

Libros de **Cátedra**

Un curso de Topología

Demetrio Stojanoff

FACULTAD DE
CIENCIAS EXACTAS

e
exactas


EDITORIAL DE LA UNLP



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE LA PLATA

UN CURSO DE TOPOLOGÍA

Demetrio Stojanoff

Facultad de Ciencias Exactas



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE LA PLATA



Índice

I	Topología General	7
1	Teoría de conjuntos.	8
1.1	Generalidades	8
1.2	Relaciones: funciones y equivalencias	10
1.3	Funciones	11
1.4	Ordenes, principios, lemas y axiomas	14
1.5	Cardinales	16
1.6	Conjuntos Numerables	18
1.7	Ejercicios	19
2	Espacios topológicos	21
2.1	Definiciones básicas	22
2.2	Cerrados, límites y clausuras	24
2.3	Bases y sub-bases	26
2.4	Clases de ET's	29
2.4.1	Numerabilidad	29
2.4.2	Separación	31
2.4.3	Topología inducida y herencias	34
2.5	Continuidad básica	36
2.6	Ejercicios	39
3	Conexos	41
3.1	Definiciones y caracterizaciones	41
3.2	Arcoconexos	42
3.3	Componentes	44
3.4	Espacios localmente conexos	45
3.5	Ejercicios	45
4	Redes, filtros y convergencia	46
4.1	Redes y subredes	46
4.2	Convergencia	49
4.3	Sucesiones en espacios N_1	54
4.4	EM's completos	55

4.5	Filtros versus Redes	57
4.6	Ejercicios	61
5	Funciones continuas	63
5.1	Continuidad básica bis	63
5.2	Métricas y topologías	65
5.3	Productos y cocientes	67
5.3.1	Topología inicial	67
5.3.2	Topología producto	68
5.3.3	Topología final	73
5.3.4	Cocientes	74
5.4	Métricas uniformes en $C(X, Y)$, con Y un EM	77
5.5	Existencia de <i>muchas</i> funciones continuas	80
5.5.1	Lema de Urysohn	80
5.5.2	Teorema de Tietze	82
5.5.3	Embeddings	83
5.5.4	Metrización de Urysohn	85
5.6	Ejercicios	86
6	Compactos	89
6.1	Definiciones y caracterizaciones	89
6.2	Primeras propiedades de los compactos	91
6.3	El Teorema de Tychonoff	93
6.4	Compactos en EM's	95
6.4.1	Caracterización de la compacidad para EM's	95
6.4.2	El número de Lebesgue	97
6.4.3	Continuidad uniforme	99
6.4.4	Dentro de $\mathbb{R}^n$	100
6.5	Compactificaciones	100
6.5.1	Alexandrov: Un punto	101
6.5.2	Stone Čech	103
6.6	Ejercicios	107
7	Compacidad local	110
7.1	Espacios localmente compactos	110
7.2	Stone-Weierstrass	117
7.3	Teoremas de Baire	120
7.4	Convergencia compacto abierta	123
7.5	Particiones de la unidad	127
7.6	Paracompactos	130
7.7	Arzela Áscoli	133
7.8	Ejercicios	137

8	Algunos ejemplos	141
8.1	Primeros ejemplos	141
8.2	$\mathbb{R}_s$ y la máquina de hacer contraejemplos	145
II	Teorías más específicas	149
9	Grupos topológicos	150
9.1	Definiciones y ejemplos	150
9.2	Propiedades básicas	151
9.3	Pseudonormas y grupos topológicos	154
9.3.1	Definiciones y propiedades	154
9.3.2	Hay muchas pseudonormas	156
9.3.3	SN's continuas en GT's	157
9.4	Subgrupos y cocientes	161
9.5	Grupos LKH abelianos	164
9.5.1	El grupo dual	164
9.5.2	Los tres ejemplos más famosos	167
9.5.3	Algunas cosas más	168
9.5.4	Compactación de Bohr	169
9.6	Ejercicios	171
10	Espacios vectoriales	172
10.1	EVT's	172
10.2	Espacios localmente convexos.	177
10.3	Hahn Banach:	
	Existencia de muchas <i>funcionales</i> continuas	179
10.3.1	H-B onda normados	180
10.3.2	H-B onda separar convexos en EVT's	182
10.4	Krein-Milman	183
10.5	Topologías débiles en espacios normados y ELC's	185
10.6	Alaoglu	190
10.7	Una caracterización de la reflexividad	193
10.8	Ejercicios	194
11	Homotopía	197
11.1	Homotopía de curvas	197
11.2	El grupo fundamental	199
11.3	Revestimientos	201
11.4	Levantes	203
11.5	Productos	206
11.6	Retractos por deformación	206
11.7	Puntos fijos	209
11.8	Equivalencias homotópicas	211

11.9 El teorema de Seifert-van Kampen, versión 1	213
11.10 El teorema de Seifert-van Kampen tutti	215
11.10.1 Productos libres de grupos	215
11.10.2 El teorema de Seifert-van Kampen	216
11.11 Ejercicios	221

Prefacio

Este libro es el resultado de muchos años de dictar la materia Topología en la Facultad de Ciencias Exactas de la UNLP. Por otra parte, versiones previas de este libro fueron usadas como apuntes base de la materia también por varios años (incluso por otros profesores de la Facultad) y pudimos verificar que el texto funciona muy bien para un curso cuatrimestral.

Hay muchos libros excelentes y entrañables de esta teoría (no haremos aquí una propaganda del tema, que ya tiene sobrada fama). Pero siempre existe una visión personal de los temas a exponer, de ordenaciones, del énfasis en cada tema, el detalle y estilo de pruebas. Y porqué no, de un lenguaje específico, en este caso la variedad rioplatense del español, para expresar ideas y razonamientos. Esto motivó la escritura de este texto.

La base de su contenido es una adaptación (sobre todo en función del orden, del detalle de las pruebas y de los comentarios sobre cada resultado) de los capítulos sobre Topología de los libros “Analysis Now” de G. K. Pedersen [3] y en parte también de “Real Analysis” de G. Nagy [4], mechada con citas de libro de Kelley [1] y otros textos. El Capítulo sobre Homotopía está inspirado en la versión dada en el libro de Munkres [2]. También hay muchas cosas de elaboración propia, que fueron modificándose con los años de dictar la materia, hasta asentarse. Por otra parte, los distintos capítulos incluyen al final numerosos ejercicios, que surgen de seleccionarlos en la bibliografía y de las listas que se fueron usando para los TP de la materia a lo largo de los años.

Como no puede faltar en un texto de Topología, el comienzo desarrolla una introducción a la teoría de conjuntos, mencionando la versión axiomática que resuelve paradojas, pero exponiendo con algo de detalle la versión “naïf”, suficientemente útil para sus aplicaciones topológicas. Hay digresiones no muy detalladas (y mayormente sin pruebas de las implicaciones mutuas) acerca del Axioma de Elección, el Lema de Zorn y demás versiones equivalentes, que se asumirán evidentemente como ciertas. También se incluye una breve intro de cardinalidad y conjuntos numerables.

Luego empieza el cuerpo principal de 7 capítulos que exponen los resultados clásicos de Topología General (ver el Índice, que es bastante detallado). Con ello concluye la primera parte. No haremos aquí digresiones sobre la teoría y su relación con la historia, con otras especialidades matemáticas y con otras ciencias. Eso se desarrolla dentro del texto en los lugares que consideramos atinentes. Sí podemos decir que el enfoque principal es el de una visión relacionada con el Análisis Funcional (como se deduce de las fuentes bibliográficas mencionadas).

Otro comentario general es que los ejemplos de espacios topológicos concretos que se exponen en el texto no son muy abundantes (de últimas, está toda la Matemática moderna como lista de ejemplos). Hemos hecho hincapié en aquellos que, si bien no son muy relevantes en sí mismos, se exponen porque sirven para ilustrar problemáticas específicas de los resultados topológicos del texto, mayormente como contraejemplos de implicaciones que no valen o de conjeturas demasiado optimistas. Para ello está el Capítulo 8, que los desarrolla en detalle y menciona todas sus contraejemplaridades. Es usual que el trabajo con ejemplos más específicos se realice en las clases prácticas de un curso que siga este texto. Parte de esos ejercicios aparecen al final de los distintos capítulos.

La segunda parte del libro, llamada “Teorías más específicas”, expone tres áreas de aplicación de la teoría que tienen gran desarrollo propio. Se trata de los grupos topológicos, los espacios vectoriales topológicos (EVT) y los primeros pasos de topología algebraica (grupos de homotopía). En los tres casos se incluye un capítulo con una introducción a los conceptos más importantes de cada tema. El más detallado es el de los EVT, que entronca con los temas de otro libro-apunte nuestro, sobre Análisis Funcional. Como mencionábamos antes, el último Capítulo, sobre Homotopía, sigue líneas del libro de Munkres [2].

Parte I

Topología General

Capítulo 1

Teoría de conjuntos.

1.1 Generalidades

La topología tiene una fuerte componente que es, directamente, teoría de conjuntos. Esta teoría tiene una gran complejidad, dado que en algún momento aparecieron contradicciones en su formulación más intuitiva, por lo que hizo falta reformularla con una familia infinita de axiomas, algunos de ellos bastante sorprendentes.

En principio se deben aceptar ciertos conceptos primitivos, como por ejemplo los indicados por los símbolos $=$ y $\in$. La idea básica es que todo objeto del que uno hable en matemática debe ser una “clase”, y que muchas de ellas (las que no son demasiado grandes) llegan a la categoría de “conjunto”. Al revés de lo que uno espera, una clase A es un conjunto si existe otra clase B tal que $A \in B$. Esto hace que, cuando uno plantea la clase

$$\mathcal{C} = \{x : x \text{ cumple cierta propiedad } P\},$$

entonces un candidato “ y ” a ser elemento de $\mathcal{C}$ debe cumplir ahora DOS cosas:

1. que $P(y)$ sea cierta,
2. que y sea un conjunto.

Por lo tanto, la maldita clase $\mathcal{R} = \{x : x \notin x\}$ no crea más problemas. Lo cierto es que $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ porque $\mathcal{R}$ NO ES CONJUNTO, y a otra cosa (chau paradoja de Russell). Otra típica clase que no es conjunto es $\mathcal{U} = \{x : x = x\}$, o sea todo el mundo.

Entre los múltiples axiomas de la teoría, están los que dicen que existe el conjunto vacío, que se denota $\emptyset$, y que numerosas operaciones entre conjuntos producen nuevos conjuntos (no sólo clases). En particular todas las que uno usa en topología (salvo algún ejemplo hecho a propósito). Por ello, en este texto no expondremos la teoría axiomática de conjuntos, sino que nos conformaremos con la llamada teoría naif, focalizando en operaciones complicadas entre conjuntos y no en la entidad (natural o sobrenatural) de los resultados. Para una exposición detallada de la teoría axiomática, recomendamos el libro de Kelley [1].

Notaciones básicas

Para no aburrir, no enumeraremos las definiciones de los símbolos más usuales de la teoría. A continuación va una lista, donde solo definimos si sale bien cortito:

- $A \subseteq B$ si todo $x \in A$ cumple que $x \in B$. Se pone $A \subset B$ si uno sabe que $A \neq B$.
- $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$.
- $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.
- $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.
- $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (la diferencia simétrica).
- $\{A\} = \{x : x = A\}$ es el “singulete” cuyo único elemento es A . En forma similar, $\{A, B\} = \{A\} \cup \{B\}$ es el “doblete” y se sigue con las definiciones “por extensión”.
- $A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$. Esto es el producto cartesiano de A y B . Los pares ordenados (x, y) se pueden definir ad hoc, a partir de singuletes y dobletes. Pero no entraremos en detalles.
- $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$ es llamado **partes** de A . Si A es conjunto, entonces $\mathcal{P}(A)$ es un conjunto, y todo $B \subseteq A$ es conjunto, por lo que $B \in \mathcal{P}(A)$. Observar que A se puede modelar dentro de $\mathcal{P}(A)$ como los singuletes de elementos de A .
- Denotaremos $\mathcal{P}_0(A) = \{B \in \mathcal{P}(A) : B \neq \emptyset\}$ al conjunto de partes no vacías de A .

En topología se necesitan usar las uniones e intersecciones de muchos (o sea muy infinitas). Esto hay dos maneras usuales de escribirlo. Una de ellas es definir

$$\bigcup \mathcal{A} = \{y : y \in X \text{ para algún } X \in \mathcal{A}\},$$

lo que vendría a representar la unión de todos los elementos de $\mathcal{A}$. En otras palabras, uno forma la clase $\mathcal{A}$ de todos los conjuntos que quiere unir, y denota tal unión como $\bigcup \mathcal{A}$. Análogamente se define $\bigcap \mathcal{A}$.

La otra notación, que es la más usual, necesita el concepto de familias de conjuntos: Dada una clase I , una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$ es lo que uno se imagina. Su definición se puede formalizar usando funciones, sobre todo en el caso en que todos los A_i vivan dentro de un ambiente X , vía tomar una $f : I \rightarrow \mathcal{P}(X)$ y definir $A_i = f(i)$. Ahí uno puede considerar

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ para algún } i \in I\} \quad \text{y, análogamente,} \quad \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Si bien todo el mundo son conjuntos o clases, para no generar mucha confusión en los niveles en los que uno labura, en general usaremos letras mayúsculas (tipo A, B, X, Y) para los conjuntos en un nivel fijo; letras minúsculas para sus elementos (onda $a \in A$, o $x \in X \setminus Y$) y letras griegas o mayúsculas itálicas para clases formadas por algunos de nuestros conjuntos medios (por ejemplo, la clase $\mathcal{C} = \{A : \text{les pasa algo}\}$ o $\tau = \{A \subseteq X : A \text{ es abierto}\}$).

Ejercicio 1.1.1. Verificar las siguientes propiedades algebraicas de las operaciones de conjuntos: Sean $\{A_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ y $\{B_j\}_{j \in \mathbb{J}}$ dos familias de conjuntos, y sea X otro conjunto.

1. Leyes de De Morgan:

$$X \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i = \bigcap_{i \in \mathbb{I}} X \setminus A_i \quad \text{y} \quad X \setminus \bigcap_{j \in \mathbb{J}} B_j = \bigcup_{j \in \mathbb{J}} X \setminus B_j . \quad (1.1)$$

Por ejemplo, el primer conunto son los $x \in X$ que no están en ningún A_i .

$$2. X \cap \bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{I}} X \cap A_i \quad \text{y} \quad X \cup \bigcap_{j \in \mathbb{J}} B_j = \bigcap_{j \in \mathbb{J}} X \cup B_j .$$

3. Dados conjuntos A y B , se tiene que

$$A \cup B = B \iff A \subseteq B \iff A \cap B = A .$$

▲

1.2 Relaciones: funciones y equivalencias

Estas cosas ya se vieron muchas veces, pero las repasamos rápidamente para fijar notaciones.

Definición 1.2.1. Sean A y B dos clases.

1. Una **relación** entre A y B es una clase $R \subseteq A \times B$. A veces se abrevia xRy para decir que $(x, y) \in R$.
2. Si $A = B$, un tal R se llamará una relación en A .
3. Una relación $R \subseteq A \times B$ es una **función** si cumple que
 - (a) Para todo $x \in A$ existe un $y \in B$ tal que $(x, y) \in R$.
 - (b) El tal y es único: si $(x, y) \in R$ y también $(x, z) \in R$, entonces $y = z$.

La notación usual en tal caso es poner que la función es una $f : A \rightarrow B$ dada por $f(x) = y$ cuando el par $(x, y) \in R$. Observar que la relación R que define a f es lo que usualmente se conoce como el gráfico de f . En efecto, $R = \{(x, f(x)) : x \in A\}$. Otra notación usual es

$$B^A = \{R \subseteq A \times B : R \text{ es función}\} = \{\text{todas las funciones } f : A \rightarrow B\} .$$

4. La relación R en A es un **orden** si cumple que

- (a) R es **reflexiva**: La diagonal $\Delta_A = \{(x, x) : x \in A\} \subseteq R$. O sea que todo xRx .
- (b) R es **antisimétrica**: si xRy y también yRx , entonces $x = y$.
- (c) R es **transitiva**: xRy y también yRz , entonces xRz .

Cuando R es un orden, se la suele reescribir como $\leq$, o versiones similares.

5. Una $R \subseteq A \times A$ es **relación de equivalencia** si es reflexiva, **simétrica** (o sea que $xRy \implies yRx$) y transitiva.

1.3 Funciones

Dejamos para el lector el repaso de las nociones de funciones inyectivas, suryectivas, biyectivas, imagen de una función, composiciones, y de la existencia de la función inversa de una función biyectiva. Fijemos algunas notaciones útiles: Dar una función $f : A \rightarrow B$ es dar la “regla” que asigna a cada $a \in A$ su correspondiente $f(a) \in B$. Esto a veces se denota por

$$A \ni a \longmapsto \text{una fórmula que depende de } a = f(a) \in B .$$

Otra manera de escribirlo será:

$$\text{Sea } f : A \rightarrow B \text{ dada por } f(a) = \text{dicha fórmula, para cada } a \in A.$$

Por ejemplo, si $A \subseteq B$, denotamos por $\mathcal{J}_A : A \rightarrow B$ a la función inclusión, dada por $\mathcal{J}_A(a) = a$ para cada $a \in A$. El rol de B está sobreentendido, por lo que el signo $\mathcal{J}_A$ será el mismo para cualquier tal B , salvo en un caso: Si $B = A$, a la indentidad de A la denotaremos por $\mathcal{I}_A$. Recordemos la siguiente notación:

$$B^A = \{ \text{todas las funciones } f : A \rightarrow B \} .$$

1.3.1. Dada una $f : A \rightarrow B$, se definen naturalmente dos funciones entre conjuntos:

$$f : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B) \quad \text{dada por } f(M) = \{f(x) : x \in M\} \quad , \text{ para cada } M \subseteq A \quad \text{y}$$

$$f^{-1} : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A) \quad \text{dada por } f^{-1}(N) = \{x \in A : f(x) \in N\} \quad , \text{ para cada } N \subseteq B ,$$

llamadas imagen directa e imagen inversa por f . Obviamente la notación es abusiva, pero en general el contexto y los argumentos usados eliminan las ambigüedades. Hay una que subsiste: si f fuera biyectiva y $N \subseteq B$, entonces $f^{-1}(N)$ tiene dos significados (imagen directa por f^{-1} o inversa por f). Pero afortunadamente ambos dan el mismo resultado.

Necesitaremos usar varias propiedades de estas funciones, que enumeramos a continuación: Sea $f : A \rightarrow B$ una función, y tomemos familias $\{M_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ en $\mathcal{P}(A)$ y $\{N_j\}_{j \in \mathbb{J}}$ en $\mathcal{P}(B)$.

1. $f\left(\bigcup_{i \in \mathbb{I}} M_i\right) = \bigcup_{i \in \mathbb{I}} f(M_i)$ pero sólo vale que $f\left(\bigcap_{i \in \mathbb{I}} M_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in \mathbb{I}} f(M_i)$, porque si la f no es inyectiva se pueden cortar las “imágenes” aunque no se corten los M ’s.
2. Siempre vale que $f^{-1}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{J}} N_j\right) = \bigcup_{j \in \mathbb{J}} f^{-1}(N_j)$ y $f^{-1}\left(\bigcap_{j \in \mathbb{J}} N_j\right) = \bigcap_{j \in \mathbb{J}} f^{-1}(N_j)$.
3. Dados sendos $N \subseteq B$ y $M \subseteq A$, siempre se cumple la igualdad

$$f^{-1}(B \setminus N) = A \setminus f^{-1}(N) = \{x \in A : f(x) \notin N\} , \tag{1.2}$$

pero NO siempre vale que $f(A \setminus M) = B \setminus f(M)$. Ninguna de las dos inclusiones es cierta en general, salvo que f tenga propiedades adecuadas (cuales?). ▲

Una cuenta fácil dice que si nos dan dos conjuntos A y B no vacíos, y existe una función $f : A \rightarrow B$ que es inyectiva, entonces seguro que debe existir una $g : B \rightarrow A$ (que será sobreyectiva) tal que $g \circ f(x) = x$ para todo $x \in A$ (hay que invertir f en su imagen $\text{Im}(f)$, y mandar el resto de B a cualquier punto fijo de A). Puede probarse un resultado análogo si uno empieza con una $g : B \rightarrow A$ que sea sobre, pero se necesita una herramienta cualitativamente más sutil: el axioma de elección que aprovechamos para enunciar:

1.3.2. Axioma de elección: (Se abrevia AdE) Sea $A \neq \emptyset$. Entonces **existe** una función

$$\mathbf{e} : \mathcal{P}_0(A) \rightarrow A \quad \text{tal que} \quad \mathbf{e}(B) \in B \quad \text{para todo } B \in \mathcal{P}_0(A) .$$

En otras palabras, que se puede **elegir simultáneamente** un elemento $\mathbf{e}(B)$ de cada uno de los subconjuntos no vacíos $B \subseteq A$. Observar que elegir de a uno (o de a finitos) no necesita ningún axioma. La gracia es poder hacerlo de un saque para todos los subconjuntos al mismo tiempo. A tales funciones $\mathbf{e}$ se las llama **funciones de elección** para A . ▲

Volviendo a lo anterior, si uno tiene una función $g : B \rightarrow A$, entonces

$$g \text{ es sobre} \iff g^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset \text{ para todo } x \in A .$$

Por lo tanto si existe una g sobre, podemos definir $f : A \rightarrow B$ por la fórmula

$$f(x) = \mathbf{e} \left(g^{-1}(\{x\}) \right) \quad \text{para cada } x \in A ,$$

donde $\mathbf{e}$ es una función de elección para B . Es claro por su construcción que $g \circ f(x) = x$ para todo $x \in A$ (en particular que f es inyectiva). Pero para probar esto se **necesita** usar el AdE, para encontrar elementos de todas las contraímagenes a la vez (aún sabiendo que todas ellas son no vacías).

1.3.3. Productos de a muchos: Sea $\mathbb{A}$ un conjunto de índices, y tomemos una familia $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ de conjuntos. Definimos su producto cartesiano como el conjunto

$$\prod_{\alpha \in \mathbb{A}} X_\alpha = \left\{ f : \mathbb{A} \rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathbb{A}} X_\alpha : f \text{ es una función, y } x_\alpha = f(\alpha) \in X_\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{A} \right\}. \quad (1.3)$$

Como es usual, en vez la notación de funciones, se usará la de $\mathbb{A}$ -uplas: Se identifica a un elemento $f \in \prod_{\alpha \in \mathbb{A}} X_\alpha$ con $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}} = \{f(\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$. Usted podría decirme que esta definición incluye la de $A \times B$ (necesaria para poder hablar de funciones) que ya habíamos hecho, y de otra forma. La respuesta es: *Y si, que le vamos a hacer. Ahora la cambiamos.* Otra sería decir que sólo usaremos la definición (1.3) si $\mathbb{A}$ tiene al menos 3 elementos (ole!).

En realidad no era un problema, porque en la definición (1.3) las uplas NO son ordenadas, así que aún si $\mathbb{A} = \{1, 2\}$, no es lo mismo $\prod_{\alpha \in \mathbb{A}} X_\alpha$ que $X_1 \times X_2$ (pares desordenados vs. ordenados).

Objetos usuales asociados a los productos son las proyecciones $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in \mathbb{A}} X_\alpha \rightarrow X_\beta$ dadas por

$$\pi_\beta(\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}) = x_\beta \quad \text{o bien} \quad \pi_\beta(f) = f(\beta), \quad \text{para } f = \{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}} \in \prod_{\alpha \in \mathbb{A}} X_\alpha \text{ y } \beta \in \mathbb{A}.$$

Con respecto a estos productos, usaremos sistemáticamente un *suave* abuso de notación: Si para cada $\alpha \in \mathbb{A}$ tenemos sendos subconjuntos $Y_\alpha \subseteq X_\alpha$, asumiremos que

$$\prod_{\alpha \in \mathbb{A}} Y_\alpha \subseteq \prod_{\alpha \in \mathbb{A}} X_\alpha. \quad (1.4)$$

El abuso consiste en que identificamos una

$$f : \mathbb{A} \rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathbb{A}} Y_\alpha \text{ con la misma } f : \mathbb{A} \rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathbb{A}} X_\alpha,$$

siempre que sus valores caigan en el primer codominio. Con la notación $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ la cosa parece más legal, y seguiremos esa idea para simplificar notaciones.

Un hecho interesante, que influye en la polémica de si aceptar o no al AdE, es que este axioma se puede reformular en términos de productos cartesianos de la siguiente forma: Dada una familia de conjuntos $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$, vale que

$$\text{si } X_\alpha \neq \emptyset \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{A} \implies \prod_{\alpha \in \mathbb{A}} X_\alpha \neq \emptyset. \quad (\text{AdE } 2)$$

En efecto, una implicación es clara: para producir un elemento $f \in \prod_{\alpha \in \mathbb{A}} X_\alpha$, basta tomar $f(\alpha) = \mathbf{e}(X_\alpha)$ para cada $\alpha \in \mathbb{A}$, donde $\mathbf{e}$ es una función de elección para el conjunto $X = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{A}} X_\alpha$. Lo interesante es que se puede probar el AdE general a partir de este nuevo AdE 2. Esto lo proponemos como ejercicio al lector puntilloso (es una sopa de letras, pero no tiene mucha dificultad conceptual). Observar que el AdE 2 parece obvio, mientras que el AdE anterior parece más jugado. Y lo único que cambia es la manera de denotar las cosas para enunciarlos. ▲

1.3.4. Equivalencias y particiones: Hay tres conceptos en teoría de conjuntos que son esencialmente el mismo:

1. Dar una relación de equivalencia $\sim$ en una clase X . Fijada $\sim$ se suelen definir dos nociones asociadas.

- (a) Las clases: Para cada $a \in X$ definimos su clase de equivalencia como

$$\bar{a} = \{x \in X : x \sim a\}.$$

- (b) Sistemas de representantes: Un $A \subseteq X$ es un **sistema de representantes** (abreviamos SdR) de $\sim$ si todo $x \in X$ es equivalente a un $a \in A$, pero dos elementos distintos de A no pueden ser equivalentes. Es decir que uno debe elegir UN elemento de cada una de las clases de equivalencia. El AdE garantiza la existencia de estos sistemas (Ejercicio: Verificarlo o leer el final de esto).

2. Dar una partición de X : Esto es una familia $\{C_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ en $\mathcal{P}_0(X)$ tal que

$$\bigcup_{i \in \mathbb{I}} C_i = X \quad \text{pero} \quad C_i \cap C_j = \emptyset \quad \text{si } i \neq j .$$

A veces la notación familiar trae problemas. Otra manera de decirlo es dar una clase $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ con elementos disjuntos dos a dos, que cubren a X , o sea que $\bigcup \mathcal{C} = X$.

3. Dar una función suryectiva $P : X \rightarrow Y$, para algún conjunto (o clase) Y .

Veamos porqué son más o menos lo mismo:

$1 \leftrightarrow 2$: Dada la relación $\sim$, fijémosle $A \subseteq X$ un SdR. Luego el conjunto $\mathcal{C} = \{\bar{a} : a \in A\}$ es una flamante partición de X . Si uno tenía una partición $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$, recupera una Rel. de Eq. diciendo que $x \sim y$ si ambos pertenecen al mismo elemento de $\mathcal{C}$.

$1 \text{ y } 2 \rightarrow 3$: Fijadas $\sim$ y A su SdR, se define el espacio cociente

$$X/\sim = \{\bar{a} : a \in A\} \subseteq \mathcal{P}(X) , \quad \text{y la proyección } Q : X \rightarrow X/\sim , \quad \text{dada por } Q(x) = \bar{x} ,$$

que es suryectiva.

$3 \rightarrow 1 \text{ y } 2$: Si empezamos con una función sobre $P : X \rightarrow Y$, se define que $x_1 \sim x_2$ cuando $P(x_1) = P(x_2)$, y nos queda una relación de equivalencia con partición $\mathcal{C} = \{P^{-1}(y) : y \in Y\}$.

Acá sale fácil que a $\sim$ le existen SdR's, basta usar el AdE para exhibir una función $g : Y \rightarrow X$ (inyectiva) tal que $P \circ g = \mathcal{I}_Y$. Definiendo $A = g(Y) \subseteq X$, tenemos un lindo SdR para $\sim$, cuyas clases son $\bar{a} = P^{-1}(\{y\})$, para $a = g(y)$, $y \in Y$.

Así nos queda que $X/\sim = \{P^{-1}(\{y\}) : y \in Y\}$, que se identifica naturalmente con Y . Módulo esa identificación (o biyección), recuperamos a P como la proyección Q asociada a $\sim$. $\blacktriangle$

1.4 Ordenes, principios, lemas y axiomas

Lo que definimos como un orden en un conjunto, a veces se lo conoce como “orden parcial”, porque no pedimos tricotomía. El ejemplo más elemental de un orden es la inclusión $\subseteq$ en el ambiente $\mathcal{P}(A)$, para un conjunto A . Y de tricotomía ni hablar.

Definición 1.4.1. Sea $\leq$ una relación de orden en un conjunto A .

1. Dado $B \subseteq A$, un $x \in A$ se llama cota superior (y se abrevia CS) de B si todo $b \in B$ cumple que $b \leq x$. Análogamente definimos cota inferior (CI).
2. Un $x \in A$ se llama **maximal** si la única CS de $\{x\}$ es el mismo x (o sea que si $y \in A$ cumple que $x \leq y$, no queda otra que $y = x$). En forma similar se definen los elementos minimales.

3. Decimos que el orden $\leq$ es **dirigido** si todo par de elementos (y por ende todo subconjunto finito) de A tiene una CS. En otras palabras, si dados $x, y \in A$ siempre existe un $z \in A$ tal que $x \leq z$ e $y \leq z$. Análogamente definimos la noción de dirigido inferiormente.
4. Si un par $x, y \in A$ tiene una CS mínima, esta se denota por $x \vee y$ (o sea que, de existir, cumple que si $x, y \leq z \in A$, entonces $z \geq x \vee y$). Análogamente, $x \wedge y$ denotaría a la máxima CI del par x, y , siempre que tal cosa exista. Si tales cosas siempre existen, se dice que el par $(A, \leq)$ es un lattice o reticulado.
5. Diremos que $\leq$ es un orden **total** (o que $(A, \leq)$ es totalmente ordenado) si vale la tricotomía: dados $x, y \in A$, debe pasar que $x \leq y$ o que $y \leq x$.
6. Diremos que $\leq$ es un **buen** orden si todo subconjunto no vacío $B \subseteq A$ tiene un **primer elemento**, lo que significa que existe un $b \in B$ que es CI de B (eso suele notarse $b = \min B$). ▲

Observar que se tienen las implicaciones triviales

$$\text{buen orden} \implies \text{orden total} \implies \text{lattice} \implies \text{dirigido (sup e inf)}$$

Es fácil encontrar contraejemplos de todas las implicaciones inversas. Observar que el par $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es un lattice con elementos máximo y mínimo. Otro lindo ejemplo de lattice es tomar en $\mathbb{N}$ el orden dado por $n \prec m$ si m divide a n (quiénes son $n \vee m$ y $n \wedge m$?).

En cambio $(\mathbb{N}, \leq)$ es el prototipo del buen orden. De hecho, aceptar que $(\mathbb{N}, \leq)$ está bien ordenado es lo mismo que decir que vale el principio de inducción en $\mathbb{N}$, en el sentido de “si el subconjunto de los malos fuera no vacío, tendría primer elemento y se pudre el paso inductivo”. Esto ya usamos en 3. de la Def. 1.4.1 (“quien dice para 2 dice para finitos...”).

Veamos ahora dos enunciados con historia, que son equivalentes al AdE 1.3.2:

1.4.2. Principio de buena ordenación de Cantor: Todo conjunto X tiene un buen orden. ▲

El otro enunciado, que es el más comunmente aplicado en la matemática para hacer “inducciones grandes”, es el Lema de Zorn, que necesita una definición previa:

Definición 1.4.3. Un orden $\leq$ en un conjunto X se llama **orden inductivo** si se cumple lo siguiente: Dado un $A \subseteq X$ tal que el orden $\leq$ restringido a A es total (para algunos acá va *dirigido*), entonces existe una CS de A en X . ▲

1.4.4. Lema de Zorn: (Se abrevia LdZ) Todo conjunto no vacío e inductivamente ordenado tiene al menos un elemento maximal. ▲

Decíamos que el AdE (enunciado por Zermelo en 1904), el PBO de Cantor y el Lema de Zorn (propuesto por Zorn en 1935, pero ya usado por Kuratowsky en 1922) son equivalentes entre sí. De hecho, Zermelo usó su AdE para probar lo que Cantor había enunciado mucho tiempo antes (o sea, el PBO). En algún momento (otra edición?) haremos una prueba detallada de estas equivalencias. Mientras tanto, ver el libro de Pedersen [3] o el de Kelley [1]. En todo lo que sigue aceptaremos la validez de estos enunciados, y los usaremos alegremente.

Hay muchas más versiones de este tipo de apuestas a como se comportan las cosas infinitas. No las mencionaremos aquí, porque no suelen usarse. Observar que el PBO permite hacer lo que suele llamarse “inducción transfinita”, que es hacer algo parecido a la inducción en conjuntos no numerables. Pero como dijimos antes, en la práctica se usa el LdZ para ese tipo de pruebas. De hecho, después de usarlo suficientes veces, uno abrevia diciendo que un resultado “sale Zorneando” o “por Zorn...” (como ustedes dirían “se ve por inducción”).

Veamos un ejemplo. Probaremos que todo espacio vectorial $\mathbb{V} \neq \{0\}$ tiene una base. Para mostrarlo consideremos el conjunto $\mathcal{C} = \{A \subseteq \mathbb{V} : A \text{ es LI}\}$, ordenado por inclusión. Luego $(\mathcal{C}, \subseteq)$ es no vacío ($\mathbb{V} \neq \{0\}$) e inductivamente ordenado. En efecto, dado un $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ totalmente ordenado, es fácil ver que $A = \bigcup \mathcal{A}$ es LI (porque las combinaciones lineales deben ser finitas), por lo que $A \in \mathcal{C}$ y es claramente una CS para $\mathcal{A}$. El LdZ dice entonces que hay elementos maximales en $\mathcal{C}$, o sea familias LI maximales, que son bases.

Sin embargo, aún en el caso numerable, faltaría un enunciado específico para justificar procesos “recursivos” infinitos, cosa que usaremos repetidamente en distintas pruebas de este texto (sugerimos detectarlas). Son de la siguiente pinta: para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar un conjunto A_{n+1} que cumple algo, pero cuya construcción depende esencialmente de quién era el conjunto A_n que encontramos antes (por ejemplo, que cada A_n tenga n elementos, pero pidiendo que cada $A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq X$ fijo). El tema es poder concluir que existe toda la sucesión infinita $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que cumple lo que queríamos para cada $n \in \mathbb{N}$.

Al respecto, digamos que cualquier formalización de estos métodos es muy pastosa y que, pedagógicamente, oscurece más que lo que aclara. Baste decir que este tipo argumentos son muy convincentes, y que se puede enunciar una formalización de los mismos que es también equivalente a los axiomas antes mencionados (sugerimos ver los excelentes Apéndices del libro de Nagy [4]). Así que, en lo que sigue, aceptaremos ese tipo de argumentos sin mayor justificación. De hecho, se los usa en toda la matemática y la mayoría de la gente ni se plantea que puedan ser cuestionables.

1.5 Cardinales

Diremos que dos conjuntos A y B tienen el mismo **cardinal** si existe una función biyectiva $f : A \rightarrow B$. Esto define una relación de equivalencia en la clase $\mathcal{U}$ de todos los conjuntos. Los **números cardinales** (o cardinales a secas) son las clases de equivalencia, que consisten en todos los conjuntos con una “cantidad de elementos” igual a ese cardinal. Denotaremos esto por $\text{Card}(A) = \#A = |A| = \alpha$, lo que significa que A es de la clase α .

Esto no está del todo bien (ni $\mathcal{U}$ ni las clases en cuestión son conjuntos). Pero la relación está bien definida, esas clases son intuitivamente convincentes (a mí me enseñaron así los números en la primaria), y la notación $|A| = \alpha$ es muy práctica. Así que seguimos por este camino. Los cardinales finitos los denominamos con el número de elementos. Para empezar, tenemos que $|\emptyset| = 0$. Observar que si uno define los $n \in \mathbb{N}$ con la siguiente regla: $0 = \emptyset$,

$$1 = \{\emptyset\} = \{0\} \quad , \quad 2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \quad , \quad \dots \quad , \quad n + 1 = n \cup \{n\} = \{0, 1, \dots, n\} \quad , \dots$$

entonces resulta que, en $\mathbb{N}$, la relación $\leq$ equivale a $\in$. Y además, cada número $n \in \mathbb{N}$ es un representante de su clase cardinal. Por ello los elegimos como representantes (y nombres) de su clase. Ahora sí, diremos que un conjunto A es **finito** si existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $|A| = n$, o sea que exista una función $a : n \rightarrow A$ biyectiva, que realice a $A = \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$. Si no hay tal cosa, diremos que A es infinito. Agreguemos dos nombres de cardinales infinitos:

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0 \quad \text{y} \quad |\mathbb{R}| = c \quad .$$

El orden entre cardinales se define como sigue: Diremos que $|A| \leq |B|$ si existe un $C \subseteq B$ tal que $|A| = |C|$. Obviamente esto equivale a que exista una $f : A \rightarrow B$ que sea inyectiva y, por un resultado visto antes, a que exista una $g : B \rightarrow A$ que sea sobre. Es fácil ver que esta relación entre cardinales es reflexiva y transitiva. El famoso teorema de Cantor Bernstein dice que es, además, antisimétrica y por ende un orden entre los cardinales. El teorema se traduce a lo siguiente:

Teorema 1.5.1 (Cantor Bernstein). Dados conjuntos A y B , si existen sendas funciones inyectivas $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow A$, entonces existe una $h : A \rightarrow B$ biyectiva.

Demostración. Ejercicio (Ver el libro de Kelley [1]). En realidad la prueba es bastante larga y complicada, por lo que excede los objetivos de esta sección. Pero está muy buena, vayan y léanla. ■

En realidad, también vale que este orden es total, porque puede probarse que dados dos conjuntos A y B , siempre existe una función inyectiva $f : A \rightarrow B$ o una $g : B \rightarrow A$. Esto es un lindo ejercicio de Zornificación que proponemos a los lectores.

La gracia de esta teoría, es que haya cardinales más infinitos que otros. Esto fue el resultado de Cantor que dió inicio a la teoría de conjuntos. Él probó que $\aleph_0 < c$ (o sea que no puede haber una $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ suryectiva). Su prueba (que siguió a una larga serie de pruebas erróneas) usa lo que desde entonces es llamado el “argumento diagonal” de Cantor. Una abstracción de ese argumento da lugar al siguiente resultado más general:

Teorema 1.5.2 (Cantor). Sea $A \neq \emptyset$. Entonces se tiene que

$$|A| < |\mathcal{P}(A)| \quad .$$

Demostración. La función $A \ni a \mapsto \{a\} \in \mathcal{P}(A)$ es claramente inyectiva, por lo que $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$. Pero esta función no es sobre, porque $\emptyset$ no está en su imagen. Tomemos

cualquier otra función $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$. Dado un $x \in A$, tenemos que $f(x)$ es un subconjunto de A , por lo que uno puede preguntarse si $x \in f(x)$ o no. Definamos el conjunto

$$C_f = \{ x \in A : x \notin f(x) \} \in \mathcal{P}(A) .$$

Veremos que este C_f no puede estar en la imagen de f , por lo que ella no puede ser sobre (en la del principio $C_f = \emptyset$ y no lo estaba). En efecto, si tuviéramos que $C_f = f(y)$ para algún $y \in A$, entonces nos podríamos preguntar si $y \in C_f$ o no. Observar que

$$y \in C_f \implies y \in f(y) \implies y \notin C_f \quad \text{pero} \quad y \notin C_f \implies y \notin f(y) \implies y \in C_f .$$

Ambos casos son imposibles. Luego ninguna f puede ser sobre. ■

El hecho antes mencionado de que $\aleph_0 < c$ se deduce ahora del teorema, porque $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Esto último puede mostrarse usando la numeración binaria de los reales entre 0 y 1 (que son biyectables a todo $\mathbb{R}$). Hace falta observar que para todo conjunto A , se tiene que

$$|\mathcal{P}(A)| = |2^A| , \quad \text{donde} \quad 2^A = \{ \text{todas las funciones } f : A \rightarrow \{0, 1\} \} .$$

La biyección natural es la que manda cada $B \subseteq A$ a su “función característica”. La inversa esta dada por $2^A \ni f \mapsto f^{-1}(\{1\})$.

1.6 Conjuntos Numerables

Diremos que un conjunto A es **numerable** si es finito o biyectable con $\mathbb{N}$. En otras palabras, si $|A| \leq \aleph_0$. Ahora veremos que los conjuntos infinitos numerables son los menos infinitos posibles (lo que, de paso, justifica la observación anterior).

Teorema 1.6.1. Sea A un conjunto infinito. Entonces existe un $B \subseteq A$ tal que $|B| = \aleph_0$ (o sea que B es infinito y numerable). En otras palabras, vale que $\aleph_0 \leq \alpha$ para todo cardinal infinito α .

Demostración. La prueba usa el proceso recursivo que mencionábamos antes: Como $A \neq \emptyset$, podemos elegir un $a_1 \in A$. Además tenemos que $A \setminus \{a_1\} \neq \emptyset$, porque sinó valdría que $|A| = 1 < \infty$. Así que podemos elegir un $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$. Seguimos así indefinidamente, eligiendo $a_{n+1} \in A \setminus \{a_1, \dots, a_n\} \neq \emptyset$ (ahora porque $|A| \neq n$), para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto produce una función **inyectiva** $f : \mathbb{N} \rightarrow A$. Luego basta tomar $B = \text{Im}(f) = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, ya que $B \subseteq A$ y $|B| = \aleph_0$. ■

Corolario 1.6.2. Un conjunto A es infinito si y sólo si existe un

$$X \subseteq A \quad \text{tal que} \quad X \neq A \quad \text{pero} \quad |A| = |X| .$$

O sea que los infinitos son los que son biyectables a una parte propia.

Demostración. Observar que $\mathbb{N}$ es biyectable con $2\mathbb{N} = \{ \text{números pares} \}$ vía la función $\mathbb{N} \ni n \mapsto f(n) = 2n \in 2\mathbb{N}$. Es fácil ver que esta propiedad se puede trasladar a cualquier conjunto B con $|B| = \aleph_0$. Tomando ahora cualquier conjunto infinito A , por el Teo. 1.6.1 tenemos un tal B dentro de A . Luego definiendo una función como la identidad en $A \setminus B$ y como la biyección anterior entre B y una mitad de B , obtenemos la biyección de A con una parte propia que buscábamos. Por otra parte, es claro que los conjuntos finitos no pueden tener esa propiedad. Una prueba formal podría hacerse por inducción, o más bien por buena ordenación. Porque la única parte propia de un singulete es el vacío. ■

Enumeraremos ahora varias propiedades de los conjuntos numerables que se usarán intensamente en el resto del texto:

1. Producto de dos numerables es numerable: Dados A y B numerables, entonces también se tiene que $|A \times B| \leq \aleph_0$.
2. Unión numerable de numerables es numerable: Dada una sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos numerables, se tiene que $\left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right| \leq \aleph_0$.
3. Partes finitas de un numerable es numerable: Dado un conjunto A , definamos

$$\mathcal{P}_F(A) = \{B \in \mathcal{P}(A) : |B| < \infty\}.$$

Si empezamos con un A numerable, entonces también $|\mathcal{P}_F(A)| \leq \aleph_0$.

Las pruebas se basan en el hecho de que se puede construir una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Más fácil aún, dos inyecciones para ambos lados. Una es obvia. La otra puede ser

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{dada por} \quad f(n, m) = 2^n 3^m.$$

Este resultado se traslada para obtener 1. Y de ahí se deduce fácilmente 2. En efecto, fijando sendas funciones sobre $f_n : \mathbb{N} \rightarrow A_n$ (que se pueden elegir todas de un saque por el AdE), tomamos la función sobre

$$F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \text{dada por} \quad F(n, m) = f_n(m).$$

También se deduce de 1. (por inducción) que si A es numerable, entonces $|A^n| \leq \aleph_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Después se puede ver que $|\{B \in \mathcal{P}(A) : 0 < |B| \leq n\}| \leq |A^n|$. En efecto, basta mandar cada n -upla $(a_1, \dots, a_n)$ al conjunto $B = \{a_1, \dots, a_n\}$. Esa flecha da sobre. Así, 3. se deduce de 2.

1.7 Ejercicios

Ejercicio 1.7.1. Probar que un conjunto X es infinito si y solo si existe un subconjunto propio $A \subseteq X$ coordinable con X .

Ejercicio 1.7.2. Mostrar que si $A \subseteq X$ son tales que A es infinito, entonces X es infinito.

Ejercicio 1.7.3. Sea X un conjunto. Probar que existe una biyección entre el conjunto de partes $P(X)$ y el conjunto $2^X := \{(\epsilon_i)_{i \in X} : \epsilon_i \in \{0, 1\}, \forall i \in X\}$. Concluir que $2^{\mathbb{N}}$ es un conjunto no numerable.

Ejercicio 1.7.4. Mostrar que $\mathbb{Q}$ es un conjunto numerable.

Ejercicio 1.7.5. Mostrar que $\mathbb{R}$ es un conjunto no numerable. Deducir que hay números reales no racionales (es decir, irracionales).

Ejercicio 1.7.6. Mostrar que $\mathbb{Q}[x]$ es un conjunto numerable. Concluir que:

- El espacio métrico $(C([0, 1]), \|\cdot\|_{\infty})$ es separable.
- El conjunto de números trascendentes (es decir, aquellos $\alpha \in \mathbb{R}$ que no satisfacen $P(\alpha) = 0$ para ningún $P \in \mathbb{Q}[x]$) es no numerable (y en particular no vacío).

Ejercicio 1.7.7. Dados dos conjuntos A y B arbitrarios, probar que necesariamente $|A| \geq |B|$ o bien $|B| \geq |A|$.

Ejercicio 1.7.8. Si A es infinito entonces $|A \times \mathbb{N}| = |A|$.

Ejercicio 1.7.9. Si $|A| \geq |B|$ y A es infinito, entonces $|A \cup B| = |A|$.

Ejercicio 1.7.10. Dados un conjunto A **infinito** y un cacho $B \subseteq A$ tales que $|A| \neq |B|$ (es decir que $|A| > |B|$), entonces vale que $|A \setminus B| = |A|$.

Capítulo 2

Espacios topológicos

Definir una topología en un conjunto X es darle una familia $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ de subconjuntos abiertos. Este sólo hecho será suficiente para desarrollar gran parte del análisis básico en X , permitiendo definir nociones como

- Conjuntos cerrados.
- Clausuras, interior y borde de subconjuntos.
- Entornos de un punto.
- Convergencia (de redes, las sucesiones no alcanzan).
- Funciones continuas (que son las *flechas* de la categoría de espacios topológicos).
- Compacidad, conexidad, etc.

