longitud de arco y denotaremos $\dot{\gamma}(s)$ a su derivada.

Observación 1.1.13. Notar que la discusión previa a la definición anterior nos permite concluir que toda curva regular puede (localmente) reparametrizarse por longitud de arco.

Ejemplo 1.1.14. Dado $r > 0$, consideremos una circunferencia de radio r parametrizada por $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$.

Su función longitud de arco está dada por

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t \|\gamma'(u)\| \, du = \int_0^t \|(-r \sin u, r \cos u)\| \, du \\ &= \int_0^t r \, du = rt. \end{aligned}$$

Luego, pensando a t como función del parámetro $s = S(t)$, tenemos que $t = S^{-1}(s) = s/r$ y al reparametrizar por longitud de arco obtenemos

$$\gamma(s) = (r \cos(s/r), r \sin(s/r)).$$

Ejemplo 1.1.15. Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la hélice definida como

$$\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Notar que su traza está contenida en el cilindro de ecuación cartesiana $x^2 + y^2 = a^2$.

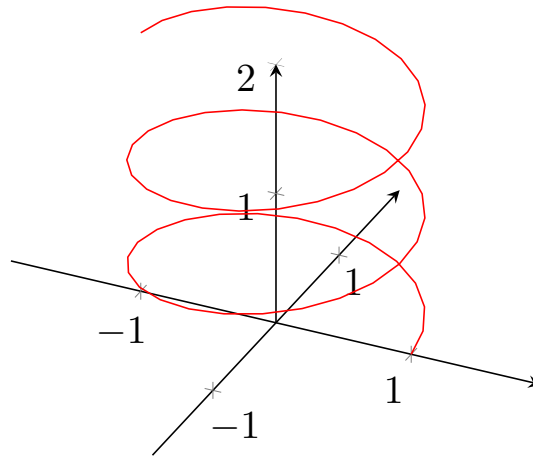


Figura 1.4: Taza de la hélice γ con parámetros $a = 1$ y $b = \frac{2}{5\pi}$.

Entonces, $\gamma'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$ y su función longitud de arco es

$$S(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} \, du = t\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Llamando $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ y razonando como en el ejemplo anterior, $t = s/c$, de modo que al reparametrizar por longitud de arco obtenemos

$$\gamma(s) = \left(a \cos \left(\frac{s}{c} \right), a \sin \left(\frac{s}{c} \right), b \frac{s}{c} \right).$$

Ejercicio 1.1.16. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular. Probar que $\|\gamma'(t)\|$ es constante si y solo si $\gamma'(t) \perp \gamma(t)$ para todo $t \in I$.

1.2 Curvatura

En esta sección vamos a estudiar una magnitud escalar asociada a una curva regular que mide en cada punto cuánto se aleja de su recta tangente, brindando información sobre su comportamiento local.

Para empezar, consideremos una curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada por longitud de arco tal que $\ddot{\gamma}(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Fijado $s_0 \in I$, podemos construimos una circunferencia con centro

$$p = \gamma(s_0) + \frac{1}{\|\ddot{\gamma}(s_0)\|} \frac{\ddot{\gamma}(s_0)}{\|\ddot{\gamma}(s_0)\|}$$

y radio $R = 1/\|\ddot{\gamma}(s_0)\|$. Explícitamente, esta circunferencia está parametrizada por longitud de arco como

$$\alpha(s) = p + \left(R \cos \left(\frac{s - s_0}{R} \right) \right) v_1 + \left(R \sin \left(\frac{s - s_0}{R} \right) \right) v_2,$$

donde

$$v_1 = -\frac{\ddot{\gamma}(s_0)}{\|\ddot{\gamma}(s_0)\|}, \quad v_2 = \dot{\gamma}(s_0).$$

Así, para cada $s_0 \in I$, tenemos una circunferencia α tal que $\alpha(s_0) = \gamma(s_0)$, $\dot{\alpha}(s_0) = \dot{\gamma}(s_0)$ y $\ddot{\alpha}(s_0) = \ddot{\gamma}(s_0)$. Esta circunferencia se llama **circunferencia oscultriz**³ de γ en $\gamma(s_0)$.

³Del latín *osculari* “besar”.

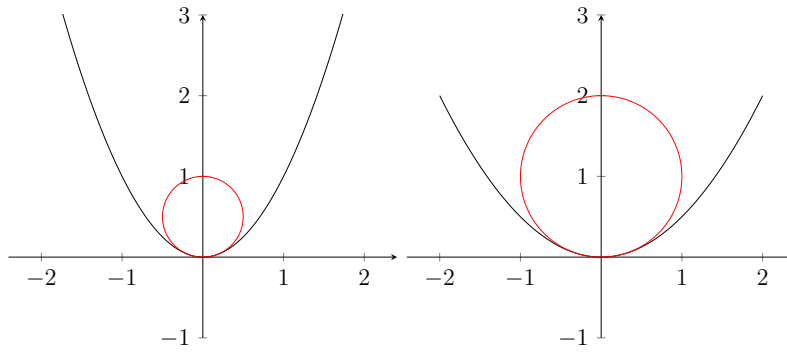


Figura 1.5: Circunferencias osculatrices en el origen de $\gamma_1(t) := (t, t^2)$ y de $\gamma_2(t) := (t, \frac{1}{2}t^2)$, respectivamente. Observar que la circunferencia es más pequeña cuando la traza se curva mucho, y más grande cuando se curva poco.

Notemos que el radio de esta circunferencia es $R = 1/\|\ddot{\gamma}(s_0)\|$, lo que motiva la siguiente definición.

Definición 1.2.1. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular. Para cada $t \in I$, definimos su *curvatura* como

$$\kappa(t) := \|\ddot{\gamma}(s)\|,$$

donde s es el parámetro longitud de arco correspondiente a t .

Observemos que el valor de la curvatura de una curva en un punto captura cuánto se está alejando la curva de su recta tangente en el punto. Siendo así, es natural el siguiente resultado, cuya demostración dejamos como ejercicio.

Ejercicio 1.2.2. Mostrar que una curva regular tiene curvatura idénticamente nula si y solo si es un segmento de recta.

Ejemplo 1.2.3. Por cómo la definimos, es de esperar que la curvatura de una circunferencia de radio R sea $1/R$. Veamos que efectivamente es así. Recordando el Ejemplo 1.1.14, la traza de $\gamma : [0, 2R\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(s) = (R \cos(s/R), R \sin(s/R)),$$

es una circunferencia de radio R centrada en el origen parametrizada por longitud de arco. Luego,

$$\dot{\gamma}(s) = \left(-R \sin(s/R) \frac{1}{R}, R \cos(s/R) \frac{1}{R}\right), \quad \ddot{\gamma}(s) = \left(-\cos(s/R) \frac{1}{R}, -\sin(s/R) \frac{1}{R}\right)$$

y su curvatura está dada por

$$\kappa(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\| = \left(\cos^2(s/R) \frac{1}{R^2} + \sin^2(s/R) \frac{1}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{R}.$$

Ejercicio 1.2.4. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular. La curvatura en $t \in I$ puede calcularse, sin reparametrizar por longitud de arco, mediante

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}. \quad (1.2)$$

Ejemplo 1.2.5. Recordemos la hélice del Ejemplo 1.1.15 parametrizada por longitud de arco como

$$\gamma(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{c}\right), a \sin\left(\frac{s}{c}\right), b \frac{s}{c} \right),$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $c := \sqrt{a^2 + b^2}$.

Para calcular su curvatura, derivamos dos veces obteniendo

$$\dot{\gamma}(s) = \left(-\frac{a}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c} \right) \quad \text{y} \quad \ddot{\gamma}(s) = \left(-\frac{a}{c^2} \cos\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{a}{c^2} \sin\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right).$$

Luego,

$$\kappa(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\| = \frac{|a|}{c^2}.$$

No siempre la curvatura da un valor constante en cada punto, tal como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.6. Consideremos la elipse en el plano xy parametrizada por

$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t, 0),$$

para constantes $a, b > 0$. Podemos usar la fórmula (1.2) para calcular su curvatura. Las derivadas que necesitamos son

$$\gamma'(t) = (-a \sin t, b \cos t, 0), \quad \gamma''(t) = (-a \cos t, -b \sin t, 0).$$

Luego, $\gamma'(t) \times \gamma''(t) = (0, 0, ab)$ y

$$\kappa(t) = \frac{\|(0, 0, ab)\|}{\|(-a \sin t, b \cos t, 0)\|^3} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}}.$$

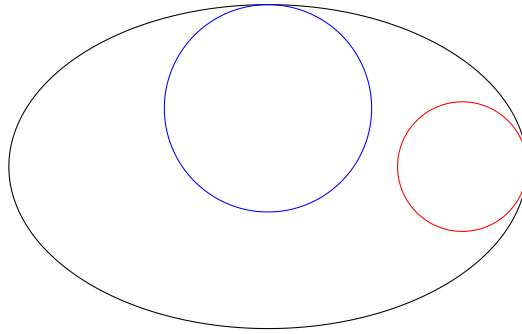


Figura 1.6: En negro se ve la traza de la elipse en el plano xy para parámetros $a = 2$ y $b = \frac{5}{4}$. En rojo vemos la circunferencia oscultriz en el punto $(2, 0, 0)$, donde la curvatura es $\kappa(0) = 2$, y en azul en el punto $(0, \frac{5}{4}, 0)$, donde la curvatura es $\kappa(\frac{\pi}{2}) = \frac{5}{4}$. Notar cómo aumenta el radio de la circunferencia oscultriz al disminuir la curvatura.

Observación 1.2.7. Siguiendo la exposición de [Tap16], veamos que el caso $n = 2$ es especial, ya que permite hablar de sentido “horario” y “antihorario” para describir cómo se curva el objeto que estamos estudiando.

Consideremos el isomorfismo lineal $R_{\pi/2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $R_{\pi/2}(x, y) := (-y, x)$, que consiste en rotar el vector (x, y) un ángulo recto en sentido antihorario. Si $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es

una curva parametrizada por longitud de arco, para cada $s \in I$, tanto $\ddot{\gamma}(s)$ como $R_{\pi/2}(\dot{\gamma}(s))$ son ortogonales a $\dot{\gamma}(s)$, de modo que deben ser paralelos. Explícitamente,

$$\ddot{\gamma}(s) = \kappa_{\text{sgn}}(s) R_{\pi/2}(\dot{\gamma}(s)),$$

para algún escalar $\kappa_{\text{sgn}}(s) \in \mathbb{R}$, que llamamos **curvatura signada** de γ en $\gamma(s)$. Si $\kappa_{\text{sgn}}(s)$ es negativa, entonces γ se curva en sentido horario en s , mientras que si es positiva, se curva en sentido antihorario.

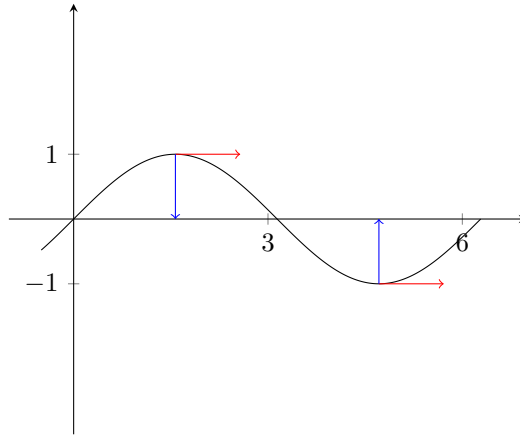


Figura 1.7: En negro se ve la traza de una curva γ , en rojo $\dot{\gamma}$ y en azul $\ddot{\gamma}$ en dos valores t_1 y t_2 . Notar que en el primer punto, el vector azul es una rotación en sentido horario del rojo, por lo que allí $\kappa_{\text{sgn}} < 0$; mientras que en el punto de la derecha el vector azul sí es una rotación en sentido antihorario del rojo, por lo que $\kappa_{\text{sgn}} > 0$.

1.3 El triedro de Frenet–Serret

Como hemos visto que toda curva regular puede reparametrizarse por longitud de arco, no perdemos generalidad al considerar, a partir de ahora, curvas parametrizadas por longitud de arco.

Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada por longitud de arco. Llamando $\mathbf{t}(s) := \dot{\gamma}(s)$, como $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1 \forall s \in I$, por el Ejercicio 1.1.16, $\ddot{\gamma}(s) \perp \mathbf{t}(s)$. Luego, se puede considerar la siguiente definición.

Definición 1.3.1. Si $\kappa(s) \neq 0$, se define el **vector normal unitario** como

$$\mathbf{n}(s) := \frac{\ddot{\gamma}(s)}{\kappa(s)}.$$

A partir de los vectores ortonormales $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{n}(s)$, resulta natural plantearse la posibilidad de completar una base del espacio. El caso $n = 3$ es especial ya que, usando las propiedades del producto vectorial, esto puede hacerse simplemente considerando

$$\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)\},$$

que resulta ser una base positiva de \mathbb{R}^3 .

Definición 1.3.2. El vector unitario $\mathbf{b}(s) := \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$ se llama **vector binormal** de γ en $\gamma(s)$.

Definición 1.3.3. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco tal que $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Entonces, cada punto $\gamma(s)$ tiene asociado una base ortonormal de \mathbb{R}^3 dada por $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$, llamada **triedro de Frenet–Serret**⁴.

Notemos que si nos paramos en un punto $\gamma(s)$, la base ortonormal que acabamos de definir determina tres planos: el **plano osculador** (**tn**), el **plano normal** (**nb**) y el **plano rectificante** (**tb**).

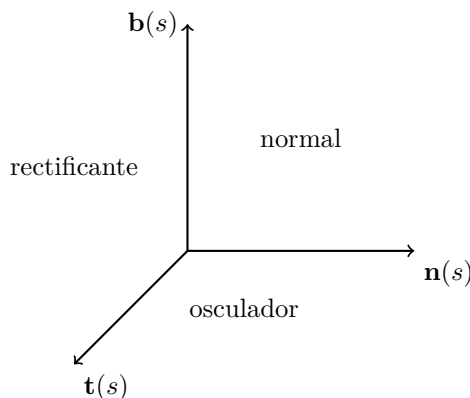


Figura 1.8: El triedro de Frenet–Serret en un punto $\gamma(s)$.

Veamos que este triedro nos ayuda a estudiar el comportamiento local de la curva $\gamma(s)$.

Notemos que como $\mathbf{b}(s)$ es un producto vectorial de funciones suaves, es suave y su derivada está dada por

$$\dot{\mathbf{b}}(s) = \frac{d}{ds} (\mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)) = \dot{\mathbf{t}}(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \times \dot{\mathbf{n}}(s) = \mathbf{t}(s) \times \dot{\mathbf{n}}(s),$$

donde el primer sumando se anula porque $\dot{\mathbf{t}}(s) \parallel \mathbf{n}(s)$. Además, como $\|\mathbf{b}(s)\| = 1$, tenemos que $\mathbf{b}(s) \perp \dot{\mathbf{b}}(s)$ y como $\dot{\mathbf{b}}(s) \perp \mathbf{t}(s)$, concluimos que $\dot{\mathbf{b}}(s) \parallel \mathbf{n}(s)$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.3.4. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco tal que $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. La función escalar $\tau(s)$ definida por la relación $\dot{\mathbf{b}}(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s)$ se llama **torsión** de γ en $\gamma(s)$.

Observación 1.3.5. $\tau(s)$ es una función suave, ya que

$$\langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle \tau(s)\mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \tau(s)\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \tau(s).$$

Ejemplo 1.3.6. Consideremos una vez más la hélice del Ejemplo 1.1.15 parametrizada por longitud de arco por

$$\gamma(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{c}\right), a \sin\left(\frac{s}{c}\right), b \frac{s}{c} \right),$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $c := \sqrt{a^2 + b^2}$.

En el Ejemplo 1.2.5 obtuvimos

$$\mathbf{t}(s) = \left(-\frac{a}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c} \right) \quad \text{y} \quad \ddot{\gamma}(s) = \left(-\frac{a}{c^2} \cos\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{a}{c^2} \sin\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right),$$

⁴J. F. Frenet (1816–1900) y J. A. Serret (1819–1885) fueron dos matemáticos franceses que descubrieron de manera independiente las llamadas ecuaciones de Frenet–Serret, que aparecerán más adelante en este capítulo.

de modo que los vectores normal y binormal están dados por

$$\mathbf{n}(s) = \left(-\frac{a}{|a|} \cos\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{a}{|a|} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right) \quad \text{y} \quad \mathbf{b}(s) = \left(\frac{ab}{|a|c} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{ab}{|a|c} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{|a|}{c} \right).$$

Entonces,

$$\dot{\mathbf{b}}(s) = \left(\frac{ab}{|a|c^2} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{ab}{|a|c^2} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right) = -\frac{b}{c^2} \mathbf{n}(s),$$

de modo que $\tau(s) = -\frac{b}{c^2}$.

Así como la curvatura de una curva mide cuánto se aleja de su recta tangente, como $\mathbf{b}(s)$ es ortogonal al plano osculador, $\dot{\mathbf{b}}(s)$ mide cómo cambia este plano cuando uno recorre la curva, de modo que $\|\tau(s)\| = \|\dot{\mathbf{b}}(s)\|$ mide cuánto se aleja la curva del plano osculador. En otras palabras, la torsión de una curva mide cuán lejos está de ser una curva plana.

Proposición 1.3.7. *Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco tal que $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Entonces, γ es una curva plana (es decir, $\gamma(I)$ está contenida en un plano) si y solo si $\tau \equiv 0$.*

Demostración.

\Rightarrow Si γ está en un plano, es claro que $\gamma(I)$ está contenida en su plano osculador (como está en un plano puede pensarse a la curva en el plano xy). Pero eso implica que $\mathbf{b}(s) = \mathbf{b}_0 \forall s \in I$. Y así, $\mathbf{b}'(s) = 0 \forall s \in I$.

\Leftarrow Vemos que $\mathbf{b}(s) = \mathbf{b}_0$. Así,

$$\frac{d}{ds} \langle \gamma(s), \mathbf{b}_0 \rangle = \langle \dot{\gamma}(s), \mathbf{b}_0 \rangle = 0,$$

pues el tangente y el binormal son ortogonales. Esto implica que la traza de γ está contenida en el plano $P := \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p, \mathbf{b}_0 \rangle = 0\}$. ♣

La siguiente es una expresión análoga a la obtenida para la curvatura en (1.2).

Ejercicio 1.3.8. Sea $\gamma(t)$ una curva regular (no necesariamente parametrizada por longitud de arco). Probar que en un punto donde $\kappa(t) \neq 0$, la torsión está dada por

$$\tau(t) = -\frac{\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \times \gamma'''(t) \rangle}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2}. \quad (1.3)$$

Las derivadas de los vectores del triedro de Frenet pueden expresarse en términos de los vectores de la misma base de la siguiente manera.

Proposición 1.3.9 (Ecuaciones de Frenet–Serret). *Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco tal que $\kappa(s) \neq 0 \forall s \in I$. Entonces,*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{t}}(s) &= \kappa(s) \mathbf{n}(s) \\ \dot{\mathbf{n}}(s) &= -\kappa(s) \mathbf{t}(s) - \tau(s) \mathbf{b}(s) \\ \dot{\mathbf{b}}(s) &= \tau(s) \mathbf{n}(s). \end{aligned}$$

Demostración. Ya hemos escrito (ver las definiciones de torsión y curvatura) a los vectores $\dot{\mathbf{t}}(s)$ y $\dot{\mathbf{b}}(s)$ como combinación lineal de los vectores del triedro, por lo que solo nos queda calcular $\dot{\mathbf{n}}(s)$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{n}}(s) &= \frac{d}{ds} (\mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}(s)) = \dot{\mathbf{b}}(s) \times \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \times \dot{\mathbf{t}}(s) \\ &= [\tau(s)\mathbf{n}(s) \times \mathbf{t}(s)] + [\mathbf{b}(s) \times \kappa(s)\mathbf{n}(s)] \\ &= -\tau(s)\mathbf{b}(s) - \kappa(s)\mathbf{t}(s)\end{aligned}$$

donde hemos usado que $\mathbf{n} \times \mathbf{t} = -\mathbf{b}$ y $\mathbf{b} \times \mathbf{n} = -\mathbf{t}$, por cómo está ordenada la base. ♣

Supongamos que tenemos una curva y la trasladamos en el espacio. Es razonable esperar que ni la curvatura ni la torsión se vean modificadas. Y lo mismo podría decirse si uno rota la curva. Esa idea está reflejada en la siguiente definición y en la proposición que la acompaña.

Definición 1.3.10. Un *movimiento rígido* en \mathbb{R}^3 es una composición de una transformación ortogonal con determinante positivo y una traslación, es decir, es una transformación de la forma $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\rho(x) = Ax + p$, donde $A \in \text{SO}(3)$ y $p \in \mathbb{R}^3$.

Proposición 1.3.11. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva suave regular tal que $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Entonces, la longitud de arco, la curvatura y la torsión son invariantes por movimientos rígidos.

Ejercicio 1.3.12. Probar la Proposición 1.3.11.

Notemos que, si no interesa su posición en el espacio, para describir una circunferencia alcanza con dar su radio. Recordando que el radio es la inversa de su curvatura (tal como vimos en el Ejemplo 1.2.3) y que su torsión es nula, por ser una curva plana, esto puede interpretarse como que puede caracterizarse solamente a partir de su curvatura y su torsión.

Así, cerramos este capítulo probando que esto no es una particularidad de las circunferencias, sino que la curvatura y la torsión alcanzan para describir completamente el comportamiento local de una curva regular, resultado que se conoce como *Teorema fundamental de la teoría local de curvas regulares*.

Teorema 1.3.13 (Teorema fundamental de la teoría local de curvas regulares). *Dadas dos funciones suaves $\kappa(s) > 0$ y $\tau(s)$, con $s \in I$, existe una curva regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que s es su longitud de arco, $\kappa(s)$ es su curvatura y $\tau(s)$ es su torsión.*

Además, si existe otra curva $\tilde{\gamma}$ que satisface las mismas condiciones, entonces $\tilde{\gamma} = \rho \circ \gamma$, donde $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un movimiento rígido.

Demostración.

1. Existencia de γ : Escribiendo los vectores $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ en coordenadas, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{t}(s) &= (\xi_1(s), \xi_2(s), \xi_3(s)) \\ \mathbf{n}(s) &= (\xi_4(s), \xi_5(s), \xi_6(s)) \\ \mathbf{b}(s) &= (\xi_7(s), \xi_8(s), \xi_9(s)),\end{aligned}$$

para funciones ξ_1, \dots, ξ_9 . Luego, las ecuaciones de Frenet-Serret pueden pensarse como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en $I \times \mathbb{R}^9$

$$\begin{cases} \frac{d\xi_1}{ds} = f_1(s, \xi_1, \dots, \xi_9) \\ \vdots \\ \frac{d\xi_9}{ds} = f_9(s, \xi_1, \dots, \xi_9), \end{cases}$$

donde f_1, \dots, f_9 son funciones lineales de las coordenadas ξ_i . Dados $s_0 \in I$ y una base ortonormal positiva $\{\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0\}$ de \mathbb{R}^3 , se tiene un problema de valores iniciales y tomamos la familia de ternas $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ solución del problema.

(a) Ortonormalidad: Consideremos las cantidades

$$\begin{aligned} \alpha_1(s) &:= \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle & \alpha_4(s) &:= \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle \\ \alpha_2(s) &:= \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle & \alpha_5(s) &:= \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle \\ \alpha_3(s) &:= \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle & \alpha_6(s) &:= \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle \end{aligned}$$

Usando que $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$ verifican las ecuaciones de Frenet-Serret, consideramos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1(s) &= \frac{d}{ds} \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \kappa(s) \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle - \kappa(s) \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle - \tau(s) \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle \\ \dot{\alpha}_2(s) &= \frac{d}{ds} \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = \kappa(s) \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle + \tau(s) \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle \\ \dot{\alpha}_3(s) &= \frac{d}{ds} \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = -\kappa(s) \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle - \tau(s) \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle + \tau(s) \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle \\ \dot{\alpha}_4(s) &= \frac{d}{ds} \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 2\kappa(s) \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle \\ \dot{\alpha}_5(s) &= \frac{d}{ds} \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = -2\kappa(s) \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{t}(s) \rangle - 2\tau(s) \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle \\ \dot{\alpha}_6(s) &= \frac{d}{ds} \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 2\tau(s) \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{n}(s) \rangle. \end{aligned}$$

Notemos que $\alpha_i \equiv 0$, $i = 1, 2, 3$ y $\alpha_i \equiv 1$, $i = 4, 5, 6$ es solución de este sistema con condiciones iniciales $0, 0, 0, 1, 1, 1$. Por unicidad de la solución de este sistema de ecuaciones con las condiciones iniciales dadas, la familia de ternas $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base ortonormal para cada $s \in I$.

(b) Positividad de la base $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$: Sabemos que $\det(\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0)) > 0$, y como la función $\det(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ es continua en I , existe $\bar{I} \subset I$ donde conserva el signo.

A partir de $\mathbf{t}(s)$ definimos la curva regular $\gamma : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de la siguiente manera

$$\gamma(s) := \int_{s_0}^s \mathbf{t}(u) du.$$

Así, s es el parámetro longitud de arco de γ y $\dot{\gamma}(s) = \mathbf{t}(s)$.

(c) Curvatura de γ : Alcanza con notar que $\ddot{\gamma}(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$, ya que satisface las ecuaciones de Frenet por construcción.

(d) Torsión de γ : Usamos la ecuación (1.3). Para eso, primero vemos que, omitiendo el parámetro s ,

$$\ddot{\gamma} = \dot{\kappa}\mathbf{n} + \kappa\dot{\mathbf{n}} = \dot{\kappa}\mathbf{n} - \kappa^2\mathbf{t} - \kappa\tau\mathbf{b}.$$

Entonces, la torsión de γ está dada por

$$-\frac{\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \times \ddot{\gamma} \rangle}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2} = -\frac{\langle \mathbf{t}, (\kappa \mathbf{n} \times (\dot{\kappa} \mathbf{n} - \kappa^2 \mathbf{t} - \kappa \tau \mathbf{b})) \rangle}{\|\mathbf{t} \times \kappa \mathbf{n}\|^2} = -\frac{\langle \mathbf{t}, -\kappa^2 \tau \mathbf{t} \rangle}{\kappa^2} = \tau \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \tau.$$

2. Unicidad: Sean γ y $\tilde{\gamma}$ dos curvas regulares tales que $\kappa(s) = \tilde{\kappa}(s)$ y $\tau(s) = \tilde{\tau}(s) \forall s \in I$, y $\{\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0\}$ y $\{\tilde{\mathbf{t}}_0, \tilde{\mathbf{n}}_0, \tilde{\mathbf{b}}_0\}$ sus triedros de Frenet–Serret. Sea ρ el movimiento rígido que transforma $\gamma_0 := \gamma(s_0)$ en $\tilde{\gamma}(s_0)$ y $\{\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0\}$ en $\{\tilde{\mathbf{t}}_0, \tilde{\mathbf{n}}_0, \tilde{\mathbf{b}}_0\}$.

Consideremos la curva $\beta = \rho \circ \gamma$. Como los movimientos rígidos conservan curvatura y torsión (por la Proposición 1.3.11), $\kappa_\beta(s) = \tilde{\kappa}(s)$ y $\tau_\beta(s) = \tilde{\tau}(s)$. Entonces, los sistemas de ecuaciones diferenciales que definen $\tilde{\gamma}$ y β son iguales y tienen la misma condición inicial $s = s_0$. Por lo tanto, $\beta = \tilde{\gamma} = \rho \circ \gamma$. ♣

Ejercicio 1.3.14. Mostrar que si una curva regular tiene como curvatura a la función $\kappa(s) \equiv \frac{1}{2}$ y como torsión a la función $\tau(s) \equiv -\frac{1}{2}$, entonces es una hélice.

Observación Final. Si bien nos hemos restringido en esta última sección a hablar de curvas en \mathbb{R}^3 , donde tenemos naturalmente definido el triedro de Frenet, es posible trabajar en \mathbb{R}^n y considerar una noción un poco más general a partir del proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt aplicado a las derivadas de la curva. Más detalles al respecto pueden encontrarse en el Capítulo 4 de [Lee09].

Ejercicios

Ejercicios ya propuestos:

Ejercicio 1.1.10. Mostrar que toda curva regular es localmente inyectiva.

Ejercicio 1.1.16. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular. Probar que $\|\gamma(t)\|$ es constante si y solo si $\gamma'(t) \perp \gamma(t)$ para todo $t \in I$.

Ejercicio 1.2.2. Mostrar que una curva regular tiene curvatura idénticamente nula si y solo si es un segmento de recta.

Ejercicio 1.2.4. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular. La curvatura en $t \in I$ puede calcularse, sin reparametrizar por longitud de arco, mediante

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

Ejercicio 1.3.8. Sea $\gamma(t)$ una curva regular (no necesariamente parametrizada por longitud de arco). Probar que en un punto donde $\kappa(t) \neq 0$, la torsión está dada por

$$\tau(t) = -\frac{\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \times \gamma'''(t) \rangle}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2}.$$

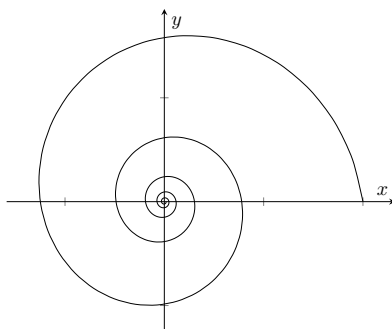
Ejercicio 1.3.12. (Proposición 1.3.11) Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva suave regular tal que $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Entonces, la longitud de arco, la curvatura y la torsión son invariantes por movimientos rígidos.

Ejercicio 1.3.14. Aplicar el Teorema fundamental de la teoría local de curvas regulares para mostrar que si una curva regular tiene como curvatura a la función $\kappa(s) \equiv \frac{1}{2}$ y como torsión a la

función $\tau(s) \equiv -\frac{1}{2}$, entonces es una hélice.

Otros ejercicios:

Ejercicio 1.3.15. Consideremos la *espiral logarítmica* $\gamma(t) = (ae^{bt} \cos t, ae^{bt} \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, con $a > 0$ y $b < 0$ constantes.



Mostrar que $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma'(t) = (0, 0)$ y que γ tiene longitud de arco finita en $[t_0, \infty)$.

Ejercicio 1.3.16. Dados $p, q \in \mathbb{R}^2$, probar que la curva de longitud mínima que une p con q es un segmento de recta.

Ejercicio 1.3.17. Consideremos la aplicación $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-1/t^2}) & \text{si } t > 0 \\ (t, e^{-1/t^2}, 0) & \text{si } t < 0 \\ (0, 0, 0) & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

- Probar que γ es una curva diferenciable regular para todo t .
- Probar que la curvatura $\kappa(t) \neq 0$ para todo $t \neq 0, \pm\sqrt{2/3}$, y que $\kappa(0) = 0$.
- Mostrar que el límite de los planos osculadores cuando $t \rightarrow 0^+$ es el plano $y = 0$, pero que el límite cuando $t \rightarrow 0^-$ es el plano $z = 0$. Notar que esto implica que el vector binormal es discontinuo en $t = 0$.
- Mostrar que τ puede extenderse con continuidad a una función $\tau \equiv 0$ aunque γ no es una curva plana.

Ejercicio 1.3.18. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular tal que $\kappa(t) \neq 0$ y $\tau(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Decimos que γ es una *curva de Bertrand*⁵ si existe otra curva $\gamma^* : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que las rectas normales de γ y γ^* coinciden para todo $t \in I$. En ese caso, decimos que γ y γ^* son *curvas de Bertrand* y podemos escribir

$$\gamma^*(t) = \gamma(t) + r\mathbf{n}_\gamma(t).$$

- Demostrar que r es constante, es decir, que la distancia entre puntos homólogos o correspondientes de dos curvas de Bertrand es constante.

⁵Estas curvas fueron introducidas por el matemático francés J. Bertrand (1822–1900) en 1850.

- (b) Demostrar que el ángulo que forman dos tangentes homólogas de dos curvas de Bertrand es constante.

Ejercicio 1.3.19. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco cuyas curvatura y torsión no se anulan en ningún punto. Decimos que γ es una *hélice* que tiene como *eje* al vector unitario $\omega \in \mathbb{R}^3$ y *ángulo* $\theta \in [0, 2\pi)$ si todos los vectores tangentes a la curva forman un ángulo θ con ω .

- (a) Probar que si γ es una hélice que tiene como eje al vector unitario ω y ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$, entonces el vector ω es una combinación lineal de los vectores $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$, para todo $s \in I$. Calcular los coeficientes de dicha combinación lineal.
- (b) Probar que γ es una hélice si y solo si κ/τ es constante.
- (c) Calcular la velocidad, la curvatura y la torsión de la curva $\gamma : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $\gamma(t) = (\cos(t/\sqrt{2}), \sin(t/\sqrt{2}), t/\sqrt{2})$. Demostrar que es una hélice y calcular su eje y su ángulo.

Capítulo 2

Superficies

Cuando se piensa en una superficie, uno imagina un objeto que localmente pueda identificarse con un subconjunto de \mathbb{R}^2 . Las ideas que presentamos a continuación pueden generalizarse de manera natural para estudiar superficies abstractas que no estén contenidas en \mathbb{R}^3 , tal como veremos más adelante cuando introduzcamos el concepto de variedad suave.

2.1 Superficies regulares

En particular, cuando se piensa en una superficie *regular*, uno imagina un objeto que localmente pueda identificarse con un subconjunto de \mathbb{R}^2 de manera suave. Entonces, para comenzar, recordemos la noción de difeomorfismo entre conjuntos.

Definición 2.1.1. Decimos que dos subconjuntos $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ son *difeomorfos* si existe una función suave invertible $f : X \rightarrow Y$ cuya inversa también es suave. En tal caso, decimos que f es un *difeomorfismo*.

Ejemplo 2.1.2. El plano \mathbb{R}^2 es difeomorfo al paraboloide de ecuación cartesiana $z = x^2 + y^2$ vía $\varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$. Esta función es obviamente suave y su inversa φ^{-1} está dada por $\varphi^{-1}(x, y, z) = (x, y)$, que también es suave porque puede extenderse a una función definida en todo \mathbb{R}^3 con la misma expresión que no es otra cosa que la proyección de \mathbb{R}^3 sobre el plano xy .

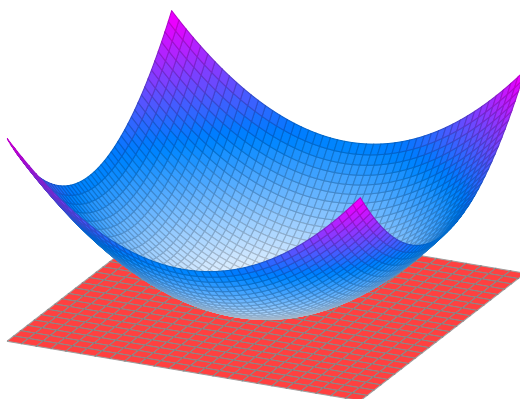


Figura 2.1: El paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ y el plano xy (en rojo) al que es difeomorfo.

Recordemos ahora la noción de entorno de un punto en un conjunto.

Definición 2.1.3. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. Un subconjunto $V \subset X$ es **abierto relativo a X** si existe un abierto $W \subset \mathbb{R}^n$ tal que $V = X \cap W$. Dado $p \in X$, un **entorno de p en X** es un abierto relativo a X que contiene a p .

Ahora sí presentemos la definición de superficie regular.

Definición 2.1.4. Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una **superficie regular** si para todo $p \in S$ existe un entorno V de p en S difeomorfo a un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$. En tal caso, un difeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ es una **parametrización local** de S en p y llamamos **carta** o **entorno coordenado** de S en p al par (U, φ) . Una carta local (U, φ) se llama **global** si $\varphi(U) = S$.

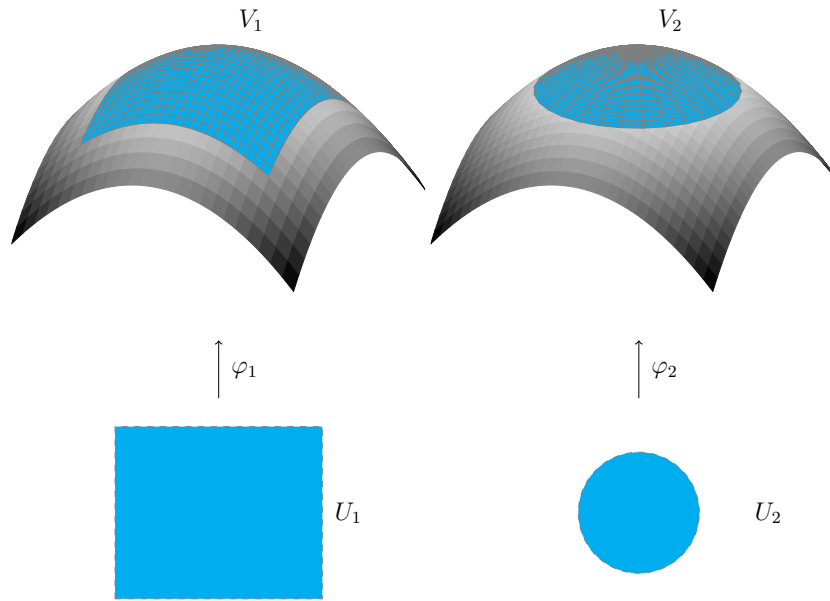


Figura 2.2: Dos posibles cartas de una superficie regular.

Ejemplo 2.1.5. Consideremos un plano P de ecuación cartesiana $ax + by + cz + d = 0$, para constantes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que a, b y c no son todas simultáneamente nulas. Podemos ver que es una superficie regular hallando una carta global, es decir, una única carta que sirve para cualquier $p \in P$. Como alguna de las constantes es no nula, supongamos, sin pérdida de generalidad, que $b \neq 0$. Entonces, podemos despejar a y como función de x y z :

$$y = \frac{-ax - cz - d}{b} = Ax + Bz + C,$$

para constantes nuevas $A, B, C \in \mathbb{R}$. Luego, podemos definir $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow P$ como

$$\varphi(u, v) := (u, Au + Bv + C, v).$$

Es claro que φ es suave y que su inversa $\varphi^{-1}(x, y, z) := (x, z)$ también lo es.

Ejemplo 2.1.6. El cilindro C de ecuación cartesiana $x^2 + y^2 = 1$ también es una superficie regular. Sea $p = (x, y, z) \in C$ tal que $x \neq 1$. Una posible carta local de C en p es el par (U, φ) , donde

$U := (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ y $\varphi(u, v) := (\cos u, \sin u, v)$. La imagen de U por φ es

$$V = \{(x, y, z) \in C \mid x \neq 1\}.$$

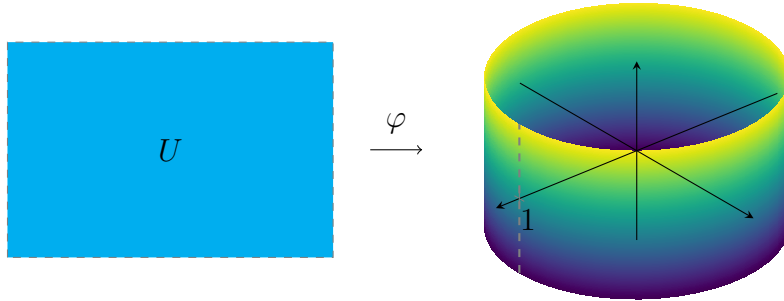


Figura 2.3: Parametrización local de un cilindro. En gris, la recta que no pertenece a la imagen de φ .

Es claro que φ es suave, ya que sus entradas son o bien polinomios o bien funciones trigonométricas. Su inversa $\varphi^{-1} : V \rightarrow U$ está dada, en los puntos donde $x \neq 0$, por $\varphi^{-1}(x, y, z) = (\tan(y/x), z)$, que es suave porque puede extenderse con esa misma fórmula al abierto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0\}$.

Para puntos $p = (x, y, z) \in C$ tales que $x = 1$, es claro que $y \neq 1$ y puede definirse una carta local de S en p de manera totalmente análoga.

Ahora bien, como una parametrización local es una función suave entre subconjuntos de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , es posible calcular su diferencial. Así, a partir de la definición de superficie regular se puede obtener una característica importante del diferencial de una parametrización local.

Proposición 2.1.7. *Sea S una superficie regular. Si $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S \subset \mathbb{R}^3$ es una parametrización local, entonces para todo $q \in U$ la transformación lineal $d\varphi_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tiene rango 2.*

Demostración. Sea $q \in U$ y llamemos $p := \varphi(q)$. Como φ es un difeomorfismo, $\varphi^{-1} : V \rightarrow U$ es suave y se extiende a una función suave que también denotaremos φ^{-1} definida en un abierto de \mathbb{R}^3 que contiene a p . Por la regla de la cadena, si $1_{\mathbb{R}^2}$ es la función identidad en \mathbb{R}^2 ,

$$d(1_{\mathbb{R}^2})_q = d(\varphi^{-1} \circ \varphi)_q = d\varphi_p^{-1} \circ d\varphi_q.$$

Como $d(1_{\mathbb{R}^2})_q = 1_{\mathbb{R}^2}$, tenemos que $d\varphi_p^{-1} \circ d\varphi_q$ es la identidad en \mathbb{R}^2 , que tiene rango 2. Así, como el rango de una composición de transformaciones lineales es menor o igual que el rango de la primera, tenemos que $d\varphi_q$ tiene rango 2. ♣

Notemos que si $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, entonces la matriz de su diferencial está dada por

$$d\varphi_q = \begin{pmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \\ z_u(q) & z_v(q) \end{pmatrix},$$

de modo que la proposición anterior puede interpretarse como que los vectores

$$\varphi_u(q) = (x_u(q), y_u(q), z_u(q))$$

$$\varphi_v(q) = (x_v(q), y_v(q), z_v(q))$$

son linealmente independientes.

Ejemplo 2.1.8 (El gráfico de una función suave). Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave, con $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto. Su gráfico es el conjunto

$$\text{gr}(f) := \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in U\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Veamos que $\text{gr}(f)$ es una superficie regular. En efecto, alcanza con tomar la parametrización global $\varphi : U \rightarrow \text{gr}(f)$ definida como

$$\varphi(u, v) := (u, v, f(u, v)).$$

Es claro que φ es suave porque las primeras dos funciones coordenadas son polinomios y la tercera es suave por hipótesis. Su inversa $\varphi^{-1} : \text{gr}(f) \rightarrow U$ es simplemente proyectar en las primeras dos coordenadas, $\varphi^{-1}(x, y, z) := (x, y)$, que también es una función suave. Por lo tanto, φ es un difeomorfismo y, como cubre todo punto de $\text{gr}(f)$, es una parametrización global del gráfico de f , que resulta ser una superficie regular.

Notar que esto muestra que el paraboloide considerado en el Ejemplo 2.1.2 es una superficie regular.

Ejemplo 2.1.9. Otro ejemplo natural de superficie regular es una esfera. Consideremos una de radio $r \in \mathbb{R}$ centrada en el origen, dada por los puntos que satisfacen la ecuación cartesiana $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ y que denotaremos como S_r^2 . Si bien no es globalmente el gráfico de una función, podemos pensar en dividirla en regiones que sí lo sean. Por ejemplo, el casquete superior está dado por aquellos puntos de la forma $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, con $(x, y) \in B_r(0) \subset \mathbb{R}^2$, la bola (abierta) de radio r centrada en el origen.

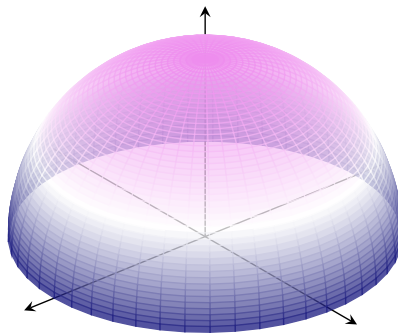


Figura 2.4: Casquete superior de la esfera.

Esto sugiere, recordando el ejemplo anterior, una parametrización local $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$, donde $U_1 := B_r(0)$ y

$$V_1 := \left\{ (x, y, \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}) \mid (x, y) \in U_1 \right\},$$

de la forma

$$\varphi_1(u, v) := \left(u, v, \sqrt{r^2 - u^2 - v^2} \right).$$

Es claro que es suave, ya que las primeras dos componentes son polinomios y la tercera es la composición de un polinomio con la función raíz cuadrada en puntos donde el argumento no se anula. Su inversa $\varphi_1^{-1} : V_1 \rightarrow U_1$ también es suave, ya que es simplemente proyectar en las primeras dos coordenadas.

La carta (U_1, φ_1) alcanza para cubrir solo el casquete superior, por lo que debemos continuar cubriendo la superficie. La continuación natural sería “despejar” z con el signo contrario esta vez y considerar (U_2, φ_2) dada por $U_2 := B_r(0)$ y

$$\varphi_2(u, v) := \left(u, v, -\sqrt{r^2 - u^2 - v^2} \right).$$

Esto cubre el casquete inferior de la esfera, por lo que ya tenemos cubierta toda la esfera a excepción del “ecuador” (esto es, la curva dada por la intersección de S_r^2 con el plano xy). Para seguir con la misma idea, uno podría despejar otra de las variables (en vez de z). Por ejemplo, despejando y en términos de x y z tenemos la carta (U_3, φ_3) dada por $U_3 := B_r(0)$ y

$$\varphi_3(u, v) := \left(u, \sqrt{r^2 - u^2 - v^2}, v \right).$$

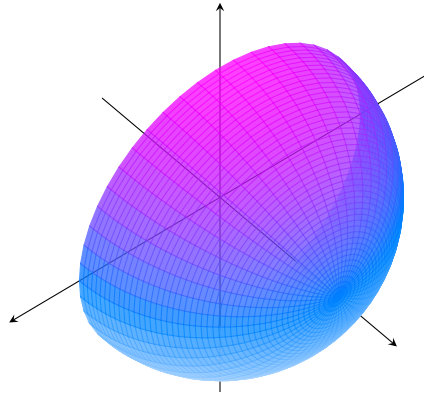


Figura 2.5: Imagen de la parametrización local φ_3 .

Siguiendo de la misma manera, despejaríamos y con el otro signo para obtener (U_4, φ_4) y nos quedarían por cubrir los puntos $(r, 0, 0)$ y $(-r, 0, 0)$. En total, necesitamos 6 cartas para cubrir a toda la esfera. Esto puede mejorarse usando otras parametrizaciones, como la proyección estereográfica, que solo necesita 2 cartas y que describimos a continuación.

Ejemplo 2.1.10 (Proyección estereográfica de la esfera). Consideremos la esfera unitaria $S^2 := \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\| = 1\}$. Llamaremos **polo sur** al punto $a^- := (0, 0, -1)$. Sean el abierto relativo $V_- := S^2 - \{a^-\}$ en S^2 y la función suave $\varphi_-^{-1} : V_- \rightarrow \mathbb{R}^2$ que le asigna a $p \in V_-$ la intersección de la “recta” que pasa por p y a^- con el plano $\{p = (x, y, z) \mid z = 0\} \simeq \mathbb{R}^2$.

Se puede ver fácilmente que esta función está dada por

$$\varphi_-^{-1}(p) := \frac{p - \langle p, a^- \rangle a^-}{1 - \langle p, a^- \rangle}.$$

Análogamente, se puede considerar el **polo norte** $a^+ := (0, 0, 1)$, el abierto relativo en S^2 dado por $V_+ := S^2 - \{a^+\}$ y la función $\varphi_+^{-1} : V_+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\varphi_+^{-1}(p) := \frac{p - \langle p, a^+ \rangle a^+}{1 - \langle p, a^+ \rangle}.$$

Notemos que en esta construcción no se usa nada que sea propio de vectores de \mathbb{R}^3 lo que indica que podría hacerse para esferas en espacios euclídeos de dimensión mayor y radio arbitrario.

Ejercicio 2.1.11. Probar que si V es un abierto relativo de una superficie regular S , entonces V es una superficie regular.

Observación 2.1.12. Tal como muestran los ejemplos anteriores, podríamos tener un punto en una superficie regular que pertenezca a varios entornos coordinados, o podría pasar que haya varias parametrizaciones locales asociadas al punto. Es natural preguntarse si uno puede pasar suavemente de una parametrización local a otra.

Sean p un punto de una superficie regular S y $\varphi_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ y $\varphi_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ dos parametrizaciones locales de S en $p \in V := \varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2)$. Entonces, como ambas parametrizaciones locales son difeomorfismos, el **cambio de parámetros** $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : \varphi_2^{-1}(V) \rightarrow \varphi_1^{-1}(V)$ es un difeomorfismo.

Hemos mostrado que el gráfico de una función suave es una superficie regular, por lo que es natural preguntarse si es cierta la recíproca. Sin embargo, ésta solo está garantizada a nivel local, tal como indica el siguiente resultado.

Proposición 2.1.13. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y sea $p \in S$. Entonces, existe un entorno V de p en S tal que V es el gráfico de una función suave de alguna de las formas: $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$, $x = h(y, z)$.

Demostración. Dado $p \in S$, existe una parametrización local $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V$ de S alrededor de p . Como S es una superficie regular, por la Proposición 2.1.7, algún Jacobiano es no nulo en $q = \varphi^{-1}(p)$. Supongamos, por ejemplo, que $\det \partial(x, y) / \partial(u, v) \neq 0$ en q .

Si pr_{xy} es la proyección al plano xy , definimos $\text{pr}_{xy} \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ como

$$(\text{pr}_{xy} \circ \varphi)(u, v) = (x(u, v), y(u, v)).$$

Decir que ese Jacobiano es no nulo es decir que el diferencial de esa función es invertible en q . Luego, podemos aplicar el teorema de la función inversa, que nos dice que existen entornos V_1 de q en U y V_2 de $\text{pr}_{xy}(p)$ en \mathbb{R}^2 tales que $\text{pr}_{xy} \circ \varphi : V_1 \rightarrow V_2$ es un difeomorfismo, por lo que tiene inversa suave. Por último, definimos $f : V_2 \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera: a cada $(x, y) \in V_2$ le asignamos la tercera coordenada de $(\varphi \circ (\text{pr}_{xy} \circ \varphi)^{-1})(x, y)$ y notamos que f es suave por ser composición de funciones suaves. Así, V es el gráfico de una función suave de la forma $z = f(x, y)$. ♣

Ejercicio 2.1.14. Mostrar que el cono de dos hojas con vértice en el origen $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ no es una superficie regular.

El Ejemplo 2.1.9 también muestra que puede ser trabajoso mostrar que un conjunto es una superficie regular solo a partir de la definición. Sin embargo, existe una familia de conjuntos para los cuales es posible asegurarlo de manera más directa.