Este tipo de objetos y propiedades son las llamadas propiedades topológicas de (X, τ) . Esta teoría es la abstracción máxima de las propiedades básicas del análisis, y es tan general que se confunde con la misma teoría de conjuntos. Hay topología en todas las ramas de la matemática.

Las convenciones, definiciones y resultados básicos de la topología fueron desarrollados en las primeras décadas del siglo XX, y fueron mejorándose hasta los mínimos detalles hasta estos días. Por eso, hoy en día están tan “decantados” que la mayoría de las demostraciones son, o bien cuasi-triviales, o bien algo más complicadas pero ya no es posible mejorarlas o simplificarlas.

Lo más importante de la teoría es que desarrolla un lenguaje unificado que es común a todos los matemáticos, y que resulta un abc de las herramientas de trabajo en todas las ramas de la matemática. El desconocimiento de este lenguaje (o más bien esta pauta de concepción de los objetos y sus propiedades) es lo que suele incomodar a los especialistas de otras ciencias al tener que encarar problemas matemáticos, y sobre todo al tener que interactuar con matemáticos al respecto.

Las definiciones, nombres y lineamientos de esta teoría son fuertemente convencionales, en el sentido de que podrían haberse hecho de muchas otras maneras. Pero la versión que

hoy se estudia ha sido el fruto de muchos años de discusiones, y de un consenso final (salvo en algunos detalles menores) que, afortunadamente, hoy en día abarca a toda la comunidad matemática.

2.1 Definiciones básicas

Definición 2.1.1. Sea X un conjunto. Una **topología** en X es un sistema de subconjuntos $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ que verifica las siguientes tres propiedades básicas.

1. Si $\sigma \subseteq \tau$, entonces $\bigcup \sigma \in \tau$.
2. Si $\mathcal{F} \subseteq \tau$ es **finita**, entonces $\bigcap \mathcal{F} \in \tau$.
3. $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$.

En otras palabras, τ es una topología si contiene a X y $\emptyset$, y es cerrada por uniones arbitrarias y por intersecciones finitas.

En tal caso, decimos que el par (X, τ) es un espacio topológico (ET). Si no hay ambigüedad sobre qué topología se está usando, escribiremos X solo en lugar de (X, τ) . Los elementos de τ se llamarán subconjuntos **abiertos** (o τ -abiertos) de X . ▲

La familia más conocida de espacios topológicos proviene de dotar a un conjunto X de una métrica o distancia:

Definición 2.1.2. Sea X un conjunto. Una métrica en X es una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ que verifica las siguientes propiedades: Dados $x, y, z \in X$,

1. $d(x, y) = d(y, x)$, es decir que d es simétrica.
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (d es fiel).
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, o sea que d cumple la desigualdad triángular.

En tal caso, (X, d) es un espacio métrico, y usaremos las notaciones:

1. Dados $x \in X$ y $N \in \mathbb{R}_{>0}$, los conjuntos

$$B(x, N) = \{y \in X : d(x, y) < N\} \quad \text{y} \quad \overline{B}(x, N) = \{y \in X : d(x, y) \leq N\},$$

son la bola abierta y la bola cerrada de centro x y radio N .

2. Un conjunto $A \subseteq X$ es abierto (o d -abierto) si para todo $x \in A$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq A$.
3. Dados $A, B \subseteq X$, la distancia entre ellos es

$$d(A, B) = \inf \{d(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Si $x \in X$, escribiremos $d(x, B) = \inf \{d(x, y) : y \in B\}$ en lugar de $d(\{x\}, B)$. ▲

Observación 2.1.3. Si (X, d) es un espacio métrico, es fácil ver que el sistema de conjuntos $\tau_d = \{A \subseteq X : A \text{ es } d\text{-abierto}\}$ es una topología en X . Pensando al revés, si τ es una topología para X , diremos que el espacio topológico (X, τ) es **metrizable** si existe alguna distancia d en X tal que $\tau = \tau_d$.

La mayoría de los espacios topológicos son metrizables. Sin embargo, hay dos razones importantes para que las teorías topológica y métrica se desarrollen separadamente (o en paralelo). Por un lado, existen importantes ejemplos en la matemática de espacios topológicos no metrizables (pocos pero buenos). Por otro lado, las dos teorías hacen incapié en aspectos bien diferenciados entre sí, hasta el punto de que es usual hablar de propiedades topológicas (como las enumeradas al principio del capítulo) y de propiedades métricas. Como ejemplo de estas últimas, podemos mencionar propiedades como “ser acotado”, ser “completo”, diámetro de suconjuntos, sucesiones de Cauchy, etc. Todas estas son puramente métricas y no tienen un correlato topológico. ▲

A continuación seguiremos introduciendo lenguaje topológico general:

Definición 2.1.4. Sea (X, τ) un ET y fijemos un punto $x \in X$.

1. Diremos que un conjunto

$$A \subseteq X \quad \text{es un } \mathbf{entorno} \text{ de } x \text{ si existe } U \in \tau \quad \text{tal que} \quad x \in U \subseteq A .$$

A se llamará **entorno abierto** de x si se tiene que $x \in A$ y el mismo $A \in \tau$.

2. Denotaremos por $\mathcal{O}(x) = \{A \subseteq X : A \text{ es entorno de } x\}$ al *filtro* de entornos de x . Llamaremos $\mathcal{O}^a(x) = \{A \subseteq X : A \text{ es entorno abierto de } x\} = \mathcal{O}(x) \cap \tau$. Cuando haga falta especificar el espacio o la topología en cuestión, escribiremos $\mathcal{O}_X(x)$ o también $\mathcal{O}_\tau(x)$. Lo mismo para $\mathcal{O}^a(x)$.

3. Dado un conjunto $Y \subseteq X$ denotaremos por

$$Y^\circ = \{x \in Y : Y \in \mathcal{O}(x)\} = \{x \in Y : Y \text{ es entorno de } x\} , \quad (2.1)$$

al **interior** de Y . Los elementos $x \in Y^\circ$ se llamarán puntos interiores de Y . ▲

Observación 2.1.5. Sea (X, τ) un ET y tomemos un $A \subseteq X$. Entonces

$$A^\circ = \bigcup \{U \in \tau : U \subseteq A\} . \quad (2.2)$$

En efecto, dado un $U \in \tau$ tal que $U \subseteq A$, es claro por la Def. 2.1.4 que todos los $y \in U$ cumplen que $A \in \mathcal{O}(y)$. Es decir que $U \subseteq A^\circ$, lo que prueba una inclusión ($\supseteq$). La otra es consecuencia directa de la definición de entorno (miren y convénzanse).

La igualdad de arriba tiene varias consecuencias sobre el “tomar interior” de conjuntos que se usarán sistemáticamente en lo que sigue, y que deberían incorporar los alumnos como cosa natural. Se enuncian a continuación. ▲

Proposición 2.1.6. Sea (X, τ) un ET y sean $A, B \subseteq X$. Entonces

1. A° es abierto.
2. Si $A \subseteq B$, entonces $A^\circ \subseteq B^\circ$.
3. A es abierto si y sólo si $A = A^\circ$, o sea si A es entorno de todos sus puntos.
4. $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.
5. A° es el **mayor** abierto contenido en A .
6. $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

Demostración. Los primeros 5 items se deducen directamente de la igualdad (2.2). Como $A^\circ \cap B^\circ \subseteq A \cap B$ y es abierto, de nuevo la igualdad (2.2) asegura que $A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$. La otra inclusión se sigue del item 2, porque $A \cap B \subseteq A \implies (A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ$ y lo mismo puede hacerse para B . ■

2.2 Cerrados, límites y clausuras

Sea (X, τ) un ET. Los subconjuntos **cerrados** de X serán los complementos de los conjuntos abiertos. Es decir, $F \subseteq X$ es cerrado si y sólo si $X \setminus F \in \tau$. Usando la Def. 2.1.1 y las leyes de De Morgan (1.1), tenemos las siguientes propiedades:

- Intersecciones arbitrarias de cerrados son cerradas.
- Uniones finitas de cerrados son cerradas.
- $\emptyset$ y X son cerrados.

Usando estos hechos, podemos definir la noción de clausura de un subconjunto, que es la dual de la noción de interior (comparar con la Ec. (2.2)):

Definición 2.2.1. Sea (X, τ) un ET y sea $A \subseteq X$. El conjunto

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subseteq X : F \text{ es cerrado y } A \subseteq F\} \quad (2.3)$$

se denomina la **clausura** de A . Los elementos $x \in \overline{A}$ se llamarán **puntos límite** de A . ▲

Veamos ahora la versión dual de la Prop. 2.1.6, cuya prueba dejamos como ejercicio.

Proposición 2.2.2. Sea (X, τ) un ET y sean $A, B \subseteq X$. Entonces

1. $\overline{A}$ es cerrado.
2. Si $A \subseteq B$, entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$
3. A es cerrado si y sólo si $A = \overline{A}$.
4. $(\overline{A})^- = \overline{A}$.
5. $\overline{A}$ es el **menor** cerrado que contiene a A .
6. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. ■

La dualidad mencionada se manifiesta mejor en la siguiente fórmula:

Proposición 2.2.3. Sea (X, τ) un ET y sea $A \subseteq X$. Entonces

$$X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ \quad \text{y} \quad X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}.$$

Demostración. Se deduce de las fórmulas (2.2) y (2.3). Por ejemplo,

$$X \setminus \overline{A} \stackrel{(1.1)}{=} \bigcup \{X \setminus F : F \text{ es cerrado y } A \subseteq F\} = \bigcup \{U \in \tau : U \subseteq X \setminus A\}.$$

La otra igualdad se muestra en forma semejante. ■

Daremos ahora una caracterización especial de ser punto límite:

Proposición 2.2.4. Sea (X, τ) un ET. Dados $A \subseteq X$ y $x \in X$, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $x \in \overline{A}$
2. $A \cap V \neq \emptyset$ para todo $V \in \mathcal{O}(x)$.
3. $A \cap U \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{O}^a(x)$.

Demostración. Supongamos que $A \cap V = \emptyset$ para cierto $V \in \mathcal{O}(x)$. Entonces tenemos que $V \subseteq X \setminus A$ por lo que $x \in (X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$. Esto prueba $1 \rightarrow 2$. Es claro que $2 \rightarrow 3$. Finalmente, para ver que $3 \rightarrow 1$, supongamos que $x \notin \overline{A}$. Como $U \stackrel{\text{def}}{=} X \setminus \overline{A}$ es abierto y $x \in U$, tenemos que $U \in \mathcal{O}^a(x)$. Pero como $A \subseteq \overline{A}$, se tiene que $U \cap A = \emptyset$. ■

Por la Prop. 2.2.4, un $x \in X$ es punto límite de un conjunto $A \subseteq X$ si y sólo si se cumple que $A \cap V \neq \emptyset$ para todo $V \in \mathcal{O}(x)$, o sea si A corta a todo entorno de x . En forma similar, pero un poco más sofisticada, se define la noción de punto de acumulación:

Definición 2.2.5. Sea (X, τ) un ET. Dados $A \subseteq X$ y $x \in X$, decimos que

x es **punto de acumulación** de A si $(A \setminus \{x\}) \cap V \neq \emptyset$ para todo $V \in \mathcal{O}(x)$.

Es decir, si A corta a todo entorno de x en algún punto **y distinto** de x . Denotaremos por $A' = \{x \in X : x \text{ es punto de acumulación de } A\}$. ▲

Ejercicios 2.2.6. 1. Sea (X, τ) un ET. Dado $A \subseteq X$, probar que $\overline{A} = A \cup A'$.

2. Sean (X, d) un EM y $A \subseteq X$. Probar que

$$x \in \overline{A} \iff 0 = d(x, A) .$$

Deducir que A es cerrado si y sólo si $[d(y, A) = 0 \implies y \in A]$. ▲

Definición 2.2.7. Sea (X, τ) un ET. Dado $A \subseteq X$, llamaremos **borde** de A al conjunto

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus A^\circ$$

$$= \{x \in X : A \cap V \neq \emptyset \neq (X \setminus A) \cap V, \text{ para todo } V \in \mathcal{O}(x)\} .$$

Es fácil ver que $\partial A = \partial(X \setminus A)$. ▲

2.3 Bases y sub-bases

En esta sección estudiaremos construcciones que producen nuevas topologías a partir de una topología dada, o basándose en familias arbitrarias de conjuntos.

Sean τ_1 y τ_2 dos topologías en X . Diremos que τ_1 es más fuerte (o que es mayor) que τ_2 si $\tau_2 \subseteq \tau_1$, es decir que τ_1 tiene más conjuntos abiertos que τ_2 . La menor de todas las topologías es la llamada trivial, y consiste de $\{\emptyset, X\}$. La mayor es la llamada topología *discreta*, que es tomar todo $\mathcal{P}(X)$ (en la que todos los puntos son abiertos). Se puede, además, construir ínfimos y supremos de familias arbitrarias de topologías. En efecto, si $\{\tau_i : i \in \mathbb{I}\}$ es una familia de topologías en X , entonces es fácil ver que los sistemas

$$\bigwedge_{i \in \mathbb{I}} \tau_i = \bigcap_{i \in \mathbb{I}} \tau_i \quad \text{y} \quad \bigvee_{i \in \mathbb{I}} \tau_i = \bigwedge \{ \tau : \tau \text{ es una topología y } \bigcup_{i \in \mathbb{I}} \tau_i \subseteq \tau \}$$

son topologías, la primera el ínfimo y la segunda el supremo de la familia $\{\tau_i : i \in \mathbb{I}\}$. Estas construcciones permiten generar topologías a partir de familias arbitrarias de subconjuntos de X , con la sola condición de que cubran a X (para que no se arme lío en lo que le falta).

Definición 2.3.1. Sea X un conjunto y sea $\rho \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que $\bigcup \rho = X$.

1. La topología **generada** por ρ es la menor topología que contiene a ρ , o sea

$$\tau(\rho) = \bigwedge \{ \tau : \tau \text{ es una topología y } \rho \subseteq \tau \} .$$

2. Dada una topología τ en X , diremos que $\rho \subseteq \tau$ es una **sub-base** de τ si $\tau = \tau(\rho)$.

3. Diremos que ρ es una **base** de τ si $\tau = \tau(\rho)$ y todo $V \in \tau$ cumple que

$$V = \bigcup \{ U \in \rho : U \subseteq V \} .$$
 ▲

En resumidas cuentas, sabemos generar una topología en X a partir de una familia arbitraria $\rho \subseteq \mathcal{P}(X)$, y sabemos qué queremos que cumpla una familia para ser base de una topología (notar la analogía con las bolas abiertas en una topología que proviene de una métrica). El problema es saber cuándo una ρ es o no base de su $\tau(\rho)$, o bien cómo contruir una base de $\tau(\rho)$ a partir de ρ . Esto se responde ahora:

Proposición 2.3.2. Sea X un conjunto y sea $\rho \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que $\bigcup \rho = X$.

1. Se tiene que ρ es base de $\tau(\rho)$ si y sólo si se cumple que

$$\text{dados } U, V \in \rho \text{ y } x \in U \cap V, \text{ existe } W \in \rho \text{ tal que } x \in W \subseteq U \cap V, \quad (2.4)$$

o equivalentemente que $U \cap V = \bigcup \{W \in \rho : W \subseteq U \cap V\}$. Notar que, en particular, esto pasa si ρ es cerrado por intersecciones finitas.

2. La siguiente familia es base de $\tau(\rho)$:

$$\beta = \{V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n : n \in \mathbb{N} \text{ y } V_1, \dots, V_n \in \rho\}, \quad (2.5)$$

es decir que β consiste de las intersecciones finitas de elementos de ρ .

En conclusión, si $\rho \subseteq \mathcal{P}(X)$ cumple que $\bigcup \rho = X$, se tiene que

$$\tau(\rho) = \{ \text{uniones arbitrarias de intersecciones finitas de elementos de } \rho \}. \quad (2.6)$$

Demostración. Si ρ es base de $\tau(\rho)$, la condición (2.4) se verifica de inmediato (notar que $U \cap V \in \tau(\rho)$). Supongamos ahora que ρ cumple la condición (2.4), y consideremos

$$\tau = \{ \bigcup \alpha : \alpha \subseteq \rho \} = \{ \text{uniones de elementos de } \rho \},$$

Es claro que $\rho \subseteq \tau \subseteq \tau(\rho)$, ya que τ está contenido en toda topología que contenga a ρ . Probaremos que τ es una topología, de lo que podremos deducir que $\tau = \tau(\rho)$, por lo que ρ será una base de $\tau(\rho)$.

Tomando $\alpha = \rho$, o bien $\alpha = \emptyset$, vemos que X y $\emptyset$ están en τ (recordar que $\bigcup \rho = X$). Por su construcción, τ es cerrado por uniones arbitrarias. Sólo falta ver que lo es para intersecciones finitas. Es fácil ver que la condición (2.4) muestra que si $U, V \in \rho$, entonces $U \cap V \in \tau$. Si ahora tomamos $\alpha, \gamma \subseteq \rho$, y consideramos los conjuntos

$$A = \bigcup \alpha \text{ y } B = \bigcup \gamma \text{ en } \tau, \quad \implies A \cap B = \bigcup_{U \in \alpha} \bigcup_{V \in \gamma} U \cap V \in \tau.$$

Inductivamente, se ve que τ es cerrado para intersecciones finitas, lo que prueba 1.

El conjunto β de la Ec. (2.5) claramente cumple la condición (2.4), puesto que β es cerrado para intersecciones finitas. Por ello, β es base de $\tau(\beta)$. Pero es fácil ver que $\tau(\rho) = \tau(\beta)$, lo que prueba 2. La fórmula (2.6) es consecuencia de lo visto anteriormente. ■

Proposición 2.3.3. Sea (X, τ) un ET. Dada $\beta \subseteq \tau$ tal que $\bigcup \beta = X$, son equivalentes:

1. β es base de τ .
2. Para todo $x \in X$ y todo $U \in \mathcal{O}(x)$ existe $V \in \beta$ tal que $x \in V \subseteq U$.

Demostración. Si β es base y $U \in \mathcal{O}(x)$, sabemos que $x \in U^\circ = \bigcup \{V \in \beta : V \subseteq U\}$. Basta tomar uno de tales V tal que $x \in V$. La recíproca es similar. ■

Si ahora aislamos la condición anterior para un $x \in X$ fijo, obtenemos la noción natural de *base de entornos* para ese x :

Definición 2.3.4. Sea (X, τ) un ET y sea $x \in X$. Una **base de entornos** de x es una subfamilia $\beta_x \subseteq \mathcal{O}^a(x)$ tal que para todo $U \in \mathcal{O}(x)$ existe $V \in \beta_x$ tal que $x \in V \subseteq U$. ▲

Observación 2.3.5. Si β_x es base de entornos de un $x \in X$, en todos los enunciados anteriores (y en muchos que vendrán), donde se decía “para todo $U \in \mathcal{O}(x)$ ” puede decirse “para todo $V \in \beta_x$ ” y obtener las mismas conclusiones. ▲

Ejemplos 2.3.6. 1. Sea (X, τ) un ET y sea $\beta \subseteq \tau$ una base. Entonces, para todo $x \in X$,

$$\mathcal{O}(x) \cap \beta = \{U \in \beta : x \in U\} \quad (2.7)$$

es una base de entornos de x .

2. Sea (X, d) un EM, y pensémoslo como un ET (X, τ_d) . Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}_{>0}$ tal que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Entonces

(a) Para todo $x \in X$, la familia $\{B(x, a_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de entornos de x .

(b) Si $D \subseteq X$ un subconjunto **denso** (i.e., tal que $\overline{D} = X$) luego

$$\beta = \{B(y, a_n) : y \in D \text{ y } n \in \mathbb{N}\} \text{ es una base de } \tau_d.$$

Las pruebas de 1 y de 2 (a) son inmediatas a partir de las definiciones. La de 2 (b) es un poquito más trabajosa: si $x \in U \in \tau_d$, existe una $B(x, \varepsilon) \subseteq U$. Tomemos un $a_n < \frac{\varepsilon}{2}$. Como D es denso, en la bola $B(x, a_n)$ debe haber un $y \in D$. Pero

$$y \in B(x, a_n) \implies d(x, y) < a_n \implies x \in B(y, a_n) \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq U,$$

ya que cualquier $z \in B(y, a_n)$ cumple que $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < 2a_n < \varepsilon$. Ahora se puede aplicar la Prop. 2.3.3 y deducir que β es base de τ_d . ▲

2.4 Clases de ET's

La gracia de la topología es que es tan general que se confunde con la teoría de conjuntos, pero en cualquier ET se puede hacer *algo* de análisis. Sin embargo tanta generalidad hace que pocos resultados interesantes y sofisticados puedan probarse *para todo ET*. Por eso, la teoría se construye definiendo diversas *clases* (o tipos) específicas de ET's que tengan algunas propiedades más restrictivas, en las que se muestra que valen teoremas cada vez más ambiciosos. Un típico teorema topológico tiene un enunciado del siguiente estilo:

Sea (X, τ) un ET de la clase tal y cual. Entonces en X vale una propiedad sofisticada .

Este tipo de construcción teórica a veces suena un poco acomodaticia. Se corre el riesgo de hacer el siguiente procedimiento:

1. Primero uno averigua qué se necesita que cumpla X para que camine la demostración, que uno pensó, de que en X vale la propiedad P .
2. Luego uno define la clase de C de los ET's que cumplen esos prerequisites.
3. Se enuncia un Superteorema: Todo ET de la clase C cumple la propiedad P !!

En realidad, este fue el procedimiento que se fue usando. Pero la teoría quedó bien, porque hay propiedades P que son necesarias e importantes. Las clases C donde ellas valen no se definieron para que camine una prueba concreta, sino que se fueron extendiendo (mejorando las pruebas) hasta llegar a los mínimos prerequisites posibles en X para que valga P . Y tuvieron prioridad las clases C que fueran razonablemente fáciles de detectar en la larga lista de ejemplos importantes.

Luego de muchos años de mezclar propiedades y clases, el proceso decantó en una buena clasificación de los ET's, tal que combinando dos o tres de los ingredientes fijados (clases de espacios) se encuentran hipótesis óptimas para la mayoría de las propiedades P que sirven en la mayoría de las teorías matemáticas donde se usa la topología.

A continuación enumeraremos las clasificaciones que quedaron aceptadas por consenso. A lo largo de todo el texto se verá cómo estas clases se irán combinando para ir obteniendo los distintos teoremas de la teoría.

2.4.1 Numerabilidad

Recordemos que un EM se dice *separable* si tiene un subconjunto denso numerable. En el contexto general de ET's, tenemos varias clases diferentes de numerabilidad, que definiremos a continuación. Para abreviar, si queremos decir que un conjunto D es **numerable**, escribiremos $|D| \leq \aleph_0$. Recordar que $|D|$ es el cardinal de D y $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$.

Definición 2.4.1. Sea (X, τ) un ET, y asumamos que τ está fijada. Diremos que

1. X es **separable** si existe $D \subseteq X$ tal que $|D| \leq \aleph_0$ y $\overline{D} = X$.

2. X es N_1 (o que cumple el **primer axioma de numerabilidad**), si para todo $x \in X$ existe una base β_x de entornos de x tal que $|\beta_x| \leq \aleph_0$.
3. X es N_2 (o que cumple el **segundo axioma de numerabilidad**), si existe una base β de τ tal que $|\beta| \leq \aleph_0$.
4. X es **de Lindeloff**, si para todo cubrimiento abierto $\sigma \subseteq \tau$ de X (i.e., $\bigcup \sigma = X$), existe un subcubrimiento numerable $\sigma_0 \subseteq \sigma$, (i.e., $\bigcup \sigma_0 = X$ y $|\sigma_0| \leq \aleph_0$). ▲

Proposición 2.4.2. Sea (X, τ) un ET. Si X es N_2 , entonces es separable, N_1 y Lindeloff.

Demostración. Sea $\beta = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base de τ (si hay un β finito todo es muy fácil). Usando la Ec. (2.7), es fácil ver que $N_2 \implies N_1$. Para ver la separabilidad, elijamos un $x_n \in U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Se toma $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces D es denso, porque “toca” todo entorno de todo punto de X (usar la Prop. 2.3.3).

Para ver que X es Lindeloff, fijemos $\sigma \subseteq \tau$ un cubrimiento de X . Sea

$$J_\sigma = \{m \in \mathbb{N} : U_m \subseteq V \text{ para algún } V \in \sigma\} \quad \text{y} \quad \beta_\sigma = \{U_m : m \in J_\sigma\} \subseteq \beta.$$

Como σ cubre X y β es una base, podemos ver que $\bigcup \beta_\sigma = \bigcup_{m \in J_\sigma} U_m = X$. Elijamos ahora, para cada $m \in J_\sigma$, un $V_m \in \sigma$ tal que $U_m \subseteq V_m$. Luego la familia $\sigma_0 = \{V_m : m \in J_\sigma\} \subseteq \sigma$ es numerable y cubre X . ■

Ejercicio 2.4.3. Sea (X, τ) un ET y fijemos una base β de τ . Luego para probar que X es Lindeloff se puede asumir que el cubrimiento inicial cumple que $\sigma \subseteq \beta$, o sea trabajar sólo con cubrimientos de abiertos de la base.

Sug: Dado un cubrimiento cualquiera σ , cubrir con los de la base que estén dentro de abiertos de σ (como el $\beta_\sigma \subseteq \beta$ de arriba), y seguir adelante como recién. ▲

Observación 2.4.4. Es falso en general que alguna de las otras 3 condiciones de separabilidad impliquen ser N_2 o cualquier otra. Ello se verá en una serie de ejemplos más adelante (Ejem. 8.1.2). Pero sí valen algunas de esas implicaciones en EM's : ▲

Proposición 2.4.5. Sea (X, d) un EM. Entonces

1. (X, τ_d) es N_1 (i.e. **todo** EM es N_1).
2. (X, τ_d) es N_2 si y sólo si es Lindeloff si y sólo si es separable.

Demostración. Todo EM es N_1 porque, para cada $x \in X$, basta tomar la base de entornos $\beta_x = \{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$. Ya vimos (para ET's generales) que $N_2 \implies$ Lindeloff. Si X es Lindeloff, para cada $n \in \mathbb{N}$ se puede cubrir a X con numerables bolas $B(x_{n,m}, \frac{1}{n})$, $m \in \mathbb{N}$. Tomando $D = \{x_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$, obtenemos un denso numerable para X . Si asumimos que X es separable, podemos ver que es N_2 usando el item 2 (b) del Ejem. 2.3.6. ■

2.4.2 Separación

Sea (X, τ) un ET. Si no se le pide algo específico a τ , puede haber puntos distintos de X que resulten indistinguibles desde el punto de vista topológico. Por ejemplo puede pasar que existan $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, pero $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)$. O que $\mathcal{O}(x) \subseteq \mathcal{O}(y)$. Observar que en tal caso, $x \in \overline{\{y\}}$, por lo que $\{y\}$ no es cerrado. Pedir condiciones para que estas cosas no pasen se llama dar propiedades de **separación** a la topología τ . Estas condiciones están estratificadas en cinco clases estandarizadas, denominadas T_k , con $0 \leq k \leq 4$.

Definición 2.4.6. Sea (X, τ) un ET. Diremos que X es de la clase:

T_0 : Si dados $x, y \in X$ distintos, existe

$$U \in \mathcal{O}(x) \quad \text{tal que} \quad y \notin U \quad \text{o bien} \quad V \in \mathcal{O}(y) \quad \text{tal que} \quad x \notin V .$$

Puede verse que esto equivale a que $x \neq y \implies \mathcal{O}(x) \neq \mathcal{O}(y)$.

T_1 : Si dados $x, y \in X$ distintos, existen $U \in \mathcal{O}(x)$ y $V \in \mathcal{O}(y)$ tales que $x \notin V$ e $y \notin U$. Otra forma de decirlo es que $\bigcap \mathcal{O}(x) = \{x\}$ (o que $\{x\}$ es **cerrado**), para todo $x \in X$.

T_2 : Si dados $x, y \in X$ distintos, existen

$$U \in \mathcal{O}(x) \quad \text{y} \quad V \in \mathcal{O}(y) \quad \text{tales que} \quad U \cap V = \emptyset .$$

Los ET's de clase T_2 son más conocidos como espacios de **Hausdorff**.

T_3 : Si X es T_1 y, para todo $x \in X$ y todo $F \subseteq X$ **cerrado** tales que $x \notin F$, existen

$$U \in \mathcal{O}(x) \quad \text{y} \quad V \in \tau \quad \text{tales que} \quad F \subseteq V \quad \text{y} \quad U \cap V = \emptyset .$$

Los ET's de clase T_3 son también conocidos como espacios **regulares**.

T_4 : Si X es T_1 y, para todo par $F_1, F_2 \subseteq X$ de subconjuntos **cerrados y disjuntos**,

$$\text{existen} \quad U \text{ y } V \in \tau \quad \text{tales que} \quad F_1 \subseteq U, \quad F_2 \subseteq V \quad \text{y} \quad U \cap V = \emptyset .$$

Los ET's de clase T_4 son conocidos como espacios **normales**. ▲

Observación 2.4.7. Sea (X, τ) un ET. Vimos que X es T_1 si y sólo si $\bigcap \mathcal{O}(x) = \{x\}$, para todo $x \in X$. Es claro que esto a su vez equivale a que $\{y\}$ sea cerrado para todo $y \in X$. Entonces los espacios T_1 son aquellos en los que los puntos son cerrados.

Teniendo esto en cuenta, es inmediato verificar que las clases recién definidas son cada vez más restrictivas, en el sentido de que

$$X \text{ es de clase } T_k \implies X \text{ es de clase } T_{k-1}, \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{I}_4 ,$$

o bien que: normal $\implies$ regular $\implies$ Hausdorff $\implies$ puntos cerrados $\implies T_0$. En el capítulo de ejemplos veremos que ninguna de las implicaciones anteriores vale en el sentido inverso, por lo que se justifica darle nombres distintos a las 5 clases (en 8.2.1 se da un ejemplo de que regular $\not\Rightarrow$ normal). Ahorita ya podemos ver que $T_1 \not\Rightarrow$ Hausdorff: ▲

Ejemplo 2.4.8. Sea X un conjunto infinito. Consideremos en X la topología cofinita:

$$\tau_{CF}(X) = \{\emptyset\} \cup \{X \setminus V : V \in \mathcal{P}_F(X)\} = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ es finito}\}.$$

Es fácil ver que $\tau_{CF}(X)$ es una topología. Este ejemplo es un caso bastante patológico, que induce a pensar que los axiomas de la topología pueden ser demasiado débiles si uno no pide condiciones extra. Lo único bueno que tiene es que los puntos de X son cerrados.

Por lo tanto, una topología τ en un conjunto X es de tipo T_1 si y sólo si $\tau_{CF}(X) \subseteq \tau$ (porque en tal caso los finitos serán τ -cerrados, y son todos los $\tau_{CF}(X)$ -cerrados). Sin embargo $(X, \tau_{CF}(X))$ no es un Hausdorff, porque no tiene abiertos disjuntos (no vacíos). ▲

La observación que sigue da versiones equivalentes a la definición de regularidad y normalidad. Todo es cuasi tautológico, pero conviene tenerlo enunciado y aceptado claramente desde el principio, para encarar más cómodos y no enturbiar los argumentos de numerosas demostraciones posteriores (con complementos, clausuras, interiores y más yerbas).

Observación 2.4.9. Sea (X, τ) un ET de calse T_1 . Son equivalentes:

1. X es regular
2. Dados $x \in X$ y un abierto $W \in \mathcal{O}^a(x)$, existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq W$.
3. Dados $x \in X$ y un cerrado F_2 tales que $x \notin F_2$, se verifica que

$$\text{existe un abierto } U \in \tau \text{ tal que } x \in U \text{ pero } F_2 \cap \overline{U} = \emptyset.$$

Análogamente, son equivalentes las condiciones

1. X es normal
2. Dados un cerrado $F \subseteq X$ y un abierto $W \in \tau$ tales que $F \subseteq W$,

$$\text{existe un abierto } U \in \tau \text{ tal que } F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq W.$$
3. Para todo par $F, F_2 \subseteq X$ de subconjuntos cerrados y disjuntos,

$$\text{existe un abierto } U \in \tau \text{ tal que } F \subseteq U \text{ pero } F_2 \cap \overline{U} = \emptyset.$$

Como decíamos antes, las pruebas son casi confusas de tan directas. Demostremos la segunda tanda para dar una idea. Si X es normal y tenemos $F \subseteq W$ como en 2, se toma el cerrado $F_2 = X \setminus W$ que no toca a F , y se los separa con abiertos disjuntos $U \supseteq F$ y $U_2 \supseteq F_2$. Ahora, como $U \subseteq X \setminus U_2$ que es cerrado, podemos mostrar que $F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq X \setminus U_2 \subseteq X \setminus F_2 = W$.

Asumamos 2. Para probar 3, llamemos $W = X \setminus F_2 \supseteq F$. El abierto U que provee 2 cumple que $F \subseteq U$ y que $\overline{U} \subseteq W$, por lo que $F_2 \cap \overline{U} = \emptyset$.

Asumamos ahora 3, y tomemos F y F_2 dos cerrados disjuntos. El abierto U que provee 3 cumple que $F \subseteq U$ y que el abierto $U_2 = X \setminus \overline{U}$ que contiene a F_2 es disjunto con U . ▲

En general, la normalidad es mucho más restrictiva (y más útil) que la regularidad. Pero como veremos a continuación, un poco de numerabilidad empata las cosas:

Proposición 2.4.10. Sea (X, τ) un ET que es regular y Lindeloff. Entonces X es normal.

Demostración. Sean E y F dos cerrados disjuntos. Por la regularidad y la Obs. 2.4.9, para cada $x \in E$ existe un $V_x \in \mathcal{O}^a(x)$ tal que $\overline{V_x} \cap F = \emptyset$. Cubrimos a E con esos V_x y completamos a un cubrimiento de X agregando $V_E = X \setminus E$. Como X es Lindeloff, podemos concluir que existen numerables $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$ tales que, llamando $V_n = V_{x_n}$, se cumple que $E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ y $\overline{V_n} \cap F = \emptyset$ ($n \in \mathbb{N}$). Análogamente se construyen abiertos W_m tales que

$$\overline{W_m} \cap E = \emptyset \text{ para todo } m \in \mathbb{N} \text{ y } F \subseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} W_m. \quad (2.8)$$

Usando que ahora son numerables (por la L), se los puede “disjuntar” entre sí haciendo

$$U_n = V_n \setminus \bigcup_{m \leq n} \overline{W_m} \text{ y } Z_n = W_n \setminus \bigcup_{m \leq n} \overline{V_m}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Estos cosos quedan abiertos porque una unión **finita** de cerrados queda cerrada. Y son disjuntos: Si $m \leq n$, tenemos que $U_n \subseteq X \setminus W_m$ mientras que $Z_m \subseteq W_m$. Una cuenta similar para $n \leq m$ muestra que $U_n \cap Z_m = \emptyset$ para todo par $n, m \in \mathbb{N}$. Luego los abiertos

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \text{ y } Z = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} Z_m \text{ cumplen que } U \cap Z = \emptyset, \text{ } E \subseteq U \text{ y } F \subseteq Z.$$

Las inclusiones del final salen porque a los abiertos que cubrían E y F sólo se les fue sacando cosas que no los cortan. Por ejemplo, dado $x \in F$, la Ec. (2.8) asegura que debe existir un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in W_n$. Pero entonces $x \in Z_n$ para ese mismo n , (porque $x \notin \overline{V_m}$ para ningún $m \in \mathbb{N}$). Por todo lo visto, concluimos que X es normal. ■

La clasificación no termina acá. Falta definir varias clases importantes de ET's (por ejemplo compactos, conexos, completamente regulares o de Tychonoff, etc), pero debemos posponerlo porque nos faltan ver y estudiar las nociones involucradas en sus definiciones, o porque son clases que ameritan capítulo propio, y se las definirá entonces.

Las clases de separación recién definidas carecen de interés entre los EM's porque, como veremos a continuación, son todos normales. La prueba de esto pasa por una propiedad que parece aún más fuerte que la normalidad, pero que a la larga (y con notable esfuerzo) veremos que equivale a ella para cualquier ET. Esta propiedad involucra el uso de funciones continuas, que asumimos conocidas en el contexto de espacios métricos. En caso de esto no ocurriera, se sugiere chusmear la Sección 2.5.

Lema 2.4.11. Sea (X, d) un EM. Dado un $A \subseteq X$, la función $d_A : X \rightarrow R_{\geq 0}$ dada por

$$d_A(x) = d(x, A) = \inf \{d(x, z) : z \in A\}, \text{ para cada } x \in X,$$

es **continua**. Además, se tiene que $\overline{A} = \{x \in X : d_A(x) = 0\}$. O sea que ser punto límite se describe como “distar cero” de A .

Demostración. Sean $x, y \in X$. Para cada $z \in A$ tenemos que

$$d(x, A) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \implies d_A(x) \leq d(x, y) + \inf_{z \in A} d(y, z) = d(x, y) + d_A(y) .$$

Cambiando roles, también sale que $d_A(y) \leq d(x, y) + d_A(x)$. Por lo tanto nos queda que

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in X ,$$

con lo que d_A es recontinua. Observar que, dado $x \in X$, el hecho de que $d_A(x) = 0$ equivale a que en toda bola $B(x, \varepsilon)$ haya puntos de A , o sea que $x \in \overline{A}$. ■

Proposición 2.4.12. Todo espacio métrico (X, d) es normal. Más aún, dados F_1 y $F_2 \subseteq X$ dos cerrados disjuntos, existe una función **continua**

$$f : X \rightarrow [0, 1] \subseteq \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad f|_{F_1} \equiv 0 \quad \text{y} \quad f|_{F_2} \equiv 1 .$$

Demostración. Sean F_1 y $F_2 \subseteq X$ dos cerrados disjuntos. Definamos la función **continua**

$$f : X \rightarrow [0, 1] \quad \text{dada por} \quad f(x) = \frac{d(x, F_1)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)} \quad \text{para} \quad x \in X .$$

Observar que el denominador no puede anularse, puesto que

$$d(x, F_i) = 0 \implies x \in F_i \quad (\text{para } i = 1, 2) \quad \text{y que} \quad F_1 \cap F_2 = \emptyset .$$

Ahora bien, notar que si $x \in F_1$ entonces $f(x) = 0$, y que $f(y) = 1$ para todo $y \in F_2$. Para deducir la normalidad, basta tomar los conjuntos abiertos y disjuntos

$$U = \{x \in X : f(x) < 1/3\} \supseteq F_1 \quad \text{y} \quad V = \{x \in X : f(x) > 2/3\} \supseteq F_2 ,$$

que separan a F_1 y a F_2 . ■

Ejercicio 2.4.13. Sea (X, τ) un ET de clase T_1 , y sea $A \subseteq X$. Probar que

$$x \in A' \iff V \cap A \quad \text{es infinito} , \quad \text{para todo} \quad V \in \mathcal{O}(x) .$$

Mostrar también que lo anterior puede ser falso si X no era T_1 . ▲

2.4.3 Topología inducida y herencias

Sea (X, τ) un ET y fijemos un subconjunto $Y \subseteq X$. Hay una manera natural de dotar a Y de una topología a partir de τ : Consideremos el sistema

$$\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\} = \{A \subseteq Y : \text{existe } U \in \tau \text{ tal que } A = U \cap Y\} \subseteq \mathcal{P}(Y) .$$

Usando las propiedades básicas de conjuntos, se verifica sin dificultades que τ_Y es una topología en Y . Se la llamará la **topología inducida** por τ a Y . Enumeraremos a continuación varias propiedades del ET (Y, τ_Y) cuyas demostraciones son elementales:

Proposición 2.4.14. Sea $(Y, \tau_Y) \subseteq (X, \tau)$ como recién. Dados $y \in Y$ y $B \subseteq Y$, se tiene que

1. El conjunto $\mathcal{O}_Y(y)$ de τ_Y -entornos de y se calcula como $\mathcal{O}_Y(y) = \{V \cap Y : V \in \mathcal{O}(y)\}$. Análogamente se puede hacer con los entornos abiertos de y en Y .
2. Si β es una base de τ , entonces $\beta_Y = \{U \cap Y : U \in \beta\}$ es una base de τ_Y . Lo mismo puede hacerse con sub-bases de τ y con bases de entornos de cada punto de Y .
3. B es τ_Y -cerrado si y sólo si existe un conjunto cerrado $F \subseteq X$ tal que $B = Y \cap F$. Usar que $(X \setminus U) \cap Y = Y \setminus (Y \cap U)$.
4. La clausura $\overline{B}^Y$ de B en Y es igual a $Y \cap \overline{B}^X$. ■

Una clase C de ET's se llama **hereditaria**, si para todo espacio X de clase C , se tiene que cualquier subespacio $Y \subseteq X$ sigue siendo C con la topología inducida. Veremos a continuación cuales de las clases antes definidas son o no hereditarias.

Proposición 2.4.15. Las siguientes clases de ET's son hereditarias:

$$N_1, N_2, T_0, T_1, T_2 \text{ y } T_3.$$

Las clases de espacios Lindeloff, separables y normales **no** son hereditarias.

Demostración. Las clases N_2 y N_1 dependen de la existencia de bases y de bases de entornos. Las clases T_0 , T_1 y T_2 dependen de la existencia de entornos de puntos con ciertas propiedades. Usando eso es fácil ver que todas ellas son hereditarias, vía la Prop. 2.4.14.

El hecho de que las tres clases mencionadas no sean hereditarias se muestra en los ejemplos (ver 8.2.1 para las tres). Solo queda probar el caso de la regularidad. Ahí va:

Sea (X, τ) un ET y sea $Y \subseteq X$. Dados un Y -cerrado $B \subseteq Y$ y $z \in Y \setminus B$, por la Prop. 2.4.14 existe un cerrado $F \subseteq X$ tal que $B = Y \cap F$. Pero

$$z \notin B = Y \cap F \xrightarrow{z \in Y} z \notin F.$$

Como X es regular, existen dos abiertos disjuntos $U, V \in \tau$ tales que $z \in U$ y $F \subseteq V$. Basta entonces tomar $U_0 = U \cap Y$ y $V_0 = V \cap Y \in \tau_Y$ y estamos hechos (ser T_1 también se heredaba). Este argumento no camina para la normalidad, porque si tenemos dos conjuntos $A, B \subseteq Y$ que son Y -cerrados y disjuntos, nadie nos garantiza que $\overline{A}^X \cap \overline{B}^X = \emptyset$, por lo que no se los puede separar “arriba” (como hicimos con el $z \notin F$). ■

2.5 Continuidad básica

Definición 2.5.1. Sean (X, τ) e (Y, σ) dos ET's, y sea $f : X \rightarrow Y$ una función.

1. Diremos que f es **continua** si

$$f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\} \in \tau \quad \text{para todo } V \in \sigma .$$

Es decir, si la contraimagen por f de todo abierto de Y , queda abierta en X .

2. Diremos que f es continua **en un punto** $x \in X$ si

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{O}_\tau(x) \quad \text{para todo } A \in \mathcal{O}_\sigma(f(x)) .$$

3. Denotaremos por $C((X, \tau), (Y, \sigma)) = C(X, Y)$ al conjunto de todas las funciones continuas $g : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$. ▲

Proposición 2.5.2. Una función $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ es continua si y sólo si f es continua en x para todo $x \in X$.

Demostración. Si f es continua, sean $x \in X$ y $A \in \mathcal{O}_\sigma(f(x))$. Luego existe un

$$V \in \sigma \text{ tal que } f(x) \in V \subseteq A \implies f^{-1}(V) \in \tau \text{ y } x \in f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(A) .$$

Luego $f^{-1}(A) \in \mathcal{O}_\tau(x)$. Si ahora asumimos que f es continua en todos los puntos de X y tomamos un abierto $V \in \sigma$, para cada $x \in f^{-1}(V)$ se tiene que $V \in \mathcal{O}_\sigma(f(x))$. Por la continuidad en x , vemos que $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_\tau(x)$. Esto muestra que $f^{-1}(V)$ es entorno de todos sus elementos. Y por la Prop. 2.1.6, deducimos que $f^{-1}(V) \in \tau$. ■

Observación 2.5.3. Sea $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ una función. Luego

1. Dado un $x \in X$, se tiene que f es continua en x si y sólo si

$$\text{Para cada } A \in \mathcal{O}_\sigma(f(x)) \text{ existe un } B \in \mathcal{O}_\tau(x) \text{ tal que } f(B) \subseteq A . \quad (2.9)$$

De hecho, alcanza con que se cumpla (2.9) para los A en una base de entornos de $f(x)$.

2. La f es continua (en todo X) si y sólo si $f^{-1}(F)$ es τ -cerrado para todo σ -cerrado $F \subseteq Y$. Esto se debe a que ser cerrado equivale a tener complemento abierto, y a que la operación $A \mapsto f^{-1}(A)$ tiene la siguiente propiedad:

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A) \quad \text{para todo } A \in \mathcal{P}(Y) , \quad (2.10)$$

cuya verificación es inmediata.

3. Como el operador $A \mapsto f^{-1}(A)$ respeta también uniones e intersecciones arbitrarias, para verificar que f es continua, basta testar que $f^{-1}(U) \in \tau$ para los elementos U de una **base** o incluso, vía la Ec. (2.6), una **sub-base** de σ . ▲

Observación 2.5.4. Sean X e Y dos EM's y sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Entonces f es continua en un $x \in X$ si y sólo si vale la fórmula ε, δ de siempre:

$$\text{para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe un } \delta > 0 \text{ tal que } d_X(z, x) < \delta \implies d_Y(f(z), f(x)) < \varepsilon, \quad (2.11)$$

donde estamos hablando de la continuidad relativa a las topologías inducidas por las métricas. En efecto, basta aplicar la Ec. (2.9), más el hecho de que las bolas centradas en ellos son bases de entornos de ambos puntos (x y $f(x)$). ▲

A continuación juntaremos en un enunciado numerosas propiedades de las funciones continuas que, si bien parecen muy elementales, conviene testear cuidadosamente si uno las postula en el contexto hipergeneral de ET's.

Proposición 2.5.5 (Miscelánea). Sea (X, τ) un ET. Se tienen las siguientes propiedades:

1. Toda función $f : X \rightarrow (Y, \sigma)$ (otro ET) que sea constante es continua.
2. La composición de dos funciones continuas es continua.
3. Sea $A \subseteq X$, pensado con la topología inducida. La función inclusión $\mathcal{J}_A : A \rightarrow X$ dada por $\mathcal{J}_A(x) = x$ ($x \in A$) es continua.
4. Si $f : X \rightarrow Y$ es continua y $A \subseteq X$, entonces la restricción $f|_A = f \circ \mathcal{J}_A : A \rightarrow Y$ es continua. Si $f(X) \subseteq Z \subseteq Y$, entonces también la correstricción $f|_Z^Z : X \rightarrow Z$ es continua (en ambos casos con las topologías inducidas).
5. Dada una $f : X \rightarrow Y$ y un cubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ de X (i.e., $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{A}} U_\alpha = X$) por conjuntos **abiertos** tales que $f|_{U_\alpha}$ es continua para todo $\alpha \in \mathbb{A}$, entonces f es continua.
6. Sean $f, g : (X, \tau) \rightarrow A \subseteq \mathbb{C}$ dos funciones continuas. Entonces
 - (a) La función $(f, g) : X \rightarrow \mathbb{C}^2$ dada por $(f, g)(x) = (f(x), g(x))$ es continua.
 - (b) Las funciones $x \mapsto f(x) + g(x)$ y $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ son continuas.
 - (c) Si $f(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, entonces $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ es continua.
 - (d) Si $A \subseteq \mathbb{R}$, las funciones $f \wedge g = \min\{f, g\}$ y $f \vee g = \max\{f, g\}$ son continuas.

Demostración. Los ítems 1, 2, 3 y 4 se deducen directamente de las definiciones de continuidad y de la topología inducida. Observar que, dado un subconjunto $M \subseteq Y$,

$$(f|_A)^{-1}(M) = \mathcal{J}_A^{-1}(f^{-1}(M)) = A \cap f^{-1}(M)$$

y que, si $f(X) \subseteq Z$, entonces $f^{-1}(M) = f^{-1}(M \cap Z)$.

5. Sea $V \in \sigma$. Como cada U_α es abierto, sus abiertos relativos están en τ . Luego, como para todo $\alpha \in \mathbb{A}$ sabemos que $f|_{U_\alpha}$ es continua, se tiene que

$$\left(f|_{U_\alpha}\right)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap U_\alpha \quad \text{es abierto en } U_\alpha \quad \implies \quad f^{-1}(V) \cap U_\alpha \in \tau ,$$

para todo $\alpha \in \mathbb{A}$. Pero del hecho de que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ sea un cubrimiento, podemos deducir que $f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{A}} f^{-1}(V) \cap U_\alpha \in \tau$.

6. La parte (a) sale usando que $(f, g)^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$, para cualquier par de abiertos $U, V \subseteq \mathbb{C}$. La parte (b) porque las funciones de $\mathbb{C}^2$ a $\mathbb{C}$ dadas por $(s, t) \mapsto s + t$ y $(s, t) \mapsto s \cdot t$ son continuas (componiendo). La (c) porque la función $t \mapsto t^{-1}$ es continua en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. La (d) porque $\mathbb{R}^2 \ni (s, t) \mapsto \min\{s, t\}$ es continua. Y lo mismo con el máximo. Los detalles quedan como ejercicio. ■

Muchas veces uno tiene que definir una función en distintas partes de un espacio X , y después necesita testear la continuidad de la f “pegoteada”. Por ejemplo, en los ítems 4 y 5 de la Prop. 2.5.5 vimos que si me dan una $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ y una familia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ de **abiertos** de τ que cubren a X , entonces se tiene que

$$f \in C\left((X, \tau), (Y, \sigma)\right) \iff f|_{U_\alpha} \text{ es continua , para todo } \alpha \in \mathbb{A} .$$

Y no importa cuán grande sea el conjunto $\mathbb{A}$. Algo parecido vale para cubrimientos con cerrados, aunque ahí hace falta restringirse al caso de finitos:

Proposición 2.5.6 (Lema del pegoteo). Sea $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$. Sean F_1 y F_2 dos **cerrados** en X tales que $F_1 \cup F_2 = X$. Luego se tiene que

$$f|_{F_1} \in C(F_1, Y) \quad \text{y} \quad f|_{F_2} \in C(F_2, Y) \implies f \in C(X, Y) .$$

Otra manera de decir lo mismo que suele ser más útil es: Si tenemos dos funciones continuas $g \in C(F_1, Y)$ y $h \in C(F_2, Y)$ tales que $g|_{F_1 \cap F_2} = h|_{F_1 \cap F_2}$, entonces la función

$$f : X \rightarrow Y \quad \text{dada por} \quad f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in F_1 \\ h(x) & \text{si } x \in F_2 \end{cases} \quad \text{es continua} .$$

Demostración. Con respecto al segundo enunciado, el hecho de que g y h coincidan en $F_1 \cap F_2$ hace que f esté bien definida, y uno pueda testear que es continua usando el primer enunciado. Sea $A \subseteq Y$ un conjunto cerrado. Luego

$$f^{-1}(A) = (f^{-1}(A) \cap F_1) \cup (f^{-1}(A) \cap F_2) = [f|_{F_1}]^{-1}(A) \cup [f|_{F_2}]^{-1}(A) .$$

Por la continuidad de las restricciones, ambos conjuntos de la derecha son cerrados relativos, y por ende cerrados a secas en X (acá se usa que F_1 y F_2 son cerrados). Luego $f^{-1}(A)$ es cerrado. Por la Obs. 2.5.3, deducimos que $f \in C(X, Y)$. ■

2.6 Ejercicios

Ejercicio 2.6.1. Sea (X, τ) un ET de clase T_1 , y sea $A \subseteq X$. Probar que

$$x \in A' \iff V \cap A \text{ es infinito, para todo } V \in \mathcal{O}(x).$$

Mostrar también que lo anterior puede ser falso si X no era T_1 .

Ejercicio 2.6.2. Sean X un conjunto, y tomemos una función $C : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, que la va a jugar de operador clausura. Asumamos que C cumple que, dados $A, B \in \mathcal{P}(X)$,

1. $C(\emptyset) = \emptyset$.
2. $A \subseteq C(A)$.
3. El operador C es idempotente, o sea que $C(C(A)) = C(A)$.
4. $C(A \cup B) = C(A) \cup C(B)$.

Definamos que un $F \subseteq X$ es C -cerrado si $F = C(F)$ y que un $U \subseteq X$ es C -abierto si $X \setminus U$ es C -cerrado. Probar que en tal caso:

- (a) La familia $\tau = \{U \subseteq X : U \text{ es } C\text{-abierto}\}$ es una topología en X .
- (b) Para todo $A \in \mathcal{P}(X)$ se tiene que $\overline{A}^\tau = C(A)$. ▲

Ejercicio 2.6.3. Sea (X, τ) un ET. Mostrar que:

1. Las siguientes condiciones son equivalentes:
 - (a) X es T_1 .
 - (b) Los “puntos” de X son cerrados.
 - (c) Para todo $x \in X$ vale que $\bigcap \mathcal{O}(x) = \{x\}$.
2. Las siguientes condiciones son equivalentes:
 - (a) X es T_2 .
 - (b) Para todo $x \in X$ vale que $\bigcap_{U \in \mathcal{O}(x)} \overline{U} = \{x\}$.
 - (c) Si $x \neq y$, entonces existe $U \in \mathcal{O}(x)$ tal que $y \notin \overline{U}$.

3. Mostrar que $N_2 \Rightarrow N_1$ y que $N_2 \Rightarrow \text{Lindelöf}$.

Ejercicio 2.6.4. Sea (X, τ) un ET de clase T_1 . Probar que son equivalentes:

1. X es regular
2. Dados $x \in X$ y un abierto $W \in \mathcal{O}^a(x)$, existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq W$.
3. Dados $x \in X$ y un cerrado F_2 tales que $x \notin F_2$, se verifica que

$$\text{existe un abierto } U \in \tau \text{ tal que } x \in U \text{ pero } F_2 \cap \overline{U} = \emptyset.$$

Análogamente, probar que son equivalentes las condiciones

1. X es normal

2. Dados un cerrado $F \subseteq X$ y un abierto $W \in \tau$ tales que $F \subseteq W$,

existe un abierto $U \in \tau$ tal que $F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq W$.

3. Para todo par $F, F_2 \subseteq X$ de subconjuntos cerrados y disjuntos,

existe un abierto $U \in \tau$ tal que $F \subseteq U$ pero $F_2 \cap \overline{U} = \emptyset$.

Ejercicio 2.6.5. Sea $(\Sigma, \leq)$ un conjunto ordenado. A partir del orden podemos definir dos topologías:

1. (Top. de los conjuntos hereditarios) $U \subseteq \Sigma$ es abierto si $x \leq y$, $x \in U$ implica $y \in U$. Verificar que esta es una topología y que $\mathbf{B}_1 = \{[p] : p \in \Sigma\}$ es una base de entornos ($[p] = \{q \in \Sigma : p \leq q\}$).
2. (Top. del orden) Definimos una base para esta topología :

$$\mathbf{B}_2 = \{(a, b) : a < b \in \Sigma\} \cup \{[\min \Sigma, b) : b \in \Sigma\} \cup \{(a, \max \Sigma] : a \in \Sigma\}$$

en el caso en que existan máximo o mínimo. Verificar que se trata de una base. Comparar esta top. con la anterior. Verificar: la topología del orden en X es la mínima topología en la cual el orden es continuo. Esto es, si $a, b \in X$ y $a < b$ entonces existen entornos U de a y V de b tales que: $x \in U, y \in V \Rightarrow x < y$. (Cuál es la topología del orden en $\mathbb{R}$?)

Ejercicio 2.6.6. Sea (X, τ) un ET. Consideremos las siguientes propiedades:

- (a) X es N_2 .
- (b) X es separable.
- (c) Todo subespacio discreto de X es a lo sumo numerable.
- (d) Toda familia **disjunta** de abiertos es numerable.
- (e) X es de Lindelöf.

Demostrar que valen las implicaciones: $a \Rightarrow b$, $a \Rightarrow c$, $a \Rightarrow d$, $a \Rightarrow e$, $b \Rightarrow d$. Probar asimismo que, si X es métrico, entonces $b \Rightarrow a$, $d \Rightarrow a$ y $e \Rightarrow b$ (y por lo tanto, en tales espacios, las propiedades son equivalentes).

Ejercicio 2.6.7. Sea (X, τ) un ET que es N_2 y sea $\mathcal{B}$ una base de τ . Probar que existe una subfamilia **numerable** $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ que sigue siendo base de τ .

Ejercicio 2.6.8. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación entre espacios topológicos. Probar que son equivalentes:

1. La f es continua
2. Para cualquier $A \subseteq X$ se cumple que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
3. Para todo cerrado $F \subseteq Y$ vale que $f^{-1}(F)$ es cerrado en X .

Ejercicio 2.6.9. Sea (X, τ) un ET. En el producto $X \times X$ consideramos la topología $\tau \times \tau$ generada por la base $\{U \times V : U, V \in \tau\}$. Probar que

1. X es $T_2 \iff$ el conjunto diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ es un cerrado en $X \times X$. Asumiendo que X es T_2 , deducir los siguientes hechos:
2. Dadas $f, g : X \rightarrow Y$ ambas continuas, se tiene que $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es un cerrado en X .
3. Si $D \subseteq X$ es denso y $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.
4. Si Y es T_2 entonces el gráfico $\rho(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ es cerrado en $X \times Y$.

Ejercicio 2.6.10. Sea (X, τ) un ET regular y Lindelöf. Probar que X es normal.

Capítulo 3

Conexos

3.1 Definiciones y caracterizaciones

Definición 3.1.1. Sea (X, τ) un ET.

1. Un subconjunto $U \subseteq X$ es **clopen** si $U \in \tau$ y también $V = X \setminus U \in \tau$ (en castellano podría ser “cerrierto” o “abirrado”, o ya que estamos “beodo”).
2. Decimos que X es **conexo** si los únicos clopen que tiene son $\emptyset$ y X .
3. X es **disconexo** en caso contrario (si tiene algún clopen no trivial). ▲

La mayoría de ejemplos interesantes donde se plantea la conexidad es en el caso de subespacios Y de un ET (X, τ) ambiente, pensando a Y con la inducida τ_Y . Ahí conviene poner una notación ad hoc:

Definición 3.1.2. Sea (X, τ) un ET y sea $Y \subseteq X$. Una **X -separación fuerte** de Y es un par (U, V) de subconjuntos **abiertos** de X tal que

$$Y \subseteq U \cup V, \quad U \cap V \cap Y = \emptyset \quad \text{pero} \quad U \cap Y \neq \emptyset \neq V \cap Y. \quad (3.1)$$

Diremos que (U, V) es una X -separación si se cumplen solamente las dos condiciones de la izquierda en (3.1) (se permite que alguna de las dos intersecciones con Y dé vacía). ▲

Observación 3.1.3. Sea (X, τ) un ET y sea $Y \subseteq X$. Luego tenemos que

$$Y \text{ es desconexo si y sólo si existe una } X\text{-separación fuerte } (U, V) \text{ de } Y, \quad (3.2)$$

porque en tal caso $U \cap Y$ queda clopen y propio (en esto se usa la fortaleza) en (Y, τ_Y) . La recíproca sale fácil. Pero más útil para hacer las cuentas es la siguiente formulación: ▲

Proposición 3.1.4. Sea (X, τ) un ET y sea $Y \subseteq X$. Luego son equivalentes:

1. Y es conexo
2. Para toda X -separación (U, V) de Y , tiene que pasar que $Y \subseteq U$ o bien $Y \subseteq V$.

Demostración. Sale usando la Ec. (3.2) y el hecho de que, dada cualquier X -separación (U, V) de Y , el negar $U \cap Y \neq \emptyset \neq V \cap Y$ equivale a decir que $Y \subseteq U$ o bien $Y \subseteq V$. ■

Teorema 3.1.5. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Luego f manda conexos en conexos.

Demostración. Basta observar que si $A \subseteq X$ y (U, V) es una Y -separación fuerte de $f(A)$, entonces $(f^{-1}(U), f^{-1}(V))$ es una X -separación fuerte de A . ■

Teorema 3.1.6. Sea (X, τ) un ET, y tomemos una familia $\{A_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ de subconjuntos **conexos** de X . Si asumimos que $\bigcap_{i \in \mathbb{I}} A_i \neq \emptyset$, entonces $A = \bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i$ es **conexo**.

Demostración. Es claro que toda X -separación (U, V) de A también lo es de cada A_i . Como éstos son conexos, tienen que caer dentro de U o de V . Pero como $U \cap V \cap A = \emptyset$ y todos los A_i se cortan, todos ellos tienen que caer del mismo lado. Por ello (Prop. 3.1.4) no hay separaciones fuertes de A , que resulta conexo. ■

Teorema 3.1.7. Sea (X, τ) un ET. Si $A \subseteq X$ es conexo, entonces todo conjunto B tal que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ es también conexo. En particular podemos asegurar que la clausura de un conexo es conexa.

Demostración. Dada una X -separación (U, V) de B , y por ende de A , podemos suponer que $A \subseteq U$. Si hubiera un $x \in B \cap V$, como $x \in \overline{A}$ y $V \in \mathcal{O}^a(x)$, debería suceder que $A \cap V \neq \emptyset$, lo que no vale, porque $A \cap V = A \cap U \cap V = \emptyset$. Así que $B \subseteq U$ y es conexo (Prop. 3.1.4). ■

3.2 Arcoconexos

Es bien conocido que los únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ son los intervalos (o sea que en $\mathbb{R}$ conexo = convexo). Como este hecho es esencial para la noción de arcoconexión, daremos una prueba de ello, basándonos en el axioma del supremo para $\mathbb{R}$ (que dice que todo $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado superiormente tiene un supremo). Recordemos que un $A \subseteq \mathbb{R}$ es convexo si dados $a, b \in A$ (pongamos que $a < b$), entonces todo el intervalo $[a, b] \subseteq A$.

Teorema 3.2.1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ (con la topología usual). Luego

$$A \text{ es conexo} \iff A \text{ es convexo}.$$

Demostración. La implicación $\implies$ es clara, porque si a A le falta un puntito de $[a, b]$ separamos todo con dos semirrectas abiertas. La gracia es la otra. Para probarla basta ver

que si $a < b$, entonces $[a, b]$ es conexo (fijando $a \in A$ y tirando intervalos para cada lado hasta cubrir A). Sea (U, V) una $\mathbb{R}$ -separación de $[a, b]$. Asumamos que $a \in U$. Llamemos

$$t = \sup \{x \in [a, b] : [a, x] \subseteq U\} .$$

Es claro que $a < t \leq b$ y que $[a, t] \subseteq U$. Observar que, como V es abierto y $[a, b] \cap U \cap V = \emptyset$, podemos deducir que $t \notin V$ y por lo tanto $t \in U$. Pero si $t < b$, el hecho de que U sea abierto no permitiría que t sea el supremo del conjunto de arriba (porque $[a, t + \varepsilon] \subseteq U \cap [a, b]$ para cierto $\varepsilon > 0$). Así que $t = b$, por lo que $[a, b] \subseteq U$. ■

Corolario 3.2.2. Sea (X, τ) un ET. Dada una función continua $\gamma : [a, b] \rightarrow X$, la curva $\Gamma = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\} \subseteq X$ es conexa.

Demostración. Usar los Teoremas 3.1.5 y 3.2.1. ■

Corolario 3.2.3 (Teorema del valor medio). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Luego f toma todos los valores posibles entre $f(a)$ y $f(b)$.

Demostración. Observar que $f([a, b])$ es conexo en $\mathbb{R}$, y por ello convexo. ■

Ejercicio 3.2.4. Generalizar el Corolario anterior al caso en que el dominio de la f es cualquier espacio conexo X , y uno elige dos puntos cualesquiera de X . ▲

Definición 3.2.5. Sea (X, τ) un ET. Diremos que X es **arcoconexo** (se abrevia ar-C) si para todo par de puntos $x, y \in X$, existe una curva continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ que “empiece” en x (i.e. $\gamma(0) = x$) y “termine” en y (i.e. $\gamma(1) = y$). ▲

Observación 3.2.6. Sea (X, τ) un ET. Se tienen las siguientes propiedades:

1. Si X es ar-C, es en particular conexo.
2. Vale el Teo. 3.1.6 para ar-C's: Dada una familia $\{A_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ de subconjuntos ar-C's de X , si asumimos que $\bigcap_{i \in \mathbb{I}} A_i \neq \emptyset$, entonces $A = \bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i$ es ar-C.
3. No vale el Teo. 3.1.7 para arcoconexos: Es **falso** que $A \subseteq X$ ar-C $\implies \overline{A}$ ar-C.

Las pruebas de los items 1 y 2 salen sin mucha dificultad, y se dejan como ejercicio. Hay que hacer un dibujo psicodélico de curvas que salen de un punto hacia todos los otros. Observar que si mostramos un ejemplo para confirmar el item 3, tendremos de paso un conjunto conexo que no es ar-C (el $\overline{A}$ en cuestión es conexo, por serlo A).

El conjunto en cuestión, que vive en $\mathbb{R}^2$, es la vivorita

$$A = \left\{ \left(t, \sin \frac{1}{t} \right) : t \in (0, 1] \right\} .$$

Su clausura consiste en agregarle el segmento verical $B = \{(0, s) : s \in [-1, 1]\}$. La verificación de que A cumple todo lo pedido es bastante directa. Veremos solamente la prueba de que que $\overline{A} = A \cup B$ no es ar-C:

Supongamos que hubiera una curva continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \overline{A}$ con $\gamma(0) \in B$ y $\gamma(1) \in A$. Como B es cerrado, también lo es $\gamma^{-1}(B)$. Luego existe $c = \max\{t \in [a, b] : \gamma(t) \in B\} < 1$. Quedémonos con la curva empezando en c , y reparametricemos $\alpha : [0, 1] \rightarrow \overline{A}$ tal que $\alpha(0) \in B$, pero $\alpha(t) = (x(t), y(t)) \in A$, por lo que $y(t) = \sin \frac{1}{x(t)}$, para todo $t > 0$.

Obviamente α sigue siendo continua. Sin embargo, vamos a exhibir una sucesión $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ tal que $y(t_n) = (-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para ello observemos que $x(t)$ es una función continua, que sólo vale 0 en $t = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, elijamos un $u_n \in (0, x(\frac{1}{n}))$ tal que $\sin \frac{1}{u_n} = (-1)^n$. Luego, como $x(0) = 0$, aplicando el teorema del valor medio (Cor. 3.2.3), podemos obtener un $t_n \in (0, \frac{1}{n})$ tal que $x(t_n) = u_n$. Esa era la sucesión anunciada, que dice que la curva γ (o α , que es lo mismo) no puede existir. ▲

3.3 Componentes

Definición 3.3.1. Sea (X, τ) un ET.

1. Definimos en X las siguientes relaciones de equivalencia: Sean $x, y \in X$.

- (a) Decimos que $x \overset{con}{\sim} y$ si existe un conexo $Y \subseteq X$ tal que $x, y \in Y$.
- (b) Decimos que $x \overset{arc}{\sim} y$ si existe una curva continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ que va de x a y .

El hecho de que ambas lo sean es un ejercicio fácil que dejamos al lector.

2. Las componentes conexas (resp. arcoconexas) de X son las clases de equivalencia de la relación $\overset{con}{\sim}$ (resp. $\overset{arc}{\sim}$). ▲

Como las relaciones mencionadas son de equivalencia, sus componentes forman sendas particiones de X (o sea que las componentes son disjuntas 2 a 2 y cubren a X). La gracia es que estas componentes son lo que uno espera:

Proposición 3.3.2. Sea (X, τ) un ET. Se tienen las siguientes propiedades:

- 1. Cada componenete conexa (resp. arcoconexa) de X es un subconjunto conexo (resp. arcoconexo) de X .
- 2. Si $Y \subseteq X$ es conexo (resp. arcoconexo), entonces existe una componente conexa (resp. arcoconexa) C de X tal que $Y \subseteq C$.

Demostración. Las pruebas de los dos casos son parecidas. Haremos solo el caso “no arco”. Si Y es conexo, todo par de elementos $x, y \in Y$ cumplen que $x \overset{con}{\sim} y$ (por la definición, vía el mismo conjunto Y). Luego, deben estar todos en la misma clase - componente.

Fijemos una componente C y un elemento $x \in C$. Dado cualquier otro $y \in C$, como $x \overset{con}{\sim} y$, existe un conjunto conexo $A_y \subseteq X$ tal que $x, y \in A_y$. Por lo que vimos recién, sabemos que $A_y \subseteq C$. El hecho de que C sea conexa se deduce ahora de que $C = \bigcup_{y \in C} A_y$. Recordemos que todos los A_y se cortan en $\{x\}$. ■

Observar que el resultado anterior dice que las componentes conexas están a su vez particionadas por las componentes arcoconexas que tienen adentro. Por ejemplo, en la vivorita clausurada $\overline{A} = A \cup B$ de la Obs. 3.2.6, hay una sola componente conexa (porque el conjunto total es conexo) que se divide en las dos componentes arcoconexas A y B .

3.4 Espacios localmente conexos

Definición 3.4.1. Sea (X, τ) un ET y sea $x \in X$.

1. Decimos que X es **localmente conexo** en x si existe una base de entornos de x formada por abiertos conexos. En otras palabras, si para todo $V \in \mathcal{O}(x)$ existe un abierto conexo U tal que $x \in U \subseteq V$.
2. El espacio X es localmente conexo si lo es en todos sus puntos.

En forma análoga se definen las nociones de localmente ar-C (en un punto y a secas). ▲

Observación 3.4.2. Es importante notar que, en general, se tiene que

$$\text{conexo} \not\Rightarrow \text{localmente conexo}.$$

Para verlo, volvamos a nuestra vivorita $\overline{A} = A \cup B$ de la Obs. 3.2.6. Vimos que ella es conexa, pero no es loc. conexa porque **todos** los entornos pequeños de los puntos de B tienen infinitos “cachitos” de la curva A , lo que los hace muy desconexos. ▲

Ejercicio 3.4.3. Probar que es falso que un espacio ar-C sea localmente ar-C. Sugerimos agregarle a la vivorita clausurada una curva que conecte sus dos mitades. ▲

Teorema 3.4.4. Sea (X, τ) un ET. Se tiene que X es localmente conexo (resp. loc. ar-C) si y sólo si las componentes conexas (resp. ar-C's) de todo abierto son también abiertas.

Demostración. Si X es localmente conexo y $V \in \tau$, toda vez que tomemos un $x \in V$ sabemos que hay un abierto conexo U tal que $x \in U \subseteq V$. Por lo tanto U está contenido en la componente conexa de x en V . Así que esta es abierta. Recíprocamente, dado un $x \in X$ y un $V \in \mathcal{O}^a(x)$, si tomamos U como la componente conexa de x en V , ya estamos viendo que X es localmente conexo en x . Las pruebas para el caso ar-C son idénticas. ■

3.5 Ejercicios

Ejercicio 3.5.1 (Valor medio). Sea (X, τ) un ET conexo, y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Dados $x, y \in X$, probar que f toma todos los valores posibles entre $f(x)$ y $f(y)$.

Ejercicio 3.5.2. 1. Probar que es falso que la intersección (aunque sea de dos) conexos deba ser conexa. Pero sí es cierto que intersección de finitos LC's es LC.

2. Probar que no es cierto que conexo implique localmente conexo.

Capítulo 4

Redes, filtros y convergencia

4.1 Redes y subredes

Recordemos que un conjunto ordenado $\mathbb{I}$ (por el orden parcial $\leq$) está **dirigido** si para todo par $i, j \in \mathbb{I}$, existe un $k \in \mathbb{I}$ tal que $i \leq k$ y $j \leq k$. En tal caso, una inducción muestra que

$$\text{si } \mathbb{F} \subseteq \mathbb{I} \text{ es } \mathbf{finito}, \text{ existe } k_{\mathbb{F}} \in \mathbb{I} \text{ tal que } j \leq k_{\mathbb{F}} \text{ para todo } j \in \mathbb{F}. \quad (4.1)$$

Decimos que un subconjunto $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{I}$ es **cofinal** si para todo $i \in \mathbb{I}$ existe un $j \in \mathbb{J}$ tal que $j \geq i$. O sea que $\mathbb{J}$ tiene elementos más grandes que cualquiera de $\mathbb{I}$.

Ejercicio 4.1.1. Probar las siguientes afirmaciones:

1. Si un orden $\leq$ en un conjunto $\mathbb{I}$ es total, entonces $\mathbb{I}$ está dirigido por $\leq$.
2. Si X es un conjunto y ordenamos a $\mathcal{P}(X)$ con la inclusión al revés (o sea que $U \leq V$ si $V \subseteq U$), entonces $\leq$ dirige a $\mathcal{P}(X)$, pero no es un orden total.
3. Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ es cofinal (con el orden usual de $\mathbb{N}$) si y sólo si A es infinito.
4. Sin embargo $A = \{2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ es infinito y “creciente”, pero no es cofinal en $\mathbb{R}$. ▲

Las redes, que reemplazarán en esta teoría a las sucesiones, son familias indexadas en conjuntos dirigidos. Para entender la necesidad de este concepto, veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.1.2. Sea (X, τ) un ET y sea $x \in X$. Entonces el conjunto $\mathcal{O}(x)$, ordenado por inclusión al revés (o sea que $V \geq U$ si $V \subseteq U$), está dirigido. Lo mismo pasa con cualquier base de entornos β_x de x . En efecto, si $V, U \in \beta_x$, sabemos que existe $W \in \beta_x$ tal que $W \subseteq U \cap V$. Luego $U \leq W$ y $V \leq W$. Observar que un subconjunto $\beta \subseteq \mathcal{O}(x)$ es base de entornos de x si y sólo si es cofinal en $\mathcal{O}(x)$ con éste orden. ▲

Para poder definir adecuadamente la noción de convergencia en ET's generales (y describir a través de ella las clausuras de conjuntos y, más adelante, las nociones de continuidad y

compacidad), será crucial considerar redes indexadas en bases de entornos de puntos. La insuficiencia de las sucesiones surge de que si X es un ET que no es N_1 , para alguno de sus puntos ninguna de estas bases será numerable, por lo que tales redes no serán sucesiones. En el caso de EM's, ese proceso puede hacerse con las bolas $B(x, 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$. Pero en general uno no tiene ese recurso.

Una noción alternativa para definir convergencia es la de **filtros**, que definiremos más adelante. El ejemplo que sugiere los axiomas que definen a un filtro es, nuevamente, el conjunto $\mathcal{O}(x)$, para $x \in X$, un ET. Las propiedades clave son:

- Si $U \in \mathcal{O}(x)$ y $V \supseteq U$, entonces $V \in \mathcal{O}(x)$.
- $\mathcal{O}(x)$ es cerrado por intersecciones finitas y $\emptyset \notin \mathcal{O}(x)$.

Observar que ni $\mathcal{O}^a(x)$ ni las bases de entornos β_x cumple lo anterior. Por esta especie de inflexibilidad de los filtros, y por el hecho de que las redes tienen más “afinidad notacional” con las sucesiones a las que estamos acostumbrados, es mayoritaria entre los especialistas (salvo los muy francófilos) la elección de las redes en vez de los filtros para describir la noción de convergencia.

Sin embargo, en algunos ámbitos de aplicación de la topología, y en ciertos procesos maximales que veremos más adelante, los filtros (y los *ultrafiltros*) serán una herramienta necesaria. Esta es una vieja polémica retratada jocosamente por G. Pedersen como la eterna discusión entre los *net-men* y los *filter-fans*. Nosotros estamos en el primer bando, pero usaremos a los filtros como ayudantes de sus enemigas las redes.

El defecto más grave de las redes (ahí sacan ventaja los filtros) es que la noción necesaria de “subred” no es muy feliz, porque se empasta bastante. Pero igual le damos para adelante:

Definición 4.1.3. Sea X un conjunto.

1. Una red en X es una función $\mathbf{x} : \mathbb{I} \rightarrow X$, donde el conjunto $\mathbb{I}$ está dirigido por un orden $\leq$. Usaremos siempre la siguiente notación más agradable: la red se escribirá $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$, donde identificamos $x_i = \mathbf{x}(i)$, $i \in \mathbb{I}$.
2. Fijada una red $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en X , una **subred** de $\mathbf{x}$ será otra red $\mathbf{y} = (y_j)_{j \in \mathbb{J}}$ dotada de una función $h : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{I}$ tales que
 - (a) h es **creciente**, en el sentido de que $j_1 \leq_{\mathbb{J}} j_2 \implies h(j_1) \leq_{\mathbb{I}} h(j_2)$.
 - (b) La imagen de h es un subconjunto **cofinal** de $\mathbb{I}$ (abreviaremos diciendo que la función h es cofinal), o sea que para todo $i \in \mathbb{I}$, existe $j \in \mathbb{J}$ tal que $i \leq h(j)$.
 - (c) Se tiene que $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ h$, es decir que $y_j = x_{h(j)}$ para todo $j \in \mathbb{J}$.

Observar que los únicos datos relevantes de la red $\mathbf{y}$, y de su entidad de subred de $\mathbf{x}$, son el conjunto dirigido $\mathbb{J}$ y la función creciente y cofinal $h : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{I}$, ya que al tenerlos, la condición (c) determina automáticamente a la función $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ h$. ▲

Ejercicio 4.1.4. Sea $\mathbf{x}$ una red y sea $\mathbf{y}$ una subred de $\mathbf{x}$. Probar que si $\mathbf{z}$ es a su vez una subred de $\mathbf{y}$, entonces $\mathbf{z}$ es también subred de $\mathbf{x}$. La primera parte del ejercicio es entender qué significa este trabalenguas. Se podría resumir como “subred de subred es subred”. Se sugiere componer las funciones que conectan los índices, y usar que son crecientes para ver que la composición es creciente y cofinal. ▲

Ejercicio 4.1.5. Sea $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ una red en un conjunto X . Probar que:

1. Dado $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{I}$ un subconjunto cofinal, o sea que para todo $i \in \mathbb{I}$ existe un $k \in \mathbb{K}$ tal que $k \geq i$, entonces la red $\mathbf{x}|_{\mathbb{K}} = (x_k)_{k \in \mathbb{K}}$ es una subred de $\mathbf{x}$. La h es la inclusión $\mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{I}$.
2. En particular, fijado cualquier $i_0 \in \mathbb{I}$, la red $(x_i)_{i \geq i_0}$, que está dada por el conjunto $\mathbb{I}_0 = \{i \in \mathbb{I} : i \geq i_0\} \subseteq \mathbb{I}$, es subred de $\mathbf{x}$. ▲

Observación 4.1.6. Es evidente que hace falta aclarar un poco lo de las subredes. Repase-mos con sucesiones: ellas serán las redes tales que $\mathbb{I} = \mathbb{N}$, con su orden usual. Es claro que dar $\mathbf{x} : \mathbb{N} \rightarrow X$ dada por $\mathbf{x}(n) = x_n$ es la definición formal de ser sucesión. En la notación anterior, una subsucesión de $\mathbf{x}$ será una $\mathbf{y}$ que es subred de $\mathbf{x}$, y a la vez es sucesión, o sea que $\mathbb{J} = \mathbb{N}$. También hay que pedirle que h sea **estrictamente** creciente. Observar que llamando $h(k) = n_k$ para $k \in \mathbb{N}$, tendríamos que $n_k < n_r$ si $k < r$, y nos queda que $\mathbf{y} = (y_k)_{k \in \mathbb{N}} = (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ como estamos acostumbrados. Otra manera de recuperar las subsucesiones en este contexto es observar que un conjunto $K \subseteq \mathbb{N}$ es cofinal si y sólo si K es infinito. Luego uno aplica el Ejer. 4.1.5.

Releyendo la definición de subred (ahora en el caso general), vemos que $\mathbf{y}$ toma sus valores entre los de $\mathbf{x}$, y que los índices de $\mathbf{x}$ que aparecen en $\mathbf{y}$ son “arbitrariamente grandes” (eso es que sean un conjunto cofinal de los de $\mathbf{x}$). Esto es parecido a las subsucesiones. Las dos diferencias fundamentales son

- El conjunto que indexa a $\mathbf{y}$ no tiene porqué ser numerable.
- La función h no tiene que ser estrictamente creciente, ni siquiera inyectiva.

La primera diferencia es parecida a lo que pasa con las redes: hacen falta conjuntos bien grandes de índices. La segunda es más sutil y más importante. Uno hubiese querido que se eligiera al $\mathbb{J}$ como un **subconjunto** cofinal de $\mathbb{I}$, y que h sólo sea la inclusión (o lo que es lo mismo, que se pidiera que la h sea estrictamente creciente). Eso parece una generalización honesta y razonable, si hacen falta conjuntos grandes. De hecho, estas son subredes (Ejer. 4.1.5). Y si habíamos empezado con una sucesión, todas sus subsucesiones se construyen de ésta manera. El problema es que todas las subredes construidas de esa manera (a partir de una sucesión) serían subsucesiones.

Pero más adelante veremos que no alcanza con ellas para que la teoría camine (Ejem. 8.1.2). Y en realidad la definición dada enriquece la cosa, porque las subredes podrán ser **mucho** más grandes que la red original, permitiendo **refinarla** poniendo muchísimos y_j ’s arriba de cada x_i del conjunto cofinal $h(\mathbb{J})$, y complicar notablemente el tipo de orden de $\mathbb{I}$. Esto es completamente nuevo, y veremos que además de necesario, será sumamente útil. ▲

Observación 4.1.7. En muchos textos de topología, en la definición de subred no se pide que la función h que conecta los índices sea creciente. Sólo que sea cofinal. La teoría, en tal caso se hace mucho más intrincada y difícil, pero gana un poco de generalidad. Nosotros preferimos dar la versión con h creciente porque con ella se obtienen “almost all” los resultados que uno quiere que arreglen las subredes, y se gana notablemente en “transparencia” para las demostraciones. ▲

4.2 Convergencia

A continuación daremos unas definiciones lingüísticas sobre las redes, que serán convenientes para manejarse con las nociones de convergencia y de puntos de acumulación.

Definición 4.2.1. Sean X un conjunto, $A \subseteq X$ y $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ una red en X .

1. Dado $i_0 \in \mathbb{I}$ denotaremos por $C_{i_0}(\mathbf{x}) = \{x_i : i \geq i_0\}$ a la *cola* de la red $\mathbf{x}$, pero pensada como conjunto.
2. Diremos que $\mathbf{x}$ está **eventualmente** en A , y escribiremos $\mathbf{x} \xrightarrow{E} A$ o bien $(x_i)_{i \in \mathbb{I}} \xrightarrow{E} A$, si existe un $i_0 \in \mathbb{I}$ tal que $C_{i_0}(\mathbf{x}) \subseteq A$, o sea que $x_i \in A$ **para todo** $i \geq i_0$.
3. La red $\mathbf{x}$ está **frecuentementemente** en A , y escribiremos $\mathbf{x} \xrightarrow{F} A$, si para todo $i \in \mathbb{I}$ se tiene que $C_i(\mathbf{x}) \cap A \neq \emptyset$, o sea que existe **un** $j \in \mathbb{I}$ tal que $j \geq i$ y $x_j \in A$. ▲

Ahora sí podemos definir las nociones de convergencia y puntos de acumulación para redes en un ET:

Definición 4.2.2. Sean (X, τ) un ET, $x \in X$ y $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ una red en X . Diremos que

1. $(x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ **converge** a x , y escribiremos $x_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} x$, si para todo entorno $U \in \mathcal{O}(x)$ se tiene que $(x_i)_{i \in \mathbb{I}} \xrightarrow{E} U$ (i.e., que existe un $i_U \in \mathbb{I}$ tal que $x_i \in U$ para todo $i \geq i_U$).
2. x es un **punto de acumulación** (PA) de $\mathbf{x}$ si para todo entorno $U \in \mathcal{O}(x)$ se tiene que $(x_i)_{i \in \mathbb{I}} \xrightarrow{F} U$ (i.e., que para todo $i \in \mathbb{I}$ existe un $j \in \mathbb{I}$ tal que $j \geq i$ y $x_j \in U$).

Observar que en ambas definiciones basta verificar que las condiciones pedidas se cumplen para los entornos U de $\mathcal{O}^a(x)$ o los de cualquier base β_x de $\mathcal{O}(x)$. ▲

Ejemplo 4.2.3 (Convergencia en EM's). Sea (X, d) un EM, y pensémoslo como ET vía la topología τ_d . Dados un punto $x \in X$ y una red $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en X , se tiene que

$$x_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} x \iff \text{la red en } \mathbb{R} \quad d(x_i, x) \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} 0,$$

y que ambos equivalen a que $\mathbf{x} \xrightarrow{E} B(x, \varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$. Para probarlo, basta recordar que las bolas $B(x, \varepsilon)$ son una base de $\mathcal{O}_{\tau_d}(x)$, y que las bolas $B_{\mathbb{R}}(0, \varepsilon)$ son base de $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}(0)$. ▲

Ejercicio 4.2.4. Sea (X, τ) un ET y sea $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ una red en X .

1. Si $A \subseteq X$ cumple que $\mathbf{x} \xrightarrow{E} A$, entonces toda subred $\mathbf{y} = (y_j)_{j \in \mathbb{J}}$ de $\mathbf{x}$ también cumple que $\mathbf{y} \xrightarrow{E} A$. Para probar esto será útil usar que la función $h : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{I}$ que determina a $\mathbf{y}$ es creciente y cofinal, por lo que $C_j(\mathbf{y}) \subseteq C_{h(j)}(\mathbf{x})$, y al $h(j)$ se lo puede hacer tan grande como haga falta.
2. Si $x_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} x \in X$, toda subred $\mathbf{y} = (y_j)_{j \in \mathbb{J}}$ de $\mathbf{x}$ también converge a x .
3. Si $\mathbf{x}$ vive en un $Y \subseteq X$ e $y \in Y$, entonces $x_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} y \iff x_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} y$, donde τ_Y es la topología inducida por τ a Y . Lo mismo vale si el y es PA de $\mathbf{x}$ (en Y o en X).
4. Dado $A \subseteq X$, la E y la F dependen una de la otra de la siguiente forma:

$$\mathbf{x} \xrightarrow{E} A \iff \mathbf{x} \not\xrightarrow{F} X \setminus A \quad \text{y} \quad \mathbf{x} \xrightarrow{F} A \iff \mathbf{x} \not\xrightarrow{E} X \setminus A. \quad (4.2)$$

5. Si $x_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} x \in X$, y me dan un **cerrado** $F \subseteq X$ tal que $\mathbf{x} \xrightarrow{F} F$, entonces $x \in F$. ▲

Proposición 4.2.5. Sea (X, τ) un ET y sean $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ una red en X y $x \in X$. Las siguientes propiedades son equivalentes:

1. Se tiene la convergencia $x_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} x$.
2. Toda subred de $\mathbf{x}$ tiene una subred que converge a x .

Demostración. Si vale 1, las subredes enteras de $\mathbf{x}$ convergen a x , por el Ejer. 4.2.4.

Pero si fuera falso que $x_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} x$, existiría un $U \in \mathcal{O}^a(x)$ tal que $\mathbf{x} \not\xrightarrow{E} U$. Vía la Ec. (4.2), esto significaría que $\mathbf{x} \xrightarrow{F} F \stackrel{\text{def}}{=} X \setminus U$. En otras palabras, $\mathbb{J} = \{i \in \mathbb{I} : x_i \in F\}$ sería **cofinal** para $\mathbb{I}$. Por ello la red $\mathbf{x}_{\mathbb{J}} = (x_i)_{i \in \mathbb{J}}$, donde h es la inclusión $\mathbb{J} \hookrightarrow \mathbb{I}$, sería una **subred** de $\mathbf{x}$. Finalmente, como $\mathbf{x}_{\mathbb{J}}$ (toda ella) vive en el cerrado F , todas sus subredes convergentes (si las tuviera) tendrían su límite en F (por el Ejer. 4.2.4). Como $x \notin F$, vemos que $\mathbf{x}_{\mathbb{J}}$ no tendría subredes que puedan ir hacia el x en cuestión. ■

El siguiente Teorema es la justificación del nombre *puntos límite* para los elementos de la clausura de un conjunto:

Teorema 4.2.6. Sea (X, τ) un ET. Dados $A \subseteq X$ y $z \in X$, son equivalentes:

1. z es punto límite de A , o sea $z \in \overline{A}$.
2. Existe una red $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en A tal que $x_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} z$.

Demostración. $2 \rightarrow 1$: La red vive en $A \subseteq \bar{A}$ que es cerrada. Luego $z \in \bar{A}$, por el Ejer. 4.2.4.

$1 \rightarrow 2$: Si ahora suponemos que $z \in \bar{A}$, definamos una red cuyos índices se muevan en el conjunto $\mathcal{O}(z)$, ordenado con la inclusión al revés, como en el Ejem. 4.1.2. Para cada $U \in \mathcal{O}(z)$, como sabemos que $U \cap A \neq \emptyset$, elijamos un $x_U \in U \cap A$. Veamos que nuestra red $\mathbf{x} = (x_U)_{U \in \mathcal{O}(z)}$ converge a z . La prueba es tan simple que confunde: Si a un $U \in \mathcal{O}(z)$ lo pensamos como entorno de z , a partir del mismo U , pero ahora como índice, tenemos que

$$V \geq U \implies V \subseteq U \quad \text{y entonces} \quad x_V \in V \cap A \subseteq V \subseteq U.$$

Esto prueba que $\mathbf{x} \xrightarrow{E} U$, lo que demuestra la convergencia a z . ■

Observación 4.2.7. El resultado anterior muestra que el operador clausura $A \mapsto \bar{A}$, que determina la clase de los conjuntos cerrados, y por ello a la topología τ , está a su vez caracterizado por la convergencia de redes en X . Luego para mostrar que dos topologías coinciden en X , bastará ver que producen las mismas convergencias de las redes en X .

Más aún, si tenemos σ y τ dos topologías en un conjunto X , se tiene que

$$\sigma \subseteq \tau \iff \left[\tau\text{-convergencia} \implies \sigma\text{-convergencia} \right].$$

La ida sale porque en τ hay más entornos. Para la vuelta se ve que dado $A \subseteq X$ vale que $\bar{A}^\tau \subseteq \bar{A}^\sigma$, por lo que σ tiene “menos cerrados”. En parte por eso es que, en tal caso, se dice que τ es más **fuerte** que σ , ya que se dice que una convergencia es más débil en tanto sea más fácil converger, y más fuerte si pocas redes pueden hacerlo.

Sin embargo, si no se ponen algunas restricciones, el fenómeno de la convergencia puede tener propiedades raras (el típico es que una red tenga más de un límite). Para tener una idea de esto veamos un ejemplo catastrófico: ▲

Ejemplo 4.2.8. Sea X un conjunto infinito y consideremos en X la topología cofinita $\tau_{CF}(X)$ que ya vimos en el Ejem. 2.4.8. En este espacio, muchas redes convergen a **todos** los puntos de X .

Por ejemplo, asumamos que una red $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en X cumple que $\mathbb{I}$ es infinito (sin último elemento), y que la función $\mathbf{x} : \mathbb{I} \rightarrow X$ es inyectiva. Luego, si $U \in \tau_{CF}(X)$, el conjunto $\{i \in \mathbb{I} : x_i \notin U\}$ es finito, por lo que $\mathbf{x} \xrightarrow{E} U$. Y estamos hablando de todos los abiertos de X , o sea los entornos de todos los puntos. Si la red cumple algo menos: que las colas

$$C_i(\mathbf{x}) = \{x_j : j \geq i\} \quad \text{son infinitas para todo } i \in \mathbb{I},$$

entonces todo $x \in X$ es punto de acumulación de $\mathbf{x}$. ▲

La siguiente Proposición muestra que los espacios de Hausdorff son un ámbito en donde las cosas son más normales en este sentido:

Proposición 4.2.9. Sea (X, τ) un ET. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Toda red convergente en X tiene **un único** límite.
2. X es un espacio de Hausdorff.

Demostración. Sea $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ una red tal que $x_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} x$, y sea $z \neq x$. Si X es de Hausdorff, existen $U \in \mathcal{O}(x)$ y $V \in \mathcal{O}(z)$ disjuntos. Como $\mathbf{x} \xrightarrow{E} U$, es imposible que $\mathbf{x} \xrightarrow{E} V$. Así, vemos que $\mathbf{x}$ no converge a z . Recíprocamente, supongamos que X no es Hausdorff. Entonces tomemos $x, y \in X$ (distintos) tales que no tienen entornos disjuntos. Construiremos una red que converge a ambos. Tomemos como conjunto de índices a $\mathbb{I} = \mathcal{O}(x) \times \mathcal{O}(y)$, con el orden $(U, V) \leq (U', V')$ si $U' \subseteq U$ y $V' \subseteq V$ (verificar que es dirigido). Por hipótesis, para cada $(U, V) \in \mathbb{I}$ podemos elegir un $x_{U,V} \in U \cap V$. Sea entonces la red $\mathbf{x} = (x_{U,V})_{(U,V) \in \mathbb{I}}$. Es una red bien fierá, pero tiene la ventaja de que la verificación de que converge tanto a x como a y es cuasitrivial, así que la dejamos como ejercicio. ■

El siguiente paso es ver que los puntos de acumulación son exactamente aquellos a los que les converge alguna subred. Pero antes de probarlo necesitamos el siguiente lema, que también será útil más adelante (y que por esa razón lo escribimos un poco en complicado).

Lema 4.2.10. Sea X un conjunto con los siguientes objetos:

1. Una familia de subconjuntos $\emptyset \neq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ que está dirigida por la inclusión al revés, es decir que si $A, B \in \mathcal{B}$, existe otro $C \in \mathcal{B}$ tal que $C \subseteq A \cap B$.
2. Una red $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en X tal que $\mathbf{x} \xrightarrow{F} A$, para todo $A \in \mathcal{B}$.

Entonces existe una subred $\mathbf{y}$ de $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{y} \xrightarrow{E} A$, para todo $A \in \mathcal{B}$.