Definición 2.1.15. Sean $W \subset \mathbb{R}^3$ un abierto y $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Decimos que $c \in \mathbb{R}$ es un **valor regular** de f si para todo $p \in f^{-1}(\{c\})$ se tiene que df_p es suryectivo. Equivalentemente,

$$\nabla f(p) = (f_x(p), f_y(p), f_z(p)) \neq 0.$$

Teorema 2.1.16. Sean $W \subset \mathbb{R}^3$ un abierto y $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Si c es un valor regular de f , entonces $f^{-1}(\{c\})$ es una superficie regular.

Demostración. Sea $p = (x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}(\{c\})$. Como c es valor regular, podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $f_z(p) \neq 0$. Definamos $F : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ como

$$F(x, y, z) := (x, y, f(x, y, z)) = (u, v, t),$$

que claramente resulta ser una función suave cuyo diferencial está dado por

$$dF_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}.$$

Como $\det(dF_p) = f_z \neq 0$, por el teorema de la función inversa, existen entornos \tilde{W} de p y V de $F(p)$ tales que $F : \tilde{W} \rightarrow V$ es invertible y su inversa $F^{-1}(u, v, t) = (x, y, z)$ es suave, donde $x = u$, $y = v$ y $z = g(u, v, t)$, para una función $g : V \rightarrow \mathbb{R}$. En particular, tomando $t = c$, podemos definir una función suave $h : \text{pr}_{xy}(\tilde{W}) \rightarrow \mathbb{R}$ como $h(x, y) := g(x, y, c)$, donde $\text{pr}_{xy} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la proyección canónica al plano xy .

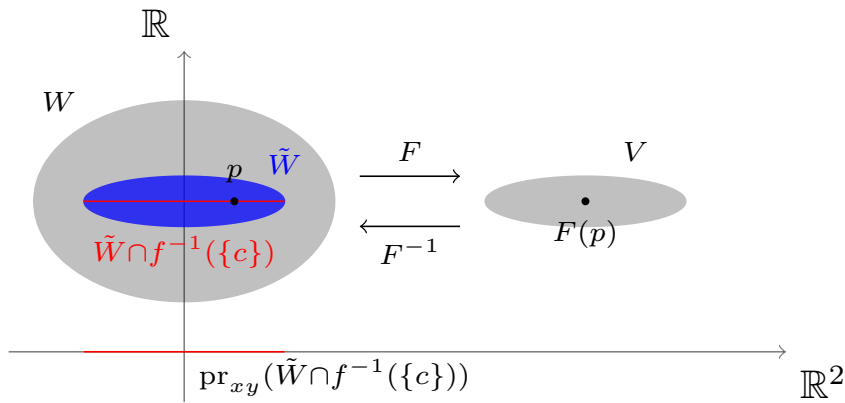


Figura 2.6: Esquema de los diferentes conjuntos y funciones que aparecen durante la demostración. Notar que si bien las cuentas son en \mathbb{R}^3 , estamos graficando como si observáramos la situación de perfil.

Entonces,

$$f^{-1}(\{c\}) \cap \tilde{W} = \{(x, y, z) \in \text{pr}_{xy}(\tilde{W}) \times \mathbb{R} \mid z = g(x, y, c) = h(x, y)\} = \text{gr}(h).$$

Por lo tanto, $f^{-1}(\{c\})$ es una superficie regular.



Ejemplo 2.1.17. Volvamos al ejemplo de la esfera S_r^2 de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, para un $r \in \mathbb{R}$ fijo. Podemos definir la función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$, que resulta suave por ser un polinomio. Entonces, la esfera es simplemente el conjunto de nivel $f^{-1}(\{r^2\})$, por lo que si viéramos que r^2 es un valor regular de f , podríamos aplicar la proposición anterior y afirmar que es una superficie regular.

Dado $p \in f^{-1}(\{r^2\})$, el diferencial de f en el punto está dado por

$$df_p = (2x, 2y, 2z) \neq 0,$$

ya que como p está en la esfera, alguna de sus coordenadas es no nula. Por lo tanto, r^2 es un valor regular de f y la esfera es una superficie regular.

Ejemplo 2.1.18. El hiperboloide de una hoja definido por la ecuación cartesiana $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ también es una superficie regular, ya que puede escribirse como el conjunto de nivel $S = g^{-1}(\{1\})$ de la función $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2$. Es claro que g es suave por ser polinómica y su diferencial en un punto $p \in S$ es

$$df_p = (2x, 2y, -2z) \neq 0,$$

ya que solo se anula en el origen, que no pertenece a S . Por lo tanto, 1 es un valor regular de g y S es una superficie regular.

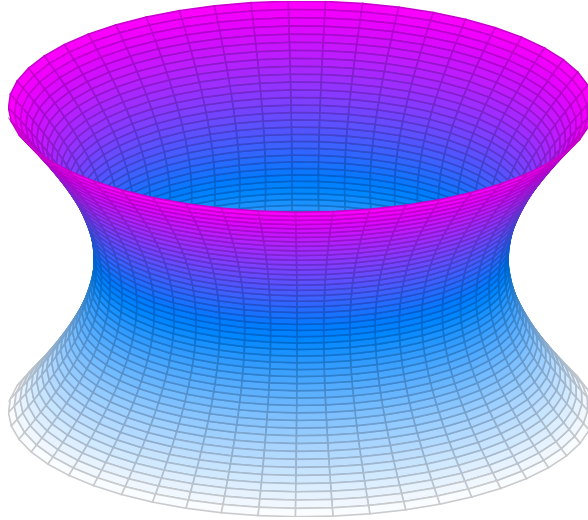


Figura 2.7: El hiperboloide de una hoja.

Otra familia de ejemplos de superficies regulares que aparece recurrentemente es la siguiente. Dada una curva plana contenida en el plano yz que no tiene intersección con el eje z , llamada *curva generatriz*, la superficie S obtenida al considerar la rotación de ella alrededor del eje z se denomina *superficie de revolución*.

Si la curva es de la forma $\gamma(t) = (0, \phi(t), \psi(t))$, con $t \in (a, b)$ y $\phi(t) > 0$, rotar un punto $\gamma(t)$ un ángulo \tilde{u} alrededor del eje z nos da

$$\begin{pmatrix} \cos \tilde{u} & -\sin \tilde{u} & 0 \\ \sin \tilde{u} & \cos \tilde{u} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\phi(t) \sin \tilde{u} \\ \phi(t) \cos \tilde{u} \\ \psi(t) \end{pmatrix}.$$

Haciendo un cambio de parámetros en el ángulo de rotación, tenemos que una parametrización local de S está dada por

$$\varphi(u, v) = (\phi(v) \cos(u), \phi(v) \sin(u), \psi(v)),$$

donde $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (a, b)$.

Ejercicio 2.1.19. Probar que las superficies de revolución son superficies regulares.

2.2 Espacios tangentes

Así como las curvas regulares en cada punto admiten una aproximación lineal que está dada por su recta tangente, las superficies regulares admiten una aproximación lineal en cada uno de sus puntos. En este caso, esta aproximación lineal es la que conocemos como plano tangente.

Definición 2.2.1. Definimos el **espacio tangente** a S en un punto $p \in S$ como el conjunto de los vectores tangentes a curvas en S en el punto p , es decir,

$$T_p S := \{\gamma'(0) \mid \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S \text{ tal que } \gamma(0) = p\}.$$

Notemos que es claro que consideramos curvas definidas en entornos simétricos del 0 que pasan por p cuando el parámetro toma el valor 0 por comodidad.

Llamaremos **plano tangente** a S en p al conjunto de puntos $p + T_p S = \{p + v \mid v \in T_p S\}$.

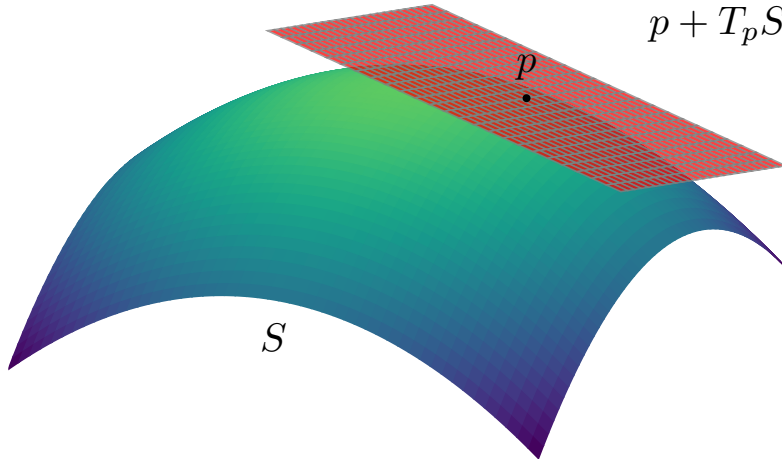


Figura 2.8: El plano tangente a una superficie regular S en el punto p .

Veamos que el espacio tangente es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 y que dada una parametrización local de la superficie alrededor del punto, se puede encontrar una base asociada.

Proposición 2.2.2. Sea $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ una parametrización local de S en p y sea $q \in U$ tal que $\varphi(q) = p$. Entonces, el subespacio vectorial de 2-dimensional $d\varphi_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ coincide con el conjunto de los vectores tangentes a S en p , es decir, $d\varphi_q(\mathbb{R}^2) = T_p S$.

Demostración.

⊂ Sea $w \in d\varphi_q(\mathbb{R}^2)$. Entonces, existe $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $d\varphi_q(v) = w$. Por la definición de diferencial, v es el vector tangente a una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ tal que $\alpha(0) = q$ y w es el vector que resulta de derivar $\varphi(\alpha(t))$ en $t = 0$. Es decir que $w = \gamma'(0)$ donde $\gamma(t) = \varphi(\alpha(t))$.

⊃ Sea w un vector tangente a S en p , $w = \gamma'(0)$, con $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\gamma(0) = p$. Sea $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ dada por $\alpha(t) = \varphi^{-1}(\gamma(t))$. Así, α es una curva parametrizada en U tal que $\alpha(0) = q$. Entonces,

$$d\varphi_q(\alpha'(0)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi \circ \alpha = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \gamma = \gamma'(0) = w.$$



Corolario 2.2.3. Sean S una superficie regular y $p \in S$. Si (U, φ) es una carta alrededor de p tal que $\varphi(q) = p$, entonces $T_p S = \text{span}\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$.

Demostración. Es claro a partir de la proposición anterior notando que

$$\varphi_u(q) = d\varphi_q(e_1) \quad \text{y} \quad \varphi_v(q) = d\varphi_q(e_2),$$

donde $\{e_1, e_2\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^2 .



Ejemplo 2.2.4. Sea S el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$. Como es la gráfica de una función suave, es una superficie regular y podemos parametrizarlo globalmente mediante $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, $\varphi(u, v) := (u, v, u^2 + v^2)$.

Sean $q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $p = \varphi(q) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Para calcular el espacio tangente en p primero calculamos las derivadas parciales de la parametrización:

$$\varphi_u(u, v) = (1, 0, 2u), \quad \varphi_v(u, v) = (0, 1, 2v).$$

Evaluando en q ,

$$\varphi_u(u, v) = (1, 0, 1), \quad \varphi_v(u, v) = (0, 1, 1),$$

de modo que

$$T_p S = \text{span}\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}.$$

Observación 2.2.5. Hemos dicho que podemos pasar suavemente de un entorno coordinado a otro, por lo que es natural preguntarse cómo cambia la base de $T_p S$ cuando uno cambia la parametrización. Dada una superficie regular S , consideremos dos cartas locales, (U, φ) y $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$, tales que $p \in \varphi(U) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{U})$. Sea $w \in T_p S$ tal que en las bases asociadas a φ y $\tilde{\varphi}$,

$$w = \alpha_1 \varphi_u + \alpha_2 \varphi_v \quad \text{y} \quad w = \beta_1 \tilde{\varphi}_{\tilde{u}} + \beta_2 \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}.$$

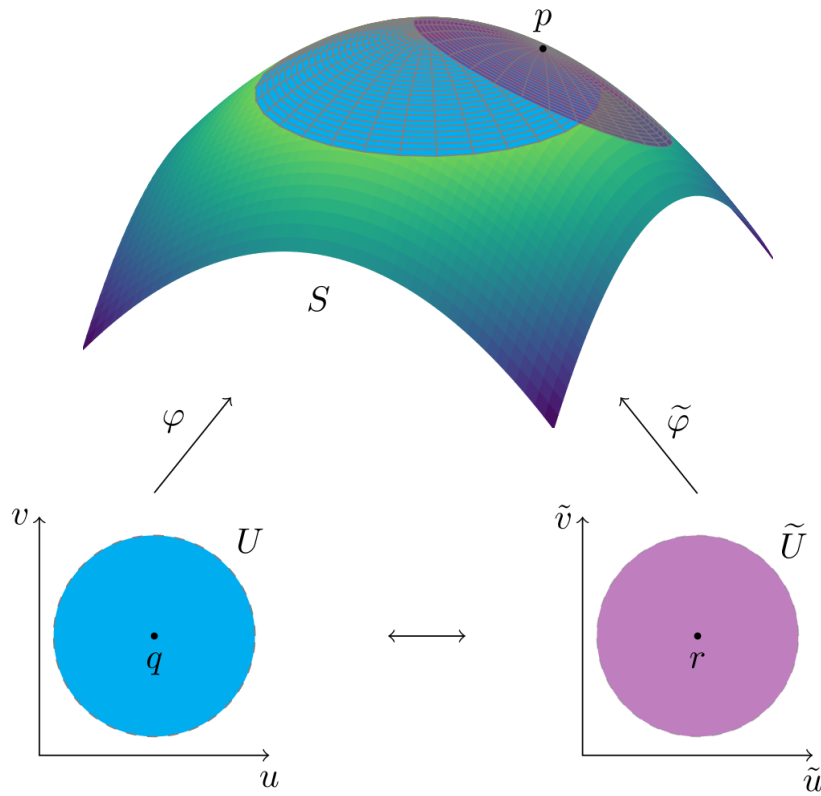


Figura 2.9: Las cartas involucradas en el cambio de coordenadas.

Entonces, las coordenadas de w están relacionadas por

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \\ \beta_2 &= \alpha_1 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v}\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde $\tilde{u} = \tilde{u}(u, v)$ y $\tilde{v} = \tilde{v}(u, v)$ son las expresiones del cambio de coordenadas.

Ejercicio 2.2.6. Probar lo afirmado en la observación anterior.

Ejemplo 2.2.7. Volviendo al Ejemplo 2.2.4, consideremos otra parametrización local de S alrededor de $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dada por $\tilde{\varphi} : (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, +\infty) \rightarrow S$,

$$\tilde{\varphi}(\tilde{u}, \tilde{v}) := (\tilde{v} \cos \tilde{u}, \tilde{v} \sin \tilde{u}, \tilde{v}^2).$$

Entonces, $\tilde{\varphi}(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = p$,

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} = (-\tilde{v} \sin \tilde{u}, \tilde{v} \cos \tilde{u}, 0), \quad \tilde{\varphi}_{\tilde{v}} = (\cos \tilde{u}, \sin \tilde{u}, 2\tilde{v})$$

y, evaluando en $\tilde{q} := (\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}})$,

$$T_p S = \text{span} \left\{ \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \right) \right\} = \text{span}\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\},$$

donde la última igualdad se debe a los cálculos realizados en el Ejemplo 2.2.4.

Sea $w := \varphi_u(q) + \varphi_v(q) = (1, 1, 2) \in T_p S$. Para calcular sus coordenadas en la nueva base, veamos primero la función cambio de coordenadas.

Como $\tilde{\varphi}^{-1}(x, y, z) = (\arctan(y/x), \sqrt{z})$,

$$(\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi)(u, v) = (\underbrace{\arctan(v/u)}_{\tilde{u}(u,v)}, \underbrace{\sqrt{u^2 + v^2}}_{\tilde{v}(u,v)}).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} &= \frac{1}{1 + (\frac{v}{u})^2} v \left(-\frac{1}{u^2} \right) = -\frac{v}{u^2 + v^2} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} &= \frac{1}{1 + (\frac{v}{u})^2} \frac{1}{u} = \frac{u}{u^2 + v^2} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} 2u = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} &= \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}. \end{aligned}$$

Evaluando en $q = (u, v) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, tenemos que los coeficientes β_1 y β_2 de (2.1) están dados por

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u}(q) + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}(q) = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 0 \\ \beta_2 &= \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u}(q) + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v}(q) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$w = \varphi_u(q) + \varphi_v(q) = \sqrt{2} \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}(\tilde{q}).$$

2.3 Funciones suaves sobre superficies

Ya hemos analizado la noción de función suave definida sobre subconjuntos de \mathbb{R}^n (no necesariamente abiertos). Si aplicamos esas ideas a nuestro contexto de superficies, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.3.1. Sea S una superficie regular. Una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ es **suave** si para todo $p \in S$ existen un entorno abierto W de p en \mathbb{R}^3 y una función $\tilde{f} : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ suave tal que $f|_{W \cap S} = \tilde{f}|_{W \cap S}$.

La definición anterior hace fuerte uso de que $S \subset \mathbb{R}^3$, por lo que sería útil tener una alternativa que pueda generalizarse a objetos que no sean subconjuntos de \mathbb{R}^n .

Definición 2.3.2. Sea S una superficie regular.

- * $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ es **suave en** $p \in S$ si existen un abierto relativo V en S tal que $p \in V$ y una carta (U, φ) de S en p tal que $\varphi(U) \subset V$ y $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es suave en $q = \varphi^{-1}(p)$.
- * Si $V \subset S$ es un abierto relativo, se dice que f es **suave en** V si es suave en p , para todo $p \in V$. En particular, se dice que $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ es **suave** si es suave para cada $p \in S$.

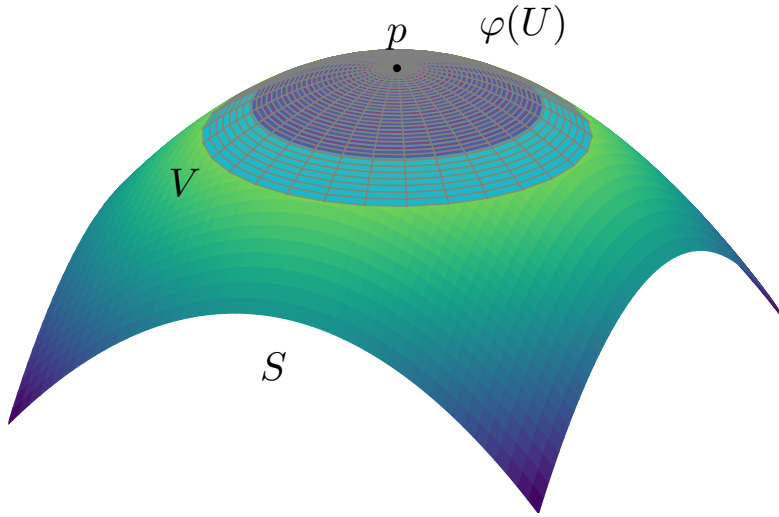


Figura 2.10: Los abiertos involucrados en la definición de función suave.

Antes de continuar, debemos asegurarnos que estas dos nociones de suavidad efectivamente capturan la misma idea.

Proposición 2.3.3. *Las definiciones 2.3.1 y 2.3.2 son equivalentes.*

Demostración.

\Rightarrow Supongamos que es válida la Definición 2.3.1.

Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ suave en $p \in S$. Entonces, existen $W \subset \mathbb{R}^3$ abierto tal que $p \in W$ y $\tilde{f} : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ suave con $f = \tilde{f}$ en $W \cap S$. Es decir, existe $V = W \cap S$ abierto relativo en S tal que $p \in V$.

Para definir una parametrización local de S en p que cumpla con la Definición 2.3.2 comenzamos notando que, como S es una superficie regular, por la Proposición 2.1.13, S es localmente el gráfico de una función suave alrededor de p . Supongamos que tal función es de la forma $z = h(x, y)$, de modo que existen $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ y $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^3$ abiertos tales que $p \in \tilde{V}$ y $S \cap \tilde{V} = \text{gr}(h)$.

Sea $\varphi : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\varphi(u, v) = (u, v, h(u, v)).$$

Es claro que $\varphi(\tilde{U}) = S \cap \tilde{V}$. Considerando $U = \tilde{U} \cap \varphi^{-1}(W)$, $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ coincide con $\tilde{f} \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Por lo tanto, $f \circ \varphi$ es suave en $q = \varphi^{-1}(p)$ y $\varphi(U) = \varphi(\tilde{U}) \cap W = S \cap \tilde{V} \cap W \subset V$.

\Leftarrow Recíprocamente, supongamos que es válida la Definición 2.3.2.

Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ suave en $p \in S$. Entonces, existen un abierto relativo V en S tal que $p \in V$ y una carta (U, φ) de S en p tal que $\varphi(U) \subset V$ y $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es suave en $q = \varphi^{-1}(p)$. Luego, existe $W \subset \mathbb{R}^3$ abierto tal que $V = W \cap S$.

Localmente, S coincide con el gráfico de una función suave $h : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ con $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ abierto, por lo que podemos considerar otra parametrización dada, sin pérdida de generalidad, por $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\tilde{\varphi}(u, v) = (u, v, h(u, v))$.

Es claro que $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ es otra parametrización de S en p y $f \circ \tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ es suave ya que $f \circ \tilde{\varphi} = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})$. Además, $\tilde{\varphi}^{-1} = \text{pr}_{xy} |_{\tilde{\varphi}(\tilde{U})}$, por lo que $\tilde{\varphi}^{-1}$ es suave.

Finalmente, la función $\tilde{f} : \tilde{W} \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $\tilde{f} = (f \circ \tilde{\varphi}) \circ \text{pr}_{xy} |_{\tilde{W}}$, donde $\tilde{W} \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto tal que $\tilde{W} \cap S = \tilde{\varphi}(\tilde{U})$, resulta suave y coincide con f sobre $\tilde{W} \cap S$. \clubsuit

Observación 2.3.4. La Definición 2.3.2 de suavidad en un punto es independiente de la elección de la carta.

Sean (U, φ) y $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ dos cartas de S en p . Si $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es suave, entonces $f \circ \tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ es suave ya que

$$f \circ \tilde{\varphi} = f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

donde $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi} : \tilde{\varphi}^{-1}(V) \rightarrow \varphi^{-1}(V) \subset U$ son suaves.

Para funciones suaves definidas sobre una superficie regular cuya imagen está contenida en otra superficie regular, es natural la siguiente definición.

Definición 2.3.5. Sean S_1 y S_2 superficies regulares y $f : S_1 \rightarrow S_2$. Se dice que f es **suave** en $p \in S_1$ si existen dos cartas (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) de S_1 y S_2 en p y $f(p)$, respectivamente, tales que $f(\varphi_1(U_1)) \subset \varphi_2(U_2)$ y $\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1 : U_1 \rightarrow U_2$ es suave en $q = \varphi_1^{-1}(p)$.

Se dice que $f : S_1 \rightarrow S_2$ es un **difeomorfismo** si es suave y admite inversa $f^{-1} : S_2 \rightarrow S_1$ suave.

Ejercicio 2.3.6. Probar que esta definición es independiente de las parametrizaciones elegidas.

Ejemplo 2.3.7. Sean $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, S una superficie regular con $p \in S$ y $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $h(p) := \langle v, p \rangle$. Dada una carta local (U, φ) alrededor de un punto $p \in S$, con $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, la composición $h \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$(h \circ \varphi)(u, v) = \langle v, \varphi(u, v) \rangle = w_1 x(u, v) + w_2 y(u, v) + w_3 z(u, v),$$

que es claramente una función suave, ya que las funciones coordenadas de φ lo son.

Ejercicio 2.3.8. Probar que si S es una superficie de revolución, la función $R_{z, \theta} : S \rightarrow S$ dada por la rotación de un ángulo θ alrededor del eje z es una función suave.

2.4 Diferencial de funciones suaves

El diferencial de una función suave definida en un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n es una herramienta fundamental en el estudio de sus propiedades locales. Luego, es natural preguntarse si existe una noción análoga para el caso en que el dominio de la función sea una superficie regular.

Definición 2.4.1. Sean S una superficie regular, $p \in S$ y $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función suave en p . El **diferencial de f en p** es la transformación lineal $df_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida como $df_p(v) = (f \circ \gamma)'(0)$ donde $v \in T_p S$ es tal que $v = \gamma'(0)$ siendo $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una curva suave en S tal que $\gamma(0) = p$.

Si $f : S_1 \rightarrow S_2$ es una función suave entre superficies regulares, dado que $S_2 \subset \mathbb{R}^3$, para cada $p \in S_1$, se puede considerar $df_p : T_p S_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Sin embargo, de la definición de diferencial se tiene que $df_p(v) \in T_p S_2$ para todo $v \in T_p S_1$, lo que implica que $df_p : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$.

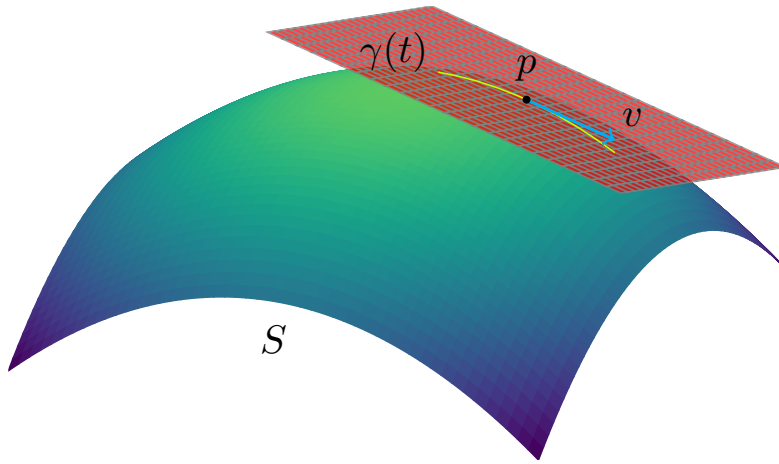


Figura 2.11: La curva $\gamma(t)$ en la superficie regular S tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$.

Observación 2.4.2. La aplicación df_p está bien definida y es una transformación lineal.

En efecto, para demostrar la buena definición debe verificarse que dicha definición no depende de la curva γ . Como f es una función suave en p , existen $W \subset \mathbb{R}^3$ abierto y una función suave $\tilde{f} : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ tales que $p \in W$ y $f = \tilde{f}|_{W \cap S}$.

Dado $v \in \mathbb{R}^3$, $d\tilde{f}_p(v) = (\tilde{f} \circ \gamma)'(0)$ con $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$.

Luego, si $v \in T_p S$ se puede considerar una curva regular $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$. Para t lo suficientemente pequeño $\gamma(t) \in W$ y entonces f y \tilde{f} coinciden sobre la traza de γ ,

$$d\tilde{f}_p(v) = (\tilde{f} \circ \gamma)'(0) = (f \circ \gamma)'(0) = df_p(v).$$

Por lo tanto, df_p es la restricción de $d\tilde{f}_p$ al dominio $T_p S$, lo que implica que es una transformación lineal con dominio $T_p S$.

Notar que para todo $v \in T_p S$, $df_p(v) = J\tilde{f}(p) \cdot v$, donde $J\tilde{f}(p)$ denota la matriz Jacobiana de \tilde{f} en el punto p . Así se observa, por un lado, cómo se puede calcular esta transformación y, por otro, que solo depende de v .

Ejercicio 2.4.3. Sean V un abierto relativo de una superficie regular S y $p \in V$. Pensando a V como superficie regular, probar que $T_p V = T_p S$ y observar que si $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función suave, las aplicaciones $df_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $df_p : T_p V \rightarrow \mathbb{R}^m$ coinciden.

Ejemplo 2.4.4.

1. Sean $v \in \mathbb{R}^3$, S una superficie regular, $p \in S$ y $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ la función suave definida por $h(p) := \langle v, p \rangle$. Para hallar la expresión de la aplicación $dh_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ se considera $w \in T_p S$; es decir, $w = \gamma'(0)$ siendo $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\gamma(0) = p$. Luego,

$$dh_p(w) = \left. \frac{d}{dt} h(\gamma(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \langle v, \gamma(t) \rangle \right|_{t=0} = \langle v, \gamma'(0) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

En este caso, $\tilde{h} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ podría ser la función lineal $\tilde{h}(p) := \langle p, v \rangle$, de modo que $d\tilde{h} = \tilde{h}$.

Dado que h y \tilde{h} coinciden sobre S , dh_p y $d\tilde{h}_p$ coinciden sobre $T_p S$.

2. Sean $S = S^2 \subset \mathbb{R}^3$, $R_{z,\theta} : S^2 \rightarrow S^2$ la rotación de ángulo θ alrededor del eje z y $p \in S^2$. Para hallar $(dR_{z,\theta})_p : T_p S^2 \rightarrow T_{R_{z,\theta}(p)} S^2$ se considera $w \in T_p S^2$; es decir, $w = \gamma'(0)$ siendo $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S^2$ tal que $\gamma(0) = p$. Luego, si $R_{z,\theta}$ está dada por multiplicar a izquierda por una matriz de rotación $[R_{z,\theta}] \in \text{SO}(3)$,

$$(dR_{z,\theta})_p(w) = \left. \frac{d}{dt} R_{z,\theta}(\gamma(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} [R_{z,\theta}] \gamma(t) \right|_{t=0} = [R_{z,\theta}] \gamma'(0) = R_{z,\theta}(w).$$

Dado que df_p es una transformación lineal entre subespacios de dimensión 2, se puede obtener su representación matricial al considerar bases de los espacios $T_p S_1$ y $T_p S_2$.

Sean (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) parametrizaciones de S_1 y S_2 , respectivamente. Se consideran las bases $\mathcal{B}_1 = \{(\varphi_1)_u(q), (\varphi_1)_v(q)\}$ de $T_p S_1$ y $\mathcal{B}_2 = \{(\varphi_2)_{\bar{u}}(r), (\varphi_2)_{\bar{v}}(r)\}$ de $T_{f(p)} S_2$ con $q = \varphi_1^{-1}(p)$ y $r = \varphi_2^{-1}(f(p))$.

Para calcular $[df_p]_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2}$ notemos que si $v = \gamma'(0)$, para una curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_1$,

$$df_p(v) = (f \circ \gamma)'(0) = (\varphi_2 \circ (\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1) \circ \varphi_1^{-1} \circ \gamma)'(0) = (\varphi_2 \circ \hat{f} \circ \beta)'(0),$$

donde $\hat{f} := \varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1$ y $\beta := \varphi_1^{-1} \circ \gamma$.

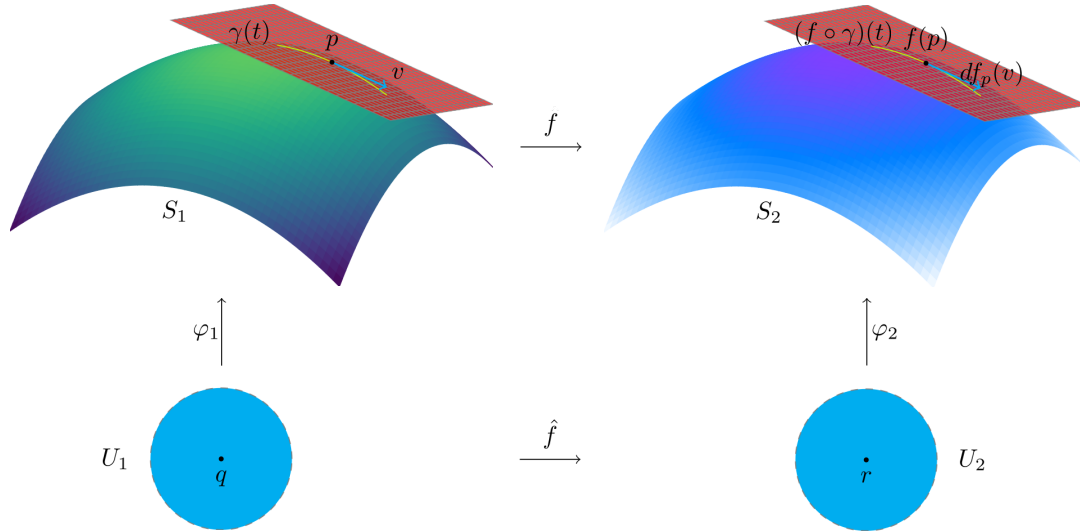


Figura 2.12: Esquema de las parametrizaciones locales involucradas.

Luego,

$$(\varphi_2 \circ \hat{f} \circ \beta)'(0) = (d(\varphi_2)_r \circ d\hat{f}_q)(\beta'(0)) = ((\varphi_2)_{\bar{u}}(r) \ (\varphi_2)_{\bar{v}}(r)) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta'_1(0) \\ \beta'_2(0) \end{pmatrix},$$

siendo $\hat{f}(u, v) = (\hat{f}_1(u, v), \hat{f}_2(u, v))$,

$$\begin{aligned} a &= (\hat{f}_1)_u(q), & b &= (\hat{f}_1)_v(q), \\ c &= (\hat{f}_2)_u(q), & d &= (\hat{f}_2)_v(q) \end{aligned}$$

y $\gamma(t) = \varphi_1(\beta(t)) = \varphi_1(\beta_1(t), \beta_2(t))$.

Luego, tomando como $v = (\varphi_1)_u(q)$, el primer elemento de la base \mathcal{B}_1 , tenemos que $\beta(t) = (u_0 + t, v_0)$, por lo que $\beta'_1(0) = 1$ y $\beta'_2(0) = 0$, lo que implica que

$$\begin{aligned} df_p((\varphi_1)_u(q)) &= ((\varphi_2)_{\tilde{u}}(r) \ (\varphi_2)_{\tilde{v}}(r)) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = ((\varphi_2)_{\tilde{u}}(r) \ (\varphi_2)_{\tilde{v}}(r)) \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \\ &= a(\varphi_2)_{\tilde{u}}(r) + c(\varphi_2)_{\tilde{v}}(r). \end{aligned}$$

Análogamente, se tiene que

$$\begin{aligned} df_p((\varphi_1)_v(q)) &= ((\varphi_2)_{\tilde{u}}(r) \ (\varphi_2)_{\tilde{v}}(r)) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = ((\varphi_2)_{\tilde{u}}(r) \ (\varphi_2)_{\tilde{v}}(r)) \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\ &= b(\varphi_2)_{\tilde{u}}(r) + d(\varphi_2)_{\tilde{v}}(r). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$[df_p]_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = [d\hat{f}_q]_{\mathcal{B}_c}.$$

Ejercicio 2.4.5. Enunciar y probar la regla de la cadena para funciones suaves entre superficies regulares.

A continuación enunciamos y demostramos el teorema de la función inversa entre superficies regulares.

Teorema 2.4.6 (Teorema de la función inversa entre superficies). *Sean S_1 y S_2 superficies regulares y $f : S_1 \rightarrow S_2$ una función suave. Dado $p \in S_1$, si $df_p : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$ es invertible, entonces f restringida a un entorno de p lo suficientemente pequeño es un difeomorfismo sobre su imagen, que es un entorno de $f(p) \in S_2$. Es decir, existen entornos $O_1 \subset S_1$ y $O_2 \subset S_2$ de p y $f(p)$, respectivamente, tales que $f|_{O_1} : O_1 \rightarrow O_2$ es un difeomorfismo.*

Demostración. Sean $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ y $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ cartas locales de S_1 y S_2 en p y $f(p)$ respectivamente, tales que $f(V_1) \subset V_2$.

Sea $\hat{f} = \varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1 : U_1 \rightarrow U_2$ y sea $q = \varphi_1^{-1}(p)$. Luego, aplicando la regla de la cadena se tiene que

$$d\hat{f}_q = d\varphi_2^{-1}_{f(p)} \circ df_p \circ d\varphi_{1q}.$$

Observemos que $d\varphi_{1q} : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p S_1$ es invertible porque tiene rango máximo, df_p es invertible por hipótesis y $d\varphi_2^{-1}_{f(p)} : T_{f(p)} S_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es invertible ya que es $(d\varphi_{2 f(p)})^{-1}$ y la aplicación $d\varphi_{2 f(p)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{f(p)} S_2$ es invertible.

Por lo tanto, $d\hat{f}_q$ es una transformación lineal entre subespacios de dimensión 2 que es invertible. Por el Teorema de la función inversa, existen \hat{U}_1 y \hat{U}_2 abiertos tales que $p \in \hat{U}_1 \subset U_1$, $\hat{f}(p) \in \hat{U}_2 \subset U_2$ y $\hat{f} : \hat{U}_1 \rightarrow \hat{U}_2$ es un difeomorfismo. Entonces, al considerar $V_1 = \varphi_1(\hat{U}_1)$ y $V_2 = \varphi_2(\hat{U}_2)$, $f = \varphi_2 \circ \hat{f} \circ \varphi_1^{-1} : V_1 \rightarrow V_2$ es un difeomorfismo. ♣

Ejercicio 2.4.7. Probar que si $f : S_1 \rightarrow S_2$ es un difeomorfismo entre superficies regulares, entonces $df_p : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$ es un isomorfismo para todo $p \in S_1$.

2.5 Superficies orientables

Notemos que en todas las superficies que hemos estudiado hasta ahora se pueden distinguir dos “caras”. Si bien esto es cierto en muchos ejemplos, existen superficies regulares que no poseen esta característica. En lo que sigue, haremos precisas estas ideas, a partir de la noción de “orientabilidad”.

Definición 2.5.1. Un **vector normal a S en p** es un vector de \mathbb{R}^3 ortogonal a $T_p S$. Es decir, $N \in \mathbb{R}^3$ es normal a S en p si $\langle N, v \rangle = 0$, $\forall v \in T_p S$.

Una **orientación de $T_p S$** es un vector normal unitario a S en p .

Observación 2.5.2. Si (U, φ) es una carta local de S en p y $q = \varphi^{-1}(p)$, entonces $T_p S = \text{span}\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$ y por lo tanto el vector unitario

$$N(p) := \frac{\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)}{\|\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)\|}$$

es ortogonal a $T_p S$. De este modo, $N(p)$ es una orientación de $T_p S$ y $-N(p)$ es otra orientación de $T_p S$. Para obtener $-N(p)$ en lugar de $N(p)$ basta con considerar la parametrización donde se intercambian u y v .

Es claro que mover el punto $q \in U$ en la expresión

$$\frac{\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)}{\|\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)\|}$$

define un vector normal a S en todos los puntos p de $\varphi(U)$. Es decir, $N(p)$ define un “campo” de vectores normales sobre V .

Definición 2.5.3. Un **campo vectorial sobre una superficie regular S** es una función suave $v : S \rightarrow \mathbb{R}^3$. Se llama **campo tangente** si $v(p) \in T_p S$ para todo $p \in S$ y se llama **campo normal** si $v(p)$ es normal a S en p para todo $p \in S$.

Definición 2.5.4. Una **orientación para una superficie regular S** es un campo vectorial normal unitario sobre S .

Una superficie regular se dice **orientable** si existe una orientación sobre ella. Una **superficie orientada** es una superficie orientable junto con la elección de una orientación sobre ella.

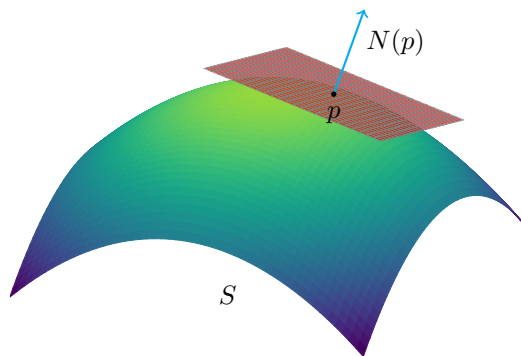


Figura 2.13: El vector normal a una superficie S en el punto p . Notar que en esta imagen estamos dibujando $N(p)$ apoyado en el punto p en vez de en el origen.

Observación 2.5.5. Notar que ser orientable es una característica global de la superficie. La construcción de la Observación 2.5.2 define un normal unitario N de manera local: solo lo hace para el entorno coordinado. Sin embargo, para que la superficie S sea orientable, el campo debe estar definido en todo S .

Ejemplo 2.5.6. A continuación se analizan distintos ejemplos de superficies orientables.

1. Un plano: Sean $x, y \in \mathbb{R}^3$ vectores linealmente independientes. El conjunto $S = \text{span}\{x, y\}$ es una superficie regular que admite una carta global $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ dada por $\varphi(u, v) := ux + vy$. Luego, para todo $p \in S$, $\varphi_u = x$ y $\varphi_v = y$ generan $T_p S$ y se observa que $T_p S = S$. Además,

$$N(p) := \frac{x \times y}{\|x \times y\|}$$

define un campo normal unitario “global” sobre S .

2. La esfera S^2 : Sea $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Para mostrar que S^2 es orientable se puede considerar la función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ y se observa que $S = f^{-1}(\{1\})$ siendo 1 un valor regular de f .

Luego, $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) = 2(x, y, z)$ y

$$N(p) = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|} = \frac{2p}{2} = p,$$

lo que implica que $N : S^2 \rightarrow S^2$ dada por $N(p) = p$ define una orientación para S^2 .

3. El conjunto de nivel de una función suave: Sean $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave, λ un valor regular de f y $S = f^{-1}(\{\lambda\})$. Luego, para todo $p \in S$, $\nabla f(p) \neq 0$ y

$$N(p) := \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$$

es un campo normal unitario “global” sobre S . En efecto, si se considera $v \in T_p S$, $v = \gamma'(0)$ con $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\gamma(0) = p$, se tiene que

$$\langle \nabla f(p), v \rangle = df_p(v) = df_p(\gamma'(0)) = \left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \lambda \right|_{t=0} = 0.$$

4. El gráfico de una función suave: Sean $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave en un abierto U y $S := \text{gr}(f)$. Notar que $\varphi : U \rightarrow S$ dada por $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ es una parametrización global de S . Luego, como $\varphi_x = (1, 0, f_x)$ y $\varphi_y = (0, 1, f_y)$, si $q = (x, y)$,

$$N(x, y, z) = \frac{\varphi_x(q) \times \varphi_y(q)}{\|\varphi_x(q) \times \varphi_y(q)\|} = \frac{(-f_x(q), -f_y(q), 1)}{\sqrt{1 + f_x^2(q) + f_y^2(q)}}.$$

Ejercicio 2.5.7. Probar que toda superficie de revolución es orientable.

El hecho de que todas las superficies orientables que hemos considerado hasta ahora admitan solamente dos orientaciones es consecuencia de una característica topológica que poseen llamada conexidad.

Una superficie regular S se dice **conexa**¹ si cualquier par de puntos de S pueden ser unidos por una curva continua contenida en S .

Ejercicio 2.5.8. Probar que si $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua que no se anula nunca definida sobre una superficie regular conexa S , entonces f no cambia de signo.

Lema 2.5.9. Si S es una superficie regular conexa y orientable entonces tiene exactamente dos orientaciones. Además, dichas orientaciones son opuestas entre sí.

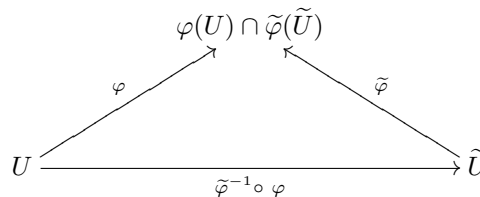
Demostración. Dado que S es orientable, existe un campo normal unitario $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ y es claro que $-N$ es otra orientación para S .

Para ver que estas dos orientaciones son únicas, se supone que existe otra orientación $M : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $M(p)$ vector normal unitario en $p \in S$.

Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(p) := \langle N(p), M(p) \rangle$. Para cualquier $p \in S$, el complemento ortogonal de $T_p S$ tiene dimensión 1, por lo que $N(p)$ y $M(p)$ son, o bien el mismo vector, o bien difieren en el signo. En términos de la función f , $f(p) = 1$ ó $f(p) = -1$, lo que implica que f es constante, por el Ejercicio 2.5.8. Por lo tanto, $M(p) = N(p)$ ó $M(p) = -N(p)$, como se quería probar. ♣

La definición de orientabilidad a partir de un campo normal unitario suave es muy intuitiva pero presenta un problema: solo podría generalizarse a objetos en \mathbb{R}^n de codimensión 1 (donde el complemento ortogonal al espacio tangente seguiría teniendo dimensión 1). Por otro lado, la noción de campo normal hace referencia al espacio ambiente en el que vive la superficie (\mathbb{R}^3 , en este caso). Sería útil, entonces, poder definir orientabilidad usando conceptos que solo hagan referencia a la superficie, los que llamaríamos “intrínsecos”. A esto dedicamos la última parte de este capítulo.

Sean (U, φ) y $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ dos cartas locales de S en p . Así, $\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$ y $\{\tilde{\varphi}_{\tilde{u}}(r), \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}(r)\}$ son dos bases de $T_p S$ con $\varphi(q) = p = \tilde{\varphi}(r)$.



Recordando la ecuación (2.1),

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} = \varphi_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \varphi_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \quad \text{y} \quad \tilde{\varphi}_{\tilde{v}} = \varphi_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \varphi_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}},$$

de modo que la matriz cambio de base está dada por

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix}.$$

¹En realidad, esta definición es la de **conexa por caminos**, pero ambas nociones coinciden en el caso de una superficie regular.

Luego,

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}} = \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} - \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \right) \varphi_u \times \varphi_v,$$

lo que implica que

$$\tilde{N}(p) = \frac{\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}}{\|\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}\|} = \frac{\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})} \varphi_u \times \varphi_v}{\left| \det \frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})} \right| \|\varphi_u \times \varphi_v\|}.$$

Por lo tanto, se concluye que si $\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})} > 0$ entonces $N(p) = \tilde{N}(p)$ y si $\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})} < 0$ entonces $N(p) = -\tilde{N}(p)$. Notar que el determinante no puede ser nulo porque el cambio de coordenadas es un difeomorfismo.

Proposición 2.5.10. *Una superficie regular S es orientable si y solo si es posible cubrirla con una familia de cartas locales de modo tal que si $p \in S$ pertenece a dos entornos coordenados de esta familia, entonces el cambio de coordenadas tiene Jacobiano positivo en p .*

En tal caso, se dice que la familia es la elección de una orientación en S .

Demostración.

\Rightarrow Sea $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de vectores normales unitarios en S y $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ una familia de entornos coordenados que cubren S y que supondremos conexos, sin pérdida de generalidad. Es decir, $S = \bigcup_\alpha V_\alpha$, donde $V_\alpha := \varphi_\alpha(U_\alpha)$, y para cada $p \in S$, existe α tal que $p \in V_\alpha$, con V_α conexo.

La estrategia es la siguiente: para cada carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ de la familia, verificamos si el campo normal que induce en V_α coincide con $N|_{V_\alpha}$ y, si no lo hace, mostramos que puede modificarse la carta para obtener una que sí coincida. Luego, verificamos que una vez hechas esas modificaciones la familia de cartas resultante satisface lo pedido (el Jacobiano del cambio de coordenadas es positivo).

Sea $p \in \varphi(U_\alpha)$. Entonces $N(p) = \pm \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}(q)$ con $q = \varphi^{-1}(p)$.

Supongamos que $N(p) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}(q)$ (en caso contrario se intercambia u por v) y definamos una función suave $f : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(\hat{p}) := \left\langle N(\hat{p}), \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}(\hat{q}) \right\rangle \quad \text{donde } \varphi(\hat{q}) = \hat{p}.$$

Razonando como hacíamos antes del enunciado de la proposición, es claro que $f(\hat{p}) = 1$ o $f(\hat{p}) = -1$. Pero como $f(p) = 1$ y $\varphi(U)$ es conexo, tenemos que $f|_{\varphi(U)} \equiv 1$.

Si $p \in \tilde{\varphi}(\tilde{U})$, se define $\tilde{f} : \tilde{\varphi}(\tilde{U}) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\tilde{f}(\hat{p}) = \left\langle N(\hat{p}), \frac{\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}}{\|\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}\|}(\hat{\tilde{q}}) \right\rangle \quad \text{donde } \tilde{\varphi}(\hat{\tilde{q}}) = \hat{p}.$$

De manera análoga a lo que sucede para f , en este caso es claro que $\tilde{f}(\hat{p}) = 1$ o $\tilde{f}(\hat{p}) = -1$. Como antes, suponemos que $N(p) = \frac{\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}}{\|\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}\|}(\hat{\tilde{q}})$ (ya que en caso contrario se intercambia \tilde{u} por \tilde{v}).

Entonces, $\tilde{f}(\hat{p}) = 1$ y $\tilde{f}|_{\tilde{\varphi}(\tilde{U})} \equiv 1$.

Luego, si $\hat{p} \in \varphi(U) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{U})$, $f(\hat{p}) = 1 = \tilde{f}(\hat{p})$. Es decir,

$$\left\langle N(\hat{p}), \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}(\hat{q}) \right\rangle = \left\langle N(\hat{p}), \frac{\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}}{\|\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}\|}(\tilde{q}) \right\rangle,$$

lo que implica que

$$\frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}(\hat{q}) = \frac{\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}}{\|\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}\|}(\tilde{q})$$

y, por lo tanto, $\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})} > 0$.

⇐ Necesitamos definir un campo normal unitario $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$. Sabemos por la Observación 2.5.2 que a partir de la familia $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ podemos definirlo localmente. Es decir, dado $p \in S$, sea (U, φ) una carta de la familia tal que $p \in \varphi(U)$ y definimos para cada $\hat{p} \in \varphi(U)$, $N(\hat{p}) := \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}(\hat{q})$, donde $\varphi(\hat{q}) = \hat{p}$. Notar que N es suave y define un campo normal unitario en $\varphi(U)$.

El único problema con definir N de esta manera es que podría estar mal definido en la intersección de dos entornos coordinados. Sin embargo, por la condición de que el Jacobiano del cambio de cartas es positivo, esto no sucede. En efecto, para verificar que N está bien definido globalmente, se considera $p \in \varphi(U) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{U})$ y $\tilde{N}(\hat{p}) = \frac{\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}}{\|\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}\|}(\tilde{q})$ con $\tilde{\varphi}(\tilde{q}) = \hat{p}$. Luego,

$$\tilde{N}(\hat{p}) = \underbrace{\frac{\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}}{\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}}}_{=1} \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}(\hat{q}) = N(\hat{p}).$$

♣

Terminamos este capítulo con el que es probablemente el ejemplo más famoso de superficie no orientable.