Demostración. Consideremos el conjunto $\mathcal{M} = \{ (i, B) \in \mathbb{I} \times \mathcal{B} : x_i \in B \}$, con el orden dado por

$$(i, B) \leq (j, A) \quad \text{si} \quad i \leq j \quad \text{y} \quad A \subseteq B.$$

Veamos que este orden dirige a $\mathcal{M}$: Dados (i, B) y $(j, A) \in \mathcal{M}$, sea $k \in \mathbb{I}$ tal que $i \leq k$ y $j \leq k$. Sea, además, $C \in \mathcal{B}$ tal que $C \subseteq A \cap B$. Como $\mathbf{x} \xrightarrow{F} C$, existe $r \in \mathbb{I}$ tal que $r \geq k$ y $x_r \in C$. Luego $(r, C) \in \mathcal{M}$ y mayor a los dos pares (i, B) y (j, A) . Definiremos la subred $\mathbf{y}$ usando a $\mathcal{M}$ como conjunto de índices. Para ello usaremos la función $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{I}$ dada por

$$h(i, B) = i, \quad \text{para todo} \quad (i, B) \in \mathcal{M}.$$

Observar que h es creciente. Veamos que es cofinal: Dado $j \in \mathbb{I}$, fijemos cualquier $B \in \mathcal{B}$. Como $\mathbf{x} \xrightarrow{F} B$, existe $i \geq j$ tal que $x_i \in B$. Luego $(i, B) \in \mathcal{M}$ y entonces $h(i, B) = i \geq j$. Por la Def. 4.1.3 de subredes, si definimos la red

$$\mathbf{y} : \mathcal{M} \rightarrow X \quad \text{dada por} \quad y_{(i,B)} = x_{h(i,B)} = x_i \quad \text{para} \quad (i, B) \in \mathcal{M},$$

entonces $\mathbf{y}$ es subred de $\mathbf{x}$. Para ver que $\mathbf{y}$ cumple lo pedido, fijemos un $B \in \mathcal{B}$. Como $\mathbf{x} \xrightarrow{F} B$, existe $i \in \mathbb{I}$ tal que $x_i \in B$, o sea que $(i, B) \in \mathcal{M}$. Si tomamos cualquier

$$(j, A) \in \mathcal{M} \text{ tal que } (j, A) \geq (i, B), \text{ tendremos que } y_{(j,A)} = x_j \in A \subseteq B,$$

puesto que $(j, A) \in \mathcal{M}$. Esto muestra que $\mathbf{y} \xrightarrow{E} B$. Como B era cualquiera, finish. ■

Con esto podemos probar el primer resultado básico de subredes:

Proposición 4.2.11. Sea (X, τ) un ET y sea $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ una red en X . Luego un punto $z \in X$ es de acumulación para $\mathbf{x}$ si y sólo si existe una subred $\mathbf{y}$ de $\mathbf{x}$ que **converge** a z .

Demostración. Si z es punto de acumulación de $\mathbf{x}$, tomemos la familia de subconjuntos $\mathcal{B} = \mathcal{O}(z)$, y estamos justo en las hipótesis del Lema 4.2.10. La subred $\mathbf{y}$ de $\mathbf{x}$ del Lema cumple que $\mathbf{y} \xrightarrow{E} U$ para todo $U \in \mathcal{O}(z)$, lo que dice que $\mathbf{y}$ converge a z .

Recíprocamente, supongamos que tenemos una subred $\mathbf{y} = (y_j)_{j \in \mathbb{J}}$ de $\mathbf{x}$ que converge a un punto z . Dados un entorno $U \in \mathcal{O}(z)$ y un índice $i \in \mathbb{I}$, existe un $j \in \mathbb{J}$ tal que $h(j) \geq i$ (donde h es la función asociada con la subred $\mathbf{y}$). Existe además un $k \in \mathbb{J}$ tal que $y_s \in U$ para todo $s \geq k$. Tomemos un $r \in \mathbb{J}$ más grande que k y j . Entonces $h(r) \in \mathbb{I}$ cumple que

$$h(r) \geq h(j) \geq i \quad \text{y} \quad x_{h(r)} = y_r \in U.$$

Eso dice que $\mathbf{x} \xrightarrow{F} U$. Como el $U \in \mathcal{O}(z)$ era cualquiera, z es punto de acumulación de $\mathbf{x}$. ■

Observación 4.2.12. Tenemos dos apariciones del nombre punto de acumulación (abreviamos PA): para conjuntos y para redes. Conviene aclarar que los conceptos son semejantes, pero de equivalencias ni hablar. A pesar de que uno podría pensar en una red $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en un (X, τ) y en el subconjunto $A_{\mathbf{x}} = \{x_i : i \in \mathbb{I}\} \subseteq X$ y en sus PA's. Pero ninguna cosa implica la otra. La palabra *acumulación* refiere a que aparecen muchísimos términos cerca del punto. Pero en el caso de conjuntos eso refiere a que sean distintos elementos, y en el de las redes a que aparezcan en distintos momentos (apariciones muy frecuentes).

Observar que la red puede ser constantemente igual a un $x \in X$. Allí x es PA de la red $\mathbf{x}$ pero no de $A_{\mathbf{x}}$. Incluso puede haber una cantidad cofinal de apariciones del x en $\mathbf{x}$ y que la otra mitad se vaya a cualquier otro lado. Pasa lo mismo.

O bien puede pasar que $\mathbf{x} : \mathbb{I} \rightarrow X$ sea inyectiva, y que haya un conjunto infinito numerable $\mathbb{J} = \{i_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{I}$ tal que la sucesión $x_{i_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. Entonces se tiene que $x \in A'_{\mathbf{x}}$. Pero si $\mathbb{J}$ no es cofinal en $\mathbb{I}$ (lo que bien puede pasar si, por ejemplo, $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ con su orden), nadie nos asegura que x sea un PA de $\mathbf{x}$.

Donde las cosas se parecen un poco más es cuando se toman sucesiones. Ahí sí puede verse que, si $\mathbf{x} : \mathbb{N} \rightarrow X$ es inyectiva, entonces x es PA de $\mathbf{x}$ si y sólo si $x \in A'_{\mathbf{x}}$. ▲

4.3 Sucesiones en espacios N_1

En los espacios N_1 (en particular todos los EM's), las redes siguen siendo útiles, pero no son imprescindibles. Esto es algo complicado de formular explícitamente. A continuación enumeraremos los resultados concretos que nos permitirán trabajar sistemáticamente con sucesiones (y subsucesiones) cuando estemos en el contexto N_1 . Las pruebas salen a mano, igual que en el contexto de EM's.

Es importante notar que en el caso **no** N_1 , tanto las sucesiones como las subsucesiones **no** son suficientes para caracterizar clausuras y puntos de acumulación (y por eso hizo falta todo el laburo anterior). Pero ahora sí lo serán. Veamos:

Proposición 4.3.1. Sea (X, τ) un ET de tipo N_1 . Se tienen las siguientes propiedades

1. Dado $A \subseteq X$, un punto $x \in \bar{A}$ si y sólo si existe una **sucesión** $\mathbf{y} = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en A tal que $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.
2. Un $x \in X$ es punto de acumulación de una sucesión $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X si y sólo si existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbf{x}$ tal que $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$.

Demostración. Fijemos el $x \in X$ y $\{V_m : m \in \mathbb{N}\} \subseteq \tau$ una base de $\mathcal{O}(x)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos el abierto $U_n = \bigcap_{m=1}^n V_m \in \tau$. Luego $\beta_x = \{U_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \tau$ es otra base de $\mathcal{O}(x)$, que ahora cumple que $U_{n+1} \subseteq U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para probar el item 1. basta tomar una sucesión $\mathbf{y} = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $y_n \in U_n \cap A$ ($\neq \emptyset$ si $x \in \bar{A}$) para todo $n \in \mathbb{N}$. La vuelta sale porque las sucesiones son redes, vía el Teo. 4.2.6.

Para el item 2., la vuelta sale como arriba, ahora por la Prop. 4.2.11 (subsucesión es subred). Si el x es PA de $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, empecemos tomando $n_1 \in \mathbb{I}$ tal que $x_{n_1} \in U_1$. Como $\mathbf{x} \xrightarrow{F} U_2$, podemos tomar $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \in U_2$. Recursivamente, podemos construir la subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de forma que cada $x_{n_k} \in U_k$. Como en el caso anterior, vemos que eso implica que $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$. ■

Ejercicio 4.3.2. Volviendo a la Prop. anterior: Si el x es PA de $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, por la Prop. 4.2.11 existe una subred $\mathbf{y} = (y_j)_{j \in \mathbb{J}}$ de $\mathbf{x}$ que converge a x . Si tomamos, de la subred $\mathbf{y}$, su función $h : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{N}$ cofinal creciente, sabemos que $h(\mathbb{I}) \subseteq \mathbb{N}$ es infinito. Lo numeramos en forma creciente $h(\mathbb{I}) = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ y tomamos la subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbf{x}$. Como h es creciente y sabemos que $y_j \xrightarrow{j \in \mathbb{J}} x$, vemos que $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$. Y san se acabó.

El ejercicio consiste en ver qué parte de lo de arriba esta mal (no vale decir que “san se acabó” ya no se usa). No puede ser correcto porque no se usa que X sea N_1 . Y ese enunciado es falso en general, cosa que se puede comprobar mirando el Ejem. 8.1.2. ▲

4.4 EM's completos

Acabamos de ver que, si (X, d) es un EM, entonces pensado como ET con la topología métrica τ_d es N_1 , por lo que basta trabajar con sucesiones. Una noción puramente métrica que se puede definir tanto para sucesiones como para redes es la de ser de Cuachy, o sea ser candidata fuerte a converger. La noción de completitud consiste en que a todas esas candidatas les existe el límite. Si eso no pasara, el proceso tradicional de completación de un EM es inventarse esos límites en un EM más grande, que quedará completo. Otra noción métrica (y que depende de la métrica específica que se use) es la de diámetro:

Dado $A \subseteq X$ definimos $\text{diam}(A) = \sup \{d(x, y) : x, y \in A\}$.

Observar que A es acotado si y sólo si $\text{diam}(A) < \infty$, puesto que $\text{diam}(B(x, \varepsilon)) \leq 2\varepsilon$.

Definición 4.4.1. Sea (X, d) un EM y sea $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ una red en X .

1. Diremos que $\mathbf{x}$ es una red **de Cauchy** si verifica que

para todo $\varepsilon > 0$ existe un $i_0 \in \mathbb{I}$ tal que $\text{diam}(C_{i_0}(\mathbf{x})) < \varepsilon$.

O sea que, dados $i, j \in \mathbb{I}$ tales que $i \geq i_0$ y $j \geq i_0$, debe valer que $d(x_i, x_j) < \varepsilon$. En particular, esto dice que $\mathbf{x} \xrightarrow{E} B(x_{i_0}, \varepsilon)$.

2. Esto suele abreviarse como $d(x_i, x_j) \xrightarrow{i, j \in \mathbb{I}} 0$.

3. Para sucesiones $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X , escribiremos $d(y_n, y_m) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$. ▲

Observación 4.4.2. Es fácil ver que si una red $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en X es convergente a un $x \in X$, entonces es de Cauchy. En efecto, dado el $\varepsilon > 0$, basta elegir el $i_0 \in \mathbb{I}$ tal que $x_i \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ para los $i \geq i_0$. En cambio, si $\mathbf{x}$ fuera de Cauchy pero no convergente, lo que uno tiene es el “lugar” al que debe converger, pero a X le falta un punto en ese lugar. Eso se puede subsanar viendo que dicho lugar está ocupado, ya sea como límite de una subred, o como punto de acumulación de $\mathbf{x}$. Esto es cierto para redes, pero lo enunciaremos para sucesiones, porque es lo que más se usa en este contexto. Agregaremos una condición propia de las sucesiones, que usa puntos de acumulación de conjuntos. ▲

Proposición 4.4.3. Sea (X, d) un EM y sea $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X y sea $x \in X$ un punto. Supongamos que se verifica **alguna** de las siguientes condiciones:

1. Existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbf{x}$ tal que $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$.
2. El tal x es un punto de acumulación de la **sucesión** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Nuestro x es punto de acumulación del **conjunto** $A = C_1(\mathbf{x}) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Cualquiera de esas tres cosas implica que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

Demostración. Es claro $1 \iff 2$, vía la Prop. 4.3.1. Supongamos que vale 1, tomemos un $\varepsilon > 0$ y un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ y $m \geq n_0$, entonces $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Dada la subsucesión $x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x$, tomemos un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ siempre que $k \geq k_0$ (o lo que es lo mismo, que $n_k \geq n_{k_0}$). Fijemos un $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \geq \max\{n_{k_0}, n_0\}$. Por fin, si ahora tomamos un $n \geq n_0$ (el de Cauchy con $\frac{\varepsilon}{2}$ para $\mathbf{x}$), tenemos que

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \implies x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x.$$

Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$, el hecho de que $x \in A'$ asegura que se puede encontrar un n_0 lo suficientemente grande para que cumpla dos cosas: que $x_{n_0} \in A \cap B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ y, por la Cauchycidad, que $\mathbf{x} \xrightarrow{E} B(x_{n_0}, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq B(x, \varepsilon)$. ■

Definición 4.4.4. Sea (X, d) un EM. Diremos que X es **completo** si toda sucesión de Cauchy en X es convergente. ▲

Proposición 4.4.5. Sea (X, d) un EM. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. X es completo.
2. Dada una familia $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos **cerrados** de X tales que
 - (a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $F_{n+1} \subseteq F_n \neq \emptyset$.
 - (b) La sucesión $\text{diam}(F_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

se debe cumplir que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Demostración. Si X es completo y tenemos la sucesión $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como en el ítem 2, elijamos un $x_n \in F_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Las condiciones (a) y (b) aseguran que $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy (dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\text{diam}(F_{n_0}) < \varepsilon$). Observar que $\mathbf{x} \xrightarrow{E} F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (por (a)). Si $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$, el hecho de los F_n sean todos cerrados termina de mostrar que $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Supongamos ahora que se cumple la condición 2, e imaginemos que una sucesión de Cauchy $\mathbf{y} = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X no tiene límite. Definamos $F_n = C_n(\mathbf{y}) = \{y_m : m \geq n\}$. El hecho de que $\mathbf{y}$ sea de Cauchy dice exactamente que $\text{diam}(F_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Y los F_n están encajados por definición. Como todas las colas $\mathbf{y}_n = (y_m)_{m \geq n}$ son también sucesiones de Cauchy, y están tan carentes de límite como $\mathbf{y}$, la Prop. 4.4.3 nos dice que $F'_n = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así llegamos a que cada $\overline{F_n} = F_n \cup F'_n = F_n$, por lo que son todos cerrados. Y de que sean vacíos ni hablar. Podemos tomar entonces el $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que tanto x_n como x están en F_n . Luego $d(x_n, x) \leq \text{diam}(F_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Ya fué. ■

Ejercicio 4.4.6. Sea (X, d) un EM. Entonces se tiene que

1. Existe un EM completo X^c y una isometría $f : X \rightarrow X^c$ tal que $f(X)$ es denso en X^c .
2. Más aún, si me dan otro par (g, Y) que cumpla lo mismo (Y es completo y g manda isométricamente a X a un denso de Y), entonces existe una isometría sobre

$$(\text{o sea un hómoio isométrico}) \quad \Phi : X^c \rightarrow Y \quad \text{tal que} \quad \Phi \circ f = g .$$

Esto se reinterpreta como que Φ es “la identidad” en X , si preferimos pensar que las completaciones X^c e Y son conjuntos que contienen a X y que f y g son las inclusiones de X en ellos.

Sugerimos construir X^c como el conjunto de sucesiones de Cauchy en X , dividido por la relación de equivalencia “ir hacia el mismo lado” (o sea que $d(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$). El espacio X “entra” en X^c como las clases de las sucesiones constantes. ▲

4.5 Filtros versus Redes

Dados un conjunto X y una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, diremos que $\mathcal{F}$ es un **filtro** si

- (a) $\mathcal{F}$ es cerrado por intersecciones finitas.
- (b) Si $A \in \mathcal{F}$, todo $B \in \mathcal{P}(X)$ tal que $B \supseteq A$ también cumple que $B \in \mathcal{F}$.
- (c) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Si tenemos una topología τ en X , diremos que $\mathcal{F}$ **converge** a un $x \in X$ si $\mathcal{O}(x) \subseteq \mathcal{F}$. Observar que la noción de convergencia de filtros caracteriza a τ , porque se tiene que

$$U \in \tau \iff U \in \mathcal{F} \text{ para todo filtro } \mathcal{F} \text{ que converge a algún } x \in U .$$

Los ejemplos más naturales de filtros en un ET (X, τ) son las familias $\mathcal{F} = \mathcal{O}(x)$, para un $x \in X$. Como en el Teo. 4.2.6 para las redes (donde se elige un $x_U \in U$ para cada $U \in \mathcal{O}(x)$), el filtro $\mathcal{O}(x)$ es el que más evidentemente converge a x .

La noción de subfiltro es mucho más amigable que la de subred: Un filtro $\mathcal{G}$ es **subfiltro** de $\mathcal{F}$ simplemente si $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Pero en esta teoría los roles están invertidos, porque es claro que si $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ converge a algún $x \in X$, entonces también $\mathcal{F}$ converge a x . Luego el papel de las subredes lo juegan los filtros más grandes que uno dado. Cierta correlación de ambos enfoques la mostramos en el siguiente enunciado:

Proposición 4.5.1. Sea (X, τ) un ET. Si $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ es una red en X , definamos

$$\mathcal{F}_{\mathbf{x}} = \{ B \subseteq X : (x_i)_{i \in \mathbb{I}} \xrightarrow{E} B \} .$$

Luego $\mathcal{F}_{\mathbf{x}}$ es un filtro, y $\mathcal{F}_{\mathbf{x}}$ converge a un $z \in X$ si y sólo si $x_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} z$.

Demostración. Para ver que $\mathcal{F}_x$ es filtro, basta mostrar que dados $A, B \in \mathcal{F}_x$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}_x$. Y esto sale directamente de que $x \xrightarrow{E} A$ y también $x \xrightarrow{E} B$ (y de que $\mathbb{I}$ está dirigido). Observar que $\emptyset \notin \mathcal{F}_x$, porque nadie puede estar eventualmente en $\emptyset$. La equivalencia de las convergencias surge simplemente de cotejar ambas definiciones. ■

Observación 4.5.2. Sea (X, τ) un ET. Veamos una idea de cómo volver de los filtros a las redes. La construcción no es del todo legal, pero es bastante convincente. Por suerte, igual, no se la usa en lo que sigue. Tomemos $\mathcal{F}$ un filtro en X . Entonces el conjunto

$$\Lambda = \{(x, A) \in X \times \mathcal{F} : x \in A\} \quad \text{con el orden} \quad (x, A) \leq (y, B) \text{ siempre que } B \subseteq A$$

está dirigido. Y la red $\mathbf{x}^{\mathcal{F}} = (x_{(y,A)})_{(y,A) \in \Lambda}$ dada por $x_{(y,A)} = y$ converge a un $z \in X$ si y sólo si el filtro $\mathcal{F}$ converge a z . En efecto, dados $(x, A), (y, B) \in \Lambda$, tenemos que $C = A \cap B \in \mathcal{F}$. Como $\emptyset \notin \mathcal{F}$, basta tomar un $z \in C$, y el par $(z, C) \in \Lambda$ mayor a (x, A) e (y, B) . Luego Λ está dirigido y $\mathbf{x}^{\mathcal{F}}$ es una red. Supongamos que $\mathcal{F}$ converge a z , o sea que $\mathcal{O}(z) \subseteq \mathcal{F}$. Para cada $U \in \mathcal{O}(z)$, tomemos el índice $(z, U) \in \Lambda$. Si un par $\Lambda \ni (y, A) \geq (z, U)$, entonces $A \subseteq U$, por lo que $x_{(y,A)} = y \in A \subseteq U$. O sea que $\mathbf{x}^{\mathcal{F}} \xrightarrow{E} U$.

Si la red $\mathbf{x}^{\mathcal{F}}$ converge a z , y tomamos un $U \in \mathcal{O}(z)$, existe un par $(y, A) \in \Lambda$ tal que $x_{(u,V)} = u \in U$ para todo $(u, V) \geq (y, A)$. Pero esto incluye a todos los pares $(w, A) \in \Lambda$, que recorren los $w \in A$. Resumiendo, tenemos que $A \subseteq U$, por lo que $U \in \mathcal{F}$. Así vemos que $\mathcal{O}(z) \subseteq \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ converge a z . ▲

Observación 4.5.3 (Ir y volver). Con las notaciones de la Obs. 4.5.2, si uno empieza con el filtro $\mathcal{F}$, construye la red $\mathbf{x}^{\mathcal{F}}$ y vuelve a los filtros con $\mathcal{F}_{\mathbf{x}^{\mathcal{F}}}$, afortunadamente queda que $\mathcal{F}_{\mathbf{x}^{\mathcal{F}}} = \mathcal{F}$. Esto pasa porque vale la siguiente igualdad: si $(y, A) \in \Lambda$, entonces

$$C_{(y,A)}(\mathbf{x}^{\mathcal{F}}) = \{ x_{(z,B)} : \Lambda \ni (z, B) \geq (y, A) \} = \{ z : \Lambda \ni (z, B) \geq (y, A) \} = A \in \mathcal{F}.$$

Sin embargo, si uno empieza con una red $\mathbf{y} = (y_i)_{i \in \mathbb{I}}$, e itera como antes, queda que $\mathbf{y}$ es una **subred** de la nueva red $\mathbf{x}^{\mathcal{F}_y}$ producida por el filtro $\mathcal{F}_y$. En efecto, basta definir

$$h : \mathbb{I} \rightarrow \Lambda \quad \text{la función dada por} \quad h(i) = (y_i, C_i(\mathbf{y})) \quad i \in \mathbb{I},$$

donde $C_i(\mathbf{y}) = \{y_j : j \geq i\} \in \mathcal{F}_y$. Notar que h es creciente, porque los $C_i(\mathbf{y})$ se achican al agrandar i . Además h es cofinal, ya que si $A \in \mathcal{F}_y$, el hecho de que $\mathbf{y} \xrightarrow{E} A$ equivale a haya algún $C_i(\mathbf{y}) \subseteq A$. Por otra parte,

$$x_{h(i)} = x_{(y_i, C_i(\mathbf{y}))} = y_i \quad \text{para todo} \quad i \in \mathbb{I}. \quad \blacktriangle$$

Observación 4.5.4. En la Obs. 4.5.2 podría haberse construido otra red $\mathbf{y}^{\mathcal{F}}$ más simple que converja a lo mismo que el filtro $\mathcal{F}$. Bastaba tomar $\mathbf{y}^{\mathcal{F}} = (y_A)_{A \in \mathcal{F}}$ tal que $y_A \in A$ para todo $A \in \mathcal{F}$ (en $\mathcal{F}$ se toma el orden $\leq$ dado por $\supseteq$). Lo malo de este proceso es que, al iterar como antes, la única relación entre la red $\mathbf{x}$ con la que se empieza e $\mathbf{y}^{\mathcal{F}_x}$ es que $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_{\mathbf{y}^{\mathcal{F}_x}}$ (por lo que convergen a lo mismo, o ninguna converge).

Lo bueno de la red $\mathbf{x}^{\mathcal{F}}$ de la Obs. 4.5.2 es que toda red $\mathbf{z} = (z_i)_{i \in \mathbb{I}}$ tal que $\mathcal{F}_{\mathbf{z}} = \mathcal{F}$, debe ser subred de $\mathbf{x}^{\mathcal{F}}$, por la cuenta de arriba. Lo malo de ella es que el orden del conjunto Λ de la Obs. 4.5.2 tiene un problema: Dado un $A \in \mathcal{F}$ y dos elementos distintos $x, y \in A$, entonces los pares (x, A) e (y, A) son cada uno mayor que el otro, pero no son iguales. Así que el $\leq$ que se define es un “preorden” y no un orden. Si bien la definición de redes pide orden, en este caso podemos dejar esa desprolijidad porque permite hacer una construcción global. La alternativa sería dividir por los indistinguibles, con lo que quedaría tan solo $\mathcal{F}$ con su orden de inclusión al revés. Y se tendría que elegir un elemento $y_A \in A$ para cada $A \in \mathcal{F}$ como mencionábamos antes. ▲

Definición 4.5.5. Diremos que un filtro $\mathcal{F}$ en un conjunto X es un **ultrafiltro** si

$$\text{para todo } A \subseteq X \text{ o bien } A \in \mathcal{F} \text{ o bien } X \setminus A \in \mathcal{F}.$$

Observación 4.5.6. Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro en un conjunto X . Observar que a $\mathcal{F}$ no se lo puede agrandar y obtener otro filtro (en tal caso el nuevo filtro tendría al $\emptyset$, lo que no vale), o sea que es **maximal** entre los filtros de X . Y vale la recíproca: ▲

Proposición 4.5.7. Empecemos con un conjunto X .

1. Un filtro $\mathcal{F}$ en X es ultrafiltro $\iff$ es maximal entre los filtros.
2. Fijado un filtro $\mathcal{F}$ en X , siempre existe un ultrafiltro $\mathcal{G}$ en X tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.

Demostración. Del ítem 1 ya vimos la ida. La vuelta sale usando algo más general:

Claim. Sea $\mathcal{F}$ un filtro en X tal que existe un $A \subseteq X$ tal que ni $A \in \mathcal{F}$ ni $X \setminus A \in \mathcal{F}$. Construyamos una nueva familia de conjuntos con esos datos

$$\mathcal{G} = \left\{ B \in \mathcal{P}(X) : B \supseteq A \cap D, \text{ para algún } D \in \mathcal{F} \right\}.$$

Resulta que este $\mathcal{G}$ es un nuevo filtro tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ y $A \in \mathcal{G}$ (y es el mínimo que cumple esas cosas). En efecto, en principio podemos observar que si $D \in \mathcal{F}$, entonces $D \supseteq A \cap D$, por lo que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Además $A = A \cap X \in \mathcal{G}$ (porque $X \in \mathcal{F}$).

La verificación de que $\mathcal{G}$ es un filtro es rutinaria. Se usa que $\mathcal{F}$ es cerrado por intersecciones finitas (intersecando a los D 's). Lo más divertido es que $\emptyset \notin \mathcal{G}$ porque, si $A \cap D = \emptyset$ para cierto $D \in \mathcal{F}$, entonces $D \subseteq X \setminus A$, lo que implicaría que $X \setminus A \in \mathcal{F}$. ▲

Volviendo al ítem 1., si un filtro $\mathcal{F}$ no es ultra, siempre podemos tomar un $A \subseteq X$ que le cumpla lo del Claim. Pero entonces el filtro $\mathcal{G}$ asociado sería estrictamente más grande que $\mathcal{F}$ (ya que $A \in \mathcal{G}$), así que $\mathcal{F}$ no era maximal.

Para el ítem 2., si tomamos un filtro cualquiera $\mathcal{F}$ en X , zorneando uno muestra que existe un filtro $\mathcal{G}$ en X tal que $\mathcal{G}$ es maximal y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Y vimos que con eso alcanza. ■

Definición 4.5.8. Sea $\mathbf{u} = (u_i)_{i \in \mathbb{I}}$ una red en X . Decimos que $\mathbf{u}$ es **universal** si el filtro $\mathcal{F}_{\mathbf{u}} = \{B \subseteq X : \mathbf{u} \xrightarrow{E} B\}$ de la Prop. 4.5.1 es un ultrafiltro. En otras palabras, la red $\mathbf{u}$ es universal si, para todo $A \subseteq X$, se tiene que $\mathbf{u} \xrightarrow{E} A$ o bien $\mathbf{u} \xrightarrow{E} X \setminus A$. ▲

Proposición 4.5.9. Toda red $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en X tiene una subred universal.

Demostración. Sea $\mathcal{G}$ un ultrafiltro que contiene al filtro $\mathcal{F}_{\mathbf{x}} = \{B \subseteq X : \mathbf{x} \xrightarrow{E} B\}$. Para todo $A \in \mathcal{G}$, debe suceder que $\mathbf{x} \xrightarrow{F} A$. En efecto, en caso contrario existiría un $i \in \mathbb{I}$ tal que $x_j \notin A$ para todo $j \geq i$. En otras palabras, $\mathbf{x} \xrightarrow{E} X \setminus A$. Pero en tal caso $X \setminus A \in \mathcal{F}_{\mathbf{x}} \subseteq \mathcal{G}$. Y eso no es posible. Esto muestra que la red $\mathbf{x}$ y la familia $\mathcal{G}$ están en las condiciones de la Prop. 4.2.10, que nos provee de una subred $\mathbf{u}$ de $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{u} \xrightarrow{E} A$ para todo $A \in \mathcal{G}$. Luego el filtro $\mathcal{F}_{\mathbf{u}} = \{D \subseteq X : \mathbf{u} \xrightarrow{E} D\}$ contiene a $\mathcal{G}$, por lo que deben ser iguales (recordar que $\mathcal{G}$ es maximal). Por lo tanto $\mathbf{u}$ es la subred universal buscada. ■

Observación 4.5.10. La existencia de subredes universales es radicalmente contraria a la costumbre de pensarlas como subsucesiones. Muestra que existen subredes abrumadoramente más “grandes” que la red original. Se ve que el tomar subredes es un concepto más cercano al de “refinar” la red original que el de quedarse con un “cacho” de ella. Por ejemplo, en un espacio N_1 , uno cree que las sucesiones y subsucesiones alcanzan. Sin embargo, las sucesiones tienen subredes universales, pero ninguna subsucesiones universales.

La Prop. 4.5.9 será sumamente útil a la hora de relacionar el concepto de compacidad de ET's con el de convergencia de redes y subredes. La gracia está en la siguiente propiedad extraña de las redes universales: ▲

Proposición 4.5.11. Sea (X, τ) un ET y sea $\mathbf{u} = (u_i)_{i \in \mathbb{I}}$ una red universal en X . Entonces

1. Para todo $A \subseteq X$ se tiene que $\mathbf{u} \xrightarrow{E} A$ o bien $\mathbf{u} \xrightarrow{E} X \setminus A$.
2. Si $z \in X$ es un punto de acumulación de $\mathbf{u}$, entonces $u_i \xrightarrow[i \in \mathbb{I}]{} z$ (como las Cauchy).

Demostración. El punto 1 es un refraseo de la Def. 4.5.8. El punto 2 sale porque, si $U \in \mathcal{O}(z)$, el hecho de que $\mathbf{u} \xrightarrow{F} U$ hace que sea imposible que $\mathbf{u} \xrightarrow{E} X \setminus U$. Como $\mathcal{F}_{\mathbf{u}}$ es un ultrafiltro, no queda otra que $\mathbf{u} \xrightarrow{E} U$. Luego $u_i \xrightarrow[i \in \mathbb{I}]{} z$. ■

Observación 4.5.12. La noción de ultrafiltros, y por ende la de redes universales, suena a cosa esotérica e inentendible. Algo de eso hay. Sin embargo hay ultrafiltros bien concretitos: Si (X, τ) es un ET y fijamos un $z \in X$, podemos ver inmediatamente que la familia

$$\mathcal{F}_z = \{ A \in \mathcal{P}(X) : z \in A \}$$

debe ser un ultrafiltro. La macana de estos ejemplos, es que si una red $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en X cumple que $\mathcal{F}_{\mathbf{x}} = \mathcal{F}_z$ para cierto $z \in X$, entonces obligatoriamente debe pasar que la red $\mathbf{x}$ es constante desde un i_0 en adelante. O sea que existe un $i_0 \in \mathbb{I}$ tal que $C_{i_0}(\mathbf{x}) = \{z\}$. Esto es así porque el conjunto $\{z\} \in \mathcal{F}_z$. Por lo tanto, la Prop. 4.5.9 nos dice que debe haber muchos ultrafiltros más complicados que los “puntuales” (i.e., los $\mathcal{F}_z$), porque la mayoría de las redes no tienen subredes constantes. ▲

4.6 Ejercicios

Ejercicio 4.6.1. Sea $\mathbb{I}$ un conjunto dirigido con el orden $\leq$. Si no existe un elemento máximo $i_M \in \mathbb{I}$, probar que para todo $j \in \mathbb{I}$ hay un $k \in \mathbb{I}$ tal que $k > j$ ($k \geq j$ pero $k \neq j$). Otra manera de decirlo: En un dirigido, maximal $\implies$ máximo.

Ejercicio 4.6.2. Probar que si $\mathbf{z}$ es una subred de una subred $\mathbf{y}$ de una red $\mathbf{x}$, entonces $\mathbf{z}$ es una subred de $\mathbf{x}$ (la primera parte del ejercicio es entender qué significa este trabalenguas). Se sugiere componer las funciones que conectan los índices, y usar que son crecientes para ver que la composición es creciente y cofinal.

Ejercicio 4.6.3. Sea $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ una red en un conjunto X . Probar que:

1. Dado $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{I}$ un subconjunto cofinal, o sea que para todo $i \in \mathbb{I}$ existe un $k \in \mathbb{K}$ tal que $k \geq i$, entonces la red $\mathbf{x}|_{\mathbb{K}} = (x_k)_{k \in \mathbb{K}}$ es una subred de $\mathbf{x}$. La h es la inclusión $h = \mathcal{J}_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{I}$.
2. En particular, fijado cualquier $i_0 \in \mathbb{I}$, la red $(x_i)_{i \geq i_0}$, que está dada por el conjunto $\mathbb{I}_0 = \{i \in \mathbb{I} : i \geq i_0\} \subseteq \mathbb{I}$, es subred de $\mathbf{x}$.

Ejercicio 4.6.4. Sea (X, τ) un ET y sea $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ una red en X .

1. Si $A \subseteq X$ cumple que $\mathbf{x} \xrightarrow{E} A$, entonces toda subred $\mathbf{y} = (y_j)_{j \in \mathbb{J}}$ de $\mathbf{x}$ también cumple que $\mathbf{y} \xrightarrow{E} A$. Para probar esto será útil usar que la función $h : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{I}$ que determina a $\mathbf{y}$ es creciente y cofinal, por lo que $C_j(\mathbf{y}) \subseteq C_{h(j)}(\mathbf{x})$, y al $h(j)$ se lo puede hacer tan grande como haga falta.
2. Si $x_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} x \in X$, toda subred $\mathbf{y} = (y_j)_{j \in \mathbb{J}}$ de $\mathbf{x}$ también converge a x .
3. Más aún, $x_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} x$ si y sólo si toda subred de $\mathbf{x}$ tiene una subred que converge a x . Para hacer la vuelta, alcanza elegir un subconjunto cofinal adecuado de $\mathbb{I}$.
4. Si $\mathbf{x}$ vive en un $Y \subseteq X$ e $y \in Y$, entonces $x_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} y \iff x_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} y$, donde τ_Y es la topología inducida por τ a Y . Lo mismo vale si el y es PA de $\mathbf{x}$ (en Y o en X).
5. Si $x_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} x \in X$, y me dan un **cerrado** $F \subseteq X$ tal que $\mathbf{x} \xrightarrow{E} F$, entonces $x \in F$.

Ejercicio 4.6.5. Sea (X, d) un EM, y pensémoslo como ET vía la topología τ_d . Dados un punto $x \in X$ y una red $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en X , probar que

$$x_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} x \iff \text{la red en } \mathbb{R} \quad d(x_i, x) \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} 0,$$

y que ambos equivalen a que $\mathbf{x} \xrightarrow{E} B(x, \varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$.

Ejercicio 4.6.6. En la Prop. 4.3.1 vimos que lo siguiente vale:

Sea (X, τ) un ET de tipo N_1 . Si una **sucesión** $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X tiene una **subred** $\mathbf{y} = (y_i)_{i \in \mathbb{I}}$ que converge a un $x \in X$, entonces existe una **subsucesión** $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbf{x}$ tal que $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$. Miremos la siguiente prueba de esto:

Si tomamos la subred $\mathbf{y}$ con su $h : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{N}$ cofinal creciente, sabemos que $h(\mathbb{I}) \subseteq \mathbb{N}$ es infinito. Lo numeramos en forma creciente $h(\mathbb{I}) = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ y tomamos la subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbf{x}$. Como h es creciente y sabemos que $y_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} x$, vemos que $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$. Y san se acabó.

El ejercicio consiste en ver qué parte de lo de arriba está mal. No puede ser correcto porque no se usa que X sea N_1 . Ya que estamos, probar ese enunciado es falso en general.

Ejercicio 4.6.7. Sea (X, d) un EM. Entonces se tiene que

1. Existe un EM completo X^c y una isometría $f : X \rightarrow X^c$ tal que $f(X)$ es denso en X^c .
2. Más aún, si me dan otro par (g, Y) que cumpla lo mismo (Y es completo y g manda isométricamente a X a un denso de Y), entonces existe una isometría sobre

$$(\text{o sea un h\omeo isom\etrico}) \quad \Phi : X^c \rightarrow Y \quad \text{tal que} \quad \Phi \circ f = g .$$

Esto se reinterpreta como que Φ es “la identidad” en X , si preferimos pensar que las completaciones X^c e Y son conjuntos que contienen a X y que f y g son las inclusiones de X en ellos.

Sugerimos construir X^c como el conjunto de sucesiones de Cauchy en X , dividido por la relación de equivalencia “ir hacia el mismo lado” (o sea que $d(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$). El espacio X “entra” en X^c como las clases de las sucesiones constantes.

Ejercicio 4.6.8. Sea (X, τ) un ET y sea $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ una red en X .

1. Si $\mathbf{x}$ vive en un $Y \subseteq X$ y es universal en Y , entonces también es universal si la pensamos como una red en un conjunto Z , siempre que $Y \subseteq Z \subseteq X$.
2. Si $\mathbf{x}$ es universal (ahora en X), toda subred de $\mathbf{x}$ también lo es.

Ejercicio 4.6.9. Llamemos $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, y sea $X = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Le daremos al espacio X una topología τ bastante rara:

- Pongamos que todos los puntos distintos del $(0, 0)$ son abiertos.
- Los entornos del $(0, 0)$ son los $U \subseteq X$ tales que, salvo finitos $m \in \mathbb{N}_0$, en la recta vertical $L_m = \{(m, n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ hay sólo finitos puntos fuera de U , o sea que existe

$$M_U \subseteq \mathbb{N}_0 \quad \text{tal que} \quad |\mathbb{N}_0 \setminus M_U| < \infty \quad \text{y} \quad |L_m \cap (X \setminus U)| < \infty \quad \text{para todo } m \in M_U .$$

Aparte se pide que $(0, 0) \in U$. Notar que todo tal entorno es clopen. Probar que

1. Esa τ es una topología para X .
2. Todo punto de X es la intersección de numerables entornos clopen.
3. (X, τ) es Hausdorff y Lindeloff.
4. El conjunto $X_0 = X \setminus \{(0, 0)\}$ es abierto y denso en X .
5. Hay redes en X_0 que convergen a $(0, 0)$.
6. Sin embargo, ninguna **sucesión** $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X_0 lo hace.
7. A pesar de lo que dice 1, X no puede ser de la clase N_1 , porque 6 no se lo permite.
8. Peor aún, mostrar que hay una sucesión $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X_0 tal que $(0, 0)$ es un punto de acumulación de $\mathbf{x}$.
9. En conclusión, existen subredes de la sucesión $\mathbf{x}$ de 8 que convergen a $(0, 0)$. Pero por el punto 6, ninguna de ellas puede estar dada por un conjunto cofinal de $\mathbb{N}$ (o sea, una subsucesión).
10. No leer esto cuando haga la última parte del Ejercicio 4.6.6.

Capítulo 5

Funciones continuas

Las “flechas” de la categoría de ET’s son las funciones continuas. La topología sólo aspira a estudiar propiedades de los espacios asociadas a sus funciones continuas, ya que cualquier tipo de “suavidad” queda afuera de los parámetros de la teoría. Por ello, veremos que la equivalencia entre dos ET’s consistirá en que exista entre ambos lo que llamaremos un **homeomorfismo**, que es una función biyectiva y bicontinua. Esto proveerá de una biyección natural entre sus topologías. Además, utilizando las funciones continuas, se tendrán herramientas para construir nuevas topologías y refinar las propiedades de los ET’s. En el Capítulo 2 hicimos una intro básica sobre las continuas. En la primera sección repasaremos esos resultados y aggiornaremos un poco las cosas. Empecemos.

5.1 Continuidad básica bis

Sean (X, τ) e (Y, σ) dos ET’s, y sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Vimos que f es **continua** si

$$f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\} \in \tau \quad \text{para todo} \quad V \in \sigma$$

(alcanza con V en una sub-base de σ). Y que esto equivale a que $f^{-1}(F)$ sea τ -cerrado para todo σ -cerrado $F \subseteq Y$. Por otra parte, decimos que f es continua **en un punto** $x \in X$ si

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{O}_\tau(x) \quad \text{para todo} \quad A \in \mathcal{O}_\sigma(f(x)) ,$$

y vimos que la f es continua (en X) si y sólo si es continua en x para todo $x \in X$. Recordemos que se denota por $C\left((X, \tau), (Y, \sigma)\right)$ o también $C(X, Y)$, al conjunto de todas las funciones continuas $g : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$. La operación $A \mapsto f^{-1}(A)$ tiene la siguiente propiedad:

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A) \quad \text{para todo} \quad A \in \mathcal{P}(Y) , \quad (5.1)$$

Vayamos ahora hacia una caracterización de la continuidad relacionada con la convergencia:

Proposición 5.1.1. Sean $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ y $x \in X$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. f es continua en x .
2. Para cada $A \in \mathcal{O}_\sigma(f(x))$, existe un $B \in \mathcal{O}_\tau(x)$ tal que $f(B) \subseteq A$.
3. Para toda red $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en X tal que $x_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} x$, se tiene que $f(x_i) \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} f(x)$.

Demostración. $1 \rightarrow 2$: Basta tomar $B = f^{-1}(A)$.

$2 \rightarrow 3$: Fijemos la red $x_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} x$. Dado $A \in \mathcal{O}_\sigma(f(x))$, sea $B \in \mathcal{O}_\tau(x)$ tal que $f(B) \subseteq A$.

Sabemos que $\mathbf{x} \xrightarrow{E} B$, por lo que $f \circ \mathbf{x} \xrightarrow{E} f(B) \subseteq A$. Esto muestra que $f(x_i) \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} f(x)$.

$3 \rightarrow 1$: Si existiera un $A \in \mathcal{O}_\sigma(f(x))$ tal que $f^{-1}(A) \notin \mathcal{O}_\tau(x)$, usando la Prop. 2.2.3

$$\text{que decía que } X \setminus B^\circ = \overline{X \setminus B},$$

y las ecuaciones (2.1) y (5.1), tendríamos que $x \notin f^{-1}(A)^\circ$, o sea que

$$x \in X \setminus f^{-1}(A)^\circ = \overline{(X \setminus f^{-1}(A))} = \overline{f^{-1}(Y \setminus A)}.$$

Por el Teo. 4.2.6, existiría una red $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en $f^{-1}(Y \setminus A)$ tal que $x_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} x$. Sin embargo, $f(\mathbf{x})$ vive toda ella en $Y \setminus A$, y A era entorno de $f(x)$. O sea que $f(x_i) \not\xrightarrow{i \in \mathbb{I}} f(x)$ ■

Observación 5.1.2. Sean X e Y dos EM's y sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Entonces f es continua en un $x \in X$ si y sólo si vale la fórmula ε, δ de siempre:

$$\text{para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe un } \delta > 0 \text{ tal que } d_X(z, x) < \delta \implies d_Y(f(z), f(x)) < \varepsilon, \quad (5.2)$$

donde estamos hablando de la continuidad relativa a las topologías inducidas por las métricas. En efecto, basta aplicar la Prop. 5.1.1, más el hecho de que las bolas alrededor de un punto forman una base de entornos de ese punto. ▲

Ya que estamos, recordemos la siguiente consecuencia de la Prop. 4.3.1:

Proposición 5.1.3. Sean (X, τ) y (Y, σ) dos ET's. Supongamos que X es de tipo N_1 . Entonces se tendrá que una función $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ es continua en un $x \in X$ si y sólo si para toda **sucesión** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X tal que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\tau} x$, debe pasar que $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\sigma} f(x)$. En particular, esto se puede aplicar al caso en que el dominio X sea un EM.

Demostración. Una implicación sale usando la Prop. 5.1.1 porque, al fin y al cabo, las sucesiones son redes. La otra se muestra inspeccionando la prueba de $3 \rightarrow 1$ en la Prop. 5.1.1. Allí uno tomaba una red en un conjunto que converge a alguien de su clausura (todo dentro del dominio X), usando el Teo. 4.2.6. Pero por la Prop. 4.3.1, ahora uno puede asumir que existe una sucesión que hace eso. Despues se sigue igual que allá. ■

Definición 5.1.4. Sean (X, τ) e (Y, σ) dos ET's, y sea $f : X \rightarrow Y$ una función.

1. Diremos que f es **abierto** si $f(U) = \{f(x) : x \in U\} \in \sigma$ para todo $U \in \tau$.
2. Diremos que f es un **homeomorfismo** (**hómeo** para los amigos) si es biyectiva, continua y abierta. Esto equivale a decir que tanto f como f^{-1} sean funciones continuas.
3. Diremos que X e Y son topológicamente equivalentes, y escribiremos $X \cong Y$ si existe un hómeo $f : X \rightarrow Y$. Si se quiere especificar el hómeo f , se escribirá $X \xrightarrow{f} Y$. En este caso, la aplicación $U \mapsto f(U)$ deviene en una biyección entre τ y σ . ▲
4. Diremos que f es un **embedding** (o que f incrusta X dentro de Y) si cumple que
 - (a) Es inyectiva y continua.
 - (b) Si llamamos $Z = f(X) \subseteq Y$ y consideramos en Z la topología inducida por σ , entonces la correstricción $f|_X^Z : X \rightarrow Z$ es un hómeo (o sea que es abierta).

En tal caso, módulo la identificación vía $\xrightarrow{f}$, podremos asumir que $X = Z \subseteq Y$, y que τ es la topología inducida por σ a X . También escribiremos $f : X \hookrightarrow Y$. ▲

Ejercicios 5.1.5. Sean X, Y dos ET's y $f : X \rightarrow Y$ una función.

1. La f es continua si y sólo si para toda red $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en X que converge a algún $x \in X$, se cumple que $f(x_i) \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} f(x)$.

A partir de ahora supongamos que f es continua.

2. Sea $D \subseteq X$ un denso. Si tenemos otra $g \in C(X, Y)$, entonces para mostrar que $f = g$ alcanza con testear que $f|_D = g|_D$. Otra manera de decirlo:

“dos continuas que coinciden en un denso son iguales.”

3. Si f es sobre, entonces $f(D)$ es denso en Y .
4. Más aún, dado un $A \subseteq X$ se cumple que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
5. Para que valga la igualdad $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ para todo $A \subseteq X$ no alcanza con que f sea sobre. Pero sí que sea sobre y abierta. ▲

5.2 Métricas y topologías

Existen dos tipos de equivalencia entre las distintas métricas en un mismo espacio X . Esto es así porque puede haber dos métricas muy distintas que produzcan la misma topología en X , por lo que a la hora de definir equivalencias, hay que diferenciar si se tienen en cuenta el punto de vista métrico o bien el puramente topológico.