La *cinta de Möbius*² es la superficie regular que puede cubrirse con las dos cartas (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) dadas por $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2$, donde

$$\begin{aligned} \varphi_i(u, v) &:= (2 \sin u, 2 \cos u, 0) + v(0, \sin(u/2), \cos(u/2)), \\ U_1 &:= (-\pi, \pi) \times (-1, 1) \quad \text{y} \quad U_2 := \left(\frac{\pi}{5}, \frac{5\pi}{2}\right) \times (-1, 1). \end{aligned}$$

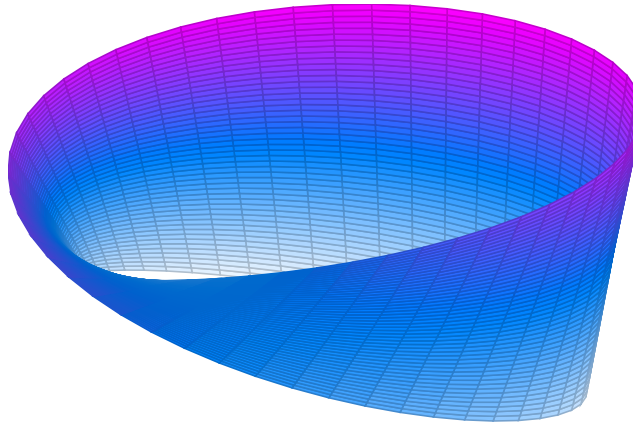


Figura 2.14: La cinta de Möbius.

²Descubierta de forma independiente y casi simultáneamente por los matemáticos alemanes A. F. Möbius (1790–1868) y J. B. Listing (1808–1882) a mediados del siglo XIX.

Ejercicio 2.5.11. Sean S_1, S_2 y M superficies regulares tales que $M = S_1 \cup S_2$.

1. Probar que si S_1 y S_2 son orientables y $S_1 \cap S_2$ es conexa, entonces M es orientable.
2. Demostrar que si S_1 y S_2 son conexas y están orientadas mediante N_1 y N_2 de modo que existen dos puntos $p, q \in S_1 \cap S_2$ tales que $N_1(p) = N_2(p)$ y $N_1(q) \neq N_2(q)$, entonces M no es orientable.

Ejercicio 2.5.12. Mostrar que la cinta de Möbius no es orientable.

Observación Final. Así como hemos trabajado con objetos de dimensión 2 contenidos en un espacio ambiente de dimensión 3, cabe mencionar que se pueden definir y tratar de manera análoga a objetos de dimensión n contenidos en \mathbb{R}^{n+1} . Esto da lugar a la idea de hipersuperficie. Más detalles pueden encontrarse en [Tho79] y [Lee09].

Ejercicios

Ejercicios ya propuestos:

Ejercicio 2.1.11. Probar que si V es un abierto relativo de una superficie regular S , entonces V es una superficie regular.

Ejercicio 2.1.14. Mostrar que el cono de dos hojas con vértice en el origen $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ no es una superficie regular.

Ejercicio 2.1.19. Probar que las superficies de revolución son superficies regulares.

Ejercicio 2.2.6. Sea S una superficie regular y consideremos dos cartas locales (U, φ) y $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ tales que $p \in \varphi(U) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{U})$. Sea $w \in T_p S$ tal que en las bases asociadas a φ y $\tilde{\varphi}$,

$$w = \alpha_1 \varphi_u + \alpha_2 \varphi_v \quad \text{y} \quad w = \beta_1 \tilde{\varphi}_{\tilde{u}} + \beta_2 \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}$$

Mostrar que las coordenadas de w están relacionadas por

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \\ \beta_2 &= \alpha_1 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \end{aligned}$$

donde $\tilde{u} = \tilde{u}(u, v)$ y $\tilde{v} = \tilde{v}(u, v)$ son las expresiones del cambio de coordenadas.

Ejercicio 2.3.6. Probar que la definición de función suave entre superficies regulares es independiente de las parametrizaciones elegidas.

Ejercicio 2.3.8. Probar que si S es una superficie de revolución, la función $R_{z, \theta} : S \rightarrow S$ dada por la rotación de un ángulo θ alrededor del eje z es una función suave.

Ejercicio 2.4.3. Sean V un abierto relativo de una superficie regular S y $p \in V$. Pensando a V como superficie regular, probar que $T_p V = T_p S$ y observar que si $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función suave, las aplicaciones $df_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $df_p : T_p V \rightarrow \mathbb{R}^m$ coinciden.

Ejercicio 2.4.5. Enunciar y probar la regla de la cadena para funciones suaves entre superficies regulares.

Ejercicio 2.4.7. Probar que si $f : S_1 \rightarrow S_2$ es un difeomorfismo entre superficies regulares, entonces $df_p : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$ es un isomorfismo para todo $p \in S_1$.

Ejercicio 2.5.7. Probar que toda superficie de revolución es orientable.

Ejercicio 2.5.8. Probar que si $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua que no se anula nunca definida sobre una superficie regular conexa S , entonces f no cambia de signo.

Ejercicio 2.5.11. Sean S_1, S_2 y M superficies regulares tales que $M = S_1 \cup S_2$.

- (a) Probar que si S_1 y S_2 son orientables y $S_1 \cap S_2$ es conexa, entonces M es orientable.
- (b) Demostrar que si S_1 y S_2 son conexas y están orientadas mediante N_1 y N_2 de modo que existen dos puntos $p, q \in S_1 \cap S_2$ tales que $N_1(p) = N_2(p)$ y $N_1(q) \neq N_2(q)$, entonces M no es orientable.

Ejercicio 2.5.12. Mostrar que la cinta de Möbius no es orientable.

Otros ejercicios:

Ejercicio 2.5.13. Se llama **cilindro** a una superficie engendrada por una recta L que se mueve, conservándose paralela a sí misma, a lo largo de una curva C . Si C está dada por $\mathbf{y}(u)$ y \mathbf{g} es un vector unitario en la dirección de L , entonces el cilindro viene representado por

$$\varphi(u, v) = \mathbf{y}(u) + v\mathbf{g}$$

Las curvas de parámetro u son **traslaciones** de C en la dirección de \mathbf{g} . Las curvas de parámetro v son copias de L y son llamadas **generatrices** del cilindro.

Mostrar que el plano tangente es el mismo en todos los puntos de una generatriz de un cilindro.

Capítulo 3

Cuestiones métricas

En este capítulo vamos a analizar cómo se pueden calcular magnitudes de “ciertos subconjuntos” de una superficie regular tales como longitudes de curvas, ángulos entre curvas y áreas de regiones. Es natural considerar las herramientas propias del espacio euclídeo 3-dimensional en el que están contenidas las superficies regulares, por lo que comenzamos revisando algunas nociones básicas sobre vectores de \mathbb{R}^3 .

Recordemos que el producto interno canónico en \mathbb{R}^3 es la aplicación bilineal y antisimétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

para todo par $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ en \mathbb{R}^3 . A partir de él, uno puede definir la norma de un vector como

$$\|x\|^2 := \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i^2$$

y el ángulo que forman dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^3$ mediante

$$\cos \angle(x, y) := \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}.$$

Por otro lado, el producto $\langle x, y \rangle$ puede expresarse en términos de normas. En efecto, basta con notar que

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, -y \rangle + \langle -y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

Recordemos también que dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^3$ son ortogonales si y solo si $\langle x, y \rangle = 0$ y que el área del paralelogramo R que definen puede calcularse como

$$A(R) = \|x \times y\| = \|x\| \|y\| \sin \angle(x, y) = \sqrt{\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2}.$$

3.1 Primera forma fundamental

Es natural plantearse cómo se pueden definir estos conceptos métricos en una superficie regular. Hemos visto que en el caso Euclídeo basta con tener un producto interno, por lo que parece razonable replicar las ideas a partir de un producto interno definido en cada espacio tangente a la superficie. Una manera natural de hacerlo es notar que como en cada punto el espacio tangente es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 , podemos restringir a él el producto interno canónico.

Sean S una superficie regular y $p \in S$. Para cada par $w_1, w_2 \in T_p S$ podemos definir $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ como el producto interno canónico de w_1 y w_2 en \mathbb{R}^3 . Esto define una forma bilineal antisimétrica

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p S \times T_p S \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Su forma cuadrática asociada está dada por $w \mapsto \|w\|^2 = \langle w, w \rangle_p \geq 0$, para todo $w \in T_p S$.

Definición 3.1.1. La forma cuadrática $I_p : T_p S \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $I_p(w) := \langle w, w \rangle_p$ es llamada *primera forma fundamental* de S en p .

La primera forma fundamental expresa cómo la superficie hereda el producto interno canónico de \mathbb{R}^3 y permite calcular longitudes de curvas, ángulos entre vectores tangentes y áreas de regiones de S .

Dado que en un entorno coordenado tenemos una base de $T_p S$, podemos preguntarnos cómo se expresa I_p en términos de ella.

Sean (U, φ) una carta local de S en p y $w \in T_p S$. Entonces, $w = \gamma'(0)$ para alguna curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$ suave tal que $\gamma(0) = p$. Además, existe una curva $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U$ tal que para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\gamma(t) = \varphi(\beta(t))$.

Si $\beta(t) = (u(t), v(t))$, entonces

$$\gamma'(0) = d\varphi_q(\beta'(0)) = \varphi_u(q)u'(0) + \varphi_v(q)v'(0),$$

donde $p = \varphi(u_0, v_0) = \varphi(q)$. Así,

$$\begin{aligned} I_p(w) &= I_p(\gamma'(0)) = I_p(\varphi_u(q)u'(0) + \varphi_v(q)v'(0)) \\ &= \langle \varphi_u(q)u'(0) + \varphi_v(q)v'(0), \varphi_u(q)u'(0) + \varphi_v(q)v'(0) \rangle_p \\ &= \langle \varphi_u(q)u'(0), \varphi_u(q)u'(0) \rangle_p + \langle \varphi_u(q)u'(0), \varphi_v(q)v'(0) \rangle_p \\ &\quad + \langle \varphi_v(q)v'(0), \varphi_u(q)u'(0) \rangle_p + \langle \varphi_v(q)v'(0), \varphi_v(q)v'(0) \rangle_p \\ &= u'(0)^2 \langle \varphi_u(q), \varphi_u(q) \rangle_p + 2u'(0)v'(0) \langle \varphi_u(q), \varphi_v(q) \rangle_p + v'(0)^2 \langle \varphi_v(q), \varphi_v(q) \rangle_p. \end{aligned}$$

Llamando

$$E(q) = E(u_0, v_0) := \langle \varphi_u(q), \varphi_u(q) \rangle_p$$

$$F(q) = F(u_0, v_0) := \langle \varphi_u(q), \varphi_v(q) \rangle_p$$

$$G(q) = G(u_0, v_0) := \langle \varphi_v(q), \varphi_v(q) \rangle_p,$$

tenemos que

$$I_p(w) = Eu'(0)^2 + 2Fu'(0)v'(0) + Gv'(0)^2.$$

Definición 3.1.2. Los escalares E , F y G son los *coeficientes de la primera forma fundamental* de S en p asociados a la carta (U, φ) .

Observación 3.1.3. Es claro que si p se mueve sobre $\varphi(U)$, E , F y G lo hacen. De esta manera, $E(u, v)$, $F(u, v)$ y $G(u, v)$ son funciones suaves sobre U .

Ejemplo 3.1.4 (Un plano). Consideremos el plano que pasa por $p_0 \in \mathbb{R}^3$ generado por dos vectores linealmente independientes $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ y parametrizado por $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, $\varphi(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2$. Para todo $p \in S$, se tiene que $T_p S = \mathbb{R}^2$ y los coeficientes de la primera forma fundamental están dados por

$$E(u, v) = \langle \varphi_u(q), \varphi_u(q) \rangle_p = \langle w_1, w_1 \rangle_p$$

$$F(u, v) = \langle \varphi_u(q), \varphi_v(q) \rangle_p = \langle w_1, w_2 \rangle_p$$

$$G(u, v) = \langle \varphi_v(q), \varphi_v(q) \rangle_p = \langle w_2, w_2 \rangle_p.$$

Por lo tanto, E , F y G son constantes. Más aún, si w_1 y w_2 son ortonormales, entonces

$$E = G \equiv 1 \text{ y } F \equiv 0.$$

Además, en este caso, si

$$w = \gamma'(0) = u'(0)\varphi_u(q) + v'(0)\varphi_v(q) \in T_p S,$$

para alguna curva $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ tal que $\gamma(0) = p$, entonces se tiene que

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = u'(0)^2 + v'(0)^2.$$

Es decir, $I_p(w)$ es el cuadrado de la norma euclídea del vector $(u'(0), v'(0)) \in \mathbb{R}^2$.

Ejemplo 3.1.5 (Un cilindro). Sea $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, parametrizado localmente mediante $\varphi : U \rightarrow S$ dada por $\varphi(u, v) := (\cos u, \sin u, v)$, $U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$. Entonces,

$$\varphi_u(u, v) = (-\sin u, \cos u, 0), \quad \varphi_v(u, v) = (0, 0, 1).$$

Dado $p \in \varphi(U)$ tenemos

$$E(u, v) = \langle \varphi_u(q), \varphi_u(q) \rangle_p = 1$$

$$F(u, v) = \langle \varphi_u(q), \varphi_v(q) \rangle_p = 0$$

$$G(u, v) = \langle \varphi_v(q), \varphi_v(q) \rangle_p = 1.$$

Por lo tanto, E , F y G son constantes *como en el plano*. Además, al igual que antes, dado $w = u'(0)\varphi_u(q) + v'(0)\varphi_v(q) \in T_p S$, se tiene que

$$I_p(w) = u'(0)^2 + v'(0)^2.$$

Ejemplo 3.1.6 (El helicoides). Consideremos la hélice que es la traza de $\gamma(u) = (\cos u, \sin u, au)$ donde $u \in (0, 2\pi)$ y $a \neq 0$ es una constante. Por cada punto de esta hélice se traza una recta

paralela al plano xy y que corta al eje z . La superficie determinada por estas rectas se llama **helicoides** y se puede parametrizar mediante

$$\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au),$$

con $u \in (0, 2\pi)$ y $v \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\varphi_u(u, v) = (-v \sin u, v \cos u, a) \text{ y } \varphi_v(u, v) = (\cos u, \sin u, 0).$$



Figura 3.1: El helicoides, con la hélice que lo genera en amarillo.

Así,

$$E(u, v) = \langle \varphi_u(q), \varphi_u(q) \rangle_p = v^2 + a^2$$

$$F(u, v) = \langle \varphi_u(q), \varphi_v(q) \rangle_p = 0$$

$$G(u, v) = \langle \varphi_v(q), \varphi_v(q) \rangle_p = 1$$

y dado $w = u'(0)\varphi_u(q) + v'(0)\varphi_v(q) \in T_p S$,

$$I_p(w) = (v^2 + a^2) u'(0)^2 + v'(0)^2.$$

Ejemplo 3.1.7 (El gráfico de una función). Sean $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Su gráfico puede parametrizarse globalmente con $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(u, v) := (u, v, f(u, v))$. Entonces,

$$\varphi_u(u, v) = (1, 0, f_u(u, v)) \text{ y } \varphi_v(u, v) = (0, 1, f_v(u, v)).$$

Así,

$$E(u, v) = \langle \varphi_u(q), \varphi_u(q) \rangle_p = 1 + f_u(u, v)^2$$

$$F(u, v) = \langle \varphi_u(q), \varphi_v(q) \rangle_p = f_u(u, v)f_v(u, v)$$

$$G(u, v) = \langle \varphi_v(q), \varphi_v(q) \rangle_p = 1 + f_v(u, v)^2$$

y dado $w = u'(0)\varphi_u(q) + v'(0)\varphi_v(q) \in T_p S$,

$$I_p(w) = (1 + f_u(u, v)^2)u'(0)^2 + 2f_u(u, v)f_v(u, v)u'(0)v'(0) + (1 + f_v(u, v)^2)v'(0)^2.$$

Ejercicio 3.1.8. Consideremos una superficie de revolución parametrizada por

$$\varphi(u, v) := (\phi(v) \cos(u), \phi(v) \sin(u), \psi(v)),$$

con $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (a, b)$ y $\phi(v) > 0$ para todo v .

Mostrar que los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$E = \phi(v)^2, \quad F = 0, \quad G = \phi'(v)^2 + \psi'(v)^2.$$

Ejercicio 3.1.9. Mostrar que una superficie de revolución siempre puede parametrizarse de modo que los coeficientes de su primera forma fundamental sean

$$E = E(v), \quad F \equiv 0, \quad G \equiv 1.$$

Longitud de arco. Dada una curva regular contenida en una superficie regular $\gamma : I \rightarrow S$, recordemos que su longitud de arco S es la función suave

$$S(t) = \int_0^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau.$$

Como $\gamma'(\tau) \in T_{\gamma(\tau)}S$,

$$\|\gamma'(\tau)\| = \langle \gamma'(\tau), \gamma'(\tau) \rangle_{\gamma(\tau)}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{I_{\gamma(\tau)}(\gamma'(\tau))}.$$

Si $\gamma(\tau) = \varphi(u(\tau), v(\tau))$, entonces

$$\gamma'(\tau) = u'(\tau)\varphi_u + v'(\tau)\varphi_v$$

y, por lo tanto,

$$S(t) = \int_0^t (Eu'(\tau)^2 + 2Fu'(\tau)v'(\tau) + Gv'(\tau)^2)^{\frac{1}{2}} d\tau.$$

Observación 3.1.10. Si S es un plano, por lo visto en el Ejemplo 3.1.4,

$$S(t) = \int_0^t (u'(\tau)^2 + v'(\tau)^2)^{\frac{1}{2}} d\tau.$$

Ángulo entre curvas. Sea θ el ángulo comprendido entre dos curvas regulares $\alpha : I \rightarrow S$ y $\beta : I \rightarrow S$ que se cortan si $t = t_0$ en el punto $p \in S$. Es decir, $\alpha(t_0) = p = \beta(t_0)$ y θ es el ángulo que forman los vectores tangentes $\alpha'(t_0)$ y $\beta'(t_0)$.

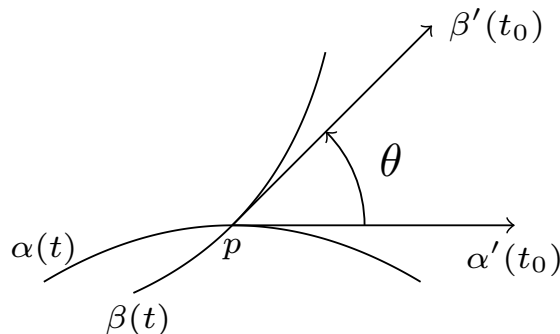


Figura 3.2: El ángulo entre las curvas α y β .

Entonces,

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(t_0)\|} = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{I_p(\alpha'(t_0))^{\frac{1}{2}} I_p(\beta'(t_0))^{\frac{1}{2}}}.$$

Observación 3.1.11. Si α y β son dos curvas coordenadas (es decir, de la forma $\varphi(t, v_0)$ o $\varphi(u_0, t)$ para u_0 y v_0 constantes), entonces $\alpha'(t_0) = \varphi_u$ y $\beta'(t_0) = \varphi_v$, de modo que

$$\cos \theta = \frac{\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle}{\|\varphi_u\| \|\varphi_v\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Es decir, las curvas coordenadas de una parametrización φ son ortogonales si y solo si $F = 0$. En tal caso, se dice que φ es una *parametrización ortogonal*.

Área de regiones. Sean V y V' dos subespacios vectoriales de dimensión 2 en \mathbb{R}^3 y $g : V \rightarrow V'$ una transformación lineal entre ellos. Recordando que la norma del producto vectorial entre dos vectores es igual al área del paralelogramo que generan, parece natural la siguiente definición: si $\{v_1, v_2\}$ es una base de V , se define la *distorsión de área* de g como

$$\|g\| := \frac{\|g(v_1) \times g(v_2)\|}{\|v_1 \times v_2\|}.$$

Notar que lo que estamos diciendo es que la transformación g manda a un paralelogramo de área A en un paralelogramo de área $\|g\|A$.

Puede verse que $\|g\|$ no depende de la base $\{v_1, v_2\}$ y que si \mathcal{B} y \mathcal{B}' son bases ortonormales de V y V' , respectivamente, entonces

$$\|g\| = |\det([g]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'})|.$$

Podemos usar estas ideas para definir el área de una porción de superficie, donde el rol de transformación lineal lo tomará el diferencial de una función.

Definición 3.1.12. Un *dominio regular* de una superficie regular S es un subconjunto abierto y conexo de S tal que su borde es la imagen de una circunferencia por un difeomorfismo, salvo finitos puntos. Una *región* es la unión de un dominio con su borde. Una *región acotada* es una región contenida en una bola de \mathbb{R}^3 .

Sea $R \subset S$ una región acotada contenida en un entorno coordenado $\varphi(U)$ para una parametrización local $\varphi : U \rightarrow S$. Si consideramos la base canónica en \mathbb{R}^2 para el dominio de $d\varphi_q$, para cada $q \in U$, tenemos que

$$\|d\varphi_q\| = \|\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)\|.$$

Como $\|\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)\|$ es el área del paralelogramo generado por $\varphi_u(q)$ y $\varphi_v(q)$ en $T_p S$, con $p = \varphi(q)$, se define el *área* de R como

$$A(R) := \iint_{\varphi^{-1}(R)} \|d\varphi\| \, du dv = \iint_{\varphi^{-1}(R)} \|\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)\| \, du dv.$$

Observación 3.1.13.

1. Esta definición no depende de la parametrización elegida. En efecto, si $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ es otra parametrización local de S tal que $R \subset \tilde{\varphi}(\tilde{U})$ y llamamos $\tilde{Q} := \tilde{\varphi}^{-1}(R)$, entonces

$$\tilde{\varphi}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \varphi(u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v}))$$

y sus derivadas parciales son

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} = \varphi_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \varphi_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}, \quad \tilde{\varphi}_{\tilde{v}} = \varphi_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \varphi_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}.$$

Luego, haciendo el mismo cálculo que hicimos al hablar de superficies orientables,

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}} = \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} - \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \right) \varphi_u \times \varphi_v = \det \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} (\varphi_u \times \varphi_v). \quad (3.1)$$

Por lo tanto,

$$\iint_{\tilde{Q}} \|\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}\| d\tilde{u}d\tilde{v} = \iint_{\tilde{Q}} \|(\varphi_u \times \varphi_v)\| \left| \det \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \right| d\tilde{u}d\tilde{v} = \iint_Q \|\varphi_u \times \varphi_v\| dudv,$$

donde en la última igualdad hemos usado el teorema del cambio de variables.

2. Veamos cómo se expresa $A(R)$ en términos de los coeficientes de la primera forma. Recordemos que

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = \|\varphi_u\| \|\varphi_v\| \operatorname{sen} \theta,$$

con $\theta = \angle(\varphi_u, \varphi_v)$, de modo que

$$\begin{aligned} \|\varphi_u \times \varphi_v\|^2 &= \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 \operatorname{sen}^2 \theta = (1 - \cos^2 \theta) \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 \\ &= \left(1 - \frac{\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2}{\|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2} \right) \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 = \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2 \\ &= EG - F^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$A(R) = \iint_{\varphi^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Ejemplo 3.1.14. Calculemos el área del toro \mathbb{T}^2 generado por la curva

$$\gamma(u) = (a + r \cos u, 0, r \operatorname{sen} u), \quad u \in (0, 2\pi)$$

al rotar alrededor del eje z , donde $a > r > 0$ son constantes. Consideremos la parametrización

$$\varphi(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \operatorname{sen} v, r \operatorname{sen} u)$$

con $u \in (0, 2\pi)$ y $v \in (0, 2\pi)$, que cubre toda la superficie salvo por un paralelo y un meridiano.

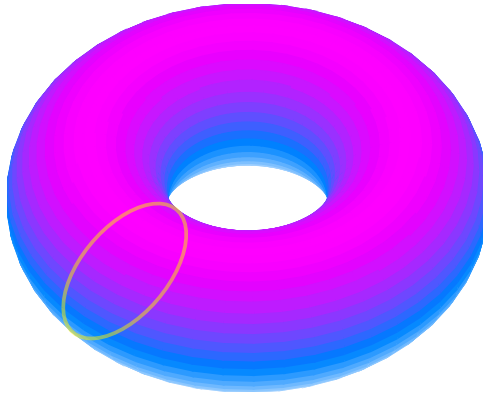


Figura 3.3: El toro junto con la circunferencia que lo genera en amarillo.

Sus derivadas parciales son

$$\begin{aligned}\varphi_u &= (-r \operatorname{sen} u \cos v, -r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, r \cos u) \\ \varphi_v &= (-(a + r \cos u) \operatorname{sen} v, (a + r \cos u) \cos v, 0)\end{aligned}$$

y los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$\begin{aligned}E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = r^2 \operatorname{sen}^2 u + r^2 \cos^2 u = r^2 \\ F &= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0 \\ G &= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = (a + r \cos u)^2.\end{aligned}$$

Sea $R_\varepsilon := \varphi(Q_\varepsilon)$, donde

$$Q_\varepsilon := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon \leq u \leq 2\pi - \varepsilon, \varepsilon \leq v \leq 2\pi - \varepsilon\}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}A(R_\varepsilon) &= \iint_{Q_\varepsilon} \sqrt{EG - F^2} \, dudv = \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \left(\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} r(a + r \cos u) \, dv \right) du \\ &= \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} r(a + r \cos u)(2\pi - 2\varepsilon) \, du = (2\pi - 2\varepsilon)r \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} a + r \cos u \, du \\ &= (2\pi - 2\varepsilon)r \left(au + r \operatorname{sen} u \right) \Big|_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \\ &= (2\pi - 2\varepsilon)r (a(2\pi - \varepsilon) + r \operatorname{sen}(2\pi - \varepsilon) - a\varepsilon - r \operatorname{sen} \varepsilon).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$A(\mathbb{T}^2) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(R_\varepsilon) = 4\pi^2 ar.$$

Ejemplo 3.1.15 (Gráfico de una función). Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave y consideremos S como su gráfico, que puede parametrizarse mediante $\varphi : U \rightarrow S$ dada por

$$\varphi(u, v) := (u, v, f(u, v)).$$

Sus derivadas parciales son

$$\varphi_u = (1, 0, f_u) \text{ y } \varphi_v = (0, 1, f_v),$$

de modo que

$$\varphi_u \times \varphi_v = (-f_u, -f_v, 1).$$

Así, si $R \subset S$ es una región acotada contenida en el entorno $\varphi(U)$,

$$A(R) = \iint_{\varphi^{-1}(R)} \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} \, dudv.$$

3.2 Isometrías

Una medida sobre una superficie regular S que puede describirse completamente en términos de la primera forma fundamental se dice que es *intrínseca*.

Ejemplo 3.2.1. Las siguientes medidas son intrínsecas.

1. El producto interno de vectores de $T_p S$, ya que

$$\langle x, y \rangle_p = \frac{1}{2} (\mathbf{l}_p(x) + \mathbf{l}_p(y) - \mathbf{l}_p(x - y)).$$

2. El área determinada por $x, y \in T_p S$, ya que

$$\|x \times y\| = \sqrt{\mathbf{l}_p(x) \mathbf{l}_p(y) - \langle x, y \rangle^2}.$$

Hay otra forma de definir medida intrínseca, usando la idea de que una medida es intrínseca si se conserva por difeomorfismos que conservan la primera forma entre superficies.

Definición 3.2.2. Sean S_1 y S_2 dos superficies regulares. Un difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ es una *isometría* si para todo $p \in S_1$ y todo par de vectores $w_1, w_2 \in T_p S_1$,

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle df_p(w_1), df_p(w_2) \rangle_{f(p)}.$$

Es decir, f es una isometría si df preserva el producto interno. En este caso, se dice que S_1 y S_2 son *superficies isométricas*.

Observación 3.2.3. De manera equivalente, se podría decir que una isometría es un difeomorfismo que preserva la primera forma. En efecto, si f es una isometría, entonces df preserva el producto interno y dados $p \in S_1$ y $w \in T_p S_1$,

$$\mathbf{l}_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \langle df_p(w), df_p(w) \rangle_{f(p)} = \mathbf{l}_{f(p)}(df_p(w)).$$

Recíprocamente, si f preserva la primera forma, dados $w_1, w_2 \in T_p S$, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_2 \rangle_p &= \frac{1}{2} (\mathbf{l}_p(w_1) + \mathbf{l}_p(w_2) - \mathbf{l}_p(w_1 - w_2)) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{l}_{f(p)}(df_p(w_1)) + \mathbf{l}_{f(p)}(df_p(w_2)) - \mathbf{l}_{f(p)}(df_p(w_1 - w_2))) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{l}_{f(p)}(df_p(w_1)) + \mathbf{l}_{f(p)}(df_p(w_2)) - \mathbf{l}_{f(p)}(df_p(w_1) - df_p(w_2))) \\ &= \langle df_p(w_1), df_p(w_2) \rangle_{f(p)}. \end{aligned}$$

Observación 3.2.4. Como las isometrías conservan la primera forma fundamental, conservan las magnitudes intrínsecas de superficies isométricas. Por ejemplo, longitudes de curvas, ángulos entre vectores y áreas de regiones.

Observación 3.2.5. Sea $f : S \rightarrow \tilde{S}$ una isometría. Luego, para todo $p \in S$ y todo par de vectores linealmente independientes $w_1, w_2 \in T_p S$,

$$\langle df_p(w_1), df_p(w_2) \rangle_{f(p)} = \langle w_1, w_2 \rangle_p$$

y, por lo tanto, recordando que $\|x \times y\| = \sqrt{I_p(x)I_p(y) - \langle x, y \rangle^2}$,

$$\|df_p(w_1) \times df_p(w_2)\| = \|w_1 \times w_2\|.$$

Así, la distorsión de área es, en cada $p \in S$, $\|df_p\| = 1$.

Ejercicio 3.2.6. Probar que un difeomorfismo es una isometría si y solo si conserva la longitud de curvas.

Definición 3.2.7. Una función $f : S_1 \rightarrow S_2$ es una **isometría local** en $p \in S_1$ si existen entornos U_1 y U_2 de p y $f(p)$ en S_1 y S_2 , respectivamente, tales que $f|_{U_1} : U_1 \rightarrow U_2$ es una isometría.

Si para todo $p \in S_1$ existe una isometría local en p , se dice que S_1 es **localmente isométrica** a S_2 . Se dice que S_1 y S_2 son **localmente isométricas** si S_1 es localmente isométrica a S_2 y S_2 es localmente isométrica a S_1 .

Observación 3.2.8.

1. Si $f : S_1 \rightarrow S_2$ es un difeomorfismo y una isometría local para todo $p \in S_1$, entonces es una isometría. Sin embargo, existen superficies que son localmente isométricas pero no (globalmente) isométricas.
2. Si las magnitudes están contenidas en los conjuntos isométricos, las isometrías locales también mantienen longitudes, ángulos y áreas.

Ejemplo 3.2.9. Un plano y un cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ son localmente isométricos. Si el plano P pasa por $p_0 \in \mathbb{R}^3$ y está generado por dos vectores ortonormales w_1 y w_2 , podemos parametrizarlo localmente mediante $\varphi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow P$,

$$\varphi(u, v) := p_0 + uw_1 + vw_2.$$

Entonces, $\varphi_u = w_1$, $\varphi_v = w_2$ y los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 1$$

$$F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0$$

$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 1.$$

Por otro lado, al cilindro podemos parametrizarlo localmente con

$$\tilde{\varphi} : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} - \{(1, 0, v) \mid v \in \mathbb{R}\},$$

$$\tilde{\varphi}(u, v) = (\cos u, \sin u, v).$$

Entonces,

$$\tilde{\varphi}_u(u, v) = (-\sin u, \cos u, 0) \text{ y } \tilde{\varphi}_v(u, v) = (0, 0, 1).$$

Así,

$$\tilde{E}(u, v) = \langle \tilde{\varphi}_u(q), \tilde{\varphi}_u(q) \rangle_p = 1$$

$$\tilde{F}(u, v) = \langle \tilde{\varphi}_u(q), \tilde{\varphi}_v(q) \rangle_p = 0$$

$$\tilde{G}(u, v) = \langle \tilde{\varphi}_v(q), \tilde{\varphi}_v(q) \rangle_p = 1.$$

Observemos que $f := \varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1} : C \rightarrow P - \text{span}\{w_1\}$ es un difeomorfismo, por ser composición de difeomorfismos.

Veamos que f preserva la primera forma. Si $p \in C$, llamando $S := P - \text{span}\{w_1\}$, tenemos que $df_p : T_p C \rightarrow T_{f(p)} S$. Sea $w \in T_p C$, que podemos escribirlo como

$$w = u'(0)\tilde{\varphi}_u + v'(0)\tilde{\varphi}_v.$$

Entonces,

$$I_p(w) = u'(0)^2 \tilde{E} + 2u'(0)v'(0)\tilde{F} + v'(0)^2 \tilde{G} = u'(0)^2 + v'(0)^2.$$

Por otro lado, $df_p(w) = (f \circ \gamma)'(0)$ para la curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow C$ dada por

$$\gamma(t) = \tilde{\varphi}(u(t), v(t)),$$

que satisface que $\gamma'(0) = w$. Así, $f(\gamma(t)) = \varphi(u(t), v(t))$ y

$$I_{f(p)}(df_p(w)) = u'(0)^2 \tilde{E} + 2u'(0)v'(0)\tilde{F} + v'(0)^2 \tilde{G} = u'(0)^2 + v'(0)^2.$$

Por lo tanto, $I_p(w) = I_{f(p)}(df_p(w))$.

Si $p \in \{(1, 0, v) \mid v \in \mathbb{R}\}$, se define $\tilde{\psi}$ de manera análoga a $\tilde{\varphi}$ y $\varphi \circ \tilde{\psi}^{-1}$ resulta una isometría local en p . Notar que f no es una isometría global, de hecho el cilindro y el plano son diferentes a nivel topológico (uno es simplemente conexo y el otro no), lo que hace que no sean homeomorfos, mucho menos difeomorfos.

Proposición 3.2.10. Sean S y \tilde{S} dos superficies regulares que admiten parametrizaciones locales (U, φ) y $(U, \tilde{\varphi})$ tales que $E = \tilde{E}$, $F = \tilde{F}$ y $G = \tilde{G}$. Entonces, la aplicación $f := \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \tilde{S}$ es una isometría local.

Ejercicio 3.2.11. Probar la Proposición 3.2.10.

Ejemplo 3.2.12. Consideremos la catenoide, que es la superficie de revolución generada por la rotación alrededor del eje z de la catenaria parametrizada por

$$\gamma(v) = (a \cosh v, 0, av), \quad v \in \mathbb{R}, \quad a > 0.$$

Una parametrización local de la catenoide está dada por $\varphi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow S$,

$$\varphi(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av).$$

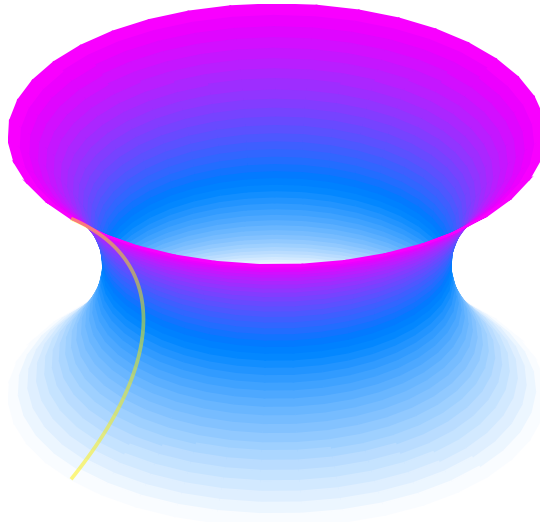


Figura 3.4: La catenoide, con la catenaria que la genera en amarillo.

Luego,

$$\varphi_u = (-a \cosh v \operatorname{sen} u, a \cosh v \cos u, 0)$$

$$\varphi_v = (a \operatorname{senh} v \cos u, a \operatorname{senh} v \operatorname{sen} u, a)$$

y los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = a^2 \cosh^2 v$$

$$F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0$$

$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = a^2 \operatorname{senh}^2 v + a^2 = a^2 \cosh^2 v.$$

Sea \tilde{S} el helicoides (ver Figura 3.1), parametrizado localmente por $\tilde{\varphi} : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \tilde{S}$,

$$\tilde{\varphi}(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{v} \cos \tilde{u}, \tilde{v} \operatorname{sen} \tilde{u}, a\tilde{u}).$$

Entonces,

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = (-\tilde{v} \operatorname{sen} \tilde{u}, \tilde{v} \cos \tilde{u}, a) \text{ y } \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\cos \tilde{u}, \operatorname{sen} \tilde{u}, 0).$$

Así,

$$\tilde{E}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \langle \tilde{\varphi}_{\tilde{u}}(q), \tilde{\varphi}_{\tilde{u}}(q) \rangle_p = \tilde{v}^2 + a^2$$

$$\tilde{F}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \langle \tilde{\varphi}_{\tilde{u}}(q), \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}(q) \rangle_p = 0$$

$$\tilde{G}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \langle \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}(q), \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}(q) \rangle_p = 1.$$

Podemos reparametrizar la helicoides mediante el siguiente cambio de parámetros:

$$\begin{cases} \tilde{u} = u & u \in (0, 2\pi) \\ \tilde{v} = a \operatorname{senh} v & v \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

que resulta ser un difeomorfismo, ya que

$$\det \frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \cosh v \end{pmatrix} = a \cosh v \neq 0.$$

Esto define una nueva parametrización local $\bar{\varphi} : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \tilde{S}$ dada por

$$\bar{\varphi}(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, au).$$

Ahora, se tiene que

$$\bar{\varphi}_u = (-a \sinh v \sin u, a \sinh v \cos u, a)$$

$$\bar{\varphi}_v = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, 0)$$

y los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$\bar{E} = \langle \bar{\varphi}_u, \bar{\varphi}_u \rangle = a^2 \cosh^2 v$$

$$\bar{F} = \langle \bar{\varphi}_u, \bar{\varphi}_v \rangle = 0$$

$$\bar{G} = \langle \bar{\varphi}_v, \bar{\varphi}_v \rangle = a^2 \cosh^2 v.$$

Por lo tanto, la helicoides y la catenaria son localmente isométricas.

Recíprocamente, a partir de una isometría local entre dos superficies y una carta local de la superficie dominio se construye una carta local de la otra superficie de manera tal que los coeficientes de las primeras formas fundamentales coincidan.

Proposición 3.2.13. Sean $f : S \longrightarrow \tilde{S}$ una isometría local entre superficies regulares en $p \in S$ y (U, φ) una carta local de S en p con coeficientes de la primera forma fundamental E, F y G . Entonces, $f \circ \varphi : U \longrightarrow \tilde{S}$ es una carta local de \tilde{S} en $f(p)$ con coeficientes de la primera forma fundamental $\tilde{E} = E, \tilde{F} = F$ y $\tilde{G} = G$.

Demostración. Como (U, φ) es una carta local de S en p , existe un abierto V en S tal que $p \in V$ y $\varphi : U \longrightarrow V$ es un difeomorfismo. Al ser f una isometría local en p , existen entornos A y B de p y $f(p)$, respectivamente, tales que $f : A \longrightarrow B$ es una isometría (y, en particular, un difeomorfismo).

Podemos suponer que $\varphi(U) \subset A$, pues de lo contrario consideramos $\hat{U} := \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap A)$ como dominio de $f \circ \varphi$. Sea $\tilde{\varphi} := f \circ \varphi : U \longrightarrow B \subset \tilde{S}$, que resulta ser un difeomorfismo por ser composición de difeomorfismos. Luego,

$$\tilde{\varphi}_u = df(\varphi_u) \text{ y } \tilde{\varphi}_v = df(\varphi_v).$$

Entonces,

$$\tilde{E} = \langle \tilde{\varphi}_u, \tilde{\varphi}_u \rangle_{f(p)} = \langle df_p(\varphi_u), df_p(\varphi_u) \rangle_{f(p)} = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_p = E.$$

Análogamente, $\tilde{F} = F$ y $\tilde{G} = G$. ♣

Distancia entre puntos de una superficie regular.

Sean S una superficie regular y $p, q \in S$. Se define la **distancia entre p y q** como

$$d(p, q) := \inf\{\text{longitud de una curva regular en } S \text{ que une } p \text{ y } q\}.$$

Es claro que la distancia entre dos puntos es invariante por isometrías, ya que la longitud de una curva puede calcularse en términos de la Primera Forma Fundamental, que resulta invariante por isometrías.

Si $f : S \rightarrow \tilde{S}$ es una isometría local en p y (U, φ) es una carta local de S en p , para todo $q, r \in \varphi(U) \cap A$ (donde estamos pensando que $A \subset S$ es tal que $f|_A$ es una isometría),

$$d(f(q), f(r)) = d(q, r).$$

Observación 3.2.14. Considerar el ínfimo de las longitudes de curvas en la definición de distancia entre dos puntos refleja el hecho de que esta distancia no tiene por qué realizarse en una curva en particular, tal como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.15. Supongamos que S es el plano perforado $S := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ y tomemos los puntos $p := (-1, 0)$, $q := (1, 0)$. Podemos tomar una familia de curvas $\gamma_\varepsilon : [-1, 1] \rightarrow S$ dada por

$$\gamma_\varepsilon(t) := \begin{cases} \left(t, \varepsilon \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right)\right) & \text{si } t \in (-1, 1) \\ (t, 0) & \text{si } t \in \{-1, 1\}. \end{cases}$$

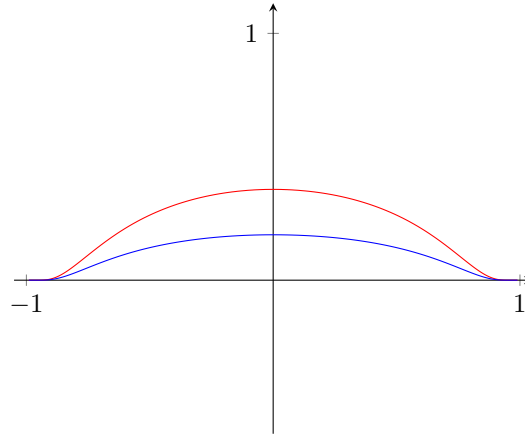


Figura 3.5: Las trazas de las curvas γ_ε para parámetros $\varepsilon = 1$ (en rojo) y $\varepsilon = 1/2$ (en azul).

La longitud de γ_ε debe ser mayor estricta que 2, puesto que si fuera exactamente 2 debería ser un segmento de recta (recordar el Ejercicio 1.3.16). Puede verse que esta curva es suave¹ y su vector tangente para $-1 < t < 1$ es

$$\gamma'_\varepsilon(t) = \left(1, \varepsilon \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right) \left(-\frac{2t}{(1-t^2)^2}\right)\right).$$

Entonces,

$$\|\gamma'_\varepsilon(t)\|^2 = 1 + 4t^2\varepsilon^2 \frac{\exp\left(-\frac{2}{1-t^2}\right)}{(1-t^2)^4} \stackrel{*}{\leq} 1 + 4t^2\varepsilon^2,$$

donde en $*$ hemos usado que cuando $-1 < t < 1$,

$$\frac{\exp\left(-\frac{2}{1-t^2}\right)}{(1-t^2)^4} \leq 1.$$

¹Está construida usando la noción de “cut-off function”. Más detalles pueden encontrarse en la Sección 1.5 de [Lee09].

Luego, la longitud de arco de γ_ε es

$$2 < \int_{-1}^1 \|\gamma'_\varepsilon(t)\| dt \leq \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 4t^2\varepsilon^2} dt \leq 2\sqrt{1 + 4\varepsilon^2}.$$

Notando que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{1 + 4\varepsilon^2} = 2,$$

tenemos que el ínfimo de las longitudes de las curvas γ_ε es 2. Por lo tanto, $d(p, q) = 2$, aunque no exista ninguna curva en S que una ambos puntos cuya longitud sea exactamente 2.

Una isometría conserva longitudes de curvas, distancia entre puntos, ángulos entre vectores y áreas de regiones. Sin embargo, existen otros tipos de funciones más generales (y, por lo tanto, con menos propiedades) que son muy útiles, por ejemplo, en cartografía.

3.3 Aplicaciones equiáreas y conformes

En esta sección seguiremos fielmente la exposición de [Tap16], Capítulo 3, Sección 8.

Definición 3.3.1. Dadas dos superficies regulares S_1 y S_2 , se dice que un difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ es una **aplicación equiárea** si para todo $p \in S_1$ se cumple que $\|df_p\| = 1$.

Ejemplo 3.3.2. Sean $\lambda > 0$ y $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal cuya representación matricial en las bases canónicas de \mathbb{R}^2 es

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}.$$

Como f es lineal, para todo $p \in \mathbb{R}^2$ se tiene que, $df_p = f$ y $\|df_p\| = \det A = 1$.

En general se puede ver que si $f : S_1 \rightarrow S_2$ es una aplicación equiárea para todo $p \in S_1$, es posible elegir bases ortonormales de $T_p S_1$ y $T_{f(p)} S_2$ tales que la matriz de df_p sea de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix},$$

con $\lambda > 0$.

Ejemplo 3.3.3. Sean $\lambda = 2$ y $f(x, y) = (2x, \frac{1}{2}y)$. Si consideramos $R := [0, 1] \times [0, 1]$, entonces $f(R) = [0, 2] \times [0, \frac{1}{2}]$ y el área de ambas regiones poligonales es 1.

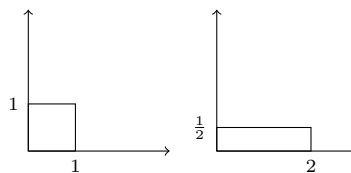


Figura 3.6: Las regiones poligonales R (del lado izquierdo) y $f(R)$ (del lado derecho).

La **función de Arquímedes** es la función $f : S^2 - \{(0, 0, \pm 1)\} \rightarrow C$, donde $C := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, -1 < z < 1\}$, definida por

$$f(x, y, z) := \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right).$$

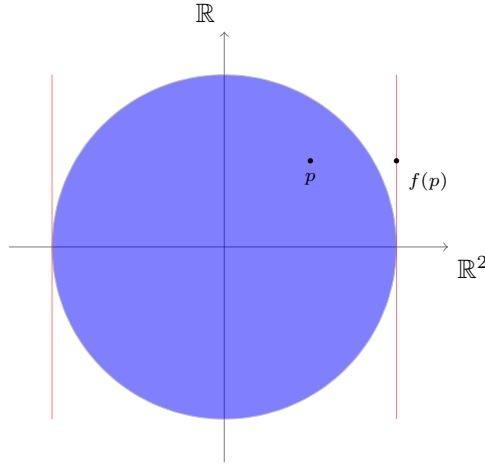


Figura 3.7: Esquema del efecto de la función de Arquímedes sobre un punto de $S^2 - (0, 0, \pm 1)$. En azul se ve la esfera y en rojo el cilindro.

Teorema 3.3.4 (Teorema de Arquímedes). *La función de Arquímedes es equiárea.*

Demostración. Sea $\varphi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow S^2$ dada por

$$\varphi(\theta, \phi) := (\cos \theta \sen \phi, \sen \theta \sen \phi, \cos \phi).$$

Si tomamos $\varphi(q) = p$, la base $\{\varphi_\theta(q), \varphi_\phi(q)\}$ de $T_p S^2$ está dada por

$$\varphi_\theta = (-\sen \theta \sen \phi, \cos \theta \sen \phi, 0)$$

$$\varphi_\phi = (\cos \theta \cos \phi, \sen \theta \cos \phi, -\sen \phi).$$

Luego,

$$\varphi_\theta \times \varphi_\phi = (-\sen^2 \phi \cos \theta, -\sen^2 \phi \sen \theta, -\sen \phi \cos \phi).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|\varphi_\theta \times \varphi_\phi\|^2 &= \sen^4 \phi \cos^2 \theta + \sen^4 \phi \sen^2 \theta + \sen^2 \phi \cos^2 \phi \\ &= \sen^4 \phi + \sen^2 \phi \cos^2 \phi = \sen^2 \phi (\sen^2 \phi + \cos^2 \phi) \\ &= \sen^2 \phi. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|\varphi_\theta \times \varphi_\phi\| = \sen \phi$.

Veamos que $\|df_p(\varphi_\theta) \times df_p(\varphi_\phi)\| = \sen \phi$. Consideremos $\tilde{\varphi} : f \circ \varphi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow C$, de modo que $df_p(\varphi_\theta) = \tilde{\varphi}_\theta$ y $df_p(\varphi_\phi) = \tilde{\varphi}_\phi$. Explícitamente,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\theta, \phi) &= f(\cos \theta \sen \phi, \sen \theta \sen \phi, \cos \phi) \\ &= \left(\frac{\cos \theta \sen \phi}{\sqrt{\cos^2 \theta \sen^2 \phi + \sen^2 \theta \sen^2 \phi}}, \frac{\sen \theta \sen \phi}{\sen \phi}, \cos \phi \right). \end{aligned}$$

Así, $\tilde{\varphi}(\theta, \phi) = (\cos \theta, \sin \theta, \cos \phi)$ y

$$df_p(\varphi_\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$$

$$df_p(\varphi_\phi) = (0, 0, -\sin \phi).$$

Entonces,

$$df_p(\varphi_\theta) \times df_p(\varphi_\phi) = (-\cos \theta \sin \phi, -\sin \theta \sin \phi, 0)$$

y

$$\|df_p(\varphi_\theta) \times df_p(\varphi_\phi)\| = \sin \phi.$$

Por lo tanto, $\|df_p\| = 1$ y f es equiárea. ♣

Definición 3.3.5. Dadas dos superficies regulares S_1 y S_2 , se dice que un difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ es una **aplicación conforme** si preserva ángulos, es decir, si para todo $p \in S_1$ y todo par de vectores $w_1, w_2 \in T_p S_1$,

$$\angle(w_1, w_2) = \angle(df_p(w_1), df_p(w_2)).$$

Ejemplo 3.3.6. Dado $\lambda > 0$, consideremos la transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya matriz en las bases canónicas de \mathbb{R}^2 es

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

es decir, $f(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$. Luego, $df_p(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ y para todo $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ tenemos que

$$\begin{aligned} \angle(df_p(x, y), df_p(x', y')) &= \cos^{-1} \left(\frac{\langle df_p(x, y), df_p(x', y') \rangle}{\|df_p(x, y)\| \|df_p(x', y')\|} \right) \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{\langle (\lambda x, \lambda y), (\lambda x', \lambda y') \rangle}{\sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} \sqrt{\lambda^2 (x')^2 + \lambda^2 (y')^2}} \right) \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{\lambda^2 x x' + \lambda^2 y y'}{\lambda \sqrt{x^2 + y^2} \lambda \sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right) \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{x x' + y y'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right) \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{\langle (x, y), (x', y') \rangle}{\|(x, y)\| \|(x', y')\|} \right). \end{aligned}$$

De manera análoga a lo que sucede con las aplicaciones equiáreas, para cada punto $p \in S_1$ se pueden elegir bases ortonormales de $T_p S_1$ y $T_{f(p)} S_2$ tales que la matriz de df_p es de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

para algún $\lambda > 0$.