Definición 5.2.1. Sea X un conjunto y sean d_1 y d_2 dos métricas en X . Diremos que son

1. Topológicamente equivalentes, y notaremos $d_1 \stackrel{T}{\cong} d_2$, si se tiene que $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$.
2. Equivalentes (a secas) si existen números $m, M > 0$ tales que

$$m d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq M d_2(x, y) \quad \text{para todo par } x, y \in X. \quad (5.3)$$

En tal caso, notaremos que $d_1 \stackrel{M}{\cong} d_2$. ▲

Vale la pena ver un ejemplo: la función $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ dada por

$$f(t) = \frac{t}{1 + |t|} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}$$

es un hómoeo, si en ambos espacios consideramos la topología usual. En efecto, su inversa está dada por la fórmula $f^{-1}(s) = \frac{s}{1 - |s|}$, para $s \in (-1, 1)$, que es también continua. Luego si en $\mathbb{R}$ consideramos las métricas

$$d_1(t_1, t_2) = |t_1 - t_2| \quad \text{y} \quad d_2(t_1, t_2) = |f(t_1) - f(t_2)|, \quad \text{para todo par } t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

tendremos que $d_1 \stackrel{T}{\cong} d_2$, porque un $A \subseteq \mathbb{R}$ es d_2 -abierto si y sólo si $f(A)$ es abierto en $(-1, 1)$, lo que a su vez equivale a que A sea d_1 -abierto, por el hecho de que f es hómoeo. Sin embargo, no puede valer que $d_1 \stackrel{M}{\cong} d_2$ porque $\mathbb{R}$ es acotado para d_2 y no lo es para d_1 . Otra manera de verlo es que $d_1(t, t+1) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, mientras que, para $t > 0$ se tiene que $d_2(t, t+1) = \frac{1}{(t+1)(t+2)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, por lo que ningún $M > 0$ va a andar el la Ec. (5.3).

Proposición 5.2.2. Sea X un conjunto y sean d_1 y d_2 dos métricas en X .

1. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) Hay equivalencia topológica $d_1 \stackrel{T}{\cong} d_2$.
- (b) La función $\mathcal{I}_X : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$ es un hómoeo.
- (c) Dado un $x \in X$, se tiene que para todo $\varepsilon > 0$, existen $\delta_1(x)$ y $\delta_2(x) > 0$ (que dependen de x) tales que

$$B_{d_1}(x, \delta_1(x)) \subseteq B_{d_2}(x, \varepsilon) \quad \text{y} \quad B_{d_2}(x, \delta_2(x)) \subseteq B_{d_1}(x, \varepsilon).$$

- (d) Dada una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X y un punto $x \in X$, se tiene que

$$d_1(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff d_2(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- (e) Dados $x \in X$ y $A \subseteq X$, se tiene que $d_1(x, A) = 0 \iff d_2(x, A) = 0$.

(f) Dados $x \in X$ y $B \subseteq X$ tales que $x \in B$, se tiene que

$$\exists \varepsilon_1 > 0 \text{ tal que } B_{d_1}(x, \varepsilon_1) \subseteq B \iff \exists \varepsilon_2 > 0 \text{ tal que } B_{d_2}(x, \varepsilon_2) \subseteq B .$$

2. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) Hay equivalencia métrica $d_1 \stackrel{M}{\cong} d_2$.
- (b) Las funciones $\mathcal{I}_X : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$ y su inversa $\mathcal{I}_X : (X, d_2) \rightarrow (X, d_1)$ son **uniformemente** continuas.
- (c) Para todo $\varepsilon > 0$, existen δ_1 y $\delta_2 > 0$ (que **NO** dependen de x) tales que

$$B_{d_1}(x, \delta_1) \subseteq B_{d_2}(x, \varepsilon) \quad \text{y} \quad B_{d_2}(x, \delta_2) \subseteq B_{d_1}(x, \varepsilon) ,$$

para todo $x \in X$.

Por lo tanto tenemos muchas formas de mostrar que $d_1 \stackrel{M}{\cong} d_2 \implies d_1 \stackrel{T}{\cong} d_2$.

Demostración.

- 1. Es claro que el hecho de que $\mathcal{I}_X : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$ sea un hómoio equivale a que ambas topologías coincidan. El ítem (c) describe la bicontinuidad de $\mathcal{I}_X : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$ en términos de la Ec. (5.2). Por otra parte, hemos visto que tanto el fenómeno de la convergencia (que en EM's se describe completamente con sucesiones) como los operadores $A \mapsto \bar{A}$ y $B \mapsto B^\circ$ caracterizan a (y son caracterizados por) la topología en cuestión. Esto da las equivalencias con (d), (f) y, vía el Lema 2.4.11, con (e).
- 2. Las pruebas son inmediatas. El enunciado se formula sobre todo para comparar con las condiciones del ítem 1. ■

5.3 Productos y cocientes

5.3.1 Topología inicial

Definición 5.3.1. Sea X un conjunto y sea $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha \in \mathbb{A}\}$ una familia indexada en $\mathbb{A}$ de funciones $f_\alpha : X \rightarrow (Y_\alpha, \tau_\alpha)$ hacia sendos ET's. Denotaremos por

$$\tau_{\mathcal{F}} = \bigwedge \left\{ \tau \subseteq \mathcal{P}(X) : \tau \text{ es una topología tal que } f_\alpha \in C\left((X, \tau), (Y_\alpha, \tau_\alpha)\right) \quad \forall \alpha \in \mathbb{A} \right\} .$$

O sea que $\tau_{\mathcal{F}}$ a la **mínima** topología en X que hace de todas las f_α funciones continuas. Esta $\tau_{\mathcal{F}}$ se llama la **topología inicial** asociada a $\mathcal{F}$, y se caracteriza por el hecho de que tiene como sub-base a la familia

$$\rho_{\mathcal{F}} = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{A}} \left\{ f_\alpha^{-1}(U) : U \in \tau_\alpha \right\} . \tag{5.4}$$

Observar que si $\mathcal{F} = \{f\}$ (una sola función), entonces $\rho_{\mathcal{F}}$ ya da toda $\tau_{\mathcal{F}}$. ▲

Proposición 5.3.2. Sea $\tau_{\mathcal{F}}$ la topología inicial en X dada por la familia $\mathcal{F} = \{f_{\alpha} : \alpha \in \mathbb{A}\}$. Dada una red $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en X y un punto $x \in X$, se tiene que

$$x_i \xrightarrow[i \in \mathbb{I}]{\tau_{\mathcal{F}}} x \iff f_{\alpha}(x_i) \xrightarrow[i \in \mathbb{I}]{\tau_{\alpha}} f_{\alpha}(x) \quad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{A} .$$

Demostración. La flecha $\implies$ es clara por la definición de $\tau_{\mathcal{F}}$ y la Prop. 5.1.1. Para ver la recíproca, tomemos $V \in \mathcal{O}_{\tau_{\mathcal{F}}}(x)$. Por la Ec. (5.4) y la Prop. 2.3.2, deben existir

$$n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{A} \quad \text{y entornos } U_k \in \mathcal{O}_{\tau_{\alpha_k}}(f_{\alpha_k}(x)), \quad k \in \mathbb{I}_n ,$$

tales que $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{I}_n} f_{\alpha_k}^{-1}(U_k) \subseteq V$. Como las redes $f_{\alpha_k}(x_i) \xrightarrow[i \in \mathbb{I}]{\tau_{\alpha_k}} f_{\alpha_k}(x)$, para cada $k \in \mathbb{I}_n$ podemos tomar un $i_k \in \mathbb{I}$ tal que $f_{\alpha_k}(x_i) \in U_k$ para todo $i \geq i_k$. Pero por la Ec. (4.1), existe un $i_M \in \mathbb{I}$ que mayor a todos los i_k . Luego,

$$\text{si } i \geq i_M \implies f_{\alpha_k}(x_i) \in U_k \text{ para todo } k \in \mathbb{I}_n \implies x_i \in \bigcap_{k \in \mathbb{I}_n} f_{\alpha_k}^{-1}(U_k) \subseteq V .$$

O sea que $\mathbf{x} \xrightarrow{E} V$. Como esto pasa para todo $V \in \mathcal{O}_{\tau_{\mathcal{F}}}(x)$, deducimos que $x_i \xrightarrow[i \in \mathbb{I}]{} x$. ■

Corolario 5.3.3. Sea $\tau_{\mathcal{F}}$ la topología inicial en X dada por la familia $\mathcal{F} = \{f_{\alpha} : \alpha \in \mathbb{A}\}$, con las $f_{\alpha} : X \rightarrow (Y_{\alpha}, \tau_{\alpha})$. Sea (Z, σ) otro ET. Dada $g : (Z, \sigma) \rightarrow (X, \tau_{\mathcal{F}})$, se tiene que

$$g \in C\left((Z, \sigma), (X, \tau_{\mathcal{F}})\right) \iff f_{\alpha} \circ g \in C\left((Z, \sigma), (Y_{\alpha}, \tau_{\alpha})\right) \quad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{A} . \quad (5.5)$$

Demostración. Como antes, la flecha $\implies$ es clara, y la gracia es la vuelta. Probaremos la continuidad de g en cada $z \in Z$ usando la Prop. 5.1.1. Para ello, tomemos un $z \in Z$ y una red $\mathbf{z} = (z_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en Z tal que $z_i \xrightarrow[i \in \mathbb{I}]{} z$. Si asumimos lo que dice a la derecha de (5.5), sabremos que $f_{\alpha}(g(z_i)) \xrightarrow[i \in \mathbb{I}]{\tau_{\alpha}} f_{\alpha}(g(z))$ para todo $\alpha \in \mathbb{A}$. Ahora, por la Prop. 5.3.2, podemos deducir que $g(z_i) \xrightarrow[i \in \mathbb{I}]{\tau_{\mathcal{F}}} g(z)$. O sea que g debe ser continua en cada $z \in Z$. Pero entonces la Prop. 2.5.2 asegura que g es continua a secas. ■

5.3.2 Topología producto

Notaciones: (Repaso de 1.3.3) Sea $\left((X_{\alpha}, \tau_{\alpha})\right)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ una familia de ET's.

1. Llamemos $\mathbb{P} = \prod_{\alpha \in \mathbb{A}} X_{\alpha}$ a su producto cartesiano.
2. Para no confundirnos con las redes, un elemento típico de $\mathbb{P}$ se denotará por $\{x_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ (llaves en vez de paréntesis), donde cada $x_{\alpha} \in X_{\alpha}$.
3. Para cada $\beta \in \mathbb{A}$, llamaremos $\pi_{\beta} : \mathbb{P} \rightarrow X_{\beta}$ a la proyección que a un elemento $\{x_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{A}} \in \mathbb{P}$ lo manda al correspondiente x_{β} (o sea “evaluar” en β).

4. Recordemos de la Ec. (1.4) que, si para cada $\alpha \in \mathbb{A}$ tenemos sendos subconjuntos $Y_\alpha \subseteq X_\alpha$, asumiremos que $\prod_{\alpha \in \mathbb{A}} Y_\alpha \subseteq \mathbb{P}$. ▲

Se busca una topología para el conjunto $\mathbb{P}$ que tenga propiedades agradables. Se puede pensar como modelo a $\mathbb{R}^2$ donde, si bien la base común de su topología está formada por bolas redondas, uno puede también tomar una base de rectángulos abiertos

$$(a, b) \times (c, d) = \left((a, b) \times \mathbb{R} \right) \cap \left(\mathbb{R} \times (c, d) \right) = \pi_1^{-1}((a, b)) \cap \pi_2^{-1}((c, d)) .$$

Este será, en efecto, el modelo a seguir para la construir lo que se llamará “la topología producto” en $\mathbb{P}$. Pero hay una decisión a tomar: ¿Qué se hace en el caso de que $\mathbb{A}$ sea infinito? Una opción sería multiplicar abiertos de cada τ_α en **todas** las coordenadas. Esto se llamará la *topología caja* en $\mathbb{P}$. La otra opción (la buena), será mirar el lado derecho de la ecuación de arriba, y compararla con la Ec. (5.4) de las topologías iniciales.

Pensando así podemos tomar la familia de funciones $\mathcal{F} = \{\pi_\alpha : \alpha \in \mathbb{A}\}$, y construir la topología inicial asociada a $\mathcal{F}$ que llamaremos $\tau_{\mathbb{P}} = \tau_{\mathcal{F}}$. Ya vamos a ver qué pinta tienen sus abiertos, pero de antemano, sin saber cómo son, sabemos que tendrá las propiedades agradables en las que pensábamos, que son las traducciones a $\mathbb{P}$ de la Prop. 5.3.2 y el Cor. 5.3.3. Formalizemos todo esto en el siguiente enunciado:

Proposición 5.3.4. Sea $\left((X_\alpha, \tau_\alpha) \right)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ una familia de ET's. Sea $\mathbb{P} = \prod_{\alpha \in \mathbb{A}} X_\alpha$, dotado de la **topología producto** $\tau_{\mathbb{P}}$, que es la inicial asociada a la familia $\mathcal{F} = \{\pi_\alpha : \alpha \in \mathbb{A}\}$. Se tienen las siguientes propiedades:

1. Una base $\beta_{\mathbb{P}}$ de $\tau_{\mathbb{P}}$ está dada por los conjuntos contruidos con el siguiente proceso:
 - (a) Sea $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{A}$ un subconjunto **finito** de índices.
 - (b) Sean $U_\alpha \in \tau_\alpha$, un abierto para cada $\alpha \in \mathbb{F}$.
 - (c) Un elemento de $\beta_{\mathbb{P}}$ construido con estos datos será:

$$U = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{F}} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) = \left\{ \{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}} \in \mathbb{P} : x_\alpha \in U_\alpha, \alpha \in \mathbb{F} \right\} = \prod_{\alpha \in \mathbb{F}} U_\alpha \times \prod_{\alpha \notin \mathbb{F}} X_\alpha .$$

La base $\beta_{\mathbb{P}}$ constará de todos los abiertos de este tipo, moviéndose en todos los conjuntos **finitos** de índices $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{A}$ y todas las elecciones de abiertos U_α en los $\alpha \in \mathbb{F}$.

2. Una $f : Z \rightarrow \mathbb{P}$ será continua si y sólo si cada $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ es continua.
3. Una red $\mathbf{x} = (\{x_{i,\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{A}})_{i \in \mathbb{I}}$ en $\mathbb{P}$ convergerá a un punto $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}} \in \mathbb{P}$ si y sólo si

$$\text{cada red } \pi_\alpha \circ \mathbf{x} = (x_{i,\alpha})_{i \in \mathbb{I}} \text{ en } X_\alpha \text{ converge a } x_\alpha ,$$

o sea que $x_{i,\alpha} \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} x_\alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{A}$ (todo esto dentro de cada espacio X_α y en su topología τ_α).

Demostración. Cada ítem no es otra cosa de la traducción a este caso particular de los tres resultados vistos para topologías iniciales: El ítem 2. es el Cor. 5.3.3, y el ítem 3. es la Prop. 5.3.2. El ítem 1. se basa en la Ec. (5.4). Aquí hace falta una aclaración: al intersectar finitas contraímagenes de abiertos (o sea elementos de la sub-base $\rho_{\mathcal{F}}$), como indica la Prop. 2.3.2, podrían aparecer varias correspondientes al mismo α , pero con distintos abiertos de τ_{α} . Sin embargo, eso no hace falta escribirlo al describir un elemento de $\beta_{\mathbb{P}}$, porque la operación $V \mapsto \pi_{\alpha}^{-1}(V)$ respeta intersecciones. Luego uno puede intersectar primero todos los abiertos correspondientes dentro del mismo τ_{α} , y quedarse con un solo U_{α} para cada α que aparezca en la lista finita. ■

Gracias a la Prop. 5.3.4 muchas propiedades de los espacios cordenados X_{α} (si todos ellos las tienen) siguen siendo válidas en el espacio producto $\mathbb{P}$, siempre que uno use la topología producto $\tau_{\mathbb{P}}$. El caso más importante será la compacidad, que veremos más adelante (esto es el famoso Teorema de Tychonoff). Este tipo de propiedades son las que justifican la elección consensuada de usarla a ella y no a la de la caja, que podría verse como más intuitiva. Demás está decir que en el caso de que $\mathbb{A}$ sea finito ambas coinciden. Esto muestra, por ejemplo, que en $\mathbb{R}^n$ la topología usual (inducida por la métrica euclídea) coincide con la topología producto, que proviene de pensar a $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$.

Proposición 5.3.5. Sea $\mathbb{P} = \prod_{\alpha \in \mathbb{A}} X_{\alpha}$, dotado de la topología producto. Para cada $\alpha \in \mathbb{A}$ tomemos subconjuntos $B_{\alpha} \subseteq X_{\alpha}$. Luego la “cajita” $B \subseteq \mathbb{P}$ dada por

$$B = \prod_{\alpha \in \mathbb{A}} B_{\alpha}, \quad \text{verifica que} \quad \overline{B} = \prod_{\alpha \in \mathbb{A}} \overline{B_{\alpha}}.$$

En particular, si los B_{α} eran todos cerrados (o densos), también B lo será.

Demostración. Si algún $B_{\alpha} = \emptyset$ todo da el $\emptyset$ y a otra cosa. Así que asumamos que todos los $B_{\alpha} \neq \emptyset$ y sigamos. Llamemos $C = \prod_{\alpha \in \mathbb{A}} \overline{B_{\alpha}}$. Dado $y = \{y_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{A}} \in C$, tomemos un entorno básico de y de la forma $V = \prod_{\alpha \in \mathbb{F}} U_{\alpha} \times \prod_{\alpha \notin \mathbb{F}} X_{\alpha}$, para cierto $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{A}$ finito. Para cada $\alpha \in \mathbb{F}$, tomemos un $x_{\alpha} \in B_{\alpha} \cap U_{\alpha}$, que existe porque $y_{\alpha} \in \overline{B_{\alpha}}$. Rellenemos con $x_{\alpha} \in B_{\alpha}$ cualesquiera para los $\alpha \notin \mathbb{F}$. Luego $x = \{x_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{A}} \in B \cap V$. Esto muestra que $C \subseteq \overline{B}$.

Por otro lado, tomando redes en B y aplicando el ítem 3. de la Prop. 5.3.4, uno muestra inmediatamente que $\overline{B} \subseteq C$. Otra forma de verlo es usar que $\mathbb{P} \setminus C = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{A}} \pi_{\alpha}^{-1}(X_{\alpha} \setminus \overline{B_{\alpha}}) \in \tau_{\mathbb{P}}$, por lo que C debe ser cerrado. ■

Proposición 5.3.6. Sea $\left((X_{\alpha}, \tau_{\alpha}) \right)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ una familia de ET's, y sea $\mathbb{P} = \prod_{\alpha \in \mathbb{A}} X_{\alpha}$, dotado de la **topología producto** $\tau_{\mathbb{P}}$. Si todos los espacios $(X_{\alpha}, \tau_{\alpha})$ son de una de las siguientes clases: T_0 , T_1 , Hausdorff o regular, entonces $\mathbb{P}$ es también de esa clase. Sin embargo, $\mathbb{P}$ puede **no** ser normal aunque todos los T_{α} lo sean, incluso para el caso de $\mathbb{A}$ finito.

Demostración. En los tres primeros casos (T_0 , T_1 y T_2), el problema se describe a partir de un par de puntos de $\mathbb{P}$ que, por ser distintos, deben diferir en alguna coordenada $\alpha \in \mathbb{A}$. Y la cosa se arregla operando en esa sola coordenada, con abiertos $\pi_{\alpha}^{-1}(U)$ de la sub-base $\rho_{\mathcal{F}}$.

Probaremos en detalle solo el caso asociado a la regularidad, que no sale por aquel método. Por la Obs. 2.4.9, basta ver que si $x = \{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}} \in W \in \tau_{\mathbb{P}}$, entonces existe $V \in \tau_{\mathbb{P}}$ tal que $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq W$. Para empezar, por la Prop. 5.3.4 sabemos que existe

$$U = \prod_{\alpha \in \mathbb{F}} U_\alpha \times \prod_{\alpha \notin \mathbb{F}} X_\alpha \in \beta_{\mathbb{P}} \quad (\text{con } \mathbb{F} \text{ finito}) \quad , \quad \text{tal que} \quad x \in U \subseteq W .$$

Para cada $\alpha \in \mathbb{F}$, tenemos que $x_\alpha \in U_\alpha$ y, por la regularidad de las coordenadas, existen sendos $V_\alpha \in \tau_\alpha$ tales que $x_\alpha \in V_\alpha \subseteq \bar{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{F}$. Finalmente, si tomamos

$$V = \prod_{\alpha \in \mathbb{F}} V_\alpha \times \prod_{\alpha \notin \mathbb{F}} X_\alpha \in \tau_{\mathbb{P}} \quad , \quad \text{se tiene que} \quad x \in V \subseteq \bar{V} = \prod_{\alpha \in \mathbb{F}} \bar{V}_\alpha \times \prod_{\alpha \notin \mathbb{F}} X_\alpha \subseteq U \subseteq W ,$$

donde la igualdad de la derecha sobre las clausuras vale por la Prop. 5.3.5. El hecho de que la cosa no camina para espacios normales se verá en los ejemplos (ver 8.2.1). ■

Ejercicio 5.3.7. Sea $\mathbb{P} = \prod_{\alpha \in \mathbb{A}} (X_\alpha, \tau_\alpha)$, dotado de la topología producto $\tau_{\mathbb{P}}$. Supongamos que, para cada $\alpha \in \mathbb{A}$, tenemos un denso $D_\alpha \subseteq X_\alpha$. Por la Prop. 5.3.5 sabemos que el producto $\prod_{\alpha \in \mathbb{A}} D_\alpha$ es denso en $\mathbb{P}$. Pero se puede construir un denso mucho más chico: Asumamos que $\mathbb{P} \neq \emptyset$, y fijemos un $x = \{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}} \in \mathbb{P}$. Definamos los conjuntos

$$D_{\mathbb{F}} = \prod_{\alpha \in \mathbb{F}} D_\alpha \times \prod_{\alpha \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{F}} \{x_\alpha\} \subseteq \mathbb{P} \quad , \quad \text{para cada} \quad \mathbb{F} \in \mathcal{P}_F(\mathbb{A}) .$$

Luego el conjunto $D = \bigcup_{\mathbb{F} \in \mathcal{P}_F(\mathbb{A})} D_{\mathbb{F}}$ es **denso** en $\mathbb{P}$. ▲

Proposición 5.3.8. Producto de conexos (con la topología producto) es conexo. Lo mismo pasa con los productos de arcoconexos (quedan idem).

Demostración. Sea $\mathbb{P} = \prod_{\alpha \in \mathbb{A}} X_\alpha$, con todos los (X_α, τ_α) conexos. Como el vacío es conexo (porque todo subconjunto es impropio), podemos asumir que $\mathbb{P} \neq \emptyset$.

Paso 1: Supongamos que $\mathbb{A}$ es finito. Por un argumento inductivo evidente podemos reducirnos al caso $\mathbb{A} = \{1, 2\}$. Si fijamos un par $(x_1, x_2) \in \mathbb{P}$, consideremos las “cruces”

$$C_x = (X_1 \times \{x\}) \cup (\{x_1\} \times X_2) \quad , \quad \text{para cada} \quad x \in X_2 .$$

Observar que $\mathbb{P} = \bigcup_{x \in X_2} X_1 \times \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in X_2} C_x$. Además, el Teo. 3.1.6 asegura que cada C_x es conexo, porque los dos cachos se cortan en el punto (x_1, x) . Finalmente, como sabemos que $(x_1, x_2) \in \{x_1\} \times X_2 \subseteq \bigcap_{x \in X_2} C_x \neq \emptyset$, el mismo Teorema nos dice que $\mathbb{P}$ es conexo.

Paso 2: A lo que sea. Tomemos un $x = \{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}} \in \mathbb{P}$. Definamos los conjuntos

$$B_{\mathbb{F}} = \prod_{\alpha \in \mathbb{F}} X_\alpha \times \prod_{\alpha \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{F}} \{x_\alpha\} \subseteq \mathbb{P} \quad \text{para cada} \quad \mathbb{F} \in \mathcal{P}_F(\mathbb{A}) .$$

Como cada $B_{\mathbb{F}}$ (con la inducida de la producto) es hómoeo al respectivo $\prod_{\alpha \in \mathbb{F}} X_{\alpha}$, el paso anterior dice que todos los $B_{\mathbb{F}}$ son subconjuntos conexos de $\mathbb{P}$. Por el Teo. 3.1.6, también

$$B = \bigcup_{\mathbb{F} \in \mathcal{P}_F(\mathbb{A})} B_{\mathbb{F}} \quad \text{es conexo} \quad (\text{ porque todos los } B_{\mathbb{F}} \text{ se cortan en } x).$$

Finalmente, el Ejer. 5.3.7 muestra que B es **denso** en $\mathbb{P}$. Luego el Teo. 3.1.7 asegura que todo $\mathbb{P}$ es conexo. La prueba para arcoconexos es más fácil:

Dados $x = \{x_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ e $y = \{y_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{A}} \in \mathbb{P}$, tomamos sendas curvas continuas $\gamma_{\alpha} : [0, 1] \rightarrow X_{\alpha}$ que unan cada entrada x_{α} con la respectiva y_{α} , y definimos la curva

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{P} \quad \text{dada por} \quad \gamma(t) = \{\gamma_{\alpha}(t)\}_{\alpha \in \mathbb{A}} \quad \text{para } t \in [0, 1].$$

Esta γ queda continua por el item 2 de la Prop. 5.3.4. Y une x con y . ■

5.3.9 (Producto de funciones). Sean $f_{\alpha} : X_{\alpha} \rightarrow Y_{\alpha}$ una familia de funciones indexada por $\alpha \in \mathbb{A}$. Asumamos que todos los conjuntos involucrados son ET's. Entonces definimos

$$F = \prod_{\alpha \in \mathbb{A}} f_{\alpha} : \prod_{\alpha \in \mathbb{A}} X_{\alpha} \rightarrow \prod_{\alpha \in \mathbb{A}} Y_{\alpha}, \quad \text{por} \quad F\left(\{x_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{A}}\right) = \{f_{\alpha}(x_{\alpha})\}_{\alpha \in \mathbb{A}},$$

la función producto, que opera como las f_{α} en cada coordenada $\alpha \in \mathbb{A}$. Si asumimos que todas las f_{α} tienen la propiedad **P**, se ve fácilmente que también F tendrá **P**, para las propiedades de ser

inyectiva, suryectiva, continua, hómoeo, embedding, suryectiva + abierta.

Observemos que, para cada $\alpha \in \mathbb{A}$ tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\alpha \in \mathbb{A}} X_{\alpha} & \xrightarrow{F} & \prod_{\alpha \in \mathbb{A}} Y_{\alpha} \\ \pi_{\beta} \downarrow & & \downarrow \pi_{\beta} \\ X_{\beta} & \xrightarrow{f_{\beta}} & Y_{\beta} \end{array}$$

Eso, más la el item 2 de la Prop. 5.3.4 muestra que F es continua. Esto sale también usando redes, aunque la notación es engorrosa. La prueba de los otros casos es directa y se deja como ejercicio. ▲

Ejercicios 5.3.10. Sea $\mathbb{P} = \prod_{n \in \mathbb{N}} (X_n, \tau_n)$, dotado de la topología producto $\tau_{\mathbb{P}}$.

1. Si suponemos que todos los X_n son de tipo N_2 , entonces anche $\mathbb{P}$ es N_2 .
2. Idem con N_1 y separable.
3. Si suponemos que todos los X_k son Lindeloff, aún si asumimos que $\mathbb{P} = X_1 \times X_2$, puede suceder que $\mathbb{P}$ no sea Lindeloff.

4. Si cada τ_n proviene de una métrica d_n en X_n , entonces

(a) Si para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $d'_n(x, y) = \min\{d_n(x, y), 1\}$, para $x, y \in X_n$, entonces d'_n es otra métrica en X_n y se tiene que $\tau_n = \tau_{d_n} = \tau_{d'_n}$.

(b) La función $d_{\mathbb{P}} : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por

$$d_{\mathbb{P}}(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{d'_n(x_n, y_n)}{2^n}, \quad \{x_n\}, \{y_n\} \in \mathbb{P}$$

es una métrica en $\mathbb{P}$ tal que $\tau_{d_{\mathbb{P}}} = \tau_{\mathbb{P}}$.

En otras palabras, producto numerable de metrizables es metrizable. ▲

Ejercicio 5.3.11. Sea (X, τ) un ET. Probar que

1. X es Hausdorff si y sólo si la diagonal

$$\Delta_X = \{ (x, y) \in X \times X : x = y \}$$

es cerrada en la topología producto de $X \times X$.

2. Si X es Hausdorff, (Y, σ) es otro ET y nos dan $f, g \in C(Y, X)$, entonces

$$Z_{f,g} = \{ y \in Y : f(y) = g(y) \} \quad \text{es cerrado en } Y.$$

Lamentablemente no vale usar a $f - g$, porque X no siempre tiene $-$ ni 0 . ▲

Ejercicio 5.3.12. Sea (X, τ) un ET que es regular y sean $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ e $\mathbf{y} = (y_j)_{j \in \mathbb{J}}$ dos redes en X , ambas convergentes. Entonces son equivalentes:

- Las dos redes tienen el mismo límite.
- La red “doble” $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_i, y_j)_{i,j \in \mathbb{I} \times \mathbb{J}}$, que vive en $X \times X$, cumple que

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \xrightarrow{E} U \text{ para todo abierto } U \subseteq X \times X \text{ tal que } \Delta_X = \{ (x, x) : x \in X \} \subseteq U.$$

El orden de $\mathbb{I} \times \mathbb{J}$ es en las dos entradas a la vez. ▲

5.3.3 Topología final

Definición 5.3.13. Sea Y un conjunto y sea $\mathcal{G} = \{f_\alpha : \alpha \in \mathbb{A}\}$ una familia indexada en $\mathbb{A}$ de funciones $g_\alpha : (X_\alpha, \tau_\alpha) \rightarrow Y$ con dominios en sendos ET's. Denotaremos por

$$\tau^{\mathcal{G}} = \bigvee \left\{ \tau \subseteq \mathcal{P}(Y) : \tau \text{ es una topología tal que } f_\alpha \in C((X_\alpha, \tau_\alpha), (Y, \tau)) \quad \forall \alpha \in \mathbb{A} \right\}.$$

O sea que $\tau_{\mathcal{G}}$ a la **máxima** topología en Y que hace de todas las f_α funciones continuas. Esta $\tau^{\mathcal{G}}$ se llama la **topología final** asociada a $\mathcal{G}$, y se caracteriza por el hecho de que

$$\tau^{\mathcal{G}} = \left\{ U \subseteq Y : f_\alpha^{-1}(U) \in \tau_\alpha \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{A} \right\}. \quad (5.6)$$

El hecho de que tal familia sea una topología se deduce de las propiedades conjuntísticas del operador “tomar contraimagen”. ▲

Proposición 5.3.14. Sea $\tau^{\mathcal{G}}$ la topología final en Y dada por la familia $\mathcal{G} = \{f_{\alpha} : \alpha \in \mathbb{A}\}$, con las $f_{\alpha} : (X_{\alpha}, \tau_{\alpha}) \rightarrow Y$. Sea (Z, σ) otro ET. Entonces, dada $g : Y \rightarrow Z$, se tiene que

$$g \in C\left((Y, \tau^{\mathcal{G}}), (Z, \sigma)\right) \iff g \circ f_{\alpha} \in C\left((X_{\alpha}, \tau_{\alpha}), (Z, \sigma)\right) \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{A}. \quad (5.7)$$

Demostración. Como en el Cor. 5.3.3, la flecha $\implies$ es clara y lo nuevo es la vuelta. Si todas las composiciones $g \circ f_{\alpha}$ son continuas y tomamos un $V \in \sigma$, tenemos que

$$(g \circ f_{\alpha})^{-1}(V) = f_{\alpha}^{-1}(g^{-1}(V)) \in \tau_{\alpha}, \quad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{A}.$$

Por definición, eso significa que $g^{-1}(V) \in \tau^{\mathcal{G}}$. O sea que g es continua. ■

5.3.4 Cocientes

Recordemos que hay tres conceptos en teoría de conjuntos que son esencialmente el mismo:

1. Dar una relación de equivalencia $\sim$ en un conjunto X .
2. Dar una partición de X .
3. Dar una función suryectiva $P : X \rightarrow Y$.

En efecto, dada $\sim$, uno elige un sistema de representantes $A \subseteq X$ (i.e, todo $x \in X$ es equivalente a un $a \in A$, pero dos elementos distintos de A no pueden ser equivalentes) y uno construye la partición de X que consiste en las clases de equivalencia $\bar{a} = \{x \in X : x \sim a\}$, para los $a \in A$.

Y uno tiene el espacio cociente $X/\sim = \{\bar{a} : a \in A\}$, y la proyección $Q : X \rightarrow X/\sim$ dada por $Q(x) = \bar{x}$, que es suryectiva. Y se tiene una función al revés, $g : X/\sim \rightarrow A \subseteq X$ dada por $g(\bar{a}) = a$, para cada $a \in A$. Ella cumple que $Q \circ g = \mathcal{I}_{X/\sim}$.

Si empezamos con una $P : X \rightarrow Y$, se define que $x_1 \sim x_2$ cuando $P(x_1) = P(x_2)$, y nos queda una relación de equivalencia. Además existe un función $g : Y \rightarrow X/\sim$ (inyectiva) tal que $P \circ g = \mathcal{I}_Y$. Definiendo $A = g(Y)$, tenemos un sistema de representantes para $\sim$, cuyas clases son $\bar{a} = P^{-1}(\{y\})$, para $a = g(y)$, $y \in Y$. Así que $X/\sim = \{P^{-1}(\{y\}) : y \in Y\}$, que se identifica naturalmente con el conjunto Y . Módulo esa identificación (o biyección), recuperamos a P como la proyección Q asociada a $\sim$.

El asunto ahora es suponer que tenemos una topología τ en X y queremos encontrar una topología piola en el espacio cociente $X/\sim$. O lo que es lo mismo, dada una función suryectiva $P : (X, \tau) \rightarrow Y$, se busca topología para Y . Esto tiene un sentido geométrico mucho más sabroso que la cosa conjuntista a secas: Podemos pensar, por ejemplo, al círculo S^1 como un cociente del intervalo $[0, 1]$ vía “pegar” los bordes, identificando al 0 con el 1 y dejando a los $t \in (0, 1)$ solitos. Podemos pensarlo tomando $P : [0, 1] \rightarrow S^1$ dada por $P(t) = e^{2\pi i t}$, donde solo pegamos $P(0) = P(1) = 1 \in \mathbb{C}$. Y ya que estamos, seguimos: definimos ahora $P : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ con la misma fórmula, enrollando $\mathbb{R}$ infinitas veces para cada lado (ahí las clases son todas infinitas y discretas). Y así siguiendo aparecen las esferas, los toros y cuanta figura a uno se le ocurra.

El proceso de considerar la que llamaremos topología **cociente**, ya sea en $X/\sim$ o en Y , de acuerdo a lo que convenga, nos permitirá

1. Por un lado, topologizar espacios cocientes nuevos, lo que agranda la familia de ET's, pero también puede aportar al estudio del espacio X original.
2. Por otro lado, aplicar un paquete teórico (las topologías finales) a espacios conocidos como los de los ejemplos, al realizarlos como cocientes de otros más simples de estudiar.

Hacía falta toda esta perorata, porque los espacios cociente son de lo más complicado e intrincado de la teoría. Así que ahora que estamos remotivados, empezamos.

Definición 5.3.15. Sea (X, τ) un ET, y sea $g : X \rightarrow Y$ una función suryectiva. Se define la **topología cociente** τ_g en Y como la topología final asociada a la familia unipersonal $\mathcal{G} = \{g\}$. Luego

$$\tau_g = \{ U \subseteq Y : g^{-1}(U) \in \tau \} . \quad (5.8)$$

En otras palabras, dado $U \subseteq Y$, tenemos que $U \in \tau_g$ si y sólo si $g^{-1}(U) \in \tau$. Observar que también se tiene que un $F \subseteq Y$ es τ_g -cerrado si y sólo si $g^{-1}(F)$ es τ -cerrado. ▲

Proposición 5.3.16. Sea (X, τ) un ET, y sea $g : X \rightarrow Y$ una función suryectiva. Se toma en Y la topología cociente τ_g . Sea (Z, σ) otro ET. Entonces una función

$$f : (Y, \tau_g) \rightarrow (Z, \sigma) \quad \text{es continua} \quad \Longleftrightarrow \quad f \circ g : (X, \tau) \rightarrow (Z, \sigma) \quad \text{es continua} .$$

Demostración. Esto no es otra cosa que la Prop. 5.3.14 en este caso particular. ■

Observación 5.3.17. Por el espíritu con que se contruye τ_g , uno está tentado de pensar que la función cociente $g : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau_g)$ (se asume g suryectiva) debería ser abierta. O cerrada. En realidad esto es suficiente pero no necesario.

En efecto, una aplicación cociente no siempre tiene que ser abierta y/o cerrada, como veremos en los ejemplos. Pero se tiene el siguiente resultado que explica en qué sentido ser abierta o cerrada es una condición suficiente: ▲

Proposición 5.3.18. Sea $g : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ una función suryectiva, continua y **abierto** (o **cerrado** i.e. g manda cerrados en cerrados). Entonces uno puede asegurar que σ no es otra que la topología cociente τ_g .

Demostración. Por ser g continua, sabemos que $\sigma \subseteq \tau_g$, porque la topología final es la máxima de las que hacen continua a g . Si g fuera abierto, como cada $V \in \tau_g$ cumple que $g^{-1}(V) \in \tau$, se tendría que $g(g^{-1}(V)) \in \sigma$. Pero el hecho de que g sea suryectiva asegura que $g(g^{-1}(V)) = V$. Así se llega a que $\tau_g \subseteq \sigma$, y ambas coinciden. La versión de g cerrada sale igual, usando la observación final de la Def. 5.3.15. ■

El siguiente resultado hace uso de conceptos del Capítulo 6. Lo adelantamos para usarlo en algunos ejemplos de cocientes.

Corolario 5.3.19. Sea $g : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ una función suryectiva y continua. Si asumimos que X es compacto y que Y es Hausdorff, entonces σ es la topología cociente τ_g .

Demostración. Observar que g es cerrada, porque manda compactos en compactos. ■

Ejemplo 5.3.20. La topología usual del círculo S^1 (la que hereda de la inclusión $S^1 \subseteq \mathbb{C}$) es la topología cociente de la función $g : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por $g(t) = e^{i2\pi t}$, $t \in \mathbb{R}$. En efecto, es bien claro que g es suryectiva y continua. Pero además g es abierta, como se puede verificar tomando intervalos abiertos $U = (a, b)$ con $b - a < 1/2$, porque

$$g(U) = S^1 \cap \left\{ z \in \mathbb{C} : \left\langle z, g\left(\frac{a+b}{2}\right) \right\rangle > \cos \frac{b-a}{2} \right\},$$

donde $\langle z, w \rangle = \operatorname{Re}(zw)$ es el producto interno pensando $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Se usa que $g(\frac{a+b}{2})$ es ortogonal al vector $g(b) - g(a)$, y cortamos a S^1 con el semiplano abierto con borde en la recta generada por $g(a)$ y $g(b)$. El número $\cos \frac{b-a}{2}$ se visualiza imaginando que $\frac{a+b}{2} = 0$. También sale que g es abierta tomando una rama holomorfa adecuada del logaritmo.

En realidad, este ejemplo es interesante desde otro punto de vista: $\mathbb{R}$ y S^1 son grupos, y g es un morfismo. Por ello el núcleo de g , que es $\mathbb{Z}$, es un subgrupo. Y las clases de equivalencia (ahora pensamos en la $\sim$ dada por g , que es la congruencia módulo $\mathbb{Z}$) son las coclases $t \cdot \mathbb{Z}$, para $t \in [0, 1)$. En otras palabras, estamos diciendo que la topología cociente en el grupo cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, lo hace homeomorfo a S^1 . Este punto de vista da otra prueba de que g es abierta (pensada con proyección al cociente): Si $U \subseteq \mathbb{R}$ es abierto, entonces $g^{-1}(g(U)) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} U + n = V$. Como en $\mathbb{R}$ las traslaciones son hómoes, queda que V es abierto, por lo que $g(U)$ lo es en S^1 , para la topología cociente. ▲

Ejercicio 5.3.21. Probar que la $g : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por $g(t) = e^{i2\pi t}$ **no** es cerrada. ▲

Definición 5.3.22. Sea $g : X \rightarrow Y$ una función suryectiva y sea $A \subseteq X$. El g -saturado de A es el conjunto $S_g(A) = g^{-1}(g(A))$. Observar que la clase de g -equivalencia en X de un $x \in X$, es el conjunto $\bar{x} = g^{-1}(g(x))$, y que $S_g(A) = \bigcup_{x \in A} \bar{x}$. ▲

Proposición 5.3.23. Sea (X, τ) un ET, y sea $g : X \rightarrow Y$ una función suryectiva. Se toma en Y la topología cociente τ_g , con lo que g se torna la proyección al cociente. Se tiene que

1. La función g es abierta si y sólo si $S_g(U) \in \tau$ para todo $U \in \tau$.
2. La función g es cerrada si y sólo si $S_g(F)$ es cerrado para todo $F \subseteq X$ cerrado.

Demostración. Recordar que $g(U) \in \tau_g$ si y sólo si $g^{-1}(g(U)) = S_g(U) \in \tau$. Con los cerrados es igual. ■

Observación 5.3.24. Sigamos con las notaciones del Ejem. 5.3.20. Se tenía la función $g : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por $g(t) = e^{i2\pi t}$, $t \in \mathbb{R}$. Consideremos ahora la función (suryectiva)

$g_1 = g|_{[0,1]} : [0,1] \rightarrow S^1$, tomando en S^1 la topología cociente asociada. En este caso g_1 no es abierta, porque $[0, 1/2)$ es abierto en $[0,1]$, pero $g_1([0, 1/2))$ no es abierto en S^1 . En efecto,

$$S_{g_1}([0, 1/2)) = g_1^{-1}(g_1([0, 1/2))) = [0, 1/2) \cup \{1\} ,$$

que no es abierto en $[0,1]$. Sin embargo, en este caso la topología cociente de S^1 asociada a g_1 también coincide con su topología usual. Esto sale porque $[0,1]$ es compacto, y se puede aplicar el Cor. 5.3.19. Desde este punto de vista, podemos ver de nuevo porqué $g_1([0, 1/2))$ no es abierto en S^1 . Basta dibujarlo. ▲

5.4 Métricas uniformes en $C(X, Y)$, con Y un EM

Como pasa siempre, una teoría produce objetos a los que se les aplica, a su vez, la teoría en cuestión. En este caso, la topología produce las funciones continuas, y uno quiere estudiar los espacios de tales funciones desde un punto de vista topológico, con especial énfasis en los distintos tipos de convergencias. Para hacerlo en general, necesitamos la noción de compacidad. Pero por ahora desarrollaremos el caso en que las funciones tomen valores en un espacio métrico acotado Y (o bien pidamos que las funciones lo sean). Allí podemos definir la métrica de la convergencia uniforme:

Definición 5.4.1. Sean X un conjunto e (Y, d) un EM. Se definen

1. $\ell^\infty(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \text{ acotadas} \}$ (o sea que $f \in \ell^\infty(X, Y)$ si $\text{diam}(f(X)) < \infty$).
2. En $\ell^\infty(X, Y)$ se define la distancia uniforme: dadas $f, g \in \ell^\infty(X, Y)$,

$$d_\infty(f, g) = \sup \{ d(f(x), g(x)) : x \in X \} .$$

Es fácil ver que d_∞ está bien definida (es $< \infty$) y que es una métrica en $\ell^\infty(X, Y)$.

3. Si X tiene una topología τ , consideraremos el espacio de funciones continuas y acotadas

$$C_b(X, Y) = C(X, Y) \cap \ell^\infty(X, Y) = \{f \in C(X, Y) : \text{diam}(f(X)) < \infty\} ,$$

donde también podemos usar la d_∞ .

4. En el caso de que el espacio Y sea acotado, se tiene que $\ell^\infty(X, Y) = Y^X$, o sea todas las funciones $f : X \rightarrow Y$. Además sucede que $C_b(X, Y) = C(X, Y)$. ▲

Observación 5.4.2. La topología de $\ell^\infty(X, Y)$ inducida por d_∞ es aquella cuya convergencia es la uniforme en X : Dada una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\ell^\infty(X, Y)$ y una $f \in \ell^\infty(X, Y)$,

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\tau_{d_\infty}} f \iff \forall \varepsilon , \exists m \in \mathbb{N} \text{ tal que: } n \geq m \implies d_\infty(f_n, f) < \varepsilon , \quad (5.9)$$

o sea que $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ para todos los $x \in X$ a partir del mismo m . ▲

El siguiente enunciado da la máxima generalidad a la conocida frase “límite uniforme de funciones continuas es continua”.

Proposición 5.4.3. Sean (X, τ) un ET e (Y, d) un EM. Entonces se tiene que $C_b(X, Y)$ es d_∞ -cerrado en $\ell^\infty(X, Y)$. Si Y era acotado, reescribimos: $C(X, Y)$ es d_∞ -cerrado en Y^X .

Demostración. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $C_b(X, Y)$ y sea $f \in \ell^\infty(X, Y)$ tal que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d_\infty} f$. Para ver que f es continua, tomemos una red $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en X tal que $x_i \xrightarrow[i \in \mathbb{I}]{} x$. Dado $\varepsilon > 0$, la Ec. (5.9) asegura que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $d_\infty(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{3}$. Como $f_n \in C(X, Y)$, existe un $i_0 \in \mathbb{I}$ tal que $d(f_n(x_i), f_n(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $i \geq i_0$. Luego

$$\begin{aligned} d(f(x_i), f(x)) &\leq d(f(x_i), f_n(x_i)) + d(f_n(x_i), f_n(x)) + d(f_n(x), f(x)) \\ &< 2 d_\infty(f_n, f) + d(f_n(x_i), f_n(x)) \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + d(f_n(x_i), f_n(x)) < \varepsilon \quad \text{para todo } i \geq i_0. \end{aligned}$$

Sólo falta ver que el límite f es acotada (si todas las f_n lo son). Pero si tomamos un $n \in \mathbb{N}$ tal que $d_\infty(f_n, f) < 1$, entonces es fácil ver que

$$\text{diam}(f(X)) \leq 2 + \text{diam}(f_n(X)) < \infty, \quad (5.10)$$

por lo que $f \in C_b(X, Y)$. ■

Proposición 5.4.4. Sean (X, τ) un ET e (Y, d) un EM **completo**. Entonces se tiene que tanto $\ell^\infty(X, Y)$ como su subespacio $C_b(X, Y)$ son d_∞ -completos.

Demostración. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\ell^\infty(X, Y)$. Dado un $x \in X$, sabemos que $d(f_k(x), f_m(x)) \leq d_\infty(f_k, f_m)$ para todo $k, m \in \mathbb{N}$. Luego cada sucesión $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en Y . Como Y es completo, podemos definir la función

$$f : X \rightarrow Y \quad \text{dada por} \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad \text{para todo } x \in X,$$

que es nuestra candidata a límite. Nos falta verificar dos cosas:

$$d_\infty(f_n, f) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{?} 0 \quad \text{y} \quad f \stackrel{?}{\in} \ell^\infty(X, Y).$$

Dado $\varepsilon > 0$, sea $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d_\infty(f_k, f_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $k, m \geq n_1$. Luego, si $k \geq n_1$,

$$d(f_k(x), f(x)) \stackrel{\diamond}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} d(f_k(x), f_m(x)) \leq \sup_{m \geq n_1} d(f_k(x), f_m(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad (5.11)$$

para todos los $x \in X$ a la vez. La igualdad $\stackrel{\diamond}{=}$ se deduce de que $f_m(x) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} f(x)$, usando el Lema 2.4.11. La Ec. (5.11) muestra que $d_\infty(f_n, f) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Tomando un n tal que $d_\infty(f_n, f) < 1$, la Ec. (5.10) nos asegura que $f \in \ell^\infty(X, Y)$. Listo el caso $\ell^\infty(X, Y)$.