Proposición 3.3.7. Un difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ es conforme si y solo si existe una función suave a valores positivos $\lambda : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\langle df_p(w), df_p(\tilde{w}) \rangle_{f(p)} = \lambda(p) \langle w, \tilde{w} \rangle_p$$

para todo $p \in S_1$ y todos $w, \tilde{w} \in T_p S_1$.

Ejercicio 3.3.8. Probar la Proposición 3.3.7.

Ejemplo 3.3.9. La proyección estereográfica (ver Ejemplo 2.1.10) entre el plano y la esfera sin el polo norte es una aplicación conforme.

Observación 3.3.10. La proyección estereográfica se usa en matemática, pero no tanto en cartografía, donde es más importante la aplicación de Mercator. Esta aplicación consiste en modificar la aplicación que define a las coordenadas esféricas para convertirla en una aplicación conforme. Esto logra que se preserven longitudes verticales y, hasta cierto punto, áreas de regiones pequeñas, siempre que estén lo suficientemente lejos de los polos, donde la distorsión de área es mayor.

Veremos más adelante que no existen isometrías locales entre la esfera y porciones de un plano.

Por último, a partir de las definiciones de isometría, aplicación isométrica y aplicación conforme puede probarse el siguiente resultado.

Proposición 3.3.11. *Un difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ es una isometría (conserva longitudes) si y solo si es equiárea (conserva áreas) y conforme (conserva ángulos).*

Observación Final. Es claro que en una superficie regular se pueden calcular estas magnitudes métricas que hemos definido usando el producto interno que sus espacios tangentes heredan de manera natural del producto interno canónico de \mathbb{R}^3 .

Uno podría preguntarse qué pasaría si decidiera considerar otro producto interno en vez del canónico en cada espacio tangente. Esto da lugar a una rica familia de objetos más generales que las superficies regulares que estamos considerando en las cuales también se puede calcular magnitudes métricas. Ellas son las llamadas variedades de Riemann, donde se parte de considerar en cada espacio tangente un producto interno dado. Una posible referencia en estos temas es [Lee18].

Ejercicios

Ejercicios ya propuestos:

Ejercicio 3.1.8. Consideremos una superficie de revolución parametrizada por

$$\varphi(u, v) := (\phi(v) \cos(u), \phi(v) \sin(u), \psi(v)),$$

con $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (a, b)$ y $\phi(v) > 0$ para todo v .

Mostrar que los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$E = \phi(v)^2, \quad F = 0, \quad G = \phi'(v)^2 + \psi'(v)^2.$$

Ejercicio 3.1.9. Mostrar que una superficie de revolución siempre puede parametrizarse de modo que los coeficientes de su primera forma fundamental sean

$$E = E(v), \quad F \equiv 0, \quad G \equiv 1.$$

Ejercicio 3.2.6. Probar que un difeomorfismo es una isometría si y solo si conserva la longitud de curvas.

Ejercicio 3.2.11. (Proposición 3.2.10) Sean S y \tilde{S} dos superficies regulares que admiten parametrizaciones locales (U, φ) y $(U, \tilde{\varphi})$ tales que $E = \tilde{E}$, $F = \tilde{F}$ y $G = \tilde{G}$. Entonces, la aplicación $f := \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \tilde{S}$ es una isometría local.

Ejercicio 3.3.8. (Proposición 3.3.7) Un difeomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ es conforme si y solo si existe una función suave a valores positivos $\lambda : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\langle df_p(w), df_p(\tilde{w}) \rangle_{f(p)} = \lambda(p) \langle w, \tilde{w} \rangle_p$$

para todo $p \in S_1$ y todos $w, \tilde{w} \in T_p S_1$.

Otros ejercicios:

Ejercicio 3.3.12 (Teorema de Pappus²–Guldinus³). Sean S una superficie de revolución y C su curva generatriz. Sea s el parámetro longitud de arco de C y denotemos $\rho(s)$ a la distancia al eje de rotación desde el punto de C correspondiente a s .

Probar que el área de S está dada por

$$2\pi \int_0^L \rho(s) ds,$$

donde L es la longitud de la curva C .

Ejercicio 3.3.13. Decimos que las curvas coordenadas de una parametrización $\varphi(u, v)$ constituyen una *red de Tchebyshev* si las longitudes de los lados opuestos de cualquier cuadrilátero formado por ellas son iguales.

(a) Mostrar que formar una red Tchebyshev equivale a

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$

(b) Probar que si las curvas coordenadas de una parametrización forman una red de Tchebyshev, entonces es posible reparametrizar el entorno coordenado de modo que los nuevos coeficientes de la primera forma fundamental sean

$$E = 1, \quad F = \cos \theta, \quad G = 1,$$

donde θ es el ángulo entre las curvas coordenadas.

²Pappus de Alejandría, matemático griego cuya obra data aproximadamente del año 320.

³Paul Guldin (1577-1643) fue un matemático y astrónomo suizo.

Capítulo 4

La curvatura de una superficie

Cuando estudiamos curvas regulares parametrizadas por longitud de arco, definimos su curvatura en un punto como un escalar que mide cuánto difiere de su recta tangente en un entorno del punto. Al estudiar superficies regulares, es natural generalizar esta idea de curvatura para analizar cómo es el comportamiento de una superficie con respecto a su plano tangente en un entorno del punto de tangencia. Ésta es la idea que captura la llamada curvatura Gaussiana de una superficie.

4.1 Curvaturas normales

Consideremos una superficie regular S con una orientación dada por el campo N . Dados $p \in S$ y $v \in T_p S$ con $\|v\| = 1$, queremos ver cómo cambia el plano tangente al movernos en la dirección de v . Para ello, podríamos tomar una curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ parametrizada por su longitud de arco tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = v$, y estudiar la función suave $N : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S^2$ dada por $N(s) = N(\gamma(s))$. Como queremos ver cómo cambia $N(s)$, es natural pensar en derivar la función.

Definición 4.1.1. El escalar $\kappa_n(v) = \langle -N'(0), v \rangle = \langle -dN_p(v), v \rangle$ es la *curvatura normal* de S en p en la dirección de v y también suele denotarse como $\kappa_n^p(v)$.

Observación 4.1.2. Notar que la curvatura normal no depende de la elección de la curva γ (ya que $dN_p(v)$ no lo hace) y que cambia de signo ante un cambio de orientación de la superficie S .

Veamos cómo podemos interpretar geoméricamente a la curvatura normal.

Como $\dot{\gamma}(s) \in T_{\gamma(s)} S$ y $N(s)$ son ortogonales, $\langle N(s), \dot{\gamma}(s) \rangle = 0$ y, derivando respecto de s ,

$$\langle N(s), \ddot{\gamma}(s) \rangle = -\langle N'(s), \dot{\gamma}(s) \rangle. \quad (4.1)$$

Luego, si $\mathbf{n}(s)$ es el normal de la curva γ ,

$$\kappa_n(v) = -\langle N'(0), v \rangle = \langle N(0), \ddot{\gamma}(0) \rangle = \langle N(0), \kappa(0)\mathbf{n}(0) \rangle = \kappa(0) \cos \theta,$$

donde κ es la curvatura de la curva γ y θ es el ángulo que forman $N(0)$ y $\mathbf{n}(0)$.

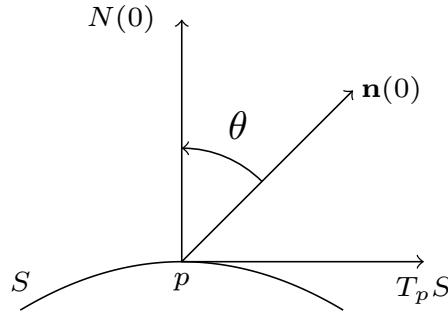


Figura 4.1: Los vectores y ángulos involucrados en la definición de curvatura normal.

Ejemplo 4.1.3. Consideremos un plano de ecuación $ax + by + cz + d = 0$, orientado con el normal

$$N(p) = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Como N es constante, dado cualquier $v \in T_p S$ y una curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = v$, $N'(0) = 0$ y, en consecuencia, $\kappa_n(v) = 0$. Notar que esto es consistente con que la curvatura normal mide cómo cambia el plano tangente a la superficie en el punto p si uno se mueve en la dirección de v , ya que en este caso el plano tangente es siempre el mismo (de hecho, es el mismo plano).

Ejemplo 4.1.4. Consideremos el cilindro S parametrizado localmente por

$$\varphi(u, v) := (\cos u, \sin u, v), \quad (u, v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R},$$

y orientado mediante

$$N(\varphi(u, v)) := (\cos u, \sin u, 0).$$

Fijemos el punto $p = (0, 1, 0) \in \varphi(U)$ y veamos qué sucede si nos movemos en dos direcciones distintas: girando alrededor del cilindro y trepando verticalmente.

Sea $v_1 = (-1, 0, 0) \in T_p S$, junto con $\gamma_1(s) := (\cos(s + \frac{\pi}{2}), \sin(s + \frac{\pi}{2}), 0)$, que satisface que $\gamma_1(0) = p$ y $\dot{\gamma}_1(0) = v_1$. Entonces, $N(\gamma_1(s)) = (\cos(s + \frac{\pi}{2}), \sin(s + \frac{\pi}{2}), 0)$ y $N'(0) = v_1$. Por lo tanto,

$$\kappa_n(v_1) = \langle -N'(0), v_1 \rangle = \langle -v_1, v_1 \rangle = -1.$$

Sea ahora $v_2 = (0, 0, 1)$. Una curva que lo represente es $\gamma_2(s) := (0, 1, s)$, de modo que $\gamma_2(0) = p$, $\dot{\gamma}_2(0) = v_2$ y $N(\gamma_2(s)) = (0, 1, 0)$. Luego, $N'(0) = 0$ y

$$\kappa_n(v_2) = \langle -N'(0), v_2 \rangle = \langle 0, v_2 \rangle = 0.$$

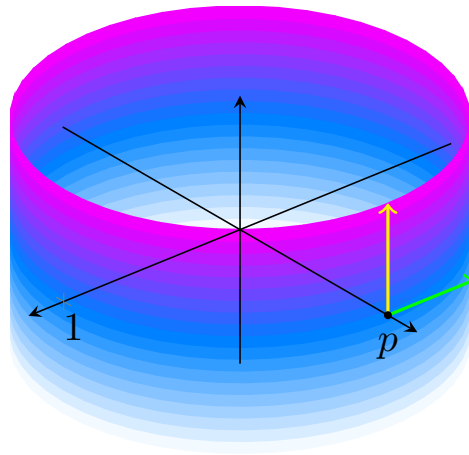


Figura 4.2: El punto p y las direcciones en las que estamos mirando la curvatura normal del cilindro: en verde el vector v_1 y en amarillo el vector v_2 .

Notar que esto último era esperable, ya que la curvatura normal en la dirección de v_2 busca capturar cuánto cambia el plano tangente al movernos por una generatriz del cilindro, pero sabemos que el plano tangente no cambia a lo largo de las generatrices (ver Ejercicio 2.5.13).

Ejemplo 4.1.5. Consideremos la esfera S^2 orientada con $N(p) := -p$ para todo $p \in S^2$. Dados un punto $p \in S^2$ y una dirección $v \in T_p S^2$ representada por una curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S^2$, tenemos que $N(\gamma(s)) = -\gamma(s)$. Luego, $N'(0) = -\dot{\gamma}(0) = -v$ y

$$\kappa_n(v) = \langle -N'(0), v \rangle = \langle v, v \rangle = 1.$$

Es decir, la curvatura normal es siempre la misma en todo punto de la esfera y en cualquier dirección.

4.2 La aplicación de Gauss

En lo que sigue, buscamos definir un escalar que combine la información que otorgan las curvaturas normales y permita determinar la variación de $T_p S$ alrededor de p sin hacer referencia a ninguna dirección tangente en particular. Para ello, dado que, en cada punto de una superficie regular orientada, el campo normal unitario N es ortogonal al espacio tangente, parece natural analizar cómo cambia N cerca del punto $p \in S$. Como se mencionó al comienzo de la sección anterior, esto sugiere estudiar su diferencial.

Definición 4.2.1. Dada una superficie regular S orientada por el campo normal unitario N , se define la **aplicación de Gauss**¹ de S como la función suave $N : S \rightarrow S^2$ definida por la orientación dada.

Dado $p \in S$, se tiene la aplicación lineal $dN_p : T_p S \rightarrow T_{N(p)} S^2$. Notando que los espacios tangentes $T_p S$ y $T_{N(p)} S^2$ tienen a $N(p)$ como vector normal, es claro que estos espacios coinciden y, por este motivo, consideraremos $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$.

¹C. F. Gauss (1777–1855), matemático alemán conocido como príncipe de las matemáticas.

Definición 4.2.2. Para cada $p \in S$, se define la *aplicación de Weingarten*² de S en p como la transformación lineal $W_p := -dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$.

Se utilizará la notación W_p para hacer referencia tanto a esta transformación lineal como a su representación matricial.

Observación 4.2.3.

* Dado $v \in T_p S$ unitario, la curvatura normal de S en p en la dirección de $v \in T_p S$ está dada por $\kappa_n(v) = \langle W_p(v), v \rangle$.

* Sea una curva $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$, con $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, en S tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = w$.

Entonces,

$$\begin{aligned} W_p(w) &= -dN_p(w) = -\frac{d}{dt} N(\gamma(t)) \Big|_{t=0} = -(N \circ \gamma)'(0) \\ &= -(N \circ \varphi)_u u'(0) - (N \circ \varphi)_v v'(0). \end{aligned}$$

Considerando las curvas coordenadas se obtiene que

$$\begin{aligned} W_p(\varphi_u) &= -dN_p(\varphi_u) = -(N \circ \varphi)_u = -N_u, \\ W_p(\varphi_v) &= -dN_p(\varphi_v) = -(N \circ \varphi)_v = -N_v. \end{aligned}$$

* Si se cambia la orientación N por $-N$, es claro que para todo $w \in T_p S$, $W_p(w)$ cambia su signo.

Ejemplo 4.2.4. Analicemos la aplicación de Weingarten en algunos ejemplos particulares.

1. Un plano: Ya hemos visto en el Ejemplo 4.1.3 que un plano siempre puede orientarse con un campo normal unitario N constante, de modo que $dN_p \equiv 0$ para todo p y la aplicación de Weingarten es $W_p \equiv 0$ para todo p .
2. Una esfera de radio R : Sea S_R una esfera de radio R centrada en el origen orientada con el normal exterior $N : S_R \rightarrow S^2$,

$$N(p) := \frac{p}{\|p\|} = \frac{p}{R}.$$

Sean $p \in S_R$, $v \in T_p S_R$ y $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_R$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$. Entonces,

$$dN_p(v) = \frac{d}{dt} N(\gamma(t)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \frac{\gamma(t)}{R} \Big|_{t=0} = \frac{\gamma'(0)}{R} = \frac{v}{R}.$$

Por lo tanto,

$$W_p(v) = -dN_p(v) = -\frac{v}{R}.$$

²J. Weingarten (1836–1910), matemático alemán.

3. Consideremos el paraboloide de ecuación $z = x^2 + ky^2$, $k > 0$ constante, parametrizado globalmente por $\varphi(u, v) = (u, v, u^2 + kv^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, y orientado mediante

$$N(\varphi(u, v)) := \frac{(-2u, -2kv, 1)}{\sqrt{4u^2 + 4k^2v^2 + 1}}.$$

Calculemos W_p para $p = (0, 0, 0)$. Como es una aplicación lineal, podemos calcularla en los elementos de la base $\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$ de T_pS , donde $q = (0, 0)$. Notemos que

$$\varphi_u(q) = (1, 0, 0) \quad \text{y} \quad \varphi_v(q) = (0, 1, 0).$$

Para el primer vector de la base, consideremos $\gamma_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$,

$$\gamma_1(t) := \varphi(t, 0) = (t, 0, t^2),$$

verificando que $\gamma_1(0) = (0, 0, 0) = p$ y $\gamma_1'(0) = (1, 0, 0) = \varphi_u(q)$. Entonces,

$$dN_p(\varphi_u(q)) = \left. \frac{d}{dt} N(\gamma_1(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \frac{(-2t, 0, 1)}{\sqrt{4t^2 + 1}} \right|_{t=0} = (-2, 0, 0) = -2\varphi_u(q).$$

Análogamente, se ve que

$$dN_p(\varphi_v(q)) = (-2k, 0, 0) = -2k\varphi_v(q).$$

Por lo tanto,

$$W_p(\varphi_u(q)) = 2\varphi_u(q) \quad \text{y} \quad W_p(\varphi_v(q)) = 2k\varphi_v(q),$$

de modo que la matriz de W_p en la base $\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$ es

$$W_p = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}.$$

4.3 La curvatura de Gauss

Recordemos que la motivación para estudiar la aplicación de Weingarten era definir una función que a cada punto le asigne un escalar que capture, hasta cierto punto, la “curvatura” de la superficie, sin hacer referencia a una dirección en particular (como es el caso de la curvatura normal).

Dado que la aplicación de Weingarten en un punto p de una superficie regular orientada S es la aplicación lineal $W_p : T_pS \rightarrow T_pS$, sabemos desde el álgebra lineal que hay dos cantidades que no dependen de la base elegida para T_pS : su determinante y su traza.

Definición 4.3.1. Sean S una superficie orientada y W su aplicación de Weingarten. Se definen su *curvatura de Gauss* y su *curvatura media* en un punto $p \in S$ como el determinante de W_p y la mitad de la traza de W_p , respectivamente. Las denotamos como

$$K(p) := \det W_p \quad \text{y} \quad H(p) := \frac{1}{2} \operatorname{tr} W_p.$$

Observación 4.3.2. Frente a un cambio de orientación de S , su curvatura media cambia de signo mientras que la curvatura de Gauss se mantiene invariante. Esto se debe a que el determinante de W_p no cambia porque la dimensión es par.

Que estas definiciones efectivamente capturan lo que uno desea es algo que irá haciéndose más claro en próximas secciones. Por el momento, veamos cómo lucen en algunos ejemplos.

Ejemplo 4.3.3.

1. Un plano: Si esperamos que la curvatura de Gauss capture cuánto cambia el plano tangente a la superficie cerca del punto de tangencia, debería suceder que en el caso de un plano la curvatura de Gauss sea idénticamente nula. Esto es efectivamente así, ya que como hemos visto en el Ejemplo 4.2.4, $W_p \equiv 0$ para todo punto del plano y, en consecuencia,

$$K \equiv 0 \quad \text{y} \quad H \equiv 0.$$

2. Una esfera de radio R : Tal como vimos en el Ejemplo 4.2.4, $W_p(v) = -\frac{v}{R}$, por lo que dados $p \in S_R$ y una base de $T_p S$,

$$W_p = -\frac{1}{R} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$K \equiv \frac{1}{R^2} \quad \text{y} \quad H \equiv -\frac{1}{R}.$$

3. Consideremos nuevamente el cilindro S parametrizado localmente por

$$\varphi(u, v) := (\cos u, \sin u, v), \quad (u, v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R},$$

y orientado mediante

$$N(\varphi(u, v)) := (\cos u, \sin u, 0).$$

Dado $p = \varphi(q) \in S$, tenemos la base de $T_p S$ dada por $\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$, donde $\varphi_v(q) = (0, 0, 1)$. Llamemos $q = (u_0, v_0)$ y calculemos $dN_p(\varphi_v(q))$, para lo que tomamos la curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ dada por $\gamma(t) := \varphi(u_0, v_0 + t)$, de modo que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = \varphi_v(q)$. Entonces,

$$dN_p(\varphi_v(q)) = \left. \frac{d}{dt} N(\gamma(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (\cos u_0, \sin u_0, 0) \right|_{t=0} = 0.$$

Esto dice que $W_p(\varphi_v(q)) = 0$, por lo que una de las columnas de su representación matricial en la base $\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$ está formada por ceros. Por lo tanto, su determinante siempre será nulo y la curvatura de Gauss del cilindro es $K \equiv 0$.

Notar que el cilindro y el plano tienen en común tener curvatura de Gauss idénticamente nula. Esto no es algo casual, sino que está relacionado, tal como veremos más adelante, con que ambas superficies son localmente isométricas (ver Ejemplo 3.2.9).

4. Sean $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Su gráfica es una superficie regular S que puede parametrizarse globalmente con $\varphi(u, v) := (u, v, f(u, v))$, $(u, v) \in U$ y orientarse mediante

$$N(\varphi(u, v)) = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}.$$

Si $q \in U$ es un punto crítico de f , el espacio tangente en $p := \varphi(q)$ es

$$T_p S = \text{span}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$$

y la aplicación de Weingarten está dada en esa base por

$$W_p = \begin{pmatrix} f_{uu}(q) & f_{uv}(q) \\ f_{uv}(q) & f_{vv}(q) \end{pmatrix},$$

que no es otra cosa que la matriz Hessiana de f en q .

Así, la curvatura de Gauss de S es

$$K(p) = \det W_p = f_{uu}(q)f_{vv}(q) - f_{uv}(q)^2.$$

Ejercicio 4.3.4. Completar las cuentas del ejemplo anterior y concluir que si $K(p) > 0$, entonces f tiene un extremo local en p , y que si $K(p) < 0$, entonces f tiene un punto silla en q .

4.4 Segunda forma fundamental

Proposición 4.4.1. *La aplicación de Weingarten es una aplicación lineal autoadjunta.*

Demostración. Dado que para cada $p \in S$, $W_p = -dN_p$, veamos que dN_p es una aplicación lineal autoadjunta. Como dN_p es una aplicación lineal, es suficiente verificar que $\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle$ para una base $\{w_1, w_2\}$ de $T_p S$.

Consideremos una parametrización φ de S en p , la base asociada $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ de $T_p S$ y veamos que $\langle dN_p(\varphi_u), \varphi_v \rangle = \langle \varphi_u, dN_p(\varphi_v) \rangle$. Por la Observación 4.2.3, debemos verificar que

$$\langle (N \circ \varphi)_u, \varphi_v \rangle = \langle \varphi_u, (N \circ \varphi)_v \rangle.$$

Ahora bien, por ortogonalidad, $\langle N, \varphi_u \rangle = 0$. Derivando respecto de v ambos miembros se tiene que $\langle N_v, \varphi_u \rangle + \langle N, \varphi_{uv} \rangle = 0$. Análogamente, se tiene que $\langle N_u, \varphi_v \rangle + \langle N, \varphi_{uv} \rangle = 0$ a partir de $\langle N, \varphi_v \rangle = 0$. Luego, $\langle N_v, \varphi_u \rangle = -\langle N, \varphi_{uv} \rangle = \langle N_u, \varphi_v \rangle$ y, por lo tanto, W_p es una aplicación lineal autoadjunta. ♣

Sean S una superficie regular orientada y $p \in S$. Como la aplicación de Weingarten es una aplicación lineal autoadjunta, sabemos desde el álgebra lineal que existe una base ortonormal $\{v_1, v_2\}$ de $T_p S$ formada por autovectores de W_p respecto de la cual su matriz es la forma

$$W_p = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix},$$

siendo k_1 y k_2 los autovalores correspondientes a v_1 y v_2 respectivamente. En este contexto se tienen las siguientes definiciones.

Definición 4.4.2. Los autovectores v_1 y v_2 se llaman *direcciones principales*. Los autovalores k_1 y k_2 se llaman *curvaturas principales*.

Con esto en mente, podemos escribir a las curvaturas de Gauss y media en términos de las curvaturas principales:

$$K(p) = \det W_p = k_1 k_2 \quad \text{y} \quad H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} W_p = \frac{k_1 + k_2}{2}. \quad (4.2)$$

Definición 4.4.3. La forma cuadrática asociada a W_p se llama *segunda forma fundamental* de S en p y se denota como $\mathbb{I}_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$. Explícitamente,

$$\mathbb{I}_p(v) := \langle W_p(v), v \rangle = \langle -dN_p(v), v \rangle.$$

Observación 4.4.4.

- * Si $v \in T_p S$ es unitario, $\mathbb{I}_p(v)$ coincide con la curvatura normal de S en p en la dirección de v .
- * Las direcciones principales v_1 y v_2 pueden elegirse de modo que las curvaturas principales k_1 y k_2 son el mínimo y el máximo, respectivamente, de la forma cuadrática \mathbb{I}_p sobre el conjunto $\{v \in T_p S \mid \|v\| = 1\}$. Se dice que k_1 y k_2 son las curvaturas normales mínima y máxima.
- * Si $v \in T_p S$ es unitario, $v = v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta$ siendo θ el ángulo determinado por v_1 y v .

Entonces,

$$\mathbb{I}_p(v) = \mathbb{I}_p(v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) = \mathbb{I}_p(v_1) \cos^2 \theta + \mathbb{I}_p(v_2) \sin^2 \theta = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

Recordando que como v es unitario, $\mathbb{I}_p(v) = \kappa_n(v)$, tenemos la *fórmula de Euler*³:

$$\kappa_n(v) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta. \quad (4.3)$$

Ejemplo 4.4.5. Consideremos el cilindro S parametrizado localmente por

$$\varphi(u, v) := (\cos u, \sin u, v), \quad (u, v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R},$$

y orientado mediante

$$N(\varphi(u, v)) := (\cos u, \sin u, 0).$$

Recordando lo que hicimos en el Ejemplo 4.1.4, fijando $p = (0, 1, 0) \in S$, teníamos que

$$dN_p(v_1) = v_1 \quad \text{y} \quad dN_p(v_2) = 0,$$

donde $v_1 = (-1, 0, 0)$ y $v_2 = (0, 0, 1)$. Notar que eso implica que ambos son autovectores asociados a distintos autovalores. En términos de lo que venimos estudiando, v_1 y v_2 son direcciones principales cuyas curvaturas principales asociadas son -1 y 0 , respectivamente. Esto dice, además, que la matriz de W_p en la base de direcciones principales $\{v_1, v_2\}$ es

$$W_p = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

³L. Euler (1707–1783), matemático suizo.

4.5 Secciones normales y curvatura geodésica

Para la demostración del siguiente resultado ver el Ejercicio 3.69, página 159 de [Tap16].

Lema 4.5.1. Sean S una superficie regular, $p \in S$, $v \in T_p S$ un vector no nulo y N un vector unitario normal a S en p . Existe un entorno V de p en S tal que la intersección de V con el plano $p + \text{span}\{v, N\}$ es la traza de una curva regular.

Proposición 4.5.2. Sean S una superficie regular orientada, $p \in S$ y $v \in T_p S$ unitario. Entonces,

1. para toda curva regular $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ parametrizada por su longitud de arco tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = v$ se tiene que

$$\langle \ddot{\gamma}(0), N(p) \rangle = \text{II}_p(v).$$

Es decir, la curvatura normal de S en p en la dirección de v es la componente normal de la aceleración de la curva γ en p .

2. la curvatura mínima en p entre las curvas que satisfacen lo anterior es $|\text{II}_p(v)|$.

Demostración.

1. Es inmediato a partir de la definición de segunda forma fundamental y de la ecuación (4.1).

2. Dado $v \in T_p S$ unitario, sea $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una curva parametrizada por longitud de arco tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = v$. Como sabemos, la curvatura κ en p de esta curva arbitraria γ contenida en \mathbb{R}^3 es $\|\ddot{\gamma}(0)\|$ y $\kappa_n = \kappa \cos \theta$ siendo θ el ángulo que forman $\ddot{\gamma}(0)$ y $N(p)$.

Entonces,

$$|\text{II}_p(v)| = |\langle \ddot{\gamma}(0), N(p) \rangle| = \|\ddot{\gamma}(0)\| \|N(p)\| |\cos \theta| \leq \|\ddot{\gamma}(0)\| = \kappa.$$

Por lo tanto, lo que hay que responder es si existe una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\kappa = \langle \ddot{\alpha}(0), N(p) \rangle = \text{II}_p(\dot{\alpha}(0))$. Para esto consideremos el subespacio $\text{span}\{v, N(p)\}$. Luego, por el lema anterior, se tiene que la intersección de $p + \text{span}\{v, N(p)\}$ con un entorno suficientemente pequeño de p en S es la traza de una curva regular α . Parametrizando a α por longitud de arco se tiene que $\alpha(0) = p$ y $\dot{\alpha}(0) = v$. De este modo, la curvatura de α en p resulta ser κ . ♣

Definición 4.5.3. La curva α dada por la intersección de la superficie S y el plano $p + \text{span}\{v, N(p)\}$ es la **sección normal** de S en p en la dirección de v .

Observación 4.5.4.

- * $\kappa_n(v) = \text{II}_p(v)$ es la curvatura de la sección normal de S en p en la dirección de v .
- * Las curvaturas mínima y máxima k_1 y k_2 son las curvaturas de las secciones normales en las direcciones principales v_1 y v_2 .

Sean S una superficie regular orientada, $p \in S$ y $v \in T_p S$ unitario. Sea $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ parametrizada por su longitud de arco tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = v$.

Buscamos medir cuánto está doblando la curva γ hacia la izquierda o hacia la derecha al pasar por el punto p , es decir, cuán lejos está de avanzar “recto” hacia adelante al moverse por la superficie.

Para ello, estudiamos el vector aceleración $\ddot{\gamma}(0)$. Dado que los vectores v y $N(p)$ son ortonormales, podemos completar a una base ortonormal de \mathbb{R}^3 con un vector obtenido al rotar v un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ radianes en sentido antihorario (respecto de la orientación). Explícitamente, consideramos la base $\{v, R_{\frac{\pi}{2}}(v), N(p)\}$, donde $R_{\frac{\pi}{2}}(v) := N(p) \times v$ (ver [Tap16], p.150).

Como $\ddot{\gamma}(0)$ es ortogonal a $v = \dot{\gamma}(0)$, tenemos que $\ddot{\gamma}(0) \in \text{span}\{R_{\frac{\pi}{2}}(v), N(p)\}$. Por 1. de la Proposición 4.5.2, la componente normal de $\ddot{\gamma}(0)$ es la curvatura normal, de modo que

$$\ddot{\gamma}(0) = \kappa_n(v)N(p) + \kappa_g R_{\frac{\pi}{2}}(v), \quad (4.4)$$

para algún escalar κ_g .

Definición 4.5.5. El escalar κ_g se llama *curvatura geodésica* de γ en p .

En el contexto de la definición previa, observemos que como $N(p)$ y $R_{\frac{\pi}{2}}(v)$ son ortonormales, tomando norma en (4.4),

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2. \quad (4.5)$$

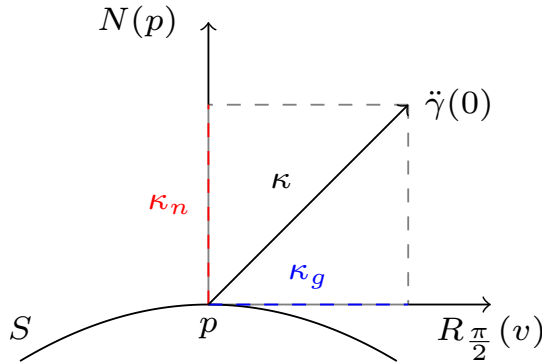


Figura 4.3: La descomposición del vector aceleración de la curva γ en el plano $\text{span}\{R_{\frac{\pi}{2}}(v), N(p)\}$, junto con la curvatura normal en la dirección de v (en rojo) y su curvatura geodésica (en azul).

Ejemplo 4.5.6. En un plano las únicas curvas con curvatura geodésica nula son las rectas. En efecto, ya vimos en el Ejemplo 4.1.3 que la curvatura normal de un plano es siempre nula, por lo que la ecuación (4.5) implica que la curvatura geodésica de una curva es idénticamente nula si y solo si su curvatura es idénticamente nula, y esto sucede si y solo si la curva es un segmento de recta (ver Ejercicio 1.2.2).

Ejercicio 4.5.7. Calcular la curvatura geodésica de un paralelo de la esfera S^2 .

4.6 Líneas de curvatura y curvas asintóticas

A continuación, estudiamos una clase de curvas distinguidas dentro de las posibles curvas que se encuentran contenidas en una superficie regular.

Definición 4.6.1. Dada una superficie regular S , una curva regular $\gamma : I \rightarrow S$ tal que $\dot{\gamma}(s)$ es una dirección principal en $\gamma(s)$ para todo $s \in I$ se dice que es una **línea de curvatura**.

Proposición 4.6.2 (Olinde Rodrigues⁴). Una curva regular $\gamma(s)$ en S es una línea de curvatura si y solo si

$$N'(s) = \lambda(s)\dot{\gamma}(s)$$

donde $N(s) = (N \circ \gamma)(s)$ y $\lambda(s)$ es una función suave de s . En este caso, $-\lambda(s)$ es la curvatura (principal) a lo largo de $\dot{\gamma}(s)$.

Demostración. Sea $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ una línea de curvatura. Entonces, para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ se tiene que $\dot{\gamma}(s)$ es una dirección principal, por lo que

$$dN(\dot{\gamma}(s)) = N'(s) = \lambda(s)\dot{\gamma}(s),$$

para alguna función $\lambda(s)$. La suavidad de $\lambda(s)$ se deduce de escribir

$$\lambda(s) = \frac{\langle N'(s), \dot{\gamma}(s) \rangle}{\|\dot{\gamma}(s)\|^2} = \langle N'(s), \dot{\gamma}(s) \rangle.$$

La recíproca es directa a partir de la definición de línea de curvatura. ♣

Definición 4.6.3. Dado $p \in S$, una **dirección asintótica** de S en p es una dirección $v \in T_p S$ tal que $\kappa_n(v) = 0$.

Una **curva asintótica** en S es una curva regular $\gamma : I \rightarrow S$ tal que para cada $s \in I$, el vector tangente $\dot{\gamma}(s)$ es una dirección asintótica.

Observación 4.6.4. Es claro que en un punto donde las curvaturas principales tienen el mismo signo no hay direcciones asintóticas ya que $\kappa_n(v) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta \neq 0$ para todo v , dado que k_1 y k_2 tienen el mismo signo.

Definición 4.6.5. Se dice que $w_1, w_2 \in T_p S$ son **direcciones conjugadas** en $p \in S$ si

$$\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle = 0.$$

Observación 4.6.6.

- * La definición solo depende de la dirección de los vectores. En efecto, si $v_1 = \lambda_1 w_1$ y $v_2 = \lambda_2 w_2$, entonces es sencillo (usando propiedades del producto interno) mostrar que v_1 y v_2 son conjugadas si y solo si w_1 y w_2 lo son.
- * Las direcciones principales son conjugadas. En efecto, si $\{v_1, v_2\}$ es una base de direcciones principales de $T_p S$ donde v_i es la dirección asociada a la curvatura k_i , $i = 1, 2$,

$$\langle dN_p(v_1), v_2 \rangle = \langle k_1 v_1, v_2 \rangle = k_1 \langle v_1, v_2 \rangle = 0,$$

donde en la última igualdad hemos usado que las direcciones principales son ortogonales.

⁴Olinde Rodrigues (1795–1851), matemático francés.

4.7 Clasificación de puntos

La curvatura Gaussiana permite clasificar los puntos de una superficie como muestra la siguiente definición.

Definición 4.7.1. Se dice que un punto $p \in S$ es

- * *elíptico* si $K(p) > 0$.
- * *hiperbólico* si $K(p) < 0$.
- * *parabólico* si $K(p) = 0$ y $W_p \neq 0$.
- * *planar* si $W_p = 0$.

Es claro que esta clasificación no depende de la orientación de S .

Veamos qué conclusiones sobre el comportamiento local de la superficie se pueden sacar a partir del análisis de los puntos de S en cada uno de los casos que presenta la definición anterior.

Puntos elípticos. Si $K(p) > 0$, entonces ambas curvaturas principales k_1 y k_2 deben tener el mismo signo, por (4.2). En tal caso, por la fórmula de Euler (4.3), todas las curvaturas normales en p tienen el mismo signo. Recordando que $\kappa_n(v) = \kappa \cos \theta$, donde κ es la curvatura de una curva γ que tiene a v como vector tangente en el punto p y θ es el ángulo que forman los vectores normales a S y de γ , concluimos que en un punto elíptico, *los vectores normales de todas las curvas que pasan por el punto apuntan hacia el mismo lado del plano tangente*.

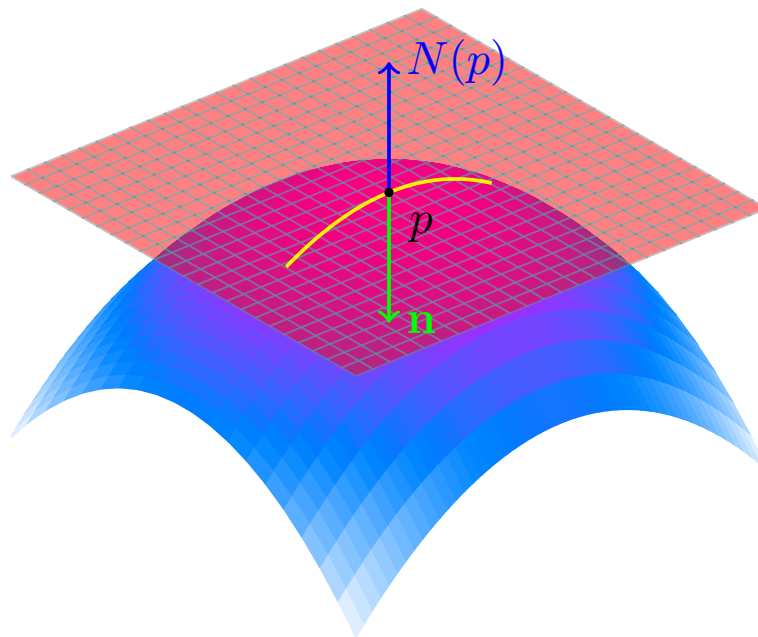


Figura 4.4: El vértice de un paraboloides como ejemplo de punto elíptico. En azul el vector normal a la superficie en el punto p y en verde el vector normal de la curva amarilla.

Ejemplo 4.7.2.

1. Todos los puntos de una esfera son puntos elípticos.

Sean $S_R^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ y $p \in S_R^2$. Como ya vimos en el Ejemplo 4.2.4,

$$W_p = -\frac{1}{R} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y, por lo tanto, $K = \frac{1}{R^2} > 0$ para todos los puntos.

Más aún, todas las curvaturas normales tienen el mismo valor. En efecto, dado $v \in T_p S$ unitario,

$$\mathbb{I}_p(v) = \langle W_p(v), v \rangle = \frac{1}{R} \langle v, v \rangle = \frac{1}{R}.$$

2. En el paraboloide $S = \{(x, y, z) \mid z = x^2 + y^2\}$, $p = (0, 0, 0)$ es un punto elíptico.

Tal como vimos en el Ejemplo 4.2.4, en $p = (0, 0, 0)$ la aplicación de Weingarten está dada por

$$W_p = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Luego, $K = 4 > 0$ y $p = (0, 0, 0)$ es un punto elíptico en el paraboloide S .

Puntos hiperbólicos. Si $K(p) < 0$, las curvaturas principales k_1 y k_2 tienen signos distintos y, razonando de la misma manera que para los puntos elípticos, la fórmula de Euler dice que los vectores normales a las diferentes curvas contenidas en S que pasan por p *no apuntan todos hacia el mismo lado del plano tangente a S en p .*

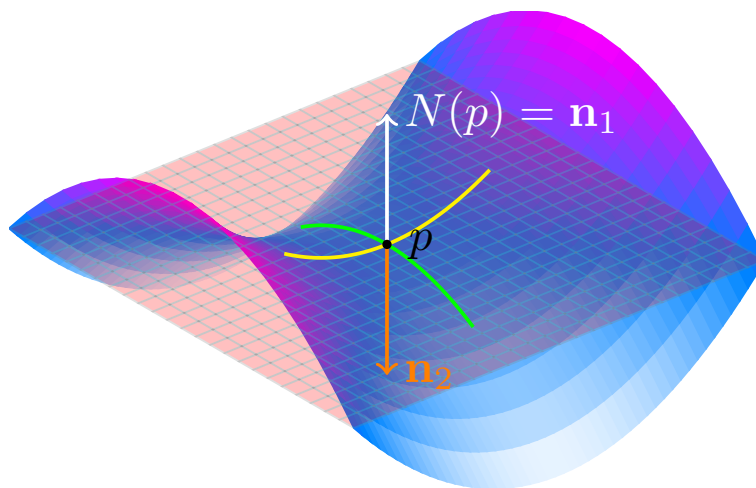


Figura 4.5: El vértice de un paraboloide hiperbólico como ejemplo de punto hiperbólico. El vector normal a la curva amarilla (\mathbf{n}_1 , en blanco) apunta en la misma dirección que $N(p)$, mientras que el vector normal a la curva verde (\mathbf{n}_2 , en naranja) apunta hacia el lado contrario.

Ejemplo 4.7.3. El punto $p = (0, 0, 0)$ en $S = \{(x, y, z) : z = x^2 - y^2\}$ es un punto hiperbólico.

Consideremos la parametrización $\varphi(u, v) := (u, v, u^2 - v^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ y orientemos la superficie mediante

$$N(\varphi(u, v)) := \left(\frac{-2u}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}, \frac{2v}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} \right).$$

Notemos que si $q = (0, 0)$ (de modo que $\varphi(q) = p$),

$$\varphi_u(q) = (1, 0, 0) \quad \text{y} \quad \varphi_v(q) = (0, 1, 0).$$

Para el primer vector de la base, tomamos $\gamma_1(t) = \varphi(t, 0) = (t, 0, t^2)$, que cumple que $\gamma_1(0) = p$ y $\gamma'_1(0) = \varphi_u(q)$. Luego,

$$dN_p(\varphi_u(q)) = \frac{d}{dt} N(\gamma_1(t)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \frac{(-2t, 0, 1)}{\sqrt{4t^2 + 1}} \Big|_{t=0} = (-2, 0, 0) = -2\varphi_u(q).$$

Análogamente,

$$dN_p(\varphi_v(q)) = (0, 2, 0) = 2\varphi_v(q).$$

Por lo tanto,

$$W_p(\varphi_u(q)) = 2\varphi_u(q), \quad W_p(\varphi_v(q)) = -2\varphi_v(q)$$

y su representación matricial en la base $\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$ es

$$W_p = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $K(p) < 0$.

Puntos parabólicos. Si $K(p) = 0$ y $W_p \neq 0$ entonces se tiene que

$$W_p = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad W_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix},$$

con $k_1 \neq 0$ o $k_2 \neq 0$, respectivamente. En este caso, alguna curva contenida en S que pasa por p tiene vector normal \mathbf{n} ortogonal a $N(p)$.

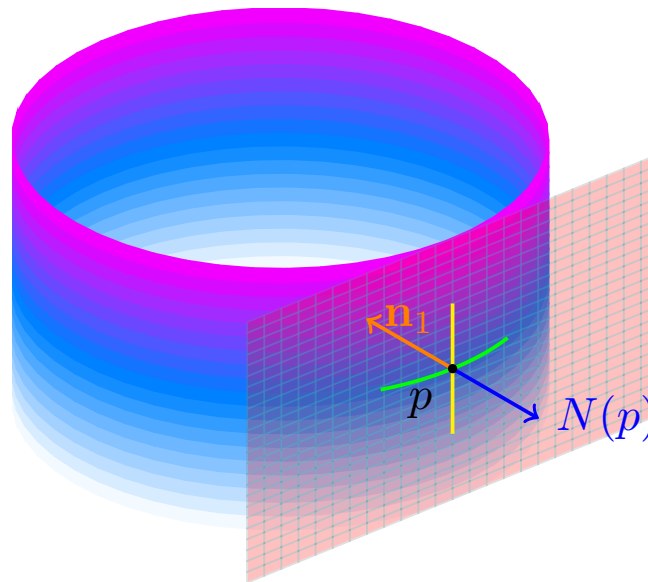


Figura 4.6: Un punto de un cilindro como ejemplo de punto parabólico. El vector normal a la curva verde (\mathbf{n}_1 , en naranja) apunta hacia el lado opuesto al normal, mientras que el vector normal a la curva amarilla es el vector nulo, puesto que ésta es un segmento de recta, haciendo que una de las curvaturas principales sea cero (recordemos que ya vimos en el Ejemplo 4.4.5 cuáles son las direcciones principales).

Ejemplo 4.7.4. Todos los puntos del cilindro $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ son parabólicos ya que $k_1 = -1$ y $k_2 = 0$, como se analizó en el Ejemplo 4.4.5.

Puntos planares. Si $W_p = 0$ entonces $k_1 = k_2 = 0$ y, por la fórmula de Euler, todas las curvaturas normales $\kappa_n = 0$. O sea, todas las curvas contenidas en S que pasan por p tienen vector normal \mathbf{n} ortogonal a $N(p)$.

Ejemplo 4.7.5.

1. Todos los puntos de un plano son planares. En efecto, cualquier curva que uno tome contenida en él tendrá a su vector normal \mathbf{n} ortogonal al vector normal a la superficie N . Luego, como $\kappa_n = \kappa \cos \theta$, donde $\theta = \angle(\mathbf{n}, N)$, tenemos que su curvatura normal es cero.
2. Si S es la superficie de revolución generada por la rotación de la curva $\gamma(t) = (0, t, t^4)$ en el plano yz alrededor del eje z , $p = (0, 0, 0) \in S$ es un punto planar.

Notemos que la curvatura de esa curva en p es cero, ya que $\gamma''(0) = 0$ (recordemos la fórmula (1.2)). Por otro lado, el plano tangente en p es simplemente el plano xy , de modo que $N(p) = \pm(0, 0, 1)$. Así, dada una dirección $v \in T_p S$, la sección normal asociada es la intersección de la superficie con el plano vertical

$$p + \text{span}\{v, N(p)\} = (0, 0, 0) + \text{span}\{v, (0, 0, 1)\},$$

que resulta ser una curva generatriz, es decir, una rotación de la curva γ . Como rotar no cambia la curvatura, la sección normal también tendrá curvatura nula en p , por lo que $\kappa_n(v) = 0$. Como v era arbitrario, $W_p \equiv 0$ y p es un punto planar.

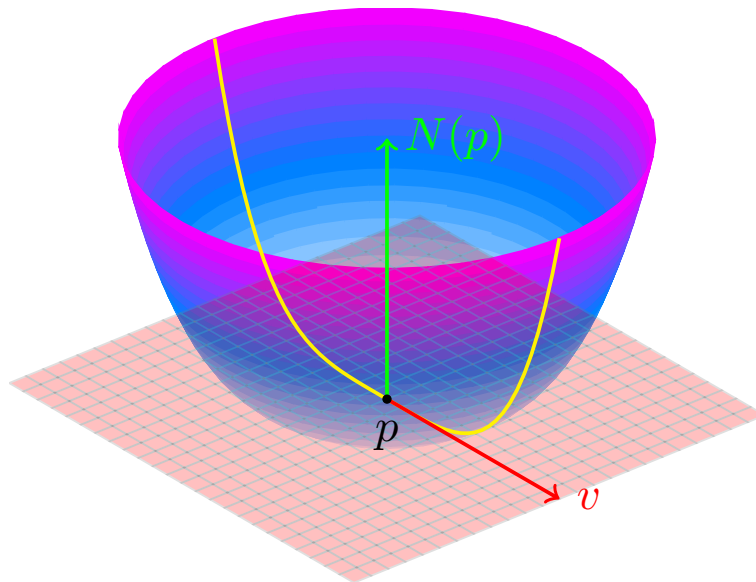


Figura 4.7: La sección normal (en amarillo) obtenida al intersectar la superficie con el plano generado por los vectores v y $N(p)$.

Puntos umbilicales.

Definición 4.7.6. Un punto $p \in S$ es *umbilical* si $k_1 = k_2$.

Si un punto p es umbilical, por la fórmula de Euler, todas las curvaturas normales son iguales. En particular, todas las direcciones tangentes son direcciones principales y todas las curvas que pasan por p son líneas de curvatura.

Ejemplo 4.7.7.

1. En un plano todos sus puntos son umbilicales ($k_1 = k_2 = 0$).
2. En una esfera todos sus puntos son umbilicales. En efecto, recordando lo hecho en el Ejemplo 4.7.2, si R es el radio de la esfera,

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{R}.$$

3. En el paraboloide $S = \{(x, y, z) \mid z = x^2 + y^2\}$, el punto $p = (0, 0, 0)$ es umbilical, ya que, tal como vimos en el Ejemplo 4.2.4, sus curvaturas principales son $k_1 = k_2 = 2$.

Decir que en un entorno de cualquier punto de una superficie ésta se curva de la misma manera en todas las direcciones es algo llamativo. Dos ejemplos claros de esta situación son una esfera y un plano (tal como vimos más arriba). Sin embargo, si uno le pide además a la superficie que sea conexa, estos son los únicos ejemplos donde sucede.

Proposición 4.7.8. Si todos los puntos de una superficie conexa S son umbilicales, entonces S está contenida en una esfera o en un plano.

Demostración. Sean $p \in S$ y $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrización local de S en p tal que $\varphi(U)$ es conexo. Como todo $q \in \varphi(U)$ es umbilical, todas las direcciones son principales, de modo que para todo $w \in T_q S$ existe $\lambda(q)$ tal que

$$dN_q(w) = \lambda(q)w, \quad (4.6)$$

donde $\lambda(q)$ es una función suave.

Veamos que λ es constante en $\varphi(U)$. Para esto, usando que $dN_q(\varphi_u) = N_u$ y $dN_q(\varphi_v) = N_v$ y que el w en (4.6) es arbitrario, se tiene que

$$N_u = \lambda \varphi_u \quad \text{y} \quad N_v = \lambda \varphi_v,$$

donde estamos omitiendo los puntos de evaluación.

Derivando N_u con respecto a v y N_v con respecto a u ,

$$N_{uv} = \lambda_v \varphi_u + \lambda \varphi_{uv} \quad \text{y} \quad N_{vu} = \lambda_u \varphi_v + \lambda \varphi_{vu}.$$

Al restar estas expresiones se tiene que $0 = \lambda_u \varphi_v - \lambda_v \varphi_u$ y, como φ_u y φ_v son linealmente independientes, entonces $\lambda_v = \lambda_u = 0$. Luego, por ser $\varphi(U)$ conexo, λ es constante en $\varphi(U)$.

Si $\lambda \equiv 0$, entonces $N_u = N_v = 0$ y $N = N_0$, con N_0 constante. Esto implica, después de un proceso de derivación, que $\langle \varphi(u, v), N_0 \rangle$ es constante y, por lo tanto, $\varphi(U)$ está contenido en un plano.

Si $\lambda \neq 0$, consideramos los puntos de la forma $\mathbf{y}(u, v) = \varphi(u, v) - \frac{1}{\lambda} N(u, v)$. Derivando y usando que $N_u = \lambda \varphi_u$, vemos que $\mathbf{y}_u = \mathbf{y}_v = 0$. Por lo tanto, \mathbf{y} es una función constante, digamos $\mathbf{y} \equiv y_0$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Eso nos dice que $\|\varphi(u, v) - y_0\|^2 = 1/\lambda^2$, es decir, $\varphi(U)$ está contenido en una esfera de centro y_0 y radio $\frac{1}{|\lambda|}$.

Solo resta ver que esto que probamos localmente lo podemos ampliar a todo S . Pero como S es conexa, dado cualquier otro punto $r \in S$, existe una curva continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = r$. Usando que γ es continua y que $[0, 1]$ es compacto, se puede ver que $\gamma([0, 1])$ está cubierto por finitos entornos V_t , cada uno de los cuales está contenido en una esfera o en un plano. La continuidad de γ garantiza que si uno de esos entornos está en un plano (o esfera), también lo estarán los otros (de lo contrario habría algún entorno que no estaría contenido en ninguna de las dos cosas, y eso no puede ser). Como r es arbitrario, se obtiene el resultado buscado. ♣

4.7.1 La indicatriz de Dupin

El siguiente concepto permite dar otra interpretación geométrica a la clasificación de puntos de una superficie regular orientada que venimos estudiando.

Dado $p \in S$, la *indicatriz de Dupin*⁵ en p es el conjunto

$$\{w \in T_p S \mid |\Pi_p(w)| = 1\}.$$

⁵C. Dupin (1784–1873), matemático francés.

Sea $\{v_1, v_2\}$ una base de $T_p S$ dada por autovectores de la aplicación de Weingarten W_p . Entonces, dado $w \in T_p S$ consideremos su expresión en coordenadas cartesianas $w = \zeta v_1 + \eta v_2$ y su expresión en coordenadas polares $w = \rho v$ con $\|v\| = 1$ y $\rho \geq 0$.

Así, $v = (\cos \theta)v_1 + (\sin \theta)v_2$ y $w = \rho(\cos \theta)v_1 + \rho(\sin \theta)v_2$ siendo $\theta = \angle(v_1, w)$.

Entonces, la indicatriz de Dupin en p es el conjunto de vectores $w \in T_p S$ tales que

$$\|_p(w) = \|_p(\rho v) = \rho^2 \|_p(v) = \rho^2 \kappa_n(v) = \rho^2 (k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta) = k_1 \zeta^2 + k_2 \eta^2 = \pm 1.$$

Así, vemos que la indicatriz de Dupin representa distintas cónicas en las coordenadas (ζ, η) de $T_p S$ según sean los signos de las curvaturas principales k_1 y k_2 . Explícitamente,

- * En un punto elíptico, la indicatriz es una elipse que se convierte en una circunferencia si el punto es umbilical no planar.
- * En un punto hiperbólico, la indicatriz define dos hipérbolas con asíntotas en común. Es sencillo verificar que en la dirección de estas asíntotas, la curvatura normal es nula.
- * En un punto parabólico, la indicatriz determina un par de rectas paralelas.

4.8 La aplicación de Gauss en coordenadas locales

Los conceptos que hemos estudiado en este capítulo han sido introducidos de manera intrínseca, es decir, sin hacer referencia a ninguna parametrización local. Sin embargo, a la hora de hacer cuentas hemos recurrido en muchas oportunidades a cartas locales. Sería útil entonces conocer la expresión de estos conceptos en términos de un sistema de coordenadas.

4.8.1 Coeficientes de la segunda forma fundamental

Sea $\varphi(u, v)$ una parametrización local de S en $p \in \varphi(U)$ y

$$N(u, v) := N(\varphi(u, v)) := \frac{\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)}{\|\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)\|}$$

una orientación de S en p para $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$.

Dada la curva $\gamma(t) := \varphi(u(t), v(t)) \subset \varphi(U)$, sabemos que si $\varphi(q) = \gamma(0) = p$,

$$dN_p(\gamma'(0)) = u'(0)N_u(q) + v'(0)N_v(q).$$

En lo que sigue, para no sobrecargar la notación, omitiremos los puntos de evaluación, de modo que, por ejemplo, escribiremos N_u en vez de $N_u(q)$.

Como $N_u, N_v \in T_p S$, podemos escribirlos como combinación lineal de los vectores de la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$,

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v \\ N_v &= a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Es decir, en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$,

$$dN_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Aplicando la definición de la segunda forma fundamental y usando propiedades del producto interno y que dN_p es una aplicación autoadjunta, se puede obtener la expresión de \mathbb{I}_p en coordenadas.

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_p(\gamma'(0)) &= -\langle dN_p(\gamma'(0)), \gamma'(0) \rangle = -\langle u'N_u + v'N_v, u'\varphi_u + v'\varphi_v \rangle \\ &= (u')^2 e + 2u'v'f + (v')^2 g, \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde $e := -\langle N_u, \varphi_u \rangle$, $f := -\langle N_u, \varphi_v \rangle = -\langle N_v, \varphi_u \rangle$ y $g := -\langle N_v, \varphi_v \rangle$.

Definición 4.8.1. Las funciones e , f y g se llaman *coeficientes de la segunda forma fundamental* de S en p asociados a la parametrización $\varphi(u, v)$.

Observación 4.8.2.

1. Es claro que si p se mueve sobre $\varphi(U)$, también lo hacen e , f y g . De esta manera, $e(u, v)$, $f(u, v)$ y $g(u, v)$ son funciones suaves sobre U .
2. Hay una manera alternativa de calcular los coeficientes. Observando que $\langle N, \varphi_u \rangle = 0$ y derivando respecto de u , vemos que $e = -\langle N_u, \varphi_u \rangle = \langle N, \varphi_{uu} \rangle$.

Análogamente, $f = \langle N, \varphi_{uv} \rangle$ y $g = \langle N, \varphi_{vv} \rangle$.

Veamos ahora qué relación existe entre los coeficientes de \mathbb{I}_p y los elementos de la matriz de dN_p en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$.

Usando las expresiones (4.7),

$$* \quad -e = \langle N_u, \varphi_u \rangle = \langle a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v, \varphi_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F,$$

$$* \quad -f = \langle N_u, \varphi_v \rangle = \langle a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v, \varphi_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G,$$

$$* \quad -f = \langle N_v, \varphi_u \rangle = \langle a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v, \varphi_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F,$$

$$* \quad -g = \langle N_v, \varphi_v \rangle = \langle a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v, \varphi_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G,$$

donde E , F y G son los coeficientes de la primera forma fundamental \mathbb{I}_p .

Notemos que estas ecuaciones pueden escribirse de manera matricial como

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

4.8.2 Curvatura de Gauss y curvatura media

Consideremos la ecuación (4.9). Observando que como S es una superficie regular, el determinante $EG - F^2 \neq 0$, podemos invertir la matriz correspondiente y despejar los coeficientes de la segunda forma fundamental:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}.$$

Así, se puede expresar la curvatura Gaussiana en términos de los coeficientes de la primera y la segunda forma

$$K = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

También podemos calcular los elementos de la matriz,

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, & a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, & a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Las ecuaciones anteriores junto con las ecuaciones (4.7) son llamadas *ecuaciones de Weingarten*.

Ahora veamos que también la curvatura media puede expresarse en términos de los coeficientes de la primera y la segunda forma.

Recordemos que estaba definida como $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$, donde $-k_1$ y $-k_2$ son las raíces de la ecuación $\det(dN_p + kI) = 0$, pues son los autovalores de dN_p . Luego, la ecuación

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + k \end{pmatrix} = 0,$$

es equivalente a

$$k^2 + (a_{11} + a_{22})k + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Usando propiedades de las raíces de un polinomio cuadrático tenemos que $k_1 + k_2 = -a_{11} - a_{22}$. Así, usando la expresión para los a_{ij} dada en (4.10),

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \quad (4.11)$$

Se enuncia entonces el siguiente resultado.

Proposición 4.8.3. *Sea S una superficie regular orientada por un campo normal unitario N . Dados $p \in S$ y una parametrización local $\varphi : U \rightarrow S$ alrededor de p , las curvaturas de Gauss y media en el punto p están dadas por*

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2},$$

donde E, F y G son los coeficientes de la primera forma fundamental y e, f y g son los coeficientes de la segunda forma fundamental.

Ejemplo 4.8.4 (Superficies de revolución). Consideremos una superficie de revolución parametrizada localmente por $\varphi(u, v) = (\phi(v) \cos u, \phi(v) \sin u, \psi(v))$, con $u \in (0, 2\pi)$, $v \in (a, b)$ y $\phi(v) > 0$.

Como ya vimos en el Ejercicio 3.1.8, los coeficientes de la primera forma fundamental son $E = \phi(v)^2$, $F = 0$ y $G = \phi'(v)^2 + \psi'(v)^2$. Suponiendo que la curva que rota está parametrizada por longitud de arco, se tiene que $G = 1$.

Calculemos ahora los coeficientes de la segunda forma fundamental,

$$e = \langle \varphi_{uu}, N \rangle = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \langle \varphi_u \times \varphi_v, \varphi_{uu} \rangle = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uu}) = -\phi\psi'.$$

Análogamente, $f = 0$ y $g = \phi''\psi' - \phi'\psi''$.

Luego,

$$K = -\frac{\psi'(\psi'\phi'' - \phi'\psi'')}{\phi}.$$

Ahora bien, recordando que la generatriz está parametrizada por su longitud de arco se tiene que $(\phi')^2 + (\psi')^2 = 1$. Derivando en ambos miembros se llega a que $\phi'\phi'' = -\psi'\psi''$, de modo que

$$K = -\frac{\psi'(\psi'\phi'' - \phi'\psi'')}{\phi} = -\frac{(\psi')^2\phi'' - \psi'\phi'\psi''}{\phi} = -\frac{(\psi')^2\phi'' - (\phi')^2\phi''}{\phi} = -\frac{\phi''}{\phi}.$$

Ejemplo 4.8.5. Podemos aplicar el ejemplo anterior para calcular la curvatura de Gauss del toro generado por la curva

$$\gamma(v) = (a + r \cos v, 0, r \sin v), \quad v \in (0, 2\pi),$$

al rotar alrededor del eje z , donde $a > r > 0$ son constantes.

Reparametrizando la curva γ por longitud de arco tenemos

$$\gamma(s) = (a + r \cos(s/r), 0, r \sin(s/r)).$$

Consideremos la parametrización

$$\varphi(u, s) = ((a + r \cos(s/r)) \cos u, (a + r \cos(s/r)) \sin u, r \sin(s/r))$$

con $u \in (0, 2\pi)$ y $s \in (0, 2\pi r)$, que cubre toda la superficie salvo por un paralelo y un meridiano.

Entonces, $\phi(s) = a + r \cos(s/r)$, $\psi(s) = r \sin(s/r)$ y

$$K = -\frac{\ddot{\phi}}{\phi} = -\frac{-\cos(s/r)\frac{1}{r}}{a + r \cos(s/r)} = \frac{\cos(s/r)}{r(a + r \cos(s/r))}.$$

En términos de las coordenadas (u, v) que usamos en el Ejemplo 3.1.14, la curvatura de Gauss está dada por

$$K = \frac{\cos v}{r(a + r \cos(v))}.$$

Ejercicio 4.8.6. Consideremos la *tractriz*⁶ dada por

$$\gamma(t) = (\sin t, \cos t + \ln(\tan(t/2))), \quad t \in (\pi/2, \pi).$$

⁶Del latín *trahere* “arrastrar”. El nombre, dado por el matemático neerlandés C. Huygens (1629–1695), se debe a que representa la curva que describiría un objeto que es arrastrado en un plano por una cuerda de longitud constante cuyo otro extremo se mueve a lo largo de una recta horizontal.

La superficie de revolución obtenida al rotar la curva γ alrededor del eje z es llamada *pseudoesfera*⁷.

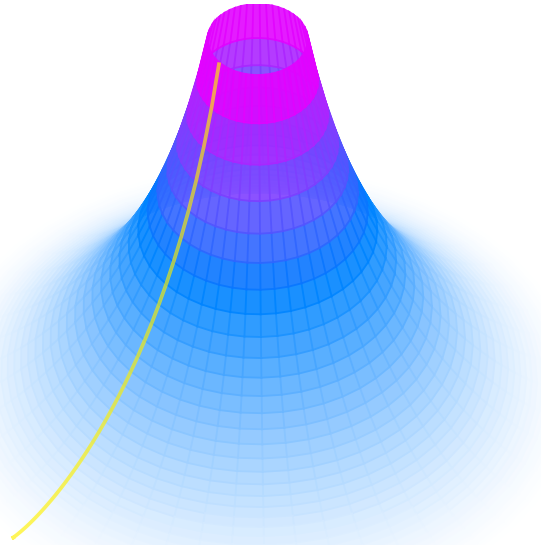


Figura 4.8: La pseudoesfera, con la tractriz que la genera en amarillo.

Probar que la curvatura de Gauss de la pseudoesfera es $K \equiv -1$.

Ejemplo 4.8.7 (Gráfico de una función suave). Consideremos una superficie regular dada por el gráfico de una función suave. Entonces, $\varphi(u, v) = (u, v, h(u, v))$ siendo $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave.

Como ya vimos,

$$N(u, v) = \frac{(-h_u, -h_v, 1)}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}$$

es un campo vectorial unitario normal a la superficie, y usando esta orientación se obtienen los siguientes coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental:

$$E = 1 + h_u^2, \quad F = h_u h_v, \quad G = 1 + h_v^2, \\ e = \frac{h_{uu}}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}, \quad f = \frac{h_{uv}}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}, \quad g = \frac{h_{vv}}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}.$$

Usando estas expresiones de los coeficientes y cómo se escriben las curvaturas K y H en términos de ellos se obtiene que

$$K = \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^2} \quad \text{y} \quad H = \frac{1}{2} \frac{h_{uu}(1 + h_v^2) - 2h_u h_v h_{uv} + h_{vv}(1 + h_u^2)}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^{3/2}}.$$

Observación 4.8.8. Como ya observamos, toda superficie regular es localmente el gráfico de una función suave. Dado $p \in S$, sin perder generalidad, se puede suponer que p es el origen y que $T_p S$ es el plano coordenado xy . Así, consideremos la parametrización local en p dada por el gráfico de la función $z = h(x, y)$, donde $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$ abierto, h suave tal que $h(0, 0) = 0$

⁷Nombre que le puso el matemático italiano E. Beltrami en 1868.

y $h_x(0, 0) = h_y(0, 0) = 0$. En este caso, la segunda forma fundamental de S en p es un vector tangente $w = a\varphi_u(0, 0) + b\varphi_v(0, 0)$ será

$$\mathbb{I}_p(w) = h_{xx}(0, 0)a^2 + 2h_{xy}(0, 0)ab + h_{yy}(0, 0)b^2,$$

que resulta ser el hessiano de la función h en $(0, 0)$.

Concluimos esta sección con un resultado que muestra cuál es el comportamiento local de una superficie respecto de su plano tangente en un entorno de un punto elíptico y de un punto hiperbólico.

Proposición 4.8.9. *Sean S una superficie regular y $p \in S$. El plano tangente $p + T_p S$ divide a \mathbb{R}^3 en dos semiespacios.*

1. *Si p es un punto elíptico, entonces existe un entorno V de p en S tal que todos los puntos de V pertenecen al mismo semiespacio.*
2. *Si p es un punto hiperbólico, entonces en todo entorno de p existen puntos de S en semiespacios diferentes.*

Demostración. Sean $p \in S$ un punto elíptico y $\varphi(u, v)$ una parametrización local de S en p tal que $\varphi(0, 0) = p$.

Consideremos la función $d : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que mide la “distancia” desde un punto $q = \varphi(u, v)$ al plano tangente, es decir, la proyección de $\varphi(u, v)$ en la dirección de $N(p)$. Luego,

$$d(u, v) = \langle \varphi(u, v) - \varphi(0, 0), N(p) \rangle.$$

Como $\varphi(u, v)$ es suave, admite un desarrollo de Taylor en un entorno de p ,

$$\varphi(u, v) = \varphi(0, 0) + u\varphi_u + v\varphi_v + \frac{1}{2}(u^2\varphi_{uu} + 2uv\varphi_{uv} + v^2\varphi_{vv}) + R,$$

donde las derivadas son calculadas en $(0, 0)$ y $\frac{R}{(u^2 + v^2)} \rightarrow 0$ cuando $(u, v) \rightarrow (0, 0)$. Despejando $\varphi(u, v) - \varphi(0, 0)$ y usando la observación anterior, se ve que

$$d(u, v) = \frac{1}{2} \mathbb{I}_p(w) + \langle R, N(p) \rangle,$$

con $w = u\varphi_u + v\varphi_v$.

Ahora bien, si p es elíptico, $\mathbb{I}_p(w)$ tiene un signo fijo, y en un entorno lo suficientemente chico, R es tan pequeño que $\langle R, N(p) \rangle$ no altera el signo de $d(u, v)$. Por otro lado, si p es hiperbólico, existen puntos (u, v) y (\tilde{u}, \tilde{v}) tales que $\mathbb{I}_p(w)$ y $\mathbb{I}_p(\tilde{w})$ tienen signos distintos, es decir, pertenecen a semiespacios distintos. ♣

4.9 El Teorema Egregium de Gauss

4.9.1 Símbolos de Christoffel

De manera análoga al caso de curvas regulares en el espacio euclídeo tridimensional, en cada punto de una superficie regular vamos a considerar un triedro de vectores linealmente independientes definido a partir de una parametrización local y vamos a estudiar las derivadas de estos vectores.

Dada una parametrización local $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, podemos asignar a cada punto de $\varphi(U)$ un triedro natural dado por $\{\varphi_u, \varphi_v, N\}$.

Las derivadas parciales de estas funciones pueden ser expresadas en esta base de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \varphi_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + L_1 N, \\ \varphi_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + L_2 N & N_u &= a_{11} \varphi_u + a_{21} \varphi_v, \\ \varphi_{vu} &= \Gamma_{21}^1 \varphi_u + \Gamma_{21}^2 \varphi_v + \bar{L}_2 N, & N_v &= a_{12} \varphi_u + a_{22} \varphi_v, \\ \varphi_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + L_3 N, \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde los a_{ij} , con $i, j = 1, 2$, son los elementos de la matriz del diferencial de la aplicación de Gauss que ya calculamos (recordar (4.7)). Los coeficientes Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$, son llamados **símbolos de Christoffel**⁸ de S en la parametrización φ .

Notar que como $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$, es claro que $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$ y $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$.

Tomando el producto interno con N , miembro a miembro en las cuatro relaciones de la izquierda, vemos que $L_1 = e$, $L_2 = \bar{L}_2 = f$ y $L_3 = g$.

Notemos también que, por ejemplo, como $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle$,

$$E_u = \langle \varphi_{uu}, \varphi \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{uu} \rangle = 2\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle.$$

Luego, usando relaciones análogas para las derivadas parciales de F y G , tomando el producto interno con φ_u y con φ_v , en ambos miembros de las cuatro relaciones de la izquierda, se obtienen los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle = \frac{1}{2} G_u \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \langle \varphi_{vv}, \varphi_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \langle \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle = \frac{1}{2} G_v \end{cases} \quad (4.13)$$

Observemos que cada par de ecuaciones forma un sistema cuyo determinante es $EG - F^2 \neq 0$ y por lo tanto resulta ser compatible determinado. Resolviendo estos tres sistemas se encuentran las expresiones de los símbolos de Christoffel en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental y sus derivadas.

Como la primera forma fundamental (y en consecuencia sus derivadas) son preservadas por isometrías locales, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.9.1. *Los símbolos de Christoffel son invariantes por isometrías locales.*

Ejemplo 4.9.2 (Superficies de revolución). Considerando lo analizado en el Ejemplo 3.1.8 se pueden encontrar los símbolos de Christoffel para una superficie de revolución.

En primer lugar, se tiene que

$$\begin{aligned} E_u &= 0, & E_v &= 2\varphi(v)\varphi'(v), & F_u &= F_v = 0, \\ G_u &= 0 & G_v &= 2(\varphi'(v)\varphi''(v) + \psi'(v)\psi''(v)). \end{aligned}$$

⁸E. B. Christoffel (1829–1900), matemático alemán.

En segundo lugar, en el sistema (4.13) se obtiene que

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{-\varphi(v)\varphi'(v)}{(\varphi'(v))^2 + (\psi'(v))^2}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{\varphi(v)\varphi'(v)}{\varphi(v)^2}, & \Gamma_{12}^2 &= 0, \\ \Gamma_{22}^1 &= 0, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{\varphi'(v)\varphi''(v) + \psi'(v)\psi''(v)}{(\varphi'(v))^2 + (\psi'(v))^2}.\end{aligned}$$

Ejemplo 4.9.3 (Plano y cilindro). De manera análoga, considerando lo analizado en los Ejemplos 3.1.4 y 3.1.5 se pueden encontrar los símbolos de Christoffel para estas superficies.

En este caso, como

$$E_u = E_v = 0, \quad F_u = F_v = 0, \quad \text{y} \quad G_u = G_v = 0,$$

al reemplazar lo obtenido en el sistema (4.13) vemos que

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0.$$

Ejercicio 4.9.4. Calcular los símbolos de Christoffel del gráfico de una función suave $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, donde $U \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto.

4.9.2 Fórmula de Gauss

Consideremos las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} (\varphi_{uu})_v - (\varphi_{uv})_u = 0 \\ (\varphi_{vv})_u - (\varphi_{vu})_v = 0 \\ N_{uv} - N_{vu} = 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Usando las ecuaciones (4.12) estas identidades se pueden reescribir como ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} A_1\varphi_u + B_1\varphi_v + C_1N = 0 \\ A_2\varphi_u + B_2\varphi_v + C_2N = 0 \\ A_3\varphi_u + B_3\varphi_v + C_3N = 0, \end{cases} \quad (4.15)$$

donde A_i, B_i, C_i ($i = 1, 2, 3$) son funciones de E, F, G, e, f, g y sus derivadas. Luego, por ser φ_u, φ_v y N linealmente independientes, se tiene que los coeficientes A_i, B_i y C_i con $i = 1, 2, 3$ son nulos.

Explícitamente, para la primera identidad tenemos:

$$\begin{aligned}0 &= (\Gamma_{11}^1\varphi_u + \Gamma_{11}^2\varphi_v + eN)_v - (\Gamma_{12}^1\varphi_u + \Gamma_{12}^2\varphi_v + fN)_u \\ &= (\Gamma_{11}^1)_v\varphi_u + \Gamma_{11}^1\varphi_{uv} + (\Gamma_{11}^2)_v\varphi_v + \Gamma_{11}^2\varphi_{vv} + e_vN + eN_v \\ &\quad - (\Gamma_{12}^1)_u\varphi_u - \Gamma_{12}^1\varphi_{uu} - (\Gamma_{12}^2)_u\varphi_v - \Gamma_{12}^2\varphi_{vu} - f_uN - fN_u.\end{aligned}$$

Escribiendo las derivadas segundas de φ según (4.12), tenemos:

$$\begin{aligned}0 &= (\Gamma_{11}^1)_v\varphi_u + \Gamma_{11}^1(\Gamma_{12}^1\varphi_u + \Gamma_{12}^2\varphi_v + fN) + (\Gamma_{11}^2)_v\varphi_v + \Gamma_{11}^2(\Gamma_{22}^1\varphi_u + \Gamma_{22}^2\varphi_v + gN) + e_vN + eN_v \\ &\quad - (\Gamma_{12}^1)_u\varphi_u - \Gamma_{12}^1(\Gamma_{11}^1\varphi_u + \Gamma_{11}^2\varphi_v + eN) - (\Gamma_{12}^2)_u\varphi_v - \Gamma_{12}^2(\Gamma_{21}^1\varphi_u + \Gamma_{21}^2\varphi_v + fN) - f_uN - fN_u.\end{aligned}$$

Para interpretar mejor esa identidad, notemos que, por ejemplo, decir que $B_1 = 0$ en (4.15) es decir que lo que acompaña a φ_v en la ecuación anterior es cero, es decir,

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + ea_{22} - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - fa_{21} = 0,$$

donde hemos utilizado que $N_u = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v$ y $N_v = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v$.

Reemplazando a_{22} y a_{21} por sus expresiones en términos de los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental (ver las ecuaciones de Weingarten (4.10)), se obtiene la llamada **fórmula de Gauss**:

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 = ea_{22} - fa_{21} = -EK. \quad (4.16)$$

Es notable cómo este cálculo sencillo da lugar a uno de los grandes teoremas de la geometría diferencial de superficies, el **Teorema Egregium de Gauss**.

Teorema 4.9.5 (Teorema Egregium de Gauss). *La curvatura de Gauss es invariante por isometrías locales.*

Demostración. La demostración es inmediata a partir de que la curvatura gaussiana puede expresarse en términos de los símbolos de Christoffel y de la primera forma fundamental que, como se mencionó anteriormente, son invariantes por isometrías locales. ♣

“Es un hecho notable que un concepto como el de la curvatura Gaussiana, cuya definición hizo uso esencial de la posición de una superficie en el espacio, no dependa de esta posición sino solamente de la estructura métrica (primera forma fundamental) de la superficie.” ([Car16], p.238).

Observación 4.9.6. En vistas del Teorema Egregium, se ve que no es casualidad que el cilindro y un plano tengan la misma curvatura de Gauss, ya que ambas son localmente isométricas.

Terminamos esta sección con una expresión para la curvatura de Gauss solo en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental.

Proposición 4.9.7. *Si $\varphi : U \rightarrow S$ es una parametrización ortogonal (es decir, $F \equiv 0$), entonces la curvatura de Gauss satisface*

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}.$$

Demostración. El primer paso es despejar en las ecuaciones (4.13) a los símbolos de Christoffel en términos de los coeficientes E y G y sus derivadas (notar que se simplifican muchas ecuaciones por ser $F \equiv 0$), de modo que la expresión de las derivadas segundas de la parametrización en la base $\{\varphi_u, \varphi_v, N\}$ es

$$\begin{aligned} \varphi_{uu} &= \frac{E_u}{2E}\varphi_u - \frac{E_v}{2G}\varphi_v + eN \\ \varphi_{uv} &= \frac{E_v}{2E}\varphi_u + \frac{G_u}{2G}\varphi_v + fN \\ \varphi_{vv} &= -\frac{G_u}{2E}\varphi_u + \frac{G_v}{2G}\varphi_v + gN. \end{aligned}$$

Reemplazando esas expresiones en la fórmula de Gauss (4.16), tenemos

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{E} \left\{ \left(\frac{G_u}{2G} \right)_u - \left(-\frac{E_v}{2G} \right)_v + \frac{E_v}{2E} \left(-\frac{E_v}{2G} \right) + \frac{G_u^2}{4G^2} + \frac{E_v G_v}{2G 2G} - \frac{E_u G_u}{2E 2G} \right\} \\
 &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ -\frac{E_u G_u}{2E\sqrt{EG}} - \frac{E_v^2}{2E\sqrt{EG}} + \frac{2\sqrt{G}}{\sqrt{E}} \left(\frac{E_v}{2G} \right)_v + \frac{E_v G_v}{2G\sqrt{EG}} + \frac{G_u^2}{2G\sqrt{EG}} + \frac{2\sqrt{G}}{\sqrt{E}} \left(\frac{G_u}{2G} \right)_u \right\} \\
 &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_{vv}}{\sqrt{EG}} - \frac{E_v(E_v G + EG_v)}{2EG\sqrt{EG}} \right) + \left(\frac{G_{uu}}{\sqrt{EG}} - \frac{G_u(E_u G + EG_u)}{2EG\sqrt{EG}} \right) \right\} \\
 &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}.
 \end{aligned}$$

♣

Corolario 4.9.8. Si $\varphi : U \rightarrow S$ es una parametrización isothermal, es decir, $E = G = \lambda(u, v)$ y $F \equiv 0$, entonces

$$K = -\frac{1}{2\lambda} \Delta(\ln \lambda),$$

donde $\Delta\sigma$ es el Laplaciano de la función σ :

$$\Delta\sigma = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial v^2}.$$

Demostración. Por la proposición anterior,

$$K = -\frac{1}{2\lambda} \left\{ \left(\frac{\lambda_v}{\lambda} \right)_v + \left(\frac{\lambda_u}{\lambda} \right)_u \right\} = -\frac{1}{2\lambda} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial v^2} (\ln \lambda) + \frac{\partial^2}{\partial u^2} (\ln \lambda) \right\} = -\frac{1}{2\lambda} \Delta(\ln \lambda).$$

♣

4.9.3 Ecuaciones de compatibilidad y Teorema de Bonnet

Volviendo a las ecuaciones (4.15), considerando $C_1 = 0$ y trabajando de manera análoga a la anterior se tiene que

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2.$$

Por último, al considerar el caso $C_2 = 0$ se deduce que

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2.$$

Definición 4.9.9. Estas dos ecuaciones se denominan *ecuaciones de Mainardi-Codazzi*⁹ y, junto con la fórmula de Gauss, definen las llamadas *ecuaciones de compatibilidad*.

Por último, enunciamos sin demostración un resultado análogo al teorema fundamental de la teoría local de curvas parametrizadas por su longitud de arco. Esencialmente, dice que la primera y la segunda forma fundamental caracterizan localmente a una superficie.

Teorema 4.9.10 (Bonnet¹⁰). Sean E, F, G, e, f, g funciones suaves de dos variables definidas en un abierto U de \mathbb{R}^2 con $E > 0$ y $G > 0$. Supongamos que estas funciones verifican las

⁹G. Mainardi (1800–1879) y D. Codazzi (1824–1873), matemáticos italianos.

¹⁰P. O. Bonnet (1819–1892), matemático francés.

ecuaciones de compatibilidad y que $EG - F^2 > 0$. Entonces, para todo $q \in U$ existe un entorno V de q contenido en U y un difeomorfismo $\varphi : V \rightarrow \varphi(V) \subset \mathbb{R}^3$ tal que la superficie regular $\varphi(V)$ tiene a E, F, G, e, f y g como coeficientes de su primera y segunda forma fundamental, respectivamente.

Si además U es conexo y $\bar{\varphi} : V \rightarrow \bar{\varphi}(V) \subset \mathbb{R}^3$ es otro difeomorfismo que satisface la misma condición, entonces existe un movimiento rígido ρ de \mathbb{R}^3 tal que $\bar{\varphi} = \rho \circ \varphi$.

Ejercicios

Ejercicios ya propuestos:

Ejercicio 4.3.4. Completar las cuentas del Ejemplo 4.3.3 y concluir que si $K(p) > 0$, entonces f tiene un extremo local en p , y que si $K(p) < 0$, entonces f tiene un punto silla en q .

Ejercicio 4.5.7. Calcular la curvatura geodésica de un paralelo de la esfera S^2 .

Ejercicio 4.8.6. Probar que la curvatura de Gauss de la pseudoesfera es $K \equiv -1$.

Ejercicio 4.9.4. Calcular los símbolos de Christoffel del gráfico de una función suave $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, donde $U \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto.

Otros ejercicios:

Ejercicio 4.9.11. Probar que las direcciones asintóticas son conjugadas con ellas mismas.

Ejercicio 4.9.12. Sean S una superficie regular y $\varphi(u, v)$ una carta local. Demostrar que para cada $p \in S$ en la carta,

$$N_u \times N_v = K(p)(\varphi_u \times \varphi_v)$$

donde K es la curvatura de Gauss.

Ejercicio 4.9.13. Mostrar que la curvatura media H en $p \in S$ está dada por

$$H = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi k_n(\theta) d\theta,$$

donde $k_n(\theta)$ es la curvatura normal en p en la dirección que forma un ángulo θ con la dirección principal e_1 .

Ejercicio 4.9.14 (Beltrami-Enneper). Probar que el valor absoluto de la torsión τ de una curva asintótica cuya curvatura no se anula está dado por

$$|\tau| = \sqrt{-K},$$

donde $K < 0$ es la curvatura de Gauss en el punto dado.

Ejercicio 4.9.15. Consideremos

$$E = 1 + 4u^2, \quad F = 0, \quad G = u^4, \quad e = \frac{-2u^2}{\sqrt{u^4 + 4u^6}}, \quad f = 0, \quad g = \frac{u^4}{\sqrt{u^4 + 4u^6}},$$

con $u > 0$. Mostrar que para cualquier $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ existe un entorno abierto U del punto y una parametrización local $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de una superficie regular cuyos coeficientes de la primera y segunda forma son E, F, G, e, f y g .

Ejercicio 4.9.16. Probar que no existe ninguna superficie regular que admita una parametrización local cuyos coeficientes de la primera y segunda forma sean

$$E = G = 1, \quad F = 0, \quad e = 0, \quad f = g = 1.$$

Ejercicio 4.9.17. ¿Existe una parametrización local de una superficie regular cuyos coeficientes de la primera y segunda forma son $E = 1$, $F = 0$, $G = \cos^2 u$, $e = \cos^2 u$, $f = 0$, $g = 1$?

Capítulo 5

Geodésicas y transporte paralelo

En este capítulo vamos a estudiar cierto tipo de curvas contenidas en una superficie que juegan el rol de las rectas en el plano. Junto con ellas vamos a definir una noción de paralelismo que generaliza lo que conocemos como paralelismo entre vectores. Por último, vamos a estudiar un resultado notable sobre superficies regulares conocido como el teorema de Gauus–Bonnet. Enunciaremos y demostraremos su versión local mientras que solo enunciaremos la versión global haciendo algunas consideraciones sobre ella.

5.1 Geodésicas: definición y ejemplos

En la geometría del plano un concepto fundamental es el de línea recta, pero como en una superficie regular S que se curva un segmento de recta no tendría por qué estar contenido en ella, es natural preguntarse si existen curvas contenidas en S que gocen de propiedades análogas a las que caracterizan a las rectas en el plano.

La observación clave es que una curva plana es una recta si y solo si su derivada segunda es idénticamente nula, es decir, su vector aceleración es siempre nulo. Si uno piensa en una curva γ cuya traza está contenida en una superficie regular S , pedir que $\gamma''(t)$ sea siempre nulo puede ser demasiado, porque eso implicaría que $\gamma'(t)$ es constante y si S tiene alguna curvatura es probable que γ deba curvarse también para permanecer en S , por lo que $\gamma'(t)$ difícilmente sea constante. Sin embargo, sí podemos intentar capturar que γ se curve solamente lo necesario para estar contenida en S midiendo la proyección de $\gamma''(t)$ a cada espacio tangente, es decir, la *aceleración tangencial de γ* o *componente tangencial de la aceleración de γ* . Así, parece razonable decir que γ es “tan recta como puede” si su aceleración tangencial es nula ([Lee18]), dando lugar a la noción de *geodésica* que se presenta a continuación.

Definición 5.1.1. Dada una superficie regular orientada S , una curva regular $\gamma : I \rightarrow S$ es una *geodésica* si para todo $t \in I$ el vector aceleración $\gamma''(t)$ está en la dirección normal a S en $\gamma(t)$, es decir, es colineal con $N(\gamma(t))$.

Como consecuencia de la definición anterior, si γ es una geodésica, $\gamma''(t)$ es paralelo a $N(\gamma(t))$ para todo $t \in I$ y por lo tanto $\gamma''(t)$ y $\gamma'(t)$ son ortogonales para todo $t \in I$, lo que equivale

a que el módulo de $\gamma'(t)$ sea constante. Es decir, su parámetro t es un múltiplo del parámetro longitud de arco.

Además, si la velocidad de $\gamma(t)$ es unitaria para todo $t \in I$, por definición de curvatura geodésica se tiene que $\gamma(t)$ es una geodésica si y solo si su curvatura κ_g es constantemente nula ya que para toda curva regular parametrizada por longitud de arco $\gamma(s)$ tal que $\gamma(0) = p$ se tiene que $\ddot{\gamma}(0) = \kappa_n N(p) + \kappa_g R_{\frac{\pi}{2}}(\dot{\gamma}(0))$.

Estas cuestiones se resumen en el siguiente resultado.

Proposición 5.1.2. Sean S una superficie regular y $\gamma : I \rightarrow S$ una curva regular. Entonces,

1. Si γ es una geodésica, su vector velocidad tiene módulo constante.
2. Si γ tiene velocidad unitaria, γ es una geodésica si y solo si su curvatura geodésica es idénticamente nula.

Ejemplo 5.1.3.

1. Una curva regular en el plano \mathbb{R}^2 es una geodésica si y solo si es un segmento de recta.

En efecto, γ es una geodésica si y solo si γ'' es ortogonal a \mathbb{R}^2 , lo equivale a que $\gamma''(t) \equiv 0$, es decir, $\gamma(t) = at + b$ con a y $b \in \mathbb{R}$.

2. Todo segmento de recta contenido en cualquier superficie regular es una geodésica de esa superficie, ya que es de la forma $\gamma(t) = tv + p$, para $p, v \in \mathbb{R}^3$, $t \in I$, y eso implica que $\gamma''(t) = 0$ para todo $t \in I$.

3. Los círculos máximos en la esfera S^2 son geodésicas.

Dados $p \in S^2$ y $v \in T_p S^2$ unitario, consideremos la curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S^2$ dada por

$$\gamma(t) := (\cos t) p + (\sin t) v,$$

cuya traza es el círculo máximo determinado por la intersección de la esfera con el plano que contiene los vectores p y v .

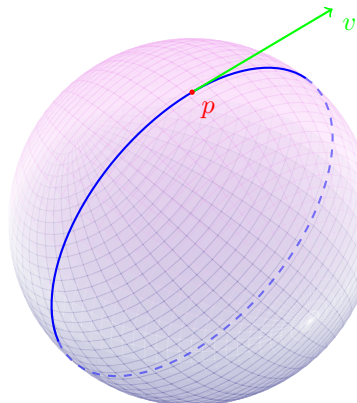


Figura 5.1: El círculo máximo dado por la traza de la curva γ .

Considerando la orientación de S^2 dada por $N(p) := p$, se tiene que

$$\gamma''(t) = -\gamma(t) = -N(\gamma(t)).$$

Por lo tanto, γ es una geodésica.

4. En el cilindro circular recto $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ las rectas, las circunferencias y las hélices son geodésicas. En efecto, consideremos la orientación $N(x, y, z) := (x, y, 0)$.

Como ya se mencionó previamente, las rectas son geodésicas, por lo que solo habría que probar que las otras dos curvas lo son.

Consideremos una circunferencia sobre C parametrizada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, z_0)$, $t \in [0, 2\pi]$. Luego,

$$\gamma''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0) = -N(\gamma(t)).$$

Por lo tanto, $\gamma''(t)$ y $N(\gamma(t))$ son colineales en todo t y la circunferencia es una geodésica.

Por último, se considera la hélice sobre C parametrizada por $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, ct)$ con $t \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ (c constante). Es claro que, nuevamente, $\alpha''(t) = -N(\alpha(t))$ y por lo tanto es una geodésica.

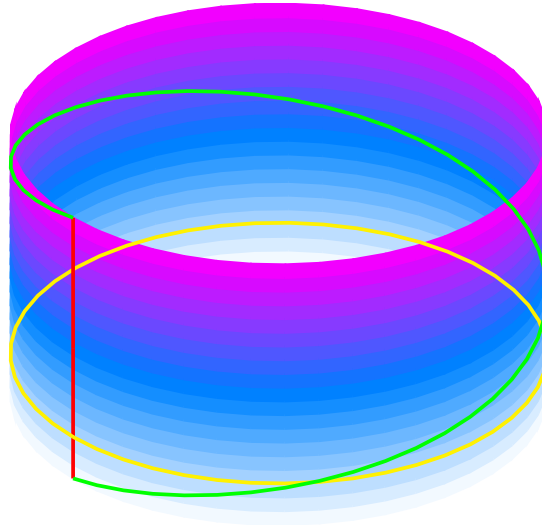


Figura 5.2: Las geodésicas de un cilindro: en rojo un segmento de recta, en amarillo una circunferencia y en verde una porción de hélice.

Notar que solo hemos probado que las rectas, circunferencias y hélices son geodésicas. Más adelante veremos que en realidad estas son *todas* sus geodésicas.

5.2 Derivada covariante y campos paralelos

Como ya comentamos, en una superficie regular se puede dar una noción que generaliza la idea de paralelismo en el plano. Esto puede hacerse usando una noción llamada derivada covariante.

Definición 5.2.1. Sea $\gamma : I \rightarrow S$ una curva regular. Un campo vectorial w *a lo largo de la curva* γ es una correspondencia que asigna a cada $t \in I$ un vector $w(t) \in T_{\gamma(t)}S$. Así, si $\varphi : U \rightarrow S$ es una parametrización local de S en p , se tiene que

$$w(t) = w(\gamma(t)) = a(u(t), v(t))\varphi_u + b(u(t), v(t))\varphi_v = a(t)\varphi_u + b(t)\varphi_v.$$

Definición 5.2.2. Sea w un campo suave definido sobre un abierto $V \subset S$. Dado $p \in V$ sean $y \in T_p S$ y $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$ una curva regular tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = y$.

Consideremos el campo w sobre la curva $\gamma(t)$, $w(t) = w(\gamma(t))$, que resulta una función suave. La proyección del vector $(dw/dt)(0) = w'(0)$ sobre $T_p S$ es llamada *derivada covariante* del campo w en la dirección de y en el punto p . Suele denotarse como $\frac{Dw}{dt}(0)$ o también como $D_y w(p)$.

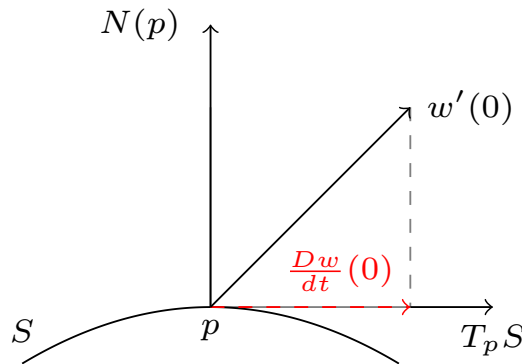


Figura 5.3: La derivada covariante (en rojo) del campo w en la dirección del vector y en el punto p .

Para probar que la derivada covariante depende solo de la parametrización φ de S , consideramos $w(t) = w(\gamma(t)) = a(u(t), v(t))\varphi_u + b(u(t), v(t))\varphi_v$. Entonces,

$$\frac{dw}{dt} = a \frac{d}{dt} \varphi_u + a' \varphi_u + b \frac{d}{dt} \varphi_v + b' \varphi_v = a(\varphi_{uu}u' + \varphi_{uv}v') + a' \varphi_u + b(\varphi_{vu}u' + \varphi_{vv}v') + b' \varphi_v.$$

Como la derivada covariante es la componente de w' en el plano tangente, obtenemos su expresión escribiendo φ_{uu} , φ_{uv} y φ_{vv} en términos de los símbolos de Christoffel y eliminando la componente normal. Es decir,

$$\frac{Dw}{dt} = (a' + \Gamma_{11}^1 au' + \Gamma_{12}^1 av' + \Gamma_{12}^1 bu' + \Gamma_{22}^1 bv') \varphi_u + (b' + \Gamma_{11}^2 au' + \Gamma_{12}^2 av' + \Gamma_{12}^2 bu' + \Gamma_{22}^2 bv') \varphi_v. \quad (5.1)$$

Observación 5.2.3.

1. La derivada covariante está bien definida, es decir, no depende de la curva sino de la dirección, como lo muestra la expresión (5.1).
2. Si la superficie es un plano, por el Ejemplo 4.9.3, $\Gamma_{ij}^k = 0$ (para $i, j, k = 1, 2$), lo que implica que $\frac{Dw}{dt} = w'$.
3. Dada una curva regular $\gamma(t)$, la derivada covariante de su campo tangente es la componente tangencial de la aceleración.

Definición 5.2.4. Un campo w a lo largo de $\gamma : I \rightarrow S$ se dice **paralelo** si $\frac{Dw}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

Observación 5.2.5.

1. Si w es un campo paralelo a lo largo de γ , en cada punto $\gamma(t)$ el campo w' está en la dirección de $N(\gamma(t))$.
2. Si S es un plano, w es paralelo a lo largo de γ si y solo si w es constante a lo largo de γ , y por lo tanto el ángulo que forman dos campos paralelos es constante.
3. Es claro que una curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una geodésica si su campo tangente γ' es paralelo a lo largo de ella. Es decir, $\frac{D\gamma'}{dt} = 0$ para todo $t \in I$.

5.3 Geodésicas: existencia y unicidad

Es sencillo analizar la existencia y unicidad de geodésicas a partir de la ecuación diferencial que las caracteriza. Para esto, consideremos una curva $\gamma : I \rightarrow S$ y una parametrización $\varphi : U \rightarrow V \subset S$ para un entorno V de $\gamma(t_0)$, $t_0 \in J \subset I$, siendo J un intervalo abierto tal que $\gamma(J) \subset V$.

La curva $\gamma : J \rightarrow S$ es una geodésica si y solo si $\frac{D\gamma'}{dt} = 0$ para todo $t \in I$. Es decir,

$$\frac{D\gamma'}{dt} = (u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 v'^2) \varphi_u + (v'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2) \varphi_v = 0. \quad (5.2)$$

Por la independencia lineal de φ_u y φ_v esto equivale a las ecuaciones

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 v'^2 &= 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2 &= 0. \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales puede resolverse de manera única para u y v , dadas condiciones iniciales para u, u', v, v' en cierto $t_0 \in I$. Se tiene entonces el siguiente resultado.

Proposición 5.3.1. Sean S una superficie regular, $p \in S$ y $v \in T_p S$ no nulo. Entonces, existe $\varepsilon = \varepsilon(p, \|v\|) > 0$ (que depende suavemente de p y $\|v\|$) tal que

1. existe una geodésica $\gamma_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\gamma_v(0) = p$ y $\gamma'_v(0) = v$,
2. cualesquiera dos geodésicas con este mismo dominio y estas mismas condiciones iniciales coinciden en todo el dominio.

Además, $\gamma_v(t)$ depende suavemente de p, v y t .

Observación 5.3.2. Es claro que las isometrías locales conservan las geodésicas ya que la condición que las caracteriza es una ecuación diferencial cuyos coeficientes están dados por los símbolos de Christoffel, que son precisamente invariantes por isometrías locales. Esto implica que si dos superficies son localmente isométricas, las geodésicas (lo suficientemente “pequeñas”) son las imágenes por una isometría local de las geodésicas de la otra superficie.

Ejemplo 5.3.3. Sabemos que $\phi : (0, \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow C$ dada por $\phi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ es una isometría local entre el plano y el cilindro circular recto $= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Como ya vimos que las únicas geodésicas del plano son las rectas, podemos encontrar las únicas geodésicas en el cilindro mapeando las rectas por esta isometría local.

Consideremos un segmento de recta vertical en el plano parametrizado como $\gamma(s) = (a, bs) = (a, 0) + s(0, b)$ con $|b| = 1$. Su imagen en C por ϕ está dada por $\beta(s) = (\cos a, \sin a, bs)$ que es una curva generatriz.

Consideremos un segmento de recta paralelo al eje x parametrizado como $\gamma(s) = (as, b) = (as, 0) + (0, b)$ con $|a| = 1$. Su imagen en C por ϕ está dada por $\beta(s) = (\cos(as), \sin(as), b)$ y es una circunferencia que se obtiene como intersección de C con el plano de ecuación $z = b$.

Si γ es un segmento de recta en el plano parametrizado como $\gamma(s) = (as, bs) = s(a, b)$ con $\|(a, b)\| = 1$ y $a, b \neq 0$, su imagen en C por ϕ está dada por $\beta(s) = (\cos(as), \sin(as), bs)$ que es una hélice desarrollada sobre C .

Notar que las geodésicas en C obtenidas mediante una isometría local con el plano coinciden con las halladas en el punto 4 del Ejemplo 5.1.3, lo que muestra que éstas son las únicas geodésicas en C .

5.4 Transporte paralelo

Los campos paralelos a lo largo de curvas tienen propiedades interesantes y dan lugar a la idea de transportar paralelamente un vector a lo largo de una curva desde un punto hasta otro.

Proposición 5.4.1. Sean w y v dos campos paralelos a lo largo de $\gamma : I \rightarrow S$. Entonces, $\langle w(t), v(t) \rangle$, $\|w(t)\|$, $\|v(t)\|$ y $\angle(w(t), v(t))$ son constantes.

Demostración. Como w es un campo paralelo, $w'(t)$ es normal a $T_{\gamma(t)}S$ para todo t . Luego, dado que $v(t) \in T_{\gamma(t)}S$, se tiene que $\langle w'(t), v(t) \rangle = 0$ para todo t .

Análogamente, $\langle v'(t), w(t) \rangle = 0$ para todo t . Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt} \langle w(t), v(t) \rangle = \langle w'(t), v(t) \rangle + \langle w(t), v'(t) \rangle = 0$$

para todo t , lo que implica que $\langle w(t), v(t) \rangle$ es constante.

Dado que $\|w(t)\|$, $\|v(t)\|$ y $\angle(w(t), v(t))$ pueden escribirse en términos del producto interno entre este tipo de campos, esto implica que también son constantes. ♣

Proposición 5.4.2. Sean $\gamma : I \rightarrow S$ una curva regular y $w_0 \in T_{\gamma(t_0)}S$ con $t_0 \in I$. Entonces, existe un único campo paralelo w a lo largo de γ tal que $w(t_0) = w_0$.

Demostración. Sean $w(t) = a(u(t), v(t)) \varphi_u + b(u(t), v(t)) \varphi_v$ un campo tangente a lo largo de γ y $w_0 = w'(0) \in T_{\gamma(t_0)}S$.

Dado que $\frac{Dw}{dt} = 0$ si y solo si se anulan ambos coeficientes en la ecuación (5.1), el resultado es consecuencia de la teoría de existencia y unicidad de solución para ecuaciones diferenciales.



Definición 5.4.3. Dados $\gamma : I \rightarrow S$ una curva regular y $w_0 \in T_{\gamma(t_0)}S$, sea w el único campo paralelo a lo largo de γ tal que $w(t_0) = w_0$. El vector $w(t_1)$, $t_1 \in I$, es el **transporte paralelo** de w_0 al punto $\gamma(t_1)$ a lo largo de la curva γ .

Proposición 5.4.4. Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$, $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$, la aplicación $P_\gamma : T_pS \rightarrow T_qS$ que asigna a cada $v \in T_pS$ su transporte paralelo al punto q a lo largo de γ , llamada **transporte paralelo a lo largo de γ** , es una isometría lineal.