La completitud de $C_b(X, Y)$ sale usando ahora la Prop. 5.4.3, porque $C_b(X, Y)$ es un **cerrado** en el espacio completo $\ell^\infty(X, Y)$. ■

En el caso particular de que $Y = \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, los espacios $\ell^\infty(X, Y)$ y $C_b(X, Y)$, además de métricos, son espacios “normados”. Esto significa son espacios vectoriales y que la métrica es homogénea e invariante por traslaciones. Por ejemplo, dada $f \in \ell^\infty(X, \mathbb{R})$, se define

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|. \quad \text{Observar que } \|f\|_\infty < \infty \text{ si y sólo si } f \in \ell^\infty(X, \mathbb{R}). \quad (5.12)$$

Además, si tenemos otra función $g \in \ell^\infty(X, \mathbb{R})$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, vale que

$$d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty, \quad \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad \text{y} \quad \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty. \quad (5.13)$$

Todo esto camina igual si las funciones viven en el **subespacio** cerrado $C_b(X, \mathbb{R}) \subseteq \ell^\infty(X, \mathbb{R})$. Además, el hecho de que $C_b(X, \mathbb{R})$ sea completo da sentido al siguiente enunciado:

Proposición 5.4.5. Sea (X, τ) un ET. En $(C_b(X, \mathbb{R}), d_\infty)$, una serie **absolutamente** convergente es convergente. Es decir que dada una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(C_b(X, \mathbb{R}), d_\infty)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty \implies \text{la serie } \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ converge a una } f \in C_b(X, \mathbb{R})$$

cuya norma verifica que $\|f\|_\infty \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty$.

Demostración. Por la Prop. 5.4.4, para mostrar la convergencia de la serie, basta ver que la sucesión $g_n = \sum_{k=1}^n f_k$ es de Cauchy para la d_∞ . Pero si $n < m$, por la Ec. (5.13),

$$d_\infty(g_m, g_n) = \|g_m - g_n\|_\infty = \left\| \sum_{k=n+1}^m f_k \right\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^m \|f_k\|_\infty \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0,$$

por la hipótesis de que $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty$. Además, como la función $g \mapsto \|g\|_\infty$ es continua,

$$\|f\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_\infty \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \|f_k\|_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_\infty,$$

con lo que culmina la prueba. ■

El resultado anterior también vale en $\ell^\infty(X, \mathbb{R})$. De hecho, vale en cualquier $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ espacio vectorial normado completo (se los llama espacios de Banach). Lo enunciamos sólo para $C_b(X, \mathbb{R})$ porque es lo que necesitaremos más adelante.

5.4.6 (Métrica uniforme). Si (Y, d) no es acotado, que se puede hacer en todo $C(X, Y)$? Lo más usual es cambiar d por una métrica acotada:

Definición 5.4.7. Sean (X, τ) un ET e (Y, d) un EM. Se definen

1. Otra métrica d_0 en Y , dada por $d_0(y_1, y_2) = \min\{d(y_1, y_2), 1\}$, para $y_1, y_2 \in Y$. Observar que $d_0 \stackrel{T}{\cong} d$, pero (Y, d_0) es acotado y con diámetro $\text{diam}_{d_0}(Y) \leq 1$.
2. La métrica **uniforme** en Y^X y $C(X, Y)$, dada por

$$d_u(f, g) = \sup \{ d_0(f(x), g(x)) : x \in X \}, \quad f, g \in C(X, Y),$$

o sea que d_u es la d_∞ asociada no a d , sino a d_0 .

El hecho de que d_0 y d_u sean métricas en sus ambientes es de verificación directa. ▲

La idea sigue siendo tomar la distancia supremo, que producirá la convergencia uniforme de funciones. El tema es que, si uno no está en $C_b(X, Y)$, la d_∞ puede dar ∞ . Por ello, para estudiar convergencia entre funciones no acotadas, definimos la nueva métrica d_0 en Y . Eso permite dar una definición global de la d_u . Pero si f y g están “cerca”, o sea si

$$d_u(f, g) < \varepsilon < 1 \implies d_u(f, g) = d_\infty(f, g) = \sup \{ d(f(x), g(x)) : x \in X \}, \quad (5.14)$$

y uno la d_0 ni la usa. Observar, por otra parte, que al mirarlás operar en $C_b(X, Y)$, queda que $d_u \stackrel{T}{\cong} d_\infty$, por lo que aquí también dan la misma convergencia. La topología resultante es aquella cuya convergencia es la uniforme en X : Dada una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en Y^X y una $f \in Y^X$, se tiene que

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\tau_{d_u}} f \iff \exists m \in \mathbb{N} \text{ tal que: } n \geq m \implies \infty \neq d_\infty(f_n, f) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (5.15)$$

Los resultados anteriores se reescriben ahora en este setting del siguiente modo: Sean (X, τ) un ET e (Y, d) un EM. Entonces se tiene que

Prop. 5.4.3 con $d_u : C(X, Y)$ es d_u -cerrado en Y^X .

Prop. 5.4.4 con d_u : Si Y es completo, entonces $(C(X, Y), d_u)$ es completo. ▲

5.5 Existencia de *muchas* funciones continuas

5.5.1 Lema de Urysohn

Una de las técnicas más útiles de la topología es modelar un espacio X usando las propiedades de su espacio de funciones reales continuas $C_b(X, \mathbb{R})$. Para que esto sea viable, hace falta que $C_b(X, \mathbb{R})$ tenga suficientes elementos, en el sentido que existan funciones que permitan maniobrar adecuadamente con la topología de X . Un adelanto de estas ideas se ha visto, para el caso en que X sea un EM, en la Prop. 2.4.12.

El primer resultado que daremos dice que en un ET normal la separación de cerrados disjuntos se puede hacer usando funciones continuas. Es tal vez el resultado más famoso y

el que más aplicaciones tiene, en distintas ramas de la matemática, de toda la topología. Irónicamente, su primera aparición fue tan solo como un modesto lema para obtener otro teorema mucho menos recordado. Se lo conoce universalmente como el Lema de Urysohn:

Teorema 5.5.1. Sea (X, τ) un ET **normal**. Entonces, dados $E, F \subseteq X$ dos cerrados disjuntos, existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f|_E \equiv 0$ y $f|_F \equiv 1$.

Demostración. Si alguno de los cerrados era vacío, se puede elegir a la f constante (1 o 0) y todo queda bien. Supongamos ahora que $E \neq \emptyset \neq F$. Sea $A_1 = X \setminus F$. Como $E \subseteq A_1 \in \tau$, la normalidad de X nos dice que

$$\text{existe } A_{\frac{1}{2}} \in \tau \quad \text{tal que} \quad E \stackrel{0}{\subseteq} A_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{A_{\frac{1}{2}}} \stackrel{1}{\subseteq} A_1 .$$

Estamos usando la definición de normalidad que se sigue de la Obs. 2.4.9. Usando nuevamente la normalidad de X , las inclusiones $\stackrel{0}{\subseteq}$ y $\stackrel{1}{\subseteq}$ producen abiertos $A_{\frac{1}{4}}$ y $A_{\frac{3}{4}}$ tales que

$$E \stackrel{0,0}{\subseteq} A_{\frac{1}{4}} \subseteq \overline{A_{\frac{1}{4}}} \stackrel{0,1}{\subseteq} A_{\frac{1}{2}} = A_{\frac{2}{4}} \quad \text{y} \quad \overline{A_{\frac{2}{4}}} \stackrel{1,0}{\subseteq} A_{\frac{3}{4}} \subseteq \overline{A_{\frac{3}{4}}} \stackrel{1,1}{\subseteq} A_1 . \quad (5.16)$$

Continuando indefinidamente este proceso, podemos definir abiertos A_r para todo

$$r \in \mathcal{D}_{(0,1]} := \left\{ \frac{m}{2^n} : n, m \in \mathbb{N} \text{ y } 0 < m \leq 2^n \right\} ,$$

los llamados números diádicos del $(0, 1]$, con las siguientes propiedades:

1. $E \subseteq A_r \subseteq A_1$ para todo $r \in \mathcal{D}_{(0,1]}$.
2. Dados $r, s \in \mathcal{D}_{(0,1]}$, se tiene que $r < s \implies \overline{A_r} \subseteq A_s$.

En efecto, dados $r < s$ ambos en $\mathcal{D}_{(0,1]}$, se igualan los denominadores al más grande, y la inclusión $\overline{A_r} \subseteq A_s$ se deduce de cómo aparecen A_r y A_s en ese nivel de las definiciones, como en la Ec. (5.16).

Podemos ahora definir la función buscada: Sea $f : X \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \inf \{r \in \mathcal{D}_{(0,1]} : x \in A_r\} & \text{si } x \in \bigcup_{r \in \mathcal{D}_{(0,1]}} A_r = A_1 \\ 1 & \text{si } x \notin A_1 \text{ (i.e., si } x \in F) . \end{cases}$$

Por su construcción, ya sabemos que $f|_E \equiv 0$ y $f|_F \equiv 1$. El asunto es que todo el bolonqui anterior fue hecho para que f sea continua. Verifiquémoslo. Para ello será útil notar que los intervalos del tipo $[0, t)$ y $(s, 1]$ (para $s, t \in [0, 1]$), forman una sub-base de la topología del codominio $[0, 1]$. Estudiemos f^{-1} en cada uno de ellos. Dado un $t \in (0, 1]$, se tiene que

$$\left[f(x) < t \iff x \in A_r \text{ para algún } \mathcal{D}_{(0,1]} \ni r < t \right] \implies f^{-1}([0, t)) = \bigcup_{r < t} A_r \in \tau .$$

Veamos ahora los otros. Si $s \in [0, 1)$, entonces $f(x) \leq s$ si y sólo si

$$[s < r \implies f(x) < r] \iff \text{para todo } r > s, \quad x \in f^{-1}([0, r]) = \bigcup_{p < r} A_p. \quad (5.17)$$

Por lo tanto, si asumimos que las letras r, p, q refieren a elementos de $\mathcal{D}_{(0,1]}$, se tiene que

$$f^{-1}([0, s]) \stackrel{(*)}{=} \bigcap_{r > s} \bigcup_{p < r} A_p \stackrel{(**)}{=} \bigcap_{q > s} \overline{A_q}, \quad \text{que es cerrado.}$$

La igualdad $\stackrel{(*)}{=}$ se deduce de lo que dice la Ec. (5.17), mientras que la $\stackrel{(**)}{=}$ requiere algunas cuentas: La inclusión $\subseteq$ sale porque $p < r \implies A_p \subseteq \overline{A_r}$, por lo que $\bigcup_{p < r} A_p \subseteq \overline{A_r}$.

Recíprocamente, para todo $r > s$ existen $b, c \in \mathcal{D}_{(0,1]}$ tales que $s < b < c < r$. Luego

$$\bigcap_{q > s} \overline{A_q} \subseteq \overline{A_b} \subseteq A_c \subseteq \bigcup_{p < r} A_p.$$

En resumidas cuentas, vimos que $f^{-1}([0, s])$ es cerrado, por lo que $f^{-1}((s, 1])$ es abierto, como queríamos, para todo $s \in [0, 1)$. Por la Obs. 2.5.3, $f \in C(X, [0, 1])$. ■

5.5.2 Teorema de Tietze

La versión del Lema de Urysohn para EM's tiene una prueba cuasi-trivial en comparación con la versión ET's normales (ver la Prop. 2.4.12). En contraste, el siguiente resultado, que tuvo origen en el contexto general de ET's, fue novedoso anche para EM's. Y se basa en un uso intensivo del Lema de Urysohn. El tema es extender una función real continua y acotada, definida en un cacho de X , a una función continua e igual de acotada ahora en todo X . Hace falta que el cacho sea cerrado y que X sea normal:

Teorema 5.5.2 (Tietze). Sea (X, τ) un ET **normal** y sea $F \subseteq X$ un subconjunto **cerrado**. Dada $f \in C_b(F, \mathbb{R})$, existe una extensión $g \in C_b(X, \mathbb{R})$ tal que $g|_F = f$ y $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty$.

Demostración. Reescribiendo a f como $af + b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ adecuados ($a \neq 0$), podemos asumir que $f \in C(F, [-1, 1])$ tocando el borde y encontrar a la $g \in C(X, [-1, 1])$, para que tengan la misma norma supremo. Consideremos los conjuntos

$$G_1 = f^{-1}\left(\left[-1, -\frac{1}{3}\right]\right) \quad \text{y} \quad G_2 = f^{-1}\left(\left[\frac{1}{3}, 1\right]\right),$$

que son disjuntos y ambos cerrados en F (por ser f continua). Acá se usa la hipótesis de que F es cerrado en X , por lo que los G_i son también cerrados en X . Eso nos permite usar el Lema de Urysohn, que nos provee de una $f_1 \in C(X, [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}])$ tal que $f_1|_{G_i} = \frac{(-1)^i}{3}$, para $i = 1, 2$. Observando separadamente en G_1 , G_2 y $F \setminus (G_1 \cup G_2)$, se ve fácil que

$$\|f - f_1\|_{\infty, F} := \sup_{x \in F} |f(x) - f_1(x)| \leq \text{diam} \left(\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \right) = \frac{2}{3}.$$

Antes de seguir, hay que aclarar que alguno de los G_i (o ambos) podrían ser vacíos. Pero en tal caso es fácil ver que existe una f_1 constante que cumple todo lo pedido arriba, así que no nos preguntaremos más (en este nivel y en los que siguen) si alguien da vacío o no. Guardemos a esta f_1 . Si repetimos el proceso anterior, pero multiplicado por $a = \frac{2}{3}$, empezando con la función $f - f_1|_F \in C(F, [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]) = C(F, [-a, a])$, obtendremos una

$$f_2 \in C(X, [-a \cdot \frac{1}{3}, a \cdot \frac{1}{3}]) \quad \text{tal que} \quad \|(f - f_1) - f_2\|_{\infty, F} \leq a^2.$$

Y así siguiendo, una sucesión $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $C_b(X, \mathbb{R})$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$ se tendrá que

$$\|f_k\|_{\infty} \leq \frac{1}{3} \cdot a^{k-1} \quad \text{y} \quad \|f - \sum_{j=1}^k f_j\|_{\infty, F} \leq a^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad (5.18)$$

La serie de las f_k nos queda absolutamente convergente, puesto que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{\infty} \leq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} a^{k-1} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Ahora, la Prop. 5.4.5 y la Ec. (5.18) aseguran que la serie converge, que

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \in C(X, [-1, 1]) \quad (\text{porque } \|g\|_{\infty} \leq 1) \quad , \quad \text{y que} \quad \|f - g\|_{\infty, F} = 0,$$

por lo que $g|_F = f$. ■

5.5.3 Embeddings

Definición 5.5.3. Sean (X, τ) e (Y, σ) dos ET's, y sea $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ una familia de funciones continuas.

1. Diremos que $\mathcal{F}$ **separa puntos** si para todo par de puntos $x \neq z$ en X , existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \neq f(z)$.
2. Dados $x \in X$ y $U \in \tau$ tales que $x \in U$, diremos que una $f \in C(X, Y)$ **separa** el par (x, U) si existen $y_1 \neq y_2$ en Y tales que $f(x) = y_1$, mientras que $f|_{X \setminus U} \equiv y_2$.
3. Diremos que $\mathcal{F}$ **separa a X** si para todo par $(x, U) \in X \times \tau$ tal que $x \in U$, existe una $f \in \mathcal{F}$ que separa a (x, U) . ▲

Proposición 5.5.4. Sean (X, τ) e (Y, σ) dos ET's, y sea $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ una familia de funciones continuas. Tomemos la función

$$F : X \rightarrow Y^{\mathcal{F}} = \prod_{f \in \mathcal{F}} Y, \quad \text{dada por} \quad F(x) = (f(x))_{f \in \mathcal{F}}, \quad x \in X. \quad (5.19)$$

Si en $Y^{\mathcal{F}}$ tomamos la topología producto $\sigma^{\mathcal{F}}$, se tiene que

1. $F \in C(X, Y^{\mathcal{F}})$.
2. La familia $\mathcal{F}$ separa puntos si y sólo si F es inyectiva.
3. Si X e Y son T_1 y $\mathcal{F}$ separa a X (i.e., todo par (x, U) con $x \in U$ es separado por una $f \in \mathcal{F}$), entonces F es un **embedding**, es decir que $X \cong^F F(X) \subseteq Y^{\mathcal{F}}$.

Demostración.

1. Esto es consecuencia de la Prop. 5.3.4.
2. $F(x) = F(z)$ si y sólo si $f(x) = f(z)$ para toda $f \in \mathcal{F}$.
3. Llamemos μ a la topología inducida por $\sigma^{\mathcal{F}}$ a $F(X)$. La condición de que X sea T_1 asegura que al separar $\mathcal{F}$ a X , entonces separa puntos de X y F es inyectiva. Luego nos alcanzaría probar que la función (biyectiva) $F : X \rightarrow (F(X), \mu)$ es abierta.

Sea $U \in \tau$. Dado $x \in U$, tomemos un “índice” $g \in \mathcal{F}$ que separe al par (x, U) . Sea $W \in \mathcal{O}_Y^a(g(x))$ tal que $g(X \setminus U) \cap W = \emptyset$ (existe, porque $g(X \setminus U)$ es un punto e Y es T_1). Consideremos el abierto $V_x = \{ \{y_f\}_{f \in \mathcal{F}} \in Y^{\mathcal{F}} : y_g \in W \} \in \sigma^{\mathcal{F}}$. Notemos que

$$F(x) \in V_x \cap F(X) \subseteq F(U) \quad \text{para el abierto relativo} \quad V_x \cap F(X) \in \mu.$$

Esto pasa para todo $x \in U$ (i.e., todo $F(x) \in F(U)$). Luego $F(U) \in \mu$. ■

La clase de espacios X para los que $C_b(X, \mathbb{R})$ separa a X son el ámbito ideal de aplicación de la Prop. 5.5.4, y son importantes por otras razones que veremos más adelante.

Definición 5.5.5. Sea (X, τ) un ET. Diremos que X es **completamente regular** (CR) o bien que es **un Tychonoff**, si X es T_1 y la familia $\mathcal{F} = C(X, [0, 1])$ separa a X .

Reacomodando las funciones, esto equivale a decir que para todo par $(x, U) \in X \times \tau$ con $x \in U$, existe una $f \in C(X, [0, 1])$ tal que $f(x) = 1$, mientras que $f|_{X \setminus U} \equiv 0$. ▲

Corolario 5.5.6. Sea (X, τ) un ET de Tychonoff. Entonces la función definida en (5.19):

$$F : X \hookrightarrow Q, \quad \text{donde } Q \text{ es el cubo } [0, 1]^{\mathcal{F}}, \quad \text{para } \mathcal{F} = C(X, [0, 1])$$

es un embedding. En otras palabras, dada una red $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ y un x en X , se tiene que

$$x_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} x \iff f(x_i) \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} f(x) \quad \text{para toda } f \in C(X, [0, 1]). \quad (5.20)$$

Demostración. La Prop. 5.5.4 nos dice que la F es un embedding. Por lo tanto, la Ec. (5.20) se deduce de que la convergencia en $F(X) \subseteq Q = [0, 1]^{\mathcal{F}}$ es la producto, o sea en cada “coordenada” $f \in C(X, [0, 1])$. ■

Observación 5.5.7. Sea (X, τ) un ET que es CR, y llamemos $\mathcal{F} = C(X, [0, 1])$. En vista de la Ec. (5.20), el hecho de que la función $F : X \rightarrow [0, 1]^{\mathcal{F}}$ sea un embedding nos dice que topología original τ de X no era otra que la topología inicial dada por la familia $\mathcal{F}$. ▲

Observación 5.5.8. Que un espacio X sea CR significa que es regular y que uno tiene un equivalente al Lema de Urysohn 5.5.1, pero para **puntos** y cerrados disjuntos. No es cierto que todo regular sea CR (por eso el nombre nuevo, ver en los ejemplos). Sin embargo, gracias al Lema de Urysohn 5.5.1 sí sabemos que si X es normal, entonces debe ser CR. O sea que

$$\text{normal} \implies \text{Tychonoff (CR)} \implies \text{regular}$$

y ninguna recíproca vale. Observar que los CR's tienen una ventaja sobre los normales: Si (X, τ) es CR y tomamos cualquier subconjunto $Y \subseteq X$, entonces Y con la topología inducida por τ es también CR. O sea que la clase CR es hereditaria, cosa que no pasa con la clase de los normales. Las pruebas de estas afirmaciones son el siguiente: ▲

Ejercicio 5.5.9. Sea (X, τ) un ET. Probar que:

1. Si X es normal, entonces X es de Tychonoff-CR (Lema de Urysohn).
2. Si X es CR, todo $Y \subseteq X$ es CR. O sea que **la clase CR es hereditaria.** ▲

5.5.4 Metrización de Urysohn

Como se vió en el Ejer. 5.3.10, si tomamos el espacio $Q = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ con la topología producto, además de que es compacto (como veremos más adelante) nos queda que Q es un EM con la distancia

$$d\left((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n},$$

que reproduce la topología producto de Q . El siguiente resultado de metrización, es aquel para el cual el Lema de Urysohn era un lema previo.

Teorema 5.5.10 (Metrización de Urysohn). Sea (X, τ) un ET normal y N_2 . Entonces existe un embedding $F : X \hookrightarrow Q = [0, 1]^{\mathbb{N}}$. En particular se tiene que X es metrizable.

Demostración. Por el Cor. 5.5.6 (y el hecho de que X sea normal, y por ello CR), sabemos que se puede incrustar a X en un cubo $Q_1 = [0, 1]^{C(X, [0, 1])}$. Lo que tenemos que ver es que, usando que X es también N_2 , podamos quedarnos con apenas numerables coordenadas (o sea funciones) de Q_1 y seguir teniendo un embedding.

Sea $\beta = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base de τ . Sea $J = \{(k, n) \in \mathbb{N}^2 : \overline{U}_k \subseteq U_n\} \subseteq \mathbb{N}^2$, que es un conjunto numerable. Como X es normal, para cada $(k, n) \in J$ existe una función $f_{k,n} \in C(X, [0, 1])$ tal que $f_{k,n}|_{\overline{U}_k} \equiv 1$ y $f_{k,n}|_{X \setminus U_n} \equiv 0$. Tomemos la familia numerable

$$\mathcal{F} = \{f_{k,n} : (k, n) \in J\} \subseteq C(X, [0, 1]).$$

Veremos que $\mathcal{F}$ separa a X (recordar la Def. 5.5.3). En tal caso, aplicando la Proposición 5.5.4, obtendríamos el anunciado embedding $F : X \hookrightarrow [0, 1]^{\mathcal{F}} = Q$. Las comillas aluden a la sutil diferencia entre indexar con J o $\mathcal{F}$ y hacerlo con $\mathbb{N}$.

$\mathcal{F}$ separa a X : Dado un par $(x, U) \in X \times \tau$ tal que $x \in U$, sigamos unos pasos:

1. Sea $U_n \in \beta$ tal que $x \in U_n \subseteq U$.
2. Ahora, por la normalidad, existe $V \in \tau$ tal que $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U_n$.
3. Tomemos ahora un $U_k \in \beta$ tal que $x \in U_k \subseteq V$ (por lo que $\bar{U}_k \subseteq \bar{V}$).
4. Resumiendo, existe un $(k, n) \in J$ tal que $x \in U_k \subseteq \bar{U}_k \subseteq U_n \subseteq U$.

Ahora es inmediato verificar que $f_{k,n} \in \mathcal{F}$ separa al par (x, U) . Falta mencionar otra sutileza: El que queda metrizable es $F(X)$, del que ahora sabemos que es hómoeo con X . Dejamos como ejercicio el convencerse de que la metrizabilidad se preserva por homeomorfismos (porque la métrica se “transporta” usando el hómoeo F). ■

Observación 5.5.11. En el Teorema de Uryshon 5.5.10, se puede relajar notablemente las hipótesis poniendo “regular y N_2 ” en lugar de “normal y N_2 ”. Esto es así por la Prop. 2.4.10, que asegura que regular y N_2 (y a fortiori Lindeloff) $\implies$ normal. ▲

5.6 Ejercicios

Ejercicio 5.6.1. Sean X, Y dos ET's y $f : X \rightarrow Y$ una función.

1. La f es continua si y sólo si para toda red $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en X que converge a algún $x \in X$, se cumple que $f(x_i) \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} f(x)$.

A partir de ahora supongamos que f es continua.

2. Sea $D \subseteq X$ un denso. Si tenemos otra $g \in C(X, Y)$, entonces para mostrar que $f = g$ alcanza con testear que $f|_D = g|_D$. Otra manera de decirlo:

“dos continuas que coinciden en un denso son iguales.”

3. Si f es sobre, entonces $f(D)$ es denso en Y .
4. Dado un $A \subseteq X$ se cumple que $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
5. Para que valga la igualdad $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$ para todo $A \subseteq X$ no alcanza con que f sea sobre. Pero sí que sea sobre y abierta.

Ejercicio 5.6.2. Sean X un conjunto y σ, τ dos topologías en X , probar que son eq.

1. Se tiene que $\bar{A}^\tau \subseteq \bar{A}^\sigma$ para todo $A \in \mathcal{P}(X)$.
2. τ -convergencia $\implies$ σ -convergencia (de redes en X).
3. Hay más τ -abierto que σ -abierto, o sea que $\sigma \subseteq \tau$.

En tal caso, decidir si σ -C implica τ -C o vice versa, para cada clase C de ET's de todas las definidas en la materia. Por ejemplo, mostrar que τ -conexo $\implies$ σ -conexo, porque es al revés con desconexo.

Por la equivalencia de arriba se dice que τ es más **fuerte** que σ , ya que se dice que una convergencia es más débil en tanto sea más fácil converger, y más fuerte si pocas series pueden hacerlo. Deducir que tanto el operador clausura $A \mapsto \bar{A}$, como la convergencia de redes determinan la topología que los produce. ▲

Ejercicio 5.6.3. Sea $\mathbb{P} = \prod_{\alpha \in \mathbb{A}} (X_\alpha, \tau_\alpha)$, dotado de la topología producto $\tau_{\mathbb{P}}$. Supongamos que, para cada $\alpha \in \mathbb{A}$, tenemos un denso $D_\alpha \subseteq X_\alpha$.

1. Probar primero que el producto $\prod_{\alpha \in \mathbb{A}} D_\alpha$ es denso en $\mathbb{P}$. Pero se puede construir un denso mucho más chico:
2. Asumamos que $\mathbb{P} \neq \emptyset$, y fijemos un $x = \{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}} \in \mathbb{P}$. Definamos los conjuntos

$$D_{\mathbb{F}} = \prod_{\alpha \in \mathbb{F}} D_\alpha \times \prod_{\alpha \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{F}} \{x_\alpha\} \subseteq \mathbb{P}, \quad \text{para cada } \mathbb{F} \in \mathcal{P}_F(\mathbb{A}).$$

Luego el conjunto $D = \bigcup_{\mathbb{F} \in \mathcal{P}_F(\mathbb{A})} D_{\mathbb{F}}$ es **denso** en $\mathbb{P}$.

Ejercicio 5.6.4. Sea $\mathbb{P} = \prod_{n \in \mathbb{N}} (X_n, \tau_n)$, dotado de la topología producto $\tau_{\mathbb{P}}$.

1. Si suponemos que todos los X_n son de tipo N_2 , entonces anche $\mathbb{P}$ es N_2 .
2. Idem con N_1 y separable.
3. Si suponemos que todos los X_k son Lindeloff, aún si asumimos que $\mathbb{P} = X_1 \times X_2$, puede suceder que $\mathbb{P}$ no sea Lindeloff.
4. Si cada τ_n proviene de una métrica d_n en X_n , entonces

(a) Si para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $d'_n(x, y) = \frac{d_n(x, y)}{1 + d_n(x, y)}$, para $x, y \in X_n$, entonces d'_n es otra métrica en X_n y se tiene que $\tau_n = \tau_{d_n} = \tau_{d'_n}$.

(b) La función $d_{\mathbb{P}} : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por

$$d_{\mathbb{P}}(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{d'_n(x_n, y_n)}{2^n}, \quad \{x_n\}, \{y_n\} \in \mathbb{P}$$

es una métrica en $\mathbb{P}$ tal que $\tau_{d_{\mathbb{P}}} = \tau_{\mathbb{P}}$.

En otras palabras, producto numerable de metrizables es metrizable.

Ejercicio 5.6.5. Sea (X, τ) un ET. Probar que:

1. Si X es normal, entonces X es de Tychonoff-CR (Lema de Urysohn).
2. Si X es CR, todo $Y \subseteq X$ es CR. O sea que **la clase CR es hereditaria**.
3. El producto de cualquier cantidad de CR's sigue siendo CR.

Ejercicio 5.6.6. Sea (X, τ) un ET de Tychonoff.

1. Probar que, dada una red $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ y un x en X , se tiene que

$$x_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} x \iff f(x_i) \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} f(x) \quad \text{para toda } f \in C(X, [0, 1]). \quad (5.21)$$

2. Llamemos $\mathcal{F} = C(X, [0, 1])$. Probar que topología original τ de X no era otra que la topología inicial dada por la familia $\mathcal{F}$.

Ejercicio 5.6.7. Sea (X, τ) un ET. Probar que

1. X es Hausdorff si y sólo si la diagonal

$$\Delta_X = \{ (x, y) \in X \times X : x = y \}$$

es cerrada en la topología producto de $X \times X$.

2. Si X es Hausdorff, (Y, σ) es otro ET y nos dan $f, g \in C(Y, X)$, entonces

$$Z_{f,g} = \{ y \in Y : f(y) = g(y) \} \text{ es cerrado en } Y.$$

Lamentablemente no vale usar a $f - g$, porque X no siempre tiene $-$ ni 0 . ▲

Ejercicio 5.6.8. Sea (X, τ) un ET que es regular y sean $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ e $\mathbf{y} = (y_j)_{j \in \mathbb{J}}$ dos redes en X , ambas convergentes. Entonces son equivalentes:

- Las dos redes tienen el mismo límite.
- La red “doble” $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_i, y_j)_{i,j \in \mathbb{I} \times \mathbb{J}}$, que vive en $X \times X$, cumple que

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \xrightarrow{E} U \text{ para todo abierto } U \subseteq X \times X \text{ tal que } \Delta_X = \{ (x, x) : x \in X \} \subseteq U.$$

El orden de $\mathbb{I} \times \mathbb{J}$ es en las dos entradas a la vez. ▲

Ejercicio 5.6.9. Sea $f : X \rightarrow Y$, donde X e Y son dos ET's. Probar que

$$f \in C(X, Y) \implies \text{Gr}_f = \{ (x, f(x)) : x \in X \} \subseteq X \times Y \text{ es cerrado en } X \times Y.$$

Probar que la recíproca es cierta si Y es compacto (usar la Prop. 4.2.5). ▲

Ejercicio 5.6.10. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por $g(t) = e^{i2\pi t}$, para $t \in \mathbb{R}$.

1. Probar que la función g es continua suryectiva y abierta.
2. Probar que la topología usual del círculo S^1 (la que hereda de la inclusión $S^1 \subseteq \mathbb{C}$) es la topología cociente de la función $g : \mathbb{R} \rightarrow S^1$.
3. Como $\mathbb{R}$ y S^1 son grupos, mostrar que g es un morfismo.
4. Mostrar que $\ker g = \mathbb{Z}$. Y que la relación de equivalencia $\sim$ dada por g es la congruencia módulo $\mathbb{Z}$. Las clases son las coclases $t \cdot \mathbb{Z}$, para $t \in [0, 1)$.
5. En otras palabras, estamos diciendo que la topología cociente en el grupo cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, lo hace homeomorfo (e isomorfo) a S^1 . Dar una prueba “de grupos” de que g , pensada como proyección al cociente, es abierta. ▲

Capítulo 6

Compactos

6.1 Definiciones y caracterizaciones

Sea (X, τ) un ET y sea $K \subseteq X$ un subconjunto. Recordemos que llamamos **cubrimiento** por abiertos de K a una familia

$$\sigma \subseteq \tau \quad \text{tal que} \quad K \subseteq \bigcup \sigma .$$

Un **subcubrimiento** de σ es un $\rho \subseteq \sigma$ que sigue cubriendo a K . A veces conviene escribirlos en términos de índices: El cubrimiento σ se presentará como una familia

$$\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}} \quad \text{tal que} \quad U_\alpha \in \tau \quad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{A} \quad \text{y además} \quad K \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathbb{A}} U_\alpha .$$

Y un subcubrimiento estará dado por un $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{A}$ tal que siga pasando que $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathbb{F}} U_\alpha$.

La versión dual de los cubrimientos se describe con intersecciones de cerrados: Dada una familia $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ de subconjuntos cerrados de X , se dice que

$$\mathcal{F} \text{ tiene la } \mathbf{PIF} \text{ para } K \text{ si } K \cap \bigcap_{\alpha \in \mathbb{F}} F_\alpha \neq \emptyset \text{ para todo subconjunto } \mathbf{finito} \mathbb{F} \subseteq \mathbb{A} .$$

Las letras PIF aluden a la *propiedad de la intersección finita*. Si $K = X$, se dice que $\mathcal{F}$ tiene la PIF a secas. Comenzaremos con la definición tradicional de compactos (onda Heine-Borel):

Definición 6.1.1. Sea (X, τ) un ET. Un subconjunto $K \subseteq X$ es **compacto** (en X) si todo cubrimiento por abiertos de K tiene un subcubrimiento **finito**. En particular, diremos que X es compacto si pasa lo anterior para los cubrimientos de todo el espacio X . ▲

Observación 6.1.2. Hace falta aclarar algo de esta Definición. Que el tal $K \subseteq X$ sea compacto (en X), como se definió arriba, equivale a que el espacio entero (K, τ_K) , donde τ_K es la inducida por τ a K , sea compacto (en sí mismo). Esto es así porque los cubrimientos abiertos de K solito se levantan a cubrimientos abiertos de K dentro de X , y viceversa. En adelante omitiremos las aclaraciones del tipo “(en X)”, salvo necesidad imperiosa. ▲

Teorema 6.1.3. Sea (X, τ) un ET y tomemos un subconjunto $K \subseteq X$. Luego las siguientes propiedades son equivalentes:

1. K es compacto.
2. Toda familia de cerrados $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ con la PIF para K cumple que $K \cap \bigcap_{\alpha \in \mathbb{A}} F_\alpha \neq \emptyset$.
3. Toda red en K tiene un punto de acumulación en K .
4. Toda red universal en K converge a un punto de K .
5. Toda red en K tiene una subred que converge a un punto de K .

Demostración. $1 \leftrightarrow 2$: Llamemos $U_\alpha = X \setminus F_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{A}$. Si $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{A}$, se tiene que

$$K \cap \bigcap_{\alpha \in \mathbb{F}} F_\alpha = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad K \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathbb{F}} U_\alpha .$$

Luego 2 se relee como “Dada una familia de abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$, si ninguna subfamilia finita $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{F}}$ cubre a K , entonces tampoco la familia completa lo cubre.” Esto es lo mismo que la definición de compacidad, sólo que dicho contrarrecíprocamente.

$2 \rightarrow 3$: Sea $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ una red en K . Para cada $i \in \mathbb{I}$, tomemos el cerrado

$$F_i = \overline{C_i(\mathbf{x})}, \quad \text{donde} \quad C_i(\mathbf{x}) = \{x_j : j \geq i\} .$$

Observar que los F_i decrecen (para la $\subseteq$) cuando crecen los $i \in \mathbb{I}$. El hecho de que $\mathbb{I}$ sea dirigido y el que $\mathbf{x}$ esté en K aseguran que la familia $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ tiene la PIF para K . Entonces fijemos un $x \in K \cap \bigcap_{i \in \mathbb{I}} F_i$ y veamos que es x un punto de acumulación de $\mathbf{x}$.

Primero notemos que $x \in \overline{C_i(\mathbf{x})}$ para cada $i \in \mathbb{I}$. Luego, si $U \in \mathcal{O}(x)$ e $i \in \mathbb{I}$, se tiene que $U \cap C_i(\mathbf{x}) \neq \emptyset$. O sea que $\mathbf{x} \xrightarrow{F} U$ para todo $U \in \mathcal{O}(x)$.

$3 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 5$: Todo esto es equivalente si uno usa las Propositiones 4.2.11, 4.5.9 y 4.5.11. En efecto, recordar que x es punto de acumulación de una red $\mathbf{x}$ si y sólo si alguna subred de $\mathbf{x}$ converge a x ($5 \leftrightarrow 3$), que toda red tiene subredes universales ($4 \rightarrow 5$) y que las universales deben converger a sus puntos de acumulación ($3 \rightarrow 4$). Observar que el punto x en cuestión debe estar en K en los tres casos.

$5 \rightarrow 2$: Supongamos que $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ es una familia de cerrados con la PIF para K . Sea $\mathbb{I} = \mathcal{P}_F(\mathbb{A})$ y armemos la familia de cerrados $G_{\mathbb{F}} = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{F}} F_\alpha$, para todo $\mathbb{F} \in \mathbb{I}$. Observar que

$$\bigcap_{\mathbb{F} \in \mathbb{I}} G_{\mathbb{F}} = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{A}} F_\alpha \quad \text{y que} \quad G_{\mathbb{F}} \subseteq G_{\mathbb{H}} \quad \text{si} \quad \mathbb{H} \subseteq \mathbb{F} .$$

Por la PIF, para todo $\mathbb{F} \in \mathbb{I}$ existe un $x_{\mathbb{F}} \in K \cap G_{\mathbb{F}}$. Notar que $\mathbb{I}$ está dirigido por el orden dado por la inclusión. Tomemos la red $\mathbf{x} = (x_{\mathbb{F}})_{\mathbb{F} \in \mathbb{I}}$, que vive en K , y sea $\mathbf{y} = (y_j)_{j \in \mathbb{J}}$ una

subred de $\mathbf{x}$ que converge a un $y \in K$. Sea $h : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{I}$ la función creciente y cofinal de $\mathbf{y}$. Como cada $y_j = x_{h(j)} \in G_{h(j)}$, y los $G_{h(j)}$ son cerrados y decrecientes con j , es fácil ver que

$$\mathbf{y} \xrightarrow{E} G_{h(j)} \quad \text{para todo } j \in \mathbb{J} \quad \implies \quad y \in \bigcap_{j \in \mathbb{J}} G_{h(j)} = \bigcap_{\mathbb{F} \in \mathbb{I}} G_{\mathbb{F}} = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{A}} F_{\alpha}.$$

Como también $y \in K$, tenemos que $K \cap \bigcap_{\alpha \in \mathbb{A}} F_{\alpha} \neq \emptyset$. ■

6.2 Primeras propiedades de los compactos

Observación 6.2.1. Sea X un conjunto infinito y consideremos en X la topología cofinita $\tau_{CF}(X)$. Entonces todo $K \subseteq X$ es compacto, porque lo que le falte cubrir al “primer” abierto de cualquier cubrimiento, es un conjunto finito. Y esto se va cubriendo de a un abierto por elemento. Así vemos que hay compactos que no son Hausdorff.

Algunos autores incluyen la condición de ser Hausdorff para la compacidad (como uno pide T_1 para regularidad y normalidad). Sin embargo, hay ejemplos importantes (sobre todo en geometría algebraica) de espacios compactos no Hausdorff, por lo que haremos la teoría en el caso general, agregando la H cuando haga falta.

Observar que, si bien la convergencia de redes caracteriza la compacidad, en el caso no Hausdorff hay límites múltiples, por lo que convendrá tener cuidado al usar técnicas de redes.

Por ejemplo, en un sentido genérico, las condiciones relativas a redes del Teo. 6.1.3 hacen pensar que si un subconjunto $K \subseteq X$ es compacto, debería ser cerrado. O que un K que sea cerrado dentro de un espacio compacto X debe ser también compacto (en ambos casos, porque los límites se quedan dentro de K).

Veremos que la segunda presunción es cierta siempre, pero la primera sólo cuando el espacio ambiente X es Hausdorff (pensar en el ejemplo mencionado al principio). ▲

Proposición 6.2.2. Sea (K, τ) un ET compacto, y sea $F \subseteq K$ un subconjunto cerrado. Entonces F es compacto.

Demostración. Toda red $\mathbf{x}$ en F tiene una subred que converge a algún $x \in K$. Pero como F es cerrado, el límite $x \in F$. Por el Teo. 6.1.3, F es también compacto. Otra prueba directa sale con cubrimientos (agregando el **abierto** $K \setminus F$). ■

Proposición 6.2.3. Sea (X, τ) un ET de Hausdorff. Entonces todo subconjunto compacto $K \subseteq X$ es **cerrado** en X .

Demostración. Sea $y \in \overline{K}$, y tomemos una red $\mathbf{y} = (y_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en K tal que $y_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} y$. Por el Teo. 6.1.3, $\mathbf{y}$ tiene una subred $\mathbf{z}$ que converge a un $z \in K$. Sin embargo, por ser subred de $\mathbf{y}$, la red $\mathbf{z}$ también converge a y . Como X es Hausdorff, por lo que los límites son **únicos**, tenemos que $y = z \in K$. Esto muestra que K es cerrado. ■

Ahora veremos que en un espacio de Hausdorff, la propiedad de separar puntos se extiende a separar subconjuntos compactos:

Proposición 6.2.4. Sea (X, τ) un ET de Hausdorff. Dados $K_1, K_2 \subseteq X$ compactos y disjuntos, existen abiertos $U, V \in \tau$ tales que

$$K_1 \subseteq U, \quad K_2 \subseteq V \quad \text{y} \quad U \cap V = \emptyset. \quad (6.1)$$

Demostración. Fijemos un $x \in K_1$. Como X es Hausdorff, para cada $y \in K_2$ existen abiertos disjuntos $A_y, B_y \in \tau$ tales que $y \in B_y$ y $x \in A_y$. La familia $\{B_y\}_{y \in K_2}$ es un cubrimiento de K_2 , del que podemos extraer finitos $B_{y_1}, \dots, B_{y_n}$ que siguen cubriendo a K_2 . Sean

$$U_x = \bigcap_{k=1}^n A_{y_k} \quad \text{y} \quad V_x = \bigcup_{k=1}^n B_{y_k}.$$

Es claro que son abiertos, que $x \in U_x$ y que $K_2 \subseteq V_x$. Como $U_x \cap B_{y_k} \subseteq A_{y_k} \cap B_{y_k} = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{I}_n$, podemos deducir que $U_x \cap V_x = U_x \cap \bigcup_{k=1}^n B_{y_k} = \emptyset$.

Hagamos este laburo en todos los $x \in K_1$. Obtenemos una familia $\{U_x\}_{x \in K_1}$ que es un cubrimiento de K_1 , acompañados de sendos abiertos $V_x \supseteq K_2$ y tales que $V_x \cap U_x = \emptyset$ (para todo $x \in K_1$). Extraigamos finitos $U_{x_1}, \dots, U_{x_m}$ que sigan cubriendo a K_1 . Sean

$$U = \bigcup_{k=1}^m U_{x_k} \quad \text{y} \quad V = \bigcap_{k=1}^m V_{x_k}.$$

Es claro que son abiertos, que $K_1 \subseteq U$ y que $K_2 \subseteq V$. Como antes, podemos ver que $U \cap V = \emptyset$, lo que termina de probar la fórmula (6.1). ■

Corolario 6.2.5. Sea (K, τ) un ET compacto Hausdorff. Entonces K es **normal**.

Demostración. Sean F_1 y F_2 dos cerrados disjuntos en K . Como K es compacto, la Prop. 6.2.2 asegura que F_1 y F_2 son compactos. Como K es Hausdorff, la Prop. 6.2.4 nos provee de los abiertos disjuntos que los separan. ■

Proposición 6.2.6. Sea $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ una función continua y sea $K \subseteq X$ un subconjunto compacto. Entonces se tiene que $f(K)$ es compacto en Y .

Demostración. Notemos $Z = f(K)$. Sea $\mathbf{z} = (z_i)_{i \in \mathbb{I}}$ una red en Z . Para cada $i \in \mathbb{I}$, elijamos un $x_i \in f^{-1}(\{z_i\}) \cap K$. La red $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$, como vive en el compacto K , tiene una subred $\mathbf{y} = (y_j)_{j \in \mathbb{J}}$ tal que $y_j \xrightarrow{j \in \mathbb{J}} y \in K$. Pero como f es continua, la red $f(y_j) \xrightarrow{j \in \mathbb{J}} f(y) \in Z$. Observar que, si $h : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{I}$ es la función cofinal creciente que define a la subred $\mathbf{y}$, entonces $f(y_j) = f(x_{h(j)}) = z_{h(j)}$ para todo $j \in \mathbb{J}$. Luego la red $f \circ \mathbf{y}$ es subred de $\mathbf{z}$ (con la misma función h), y además es convergente a alguien de Z . ■

Otra prueba bien fácil de esto sale usando cubrimientos de $f(K)$. Sugerimos hacerla como ejercicio, sobre todo si no gustan de tanta subred.

Proposición 6.2.7. Sea $f \in C(K, X)$ **inyectiva**, con K compacto y X Hausdorff. Entonces $f : K \hookrightarrow X$ es un **embedding**, o sea que $f : K \rightarrow f(K)$ es un hómoio.

Demostración. Llamemos $Z = f(K)$. Es claro que $f : K \rightarrow Z$ es biyectiva y continua. Veamos que es abierta: Sea $F \subseteq K$ un cerrado. Por la Prop. 6.2.2, F es compacto. Por la Prop. 6.2.6, $f(F)$ es compacto en X . Al ser X un Hausdorff, la Prop. 6.2.3 dice que $f(F)$ es cerrado en X , y por lo tanto también cerrado en Z . En resumen, $f : K \rightarrow Z$ manda cerrados en cerrados. Como es biyectiva, también manda abiertos en abiertos. Por lo tanto $f : K \rightarrow Z$ es hómoio. ■

Observación 6.2.8. Sea (K, τ) un ET compacto Hausdorff (en adelante abreviaremos escribiendo K-H). Luego la topología τ es rígida, en el siguiente sentido: Si uno la agranda, K es más Hausdorff, pero ya no es más compacto. Y si uno la achica, K es más compacto, pero deja de ser Hausdorff. Esto es consecuencia de la Prop. 6.2.7.

En efecto si $\sigma \supseteq \tau$, entonces $\mathcal{I}_K \in C((K, \sigma), (K, \tau))$. Si (K, σ) fuera compacto, como (K, τ) es Hausdorff, $\mathcal{I}_K$ quedaría hómoio. Y entonces $\sigma = \tau$.