Demostración. Primero veamos que P_γ es lineal. Sean $v_1, v_2 \in T_pS$ y w_1, w_2 los campos paralelos a lo largo de γ tales que $w_1(0) = v_1$ y $w_2(0) = v_2$. Es fácil ver que $w_1 + w_2$ es un campo paralelo a lo largo de γ y cumple que $(w_1 + w_2)(0) = v_1 + v_2$, ya que la derivada covariante es lineal. Entonces,

$$P_\gamma(v_1 + v_2) = (w_1 + w_2)(1) = w_1(1) + w_2(1) = P_\gamma(v_1) + P_\gamma(v_2).$$

Dado que el diferencial de una función lineal coincide con la función y que, por la Proposición 5.4.1, $\langle w_1(0), w_2(0) \rangle = \langle w_1(1), w_2(1) \rangle$, se deduce que P_γ es una isometría. ♣

5.5 Valor algebraico de la derivada covariante

A continuación vamos a considerar un escalar definido a partir de la derivada covariante que tiene una interpretación que resulta útil, entre otras cosas, para demostrar un resultado importante conocido como teorema de Gauss–Bonnet.

Sea w un campo suave de vectores unitarios a lo largo de una curva $\gamma : I \rightarrow S$ en una superficie S orientada por un campo normal N .

Notemos por un lado que $\frac{Dw}{dt} \perp N$. Por otro lado, como $w' \perp w$ y $N \perp w$, se tiene que

$$\left\langle \frac{Dw}{dt}, w(t) \right\rangle = \langle w' - \alpha N, w \rangle = \langle w', w \rangle - \langle \alpha N, w \rangle = 0,$$

para cierto $\alpha \in \mathbb{R}$. Esto implica que $\frac{Dw}{dt} \perp w$, de modo que $\frac{Dw}{dt}$ es colineal con $N \times w$.

Definición 5.5.1. Sea w un campo suave de vectores unitarios a lo largo de una curva $\gamma : I \rightarrow S$ en una superficie orientada S . Entonces,

$$\frac{Dw}{dt} = \lambda(N \times w(t)).$$

El número real $\lambda = \lambda(t)$, denotado como $\left[\frac{Dw}{dt} \right]$, es llamado **valor algebraico de la derivada covariante** de w en t .

Observación 5.5.2.

1. El signo de $\left[\frac{Dw}{dt} \right]$ depende de la orientación de S .
2. Dada una curva regular $\gamma(t)$, recordando la definición de curvatura geodésica de γ en $p = \gamma(0)$, se tiene que

$$\left[\frac{D\gamma'}{dt} \right] = \kappa_g.$$

3. Se puede mostrar que $\left[\frac{Dw}{dt}\right] = \langle w', N \times w \rangle$, pues notando que $w' = \frac{Dw}{dt} + \alpha N$ obtenemos

$$\langle w', N \times w \rangle = \left\langle \frac{Dw}{dt} + \alpha N, N \times w \right\rangle = \left\langle \frac{Dw}{dt}, N \times w \right\rangle = \left[\frac{Dw}{dt} \right].$$

Ahora vamos a considerar dos resultados teóricos que necesitaremos para encontrar una expresión en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental para el valor algebraico de la derivada covariante.

Supongamos que tenemos dos campos vectoriales unitarios v y w a lo largo de $\gamma : I \rightarrow S$. Queremos definir $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\psi(t)$ mida el ángulo entre $v(t)$ y $w(t)$. Consideremos el campo $\bar{v}(t)$ a lo largo de γ tal que $\{v(t), \bar{v}(t)\}$ es una base ortonormal positiva de $T_{\gamma(t)}S$. Entonces, $w(t) = a(t)v(t) + b(t)\bar{v}(t)$, con $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ suaves tales que $a^2(t) + b^2(t) = 1$. Así, tenemos que $\cos \psi(t) = a(t)$ y $\sin \psi(t) = b(t)$.

Lema 5.5.3. Sean $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones suaves tales que $a^2(t) + b^2(t) = 1$, $\forall t \in I$ y ψ_0 tal que $\cos \psi_0 = a(t_0)$ y $\sin \psi_0 = b(t_0)$. Entonces, la función suave

$$\psi(t) = \psi_0 + \int_{t_0}^t (ab' - ba') d\tau$$

verifica $\cos \psi(t) = a(t)$ y $\sin \psi(t) = b(t)$, $\forall t \in I$ y $\psi(t_0) = \psi_0$.

Demostración. La idea es ver que $(a(t) - \cos \psi(t))^2 + (b(t) - \sin \psi(t))^2 \equiv 0$.

Notar que, omitiendo por simplicidad la dependencia de t ,

$$\begin{aligned} (a - \cos \psi)^2 + (b - \sin \psi)^2 &= a^2 - 2a \cos \psi + \cos^2 \psi + b^2 - 2b \sin \psi + \sin^2 \psi \\ &= 2 - 2(a \cos \psi + b \sin \psi) = 2 - 2A, \end{aligned}$$

donde llamamos $A = a \cos \psi + b \sin \psi$. Luego,

$$\begin{aligned} A' &= a' \cos \psi - a \sin \psi \psi' + b' \sin \psi + b \cos \psi \psi' \\ &= \psi'(-a \sin \psi + b \cos \psi) + b' \sin \psi + a' \cos \psi \\ &= (ab' - ba')(-a \sin \psi + b \cos \psi) + b' \sin \psi + a' \cos \psi \\ &= \cos \psi(a' + abb' - b^2 a') + \sin \psi(b' + aa'b - a^2 b') = 0, \end{aligned}$$

donde, en la última igualdad, se usa que $a^2 + b^2 = 1$ y que $aa' = -bb'$.

Por lo tanto A es constante y, como $A(t_0) = 1$, se tiene que $A \equiv 1$. Esto implica que $(a - \cos \psi)^2 + (b - \sin \psi)^2 \equiv 0$ como se quería probar. ♣

Lema 5.5.4. Sean v y w dos campos unitarios a lo largo de $\gamma : I \rightarrow S$. Entonces,

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] - \left[\frac{Dv}{dt} \right] = \frac{d\psi}{dt}$$

donde ψ es la función del lema anterior.

Demostración. Sean $\bar{v}(t)$ y $\bar{w}(t)$ los campos definidos como $\bar{v}(t) := N(t) \times v(t)$ y $\bar{w}(t) = N(t) \times w(t)$. Así, omitiendo nuevamente la dependencia de t ,

$$\begin{aligned} w &= v \cos \psi + \bar{v} \sin \psi \\ \bar{w} &= N \times w = \bar{v} \cos \psi - v \sin \psi. \end{aligned}$$

Luego, usando $\langle v, \bar{v} \rangle' = 0$, puede probarse que

$$\begin{aligned}\langle w', \bar{w} \rangle &= \langle v' \cos \psi - v \operatorname{sen} \psi \psi' + \bar{v}' \operatorname{sen} \psi + \bar{v} \cos \psi \psi', \bar{v} \cos \psi - v \operatorname{sen} \psi \rangle \\ &= \psi' + \langle v', \bar{v} \rangle.\end{aligned}$$

Recordando el inciso 3 de la Observación 5.5.2, se obtiene que

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] = \langle w', N \times w \rangle = \langle w', \bar{w} \rangle = \psi' + \langle v', \bar{v} \rangle = \psi' + \left[\frac{Dv}{dt} \right].$$



Observación 5.5.5. En particular, si v es un campo paralelo a lo largo de una curva regular parametrizada por longitud de arco γ contenida en S y tomamos $w = \gamma'$, la curvatura geodésica

$$\kappa_g = \left[\frac{D\gamma'}{ds} \right] = \frac{d\psi}{ds}$$

mide el cambio del ángulo que forma el campo tangente con un campo paralelo.

Proposición 5.5.6. Sea $\varphi(u, v)$ una parametrización de una superficie orientada S en p tal que $F \equiv 0$ y sea $w(t)$ un campo vectorial unitario a lo largo de la curva $\varphi(u(t), v(t))$. Entonces,

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right) + \frac{d\psi}{dt}$$

donde $\psi(t) = \angle(\varphi_u(t), w(t))$ (en la orientación dada).

Demostración. Si $e_1 = \varphi_u/\sqrt{E}$ y $e_2 = \varphi_v/\sqrt{G}$ se tiene que $N = e_1 \times e_2$, siendo N la orientación dada de S .

Consideremos el campo e_1 sobre la curva $\varphi(u(t), v(t))$. Por un lado, por el lema anterior,

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] = \left[\frac{De_1}{dt} \right] + \psi'.$$

Por otro lado, como $N \times e_1 = e_2$,

$$\left[\frac{De_1}{dt} \right] = \left\langle \frac{de_1}{dt}, N \times e_1 \right\rangle = \left\langle \frac{de_1}{dt}, e_2 \right\rangle = u' \langle (e_1)_u, e_2 \rangle + v' \langle (e_1)_v, e_2 \rangle.$$

Dado que $F \equiv 0$, se tiene que $\langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle = -E_v/2$ y, por lo tanto,

$$\langle (e_1)_u, e_2 \rangle = \left\langle \left(\frac{\varphi_u}{\sqrt{E}} \right)_u, \frac{\varphi_v}{\sqrt{G}} \right\rangle = -\frac{1}{2} E_v \frac{1}{\sqrt{EG}}.$$

Análogamente,

$$\langle (e_1)_v, e_2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{G_u}{\sqrt{EG}}$$

y queda demostrado el resultado.



Por último, es posible aplicar la proposición anterior para obtener otra expresión para la curvatura geodésica, conocida como **Fórmula de Liouville**.

Proposición 5.5.7 (Fórmula de Liouville). Sea $\varphi(u, v)$ una parametrización ortogonal de S en p y sea $\gamma(s)$ una curva parametrizada por longitud de arco tal que su traza está contenida en el entorno coordenado. Si $\psi(s) = \angle(\gamma', \varphi_u)$ entonces

$$\kappa_g = (\kappa_g)_1 \cos \psi + (\kappa_g)_2 \sen \psi + \frac{d\psi}{ds},$$

donde $(\kappa_g)_1$ y $(\kappa_g)_2$ son las curvaturas geodésicas de las curvas coordenadas $v = cte$ y $u = cte$, respectivamente.

Demostración. Considerando $w = \gamma'(s)$ en la proposición anterior, se tiene que

$$\kappa_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right) + \frac{d\psi}{ds}.$$

Notar que a lo largo de la curva coordenada $\varphi(u(s), v_0)$, $v'(s) = 0$ y $u'(s) = 1/\sqrt{E}$, luego

$$(\kappa_g)_1 = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}.$$

De manera análoga,

$$(\kappa_g)_2 = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}.$$

Reemplazando lo obtenido en la expresión de la curvatura geodésica que se obtiene de la proposición anterior y usando que $\psi(s) = \angle(\gamma', \varphi_u)$, se tiene

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left((\kappa_g)_2 2G\sqrt{E} \frac{dv}{ds} + (\kappa_g)_1 2E\sqrt{G} \frac{du}{ds} \right) + \frac{d\psi}{dt} \\ &= (\kappa_g)_2 \sqrt{G} \frac{dv}{ds} + (\kappa_g)_1 \sqrt{E} \frac{du}{ds} + \frac{d\psi}{dt} \\ &= (\kappa_g)_1 \cos \psi + (\kappa_g)_2 \sen \psi + \frac{d\psi}{dt}. \end{aligned}$$

♣

5.6 El Teorema de Gauss–Bonnet

El Teorema de Gauss–Bonnet relaciona en una misma ecuación varios de los conceptos que hemos estudiado hasta ahora. Es “probablemente el resultado más profundo de la geometría diferencial de superficies” ([Car16], p. 267). Uno de sus corolarios más famosos describe la suma de los ángulos interiores de un triángulo geodésico en una superficie en términos de su curvatura de Gauss.

Seguiremos la exposición que se encuentra en la sección 5 del capítulo 4 de [Car16].

Definición 5.6.1. Sea $\gamma : [0, l] \rightarrow S$ una función continua a una superficie regular S . Decimos que γ es una *curva parametrizada simple, cerrada y regular a trozos* si

1. $\gamma(0) = \gamma(l)$,
2. para cualquier par $t_1, t_2 \in [0, l]$ con $t_1 \neq t_2$, $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$,

3. existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = l$ de $[0, l]$ tal que γ es suave y regular en cada (t_i, t_{i+1}) , $i = 0, \dots, k$.

Los puntos $\gamma(t_i)$, $i = 0, \dots, k$, son llamados **vértices** de γ y las trazas $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ son llamadas **arcos regulares** de γ .

Definición 5.6.2. Sea S una superficie orientada. Una región $R \subset S$ se dice **región simple** si R es homeomorfa a un disco y su frontera ∂R es la traza de una curva parametrizada simple, cerrada y regular a trozos $\gamma : I \rightarrow S$.

En tal caso, decimos que γ está **orientada positivamente** si cuando la recorremos caminando con la cabeza apuntando en la dirección de N la región encerrada queda a nuestra izquierda. De manera más precisa: si para todo $\gamma(t)$ en un arco regular, la base ortogonal positiva $\{\gamma'(t), h(t)\}$ satisface que $h(t)$ “apunta hacia R ”, es decir, si $\alpha : I \rightarrow R$ satisface $\alpha(0) = \gamma(t)$ y $\alpha'(0) \neq \gamma'(t)$, entonces $\langle \alpha'(0), h(t) \rangle > 0$.

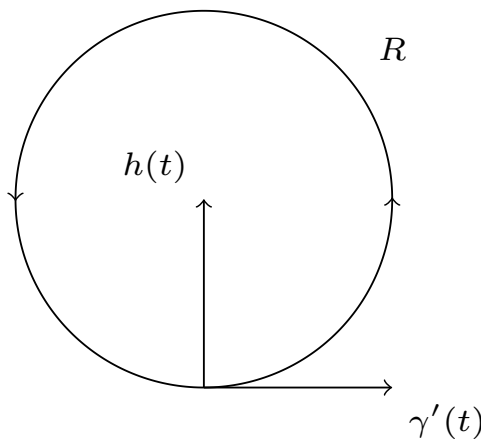


Figura 5.4: La curva $\gamma(t)$ cuya traza es la frontera de la región R . Estamos observando la situación como si estuviéramos parados sobre el vector normal N , de modo que al recorrer γ como indican las flechas, la región queda a nuestra izquierda y el vector $h(t)$ que hace positiva la base $\{\gamma'(t), h(t), N(\gamma(t))\}$ apunta hacia el interior. Cualquier curva $\alpha : I \rightarrow R$ tal que $\alpha(0) = \gamma(t)$ y $\alpha'(0) \neq \gamma'(t)$ deberá formar un ángulo menor a $\pi/2$ con $h(t)$, por lo que $\langle \alpha'(0), h(t) \rangle > 0$.

En lo que sigue, S será siempre una superficie regular orientada por un campo normal unitario N y $R \subset S$ será una región simple cuya frontera es la traza de una curva $\gamma : I \rightarrow S$ orientada positivamente.

Para enunciar el teorema, necesitamos una manera de medir el “ángulo exterior” de γ en S orientada positivamente en cada uno de sus vértices. La condición de regularidad de γ nos garantiza que en cada vértice $\gamma(t_i)$ existen los límites por izquierda y por derecha, es decir,

$$\gamma'_-(t_i) := \lim_{t \rightarrow t_i^-} \gamma'(t) \neq 0, \quad \gamma'_+(t_i) := \lim_{t \rightarrow t_i^+} \gamma'(t) \neq 0.$$

El vértice $\gamma(t_i)$ es un **pico** si $\gamma'_+(t_i)$ es un múltiplo negativo de $\gamma'_-(t_i)$.

Se define $|\theta_i|$ como el menor ángulo determinado desde $\gamma'_-(t_i)$ hasta $\gamma'_+(t_i)$, de modo que $0 < |\theta_i| \leq \pi$.

Si el vértice no es un pico, es decir, $|\theta_i| \neq \pi$, le damos a θ_i el signo del determinante $(\gamma'_-(t_i), \gamma'_+(t_i), N)$. El ángulo signado θ_i , $-\pi < \theta_i < \pi$, es llamado **ángulo exterior** en el vértice $\gamma(t_i)$.

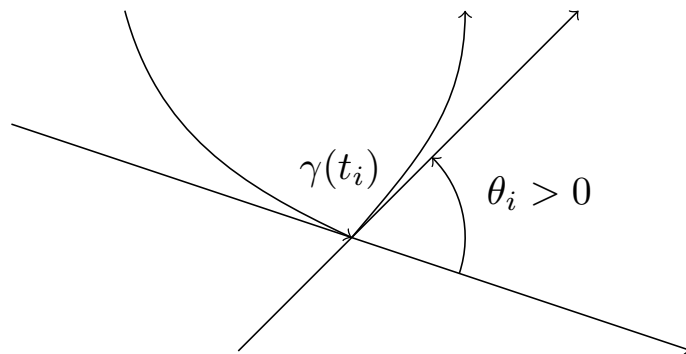


Figura 5.5: El ángulo exterior en el vértice $\gamma(t_i)$. Ver Figura 4-25 de [Car16].

Si $\gamma(t_i)$ es un pico, es decir, $|\theta_i| = \pi$, la manera de definir el signo es más complicada. Para ello, asumiremos que en un entorno del pico la curvatura de γ no se anula.

Uno quiere asignarle un signo positivo si el pico “se forma hacia el exterior de la región R ” y un signo negativo si se forma “hacia el interior”. Para ello, notemos que como la curva está orientada positivamente, cuando uno recorre la curva el interior de R está a la izquierda. Luego, si el pico se forma apuntando al exterior, la curva debería “doblar” primero a la derecha, para luego hacer un giro abrupto (en el vértice) hacia la izquierda. Para capturar esta idea en términos más precisos, notemos que como hemos asumido que la curvatura de γ no se anula en un entorno del pico, $\langle \mathbf{n}_\gamma(s), R_{\frac{\pi}{2}}(\gamma'_-(t_i)) \rangle$ es una función suave definida en un conexo por caminos que no se anula en un entorno de la forma $(t_i - \varepsilon, t_i)$, por lo que en tal entorno debe mantener su signo.

Así, decimos que el signo de θ_i es **positivo** si existe $\varepsilon > 0$ tal que $\langle \mathbf{n}_\gamma(s), R_{\frac{\pi}{2}}(\gamma'_-(t_i)) \rangle < 0$ para todo $s \in (t_i - \varepsilon, t_i)$. Si se da al revés, es decir, primero dobla hacia la izquierda y luego abruptamente hacia la derecha, el signo será **negativo**. Explícitamente, es negativo si existe $\varepsilon > 0$ tal que $\langle \mathbf{n}_\gamma(s), R_{\frac{\pi}{2}}(\gamma'_-(t_i)) \rangle > 0$ para todo $s \in (t_i - \varepsilon, t_i)$.

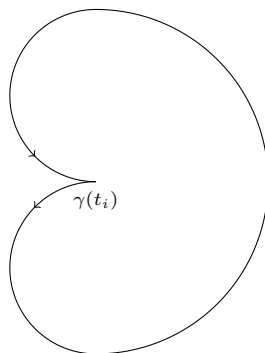


Figura 5.6: Un pico $\gamma(t_i)$ donde el signo de θ_i es negativo.

Sea $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización compatible con la orientación¹ de S tal que $R \subset$

¹Esto es, $N(\varphi(q)) = \frac{\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)}{\|\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)\|}$ para todo $q \in U$. También se dice que la carta (U, φ)

$\varphi(U)$ y supongamos que U es homeomorfo a un disco abierto del plano. Sean $\gamma(t_i)$ los vértices de la curva γ y θ_i los correspondientes ángulos exteriores, $i = 0, \dots, k$. Sean $\psi_t : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones suaves que miden en cada $t \in [t_i, t_{i+1}]$ el ángulo positivo desde φ_u hasta $\gamma'(t)$.

Asumiremos sin demostración la validez del siguiente teorema, que es una versión del Umlaufsatz² de H. Hopf (ver, por ejemplo, el Teorema 2.7 de [Tap16]) o [Car16], p. 270).

Teorema 5.6.3 (Umlaufsatz de Hopf). *Con las hipótesis previas, para una curva plana se tiene*

$$\sum_{i=0}^k (\psi_i(t_{i+1}) - \psi_i(t_i)) + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi.$$

Lo que estamos diciendo es que al cerrar una vuelta, el vector tangente a la curva completa un giro de 2π radianes, ya sea avanzando suavemente por los trozos suaves de la curva o “saltando” de un trozo a otro en cada vértice donde se pierde la regularidad.

Sea ahora $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización compatible con la orientación de S y sea $R \subset \varphi(U)$ una región acotada de S . Consideremos la noción de integración de funciones suaves sobre superficies regulares de la siguiente manera.

Definición 5.6.4. Si f es suave sobre S , se define la *integral de f sobre la región R* como

$$\int_R f \, d\sigma := \int_{\varphi^{-1}(R)} f(u, v) \sqrt{EG - F^2} \, dudv. \quad (5.3)$$

Observación 5.6.5. Notar que

$$\int_R f \, d\sigma$$

no depende de la parametrización. En efecto, si $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow S$ es otra parametrización compatible con la orientación de S , por (3.1),

$$\begin{aligned} & \sqrt{\tilde{E}(\tilde{u}, \tilde{v})\tilde{G}(\tilde{u}, \tilde{v}) - \tilde{F}(\tilde{u}, \tilde{v})^2} \\ &= \det \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \sqrt{E(u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v}))G(u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v})) - F(u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v}))^2}. \end{aligned}$$

Entonces, por el teorema del cambio de variables,

$$\int_{\tilde{\varphi}^{-1}(R)} f(\tilde{u}, \tilde{v}) \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} \, d\tilde{u}d\tilde{v} = \int_{\varphi^{-1}(R)} f(u, v) \sqrt{EG - F^2} \, dudv.$$

Observación 5.6.6. Dada una función suave f sobre una superficie regular S y una parametrización local $\varphi : U \rightarrow S$, $U \subset \mathbb{R}^2$ acotado, uno podría preguntarse por qué se define la integral de f como en (5.3) en vez de la versión más simple

$$\int_{\varphi(U)} f \, d\sigma \stackrel{?}{=} \int_U f \circ \varphi \, dudv. \quad (5.4)$$

El problema es que si $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ es otra parametrización local,

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(U) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{U})} f \, d\sigma &= \int_{\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(U) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{U}))} f \circ \tilde{\varphi} \, d\tilde{u}d\tilde{v} \\ &= \int_{\varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{U}))} f \circ \tilde{\varphi} \circ (\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi) \left| \det \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \right| \, dudv \\ &= \int_{\varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{U}))} f \circ \varphi \left| \det \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \right| \, dudv. \end{aligned}$$

está orientada positivamente.

²Del alemán *umlaufen* “caminar alrededor” y *Satz* “teorema”.

Como el Jacobiano no tendría por qué ser idénticamente 1, (5.4) no estaría bien definido, ya que dependería de la parametrización. Esto sugiere que las funciones no son el objeto indicado para integrar sobre superficies, un problema al que volveremos más adelante para estudiar una generalización de los teoremas clásicos de cálculo.

Por último, recordemos el teorema de Green para el plano uv : si $P(u, v)$ y $Q(u, v)$ son funciones suaves en una región simple $A \subset \mathbb{R}^2$ cuya frontera está dada por $u = u(s)$ y $v = v(s)$, entonces

$$\int_{\partial A} \left(P \frac{du}{ds} + Q \frac{dv}{ds} \right) ds := \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(P \frac{du}{ds} + Q \frac{dv}{ds} \right) ds = \int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) dudv.$$

Teorema 5.6.7 (Teorema de Gauss–Bonnet, local). *Sea $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrización isotermal de una superficie orientada S , donde $U \subset \mathbb{R}^2$ es homeomorfo a un disco abierto y φ es compatible con la orientación de S .*

Sea $R \subset \varphi(U)$ una región simple de S y sea $\gamma : I \rightarrow S$ tal que $\partial R = \gamma(I)$. Supongamos que γ está orientada positivamente, parametrizada por longitud de arco s , y sean $\gamma(s_0), \dots, \gamma(s_k)$ y $\theta_0, \dots, \theta_k$ los vértices y los ángulos exteriores, respectivamente. Entonces,

$$\int_{\partial R} \kappa_g(s) ds + \int_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi,$$

donde $\kappa_g(s)$ es la curvatura geodésica de los arcos regulares de γ y K es la curvatura Gaussiana de S .³

Demostración. Llamemos $u = u(s)$ y $v = v(s)$ a la parametrización de γ en la parametrización φ . Comenzamos escribiendo $\kappa_g(s)$ en un intervalo $[s_i, s_{i+1}]$ usando la Proposición 5.5.6:

$$\kappa_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right) + \frac{d\psi_i}{ds},$$

donde $\psi_i = \psi_i(s)$ es una función suave que mide el ángulo positivo desde φ_u hasta $\dot{\gamma}(s)$ en $[s_i, s_{i+1}]$. Integrando esa expresión en todos los intervalos y sumando nos queda

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa_g(s) ds &= \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \frac{du}{ds} \right) ds \\ &\quad + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\psi_i}{ds} ds. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Green, vemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa_g(s) ds &= \int_{\varphi^{-1}(R)} \left\{ \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right\} dudv \\ &\quad + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\psi_i}{ds} ds. \end{aligned} \tag{5.5}$$

³La hipótesis de que la parametrización sea isotermal es solamente para simplificar la prueba y poder usar el Umlaufsatz de Hopf tal como lo tenemos enunciado. Notar que como las parametrizaciones isotermales preservan ángulos, podemos estudiar la manera en que cambian los ángulos en la curva γ mirando la curva $\varphi^{-1}(\partial R)$, que es plana. Por otro lado, puede probarse que las superficies regulares siempre admiten parametrizaciones isotermales en entornos de sus puntos (ver [Ber58]).

Usando la expresión de la curvatura de Gauss cuando $F \equiv 0$ (ver Proposición 4.9.7) y que la parametrización es isotermal, por lo que $E = G = \lambda(u, v)$,

$$\begin{aligned} \int_{\varphi^{-1}(R)} \left\{ \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right\} dudv &= \int_{\varphi^{-1}(R)} \frac{1}{2\lambda} (\Delta \ln \lambda) \lambda dudv \\ &= \int_{\varphi^{-1}(R)} -K\lambda dudv \\ &= - \int_R K d\sigma. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Por otro lado, usando el Teorema de rotación de las tangentes y la regla de Barrow,

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\psi_i}{ds} ds = \sum_{i=0}^k \psi_i(s_{i+1}) - \psi_i(s_i) = 2\pi - \sum_{i=0}^k \theta_i, \quad (5.7)$$

donde hemos usado que la curva está orientada positivamente. Basta con reemplazar (5.6) y (5.7) en (5.5) para obtener el resultado. ♣

Nos dedicamos ahora a exponer superficialmente el enunciado de la versión global del Teorema de Gauss–Bonnet. Un tratamiento más detallado precisaría de una gran cantidad de preliminares topológicos que van más allá del alcance de este libro.

Definición 5.6.8. Sea S una superficie regular. Una región $R \subset S$ se dice *regular* si es compacta y su frontera ∂R es unión finita de curvas regulares a trozos cerradas (simples) que no se intersecan. Consideraremos una superficie compacta como una región regular con frontera vacía.

Definición 5.6.9.

- * Un *triángulo* es una región simple que solo tiene tres vértices. Los tres arcos regulares que forman la frontera del triángulo son llamados *lados*.
- * Una *triangulación* de una región regular $R \subset S$ es una familia finita \mathcal{T} de triángulos T_i , $i = 1, \dots, n$, tal que

1. $\bigcup_{i=1}^n T_i = R$,
2. si $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, entonces $T_i \cap T_j$ es un lado en común de T_i y T_j o es un vértice común de T_i y T_j .

- * Dada una triangulación \mathcal{T} de una región regular $R \subset S$, denotamos F al número de triángulos (caras), E al número de lados (contados sin repetir aquellos compartidos por dos triángulos), y V al número de vértices de la triangulación (contados sin repetir aunque sean compartidos por varios triángulos). El número $\chi := V + E - F$ es llamado *característica de Euler* de \mathcal{T} .

Un resultado topológico notable es que la característica de Euler de una triangulación de una región regular R no depende en realidad de la triangulación sino de R , por lo que se habla de característica de Euler de una región.

Teorema 5.6.10.

1. Toda región regular de una superficie regular admite una triangulación.
2. Si $R \subset S$ es una región regular, la característica de Euler no depende de la triangulación. Por lo tanto, podemos denotarla $\chi(R)$.
3. La característica de Euler es un invariante topológico, es decir, es invariante por homeomorfismos.

Ejemplo 5.6.11. A continuación se muestran posibles triangulaciones de algunas superficies regulares y sus correspondientes características de Euler.

1. La característica de Euler de una región simple es $\chi(R) = 1$.

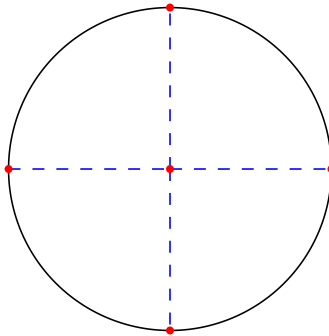


Figura 5.7: Una posible triangulación de la región simple formada por un disco. Notar que hay 5 vértices (en rojo), 8 lados (las cuatro líneas azules y los cuatro arcos de circunferencia) y 4 triángulos. Por lo tanto, $\chi(R) = 5 - 8 + 4 = 1$.

2. La característica de Euler de una esfera es $\chi(S^2) = 2$.

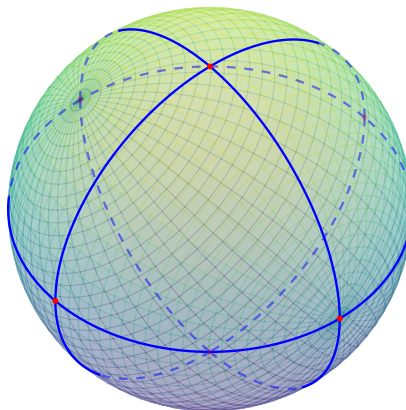


Figura 5.8: Una posible triangulación de la esfera. Notar que hay 6 vértices (en rojo, los correspondientes a los vectores canónicos $\pm e_1, \pm e_2$ y $\pm e_3$ en \mathbb{R}^3), 12 lados y 8 triángulos (cuatro en el hemisferio norte y cuatro en el sur). Por lo tanto, $\chi(R) = 6 - 12 + 8 = 2$.

3. La característica de Euler de un toro es $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$. Si bien puede calcularse obviamente mediante triangulaciones, la manera más sencilla de hacerlo requiere técnicas de topología

algebraica que escapan al alcance de este libro. Sin embargo, mostraremos una manera alternativa de calcularla usando el Teorema de Gauss–Bonnet.

Teorema 5.6.12 (Teorema de Gauss–Bonnet, global). *Sea $R \subset S$ una región regular y sean $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ curvas simples, cerradas y regulares a trozos que forman la frontera ∂R de R . Supongamos que cada γ_i está orientada positivamente y sean $\theta_1, \dots, \theta_p$ los ángulos exteriores de las curvas $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Entonces,*

$$\sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \kappa_g(s) ds + \int_R K d\sigma + \sum_{i=1}^p \theta_i = 2\pi \chi(R),$$

donde s denota el parámetro longitud de arco de γ_i , y la integral sobre γ_i es la integral sobre cada arco regular de γ_i .

Ejemplo 5.6.13 (La característica de Euler del toro). Recordemos la parametrización del toro dada por

$$\varphi(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u), \quad (u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi),$$

que cubre toda la superficie salvo por un paralelo y un meridiano.

Como es una superficie compacta, el Teorema de Gauss–Bonnet dice que

$$\int_{\mathbb{T}^2} K d\sigma = 2\pi \chi(\mathbb{T}^2).$$

Calculemos entonces la integral de la curvatura de Gauss sobre el toro. Para eso, recurrimos a la misma técnica del Ejemplo 3.1.14, donde primero integramos sobre $R_\varepsilon := \varphi(Q_\varepsilon)$, con

$$Q_\varepsilon := (\varepsilon, 2\pi - \varepsilon) \times (\varepsilon, 2\pi - \varepsilon).$$

Luego, recordando la expresión de la curvatura de Gauss del toro obtenida en el Ejemplo 4.8.5,

$$\begin{aligned} \int_{R_\varepsilon} K d\sigma &= \iint_{Q_\varepsilon} K \sqrt{EG - F^2} dudv = \iint_{Q_\varepsilon} \frac{\cos u}{r(a + r \cos u)} r(a + r \cos u) dudv \\ &= \iint_{Q_\varepsilon} \cos u dudv = 2\pi(\sin(2\pi - \varepsilon) - \sin(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon \rightarrow 0$, tenemos que

$$\int_{\mathbb{T}^2} K d\sigma = 0$$

y, por lo tanto, $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$.

Terminamos este capítulo con una de las aplicaciones más famosas del Teorema de Gauss–Bonnet: supongamos que T es un triángulo geodésico (es decir, sus lados son arcos de geodésicas) en una superficie orientada S . Sean θ_i , $i = 1, 2, 3$, sus ángulos exteriores y $\psi_i = \pi - \theta_i$, $i = 1, 2, 3$, sus ángulos interiores. Por el Teorema de Gauss–Bonnet,

$$\int_T K d\sigma + \sum_{i=1}^3 \theta_i = 2\pi.$$

Reescribiendo la ecuación anterior en términos de los ángulos interiores,

$$\int_T K d\sigma = 2\pi - \sum_{i=1}^3 (\pi - \psi_i) = -\pi + \sum_{i=1}^3 \psi_i.$$

Por lo tanto, tenemos probado el siguiente resultado:

Proposición 5.6.14. *La suma de los ángulos interiores de un triángulo geodésico en una superficie regular orientada es*

- * *igual a π si $K = 0$.*
- * *mayor que π si $K > 0$.*
- * *menor que π si $K < 0$.*

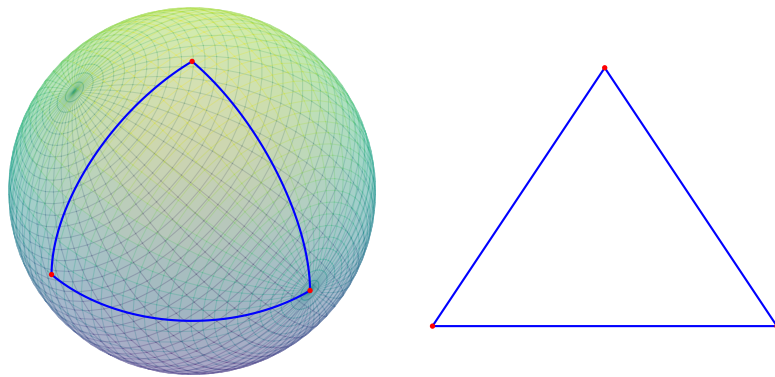


Figura 5.9: A la izquierda, un triángulo geodésico en una esfera, cuya suma de ángulos interiores es mayor que π . A la derecha, un triángulo geodésico en el plano, cuya suma de ángulos interiores es igual a π .

Ejercicios

Otros ejercicios:

Ejercicio 5.6.15. Sean v y w campos vectoriales tangentes a lo largo de una curva $\gamma : I \rightarrow S$. Probar que

$$\frac{d}{dt} \langle v(t), w(t) \rangle = \left\langle \frac{Dv}{dt}, w(t) \right\rangle + \left\langle v(t), \frac{Dw}{dt} \right\rangle.$$

Ejercicio 5.6.16. Sea S^2 la esfera unitaria orientada con el normal exterior N . Para cada $\phi \in [0, 2\pi)$, consideremos la curva $\gamma_\phi(t) = (\cos \phi \sin t, \sin \phi \sin t, \cos t)$, $t \in (0, \pi)$, que une el polo norte $p = (0, 0, 1)$ con el polo sur $q = (0, 0, -1)$. Tomemos el vector $w_0 = (1, 0, 0) \in T_p S^2$.

- (a) Probar que el campo vectorial $X_\phi(t) = \gamma'_\phi(t) \cos \phi - \sin \phi N \times \gamma'_\phi(t)$ es paralelo sobre $\gamma_\phi(t)$.
- (b) Verificar que $X_\phi(0) = w_0$ para todo $\phi \in [0, 2\pi)$.
- (c) Encontrar el transporte paralelo de $w_0 \in T_p S^2$ a lo largo de γ_ϕ para $\phi = 0, \pi/4, \pi/2$.

Ejercicio 5.6.17. Probar que los círculos máximos son las únicas geodésicas de la esfera.

Ejercicio 5.6.18. Considerar la superficie de revolución S generada por la rotación de la curva $\gamma(v) = (f(v), 0, g(v))$ parametrizada por longitud de arco, con $f(v) > 0$, alrededor del eje z .

- (a) Mostrar que los meridianos $u = u_0$ de S , parametrizados con velocidad constante, son geodésicas.

- (b) Mostrar que los paralelos $v = v_0$ de S , parametrizados con velocidad constante, son geodésicas cuando en el punto $\gamma(v_0)$ que genera dicho paralelo, la recta tangente a la curva $\gamma(v)$ es paralela al eje de revolución.

Ejercicio 5.6.19. Sean S una superficie regular orientada y $\gamma : (a, b) \rightarrow S$ una curva regular parametrizada por longitud de arco cuya curvatura no se anula. Supongamos que existe un plano H que pasa por el origen, contiene a todos los vectores tangentes a γ y también a los vectores normales a la superficie $N(\gamma(s))$. Probar que γ es una geodésica.

Ejercicio 5.6.20. Sean S una superficie regular orientada y $\gamma : I \rightarrow S$ una curva parametrizada por longitud de arco. En un punto $p = \gamma(s)$ consideramos el *triedro de Darboux*⁴ formado por $T(s) = \dot{\gamma}(s)$, el normal a la superficie en p $N(s)$ y $V(s) = N(s) \times T(s)$. Probar que

$$\begin{aligned}\frac{dT}{ds} &= 0 + aV + bN \\ \frac{dV}{ds} &= -aT + 0 + cN \\ \frac{dN}{ds} &= -bT - cV + 0\end{aligned}$$

donde $a = a(s)$, $b = b(s)$ y $c = c(s)$, $s \in I$.

Mostrar que el significado geométrico de los coeficientes está dado por:

- (a) $-c$ es la torsión geodésica⁵, por lo que $\gamma(I) \subset S$ es una línea de curvatura si y solo si $c \equiv 0$.
- (b) b es la curvatura normal de $\gamma(I) \subset S$ en p .
- (c) $-a$ es la curvatura geodésica de $\gamma(I) \subset S$ en p .

⁴J. G. Darboux (1842-1917), matemático francés.

⁵Sean S una superficie regular y γ una curva parametrizada por longitud de arco en S tal que $\gamma(0) = p \in S$. Elegimos en $T_p S$ una base ortonormal positiva $\{\mathbf{t}, h\}$ donde $\mathbf{t} = \dot{\gamma}(0)$. Definimos la *torsión geodésica* de γ en p como

$$\tau_g := \left\langle \frac{dN}{ds}(0), h \right\rangle.$$

Capítulo 6

Variedades suaves

Como ya mencionamos, si se considera el movimiento de un sistema de N partículas, se trabaja con curvas en \mathbb{R}^{3N} . Sin embargo, cuando se estudian las formulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana de la Mecánica Clásica, el espacio de configuraciones del sistema no necesariamente es un espacio Euclídeo, sino que tiene estructura de variedad suave de dimensión N , donde N es el número de grados de libertad del sistema.

Dado que el cálculo diferencial es de carácter local, es natural preguntarse sobre la existencia de conjuntos que localmente se identifiquen con subconjuntos de un espacio Euclídeo, aún cuando sus elementos sean abstractos.

6.1 Algo de topología

En esta sección vamos a presentar los conceptos topológicos que se necesitan para trabajar sobre las variedades suaves.

Definición 6.1.1. Un *espacio topológico* es un conjunto X con una colección τ de subconjuntos de X tales que

1. $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$.
2. La unión arbitraria de elementos de τ es otro elemento de τ .

Esto es, si $U_i \in \tau \forall i \in I$ entonces $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

3. La intersección de finitos elementos de τ es otro elemento de τ .

Es decir, se cumple que si $U_i \in \tau$ con $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$.

La familia $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ se denomina *topología* en X , donde $\mathcal{P}(X)$ es el conjunto de partes de X . La notación usual para un conjunto X con una topología τ es (X, τ) . Los elementos de una topología τ en X se denominan *abiertos* de X .

Ejemplo 6.1.2.

1. Dado un conjunto X cualquiera, $\tau := \mathcal{P}(X)$ es una topología en X llamada *topología discreta* de X .

2. Si (X, τ) es un espacio topológico y S es un subconjunto de X , la familia $\{S \cap A \mid A \in \tau\}$ es una topología en S llamada *topología relativa* de S como subconjunto de (X, τ) .
3. Si (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) son dos espacios topológicos, la familia

$$\{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \tau_1 \text{ y } A_2 \in \tau_2\}$$

es una topología en el producto cartesiano $X_1 \times X_2$ llamada *topología producto*.

Es claro que esta definición se extiende de manera natural al producto finito de espacios topológicos.

4. Sean (X, τ) un espacio topológico y \sim una relación de equivalencia en X . Consideremos el conjunto cociente $\tilde{X} = X/\sim$ y la proyección canónica $\rho : X \rightarrow \tilde{X}$. La familia $\{A \subset \tilde{X} \mid \rho^{-1}(A) \in \tau\} \subset \mathcal{P}(\tilde{X})$ es una topología en \tilde{X} llamada *topología cociente* de τ por la equivalencia \sim .
5. Recordemos que un espacio métrico es un conjunto X con una *distancia* también llamada *métrica* en X , esto es, una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple las siguientes condiciones para todo $x, y, z \in X$:

- * $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$,
- * $d(x, y) = d(y, x)$,
- * $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*desigualdad triangular*).

Dados $x \in X$ y un número real $r > 0$ se define la *bola centrada en x de radio r* como el conjunto $B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$.

Así, todo espacio métrico es un espacio topológico, cuya topología es inducida por la función distancia y se llama *topología métrica*. Explícitamente, los abiertos son los subconjuntos A de X para los cuales se cumple que para todo $x \in A$ existe un número real $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset A$.

En estos términos, la topología canónica de \mathbb{R}^n es la topología métrica inducida por la distancia euclídea en \mathbb{R}^n .

Definiciones 6.1.3.

1. Dado un conjunto cualquiera $A \subset X$, la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A se llama *interior de A* .
2. Un subconjunto de X es *cerrado* si su complemento en X es abierto.
3. Dado $A \subset X$ un conjunto cualquiera, la intersección de todos los subconjuntos cerrados de X que contienen a A es la *clausura* de A .
4. Dado $A \subset X$ un conjunto cualquiera, el conjunto dado por $\partial A := \text{cl}(A) - \text{int}(A)$ es llamado *borde de A* .

5. Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, el **sopORTE** de f es el conjunto

$$\text{sop}(f) := \text{cl}(\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}).$$

6. Un conjunto $\mathcal{V} \subset X$ es un **entorno** de $x \in X$ si existe un abierto $A \in \tau$ tal que $x \in A \subset \mathcal{V}$.
7. Una **base de entornos** de un punto $x \in X$ es una familia de entornos \mathcal{V}_x de x tal que todo entorno de x contiene a uno de ellos.
8. Una **base** de una topología τ en X es una familia $\mathcal{B} \subset \tau$ con la propiedad que todo abierto de τ se puede obtener como unión de elementos de \mathcal{B} .
9. Una topología se dice **Hausdorff** si para todo par de puntos $x, y \in X$ existen entornos disjuntos \mathcal{V}_x y \mathcal{V}_y de x e y , respectivamente.
10. La topología τ se dice **paracompacta** si todo cubrimiento por abiertos de X admite un refinamiento localmente finito, i.e., todo punto de X tiene un entorno que interseca solo a un número finito de elementos del refinamiento.

Observación 6.1.4.

1. El interior de un conjunto cualquiera siempre es abierto y es el mayor subconjunto abierto de A . La notación usual es $\text{int}(A)$.
2. Es claro que la unión finita de conjuntos cerrados es cerrada y la intersección de una familia arbitraria de conjuntos cerrados también es un conjunto cerrado.
3. Puede verse que la clausura de un conjunto siempre es un conjunto cerrado; es más, es el menor cerrado que contiene al conjunto. La notación usual es \bar{A} o $\text{cl}(A)$.
4. Un ejemplo de base de una topología es la familia de bolas $B_{\frac{1}{n}}(x)$ en un espacio métrico que forman una base de entornos de x .
5. Es sencillo ver que todos los espacios métricos son espacios topológicos Hausdorff.

Entre espacios topológicos se puede definir la noción de continuidad de funciones de manera natural.

Definición 6.1.5. Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) dos espacios topológicos. Una función $f : X \rightarrow Y$ es **continua en $x_0 \in X$** si para todo entorno $\mathcal{V}_{f(x_0)}$ de $f(x_0)$ en Y , $f^{-1}(\mathcal{V}_{f(x_0)})$ es un entorno de x_0 en X . Una función $f : X \rightarrow Y$ es **continua** si es continua en todos los puntos de X .

Puede verse que $f : X \rightarrow Y$ es continua si y solo si $f^{-1}(B)$ es un abierto en X para todo B abierto en Y . De manera equivalente, se puede decir que f es continua si y solo si $f^{-1}(B)$ es un cerrado en X para todo B cerrado en Y .

6.2 Variedades suaves

Cuando uno piensa en una variedad suave, se imagina un objeto que localmente pueda identificarse con un subconjunto de \mathbb{R}^n para algún $n \in \mathbb{N}$ que es llamado dimensión de la variedad. Vamos a generalizar la idea de superficies regulares de tal manera que éstas resulten ser variedades suaves de dimensión 2.

Definición 6.2.1. Consideremos un conjunto M junto con una familia de funciones $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$, $\alpha \in A$, llamadas **parametrizaciones locales**, donde cada U_α es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $M = \bigcup_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(U_\alpha)$,
2. para cada $\alpha \in A$, la función $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha := \varphi_\alpha(U_\alpha)$ es inyectiva,
3. si $V_{\alpha\beta} := V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$, la función $\varphi_{\alpha\beta} := \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta : \varphi_\beta^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta)$ es una función suave entre subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^n .

Cada par $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ es llamado **carta local**, la familia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ es llamada **atlas** de M y suele decirse que \mathbb{R}^n es el **espacio de parámetros**.

Dado $p \in V_\alpha$, sus **coordenadas locales** en \mathbb{R}^n asociadas a $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ son $(u_1^\alpha, \dots, u_n^\alpha) = \varphi_\alpha^{-1}(p)$. Se dice que las funciones $\varphi_\alpha^{-1} : V_\alpha \rightarrow U_\alpha$ forman un **sistema local de coordenadas** en M para todo punto $p \in V_\alpha$.

La condición 3 dice que si las imágenes de φ_α y φ_β se intersecan, la función **cambio de parámetros** $\varphi_{\alpha\beta}$ es suave. Cuando dos sistemas de coordenadas locales satisfacen esta condición se dice que son **compatibles**.

Diferentes familias de parametrizaciones locales pueden ser atlas del mismo conjunto, lo que motiva la siguiente definición.

Definición 6.2.2. Dado un conjunto M , dos atlas (suaves) \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 se dicen **equivalentes** si su unión es otro atlas de M . La unión todos los atlas de una clase de equivalencia es en sí misma un atlas de la misma clase, llamado **atlas maximal**. Una **estructura suave** en M es un atlas suave maximal.

Por último, decimos que una carta (U, φ) es **compatible** con un atlas \mathcal{A} si $\mathcal{A} \cup \{(U, \varphi)\}$ es también un atlas.

Lema 6.2.3 (Lema 1.30 de [Lee09]). Sea M un conjunto con una estructura suave dada por un atlas $\mathcal{A} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$. Si $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (U_β, φ_β) son cartas compatibles con \mathcal{A} tales que $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$, entonces las cartas $(\varphi_\alpha^{-1}(V_{\alpha\beta}), \varphi_\alpha|_{\varphi_\alpha^{-1}(V_{\alpha\beta})})$ y $(\varphi_\beta^{-1}(V_{\alpha\beta}), \varphi_\beta|_{\varphi_\beta^{-1}(V_{\alpha\beta})})$ también son compatibles con \mathcal{A} .

Además, si W es un subconjunto abierto de U para alguna carta compatible (U, φ) , entonces $(W, \varphi|_W)$ también es una carta compatible.

Proposición 6.2.4. Una estructura suave sobre un conjunto M induce una topología sobre él.

Demostración. Basta con notar que el lema anterior dice que los dominios de las cartas del atlas maximal forman una base de subconjuntos de X . La topología inducida por la estructura suave es la generada por esta base. ♣

Definición 6.2.5. Una **variedad suave** es un conjunto M junto con una estructura suave sobre él tal que la topología inducida es Hausdorff y paracompacta.

Si las biyecciones de las cartas tienen como codominio a \mathbb{R}^n , decimos que M tiene **dimensión** n y escribimos $\dim M = n$.

Llegados a este punto conviene agarrar algún ejemplo para ver que todos esos tecnicismos que usamos en las definiciones no van a entorpecer nuestra intuición ni las cuentas que vayamos a hacer. Nos concentraremos principalmente en obtener atlas suaves para nuestros conjuntos y dejaremos de lado mostrar que las topologías que inducen son efectivamente Hausdorff y paracompactas, aunque en general esto último será relativamente claro.

Ejemplo 6.2.6. Si pensamos que una variedad suave es un conjunto que localmente se parece a \mathbb{R}^n , parece obvio que \mathbb{R}^n debería ser una variedad suave en sí misma. En otras palabras, ¿quién se va a parecer más a \mathbb{R}^n que el mismo \mathbb{R}^n ?

Así, sea $M := \mathbb{R}^n$ y veamos que es una variedad suave. Podemos asignarle a cada punto de M sus mismas coordenadas como elemento de \mathbb{R}^n , i.e., considerar la carta $(\mathbb{R}^n, \text{id})$.

Es claro que cubre todo M y que $\text{id}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ es abierto. Luego, $\{(\mathbb{R}^n, \text{id})\}$ es un atlas suave para \mathbb{R}^n . La estructura suave construida a partir de él induce la topología usual sobre \mathbb{R}^n que es Hausdorff y paracompacta (es una topología métrica). Finalmente, es claro que $\dim M = n$.

Observación 6.2.7.

1. Una función $f : M \rightarrow N$ entre variedades suaves M y N es **continua** si lo es considerando las topologías inducidas de manera canónica sobre M y N por sus estructuras suaves.
2. La función cambio de parámetros

$$\varphi_{\alpha\beta} := \varphi_{\alpha}^{-1} \circ \varphi_{\beta} : \varphi_{\beta}^{-1}(V_{\alpha} \cap V_{\beta}) \rightarrow \varphi_{\alpha}^{-1}(V_{\alpha} \cap V_{\beta})$$

es un difeomorfismo, ya que

$$\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_{\beta}^{-1} \circ \varphi_{\alpha} : \varphi_{\alpha}^{-1}(V_{\alpha} \cap V_{\beta}) \rightarrow \varphi_{\beta}^{-1}(V_{\alpha} \cap V_{\beta})$$

verifica que $\varphi_{\beta\alpha} = (\varphi_{\alpha\beta})^{-1}$.

Ejemplo 6.2.8.

1. **La esfera unitaria:** $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$. Dada la función $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) := \langle x, x \rangle = \|x\|^2$, tenemos que $S^n = f^{-1}(\{1\})$.

Recordando el Ejemplo 2.1.10, llamaremos **polo sur** al punto $a^- := (0, \dots, 0, -1)$. Sean $V_- := S^n - \{a^-\}$ y la función $\varphi_-^{-1} : V_- \rightarrow \{a^-\}^{\perp}$ que le asigna a $x \in V_-$ la intersección de la “recta” que pasa por x y a^- con el hiperplano $\{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \mid x_{n+1} = 0\}$.

Se puede ver fácilmente que esta función está dada por

$$\varphi_-^{-1}(x) = \frac{x - \langle x, a^- \rangle a^-}{1 - \langle x, a^- \rangle}.$$

Análogamente, se puede considerar el **polo norte** $a^+ := (0, \dots, 0, 1)$, el abierto relativo en S^n dado por $V_+ := S^n - \{a^+\}$ y la función $\varphi_+^{-1} : V_+ \rightarrow \{a^+\}^\perp$ dada por

$$\varphi_+^{-1}(x) = \frac{x - \langle x, a^+ \rangle a^+}{1 - \langle x, a^+ \rangle}.$$

Por lo tanto, S^n es una variedad suave.

2. El espacio proyectivo real

El espacio proyectivo real \mathbb{RP}^n es el espacio cociente de \mathbb{R}^{n+1} por la relación de equivalencia dada por $(y_1, \dots, y_{n+1}) \sim (\lambda y_1, \dots, \lambda y_{n+1})$ con $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. Es decir, \mathbb{RP}^n es el conjunto de todas las rectas en \mathbb{R}^{n+1} que pasan por el origen y resulta ser una variedad suave de dimensión n .

Consideremos las funciones $\varphi_i : U_i := \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ dadas por

$$\varphi_i(u_1, \dots, u_n) := [u_1, \dots, u_{i-1}, 1, u_i, \dots, u_n]$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Así,

$$V_i := \varphi_i(U_i) = \varphi_i(\mathbb{R}^n) = \{[x_1, \dots, x_{n+1}] : x_i \neq 0\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Es sencillo verificar que

- * $\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow V_i$ es inyectiva,
- * $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$ es suave,
- * $\mathbb{RP}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} V_i$.

Ejercicio 6.2.9. Probar que el espacio proyectivo real \mathbb{RP}^n es una variedad suave de dimensión n .

Ejercicio 6.2.10. Probar que las cartas globales (\mathbb{R}, id) y (\mathbb{R}, x^3) no son equivalentes. Esto muestra que incluso en una variedad suave “sencilla” como \mathbb{R} existen parametrizaciones globales que no resultan equivalentes.

Ejercicio 6.2.11. Sean M una variedad suave de dimensión n y $U \subset M$ un subconjunto abierto. Probar que U es una variedad suave en sí misma de dimensión n .

Ejercicio 6.2.12. Probar que el gráfico de una función suave es una variedad suave.

Recordemos que la topología de una variedad suave es Hausdorff y paracompacta. La primera propiedad garantiza que el límite de toda sucesión convergente es único y, entre otras cosas, la segunda asegura que siempre se puede definir una partición de la unidad subordinada a todo cubrimiento por abiertos de M . Esto significa que para todo cubrimiento por abiertos $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M existe una familia de funciones a valores reales $\{f_i\}_{i \in I}$ tales que $0 \leq f_i \leq 1$ para todo i y verifican que

- * para cada $p \in M$ existe solo una cantidad finita de índices i para los cuales $f_i(p) > 0$,
- * para cada $i \in I$ existe $\alpha \in A$ tal que $\text{sop}(f_i) \subset V_\alpha$,
- * $\sum_{i \in I} f_i(p) = 1$ para cada $p \in M$.

Subvariedades.

Definición 6.2.13. Dada M una variedad suave de dimensión n , un subconjunto $N \subset M$ es una **subvariedad** de dimensión $k \leq n$ si existe una familia de cartas locales $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ de M tales que para todo $p \in N$, si $p \in V_\alpha$, se tiene que $N \cap V_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}))$.

Se dice que la **codimensión** de N en M es $n - k$.

Ejemplo 6.2.14.

- * $N = \mathbb{R}^k$ es una subvariedad k -dimensional de la variedad $M = \mathbb{R}^n$ de dimensión $n > k$.
- * La variedad $N = S^1$ es una subvariedad de la variedad $M = \mathbb{R}^2$ que tiene codimensión 1.

Variedades producto. Sean M y N dos variedades suaves de dimensiones n y k , respectivamente. Dado $(p, q) \in M \times N$, sean $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (U_β, φ_β) cartas locales de p y q en M y N , respectivamente. Entonces, podemos definir una parametrización local alrededor de (p, q) como $\varphi_\alpha \times \varphi_\beta : U_\alpha \times U_\beta \longrightarrow V_\alpha \times V_\beta \subset M \times N$, donde $V_\alpha := \varphi_\alpha(U_\alpha)$, $V_\beta := \varphi_\beta(U_\beta)$ y

$$(\varphi_\alpha \times \varphi_\beta)(u_1^\alpha, \dots, u_n^\alpha, u_1^\beta, \dots, u_k^\beta) := (\varphi_\alpha(u_1^\alpha, \dots, u_n^\alpha), \varphi_\beta(u_1^\beta, \dots, u_k^\beta)).$$

De manera natural, esta construcción se puede extender a un producto finito de variedades suaves. Si M_1, \dots, M_l son variedades suaves de dimensión n_1, \dots, n_l , respectivamente, entonces $M_1 \times \dots \times M_l$ es una variedad suave de dimensión $n_1 + \dots + n_l$.

Ejemplo 6.2.15.

- * \mathbb{R}^{n+k} es la variedad producto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ cuya dimensión es $n + k$.
- * El toro $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ es una variedad producto de dimensión 2.

6.3 Funciones suaves

Generalizamos ahora a este contexto la Definición 2.3.5 de función suave entre superficies.

Definición 6.3.1. Sea $f : M \longrightarrow N$ una función continua entre las variedades suaves M y N de dimensiones n y k , respectivamente.

- * Se dice que f es una **función suave en** $p \in M$ si existen dos parametrizaciones $\varphi : U \rightarrow V$ de p en M y $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ de $f(p)$ en N tales que la función

$$\tilde{\varphi}^{-1} \circ f \circ \varphi : \varphi^{-1}(f^{-1}(\tilde{V} \cap f(V))) \subset U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{V} \cap f(V)) \subset \tilde{U} \subset \mathbb{R}^k$$

es suave en $\varphi^{-1}(p)$.

- * Se dice f que es **suave** en el abierto $A \subset M$ si es suave en todo punto $p \in A$.

El conjunto de funciones suaves $f : M \rightarrow N$ se denota como $\mathcal{C}^\infty(M, N)$. En particular, $\mathcal{C}^\infty(M) := \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$.

- * Si S es un subconjunto cualquiera de M se dice que f es **suave** en S si existen un subconjunto abierto $O \subset M$ tal que $S \subset O$ y una función suave $\tilde{f} : O \rightarrow N$ tal que su restricción a S coincide con f .
- * Si $f : M \rightarrow N$ es suave y admite inversa suave se dice que f es un **difeomorfismo** entre M y N . En este caso, se dice que M y N son **variedades difeomorfas**.

Observación 6.3.2.

- * Debido a que el cambio de parámetros es un difeomorfismo, la definición de función suave entre variedades es independiente de las cartas consideradas (recordar la cuenta de la Observación 2.3.4).
- * La función $\tilde{\varphi}^{-1} \circ f \circ \varphi$ es lo que suele llamarse **representación de f en las cartas** (U, φ) y $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$.

Ejemplo 6.3.3.

1. Todas las proyecciones canónicas $\pi_i : M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow M_i$ dadas por $\pi_i(p_1, \dots, p_k) = p_i$ son funciones suaves.
2. Si M es una variedad suave, se puede definir en el conjunto cociente por una relación de equivalencia M/\sim una estructura de variedad suave de manera tal que la proyección canónica $\rho : M \rightarrow M/\sim$ es una función suave.

Como en el caso del cálculo diferencial de los espacios euclídeos, se cumple que la composición de funciones suaves es suave y es sencillo de demostrar usando la definición de función suave entre variedades.

Proposición 6.3.4. Si $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow P$ son dos funciones suaves entre variedades suaves, entonces $g \circ f : M \rightarrow P$ es una función suave.

Ejercicio 6.3.5. Probar la Proposición 6.3.4.

6.4 Espacios tangentes

En el estudio de las curvas parametrizadas consideramos las rectas tangentes y en el de las superficies regulares, los planos tangentes. En el caso de las variedades suaves, surge naturalmente la pregunta sobre si existe una noción análoga a éstas.

Si pensamos en \mathbb{R}^n , se puede definir explícitamente un n -espacio vectorial para cada punto p , cuyos elementos se piensan como apoyados en p . Para una curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$, se suele pensar al vector velocidad de la curva $\dot{\gamma}(0)$ apoyado en $\gamma(0)$. Luego, para poder distinguir en qué punto está apoyado un vector tangente, se dice que el espacio tangente a \mathbb{R}^n en el punto p es $T_p\mathbb{R}^n = \{p\} \times \mathbb{R}^n$.

Hay varias maneras equivalentes de definir el espacio tangente a una variedad en un punto, cada una con sus ventajas y desventajas. Dada una variedad suave n -dimensional M y un punto $p \in M$ vamos a ver tres maneras distintas de definir espacio tangente a M en p , siguiendo la exposición hallada en el Capítulo 2 de [Lee09].

El espacio tangente: versión cinemática

Buscamos trasladar la idea con la que definimos espacio tangente a una superficie regular S al contexto actual de variedades suaves. En aquel momento, usando que nuestros objetos estaban contenidos en \mathbb{R}^3 , definimos vectores tangentes derivando curvas suaves contenidas en S . Sin embargo, como una variedad M no tendría por qué estar contenida en un espacio Euclídeo \mathbb{R}^n , no tenemos en principio una noción de “derivada” de una curva en M . Esto es lo que motiva las siguientes definiciones.

Definición 6.4.1. Una **curva suave en M** es una función suave $\gamma : I \rightarrow M$ siendo I un intervalo de números reales. Esto es, para alguna parametrización local $\varphi : U \rightarrow V$ tal que $\gamma(I) \subset V$ la curva $(\varphi^{-1} \circ \gamma)(t)$ es una curva suave en $U \subset \mathbb{R}^n$.

Dado $p \in M$, sean dos curvas $\gamma_1 : I_1 \rightarrow M$ y $\gamma_2 : I_2 \rightarrow M$ en M tales que $0 \in I_1 \cap I_2$ y $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$. Si $\varphi : U \rightarrow V$ es una parametrización local de M en p tal que $\gamma_1(I_1), \gamma_2(I_2) \subset V$, las curvas suaves $(\varphi^{-1} \circ \gamma_1)(t)$ y $(\varphi^{-1} \circ \gamma_2)(t)$ verifican que $(\varphi^{-1} \circ \gamma_1)(0) = (\varphi^{-1} \circ \gamma_2)(0) = \varphi^{-1}(p)$.

Definición 6.4.2. Se dice que dos curvas suaves γ_1 y γ_2 son **equivalentes** si los vectores tangentes a las curvas $(\varphi^{-1} \circ \gamma_1)(t)$ y $(\varphi^{-1} \circ \gamma_2)(t)$ coinciden en $\varphi^{-1}(p)$.

Es claro que así queda definida una relación de equivalencia en el conjunto de todas las curvas suaves en M que en $t = 0$ pasan por el punto p , considerando sus dominios lo suficientemente pequeños.

Definición 6.4.3. Un **vector tangente** a M en $p \in M$ es una clase de equivalencia de curvas suaves contenidas en M que pasan por p en $t = 0$.

Así, dada (U, φ) una parametrización local de M en p , un vector tangente v se puede identificar con el único vector $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ que es tangente a cualquier curva $\varphi^{-1} \circ \gamma$, siendo γ una curva suave en M tal que $\gamma(0) = p$.

Las componentes de (v_1, \dots, v_n) son llamadas **coordenadas** de v en la carta (U, φ) y la notación usual es $v = [\gamma]_\varphi$.

Observación 6.4.4. Se puede ver que esta definición de vector tangente es independiente de la carta considerada. Sea $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ otra parametrización local de M en p y veamos que $[\gamma]_\varphi = [\gamma]_{\tilde{\varphi}}$

Dada $\beta \in [\gamma]_\varphi$, veamos que $\beta \in [\gamma]_{\tilde{\varphi}}$:

$$\begin{aligned} (\tilde{\varphi}^{-1} \circ \beta)'(0) &= (\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \beta)'(0) \\ &= d(\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi)_{\varphi^{-1}(p)}((\varphi^{-1} \circ \beta)'(0)) \\ &= d(\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi)_{\varphi^{-1}(p)}((\varphi^{-1} \circ \gamma)'(0)) \\ &= (\tilde{\varphi}^{-1} \circ \gamma)'(0). \end{aligned}$$

El **conjunto de vectores tangentes a M en $p \in M$** se denota como $T_p M$. Es decir,

$$T_p M := \{v \mid v \text{ es un vector tangente a } M \text{ en } p\}.$$

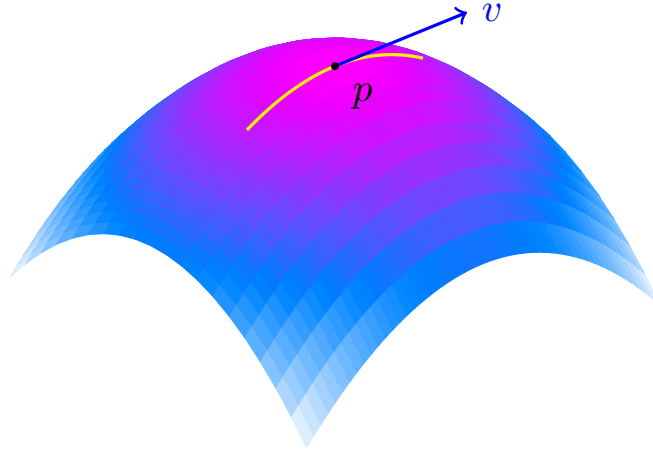


Figura 6.1: La curva γ (en amarillo), representando al vector tangente v (en azul).

Ejemplo 6.4.5 (El espacio tangente a \mathbb{R}^n). Consideremos una variedad suave muy inocente: \mathbb{R}^n , junto con la carta global $(\mathbb{R}^n, \text{id})$. Según la definición, un vector tangente a \mathbb{R}^n en un punto $p \in \mathbb{R}^n$ debería ser una clase de equivalencia de curvas suaves en \mathbb{R}^n que pasan por p en $t = 0$. Así, dada $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ suave tal que $\gamma(0) = p$, las coordenadas del vector que representa en la carta $(\mathbb{R}^n, \text{id})$ son

$$(\text{id} \circ \gamma)'(0) = \gamma'(0) \in \mathbb{R}^n.$$

En otras palabras, γ representa al vector de coordenadas $\gamma'(0)$.

Recíprocamente, dado $v \in \mathbb{R}^n$, podemos tomar la curva $\gamma_v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ como la recta $\gamma(t) := p + tv$. El vector tangente que representa tiene como coordenadas en la carta global justamente $\gamma'(0) = v$.

Así, estamos diciendo que todo vector de \mathbb{R}^n puede pensarse como el vector velocidad de una curva que pasa por p en $t = 0$. Por lo tanto, como la identificación es en realidad una biyección, $T_p\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$.

Observación 6.4.6. Así como a cada $v \in T_pM$ le corresponde un único $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, cada vector de \mathbb{R}^n puede pensarse como las coordenadas de un vector v tangente a M en cualquier punto $p \in M$.

Sean $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ y $p \in M$. Consideremos (U, φ) una parametrización local de M en p y la curva $\gamma : I \rightarrow M$ dada por $\gamma(t) = \varphi(\varphi^{-1}(p) + t(v_1, \dots, v_n))$, asumiendo que $\gamma(I) \subset \varphi(U)$. Entonces, es claro que (v_1, \dots, v_n) representa a un vector $v \in T_pM$.

Así, para todo $p \in M$, cada carta local (U, φ) de M en p define una biyección $b_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow T_pM$ que da lugar a una estructura de espacio vectorial sobre T_pM a partir de la estructura lineal canónica de \mathbb{R}^n : dados $v_1, v_2, v \in T_pM$ y $a \in \mathbb{R}$,

$$v_1 + v_2 := b_\alpha(b_\alpha^{-1}(v_1) + b_\alpha^{-1}(v_2)), \quad av := b_\alpha(ab_\alpha^{-1}(v)).$$

El hecho de que esta definición en realidad no depende de la carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ elegida no es trivial y una demostración puede hallarse siguiendo la Proposición 2.3 y el Lema 2.4 de [Lee09].

Ejemplo 6.4.7. Es natural considerar los vectores tangentes a M en p que están identificados, vía una carta local (U, φ) , con los vectores canónicos $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$. Esto es, los vectores tangentes a las curvas coordenadas $\gamma_i(t) = \varphi(\varphi^{-1}(p) + te_i)$, $i = 1, \dots, n$.

La notación para estos vectores es $\gamma'_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$ donde x_1, \dots, x_n son las coordenadas locales definidas por φ . Esto es, $x_i = u_i \circ \varphi^{-1}$ siendo $u_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la i -ésima proyección, para cada $i = 1, \dots, n$.

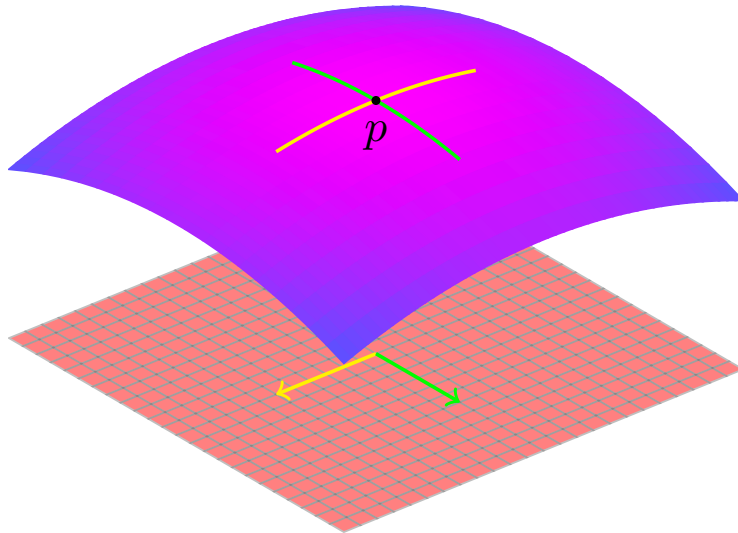


Figura 6.2: Las curvas coordenadas γ_1 (en amarillo) y γ_2 (en verde) que representan a los vectores tangentes $\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p$ y $\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p$, a su vez asociados a los vectores e_1 y e_2 de \mathbb{R}^n , dibujados abajo con los colores correspondientes.

Dado que definimos una estructura lineal en T_pM a partir de la de \mathbb{R}^n usando la identificación discutida anteriormente, es natural que si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de \mathbb{R}^n , los vectores identificados con ellos formen una base de T_pM .

Teorema 6.4.8. *El conjunto $T_p M$ es un espacio vectorial de dimensión n y una parametrización local (U, φ) de M en p define una base de $T_p M$ dada por $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\}$.*

Optamos por posponer la demostración de este resultado por el momento y probarlo para otra versión del espacio tangente que llamaremos “algebraica”.

Observación 6.4.9. Recordemos que un abierto $U \subset M$ de una variedad suave es una variedad en sí misma (ver el Ejercicio 6.2.11). Dado $p \in U$, parece natural preguntarse qué relación hay entre $T_p U$ y $T_p M$.

Sin entrar demasiado en tecnicismos, dado un vector tangente a M en p , tenemos una curva en M que pasa por p en $t = 0$. Ahora bien, uno podría restringir el dominio de la curva de modo que esté completamente contenida en U (acá se usa que es abierto). Esta nueva curva representa un vector tangente a U en p . Recíprocamente, un vector tangente a U en p está representado por una curva contenida en U que pasa por p en $t = 0$. Pero como $U \subset M$, podemos pensar que tiene como codominio a M en vez de a U y que representa un vector tangente a M en p .

Esto da una biyección entre los espacios tangentes y, de hecho, $T_p U \simeq T_p M$.

Concluamos esta sección con algunos ejemplos que muestran que las definiciones anteriores no deberían oscurecer las ideas intuitivas que ya teníamos sobre estas estructuras tangentes.

Para esto, la idea clave es que cuando nuestra variedad suave está “contenida”¹ en \mathbb{R}^m , para algún m , es natural identificar a $T_p M$ con un subespacio vectorial de $T_p \mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^m$. Esta correspondencia termina estando dada, a partir de una carta (U, φ) alrededor de $p \in M$, mediante

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \simeq \gamma'_i(0) \in T_p M \subset T_p \mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^m,$$

donde γ_i es la i -ésima curva coordenada en la carta (U, φ) que satisface $\gamma_i(0) = p$.

Ejemplo 6.4.10. Sea M el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$. Como es la gráfica de una función suave, es una variedad suave y podemos parametrizarlo globalmente mediante $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$, $\varphi(u, v) := (u, v, u^2 + v^2)$.

Sean $p := (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in M$ y $q := \varphi^{-1}(p) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. El primer vector de la base de $T_p M$ asociada a (\mathbb{R}^2, φ) es el representado por la curva coordenada $\gamma_1 : I \rightarrow M$ dada por

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &:= \varphi(\varphi^{-1}(p) + te_1) = \varphi(q + te_1) = \varphi\left(\frac{1}{2} + t, \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + t, \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2} + t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p = \gamma'_1(0) = (1, 0, 1).$$

¹En realidad, que esté contenida no alcanza, debería ser una subvariedad del espacio ambiente. Ver, por ejemplo, la discusión en el Capítulo 5 de [Lee12].

Análogamente, $\gamma_2(t) := \varphi(q + te_2)$ y

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_2} \right|_p = \gamma_2'(0) = (0, 1, 1).$$

Por lo tanto,

$$T_p M \simeq \text{span}\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

El espacio tangente: versión algebraica

Esta versión está basada en la idea de derivadas direccionales y tiene la ventaja de que posee una estructura lineal que resulta inmediata de su definición.

Definición 6.4.11. Un **vector tangente** a M en p es una derivación en p , es decir, una aplicación lineal $v_p : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$v_p(fg) = g(p)v_p(f) + f(p)v_p(g) \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Definición 6.4.12. El conjunto de todos los vectores tangentes v_p es el **espacio tangente (algebraico)**, que es claramente un espacio vectorial.

Dadas $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ y (U, φ) una carta en $p \in M$, se define

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_p := D_i(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)),$$

donde D_i es la derivada respecto de la i -ésima variable.

Definición 6.4.13. Dados (U, φ) y $p \in M$ como arriba, definimos una **derivación parcial** para cada $i = 1, \dots, n$, $\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p f = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

Tenemos entonces n derivaciones parciales, que forman naturalmente una base del espacio vectorial. Para probar esto, necesitamos primero un lema.

Lema 6.4.14. Sean M una variedad suave, $p \in M$, $v_p \in T_p M$ y $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

1. Si f es constante en un entorno de p , entonces $v_p(f) = 0$.
2. Si $f(p) = g(p) = 0$, entonces $v_p(fg) = 0$.

Demostración.

1. Como v_p es una aplicación lineal, alcanza con mostrar que si $f \equiv 0$ en un entorno V de p , entonces $v_p(f) = 0$. Sea $\beta \in \mathcal{C}^\infty(M)$ una función suave con soporte en V tal que $\beta(p) = 1$ (la existencia de tal función es un resultado conocido; ver, por ejemplo, el Lema 1.69 de [Lee09]). Entonces, $\beta f \equiv 0$ y

$$0 = v_p(\beta f) = f(p)v_p(\beta) + \beta(p)v_p(f) = v_p(f).$$

2. Basta con notar que

$$v_p(fg) = g(p)v_p(f) + f(p)v_p(g) = 0 + 0 = 0.$$



Teorema 6.4.15. El conjunto $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\}$ es una base de $T_p M$. Además, si $v_p \in T_p M$, entonces

$$v_p = \sum_{i=1}^n v_p(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p,$$

donde x_i , $1 \leq i \leq n$, son las funciones coordenadas.

Demostración. Supongamos que $U = B_\varepsilon(0)$, con $p = \varphi(0)$. Sean $f \in C^\infty(\varphi(U))$ y $g := f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$. Por el Teorema de Taylor,

$$g(u) = g(0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial u_i}(0)(u_i - 0) + \sum_{i,j=1}^n (u_i - 0)(u_j - 0) \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 g}{\partial u_i \partial u_j}(tu) dt.$$

Notar que la segunda sumatoria involucra un producto de funciones que se anulan en 0:

$$(u_i - 0) \quad \text{y} \quad (u_j - 0) \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 g}{\partial u_i \partial u_j}(tu) dt.$$

Entonces, dado $v_p \in T_p M$ y llamando $f_i := \frac{\partial f}{\partial x_i}$, por el lema anterior,

$$\begin{aligned} v_p(f) &= v_p(f(p)) + v_p \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial u_i}(0)(u_i - 0) \right) + 0 \\ &= 0 + \sum_{i=1}^n v_p(f_i)x_i(p) + f_i(p)v_p(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n f_i(p)v_p(x_i), \end{aligned}$$

donde hemos usado que $x_i(p) = 0$ (recordemos que $p = \varphi(0)$).

Por lo tanto, nuestro candidato a base genera a los elementos de $T_p M$, por lo que solo faltaría ver que son linealmente independientes. Para ello, notemos que si

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = 0,$$

entonces en particular debe dar cero al aplicarla en la función coordenada x_j :

$$0 = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i}(p) = a_j,$$

lo que implica la independencia lineal. ♣

Observación 6.4.16. Se puede verificar que estas dos definiciones son equivalentes; es decir, los espacios tangentes cinemático y algebraico son naturalmente isomorfos. Así, es razonable haber usado una única notación para ambos.

Definición 6.4.17. El espacio dual de $T_p M$, es decir, $T_p^* M = \{f : T_p M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es lineal}\}$ se llama **espacio cotangente** y sus elementos se llaman **covectores** de M en p .

Observación 6.4.18. Si tenemos una base de $T_p M$ y ahora estamos hablando de su espacio dual, podemos considerar su base dual asociada $\{dx_1|_p, \dots, dx_n|_p\}$, donde

$$dx_i|_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) = \delta_{ij}.$$

Observación 6.4.19 (Versión física). Una versión que puede verse que es equivalente a las anteriores es la siguiente. Dados un atlas \mathcal{A} de una variedad M y $p \in M$, consideremos el conjunto

$$\Gamma_p = \{(p, v, (U, \varphi)) \in \{p\} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{A} \mid p \in U\}.$$

En Γ_p , definimos la relación de equivalencia

$$(p, v, (U_\alpha, \varphi_\alpha)) \sim (p, w, (U_\beta, \varphi_\beta)) \iff w = d(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)_{\varphi_\alpha^{-1}(p)}(v).$$

Los elementos del cociente Γ_p / \sim se llaman **vectores tangentes** a M en p .

Para proveer de una estructura de espacio vectorial a este conjunto se puede proceder como en la versión anterior.

Dada una carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ tal que $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$, definamos $b_{(U_\alpha, \varphi_\alpha)} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \Gamma_p / \sim$ como $v \mapsto [(p, v, (U_\alpha, \varphi_\alpha))]$. Es claro que cada $b_{(U_\alpha, \varphi_\alpha)}$ es una biyección, ya que si $[p, v, (U_\alpha, \varphi_\alpha)] = [p, w, (U_\alpha, \varphi_\alpha)]$, entonces

$$v = d(\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha)_{\varphi_\alpha^{-1}(p)}(v) = w,$$

por definición. Así, por lo mismo de antes, tenemos un isomorfismo.

El **espacio tangente (físico)** a M en p es el espacio vectorial Γ_p / \sim .

6.5 Diferencial de funciones suaves

Para definir la aplicación tangente de una función suave en un punto se puede usar cualquiera de las tres definiciones equivalente de espacio tangente a una variedad suave en un punto.

Definición 6.5.1. Sean $f : M \longrightarrow N$ una función suave y $p \in M$. La **aplicación tangente** o **diferencial** de f en el punto $p \in M$ es la aplicación $df_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$ definida como

- * vía curvas (versión cinemática): dada $[\gamma] \in T_p M$, necesitamos una clase de equivalencia de curvas en N , por lo que resulta natural definir

$$(df_p)([\gamma]) := [f \circ \gamma].$$

- * vía derivaciones (versión algebraica): dada $v_p \in T_p M$, necesitamos definir una derivación en $\mathcal{C}^\infty(N)$, por lo que resulta natural definir, para cada $g \in \mathcal{C}^\infty(N)$,

$$(df_p(v_p))(g) := v_p(g \circ f).$$

- * vía cartas (versión física): dado $[(p, v, (U, \varphi))] \in T_p M$,

$$(df_p)([(p, v, (U, \varphi))]) := [(f(p), w, (V, \psi))],$$

donde $w = d(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)_{\varphi^{-1}(p)}(v)$.

Ejemplo 6.5.2. Consideremos, al igual que en el Ejemplo 6.4.10, como M al paraboloides de ecuación $z = x^2 + y^2$, parametrizado globalmente mediante $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$, $\varphi(u, v) := (u, v, u^2 + v^2)$. Sean N el paraboloides de ecuación $z = -(x^2 + y^2)$, parametrizado globalmente con $\psi(\tilde{u}, \tilde{v}) := (\tilde{u}, \tilde{v}, -(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2))$, y $f : M \rightarrow N$ la función dada por $f(x, y, z) := (x, y, -z)$.

Calculemos $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ para $p := (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in M$. Ya vimos en el Ejemplo 6.4.10 que

$$T_p M \simeq \text{span}\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Por otro lado, $f(p) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ y las curvas coordenadas de N en $f(p)$ son

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &:= \psi(\psi^{-1}(f(p)) + te_1) = \left(\frac{1}{2} + t, \frac{1}{2}, -\left(\frac{1}{2} + t\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right), \\ \gamma_2(t) &:= \psi(\psi^{-1}(f(p)) + te_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + t, -\left(\frac{1}{2} + t\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right).\end{aligned}$$

Los vectores tangentes que representan son

$$\gamma'_1(0) = (1, 0, -1), \quad \gamma'_2(0) = (0, 1, -1),$$

de modo que

$$T_{f(p)} N \simeq \text{span}\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Ahora sí, calculemos df_p . Sean $v \in T_p M$ y $\gamma : I \rightarrow M$ una curva suave que lo represente, i.e., tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$. Explícitamente, esto dice que si $v = (v^1, v^2, v^3)$ y $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces

$$\gamma(0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \gamma'(0) = (v^1, v^2, v^3).$$

Luego, $df_p(v)$ será el vector tangente a N en $f(p)$ representado por la curva $f \circ \gamma$, es decir,

$$\begin{aligned}df_p(v) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \gamma)(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(x(t), y(t), z(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (x(t), y(t), -z(t)) \\ &= (x'(0), y'(0), -z'(0)) = (v^1, v^2, -v^3).\end{aligned}$$

Por último, veamos qué sucede con la matriz de df_p en las bases de $T_p M$ y $T_{f(p)} N$ que encontramos. Notemos que ambos son espacios vectoriales de dimensión 2, por lo que la matriz debería ser de 2×2 . Abrazando álgebra lineal, calculemos la aplicación tangente en los vectores de la base:

$$\begin{aligned}df_p \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p \right) &= df_p(1, 0, 1) = (1, 0, -1) \\ df_p \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p \right) &= df_p(0, 1, 1) = (0, 1, -1).\end{aligned}$$

Así, la matriz de df_p en las bases que encontramos es simplemente la matriz identidad.

En el siguiente ejemplo, por una cuestión puramente pragmática, usaremos un puntito arriba de las curvas a la hora de derivarlas en vez de la clásica “prima”. Es decir, si tenemos una curva $x(t)$, escribiremos $\dot{x}(t)$ en vez de $x'(t)$.

Ejemplo 6.5.3. Sean $M := \mathbb{R}^n$ y $N := \mathbb{R}^m$, con sus respectivas cartas gloables, y $f : M \rightarrow N$ una función suave. Sea $p \in M$ y calculemos $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$. Una primera observación es que, por el Ejemplo 6.4.5, podemos pensar que $df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Sean $v := (v^1, \dots, v^n) \in T_p \mathbb{R}^n$ y $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva $\gamma(t) := (x^1(t), \dots, x^n(t))$ que lo represente. El vector $df_p(v)$ es el representado por la curva $f \circ \gamma$, de modo que si a las funciones componentes de f las llamamos f^i , entonces

$$\begin{aligned} df_p(v) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \gamma)(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f^1(x^1(t), \dots, x^n(t)), \dots, f^m(x^1(t), \dots, x^n(t))) \\ &\stackrel{*}{=} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f^1}{\partial x^j}(p) \dot{x}^j(0), \dots, \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^m}{\partial x^j}(p) \dot{x}^j(0) \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}^1(0) \\ \vdots \\ \dot{x}^n(0) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde, en \star , hemos usado la regla de la cadena.

En otras palabras, la matriz de df_p en las bases canónicas de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m es simplemente la matriz Jacobiana de f en p .

Ejercicio 6.5.4. Probar que, con las definiciones anteriores, $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es una aplicación lineal.

Ejercicio 6.5.5. Sean M una variedad suave y $p \in M$. Mostrar que si (U, φ) es una carta local alrededor de p , los elementos $dx_i|_p$ de $T_p^* M$ son el diferencial de las funciones coordenadas x_i .

Teorema 6.5.6 (Regla de la cadena). Sean $f : M \rightarrow N$, $g : N \rightarrow P$ suaves. Entonces, dado $p \in M$,

$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p.$$

Demostración. Dada $[\gamma] \in T_p M$,

$$d(g \circ f)_p([\gamma]) = [(g \circ f) \circ \gamma] = [g \circ (f \circ \gamma)] = dg_{f(p)}([f \circ \gamma]) = (dg_{f(p)} \circ df_p)([\gamma]).$$



6.6 Fibrados tangente y cotangente

Es natural que se quiera distinguir sobre qué punto se considera el diferencial y por eso resulta útil tener un objeto que reúna a los espacios tangentes a una variedad suave pero donde estén distinguidos según en qué punto están apoyados. Esto último es lo que motiva no usar la unión de todos los $T_p M$, sino su unión disjunta.

Definición 6.6.1. El **fibrado tangente** de una variedad suave sobre M es el conjunto formado por la unión disjunta de todos los espacios tangentes a M . Explícitamente,

$$TM := \bigcup_{p \in M} (\{p\} \times T_p M).$$

Se define la **proyección tangente** $\tau_M : TM \rightarrow M$ como $\tau_M(v_p) := p$.

Veamos cómo la estructura de variedad n -dimensional suave sobre M induce una estructura de variedad suave de dimensión $2n$ sobre el fibrado tangente TM .

Sea $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ un atlas sobre M . Si tenemos una carta (U, φ) de \mathcal{A} , definimos $\tilde{U} := U \times \mathbb{R}^n$ y $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{\varphi}(\tilde{U}) \subset TM$, dada por

$$\tilde{\varphi}(q, v_1, \dots, v_n) := (p, v_p),$$

donde $p = \varphi(q)$ y $v_p := d\varphi_q(v_1, \dots, v_n)$, es decir,

$$v_p = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p.$$

En otras palabras, a partir de una carta (U, φ) sobre M definimos naturalmente una carta asociada $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ sobre TM .

Proposición 6.6.2. *Si M es una variedad suave de dimensión n , entonces el fibrado tangente TM es una variedad suave de dimensión $2n$ y $\tau_M : TM \rightarrow M$ es una función suave.*

Demostración. Como M es una variedad suave, admite un atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ y todo punto $p \in M$ tiene una carta local (U, φ) tal que $p \in \varphi(U)$ y

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\}$$

es una base de $T_p M$. Luego, es claro que nuestra familia $\{(\tilde{U}_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ cubre a todo TM .

La inyectividad de $\tilde{\varphi}_\alpha : \tilde{U}_\alpha \rightarrow \tilde{V}_\alpha$, donde $\tilde{V}_\alpha := \tilde{\varphi}_\alpha(\tilde{U}_\alpha)$, es clara a partir de la inyectividad de φ_α y de que v_1, \dots, v_n son las coordenadas de un vector en la base asociada a la carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$.

Veamos, por último, que el cambio de coordenadas es suave. Sean $(\tilde{U}_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)$ y $(\tilde{U}_\beta, \tilde{\varphi}_\beta)$ tales que $\tilde{V}_\alpha \cap \tilde{V}_\beta \neq \emptyset$. Entonces, dado $(q, v_1, \dots, v_n) \in \tilde{\varphi}_\beta^{-1}(\tilde{V}_\alpha \cap \tilde{V}_\beta)$,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(q, v_1, \dots, v_n) &= \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(\tilde{\varphi}_\beta(q, v_1, \dots, v_n)) = \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(\varphi_\beta(q), d\varphi_\beta(v_1, \dots, v_n)) \\ &= (\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta)(q), d\varphi_\alpha^{-1} \circ d\varphi_\beta(v_1, \dots, v_n)) \\ &= (\varphi_{\alpha\beta}(q), d\varphi_{\alpha\beta}(v_1, \dots, v_n)). \end{aligned}$$

Como $\varphi_{\alpha\beta}$ es suave porque M es una variedad suave, $d\varphi_{\alpha\beta}$ también lo es y $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}$ es suave. Por lo tanto, TM es una variedad suave de dimensión $2n$.

Para ver la suavidad de $\tau_M : TM \rightarrow M$ alcanza con notar que si (U, φ) y $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ son cartas locales en M y TM , respectivamente, dado $(q, v_1, \dots, v_n) \in \tilde{U}$,

$$(\varphi^{-1} \circ \tau_M \circ \tilde{\varphi})(q, v_1, \dots, v_n) = (\varphi^{-1} \circ \tau_M)(p, v_p) = \varphi^{-1}(p) = q.$$

Por lo tanto, la representación de τ_M es suave y también lo es τ_M . ♣

Definición 6.6.3. Dada $f : M \rightarrow N$ una función suave, definimos su *levantamiento tangente* $Tf : TM \rightarrow TN$ como

$$Tf(p, v_p) := (f(p), df_p(v_p)).$$

Observación 6.6.4. Si consideramos las proyecciones tangentes, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ \tau_M \downarrow & & \downarrow \tau_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Observación 6.6.5.

1. Si $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow P$ son funciones suaves entre variedades, entonces $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$.
2. Si U es un subconjunto abierto de un espacio vectorial V , entonces $TU \simeq U \times V$.

Uno puede pensar en una asignación T que actúa en objetos $M \mapsto TM$ y en flechas

$$(M \xrightarrow{f} N) \mapsto (TM \xrightarrow{Tf} TN).$$

Con esto en mente, la regla de la cadena nos dice simplemente que esa asignación define un funtor covariante, llamado *functor tangente*.

Como antes, podemos considerar el dual del espacio tangente en cada punto de la variedad y hacer la misma construcción que hicimos para definir fibrado tangente.

Definición 6.6.6. El *fibrado cotangente* de M es el conjunto formado por la unión disjunta de los espacios duales de $T_p M$:

$$T^*M := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p^*M.$$

Se define la *proyección cotangente* $\pi_M : T^*M \rightarrow M$ como $\pi_M(p, \theta_p) := p$.

Proposición 6.6.7. Si M es una variedad suave dimensión n , entonces el fibrado cotangente T^*M es una variedad suave de dimensión $2n$ y $\pi_M : T^*M \rightarrow M$ es una función suave.

Ejercicio 6.6.8. Probar la Proposición 6.6.7.

Ejercicios

Ejercicios ya propuestos:

Ejercicio 6.2.9. Probar que el espacio proyectivo real \mathbb{RP}^n es una variedad suave de dimensión n .

Ejercicio 6.2.10. Probar que las cartas globales (\mathbb{R}, id) y (\mathbb{R}, x^3) no son equivalentes.

Ejercicio 6.2.11. Sean M una variedad suave de dimensión n y $U \subset M$ un subconjunto abierto. Probar que U es una variedad suave en sí misma de dimensión n .

Ejercicio 6.2.12. Probar que el gráfico de una función suave es una variedad suave.

Ejercicio 6.3.5. (Proposición 6.3.4) Si $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow P$ son dos funciones suaves entre variedades suaves, entonces $g \circ f : M \rightarrow P$ es una función suave.

Ejercicio 6.5.4. Probar que $df_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$ es una aplicación lineal.

Ejercicio 6.5.5. Sean M una variedad suave y $p \in M$. Mostrar que si (U, φ) es una carta local alrededor de p , los elementos $dx_i|_p$ de $T_p^* M$ son el diferencial de las funciones coordenadas x_i .

Ejercicio 6.6.8. (Proposición 6.6.7) Probar que si M es una variedad suave dimensión n , entonces el fibrado cotangente $T^* M$ es una variedad suave de dimensión $2n$ y $\pi_M : T^* M \longrightarrow M$ es una función suave.

Otros ejercicios:

Ejercicio 6.6.9. Un *grupo de Lie*² es una variedad suave G junto con una estructura de grupo de modo que la multiplicación $\mu : G \times G \longrightarrow G$ es una aplicación suave.

(a) Mostrar que las traslaciones a izquierda y a derecha L_g y R_g , dadas por $L_g(h) = gh$ y $R_g(h) = hg$, respectivamente, son difeomorfismos.

(b) Mostrar que la aplicación diferencial $d\mu_{(a,b)} : T_a G \times T_b G \longrightarrow T_{ab} G$ está dada por

$$d\mu_{(a,b)}(v_a, w_b) = d(R_b)_a(v_a) + d(L_a)_b(w_b)$$

donde $(v_a, w_b) \in T_a G \times T_b G$.

²S. Lie (1842-1899), matemático noruego.

Capítulo 7

Formas diferenciales

En este capítulo recordamos nociones básicas del álgebra tensorial en espacios vectoriales para definir y estudiar algunas de las propiedades de las formas diferenciales sobre variedades. Para ello, seguiremos fielmente el Capítulo 7 de [Spi99].

7.1 Tensores

Comenzamos trabajando sobre espacios vectoriales, definiendo un objeto que permite capturar, en algún sentido, una idea de volumen. Pensando, por ejemplo, en el plano, dos vectores definen un paralelogramo. Luego, podríamos pensar en una función que tome dos vectores y devuelva el área del paralelogramo que generan. ¿Qué debería cumplir esta función? Si dividimos a un paralelogramo en dos más pequeños deberíamos poder calcular el área del grande sumando las dos áreas, es decir, nuestra función debería ser bilineal. Por otro lado, si tomamos dos vectores que son linealmente dependientes, el paralelogramo en cuestión degenera en un segmento de recta, por lo que la función debería valer cero. Esto último dice que nuestra función debe ser “alternada”. Juntar todas estas reflexiones nos lleva a lo que definiremos en breve como una 2-forma.

Definición 7.1.1. Si V_1, \dots, V_m son espacios vectoriales, una función $T : V_1 \times \dots \times V_m \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice *multilineal* si

$$v \mapsto T(v_1, \dots, v_{k-1}, v, v_{k+1}, \dots, v_m)$$

es lineal para cualquier elección de $v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_m$.

Es claro que el conjunto de todos esos T es un espacio vectorial. Si $V_1 = \dots = V_m = V$, denotamos por $T^m(V)$ a ese espacio vectorial.

Definimos $T_l^k(V)$ como el conjunto de las funciones $(k+l)$ -lineales

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{l \text{ veces}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ veces}} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Los elementos $T \in T_l^k(V)$ se llaman $\binom{k}{l}$ -*tensores* o *tensores de tipo (k, l)* .

Ejemplo 7.1.2. Sea $V = T_p M$.

1. Un tensor de tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una aplicación lineal sobre $(T_p M)^*$, es decir, $T \in (T_p^* M)^*$. En otras palabras, es un vector tangente.
2. Un tensor de tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es una aplicación lineal sobre $T_p M$. Es lo que llamaremos una **1-forma** sobre $T_p M$.

Definición 7.1.3. Sean $T \in T_l^k(V)$ y $S \in T_{l'}^{k'}(V)$. Definimos el **producto tensorial** de T y S como el tensor $T \otimes S \in T_{l+l'}^{k+k'}(V)$ dado por

$$(T \otimes S)(\omega_1, \dots, \omega_{l+l'}, x_1, \dots, x_{k+k'}) := T(\omega_1, \dots, \omega_l, x_1, \dots, x_k) S(\omega_{l+1}, \dots, \omega_{l+l'}, x_{k+1}, \dots, x_{k+k'}).$$

Definición 7.1.4. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre \mathbb{R} . Un elemento $T \in T^k(V)$ se dice **alternado** si

$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = 0 \quad \text{siempre que} \quad v_i = v_j \quad (i \neq j).$$

Denotamos $\Omega^k(V)$ al conjunto de k -tensores alternados sobre V .

Observación 7.1.5. T es alternado si y solo si T es antisimétrico¹. En efecto, si T es alternado, entonces para cualesquiera v_1, \dots, v_k ,

$$\begin{aligned} 0 &= T(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_k) \\ &= T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_k) + T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) \\ &\quad + T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) + T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_j, \dots, v_k) \\ &= 0 + T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) + T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) + 0 \end{aligned}$$

Luego, $T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$. La otra implicación es obvia.

Notemos que $\Omega^1(V) = T^1(V) = V^*$, por lo que $\Omega^1(V)$ tiene dimensión n . Por otro lado, se define $\Omega^0(V) = T^0(V) := \mathbb{R}$.

Observación 7.1.6. Recordemos que en \mathbb{R}^2 el determinante de una matriz de 2×2 coincide con el área (salvo tal vez el signo) del paralelogramo generado por las columnas de la matriz. Es decir, dado un paralelogramo con vértices en $(0, 0)$, (a, c) , $(a + c, b + d)$ y (b, d) , su área (signada) está dada por

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Otra manera de pensarlo es que tenemos una función \det que toma dos vectores de \mathbb{R}^2 y devuelve el área signada del paralelogramo que generan. Pero por propiedades de los determinantes, $\det : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ resulta ser bilineal y alternada, de modo que es un 2-tensor alternado.

Ejemplo 7.1.7. Sea $V := \mathbb{R}^n$. La función determinante $\det : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, que toma n vectores y devuelve el determinante de la matriz que los tiene como columnas es una aplicación multilineal y alternada. Es decir, es un n -tensor alternado sobre \mathbb{R}^n .

¹Recordemos que T es **antisimétrico** si para cualesquiera $v_1, \dots, v_k \in V$ se tiene que $T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$.

Sea \mathbb{S}_k el grupo simétrico de k letras, es decir, el conjunto de todas las permutaciones de $\{1, \dots, k\}$. Si $\sigma \in \mathbb{S}_k$ y (v_1, \dots, v_k) es una k -upla, definimos

$$\sigma \cdot (v_1, \dots, v_k) := (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}).$$

Si tomamos $\rho \in \mathbb{S}_k$, entonces basta con hacer la cuenta para ver que

$$\sigma \cdot (\rho \cdot (v_1, \dots, v_k)) = (\rho\sigma) \cdot (v_1, \dots, v_k). \quad (7.1)$$

Dado un tensor $T \in T^k(V)$, hay una manera de hacerlo alternado definiendo

$$\text{Alt } T := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_k} \text{sgn}(\sigma) (T \circ \sigma),$$

donde $\text{sgn}(\sigma)$ es el signo de la permutación σ .

Explícitamente, dados $v_1, \dots, v_k \in V$,

$$\text{Alt } T(v_1, \dots, v_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_k} \text{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}). \quad (7.2)$$

El siguiente resultado dice que ese operador hace lo que queremos: a los tensores no alternados los convierte en tensores alternados y a los que ya eran alternados no los cambia.

Proposición 7.1.8. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n .*

1. Si $T \in T^k(V)$, entonces $\text{Alt } T \in \Omega^k(V)$.
2. Si $\omega \in \Omega^k(V)$, entonces $\text{Alt } \omega = \omega$.
3. Si $T \in T^k(V)$, entonces $\text{Alt}(\text{Alt } T) = \text{Alt } T$.

Demostración.

1. Sea $(i \ j)$ la permutación que intercambia i y j y deja todos los demás números fijos. Si $\sigma \in \mathbb{S}_k$, definamos $\sigma' = \sigma \cdot (i \ j)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \text{Alt } T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_k} \text{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(j)}, \dots, v_{\sigma(i)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_k} \text{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(i)}, \dots, v_{\sigma'(j)}, \dots, v_{\sigma'(k)}) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma' \in \mathbb{S}_k} -\text{sgn}(\sigma') T(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(k)}) \\ &= -\text{Alt } T(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

2. Si $\omega \in \Omega^k(V)$ y $\sigma = (i \ j)$, entonces $\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma) \omega(v_1, \dots, v_k)$. Como toda σ es un producto de permutaciones de la forma $(i \ j)$, esta ecuación vale para toda σ . Así,

$$\begin{aligned} \text{Alt } \omega(v_1, \dots, v_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_k} \text{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_k} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\sigma) \omega(v_1, \dots, v_k) \\ &\stackrel{*}{=} \frac{1}{k!} k! \omega(v_1, \dots, v_k) \\ &= \omega(v_1, \dots, v_k), \end{aligned}$$

donde en $*$ hemos usado que el orden del grupo simétrico \mathbb{S}_k es $k!$.

3. Es trivial a partir de 1 y 2.



Si se tiene una transformación lineal $f : V \longrightarrow W$ y una k -forma $\omega \in \Omega^k(W)$, es posible construir una k -forma sobre V de la siguiente manera.