Por otro lado, si $\sigma \subseteq \tau$, entonces $\mathcal{I}_K \in C((K, \tau), (K, \sigma))$. Si (K, σ) siguiera siendo Hausdorff, como (K, τ) es compacto, $\mathcal{I}_K$ también quedaría hómoio. Y entonces $\tau = \sigma$. ▲

Ejercicio 6.2.9. Sea $f : X \rightarrow Y$, donde X e Y son dos ET's (con Y un H). Probar que

$$f \in C(X, Y) \implies \text{Gr}_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y \text{ es cerrado en } X \times Y.$$

Probar que la recíproca es cierta si Y es compacto (usar la Prop. 4.2.5). ▲

6.3 El Teorema de Tychonoff

Observación 6.3.1. En el Capítulo 4 estudiamos las redes universales (abreviemos RU), viendo que toda red tiene una sub-RU, y que las RU's siempre convergen a todos sus puntos de acumulación. Igual las RU's llaman la atención por lo “extrañas” que son, y uno trataba de evitarlas. Sin embargo, el Teo. 6.1.3 les da un nuevo relieve, ya que

$$K \subseteq X \text{ es compacto} \iff \text{toda RU en } K \text{ tiene límite en } K.$$

Por ello, las RU son LAS redes asociadas a la compacidad, así como las sucesiones de Cauchy (que también son medio raritas) son LAS sucesiones de los EM completos. En conclusión, vamos a tener que superar los temores a lo sobrenatural, y acostumbrarnos a usar a las RU's y sus propiedades. Lo más útil de ellas es una propiedad de “concentración” parecida a lo que les pasa las Cauchy. También se las traslada adecuadamente (eso las Cauchy no). Vamos a explicitar mejor estas propiedades para usarlas tranquilos: Recordemos que una red $\mathbf{x}$ en X era una RU si para todo $A \subseteq X$ vale que $\mathbf{x} \xrightarrow{E} A$ o bien $\mathbf{x} \xrightarrow{E} X \setminus A$. ▲

Proposición 6.3.2. Sea X un conjunto y $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ una RU en X .

1. Si tenemos una familia finita $A_1, \dots, A_n$ de subconjuntos de X , se tiene que

$$\text{si } \mathbf{x} \xrightarrow{E} A = \bigcup_{k \in \mathbb{I}_n} A_k \implies \text{existe un } k \in \mathbb{I}_n \text{ tal que } \mathbf{x} \xrightarrow{E} A_k.$$

2. Dada $f : X \rightarrow Y$ una función, vale que $f \circ \mathbf{x} = (f(x_i))_{i \in \mathbb{I}}$ es una RU de Y .

Demostración.

1. Hagamos un argumento inductivo: En el caso $n = 1$ todo es tautológico. Supongamos que $n > 1$. Si $\mathbf{x} \xrightarrow{E} A_n$ listo. Sino, usando que $\mathbf{x}$ es una RU, sale que $\mathbf{x} \xrightarrow{E} X \setminus A_n$. Como también $\mathbf{x} \xrightarrow{E} A$, llegamos que

$$\mathbf{x} \xrightarrow{E} A \cap (X \setminus A_n) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \implies \mathbf{x} \xrightarrow{E} \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k.$$

Ahora viene la HI, por lo que $\mathbf{x} \xrightarrow{E} A_k \subseteq A_k$ para algún $k \in \mathbb{I}_{n-1}$.

2. Sea $B \subseteq Y$, y llamemos $A = f^{-1}(B)$. Luego $X \setminus A = f^{-1}(Y \setminus B)$. Por ello,

$$\mathbf{x} \xrightarrow{E} A \implies f \circ \mathbf{x} \xrightarrow{E} f(A) \subseteq B \quad \text{o bien} \quad \mathbf{x} \xrightarrow{E} X \setminus A \implies f \circ \mathbf{x} \xrightarrow{E} f(X \setminus A) \subseteq Y \setminus B.$$

En resumen, queda que $f \circ \mathbf{x} = (f(x_i))_{i \in \mathbb{I}}$ es una RU de Y , como asegurábamos. ■

El siguiente resultado es bastante esperable, y su prueba nos va a quedar cortita, porque el laburo grosso lo fuimos haciendo antes. Pero es uno de los teoremas más importantes de la teoría, en función de sus innumerables aplicaciones dentro y fuera de la topología.

Teorema 6.3.3 (Tychonoff). Sea $\left((X_\alpha, \tau_\alpha) \right)_{\alpha \in \mathbb{A}}$ una familia de ET's **compactos**. Entonces el producto $\mathbb{P} = \prod_{\alpha \in \mathbb{A}} X_\alpha$, con la topología producto, es compacto. O sea que

“producto de compactos es compacto”, aunque sean “muchos”.

Demostración. Tomemos una red universal $\mathbf{x} = (\{x_{i,\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{A}})_{i \in \mathbb{I}}$ en $\mathbb{P}$. Por la Prop. 6.3.2, para todo $\beta \in \mathbb{A}$ la proyección $\pi_\beta \circ \mathbf{x} = (x_{i,\beta})_{i \in \mathbb{I}}$ es RU en su X_β . Usando ahora el Teo. 6.1.3 y compacidad de los X_β , vemos que cada red $\pi_\beta \circ \mathbf{x}$ converge a un $x_\beta \in X_\beta$.

Con esos límites como “coordenadas” generamos un elemento $y = \{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}} \in \mathbb{P}$ y, por la Prop. 5.3.4, podemos deducir que la red original $\mathbf{x}$ converge a ese y (la convergencia en $\mathbb{P}$ era coordenada a coordenada, o sea “contra todas las π_β ”). Finalmente, el Teo. 6.1.3 nos permite concluir que $\mathbb{P}$ es compacto. ■

Sugerimos hacer como ejercicio una prueba a mano del teorema anterior, pero asumiendo que $\mathbb{A}$ es finito. Inductivamente se reduce al caso de $\mathbb{P} = X \times Y$, con X e Y compactos. Usando redes comunes, eso sale iterando la toma de subredes. Con cubrimientos también sale, pero es más largo, aunque muy gráfico y divertido (ver Munkres [2]). Sin embargo ambos métodos colapsan en el caso infinito, donde las RU's dan la prueba más directa posible. Siempre hay involucrada una bruta Zorneada, pero las RU's ya la habían usado con los ultrafiltros. De hecho se sabe que este Tychonoff implica el AdE. Les tienta probarlo?

6.4 Cmpactos en EM's

Hay varias caracterizaciones y propiedades asociadas a la compacidad que son específicas de los EM's, y algunas más para subespacios de $\mathbb{R}^n$. Ahí vamos:

6.4.1 Caracterización de la compacidad para EM's

Sea (X, d) un EM. Si uno toma un compacto $K \subseteq X$ y fija un $\varepsilon > 0$, se puede cubrir a K con bolas de radio ε , y luego quedarse con finitas que sigan cubriendo. Esta propiedad será casi suficiente para la compacidad, así que le ponemos nombre:

Definición 6.4.1. Sea (X, d) un EM. Diremos que $A \subseteq X$ es **totalmente acotado** (TA) si, para todo $\varepsilon > 0$, existen $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ y $x_1, \dots, x_{n(\varepsilon)} \in X$ tales que $A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{I}_{n(\varepsilon)}} B(x_k, \varepsilon)$. ▲

Las caracterizaciones de compacidad vía redes pueden cambiarse, en el contexto de EM's, a sucesiones y subsucesiones. También se pueden usar los puntos de acumulación (se abrevia PA) de conjuntos. Antes de ir a los bifos, repasemos algunas de sus propiedades, particularmente en el contexto métrico:

6.4.2. Sea (X, d) un EM y sea $A \subseteq X$. Un $x \in X$ era un PA de A si

para todo $\varepsilon > 0$ existe un $y \neq x$ tal que $y \in B(x, \varepsilon) \cap A$.

Se llama A' al conjunto de los PA's de A . Veamos alguna variaciones y casos particulares:

1. $x \in A' \iff B(x, \varepsilon) \cap A$ es **infinito** para todo $\varepsilon > 0$.
2. Si A cumple que existe un $\delta > 0$ tal que $d(x, y) \geq \delta$ para todo par $x \neq y$ en A , entonces debe suceder que $A' = \emptyset$.
3. En cambio, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X , y llamamos

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \quad , \quad \text{entonces} \quad x \in A' \implies x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x \quad .$$

Las pruebas son elementales: Lo primero se deduce del Ejer. 2.4.13 (esto vale en ET's de clase T_1). Lo segundo sale porque en una bola $B(x, \delta/2)$ sólo puede haber **un** elemento de A . Por el diámetro. Lo último fue probado en la Prop. 4.4.3. ▲

Teorema 6.4.3. Sea (X, d) un EM y sea $K \subseteq X$. Son equivalentes:

1. K es compacto.
2. Toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente, con su límite en K .
3. Todo $A \subseteq K$ infinito tiene un PA en K (o sea que $A' \cap K \neq \emptyset$).
4. K es totalmente acotado y el EM (K, d) es completo.

Demostración. $1 \rightarrow 2$: Una sucesión $\mathbf{x}$ en K es también una red. Por el Teo. 6.1.3, existe un $y \in K$ que es PA de $\mathbf{x}$. Pero entonces la Prop. 4.3.1 asegura que $\mathbf{x}$ tiene una subsucesión que converge a ese $y \in K$.

$2 \rightarrow 3$: Si $A \subseteq K$ es infinito, existe una función inyectiva $\mathbf{x} : \mathbb{N} \rightarrow A$, que puede pensarse como una sucesión $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en A . Si alguna subsucesión $\mathbf{y} = (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbf{x}$ converge a un $y \in K$, del hecho de que $\mathbf{x}$ sea inyectiva se deduce fácilmente que $y \in A' \cap K$.

$3 \rightarrow 4$: Si K no fuera TA, existiría un $\varepsilon > 0$ tal que ninguna unión finita de bolas ε cubre a K . Tomemos $x_1 \in K$. Después un $x_2 \in K \setminus B(x_1, \varepsilon)$, por lo que $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$. Después un $x_3 \in K \setminus (B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon))$. Siguiendo así podríamos construir un conjunto infinito $A = \{x_m : m \in \mathbb{N}\} \subseteq K$ tal que $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon$ si $m \neq n$. Por 6.4.2 se tendría que $A' = \emptyset$.

Si en cambio K no es completo, sea $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy sin límite en K . Luego el conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq K$ debe ser infinito (verificarlo). Pero por 6.4.2, de tener un punto de acumulación debería ser el límite, que no existe (o no está en K).

$4 \rightarrow 1$: Sea $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ una red universal en K . Cubramos a K con finitas bolas cerradas de radio 1. Como la red $\mathbf{x}$ es universal, usando la Prop. 6.3.2 sabemos que hay una de esas bolas $B_1 = \overline{B}_K(y_1, 1) := \{z \in K : d(z, y_1) \leq 1\}$ tal que $\mathbf{x} \xrightarrow{E} B_1$.

Ahora cubrimos B_1 con finitas bolas cerradas de radio $1/2$ y, por el mismo argumento, existirá una de ellas $B_2 = \overline{B}_K(y_2, 1/2)$ tal que $\mathbf{x} \xrightarrow{E} B_1 \cap B_2$. Continuando así, para cada $k \in \mathbb{N}$ obtendremos una bola cerrada B_k de radio $1/k$ tal que

$$\mathbf{x} \xrightarrow{E} F_n = \bigcap_{k=1}^n B_k \quad , \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} .$$

Como K es completo, existe un $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$x \in B_n = \overline{B}_K(y_n, \frac{1}{n}) \implies B_K(x, \frac{3}{n}) \supseteq B_n \supseteq F_n \implies \mathbf{x} \xrightarrow{E} B_K(x, \frac{3}{n}) ,$$

o sea que $x_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} x$. El Teo. 6.1.3 nos dice ahora que K es compacto. ■

Corolario 6.4.4. Sea (X, d) un EM **completo** y sea $A \subseteq X$. Entonces

$$\overline{A} \text{ es compacto} \iff A \text{ es TA} .$$

En particular, si A es TA, toda red en A tiene una subred convergente (a alguien de $\overline{A}$).

Demostración. Observar que, por ser X completo, sus subconjuntos son completos si y sólo si son cerrados (el límite de las Cauchy existe, el tema es dónde está). El segundo ingrediente es que A es TA $\iff \overline{A}$ es TA. Esto es fácil y se deja como ejercicio (recordar que $\overline{B \cup C} = \overline{B} \cup \overline{C}$, y quien dice dos...). ■

Observación 6.4.5. Sea (X, τ) un ET. Un $K \subseteq X$ es **secuencialmente compacto** (se abrevia SK) si toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente, con su límite en K . Estos espacios son estudiados, sobre todo, por aquellos a los que les gustan de las sucesiones pero les molestan las redes. El Teo. 6.4.3 dice si X es un EM, las nociones de compacto y SK coinciden. Por otra parte, si asumimos que X es N_1 , se ve fácil que $K \implies SK$ (usando primero el Teo. 6.1.3 y después la Prop. 4.3.1). Y ahora viene la pregunta:

¿ En los N_1 , será cierto que $SK \implies K$?, ¿ Habrá que pedirle algo más a X ?

La respuesta la dejamos como un ejercicio inquietante para el lector. ▲

6.4.2 El número de Lebesgue

Hay otra propiedad clave de los EM compactos, que muchas veces es aún más útil que los subcubrimientos finitos y las subsucesiones convergentes. Estamos hablando del famoso “Lema del cubrimiento de Lebesgue”. La idea es que dado un cubrimiento σ de un EM compacto K , todo $x \in K$ tiene que tener una bolita $B(x, \delta_x)$ dentro de algún $U \in \sigma$ que lo cubra al x . El tema es que el tamaño δ_x de la bolita depende del x . Ahí es donde vienen la compacidad y Lebesgue para uniformar la cosa:

Lema 6.4.6 (Cubrimiento de Lebesgue). Sea (X, d) un EM y sea $K \subseteq X$ un compacto. Si σ es un cubrimiento por abiertos de K , existe un $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in K$, la bola $B(x, \delta)$ (mismo delta para todos) está dentro de alguno de los $U \in \sigma$.

Demostración. Si esto no fuera cierto, para todo $n \in \mathbb{N}$ existiría una bola $B_n = B(x_n, \frac{1}{n})$, con centro $x_n \in K$, tal que $B_n \not\subseteq U$, para ningún $U \in \sigma$. Con ellos podríamos producir la sucesión $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que vive en K , que por compacidad tendría una subsucesión

$$\mathbf{y} = (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{de } \mathbf{x} \text{ tal que } x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} y \in K,$$

y podríamos encontrar un $U \in \sigma$ y $\varepsilon > 0$ tales que $B(y, \varepsilon) \subseteq U$. Como

$$\mathbf{y} \xrightarrow{E} B(y, \frac{\varepsilon}{2}), \quad \text{existe un } k \in \mathbb{N} \quad \text{tal que } x_{n_k} \in B(y, \frac{\varepsilon}{2}) \quad \text{y} \quad \frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para un tal k se tendría que $B_{n_k} = B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subseteq B(y, \varepsilon) \subseteq U$. Y eso no vale. ■

Observación 6.4.7. Dados dos cubrimientos σ y ρ de un conjunto $K \subseteq X$, decimos que ρ es un refinamiento de σ si para todo $V \in \rho$ existe un $U \in \sigma$ tal que $V \subseteq U$. El lema de Lebesgue se refrasea en este lenguaje diciendo que “Si X es un EM y $K \subseteq X$ es compacto, para todo cubrimiento abierto σ de K existe un $\delta > 0$ tal que la familia de todas las bolas de radio delta, es decir $\rho = \{B(x, \delta) : x \in K\}$, es un refinamiento de σ ”. ▲

Observación 6.4.8. Notar que en la prueba del Lema, como uno supone que K es compacto, se podría pensar que cambiar σ por un subcubrimiento finito permitiría a encontrar “a mano” el δ . Sin embargo, hay que pedir compacidad aún si el cubrimiento σ original ya era finito. Por ejemplo, si tomamos $X = \mathbb{C}$, los abiertos

$$U = \{z : \operatorname{Im} z > 0\} \quad \text{y} \quad V = \{a + bi : b < \frac{2}{|a| + 1}\}$$

cubren a X , pero la sucesión $x_n = n + \frac{i}{n+1}$ verifica la condición de la prueba que hicimos, o sea que las bolas $B_n = B(x_n, \frac{1}{n})$ no están dentro de U ni de V . La diferencia es que en $\mathbb{C}$ no hay subsucesiones convergentes. Sugerimos hacer un ejemplo de dos abiertos que cubren al $(0, 1)$ que tampoco tengan un δ de Lebesgue.

Incluso cuando el cubrimiento de K es de **un solo** abierto, el Lema da información importante y no trivial, como se ve en el ítem 4 de la siguiente Proposición, que da una miscelánea de propiedades de los conjuntos compactos. ▲

Proposición 6.4.9. Sea (X, d) un EM y sea $K \subseteq X$ un compacto. Entonces

1. Si $f \in C(X, \mathbb{R})$, se tiene que
 - (a) $f(K)$ es acotado (esto vale también si $f \in C(X, Y)$, donde Y es otro EM).
 - (b) Existen x_0 y $x_1 \in K$ tales que

$$f(x_0) = \min\{f(x) : x \in K\} \quad \text{y} \quad f(x_1) = \max\{f(x) : x \in K\}$$

2. Para todo $x \in X$ existe un $k_x \in K$ tal que $d(x, K) = d(x, k_x)$, o sea que la distancia entre K y x se realiza en un punto $k_x \in K$.
3. Existen k_0 y $k_1 \in K$ tales que $\operatorname{diam}(K) = d(k_0, k_1)$.
4. Dado un abierto U tal que $K \subseteq U$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que el abierto

$$B(K, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : d(x, K) < \varepsilon\} \subseteq U.$$

Esto vendría a significar que la distancia de K al borde de U es mayor que cero.

Demostración. 1. Si $f \in C(X, Y)$, entonces $f(K)$ es compacto por la Prop. 6.2.6. Luego es acotado (totalmente!). Volvamos al caso en que $Y = \mathbb{R}$. Sea $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en K tal que $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m = \inf\{f(x) : x \in K\}$. Por el Teo. 6.4.3 existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbf{x}$ tal que $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0 \in K$. Luego $f(x_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x_0) = m$. Para realizar en un $x_1 \in K$ el $f(x_1) = \max\{f(x) : x \in K\}$ se razona igual.

2. Para realizar la $d(x, K)$, basta tomar la función $d_x \in C(X, \mathbb{R})$ dada por $d_x(y) = d(y, x)$ (para $y \in X$) y observar que $d(x, K) = \min\{d_x(y) : y \in K\}$.

3. Para realizar el diámetro de K , se toma la función $d|_{K \times K} \in C(K \times K, \mathbb{R})$.

4. Basta aplicarle el Lema de Lebesgue 6.4.6 al cubrimiento unitario $\sigma = \{U\}$ de K . Para que quede más claro, observar que $B(K, \varepsilon) = \bigcup_{y \in K} B(y, \varepsilon)$. ■

6.4.3 Continuidad uniforme

Otro resultado que queda en la memoria es que “continua en un compacto es uniformemente continua”. Para que esto tenga sentido, hace falta que el contexto sea el de EM’s, ya que la frase clave es “para un ε dado, el δ no depende de x ” en la Ec. (5.2). Usando el Lema del cubrimiento de Lebesgue podemos ahora probar esto en general:

Definición 6.4.10. Sean X e Y dos EM’s. Una función $f : X \rightarrow Y$ es **uniformemente continua** (se abrevia UC) si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que

$$\text{dados } w, z \in X \quad , \quad d_X(w, z) < \delta \quad \implies \quad d_Y(f(w), f(z)) < \varepsilon . \quad (6.2)$$

Notar que en tal caso $f \in C(X, Y)$, porque $f(B_X(x, \delta)) \subseteq B_Y(f(x), \varepsilon)$ para todo $x \in X$. ▲

Como decíamos antes, la gracia de la continuidad uniforme es que, fijado el ε , el δ sea el mismo para todos los $x \in X$. Veamos algunos ejemplos:

1. Si la $f : X \rightarrow Y$ es Lipschitz, o sea si existe un $\alpha > 0$ tal que

$$d_Y(f(w), f(z)) \leq \alpha d_X(w, z) \quad \text{para todo } w, z \in X \implies f \text{ es UC} ,$$

porque basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{\alpha}$.

2. Pero si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por $f(t) = t^2$, entonces f es continua por no es UC.

3. Lo mismo pasa con $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \frac{1}{t}$.

Las verificaciones se dejan como ejercicios (facilongos). No es casual que en los dos ejemplos malos hayamos tomado un dominio “no acotado” y el otro “no cerrado”. Veamos ahora el resultado anunciado, que dice que los dominios buenos son los compactos:

Teorema 6.4.11. Sean X e Y dos EM’s, $K \subseteq X$ un compacto y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Entonces $f|_K : K \rightarrow Y$ es uniformemente continua.

Demostración. Fijemos el $\varepsilon > 0$, y cubramos a $f(K)$ con las bolas $B_x = B_Y(f(x), \frac{\varepsilon}{2})$, donde los x recorren todo el compacto K . Luego $\sigma = \{f^{-1}(B_x) : x \in K\}$ es un cubrimiento por abiertos de K . Si δ es el número de Lebesgue que da el Lema 6.4.6 asociado a este cubrimiento σ , y tomamos $w, z \in K$ tales que $d_X(w, z) < \delta$, nos queda que

$$z \in B_X(w, \delta) \subseteq f^{-1}(B_x) \text{ para cierto } x \in K \implies f(w), f(z) \in B_x = B_Y\left(f(x), \frac{\varepsilon}{2}\right) .$$

Y por lo tanto, llegamos a que $d_Y(f(w), f(z)) < \varepsilon$. ■

6.4.4 Dentro de $\mathbb{R}^n$

Es un hecho conocido que la bola cerrada B_m de radio uno en $\mathbb{R}^m$ es TA, aunque lo es cada vez menos a medida aumenta la dimensión m (y que deja de serlo en dimensión infinita, ver Ejem. 7.1.5). Observar que el $n(\varepsilon)$ de la Def. 6.4.1 asociado a la bola B_m será del orden de ε^{-m} , o sea que crece a lo loco con m . Vamos a dar una prueba de que los acotados de $\mathbb{R}^m$ son TA's. Por lo anterior, será más fácil verlo primero en $\mathbb{R}$ y después aplicar el Teorema de Tichonoff, como haremos a continuación.

Lema 6.4.12. Sean $a \leq b$ en $\mathbb{R}$. Entonces el intervalo $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ es compacto.

Demostración. Como $\mathbb{R}$ es completo e I es cerrado en $\mathbb{R}$, también I es completo. Dado $\varepsilon > 0$, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $N\varepsilon > b - a$. Tomando las bolas

$$B(a + k\varepsilon, \varepsilon) = (a + (k-1)\varepsilon, a + (k+1)\varepsilon), \quad \text{para } 0 \leq k \leq N-1,$$

cubrimos a I , por lo que I es TA. Por el Teo. 6.4.3, vemos que I es compacto. ■

Proposición 6.4.13. Un subconjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto con la topología inducida por la usual de $\mathbb{R}^n$ si y sólo si K es cerrado y acotado. En particular, si $A \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces $\bar{A}$ es compacto si y sólo si A es acotado.

Demostración. Sea $M \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq B(0, M) \subseteq Q_M = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq M, i \in \mathbb{I}_n\}$. Es fácil ver que la topología inducida por $\mathbb{R}^n$ a Q_M coincide con la topología producto, si pensamos a $Q_M = [-M, M]^n$. Esto puede verse porque en ambos casos la convergencia es coordenada a coordenada (también sale usando el hómoe de la Prop. 6.2.7). Por el Teorema de Tychonoff y el Lema 6.4.12, tenemos que Q_M es compacto. Como K es cerrado en $\mathbb{R}^n$ también lo es en Q_M . Por la Prop. 6.2.2 tenemos que K es compacto, por ser cerrado dentro de un compacto.

Recíprocamente, en cualquier EM vale que un TA es acotado, y que un completo debe ser cerrado. Por el Teo. 6.4.3, vemos que si K es compacto debe ser cerrado y acotado (en cualquier EM donde viva, en particular en $\mathbb{R}^n$). ■

6.5 Compactificaciones

Definición 6.5.1. Sea (X, τ) un ET. Una **compactificación** de X es un par (g, K) tal que

1. (K, σ) es un ET compacto.
2. $g : X \hookrightarrow K$ es un embedding (i.e. g es continua, inyectiva y hómoe con la imagen).
3. $g(X)$ queda denso en K .

Diremos que (g, K) es una H -compactificación si K es, además, un espacio de Hausdorff.

Muchas veces, en presencia de una compactificación (g, K) , identificaremos a X con su imagen $g(X)$, que está **dentro** de K y tiene la topología inducida por K .

Desde ese punto de vista, una compactificación de un (Y, τ') sería un compacto (K, σ) que contenga a Y como un subespacio denso, y tal que τ' sea la inducida a Y por σ . ▲

Observación 6.5.2. Por la Prop. 6.2.2 (un cerrado en un compacto es compacto), si uno tiene su espacio X incrustado dentro de un compacto K' , vía un embedding $g : X \hookrightarrow K'$, entonces tomando $K = \overline{g(X)} \subseteq K'$ uno obtiene una compactificación (g, K) .

Como veremos más adelante, todo ET tiene compactificaciones. El tema se pone más interesante si uno quiere ver si tiene alguna H -compactificación. Sin embargo ese problema ya lo tenemos resuelto de antes: ▲

Proposición 6.5.3. Sea (X, τ) un ET. Luego X tiene una H -compactificación si y sólo si X es CR (o Tichonoff).

Demostración. Hemos visto en el Cor. 5.5.6 que, si X es de Tychonoff y si denotamos $\mathcal{F} = C(X, [0, 1])$, entonces existe un embedding

$$F : X \hookrightarrow Q, \quad \text{donde } Q \text{ es el cubo } [0, 1]^{\mathcal{F}} \text{ con su topología producto.}$$

Por el Teorema de Tychonoff 6.3.3, Q es compacto, y por la Prop. 5.3.6, Q es de Hausdorff. Luego X tiene la H -compactificación $(F, \overline{F(X)})$.

Si ahora suponemos que X tiene una H -compactificación (g, K) , entonces K es compacto Hausdorff. Por el Cor. 6.2.5, K es normal. Como vimos en la Obs. 5.5.8, normal implica CR, y ser CR es hereditario. Luego $g(X)$ es CR y X también. ■

Corolario 6.5.4. Si $\mathbb{P}$ es un producto cartesiano de CR's (con la topología producto), entonces $\mathbb{P}$ es CR.

Demostración. Se incrusta cada coordenada en un compacto Hausdorff, lo que permite (vía 5.3.9) incrustar a $\mathbb{P}$ en un producto de compactos Hausdorff. Por el Teorema de Tychonoff y la Prop. 5.3.6, el producto grande es también compacto Hausdorff. ■

6.5.1 Alexandrov: Un punto

Ahora veremos métodos para construir compactificaciones. El primero es lo más simple posible: agregar un punto. Se llama la compactificación de Alexandrov. Lo único que hay que pedirle a X para que el proceso camine es que él mismo no sea compacto. Ahora, el tema de cuándo esta compactificación queda Hausdorff es otra historia (y otro Capítulo).

Proposición 6.5.5. Sea (X, τ) un ET que no es compacto. Inventemos un punto ∞ al que sólo le pedimos que $\infty \notin X$. Sean $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ y $\tau_\infty \subseteq \mathcal{P}(\tilde{X})$ dada por

$$\tau_\infty = \tau \cup \tau', \quad \text{donde } \tau' = \{V \cup \{\infty\} : V \in \tau \text{ y } X \setminus V \text{ es compacto en } X\}.$$

Luego τ_∞ es una topología en $\tilde{X}$ tal que

1. $(\tilde{X}, \tau_\infty)$ es compacto.
2. τ es la topología inducida a X por τ_∞ .
3. X queda denso y abierto en $\tilde{X}$.

O sea que la inclusión $X \subseteq \tilde{X}$ es una compactificación de X .

Demostración. Es claro que $\emptyset \in \tau$ y $\tilde{X} \in \tau'$ (porque el $\emptyset$ es compacto!). Observar que

$$\tau' = \{ V' \in \mathcal{P}(\tilde{X}) : \infty \in V' \text{ y } \tilde{X} \setminus V' \text{ es cerrado y compacto en } X \}. \quad (6.3)$$

Veamos las uniones arbitrarias y las intersecciones finitas: Entre cosas de τ no hay drama. Dada una familia de abiertos $V'_i \in \tau'$ y sus complementos $F_i = \tilde{X} \setminus V'_i$, para $i \in \mathbb{I}$, entonces

$$\tilde{X} \setminus \bigcap_{i \in \mathbb{I}} V'_i = \bigcup_{i \in \mathbb{I}} F_i \quad \text{y} \quad \tilde{X} \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{I}} V'_i = \bigcap_{i \in \mathbb{I}} F_i.$$

Cuando $\mathbb{I}$ es finito, la $\bigcup_{i \in \mathbb{I}} F_i$ queda cerrada y compacta. Y la intersección cumple eso siempre (cerrado dentro de compacto). Luego operando en τ' uno se queda en τ' . Si hay de las dos clases (tanto en $\cap$ como en $\cup$), uno primero reagrupa todas las de cada clase, y opera uno (de τ) contra uno (de τ'). Pero allí pasa que si $U \in \tau$ y $V' = \{\infty\} \cup V \in \tau'$, entonces

$$U \cap V' = U \cap V \in \tau \quad \text{y} \quad U \cup V' = \{\infty\} \cup (U \cup V) \in \tau'.$$

Por lo tanto τ_∞ es una topología en $\tilde{X}$. Para ver que la inducida de τ_∞ a X es τ , observar que si $V' \in \tau'$, entonces $V' \cap X \in \tau$ (y los de τ estaban todos en τ_∞). Para ver la densidad, observar que τ' no es otra cosa que $\mathcal{O}_{\tau_\infty}^a(\infty)$. Además, como X no es compacto, entonces $\{\infty\} \notin \tau'$. Luego todo $V' \in \mathcal{O}_{\tau_\infty}^a(\infty)$ corta a X , lo que muestra que X es denso en $\tilde{X}$.

Veamos ahora que $(\tilde{X}, \tau_\infty)$ es compacto: Como $\tau' = \mathcal{O}_{\tau_\infty}^a(\infty)$, si $\sigma \subseteq \tau_\infty$ es un cubrimiento de $\tilde{X}$, existe un $V' \in \sigma \cap \tau'$ (para cubrir al ∞). Sólo falta cubrir $\tilde{X} \setminus V'$, que es compacto (en X y en $\tilde{X}$). Y sabemos que $\sigma \setminus \{V'\}$ lo cubre. Entonces agregando finitos elementos de σ a V' cubrimos todo $\tilde{X}$, que por ello es compacto. ■

Por ahora no vamos a hacer nada con esta compactación que hemos construido. El resultado se hace muy útil cuando $\tilde{X}$ es Hausdorff. Los espacios X que cumplen eso son los llamados “localmente compactos” (Hausdorff). Para ellos usaremos sistemáticamente su $\tilde{X}$, pero ese laburo se hará en el Capítulo que viene (que es sobre esos espacios). Pero ahora daremos unos ejemplos para entender un poco mejor la construcción.

Ejemplos 6.5.6. 1. Tomemos $X = \mathbb{R}$ con su topología usual. Entonces $\tilde{\mathbb{R}} \cong S^1$. Esto se puede mostrar con la proyección estereográfica o, mejor dicho, su inversa que podemos explicitar: $g(x) = \left(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1} \right) \in S^1$, para $x \in \mathbb{R}$. Otra manera es hacer primero $\mathbb{R} \cong (0, 1)$ y después incrustar al $(0, 1)$ dentro de S^1 con la flecha $t \mapsto e^{i2\pi t}$.

2. En forma análoga se puede ver que $\tilde{\mathbb{R}}^n \cong S^n$, que es la esfera de $\mathbb{R}^{n+1}$.

3. Sea ahora $X = \mathbb{N}$ con la topología discreta. Observar que los únicos compactos de $\mathbb{N}$ son los finitos. Por lo tanto tendremos que $\tau = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mientras que $\tau' = \tau_{CF}(\mathbb{N})$, nuestra conocida topología cofinita (agregándoles el ∞). Con esto en mente, se puede ver que $\tilde{\mathbb{N}} \cong \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, con la topología inducida de $\mathbb{R}$. Lo lindo de este ejemplo es que el hómoio que uno escribe justifica la polémica fórmula $\frac{1}{\infty} = 0$.
4. Si tomamos $X = (0, 1) \cup (2, 3)$, queda que $\tilde{X}$ es un “ocho”, o el mismísimo ∞ . Y si ponemos 3 o 4 intervalos abiertos disjuntos nos queda un trébol (sin el tallo, para obtenerlo hay que agregar un semiabierto).
5. Los ejemplos anteriores justifican que se llame ∞ al punto que se agrega al hacer Alexandrov. Sin embargo no siempre queda tan clarito “para dónde” está el infinito. La cosa se pone más brava si tomamos $X = \mathbb{Q}$. Intuitivamente, en $\mathbb{Q}$ tenemos al infinito por todos lados, porque está lleno de redes sin límites en $\mathbb{Q}$, y no solo hacia los dos costados. Lamentablemente no es fácil dar un modelo de $\tilde{\mathbb{Q}}$, porque los compactos de $\mathbb{Q}$, además de los finitos, incluyen sucesiones convergentes junto con sus límites, y la cosa se complica bastante. De paso un ejercicio: Mostrar que, a diferencia de los ejemplos anteriores (donde $\tilde{X}$ quedaba metrizable), $\tilde{\mathbb{Q}}$ no es ni Hausdorff. ▲

6.5.2 Stone Čech

Ahora vamos a mostrar otro método de compactificar, que es todo lo contrario del anterior, porque es fabricar un compacto lo más grande posible, agregándole al ET original montones de puntos nuevos. Lo que queda es difícil de describir explícitamente, pero lo bueno es que existe, y que permite extender cualquier función continua y acotada al compactado. Eso requiere de muchos puntos nuevos, por las muchas maneras en que pueden comportarse esas funciones en los bordes del espacio. Como nos va a quedar siempre un Hausdorff, no va a quedar otra que pedirle al espacio base que sea CR (ver Prop. 6.5.3).

Por ejemplo, si empezamos con $\mathbb{R}$, vimos que su compactificación de Alexandrov es S^1 . Las funciones $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ que se pueden extender al $\infty = (0, 1) \in S^1$ son solo aquellas tales que existen $M = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ y $m = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t)$, y además cumplen que $m = M = f(\infty)$. Y nadie duda de que hay muchas más funciones acotadas que esas.

6.5.7. Sea (X, τ) un ET de Tychonoff. Llamemos $\mathcal{F} = C_b(X)$, y consideremos el hiper-disco

$$D_X = \prod_{f \in \mathcal{F}} D_f, \quad \text{donde cada } D_f = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|f\|_\infty\}.$$

Por el Teorema de Tychonoff y la Prop. 6.4.13, D_X es un compacto Hausdorff. El hecho de que X sea CR significa que $C(X, [0, 1])$, y a fortiori $C_b(X)$, separan a X . Sabiendo esto, una mínima variación de la Prop. 5.5.4 asegura que

$$F : X \hookrightarrow D_X \subseteq \mathbb{C}^{\mathcal{F}}, \quad \text{dada por } F(x) = \{f(x)\}_{f \in \mathcal{F}}, \quad x \in X$$

es un embedding, lo que también sale viendo que, si $\mathcal{F}_0 = C(X, [0, 1]) \subseteq \mathcal{F}$, convergencia en

$$F(X) \implies \text{ en } \pi_{\mathcal{F}_0}(F(X)) \subseteq [0, 1]^{C(X, [0, 1])} \xrightarrow{(5.20)} \text{ en } X \implies \text{ en } F(X) .$$

Llamemos $\beta(X) = \overline{F(X)}$. Por la Obs. 6.5.2, el par $(F, \beta(X))$ es una H -compactificación de X , que se llama la **compactificación de Stone Čech**. ▲

Teorema 6.5.8. Sea (X, τ) un ET de Tychonoff. Consideremos $(F, \beta(X))$ su compactificación de Stone Čech. Entonces

1. Para toda $g \in C_b(X)$ existe una única $\tilde{g} \in C(\beta(X))$ que “extiende” a g , en el sentido de que $\tilde{g} \circ F = g$.
2. Para toda H -compactificación (h, K) de X existe una $\Phi_K \in C(\beta(X), K)$ tal que
 - (a) La función Φ_K es continua y suryectiva.
 - (b) Φ_K es “la identidad” en X , o sea que $h = \Phi_K \circ F$.
3. Si una H -compactificación (h, K) de X tiene la misma propiedad que $\beta(X)$ enunciada en el ítem 1, entonces la función Φ_K del ítem 2 es un hómoio.

Demostración.

1. Fijada la $g \in C_b(X)$, consideremos la proyección $\Pi_g : D_X \rightarrow D_g \subseteq \mathbb{C}$ a la g -ésima coordenada. Es claro que Π_g es continua, por lo que también lo será $\tilde{g} = \pi_g|_{\beta(X)} \in C(\beta(X))$. Por otra parte, para todo $x \in X$ se tiene que

$$\tilde{g} \circ F(x) = \Pi_g \circ F(x) = \Pi_g(\{f(x)\}_{f \in \mathcal{F}}) = g(x) .$$

La unicidad de $\tilde{g}$ se deduce del hecho de que $F(X)$ es denso en $\beta(X)$.

2. Como K es un compacto Hausdorff, es normal, por ende CR, y por ello

$$G : K \hookrightarrow [0, 1]^{C(K, [0, 1])} , \quad \text{dada por} \quad G(k) = \{f(k)\}_{f \in C(K, [0, 1])} , \quad k \in K$$

es un embedding. Sea $m \in C(G(K), K)$ la inversa del hómoio $G : K \rightarrow G(K)$.

Si existiera la Φ_K que buscamos, tomando $\Psi = G \circ \Phi_K : \beta(X) \rightarrow G(K)$, debería pasar que $\Psi \circ F = G \circ (\Phi_K \circ F) = G \circ h$. Luego, mirando en cada coordenada $f \in C(K, [0, 1])$, deberíamos tener que $\pi_f(\Psi \circ F) = \pi_f(G \circ h) = f \circ h \in C(X, [0, 1]) \subseteq C_b(X)$.

Por lo tanto, las coordenadas de Ψ deberían ser funciones $\tilde{g}_f \in C(\beta(X))$ que cumplan la igualdad $\tilde{g}_f \circ F = f \circ h$. Afortunadamente, el ítem 1 nos provee de dichas funciones, así que empecemos por ellas, y construyamos Ψ desde abajo:

Para cada $f \in C(K, [0, 1])$, consideremos $g_f = f \circ h \in C_b(X)$. Por el ítem 1, existe una $\tilde{g}_f \in C(\beta(X))$ tal que $\tilde{g}_f \circ F = g_f$. Como cada $\tilde{g}_f$ es continua, también lo será

$$\Psi : \beta(X) \rightarrow [0, 1]^{C(K, [0, 1])} , \quad \text{dada por} \quad \Psi(y) = \{\tilde{g}_f(y)\}_{f \in C(K, [0, 1])} , \quad y \in \beta(X) .$$

Observar que las $\tilde{g}_f$ toman valores en $[0, 1]$ por que las $g_f = f \circ h$ lo hacen, y porque $F(X)$ es denso en $\beta(X)$ (recordar que $\tilde{g}_f \circ F = g_f$). Además, para cada $x \in X$,

$$\Psi(F(x)) = \{g_f(x)\}_{f \in C(K, [0, 1])} = \{f(h(x))\}_{f \in C(K, [0, 1])} = G(h(x)) . \quad (6.4)$$

O sea que $\Psi \circ F = G \circ h$. Por la densidad de $F(X)$ en $\beta(X)$, se tiene que $\Psi(\beta(X))$ es un compacto que coincide con la clausura de $G(h(X))$, que no es otra cosa que $G(K)$.

O sea que $\Psi(\beta(X)) = G(K)$. Tomemos finalmente $\Phi_K = m \circ \Psi \in C(\beta(X), K)$. Por todo lo anterior ya tenemos probado que la función Φ_K es continua y suryectiva. Pero por la Ec. (6.4) vemos que

$$\Phi_K \circ F = m \circ \Psi \circ F = m \circ G \circ h = h .$$

3. En caso de que (h, K) cumpliera 1, podríamos rehacer el ítem 2, pero con los papeles cambiados. Esto es porque sólo se usó de $\beta(X)$ el que tenga extensiones de las funciones continuas acotadas en X . Ese laburo produciría una $\Phi_{\beta(X)} \in C(K, \beta(X))$ tal que $\Phi_{\beta(X)} \circ h = F$. Pero estas condiciones functoriales (la otra es $\Phi_K \circ F = h$) permiten probar que ambas composiciones de las Φ 'es coinciden con la identidad en los densos $F(X)$ y $h(X)$. Luego son una la inversa de la otra y son hómeos. ■

Observación 6.5.9. Hay otras maneras de hacer la compactificación de Stone Čech. A continuación delinearemos una de ellas, que es análoga a la completación de EM's a partir de sus sucesiones de Cauchy (ver Ejer. 4.4.6), pero usando las RU's de X .

Asumamos que X es un ET de Tychonov, y llamemos $RU(X)$ al conjunto de todas sus redes **universales**. Dada una $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}} \in RU(X)$ y una $f \in C_b(X)$, la red $f \circ \mathbf{x}$ es acotada y universal en $\mathbb{C}$, por lo que converge a un $\mathbf{x}_f \in \mathbb{C}$. Consideremos las funciones

$$\varphi_f : RU(X) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{dadas por} \quad \varphi_f(\mathbf{x}) = \lim_{i \in \mathbb{I}} f(x_i) = \mathbf{x}_f , \quad \text{para} \quad \mathbf{x} \in RU(X) .$$

En $RU(X)$ se define la relación de equivalencia dada por

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \quad \text{si} \quad \varphi_f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_f = \mathbf{y}_f = \varphi_f(\mathbf{y}) \quad \text{para toda} \quad f \in C_b(X) . \quad (6.5)$$

El conjunto que buscamos será $B(X) = RU(X) / \sim$, que consta de las clases de equivalencia (que notaremos $\bar{\mathbf{x}}$, para cada red universal $\mathbf{x}$ en X) de la relación que acabamos de definir. Es claro que, para cada $f \in C_b(X)$, su φ_f se “baja” bien al cociente $B(X)$. Llamemos ahora $\phi_f : B(X) \rightarrow \mathbb{C}$ a la función bajada dada ahora por $\phi_f(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}_f$, $\mathbf{x} \in RU(X)$. Sea $\mathcal{F} = \{\phi_f : f \in C_b(X)\}$. Notar que ahora $\mathcal{F}$ separa puntos de $B(X)$.

La topología para $B(X)$ sea la **inicial** $\tau_{\mathcal{F}}$, dada por la familia $\mathcal{F}$. Y el embedding será

$G : X \rightarrow B(X)$ dado por $G(x) = \overline{\mathbf{c}_x}$, donde $\mathbf{c}_x$ es la sucesión constantemente igual a x .

Se podría probar a mano que el espacio $(B(X), \tau_{\mathcal{F}})$ es compacto (Hausdorff es, porque $\mathcal{F}$ separa puntos), pero es más fácil ver que hay un hómoio entre $\beta(X)$ y $B(X)$ que conmuta con los embeddings (lo que de paso mostrará que G era un embedding). Los detalles de esa cuenta se dejan como ejercicio. En el Ejer. 6.6.4 se sugieren los pasos necesarios.

La construcción anterior es en esencia la misma que la original, pero describe mejor qué lo que se agrega a X : son los límites de redes en X hacia los “bordes”. La similitud está en que ambas se basan en la acción de $C_b(X)$, ya sea en un producto o en las RU’s de X . Esta acción es clave en este ejemplo porque es la que define la relación de equivalencia de la Ec. (6.5) en $RU(X)$. ▲

Observación 6.5.10. Una tercera manera de construir $\beta(X)$ se basa en considerar al espacio $\mathcal{A} = C_b(X)$ como una $\mathbb{C}$ -álgebra (de Banach), junto con la topología (mejor dicho, la métrica) dada por la d_∞ . Entonces nos aparece que

$$\beta(X) \cong M_{\mathcal{A}} = \{\varphi : C_b(X) \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es continuo, lineal y multiplicativo}\} , \quad (6.6)$$

con la topología de la convergencia puntual (o sea en cada $f \in C_b(X)$). Se usa el masculino porque a esos φ se los suele llamar “los caracteres” de $\mathcal{A}$.

Para verlo bien hace falta saber un poco de C^* -álgebras y de la transformada de Gelfand. De hecho, el espacio de caracteres de un álgebra (también conocido por espectro maximal) es una herramienta clave en esa teoría. Así que esta descripción de $\beta(X)$ no es sólo otra vuelta de tuerca notacional.

El embedding $H : X \rightarrow M_{\mathcal{A}}$ está dado por hacer $X \ni x \mapsto \varphi_x$, donde φ_x actúa en $C_b(X)$ por evaluación en x . En forma similar, el hómoio entre $\beta(X)$ y $M_{\mathcal{A}}$ se define así:

$$\beta(X) \ni y \mapsto \varphi_y \in M_{\mathcal{A}} , \quad \text{donde ahora} \quad \varphi_y(f) = \tilde{f}(y) \quad \text{para } f \in C_b(X) .$$

Recordar que $\tilde{f}$ es la extensión de $f \in C_b(X)$ a $\beta(X)$ que da el Teo. 6.5.8. Por ejemplo la φ_y queda multiplicativa porque dadas $f, g \in C_b(X)$, vale que $(fg)^{\sim} = \tilde{f} \cdot \tilde{g}$ (y después se las evalúa en y). La idea que está detrás de todo esto es que el Teo. 6.5.8 nos dice que $C_b(X) \cong C(\beta(X))$, donde el símbolo $\cong$ está significando que existe un hómoio isométrico que es isomorfismo de álgebras, por lo que éstas tendrán “el mismo” espacio de caracteres. Lo que implementa ese $\cong$ es la flecha $f \mapsto \tilde{f}$. Luego se usa que si K es un K-H, los caracteres $M_{C(K)} \cong K$, ya que todos ellos consisten en evaluar las f ’s en un elemento de K . Y eso sale, a su vez, identificando los caracteres con sus núcleos, que son los ideales maximales de $C(K)$ (en realidad, esa identificación funciona para toda álgebra de Banach conmutativa unital $\mathcal{A}$). En la sección de ejercicios daremos una versión guiada de la propuesta anterior. (ver los Ejes. 6.6.5 y 6.6.6) ▲

Observación 6.5.11 (Teorema de la Corona). Tomemos el álgebra de Banach conmutativa $\mathcal{H}^\infty = \text{Hol}(\mathbb{D}) \cap L^\infty(\mathbb{D})$, es decir el espacio de funciones holomorfas en el disco que son además acotadas allí, con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Su espectro $M_{\mathcal{H}^\infty}$, que como vimos en la Ec. (6.6) es el conjunto de los caracteres de $\mathcal{H}^\infty$ con la topología de la convergencia puntual, es un

compacto Hausdorff (como todo espectro de un álgebra). Es fácil producir un embedding del mismo disco $\mathbb{D} \hookrightarrow M_{\mathcal{H}^\infty}$, definiendo

$$\mathbb{D} \ni z \mapsto \varphi_z \in M_{\mathcal{H}^\infty} \quad \text{donde} \quad \varphi_z(f) \stackrel{\text{def}}{=} f(z) \quad \text{para cada} \quad f \in \mathcal{H}_\infty.$$

El tema es que el H-compacto $M_{\mathcal{H}^\infty}$ es conocido como “la corona”, porque se puede ubicar a todos los $\varphi \in M_{\mathcal{H}^\infty}$ que no vienen de $\mathbb{D}$ en algún punto del borde S^1 , pero “arriba” de cada $w \in S^1$ hay muchísimos caracteres (incluye ternarios de Cantor y cosas peores). Por eso uno puede imaginarse que es una corona, con diseños complicados en el borde del círculo, y una copia del disco en el medio. Y ahí viene la gran pregunta gran: Es ese disco **denso** en la corona? O sea ¿Hay suficientes formas de arrimarse al borde del disco como para que pinten (como límite en esta intrincada topología) todos los caracteres de la corona?