Definición 7.1.9. El *pullback* de ω por f es la k -forma $f^*\omega \in \Omega^k(V)$ definida como

$$(f^*\omega)(v_1, \dots, v_k) := \omega(f(v_1), \dots, f(v_k)),$$

para $v_1, \dots, v_k \in V$.

Definición 7.1.10. Dados $\omega \in \Omega^k(V)$ y $\eta \in \Omega^l(V)$, definimos el *producto exterior* de ω y η como el elemento $\omega \wedge \eta \in \Omega^{k+l}(V)$ dado por

$$\omega \wedge \eta := \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

Ejemplo 7.1.11. Sean $V := \mathbb{R}^2$, $\{e_1, e_2\}$ su base canónica y $\{\phi^1, \phi^2\}$ su base dual.

Calculemos $\phi^1 \wedge \phi^2$. Dados

$$v_1 := ae_1 + be_2, \quad v_2 := ce_1 + de_2,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} (\phi^1 \wedge \phi^2)(v_1, v_2) &= (\phi^1 \otimes \phi^2)(v_1, v_2) - (\phi^1 \otimes \phi^2)(v_2, v_1) \\ &= \phi^1(v_1)\phi^2(v_2) - \phi^1(v_2)\phi^2(v_1) \\ &= ad - bc. \end{aligned}$$

Notar que a la hora de calcular el producto exterior, el $2!$ de la definición se cancela con el que aparece dividiendo en la definición del operador Alt . Además, el grupo simétrico \mathbb{S}_2 tiene solo dos elementos: la identidad (de signo par) y una trasposición (de signo impar), por lo que solo aparecen dos términos en la cuenta.

El coeficiente no es esencial, pero su rol se entenderá mejor con un ejemplo posterior. Por el momento, notemos que el producto exterior cumple algunas propiedades:

Proposición 7.1.12. Sean $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(V)$, $\eta, \eta_1, \eta_2 \in \Omega^l(V)$, $a \in \mathbb{R}$ y $f : W \longrightarrow V$ una transformación lineal. Entonces,

1. \wedge es bilineal:

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta,$$

$$\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2,$$

$$a\omega \wedge \eta = \omega \wedge a\eta = a(\omega \wedge \eta).$$

2. $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$.

Ejercicio 7.1.13. Probar la Proposición 7.1.12.

Lema 7.1.14.

1. Si $S \in T^k(V)$, $T \in T^l(V)$ y $\text{Alt } S = 0$, entonces

$$\text{Alt}(S \otimes T) = \text{Alt}(T \otimes S) = 0.$$

2. $\text{Alt}(\text{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) = \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta) = \text{Alt}(\omega \otimes \text{Alt}(\eta \otimes \theta))$.

Demostración.

1. Por definición,

$$\begin{aligned} (k+l)! \text{Alt}(S \otimes T)(v_1, \dots, v_{k+l}) &= \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) (S \otimes T)(\sigma \cdot (v_1, \dots, v_{k+l})) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) S(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) T(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}). \end{aligned}$$

Sea $G \subset \mathbb{S}_{k+l}$ el conjunto de permutaciones que dejan fijos a los elementos $k+1, \dots, k+l$. Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in G} \text{sgn}(\sigma) S(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) T(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ = \left(\sum_{\sigma' \in \mathbb{S}_k} \text{sgn}(\sigma') S(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(k)}) \right) T(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) \\ = 0. \end{aligned}$$

Si $\sigma_0 \notin G$, consideramos ahora el conjunto $\sigma_0 G := \{\sigma_0 \sigma' \mid \sigma' \in G\}$. Luego,

$$\sum_{\sigma \in \sigma_0 G} \text{sgn}(\sigma) (S \otimes T)(\sigma \cdot (v_1, \dots, v_{k+l})) = \text{sgn}(\sigma_0) \sum_{\sigma' \in G} \text{sgn}(\sigma') (S \otimes T)(\sigma' \cdot (\sigma_0 \cdot (v_1, \dots, v_{k+l}))).$$

Ahora bien, $\sigma_0 \cdot (v_1, \dots, v_{k+l})$ es simplemente otro conjunto de $k+l$ vectores y acabamos de ver que sumar sobre las permutaciones de G daba cero, por lo que

$$\sum_{\sigma \in \sigma_0 G} \text{sgn}(\sigma) (S \otimes T)(\sigma \cdot (v_1, \dots, v_{k+l})) = 0.$$

Notar que G y $\sigma_0 G$ son disjuntos y uno podría seguir de la misma manera construyendo una partición del grupo \mathbb{S}_{k+l} e ir sumando en cada subconjunto (donde ya vimos que la cuenta da cero). Como el grupo tiene orden finito, el proceso termina al cabo de finitos pasos y concluimos que $\text{Alt}(S \otimes T) = 0$. Análogamente, $\text{Alt}(T \otimes S) = 0$.

2. Observemos que

$$\text{Alt}(\text{Alt}(\eta \otimes \theta) - \eta \otimes \theta) = \text{Alt}(\eta \otimes \theta) - \text{Alt}(\eta \otimes \theta) = 0.$$

Luego, por 1,

$$0 = \text{Alt}(\omega \otimes [\text{Alt}(\eta \otimes \theta) - \eta \otimes \theta]) = \text{Alt}(\omega \otimes \text{Alt}(\eta \otimes \theta)) - \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta).$$

Análogamente, $\text{Alt}(\text{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) = \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta)$.



Teorema 7.1.15. Si $\omega \in \Omega^k(V)$, $\eta \in \Omega^l(V)$ y $\theta \in \Omega^m(V)$, entonces

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta) = \frac{(k+l+n)!}{k!l!m!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta).$$

En otras palabras, el producto exterior es asociativo y podemos escribir $\omega \wedge \eta \wedge \theta$.

Demostración. Haciendo la cuenta,

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \eta) \wedge \theta &= \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!} \text{Alt}((\omega \wedge \eta) \otimes \theta) \\ &= \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!} \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\text{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) \\ &\stackrel{\text{Lema 7.1.14}}{=} \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} \text{Alt}(\text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta)) \\ &= \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta). \end{aligned}$$

La otra igualdad es análoga. ♣

Notar que por 2, el producto exterior seguiría siendo asociativo aún si le sacamos el factor raro en la definición. Por otro lado, el factor $1/k!$ en la definición de Alt es fundamental, porque sin él no tendríamos que $\text{Alt}(\text{Alt } T) = \text{Alt } T$.

En todo caso, hay una explicación para ese factor que desarrollamos en la siguiente generalización del Ejemplo 7.1.11.

Ejemplo 7.1.16. Sean $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V y $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ su base dual. Consideremos vectores $v_1, \dots, v_k \in V$ con coordenadas

$$v_i = \sum_{j=1}^n a_j^i e_j.$$

Aplicando el teorema anterior reiteradas veces,

$$\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k = \frac{(1 + \dots + 1)!}{1! \dots 1!} \text{Alt}(\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_k),$$

de modo que,

$$\begin{aligned} \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k(v_1, \dots, v_k) &= k! \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_k} \text{sgn}(\sigma) (\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_k)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_k} \text{sgn}(\sigma) a_1^{\sigma(1)} \dots a_k^{\sigma(k)} \\ &= \det(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

Así, vemos que el producto exterior de los elementos de la base dual coincide con la función determinante.

Teorema 7.1.17. El conjunto $\{\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge \phi_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ es una base de $\Omega^k(V)$. Luego, $\Omega^k(V)$ tiene dimensión

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Demostración. Si tomamos $\omega \in \Omega^k(V) \subset T^k(V)$, entonces es de la forma

$$\omega = \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1, \dots, i_k} \phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_k},$$

para coeficientes $a_{i_1, \dots, i_k} \in \mathbb{R}$.

Luego,

$$\omega = \text{Alt}(\omega) = \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1, \dots, i_k} \text{Alt}(\phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_k}) = \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1, \dots, i_k} \phi_{i_1} \wedge \dots \wedge \phi_{i_k}.$$

Notando que $a_{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)} = \text{sgn}(\sigma) a_{i_1, \dots, i_k}$ y $\phi_{\sigma(i_1)} \wedge \dots \wedge \phi_{\sigma(i_k)} = \text{sgn}(\sigma) \phi_{i_1} \wedge \dots \wedge \phi_{i_k}$, podemos reordenar los índices de manera creciente y escribir

$$\omega = \frac{1}{k!} \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} \phi_{i_1} \wedge \dots \wedge \phi_{i_k}.$$

Así, los elementos $\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge \phi_{i_k}$, $i_1 < \dots < i_k$, generan a $\Omega^k(V)$.

Nos queda ver que son linealmente independientes. Para eso, observemos que si

$$0 = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} \phi_{i_1} \wedge \dots \wedge \phi_{i_k}$$

entonces aplicando ambos lados a $(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$ tenemos que $a_{i_1, \dots, i_k} = 0$. ♣

7.2 Formas diferenciales

Ahora vamos a extender las definiciones anteriores para presentar la noción de forma diferencial sobre una variedad.

Definición 7.2.1. Una ***k*-forma diferencial** sobre una variedad suave M es una asignación “suave” de un elemento de $\Omega^k(T_p M)$ para cada $p \in M$, donde “suave” significa que en una carta (U, φ) , y por lo tanto en todas,

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

con $\omega_{i_1, \dots, i_k} : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave. Denotamos $\Omega^k(M)$ al conjunto de k -formas diferenciales sobre M .

Observación 7.2.2. Las 1-formas son objetos duales, en algún sentido, a los campos vectoriales: una 1-forma es una asignación suave de un covector en cada punto de la variedad, es decir, en lugar de asignarle a cada punto un elemento del espacio tangente, le asignamos un elemento del dual. Así, una 1-forma en cada punto de la variedad es una aplicación lineal que toma un vector tangente y devuelve un número real. Las 2-formas son objetos similares: en cada punto de la variedad tenemos ahora una aplicación bilineal antisimétrica que toma dos vectores tangentes en el punto y devuelve un número real. Siguiendo con esa lógica, una k -forma en cada punto de la variedad es una aplicación multilineal que toma k -vectores tangentes en el punto y devuelve un número real.

La parte de “diferencial” en el nombre hace referencia a que esa asignación de una k -forma en cada punto de la variedad se hace de manera suave.

Por último, recordando la relación entre los determinantes y las áreas de paralelogramos, podemos pensar que una k -forma diferencial toma k -vectores tangentes y devuelve una suerte de volumen (signado) del paralelepípedo generado por ellos.

Definición 7.2.3. Si $f : M \rightarrow N$ es una función suave entre variedades y ω es una k -forma diferencial sobre N , se define el **pullback** de ω por f como la k -forma diferencial sobre M dada por

$$(f^*\omega)(p)(v_1, \dots, v_k) := \omega(f(p))(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)),$$

donde $v_1, \dots, v_k \in T_p M$.

Observación 7.2.4. Las siguientes propiedades de las k -formas diferenciales se deducen aplicando punto a punto la Proposición 7.1.12. Si $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(M)$, $\eta, \eta_1, \eta_2 \in \Omega^l(M)$ y $a : M \rightarrow \mathbb{R}$, entonces

1. $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$
2. $\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2$
3. $a\omega \wedge \eta = \omega \wedge a\eta = a(\omega \wedge \eta)$
4. $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$
5. Si $f : M \rightarrow N$ es una función suave entre variedades suaves, entonces $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$.

Ejercicio 7.2.5. Sean $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow S$ funciones suaves entre variedades suaves. Mostrar que si $\omega \in \Omega^k(S)$, entonces $(g \circ f)^*\omega = f^*(g^*\omega)$. Es decir, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Ejercicio 7.2.6. Sea $f : M \rightarrow N$ una función suave entre variedades de dimensión n . Sean (U, φ) y $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ cartas locales en M y N cuyas funciones coordenadas son x_1, \dots, x_n e y_1, \dots, y_n , respectivamente. Mostrar que si $a \in C^\infty(\tilde{\varphi}(\tilde{V}))$, entonces en $\varphi(U) \cap f^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{U}))$ se tiene que

$$f^*(a \, dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n) = (a \circ f) \det(df) \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Terminamos esta sección observando que si (U, φ) es un entorno coordenado, entonces los $dx_i|_p := dx_i(p)$ son una base de T_p^*M , por lo que los $dx_{i_1}|_p \wedge \dots \wedge dx_{i_k}|_p$, $i_1 < \dots < i_k$, forman una base de $\Omega^k(T_p M)$. Así, toda k -forma diferencial ω puede escribirse de manera única como

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Si simplificamos la notación reemplazando $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ por dx_I , para el multi-índice $I = (i_1, \dots, i_k)$, tenemos que

$$\omega = \sum_I \omega_I dx_I.$$

7.3 Derivación exterior de formas

Recordemos que habíamos dicho que $\Omega^0(V)$ era otro nombre para \mathbb{R} . Si pensamos que una 0-forma sobre una variedad M debería asignarle a cada punto de M una 0-forma sobre $T_p M$, es decir, un elemento de $\Omega^0(T_p M) \simeq \mathbb{R}$, es razonable definir una 0-forma en M como una función suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ y $f \wedge \omega$ simplemente como $f\omega$.

Así, para cada 0-forma f tenemos asociada la 1-forma df (que se definía como $df(v) := v(f)$), que en un entorno coordenado (U, φ) está dada por

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} dx_j.$$

Si ω es una k -forma escrita en ese entorno coordenado como

$$\omega = \sum_I \omega_I dx_I,$$

entonces cada $d\omega_I$ es una 1-forma. Luego, podemos definir una $(k+1)$ -forma $d\omega$ como

$$d\omega := \sum_I d\omega_I \wedge dx_I = \sum_I \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \omega_I}{\partial x^\alpha} dx_\alpha \wedge dx_I.$$

Definición 7.3.1. La $(k+1)$ -forma $d\omega$ es llamada *diferencial exterior* de ω .

Ahora analizamos algunas propiedades que son necesarias para probar que la definición anterior no depende del entorno coordenado.

Proposición 7.3.2. Sean ω, ω_1 y ω_2 formas diferenciales sobre una variedad suave M . Entonces,

1. $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$.
2. Si ω_1 es una k -forma, entonces

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

3. $d(d\omega) = 0$, es decir, $d^2 = 0$.

Demostración.

1. Es claro a partir de la linealidad de la derivada de funciones reales y del producto exterior.
2. Por 1, alcanza con considerar solamente $\omega_1 = f dx_I$ y $\omega_2 = g dx_J$. En tal caso, $\omega_1 \wedge \omega_2 = fg dx_I \wedge dx_J$ y

$$\begin{aligned} d(\omega_1 \wedge \omega_2) &= d(fg) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= g df \wedge dx_I \wedge dx_J + f dg \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= df \wedge dx_I \wedge g dx_J + (-1)^k f dx_I \wedge dg \wedge dx_J \\ &= d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2. \end{aligned}$$

3. Alcanza con considerar k -formas de la forma $\omega = f dx_I$. Entonces,

$$d\omega = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} dx_\alpha \wedge dx_I.$$

Luego,

$$d(d\omega) = \sum_{\alpha=1}^n \left(\sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} dx_\beta \wedge dx_\alpha \wedge dx_I \right).$$

Pero por el Teorema de Clairaut (la f es suave), las derivadas segundas cruzadas coinciden y los términos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} dx_\beta \wedge dx_\alpha \wedge dx_I \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} dx_\alpha \wedge dx_\beta \wedge dx_I$$

se van cancelando. ♣

Lo interesante es que estas propiedades caracterizan a d en U .

Proposición 7.3.3. *Supongamos que una aplicación $d' : \Omega^k(U) \longrightarrow \Omega^{k+1}(U)$ satisface:*

1. $d'(\omega_1 + \omega_2) = d'\omega_1 + d'\omega_2$
2. $d'(\omega_1 \wedge \omega_2) = d'\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d'\omega_2$
3. $d'(d'f) = 0$
4. $d'f = df$ para toda función suave $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

Entonces, $d' = d$ en U .

Demostración. Es claro que alcanza con ver que $d'\omega = d\omega$ cuando $\omega = f dx_I$. Por 2 y 4,

$$\begin{aligned} d'(f dx_I) &= d'f \wedge dx_I + f \wedge d'(dx_I) \\ &= df \wedge dx_I + f \wedge d'(dx_I) \end{aligned}$$

Así, alcanza con ver que $d'(dx_I) = 0$, donde por 4,

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = d'x_{i_1} \wedge \dots \wedge d'x_{i_k}$$

Lo hacemos por inducción en k . Asumiendo que vale para $k-1$,

$$\begin{aligned} d'(dx_I) &= d'(d'x_{i_1} \wedge \dots \wedge d'x_{i_k}) \\ &\stackrel{2}{=} \underbrace{d'(d'x_{i_1})}_{=0, \text{ por 3}} \wedge d'x_{i_2} \wedge \dots \wedge d'x_{i_k} - \underbrace{d'x_{i_1} \wedge d'(d'x_{i_2} \wedge \dots \wedge d'x_{i_k})}_{=0, \text{ por hipótesis inductiva}} = 0. \end{aligned}$$

♣

Corolario 7.3.4. *Existe un único operador $d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$, para todo k , que satisface*

1. $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$
2. $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2$

$$3. \quad d^2 = 0$$

y que coincide que con el diferencial usual en el caso de funciones.

Demostración. Para cada entorno coordenado (U, φ) tenemos un único d_U definido. Dada una forma ω y un punto $p \in M$, tomamos un U tal que $p \in U$ y definimos $d\omega(p) = d_U(\omega|_U)(p)$. ♣

Terminamos este capítulo con otra propiedad importante que cumple el operador d .

Proposición 7.3.5. Si $f : M \rightarrow N$ es suave y ω es una k -forma en N , entonces

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega).$$

Demostración. Sea $p \in M$ y tomemos un sistema coordenado (U, φ) alrededor de $f(p)$. Podemos asumir que

$$\omega = g \, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Hagamos inducción en k . El caso $k = 0$ se deduce de mirar con cuidado algunas definiciones: dado $X \in T_p M$, omitiendo el punto de la variedad,

$$f^*(dg)(X) = dg(df(X)) = [df(X)](g) = X(g \circ f) = d(g \circ f)(X),$$

donde recordemos que f^*g se interpreta como $g \circ f$. Supongamos que la fórmula vale para $k - 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} d(f^*\omega) &= d(f^*(g dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}}) \wedge f^* dx_{i_k}) \\ &\stackrel{(\star)}{=} d(f^*(g dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}})) \wedge f^* dx_{i_k} + 0 \\ &\stackrel{\text{HI}}{=} f^*(d(g dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}})) \wedge f^* dx_{i_k} \\ &= f^*(dg \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}}) \wedge f^* dx_{i_k} \\ &= f^*(dg \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge f^* dx_{i_k}) \\ &= f^*(d\omega), \end{aligned}$$

donde (\star) vale porque $df^* dx_{i_k} = dd(x_{i_k} \circ f) = 0$. ♣

Definición 7.3.6. Sea ω una forma diferencial.

* ω es **cerrada** si $d\omega = 0$.

* ω es **exacta** si $\omega = d\eta$, para alguna otra forma η .

Observación 7.3.7. Toda forma exacta es cerrada, pues $d^2 = 0$, pero la recíproca no tiene por qué ser cierta: una forma cerrada no tiene por qué ser exacta. De hecho, cuánto falla la recíproca está relacionado con propiedades topológicas de la variedad capturadas por la llamada cohomología de de Rham. Más detalles sobre esto pueden hallarse, por ejemplo, en el Capítulo 10 de [Lee09].

Terminemos esta sección con un ejemplo de suma importancia en Mecánica.

Ejemplo 7.3.8. Consideremos el fibrado cotangente T^*Q de una variedad suave Q . Podemos definir una 1-forma θ_Q sobre T^*Q de la siguiente manera: dados $\alpha_q \in T^*Q$ y $v_{\alpha_q} \in T_{\alpha_q}T^*Q$,

$$\underbrace{\theta_Q(\alpha_q)}_{T_{\alpha_q}^*T^*Q}(v_{\alpha_q}) := \alpha_q \left(\underbrace{d(\pi_Q)_{\alpha_q}(v_{\alpha_q})}_{T_qQ} \right).$$

Es claro que es suave y que $\theta_Q(\alpha_q)$ es lineal (porque la aplicación tangente $d(\pi_Q)_{\alpha_q}$ lo es), de modo que, efectivamente, define una 1-forma diferencial sobre T^*Q .

Notemos que en la definición no hicimos ninguna referencia a un entorno coordenado, por lo que se dice que la definición es intrínseca y, de hecho, la 1-forma θ_Q se llama **1-forma canónica** de T^*Q .

Veamos qué aspecto tiene en coordenadas locales $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ de T^*Q construidas a partir de coordenadas locales (q^1, \dots, q^n) de Q .

Sea $\alpha_q \in T^*Q$ dado, en coordenadas locales, por

$$\alpha_q := a_1 dq^1|_q + \dots + a_n dq^n|_q$$

y tomemos $v_{\alpha_q} \in T_{\alpha_q}T^*Q$ dado, en la base del espacio tangente asociada, por

$$v_{\alpha_q} := v^1 \frac{\partial}{\partial q^1} \Big|_{\alpha_q} + \dots + v^n \frac{\partial}{\partial q^n} \Big|_{\alpha_q} + w^1 \frac{\partial}{\partial p_1} \Big|_{\alpha_q} + \dots + w^n \frac{\partial}{\partial p_n} \Big|_{\alpha_q}.$$

Dado que

$$d(\pi_Q)_{\alpha_q}(v_{\alpha_q}) = v^1 \frac{\partial}{\partial q^1} \Big|_q + \dots + v^n \frac{\partial}{\partial q^n} \Big|_q,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \theta_Q(\alpha_q)(v_{\alpha_q}) &= (a_1 dq^1|_q + \dots + a_n dq^n|_q) \left(v^1 \frac{\partial}{\partial q^1} \Big|_q + \dots + v^n \frac{\partial}{\partial q^n} \Big|_q \right) \\ &= a_1 v^1 + \dots + a_n v^n. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\theta_Q = \sum_{i=1}^n p_i dq^i.$$

Ejemplo 7.3.9. Sea θ_Q la 1-forma canónica del fibrado cotangente T^*Q . También es de gran interés en Mecánica la 2-forma que se obtiene a partir de ella tomando diferencial exterior y cambiando de signo, es decir, la 2-forma $\omega_Q := -d\theta_Q$, llamada, naturalmente, **2-forma canónica** de T^*Q .

Para ver qué aspecto tiene, calculemos en coordenadas:

$$\omega_Q = -d\theta_Q = -d \left(\sum_{i=1}^n p_i dq^i \right) = - \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i.$$

Ejercicios

Ejercicios ya propuestos:

Ejercicio 7.1.13. (Proposición 7.1.12) Sean $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(V)$, $\eta, \eta_1, \eta_2 \in \Omega^l(V)$, $a \in \mathbb{R}$ y $f : W \rightarrow V$ una transformación lineal. Entonces,

(a) \wedge es bilineal:

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta,$$

$$\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2,$$

$$a\omega \wedge \eta = \omega \wedge a\eta = a(\omega \wedge \eta).$$

(b) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$.

Ejercicio 7.2.5. Sean $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow S$ funciones suaves entre variedades suaves. Mostrar que si $\omega \in \Omega^k(S)$, entonces $(g \circ f)^*\omega = f^*(g^*\omega)$. Es decir, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Ejercicio 7.2.6. Sea $f : M \rightarrow N$ una función suave entre variedades de dimensión n . Sean (U, φ) y $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ son cartas locales en M y N cuyas funciones coordenadas son x_1, \dots, x_n e y_1, \dots, y_n , respectivamente. Mostrar que si $a \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{\varphi}(\tilde{U}))$, entonces en $\varphi(U) \cap f^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{U}))$ se tiene que

$$f^*(a \, dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n) = (a \circ f) \det(df) \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Otros ejercicios:

Ejercicio 7.3.10. Sea $\omega = 2x \, dx \wedge dy + y^2 \, dy \wedge dz$. Sean $p = (1, 1, 1)$, $v_1 = (1, 0, 2)$ y $v_2 = (1, 1, 1)$. Calcular $\omega(p)(v_1, v_2)$.

Ejercicio 7.3.11. Consideremos $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ dada por $\omega = y \, dx$ y $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = e^x y^3 + e^{y-2}$. Sean $p = (0, 2)$, $v = (1, 1)$ y $w = (-1, 3)$. Calcular $(df \wedge \omega)(p)(v, w)$.

Ejercicio 7.3.12. Sean $\omega^1, \dots, \omega^n$ covectores en un espacio vectorial de dimensión n . Probar que son linealmente dependientes si y solo si $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n = 0$.

Ejercicio 7.3.13. Sea M una variedad suave de dimensión n . Para cada k , definamos

$$\mathcal{Z}^k(M) := \ker\{d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)\}$$

$$\mathcal{B}^k(M) := \text{im}\{d : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)\}.$$

Se define el *k -ésimo grupo de cohomología de de Rham²* como el cociente

$$H^k(M) := \frac{\mathcal{Z}^k(M)}{\mathcal{B}^k(M)}.$$

Mostrar que

$$H^k(\mathbb{R}) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

²G. de Rham (1903-1990), matemático suizo.

Capítulo 8

Integración en variedades

En este último capítulo vamos a estudiar el Teorema de Stokes en variedades, un resultado que generaliza los teoremas de integración clásicos para funciones de varias variables. Para esto, primero tratamos someramente el tema de integración en variedades.

Seguiremos a lo largo de las siguientes páginas las exposiciones de [Lee12] y [Lee09].

8.1 Variedades con borde

En esta sección se extiende la definición de variedades a la noción de variedades con borde, un concepto que es fundamental para presentar la definición de integración sobre variedades. Básicamente, se va a considerar que este tipo de espacios tienen entornos que están identificados o bien con subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^n o bien con subconjuntos abiertos del espacio $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$, definido como

$$\mathbb{H}^n := \{(u_1, \dots, u_n) : u_n \geq 0\}.$$

Para $n > 0$ el interior y el borde de \mathbb{H}^n están determinados, respectivamente, por

$$\text{int } \mathbb{H}^n = \{(u_1, \dots, u_n) \mid u_n > 0\}$$

$$\partial \mathbb{H}^n = \{(u_1, \dots, u_n) : u_n = 0\}.$$

Para $n = 0$, $\mathbb{H}^0 = \mathbb{R}^0 = \{0\}$ y entonces $\text{int } \mathbb{H}^0 = \mathbb{R}^0$ y $\partial \mathbb{H}^0 = \emptyset$.

Definición 8.1.1. Una *variedad suave con borde* de dimensión n es un conjunto M con una familia de funciones $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$, siendo U_α un subconjunto abierto relativo en \mathbb{H}^n , que satisfacen las condiciones de la Definición 6.2.1.

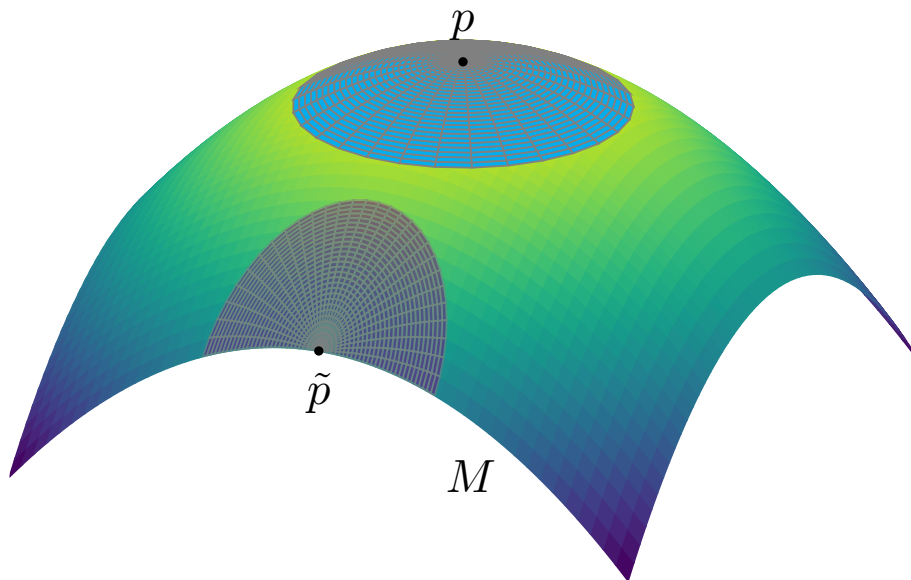


Figura 8.1: Una variedad con borde M y dos puntos en ella: uno interior (p , con un entorno coordenado en cyan) y uno frontera (\tilde{p} , con un entorno coordenado en violeta).

Un **punto interior de M** es un $p \in M$ que a través de una carta se corresponde con un $q \in \text{int } \mathbb{H}^n$. Un **punto frontera de M** es un $p \in M$ que a través de una carta se corresponde con un $q \in \partial\mathbb{H}^n$. El conjunto de todos los puntos frontera de M es llamado **borde de M** y denotado por ∂M .

Observación 8.1.2. Sea M una variedad con borde de dimensión n .

1. La condición de ser un punto interior es independiente de la carta y los puntos interiores de una variedad M forman una variedad suave de dimensión n .
2. La condición de ser un punto frontera también es independiente de la carta.

Proposición 8.1.3. Sea M una variedad suave con borde de dimensión n . Entonces, ∂M es una variedad suave de dimensión $n - 1$.

Demostración. Sea $p \in \partial M$ y consideremos una parametrización local $\varphi : U \rightarrow M$ alrededor de p . Entonces, $\varphi^{-1}(p) = q = (u_1, \dots, u_{n-1}, 0) \in U$. Definamos

$$\tilde{U} := U \cap \partial\mathbb{H}^n \subset \partial\mathbb{H}^n \simeq \mathbb{R}^{n-1}.$$

Luego, podemos pensar que $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ y definiendo $\tilde{\varphi} := \varphi|_{\tilde{U}}$, tenemos una carta $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ alrededor de p . Así, una estructura suave $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ de M da lugar a una estructura suave $\{(\tilde{U}_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ de ∂M . ♣

Una noción que necesitaremos para enunciar el teorema es la de orientabilidad de variedades. Tal como mencionamos en el Capítulo 2 al hablar de superficies, no podemos trasladar la idea de campo normal a este contexto más general, pero sí la versión con entornos coordenados.

Definición 8.1.4. Una variedad suave M (con o sin borde) es **orientable** si es posible cubrirla con una familia de cartas locales de modo tal que si $p \in M$ pertenece a dos entornos coordinados de esta familia, entonces el cambio de coordenadas tiene Jacobiano positivo en p .

En tal caso, se dice que esta familia es la elección de una **orientación** en M .

Proposición 8.1.5. Sea M una variedad suave con borde de dimensión n . Si M está orientada, entonces induce una orientación en ∂M .

Demostración. Sea $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ una orientación para M y $\{(\tilde{U}_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ el atlas inducido de ∂M . Queremos ver que para todo q cuya imagen esté en ∂M ,

$$\det(d(\tilde{\varphi}_\alpha^{-1} \circ \tilde{\varphi}_\beta)(q)) > 0.$$

La función de cambio de coordenadas $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta} := \tilde{\varphi}_\alpha^{-1} \circ \tilde{\varphi}_\beta$ está dada por

$$\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(u_1^\beta, \dots, u_n^\beta) = (u_1^\alpha(u_1^\beta, \dots, u_n^\beta), \dots, u_n^\alpha(u_1^\beta, \dots, u_n^\beta)).$$

Observemos que si q es un punto cuya imagen por las parametrizaciones está en ∂M , entonces

$$q = (u_1^\alpha, \dots, u_{n-1}^\alpha, 0) = \varphi_{\alpha\beta}(u_1^\beta, \dots, u_{n-1}^\beta, 0)$$

y para todo $i \neq n$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n^\alpha}{\partial u_i^\beta}(q) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_n^\alpha(u_1^\beta(q), \dots, u_i^\beta(q) + h, \dots, u_n^\beta(q)) - u_n^\alpha(q)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_n^\alpha(u_1^\beta(q), \dots, u_i^\beta(q) + h, \dots, u_{n-1}^\beta(q), 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Luego, la matriz diferencial $d\varphi_{\alpha\beta}(q)$ es de la forma

$$d\varphi_{\alpha\beta}(q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1^\alpha}{\partial u_1^\beta}(q) & \cdots & \frac{\partial u_1^\alpha}{\partial u_{n-1}^\beta}(q) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial u_{n-1}^\alpha}{\partial u_1^\beta}(q) & \cdots & \frac{\partial u_{n-1}^\alpha}{\partial u_{n-1}^\beta}(q) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial u_n^\alpha}{\partial u_n^\beta}(q) \end{pmatrix}.$$

Así, teniendo en cuenta la definición del espacio \mathbb{H}^n y de su borde, puede verse que u_n^α es una función que, en q , es estrictamente creciente en la dirección de u_n^β , por lo que $\frac{\partial u_n^\alpha}{\partial u_n^\beta}(q)$ es positivo. Luego, observando que

$$\det(d\varphi_{\alpha\beta}(q)) = \frac{\partial u_n^\alpha}{\partial u_n^\beta}(q) \det(d\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(q)),$$

como $\det(d\varphi_{\alpha\beta}(q)) > 0$ por hipótesis, tenemos que $\det(d\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(q)) > 0$. Por lo tanto, la orientación de M induce una orientación en ∂M . ♣

8.2 Integración de formas diferenciales

Hemos visto en la Observación 5.6.6 que las funciones no parecen tener la naturaleza adecuada para ser integradas sobre superficies (o sobre variedades, en nuestro contexto actual). Para encontrar el objeto correcto, conviene tal vez pensar desde un punto de vista diferente. Supongamos que queremos integrar sobre una variedad de dimensión n . Para ello, uno podría cortar la variedad en muchos pedacitos, de modo que cada pedacito sea aproximadamente un paralelepípedo generado por vectores tangentes v_1, \dots, v_n . Así, la contribución de ese pedacito a la integral total puede pensarse como una función de estos n vectores. En definitiva, uno quisiera asignarle a cada $p \in M$ una función $f_p(v_1, \dots, v_n)$ que tome n vectores tangentes en p como argumento. Más aún, uno puede pensar que esta función f_p debe ser multilineal (porque cortar la variedad en pedacitos más pequeños no debería cambiar el valor de la integral) y alternada (porque un paralelepípedo degenerado debería contribuir cero). ¡Pero eso es justamente una n -forma diferencial!¹

En esta sección se presenta la generalización de la noción de integral múltiple sobre espacios Euclidianos a variedades.

Sea M una variedad suave de dimensión n , posiblemente con borde ∂M y supongamos que M está orientada, induciendo una orientación en ∂M .

Definición 8.2.1. El **soporte** de una forma diferencial $\alpha \in \Omega^k(M)$, es el conjunto

$$\text{sop}(\alpha) := \text{cl}\{p \in M : \alpha(p) \neq 0\}.$$

Llamamos $\Omega_c^k(M)$ al conjunto de las k -formas con soporte compacto y $\Omega_c^k(U)$ al conjunto de las k -formas con soporte compacto contenido en $U \subset M$.

Consideremos primero una n -forma α en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Si tomamos coordenadas u_1, \dots, u_n en U , podemos escribir $\alpha = a du_1 \wedge \dots \wedge du_n$, para alguna función suave $a : U \rightarrow \mathbb{R}$. Si α tiene soporte compacto en U , podemos definir

$$\int_U \alpha = \int_U a du_1 \wedge \dots \wedge du_n := \int_U a(u) du_1 \dots du_n,$$

donde la integral de la derecha es la integral de Riemann o Lebesgue de a .

Lema 8.2.2. Si $\phi : V \rightarrow U$ es un difeomorfismo entre abiertos de \mathbb{R}^n que preserva la orientación² y $\alpha \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\int_U \alpha = \int_V \phi^* \alpha.$$

¹Esta motivación para el uso de formas diferenciales fue tomada de <https://math.stackexchange.com/questions/1760778/necessity-of-differential-forms>.

²Se dice que un difeomorfismo **preserva la orientación** si su diferencial tiene determinante positivo.

Demostración. Notar que como ϕ preserva la orientación, $\det d\phi > 0$. Sean u_1, \dots, u_n y v_1, \dots, v_n las coordenadas estándar en U y V , respectivamente. Usando el teorema del cambio de variables en \mathbb{R}^n , tenemos que

$$\begin{aligned} \int_U \alpha &= \int_U a(u) du_1 \dots du_n \\ &= \int_V (a \circ \phi)(v) \det d\phi dv_1 \dots dv_n \\ &= \int_V (a \circ \phi)(v) \det d\phi dv_1 \wedge \dots \wedge dv_n \\ &\stackrel{*}{=} \int_V \phi^* \alpha, \end{aligned}$$

donde en $*$ hemos usado el Ejercicio 7.2.6. ♣

Sea M una variedad de dimensión n sin frontera y tomemos $\alpha \in \Omega^n(M)$. Si α tiene soporte compacto dentro de $\varphi(U)$ para alguna carta orientada positivamente (U, φ) , entonces $\varphi^* \alpha$ tiene soporte compacto en $U \subset \mathbb{R}^n$. Definimos entonces

$$\int_{\varphi(U)} \alpha := \int_U \varphi^* \alpha.$$

El lema anterior nos asegura que la definición no depende de la carta positivamente orientada elegida. En efecto, si $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ es otra carta y α tiene soporte en $\varphi(U) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{U})$, entonces $\varphi^* \alpha$ tiene soporte en $\varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{U}))$ y $\tilde{\varphi}^* \alpha$ lo tiene en $\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(U) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{U}))$. Luego, como $\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}$ preserva la orientación,

$$\begin{aligned} \int_U \varphi^* \alpha &= \int_{\varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{U}))} \varphi^* \alpha \\ &= \int_{\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(U) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{U}))} (\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})^* \varphi^* \alpha \\ &= \int_{\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(U) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{U}))} \tilde{\varphi}^* \alpha \\ &= \int_{\tilde{U}} \tilde{\varphi}^* \alpha. \end{aligned}$$

Si M es una variedad orientada con borde y α tiene soporte compacto dentro de U para alguna carta (U, φ) , entonces definimos

$$\int_{\varphi(U)} \alpha := \text{sgn}(\varphi) \int_U \varphi^* \alpha,$$

donde

$$\text{sgn}(\varphi) := \begin{cases} 1 & \text{si } (U, \varphi) \text{ está orientada positivamente} \\ -1 & \text{si } (U, \varphi) \text{ no está orientada positivamente.} \end{cases}$$

Supongamos ahora que $\alpha \in \Omega_c^n(M)$ tiene soporte compacto pero que no está contenido en ningún entorno coordenado. En tal caso, tomamos un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de M y una partición de la unidad suave $\{(U_i, \rho_i)\}_{i \in I}$ subordinada al atlas. Finalmente, consideramos la suma

$$\sum_{i \in I} \int_{\varphi_i(U_i)} \rho_i \alpha = \sum_{i \in I} \int_{U_i} \varphi_i^* (\rho_i \alpha). \quad (8.1)$$

Proposición 8.2.3. *En la suma (8.1), solo una cantidad finita de términos son no nulos. Además, la suma es independiente de la elección del atlas y de la partición de la unidad.*

Demostración. Para cada $p \in M$, existe un abierto O que contiene a p tal que solo finitos ρ_i son no nulos en O . Como α tiene soporte compacto, solo un número finito de esos abiertos cubren al soporte, por lo que solo un número finito de los ρ_i son no nulos en el soporte de α .

Sea ahora $\{(\tilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j)\}_{j \in J}$ otro atlas de M y $\tilde{\rho}_j$ una partición de la unidad asociada a él. Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \int_{\varphi_i(U_i)} \rho_i \alpha &= \sum_{i \in I} \int_{\varphi_i(U_i)} \left(\rho_i \sum_j \tilde{\rho}_j \alpha \right) \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \int_{\varphi_i(U_i) \cap \tilde{\varphi}_j(\tilde{U}_j)} \rho_i \tilde{\rho}_j \alpha \\ &= \sum_{j \in J} \int_{\tilde{\varphi}_j(\tilde{U}_j)} \left(\tilde{\rho}_j \sum_{i \in I} \rho_i \alpha \right) \\ &= \sum_{j \in J} \int_{\tilde{\varphi}_j(\tilde{U}_j)} \tilde{\rho}_j \alpha, \end{aligned}$$

lo que muestra la independencia en las elecciones del atlas y de la partición de la unidad. ♣

De este modo, se pueden presentar las ideas discutidas hasta ahora en una definición.

Definición 8.2.4. Sean M una variedad suave orientada con o sin borde y $\alpha \in \Omega_c^n(M)$ una n -forma con soporte compacto. Elegimos un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ y una partición suave de la unidad $\{(\rho_i, U_i)\}_{i \in I}$ subordinada a $\{U_i\}_{i \in I}$. Se define la **integral de la forma α sobre M** como

$$\int_M \alpha := \sum_{i \in I} \int_{\varphi_i(U_i)} \rho_i \alpha.$$

Observación 8.2.5. Si M tiene dimensión 0, es decir, es un conjunto discreto de puntos $M = \{p_1, p_2, \dots\}$, una orientación es una asignación de $+1$ o -1 a cada punto. En tal caso, si $\alpha = f \in \Omega^0(M)$, definimos

$$\int_M f = \sum_{i \in I} \pm f(p_i),$$

donde el signo se elige acorde a la orientación.

8.3 El Teorema de Stokes

El Teorema de Stokes extiende el Teorema Fundamental del Cálculo al caso de dimensiones más altas, convirtiéndose en un resultado central de la teoría de integración en variedades.

Teorema 8.3.1 (Teorema de Stokes). *Sean M una variedad suave orientada con borde y $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$ una $(n-1)$ -forma con soporte compacto. Entonces,*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Observación 8.3.2. En el enunciado estamos suponiendo que ∂M tiene la orientación inducida y que ω en el lado derecho es en realidad $\iota_{\partial M}^* \omega$, con $\iota_{\partial M} : \partial M \rightarrow M$ la inclusión. Finalmente, si $\partial M = \emptyset$, entonces el lado derecho debe interpretarse como cero.

Demostración. Sea

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

donde $\widehat{}$ indica la omisión de ese término. Luego,

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^n d\omega_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Consideremos ahora un par de casos especiales.

* $M = \mathbb{R}^n$. Hacemos la cuenta:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} d\omega &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i}(x) dx_1 \dots dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i}(x) dx_i dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos usado el teorema fundamental del cálculo (aplicado a $\partial \omega_i / \partial x_i$) y el hecho de que ω tiene soporte compacto.

* $M = \mathbb{H}^n$. Como ω tiene soporte compacto, podemos suponer que

$$\text{sop}(\omega) \subset A = [-R, R] \times \dots \times [-R, R] \times [0, R] \quad (8.2)$$

donde elegimos R lo suficientemente grande como para que $\omega = 0$ si $x_i = \pm R$.

Luego, haciendo la cuenta como antes,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{H}^n} d\omega &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i}(x) dx_1 \dots dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_0^R \int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i}(x) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Notemos que, al considerar los primeros $n-1$ términos de la sumatoria,

$$\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \int_0^R \int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R \omega_i(x) \Big|_{x_i=-R}^{x_i=R} dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_n = 0$$

donde hemos usado (8.2). Entonces, el único término que podría ser no nulo es cuando $i = n$.

Así,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{H}^n} d\omega &= (-1)^{n-1} \int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R \int_0^R \frac{\partial \omega_n}{\partial x_n}(x) dx_n dx_1 \dots dx_{n-1} \\ &= (-1)^{n-1} \int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R \omega_n(x) \Big|_{x_n=0}^{x_n=R} dx_1 \dots dx_{n-1} \\ &= (-1)^{n-1} \int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R \omega_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \dots dx_{n-1}, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se usó que $\omega(x) = 0$ si $x_n = 0$.

Además,

$$\int_{\partial \mathbb{H}^n} \omega = \sum_i \int_{A \cap \partial \mathbb{H}^n} \omega_i(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Como $x_n \equiv 0$ en $\partial \mathbb{H}^n$, el pullback de dx_n a la frontera también es idénticamente cero. Luego, el único término que no se anula (porque no tiene el dx_n) es justamente cuando $i = n$. Así,

$$\int_{\partial \mathbb{H}^n} \omega = \int_{A \cap \partial \mathbb{H}^n} \omega_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}.$$

Finalmente, la igualdad del enunciado queda demostrada notando que las coordenadas (x_1, \dots, x_{n-1}) están orientadas de manera positiva para $\partial \mathbb{H}^n$ si n es par y negativa si n es impar.

* sop(ω) $\subset \varphi(U)$. Si el soporte está contenido en la imagen de una sola carta (U, φ) , tenemos dos posibilidades: $\varphi(U) \cap \partial M = \emptyset$ y $\varphi(U) \cap \partial M \neq \emptyset$. Hagamos el segundo caso, el primero es análogo. Podemos usar lo demostrado en el caso anterior para ver que

$$\int_M d\omega = \int_{\mathbb{H}^n} \varphi^* d\omega = \int_{\mathbb{H}^n} d(\varphi^* \omega) = \int_{\partial \mathbb{H}^n} \varphi^* \omega = \int_{\partial M} \omega,$$

donde en la última igualdad hemos usado que $\varphi|_{U \cap \partial \mathbb{H}^n} : U \cap \partial \mathbb{H}^n \rightarrow \varphi(U) \cap \partial M$ es un difeomorfismo que preserva la orientación.

* ω arbitraria. Consideramos una partición de la unidad $\{\rho_i\}$ subordinada a un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}$. Aplicando el caso anterior a cada $\rho_i \omega$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \omega &= \sum_i \int_{\partial M} \rho_i \omega = \sum_i \int_M d(\rho_i \omega) \\ &= \sum_i \int_M d\rho_i \wedge \omega + \rho_i d\omega \\ &= \int_M d\left(\sum_i \rho_i\right) \wedge \omega + \int_M \left(\sum_i \rho_i\right) d\omega \\ &= 0 + \int_M d\omega \end{aligned}$$

donde en el último renglón usamos que $\sum_i \rho_i \equiv 1$. ♣

Como mencionamos el inicio de esta sección, el Teorema de Stokes generaliza el Teorema Fundamental del Cálculo. Para verlo, consideremos la variedad con borde $M := [a, b]$, parametrizada globalmente con $\varphi : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow [a, b]$, $\varphi(x) := x$. Si orientamos M de modo que φ esté orientada positivamente, tenemos que para cada $f \in C^\infty(M)$,

$$\int_{[a, b]} f'(t) dt = \int_{[a, b]} df = \int_{\partial[a, b]} f = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) = f(b) - f(a).$$

Los resultados clásicos de los cursos de cálculo en varias variables, como lo son los teoremas de Green, Gauss y Stokes pueden deducirse a partir del teorema anterior, recurriendo a una conocida identificación entre campos vectoriales y formas diferenciales (ver, por ejemplo, la Sección 9.7 de [Lee09] o la segunda mitad del Capítulo 16 de [Lee12]).

Teorema de Green. Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ una región acotada cuya orientación coincide con la de \mathbb{R}^2 y supongamos que la orientación sobre ∂M es la inducida por M .

Sean P y Q funciones suaves sobre M y $\omega = P dx + Q dy$. Luego,

$$\int_{\partial M} P dx + Q dy = \int_M d(P dx + Q dy) = \int_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \int_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Teorema de Gauss. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una región acotada cuya orientación coincide con la de \mathbb{R}^3 y supongamos que la orientación sobre la superficie ∂M es la inducida por el normal exterior de ∂M .

Sean P, Q y R funciones suaves sobre M y $\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy &= \int_M d(P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy) \\ &= \int_M \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Teorema de Stokes. Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientada y $M \subset S$ una región acotada y supongamos que la orientación sobre ∂M está definida por la “regla de la mano derecha”, coincidiendo la dirección del pulgar con la del vector normal a S .

Sean P, Q y R funciones suaves sobre M y $\omega = P dx + Q dy + R dz$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} P dx + Q dy + R dz &= \int_M d(P dx + Q dy + R dz) \\ &= \int_M \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Referencias

- [Ber58] Lipman Bers. *Riemann Surfaces*. New York University, Institute of Mathematical Sciences, 1958.
- [Car16] Manfredo P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Revised & updated second edition. Dover Publications, Inc., 2016.
- [CGP05] Antonio F. Costa, J. M. Gamboa, and Ana M. Porto. *Notas de Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*. Tercera edición. Sanz y Torres, 2005.
- [Lee09] Jeffrey M. Lee. *Manifolds and Differential Geometry*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2009.
- [Lee12] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer-Verlag New York, 2012.
- [Lee18] John M. Lee. *Introduction to Riemannian Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer Cham, 2018.
- [Spi99] Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 1*. Publish or Perish, 1999.
- [Tap16] Kristopher Tapp. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 2016.
- [Tho79] J. A. Thorpe. *Elementary Topics in Differential Geometry*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1979.

Los autores

Caruso, Matías Ignacio

Doctor de la Facultad de Ciencias Exactas – Área Matemática (2024) por la Universidad Nacional de La Plata. Becario postdoctoral de CONICET, docente del Departamento de Matemática del Instituto Balseiro (UNCUYO – C.N.E.A.) y Profesor Adjunto interino del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas (UNLP).

Tori, Cora Inés

Doctora de la Facultad de Ciencias Exactas – Área Matemática (2010) por la Universidad Nacional de La Plata. Profesora Adjunta ordinaria del Departamento de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería (UNLP).

Zuccalli, Marcela

Doctora de la Facultad de Ciencias Exactas – Área Matemática (1997) por la Universidad Nacional de La Plata. Profesora Libre del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas (UNLP).

Caruso, Matías Ignacio

Notas de geometría diferencial : curvas, superficies y variedades / Matías Ignacio Caruso ; Cora Inés Tori ; Marcela Zuccalli. - 1a ed. - La Plata : Universidad Nacional de La Plata ; La Plata : EDULP, 2025.

Libro digital, PDF - (Libros de cátedra)

Archivo Digital: descarga

ISBN 978-950-34-2614-2

1. Geometría Diferencial. I. Tori, Cora Inés II. Zuccalli, Marcela III. Título
CDD 512.14

Diseño de tapa: Dirección de Comunicación Visual de la UNLP

Universidad Nacional de La Plata – Editorial de la Universidad de La Plata

48 N.º 551-599 / La Plata B1900AMX / Buenos Aires, Argentina

+54 221 644 7150

edulp.editorial@gmail.com

www.editorial.unlp.edu.ar

EduLP integra la Red de Editoriales Universitarias Nacionales (REUN)

Primera edición, 2025

ISBN 978-950-34-2614-2

© 2025 - EduLP

e
exactas


EDITORIAL DE LA UNLP



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE LA PLATA