Observar que otra forma de formular eso es proponer a la corona como una H-compactación del disco (lo único que faltaba ver era la densidad). Por eso lo mencionamos acá, aparte de que es un problema apasionante. Carleson en los 60 probó que sí, y luego hubo polémica, ya que la prueba era tan complicada que muchos no le creían (los que venían apostando de antes por la negativa). Lamentablemente nuestro crack Calderón quedó del lado de los perdedores. Ahora hay pruebas relativamente fáciles y creíbles, (¿se le animan?). ▲

6.6 Ejercicios

Ejercicio 6.6.1. Sea (X, τ) un ET. Un $K \subseteq X$ es **secuencialmente compacto** (se abrevia SK) si toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente, con su límite en K .

1. Probar que si X es un EM, las nociones de compacto y SK coinciden.
2. Si asumimos que X es N_1 , probar que $K \implies SK$.
3. ¿En los N_1 , será cierto que $SK \implies K$? , ¿Ayudaría pedirle algo más a X ?

Ejercicio 6.6.2. Sea (X, d) un EM, y tomemos un subconjunto $A \subseteq X$. Llamemos $K = \overline{A}$. Probar que las siguientes propiedades son equivalentes:

1. A tiene **clausura** compacta (o sea que K es compacta).
2. Toda sucesión en A tiene un punto de acumulación en X .
3. Toda sucesión en A tiene una subsucesión convergente.

¿Es cierto lo anterior para ET's generales, con redes en vez de sucesiones?

Ejercicio 6.6.3. Dado X un ET, notamos por $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ a su Alexandrov.

1. Tomemos $X = \mathbb{R}$ con su topología usual. Entonces $\tilde{\mathbb{R}} \cong S^1$. Esto se puede mostrar con la proyección estereográfica o, mejor dicho, su inversa que podemos explicitar: $g(x) = (\frac{2x}{x^2+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1}) \in S^1$, para $x \in \mathbb{R}$. Otra manera es hacer primero $\mathbb{R} \cong (0, 1)$ y después incrustar al $(0, 1)$ dentro de S^1 con la flecha $t \mapsto e^{i2\pi t}$.
2. En forma análoga se puede ver que $\tilde{\mathbb{R}}^n \cong S^n$, que es la esfera de $\mathbb{R}^{n+1}$.

3. Sea ahora $X = \mathbb{N}$ con la topología discreta. Observar que los únicos compactos de $\mathbb{N}$ son los finitos. Por lo tanto tendremos que $\tau = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mientras que $\tau' = \tau_{CF}(\mathbb{N})$, nuestra conocida topología cofinita (agregándoles el ∞). Deducir que $\tilde{\mathbb{N}} \cong \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, con la topología inducida de $\mathbb{R}$. Lo lindo de este ejemplo es que el hómoio que uno escribe justifica la polémica fórmula $\frac{1}{\infty} = 0$.
4. Si tomamos $X = (0, 1) \cup (2, 3)$, queda que $\tilde{X}$ es un “ocho”, o el mismísimo ∞ . Y si ponemos 3 o 4 intervalos abiertos disjuntos nos queda un trébol.
5. Mostrar que, a diferencia de los ejemplos anteriores (donde $\tilde{X}$ quedaba metrizable), $\tilde{\mathbb{Q}}$ no es ni H.

Ejercicio 6.6.4 (Stone Čech 2). Sea X es un ET de Tychonov, y llamemos

$RU(X)$ al conjunto de todas sus redes **universales** .

1. Dada $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}} \in RU(X)$ y $f \in C_b(X)$, probar que existe un $\mathbf{x}_f \in \mathbb{C}$ tal que $f(x_i) \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} \mathbf{x}_f$.
2. Consideremos las funciones

$$\varphi_f : RU(X) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{dadas por} \quad \varphi_f(\mathbf{x}) = \lim_{i \in \mathbb{I}} f(x_i) = \mathbf{x}_f, \quad \text{para} \quad \mathbf{x} \in RU(X),$$

y llamemos $\mathcal{F}_1 = \{\varphi_f : f \in C_b(X)\}$. En $RU(X)$ se define la relación de equivalencia

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \quad \text{si} \quad \varphi_f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_f = \mathbf{y}_f = \varphi_f(\mathbf{y}) \quad \text{para toda} \quad f \in C_b(X).$$

Sea $B(X) = RU(X)/\sim$, el conjunto de las clases de equivalencia (que notaremos $\bar{\mathbf{x}}$, para cada red universal $\mathbf{x}$ en X) de la relación que acabamos de definir.

3. Mostrar que cada $\varphi_f \in \mathcal{F}_1$ se “baja” bien al cociente $B(X)$. Llamemos $\phi_f : B(X) \rightarrow \mathbb{C}$ a la función bajada dada por $\phi_f(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}_f$, $\mathbf{x} \in RU(X)$. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de estas ϕ_f bajadas. Probar que ahora $\mathcal{F}$ separa puntos de $B(X)$.
4. La topología para $B(X)$ seá la **inicial** $\tau_{\mathcal{F}}$, dada por la familia $\mathcal{F}$. Probar que queda Hausdorff.
5. Probar que la siguiente flecha es un embedding: $G : X \rightarrow B(X)$ dado por

$$G(x) = \overline{\mathbf{c}_x}, \quad \text{donde } \mathbf{c}_x \text{ es la sucesión constantemente igual a } x.$$

6. Probar que $(B(X), \tau_{\mathcal{F}})$ es un compacto Hausdorff y que el par $(B(X), G)$ es una H -compactificación de X que es isomorfa a la de Stone Čech.

Para demostrar lo último, sugerimos los siguientes pasos: Sea $(\beta(X), F)$ la Stone Čech de X .

- Dada una $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}} \in RU(X)$ tal que $F(x_i) \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} y \in \beta(X)$, probar que

$$\varphi_f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_f = \lim_{i \in \mathbb{I}} f(x_i) = \lim_{i \in \mathbb{I}} \tilde{f}(F(x_i)) = \tilde{f}(y) \quad \text{para toda } f \in C_b(X) \text{ y } \tilde{f} \text{ su levantada a } \beta(X).$$

- Mostrar que, dadas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \in RU(X)$, se tiene que $\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \iff F \circ \mathbf{x}$ y $F \circ \mathbf{y}$ tienen el mismo límite en $\beta(X)$. Dado un $y \in \beta(X)$, mostrar que existe alguna $\mathbf{x}_y \in RU(X)$ en X que converge (vía F) a y .
- Sea $\Psi : \beta(X) \rightarrow B(X)$ dada por $\Psi(y) = \overline{\mathbf{x}_y}$, para $y \in \beta(X)$. Probar que Ψ está bien definida y es inyectiva. Usar luego que $\beta(X)$ es compacto para mostrar la suryectividad de Ψ .

- Usar que la topología de $B(X)$ es la inicial de $\tau_{\mathcal{F}}$ para probar la continuidad de Ψ . Deducir que Ψ es hómoio y que $\Psi \circ G = F$.

Ejercicio 6.6.5. Sea K un ET compacto Hausdorff. Probar que

1. Una $f \in C(K)$ es inversible (o sea que $f^{-1} \in C(K)$) $\iff$ f no se anula nunca.
2. El grupo G de f 's inversibles es abierto.
3. Si $I \subseteq C(K)$ es un ideal propio, entonces su clausura $\bar{I}$ es otro ideal propio.
4. Si $M \subseteq C(K)$ es un ideal **maximal**, entonces M es cerrado y existe un $x \in K$ tal que

$$M = M_x = \{f \in C(K) : f(x) = 0\}.$$

Acá la gracia está en ver que todas las $f \in M$ se anulan en algún punto $x \in X$, porque sino uno se puede construir una $g \in M$ que sea inversible.

5. Más aún, si I es un ideal cerrado, entonces existe un $F \subseteq K$ cerrado tal que

$$I = I_F = \{f \in C(K) : f(y) = 0 \text{ para todo } y \in F\}.$$

6. Si I es un ideal cerrado, llamemos $F_I = \{x \in K : f(x) = 0 \text{ para toda } f \in I\}$. Luego

$$\text{las flechas } F \longmapsto I_F \quad \text{e} \quad I \longmapsto F_I$$

son recíprocas. Se asume que los F son cerrados de X y los I son ideales cerrados.

Sugerencia general: Usar que $\|f \cdot g\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} \|g\|_{\infty}$ y que $\|f + g\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}$ para todo $f, g \in C(K)$. Eso hace que las operaciones $+$ y $\cdot$ de $C(K)$ sean continuas.

De paso mostrar que $f \mapsto f^{-1}$ es continua en el grupo G . Para ello usar que si $x, y \in \mathbb{C}^*$, entonces $x^{-1} - y^{-1} = x^{-1}(y - x)y^{-1}$.

Ejercicio 6.6.6 (Stone Čech 3). Sea X es un ET de Tychonov. Consideremos al espacio $\mathcal{A} = C_b(X)$ como una $\mathbb{C}$ -álgebra, junto con la métrica dada por la d_{∞} . Probar que

$$\beta(X) \cong M_{\mathcal{A}} = \{\varphi : C_b(X) \rightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es continuo, lineal y multiplicativo}\},$$

con la topología de la convergencia puntual (o sea en cada $f \in C_b(X)$). Se usa el masculino porque a esos φ se los suele llamar “los caracteres” de $\mathcal{A}$. Usar los pasos:

1. El embedding $H : X \rightarrow M_{\mathcal{A}}$ está dado por hacer $X \ni x \mapsto \varphi_x$, donde φ_x actúa en $C_b(X)$ por evaluación en x .
2. El hómoio entre $\beta(X)$ y $M_{\mathcal{A}}$ se define así:

$$\beta(X) \ni y \longmapsto \varphi_y \in M_{\mathcal{A}}, \quad \text{donde ahora } \varphi_y(f) = \tilde{f}(y) \text{ para } f \in C_b(X).$$

Recordar que $\tilde{f}$ es la extensión de $f \in C_b(X)$ a $\beta(X)$ que da el Teorema de Stone Čech.

3. Mostrar que el Teorema de Stone Čech dice que $C_b(X) \cong C(\beta(X))$, donde el símbolo $\cong$ está significando que existe un hómoio isométrico que es isomorfismo de álgebras. Lo que implementa ese $\cong$ es la flecha $f \mapsto \tilde{f}$.
4. Deducir que $C_b(X)$ y $C(\beta(X))$ tendrán “el mismo” espacio de caracteres.
5. Probar que si K es un K-H, los caracteres $M_{C(K)} \cong K$, de $C(K)$ son hómoios al espacio K , ya que todos ellos consisten en evaluar las f 's en un elemento de K , y que las topologías coinciden por (5.20).
6. Probar que “tomar núcleo” produce una biyección entre los caracteres de $C(K)$ y el conjunto de ideales maximales de $C(K)$.

Capítulo 7

Compacidad local

En este Capítulo estudiaremos tres formas de “localizar” dentro de un ET las maravillosas propiedades de los espacios compactos. Esto nos dará tres clases de ET’s, a saber:

Localmente compactos , compactamente generados y paracompactos .

De las tres, la más importante es la primera, porque es la más usada en análisis y geometría diferencial, y porque es la más fácil de entender: los puntos deben tener entornos compactos. De hecho hay ramas enteras de la matemática que empiezan diciendo “Sea X un espacio localmente compacto Hausdorff” y sigue todo un libro de teorías que parten de ese basamento. Expondremos en detalle las propiedades de estos espacios, que reaparecerán en el Capítulo de grupos topológicos.

Las otras dos clases son bastante menos usadas, pero ambas tienen la ventaja de que son menos restrictivas. Por ejemplo todo EM está en ellas, pero está lleno de EM’s que no son localmente compactos. Igual, los paracompactos son muy famosos, y de ellos daremos una lista bastante completa de propiedades y ejemplos, aunque dejaremos como ejercicio la mayoría de las demostraciones.

Incluiremos en este Capítulo bastante material extra, que necesita como ingrediente los resultados de compacidad local: El Teorema de Baire, la convergencia compacto abierta de funciones continuas, las particiones de la unidad y el Teorema de Arzela Áscoli.

7.1 Espacios localmente compactos

7.1.1. Hicimos muchas compactificaciones, y sabemos que “alguna” de ellas es una H -compactificación si y sólo si el espacio base es de Tychonoff. Pero concentrémonos en la de Alexandrov y preguntemos ¿para qué espacios X tendremos que $\tilde{X}$ es Hausdorff?

Con las notaciones de la Prop.6.5.5, vemos que si queremos separar un $x \in X$ del ∞ , tendremos por un lado un $V' \in \tau'$ y necesitaremos un $U \in \mathcal{O}^a(x)$ contenido en $K = X \setminus V'$, que es compacto. O sea que hay un compacto $K \in \mathcal{O}(x)$. Ya vimos que los ET’s que cumplen esa condición son importantes por muchas otras razones, y ahora los definimos: ▲

Definición 7.1.2. Sea (X, τ) un ET. Diremos que X es **localmente compacto** (y abreviaremos LK) si todo $x \in X$ tiene algún entorno compacto. ▲

Observación 7.1.3. Si X es LK, y además le pedimos que sea Hausdorff, entonces todo $x \in X$ tiene un $U \in \mathcal{O}^a(x)$ tal que $\overline{U}$ es compacto. En efecto, basta poner el U dentro de un entorno compacto K de x . Como X es Hausdorff, K debe ser cerrado, por lo que también $\overline{U} \subseteq K$. Si X no fuera H, no hay garantía de lo anterior (de hecho, en breve veremos que no pasa). A partir de ahora usaremos las siglas LKH para denotar localmente compacto + Hausdorff. ▲

Proposición 7.1.4. Sea (X, τ) un ET. Entonces

la compactificación $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ es Hausdorff si y sólo si X es LKH.

Demostración. Usaremos las notaciones $\tau_\infty = \tau \cup \tau'$ de la Prop. 6.5.5. Una implicación ($\Rightarrow$) se vió en 7.1.1 (la H se agrega porque es hereditaria). Si X es LKH, la H asegura que los puntos de X se separan usando $\tau \subseteq \tau_\infty$. Para separar a un $x \in X$ del ∞ , se toman

un compacto $K \in \mathcal{O}_\tau(x)$, un $U \in \mathcal{O}_\tau^a(x)$ tal que $U \subseteq K$, y $V' = \{\infty\} \cup V$,

donde $V = X \setminus K$. Como X es Hausdorff, K es cerrado, por lo que $V \in \tau$ y $V' \in \tau'$. ■

Ejemplo 7.1.5. Todo subconjunto cerrado o abierto de algún $\mathbb{R}^n$, incluso todo ET que “localmente” es hómoeo con uno de esos (esto incluye a las variedades de la geometría diferencial) es automáticamente LKH. Aún así, esta clase es muy restrictiva (la asunción de ser LKH es costosa), pero vale la pena estudiarla porque los LKH son los espacios más usados en análisis y geometría. Veremos además que tienen propiedades fuertes que justifican ese interés.

Observemos que, al contrario de lo que uno puede pensar por exceso de $\mathbb{R}^n$, existen EM's completos que no son LK. Y muchos. Veremos bastantes de ellos en el Capítulo de EVT's, pero mostremos ahora uno concretito. Sea $\ell^\infty(\mathbb{N})$ el espacio de sucesiones **acotadas** de números complejos con la métrica del supremo: Dados $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathbf{b} = (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$,

$$d_\infty(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|.$$

Es fácil ver que d_∞ es una métrica en $\ell^\infty(\mathbb{N})$ (de hecho, $\ell^\infty(\mathbb{N}) = C_b(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ y a d_∞ ya la conocíamos). Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos el punto $\mathbf{e}_n \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ que tiene un 1 en el lugar n y todos los demás ceros. Todos los $\mathbf{e}_n$ viven en la bola cerrada de centro 0 y radio uno, pero $d_\infty(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m) = 1$ siempre que $n \neq m$. Por ello dicha bola no es compacta. Trasladando y achicando con múltiplos, uno deduce en seguida que ninguna bola cerrada alrededor de ningún punto de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ puede ser compacta. Como las bolas abiertas son una base de la topología de esta métrica, queda que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ no es LK. ▲

Observación 7.1.6. Sea (X, τ) un ET que es LK. No es cierto en general que sus subconjuntos deban ser LK (LK no es hereditaria). Por ejemplo $\mathbb{R}$ es LKH, pero $\mathbb{Q}$ no puede ser LKH, ya que ningún $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ tiene clausura compacta en $\mathbb{Q}$ (salvo que $b \leq a$).

Por otra parte, si X es LKH, por las Proposiciones 6.5.3 y 7.1.4, sabemos que X debe ser Tychonoff (CR). Ahora veremos que en los LKH vale una propiedad de separación con funciones continuas mucho más fina que la que define a los CR's. Ella se basa en que $\tilde{X}$, al ser KH, es normal. ▲

Proposición 7.1.7. Sea (X, τ) un ET que es LKH. Dados un compacto $K \subseteq X$ y un abierto $U \in \tau$ tales que $K \subseteq U$, existe una $f \in C(X, [0, 1])$ tal que

1. $f|_K \equiv 1$ y $f|_{X \setminus U} \equiv 0$.
2. $\text{sop}(f) := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$ es **compacto**.
3. $\text{sop}(f) \subseteq U$.

Es decir que se puede separar un compacto K de un cerrado disjunto $F = X \setminus U$ mediante una función continua que además tiene soporte compacto y “lejos” de F (más que un ε).

Demostración. Empecemos tomando la compactificación con un punto $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$. Como es un KH, el Cor. 6.2.5 nos asegura que $\tilde{X}$ es normal. Además, $U \in \tau \subseteq \tau_\infty$ y K , como es compacto y cerrado en X (por la H), es cerrado en $\tilde{X}$. El Lema de Urysohn 5.5.1 nos brinda una $g \in C(\tilde{X}, [0, 1])$ tal que $g|_K \equiv 1$ y $g|_{F'} \equiv 0$, donde $F' = F \cup \{\infty\} = \tilde{X} \setminus U$. Sea

$$h \in C(\tilde{X}, [0, 1]) \quad \text{dada por} \quad h(x) = \max \{0, 2g(x) - 1\}, \quad \text{para todo } x \in \tilde{X},$$

que es continua por la Prop. 2.5.5. Finalmente, tomemos la función $f = h|_X$. Es claro que esta f cumple las condiciones del ítem 1, porque en K y en F toma los mismos valores que g (1 y 0). Veamos el soporte: como g es continua,

$$\begin{aligned} \text{sop}(f) &= \overline{\{x \in X : h(x) \neq 0\}} = \overline{\{x \in X : g(x) > 1/2\}} \\ &\subseteq \{x \in X : g(x) \geq 1/2\} \subseteq \{x \in X : g(x) > 0\} \subseteq U. \end{aligned}$$

Como $g(\infty) = 0$, el conjunto $K_0 = \{x \in X : g(x) \geq 1/2\} = \{x \in \tilde{X} : g(x) \geq 1/2\}$. Observar que K_0 es cerrado en $\tilde{X}$ (g es continua), por lo que $V = \tilde{X} \setminus K_0$ es abierto. Además $\infty \notin K_0$, así que $\infty \in V \in \tau'$. Luego K_0 es compacto como subconjunto de X . Ahora tenemos que $\text{sop}(f)$ es un cerrado en X (por ser una clausura), y está dentro de K_0 . Luego, por la Prop. 6.2.2, llegamos a que $\text{sop}(f)$ es compacto. ■

Definición 7.1.8. Sea (X, τ) un ET. Dado un $U \subseteq X$ decimos que U es **kabierto** si es abierto y $K = \bar{U}$ es compacto. Observar que la unión finita de kabiertos es kabierto. ▲

Observación 7.1.9. Sea (X, τ) un ET que es LK. Por definición, dado un $x \in X$, existe un entorno compacto K_x de x . Por lo tanto, el conjunto

$$\beta_x = \{A \in \mathcal{O}^a(x) : A \subseteq K_x\}$$

es una base de entornos de x y son todos *relativamente compactos*, o sea que están contenidos en un compacto. Si uno pide que X sea LKH, automáticamente la misma base de entornos β_x cumple que todos son kabiertos (tienen clausura compacta porque ahora sabemos que K_x es cerrado). Sin embargo, la Prop. 7.1.7 dice más: ▲

Corolario 7.1.10. Sea (X, τ) un ET que es LKH. Entonces todo $x \in X$ tiene una **base** de entornos compactos. O sea que si $U \in \mathcal{O}(x)$, existe un **compacto** $K \in \mathcal{O}(x)$ tal que $K \subseteq U$.

Demostración. Dados $x \in X$ y $U \in \mathcal{O}^a(x)$, podemos aplicar la Prop. 7.1.7 al “compacto” $\{x\}$ y el abierto U . Obtendremos una $f \in C(X, [0, 1])$ tal que $f(x) = 1$ y tal que $K = \text{sop}(f)$ es compacto y está dentro de U . Notemos que $K \in \mathcal{O}(x)$ porque es la clausura del kabierto $V = \{z \in X : f(z) > 0\} \ni x$. ■

Corolario 7.1.11. Sea (X, τ) un ET que es LKH. Entonces todo **abierto** $U \subseteq X$ es también LKH con la topología inducida. Idem para un cerrado $F \subseteq X$.

Demostración. Dado $x \in U$, pensemos a $U \in \mathcal{O}_\tau^a(x)$. El Cor. 7.1.10 nos provee de un compacto $K_x \in \mathcal{O}_X(x)$ tal que $K_x \subseteq U$. Pensando ahora en U con su inducida, K_x sigue siendo compacto y entorno de x . Por todo ello, U es LK. La H ya se sabía. El caso de un cerrado $F \subseteq X$ es fácil y lo dejamos como ejercicio. ■

Corolario 7.1.12 (Tietze para LKH's). Sea (X, τ) un ET que es LKH y sea $K \subseteq X$ un compacto. Entonces toda $f \in C(K, [a, b])$ tiene una extensión $\tilde{f} \in C(X, [a, b])$.

Demostración. Sale porque K es cerrado en X , y por ello también en $\tilde{X}$ (la de Alexandrov). Y porque $\tilde{X}$ es K-H y por ello normal. Ahora se usa el Tietze ya probado. ■

Por comodidad notacional, en el próximo enunciado las compactificaciones serán compactos que contienen, como un denso, al espacio original (y le inducen la topología que tenía).

Corolario 7.1.13. Sea (X, τ) un ET que es CR. Las siguientes propiedades son equivalentes:

1. X tiene **alguna** H -compactificación K tal que X queda **abierto** en K .
2. X queda abierto dentro de **toda** H -compactificación que tenga.
3. Dado $x \in X$, existe un entorno abierto $V \in \mathcal{O}_\tau^a(x)$ tal que $\bar{V}$ es compacto.
4. X era LKH.

Demostración. $1 \Rightarrow 4$: Es consecuencia directa del Cor. 7.1.11 (porque $\text{KH} \implies \text{LKH}$).

$4 \Rightarrow 3$: Lo vimos en la Obs. 7.1.3 (este Cor. incluye una recíproca de ella).

$3 \Rightarrow 2$: Dado $x \in X$, sea $V_x \in \mathcal{O}_\tau^a(x)$ un kabierto (i.e. $K_x = \bar{V}_x$ es compacto). Si ahora me dan una H -compactificación $K \supseteq X$, veremos a continuación que este V_x sigue siendo abierto en K (y por ello todo X quedará abierto en K).

En efecto, lo que sí sabemos es que K_x sigue siendo compacto dentro de K . Lo que nos interesa de eso es que, como K es H, nuestro K_x sigue siendo cerrado en K .

Sea $U \in \tau_K$ (un K -abierto) tal que $V_x = X \cap U$. Si hubiera un $y \in U \setminus X$, en particular $y \notin K_x \subseteq X$, y existiría un entorno $W \in \mathcal{O}_{\tau_K}^a(y)$ tal que $W \cap K_x = \emptyset$. Luego

$$U \cap W \in \mathcal{O}_K^a(y) \quad \text{pero} \quad (U \cap W) \cap X = (U \cap X) \cap W \subseteq K_x \cap W = \emptyset.$$

Esto no vale, porque X era denso en K . Así que $V_x = U \cap X = U$, que era un K -abierto.

$2 \Rightarrow 1$: Como X era CR, tiene al menos una H -compactificación. ■

En el enunciado anterior, a uno le hace ruido la compactificación de Alexandrov, en la que todo X queda siempre abierto. Pero está todo bien, porque X es LKH $\iff \tilde{X}$ era H .

Otro ruido que suena es lo siguiente: Si Y es un ET que es LKH, y asumimos que $X \subseteq Y$ cumple que $K = \overline{X}^Y$ era compacto, queda que K es una H -compactificación de X y no siempre va a pasar que X sea abierto en K (por ejemplo si tiene “un cachito del borde”). El tema acá es que si X no era abierto en Y (o por lo menos en K), nadie asegura que X quede LKH. Si era cerrado no pasa nada porque $K = X$.

Usando H -compactificaciones hemos visto que $\text{LKH} \implies \text{CR}$ (porque en un LKH la de Alexandrov queda H). La condición de ser LK no es de separación, sino que indica que el espacio es “localmente pequeño”. Sin embargo lo anterior muestra que ser LK también asegura que la H alcanza para que valgan propiedades bastante mejores de separación. Así que uno va por más: ¿Será cierto que LKH implica normalidad?

Lamentablemente no. Para poder asegurar que un LKH es normal hace falta que tenga algunas condiciones de numerabilidad. Concretamente, como habrá notado el lector memorioso, alcanzaría con que sea Lindeloff. Para no mezclar tantas condiciones distintas, se puede también pedir algo más compatible con la existencia de subconjuntos compactos:

Que un espacio X sea σ -compacto (σ -K) significa que X es unión de numerables subconjuntos compactos. Mirando fijo esa propiedad, se ve inmediatamente que $\sigma\text{-K} \implies \text{Lindeloff}$. Y mirando fijo más rato, sale también que si X ya era LKH, entonces $\text{Lindeloff} \iff \sigma\text{-K}$ (se podía cubrir con entornos kabiertos). Resumiendo:

Proposición 7.1.14. Sea (X, τ) un ET que es LKH. Entonces se tiene que

1. Si agregamos el dato de que X sea Lindeloff (o σ -K), entonces X es normal.
2. Si encima X es N_2 , entonces X queda metrizable.

Demostración. Observar que $\text{LKH} \implies \text{regular}$. Luego 1 se deduce de la Prop. 2.4.10. Si aceptamos que X es N_2 , como $N_2 \implies \text{Lindeloff}$, lo anterior dice que X es normal y N_2 . Luego aplicamos el Teorema de metrización de Urysohn 5.5.10. ■

Proposición 7.1.15. Sea (X, τ) un ET que es LKH y Lindeloff. Entonces X es σ -K. Más aún, existe un cubrimiento kabierto $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de X tal que

$$\text{el compacto } \overline{E}_n \subseteq \text{el abierto } E_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \quad (7.1)$$

como las bolas de radio n en un EM.

Demostración. Como X es LKH, en cada punto $x \in X$ podemos tomar un kabierto $U_x \in \mathcal{O}^a(x)$. Como cubren a X , por Lindeloff hay un cubrimiento kabierto $\{V_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de X . Pongamos $E_1 = V_1$. Por la Prop. 7.1.7 (con $U = X$), existe un kabierto W_1 tal que el compacto $\overline{E}_1 \subseteq W_1$, y ponemos $E_2 = W_1 \cup V_2$. Recursivamente, $E_{n+1} = W_n \cup V_{n+1}$, para un kabierto W_n tal que $\overline{E}_n \subseteq W_n$. Estos E_n cubren a X y cumplen (7.1). ■

Observación 7.1.16. Cuando un espacio (X, τ) es LKH, tiene sentido automático hablar de “los entornos del infinito”, que son los complementos de compactos. Por ello podemos considerar las funciones que “se anulan en el infinito”. Antes de eso, podemos definir otra clase, también muy útil, sobre todo a partir de la Prop. 7.1.7. ▲

Definición 7.1.17. Sea (X, τ) un ET que es LKH. Se definen los espacios de funciones

1. De soporte compacto: $C_K(X, \mathbb{R}) = \{f \in C(X, \mathbb{R}) : \text{sop}(f) \text{ es compacto}\}$.

2. Nulas en el infinito:

$$C_0(X, \mathbb{R}) = \{f \in C(X, \mathbb{R}) : \forall \varepsilon > 0 \exists K_\varepsilon \subseteq X \text{ compacto tal que } \sup_{x \notin K_\varepsilon} |f(x)| < \varepsilon\}.$$

3. Análogamente se definen $C_K(X) = C_K(X, \mathbb{C})$ y $C_0(X) = C_0(X, \mathbb{C})$.

Observar que todos estos espacios están dentro de $C_b(X, \mathbb{C})$. ▲

La Prop. 7.1.7 lo que dice es que las funciones de $C_K(X, \mathbb{R})$ separan compactos de cerrados disjuntos. Las de $C_0(X, \mathbb{R})$ son, como cabría esperar, las que se pueden extender a $C(\tilde{X}, \mathbb{R})$ poniendo $f(\infty) = 0$.

Proposición 7.1.18. Sea (X, τ) un ET que es LKH. Sea $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ su compactificación de Alexandrov con un punto. Entonces:

1. Toda $f \in C_0(X)$ se extiende a una función $\tilde{f} \in C(\tilde{X})$ poniendo $\tilde{f}(\infty) = 0$.
2. Si pensamos que $C_0(X) \subseteq C(\tilde{X})$ vía esta extensión, y tomamos $\mathbb{1} \in C(\tilde{X})$ la función constantemente igual a 1, entonces $C(\tilde{X}) = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1} + C_0(X)$.

Los mismos enunciados valen para $C_0(X, \mathbb{R})$ y $C(\tilde{X}, \mathbb{R})$.

Demostración. Ya tenemos definida a $\tilde{f}$. El tema es que sea continua. Y para ello basta que sea continua en ∞ , porque en X , que es abierto, ya lo era (con el nombre f). Pero que una red $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en $\tilde{X}$ converja a ∞ equivale a que $\mathbf{x} \xrightarrow{E} \tilde{X} \setminus K$ para cualquier compacto $K \subseteq X$. Por la definición de $C_0(X)$, eso asegura que $\tilde{f}(x_i) \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} 0 = \tilde{f}(\infty)$.

Observar que el hiperplano $\{g \in C(\tilde{X}) : g(\infty) = 0\}$ consiste exactamente de las $\tilde{f}$ que se obtienen con el proceso anterior, porque la restricción de una tal g a X debe caer en $C_0(X)$. Luego, para toda $f \in C(\tilde{X})$ se tiene que $g = f - f(\infty) \cdot \mathbb{1} \in C_0(X)$. ■

Ejercicio 7.1.19. Sea (X, τ) un ET que es LKH. Probar las siguientes afirmaciones:

1. $C_K(X) \subseteq C_0(X) \subseteq C_b(X)$, y son métricos con la d_∞ .
2. El espacio $C_K(X)$ es d_∞ -denso en $C_0(X)$.
3. Dada $f \in C_0(X)$ y $\varepsilon > 0$, el conjunto $\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ es compacto en X .

4. Si X era un EM, toda función $f \in C_0(X)$ es **uniformemente** continua. Sugerimos mostrar que si dos sucesiones en X cumplen que $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces alguna de las dos tiene una subsucesión convergente.

También probar que los mismos resultados valen para $C_K(X, \mathbb{R})$ y $C_0(X, \mathbb{R})$. ▲

Ejercicio 7.1.20. Sea (X, τ) un ET que es LK y sea $f \in C(X, Y)$ una función que además es suryectiva y **abierto** (por la que la topología de Y es la cociente). Probar que

1. Y es también LK.
2. Para todo compacto $C \subseteq Y$ existe un compacto $K \subseteq X$ tal que $f(K) = C$.

Sugerencia: Subir, cubrir, bajar y elegir. Pero con entornos compactos. ▲

El siguiente ejercicio intenta mostrar que las H -compactificaciones de un X que es LKH (pero no compacto) tienen un orden natural, determinado por cuántas $f \in C_b(X, \mathbb{R})$ pueden extenderse con continuidad al compacto. Damos sin embargo una definición mas estructural: Dadas dos H -compactificaciones (g, W) y (h, Z) de X , un **morfismo** entre ellas es una

$$\Phi \in C(Z, W) \quad \text{tal que} \quad g = \Phi \circ h .$$

Esto se traduce (si pensamos que Z y W “contienen” a X), a que $\Phi|_X = \mathcal{I}_X$. La densidad de X en Z hace que un morfismo, de existir, sea único. El tema para que exista el tal Φ es que una red (en X) que tiene límite del lado de Z también converja a algo del lado de W .

Se dirá que $W \leq Z$ si existe un **epimorfismo** $\Phi : Z \rightarrow W$ (morfismo sobre). En tal orden habrá un máximo que será $\beta(X)$ y el mínimo será la de Alexandrov $\tilde{X}$, como cualquiera habría imaginado. Insistimos en que toda esta maquinaria sólo funciona si se empieza con un espacio LKH. No camina tan redonda en cualquier CR (salvo lo ya visto en el Teo. 6.5.8) porque uno necesita el Cor. 7.1.13, o sea que X quede siempre abierto en sus compactos.

Ejercicio 7.1.21. Sea X un espacio localmente compacto Hausdorff.

1. Dadas (g, W) y (h, Z) dos H -compactificaciones de X , mostrar que son equivalentes:
 - (a) Que $W \leq Z$, o sea que exista un epimorfismo $\Phi : Z \rightarrow W$.
 - (b) Que toda función $f \in C_b(g(X))$ que se extiende con continuidad a todo W satisfaga que la función $\tilde{f} : h(X) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\tilde{f}(h(x)) = f(g(x))$, para $x \in X$, se extiende con continuidad a Z .

Sugerencia: Usar la Prop. 6.2.7 para hacer un embedding de W con esas efes. Después seguir como en el Teo. 6.5.8.

2. Probar que toda $f \in C_0(X)$ se extiende a cualquier H -compactificación (h, Z)

$$\text{poniendo } \tilde{f}(Z \setminus h(X)) \equiv 0 \quad \text{y} \quad \tilde{f}(h(x)) = f(x) \quad \text{para } x \in X ,$$

y que la tal $\tilde{f} \in C(Z)$.

3. Deducir que para cualquier H -compactificación (h, Z) de X vale que $\tilde{X} \leq Z$. O sea que existe un epimorfismo $\Phi : Z \rightarrow \tilde{X}$, tal que $\Phi \circ h = \mathcal{I}_X$. Sugerencia: Usar la Prop. 7.1.18, para ver cuales son las $f \in C_b(X)$ que se extienden a $\tilde{X}$.
4. Reinterpretar el Teo. 6.5.8 como el hecho de que $\beta(X)$ es la máxima H -compactificación de X , y que tal máximo es único módulo hómoeo-isomorfismos.
5. Mirar el caso en que $X = \mathbb{Q}$. Podemos hacer $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \tilde{\mathbb{R}} = S^1$ (ver Ejem. 6.5.6). Observar que $\mathbb{Q}$ queda denso (por serlo en $\mathbb{R}$), así que esto es una H -compactificación. Pero $\mathbb{Q}$ no queda abierto en ella, lo no es tan raro porque $\mathbb{Q}$ no es LK. Encima, como lo que le sobra a S^1 es denso en S^1 , es imposible mandar S^1 sobre $\tilde{\mathbb{Q}}$ (la de un punto), dejando fijo a $\mathbb{Q}$, como se hace arriba con los LKH. ▲

7.2 Stone-Weierstrass

Sea (X, τ) un ET compacto Hausdorff. Estudiaremos el álgebra $C(X)$ con su $\|\cdot\|_\infty$. Más precisamente, buscamos condiciones sobre una subálgebra $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ para que sea **uniformemente densa** en $C(X)$. Todo empezó con el Teor. de Weierstrass de 1895 que mostraba que los polinomios lo son en $C([a, b], \mathbb{R})$. Con las décadas aparecieron numerosos resultados semejantes, hasta que Stone probó en 1948 la versión más conspicua, que incluye a las que había hasta entonces, y quedó ahí. Eso daremos ahora. Las cuentas se harán en $C(X, \mathbb{R})$, y al final veremos qué hace falta para que caminen también en el caso complejo.

Sirve el caso real, porque se usan los siguientes conceptos: Dadas $f, g \in C(X, \mathbb{R})$, definimos

$$f \vee g(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{y} \quad f \wedge g(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \quad \text{para cada } x \in X.$$

Es claro que tanto el máximo $f \vee g$ como el mínimo $f \wedge g$ siguen en $C(X, \mathbb{R})$ (si no parece tan claro, recordar la Prop. 2.5.5). Diremos que un $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ es **cerrado por minimax** si cumple que

$$f \vee g \text{ y } f \wedge g \in \mathcal{A} \quad \text{siempre que} \quad f \text{ y } g \in \mathcal{A}.$$

Lema 7.2.1. Sea (X, τ) un ET compacto Hausdorff. Sea $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ un subespacio cerrado por minimax. Si $f \in C(X, \mathbb{R})$ cumple que para todo par $x, y \in X$ existe una

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ en } \mathcal{A} \text{ tal que } f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \text{ y } f_n(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(y),$$

entonces se tiene que $f \in \overline{\mathcal{A}}^{\|\cdot\|_\infty}$, o sea $\|f - g_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ para alguna $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{A}$.

Demostración. Fijemos un $\varepsilon > 0$. Para cada par $x, y \in X$ existe una $f_{xy} \in \mathcal{A}$ tal que el número $\max\{|f(x) - f_{xy}(x)|, |f(y) - f_{xy}(y)|\} < \varepsilon$. Sean

$$U_{xy} = \{z \in X : f(z) - f_{xy}(z) < \varepsilon\} \quad \text{y} \quad V_{xy} = \{z \in X : f_{xy}(z) - f(z) < \varepsilon\}.$$

Observar que ambos son abiertos, y que $x, y \in U_{xy} \cap V_{xy}$. Fijando x y moviendo y , los U_{xy} cubren a X . Por la compacidad, existen $y_1, \dots, y_n$ tales que $X = \bigcup_{k \in \mathbb{I}_n} U_{xy_k}$. Como $\mathcal{A}$ era cerrada por minimax, tenemos que el máximo $f_x = \bigvee_{k \in \mathbb{I}_n} f_{xy_k} \in \mathcal{A}$. Esta f_x cumple que

$$f(z) - f_x(z) < \varepsilon \implies f(z) < f_x(z) + \varepsilon \quad \text{para todo } z \in X.$$

Pero también vale que $f_x(z) < f(z) + \varepsilon$, al menos para los $z \in W_x = \bigcap_{k \in \mathbb{I}_n} V_{xy_k}$. Ahora se cubre a X con éstos abiertos W_x , y se encuentran $x_1, \dots, x_m$ tales que $X = \bigcup_{k \in \mathbb{I}_m} W_{x_k}$. Podemos armar ahora la $f_\varepsilon = \bigwedge_{k \in \mathbb{I}_m} f_{x_k} \in \mathcal{A}$ y comprobar que

$$f_\varepsilon(z) - \varepsilon < f(z) < f_\varepsilon(z) + \varepsilon \quad \text{para todo } z \in X. \quad \blacksquare$$

Lema 7.2.2. Sea (X, τ) un ET compacto Hausdorff. Si $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ es una subálgebra cerrada (con la $\|\cdot\|_\infty$) y $1 \in \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}$ es cerrada por minimax.

Demostración. Observar que se pueden obtener los máximos y mínimos con este curro:

$$f \vee g = \frac{f + g + |f - g|}{2} \quad \text{y} \quad f \wedge g = \frac{f + g - |f - g|}{2}.$$

Luego, para ver que $\mathcal{A}$ es cerrada por minimax, alcanzaría mostrar que es cerrada por “tomar módulos”. Pero si $f \in \mathcal{A}$, tenemos que $|f| = (f^2)^{1/2}$. Como $\mathcal{A}$ era subálgebra, $f^2 \in \mathcal{A}$. Así que lo que hay que probar es que si $0 \leq g \in \mathcal{A}$, entonces $g^{1/2} \in \mathcal{A}$. Esto se hace extrapolando un curro de Análisis I. Veamos.

Dado un $\varepsilon \in (0, 1)$, tomemos la función $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(t) = (t + \varepsilon^2)^{1/2}$, $t \in [0, 1]$. Esta h tiene un desarrollo en serie de potencias que le converge uniformemente en el intervalo $[0, 1]$. Para ello basta desarrollar en el punto medio $t = 1/2$. Esto da un caso particular de Weierstrass, o sea que existe un polinomio $P \in \mathbb{R}[x]$ tal que $\|h - P\|_\infty < \varepsilon^2$ (en el $[0, 1]$). Como $1 \in \mathcal{A}$, que es una $\mathbb{R}$ -álgebra, tenemos que $P(f) \in \mathcal{A}$ para toda $f \in \mathcal{A}$. Fijemos ahora una $0 \leq f \in \mathcal{A}$ con $\|f\|_\infty \leq 1$. Entonces el elemento $P(f) \in \mathcal{A}$ cumple que

$$\begin{aligned} \|P(f) - f^{1/2}\|_\infty &= \sup_{x \in X} |P(f(x)) - f(x)^{1/2}| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |P(t) - t^{1/2}| \\ &\leq \varepsilon^2 + \sup_{t \in [0, 1]} \left((t + \varepsilon^2)^{1/2} - t^{1/2} \right) = \varepsilon^2 + \sup_{t \in [0, 1]} \frac{\varepsilon^2}{(t + \varepsilon^2)^{1/2} + t^{1/2}} < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Achicando con constantes y usando que $\mathcal{A}$ es $\|\cdot\|_\infty$ -cerrada, sale que $\mathcal{A}$ es cerrada por tomar raíces cuadradas. Por todo lo anterior, también para minimax. $\blacksquare$

Teorema 7.2.3 (Stone-Weierstrass). Sea (X, τ) un ET compacto Hausdorff. Sea $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ una subálgebra que cumple las siguientes condiciones:

1. Es cerrada por tomar conjugación ($f \in \mathcal{A} \implies \bar{f} \in \mathcal{A}$).
2. Las funciones constantes viven en $\mathcal{A}$ (i.e. $1 \in \mathcal{A}$).
3. Separa puntos de X (si $x \neq y$ ambos en X , existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$).

Entonces $\mathcal{A}$ es $\|\cdot\|_\infty$ -densa en $C(X)$.

Demostración. Llamemos $\mathcal{A}_\mathbb{R} = \mathcal{A} \cap C(X, \mathbb{R})$. Por la condición 1,

- Si $f \in \mathcal{A}$, entonces tanto su parte real como su parte imaginaria se quedan en $\mathcal{A}_\mathbb{R}$.
- Por lo tanto también $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ separa puntos de X .
- Para ver que $\mathcal{A}$ es densa en $C(X)$, basta ver que $\mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{A}_\mathbb{R}}^{\|\cdot\|_\infty} = C(X, \mathbb{R})$.

Nuestra $\mathcal{B}$ es ahora una subálgebra cerrada de $C(X, \mathbb{R})$ (y $1 \in \mathcal{A}_\mathbb{R} \subseteq \mathcal{B}$), por lo que se le aplica el Lema 7.2.2 y $\mathcal{B}$ queda cerrada por minimax. Pero $\mathcal{B}$ también separa puntos de X .

Para probar que $\mathcal{B} = C(X, \mathbb{R})$ bastaría ver que toda $f \in C(X, \mathbb{R})$ cumple (respecto de $\mathcal{B}$) la otra hipótesis del Lema 7.2.1, porque $\mathcal{B}$ ya es cerrada y tomar límites no le agrega nada.

Fijemos entonces una $f \in C(X, \mathbb{R})$ y tomemos x, y en X tales que $f(x) \neq f(y)$ (sino toco a f en x e y con una constante, que está en $\mathcal{B}$). Como $\mathcal{B}$ separa puntos, existe una $g \in \mathcal{B}$ tal que $g(x) \neq g(y)$. Cambiando g por $\lambda g \in \mathcal{B}$ (para $\lambda = \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \in \mathbb{R}$), podemos asumir que

$$g(x) - g(y) = f(x) - f(y) \implies f(x) - g(x) = f(y) - g(y) \stackrel{\text{def}}{=} M.$$

Luego, si definimos $h = g + M 1 \in \mathcal{B}$, ella “toca” a f en x e y , ya que

$$h(x) = g(x) + (f(x) - g(x)) = f(x) \quad \text{y} \quad h(y) = g(y) + (f(y) - g(y)) = f(y).$$

En resumen, hay funciones de $\mathcal{B}$ que tocan (más que aproximan) a f en cualquier par de puntos. Por el Lema 7.2.1 llegamos a que $C(X, \mathbb{R}) = \mathcal{B}$ por lo que $\mathcal{A}$ es densa en $C(X)$. ■

Ahora viene la causa de que a este Teorema lo hayamos puesto en este Capítulo del libro de Topología: El TSW se generaliza a LKH's :

Corolario 7.2.4. Sea (X, τ) un ET que es LKH. Sea $\mathcal{A} \subseteq C_0(X)$ una subálgebra que cumple las siguientes condiciones:

1. Es cerrada por tomar conjugación ($f \in \mathcal{A} \implies \bar{f} \in \mathcal{A}$).
2. Separa puntos de X (si $x \neq y$ ambos en X , existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$).
3. Para todo $x \in X$ existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq 0$.

Entonces $\mathcal{A}$ es $\|\cdot\|_\infty$ -densa en $C_0(X)$.

Demostración. Metamos a X en su compactado $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$. Metamos también el par $\mathcal{A} \subseteq C_0(X) \hookrightarrow C(\tilde{X})$, haciendo $f(\infty) = 0$. Ahora consideremos el álgebra $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}\mathbf{1}$ pensada dentro de $C(\tilde{X})$. Para ver que $\mathcal{A}_1$ cumple las tres condiciones del Teo. 7.2.3, sólo falta que separe al ∞ de los puntos de X . Pero eso se consigue con alguna $f \in \mathcal{A}$ porque todas ellas cumplen que $f(\infty) = 0$, pero tenemos la condición 3.

Por el Teor. de S-W 7.2.3, ya sabemos que $\mathcal{A}_1$ es densa en $C(\tilde{X})$. Ahora, si fijamos una $f \in C_0(X) \subseteq C(\tilde{X})$ y un $\varepsilon > 0$, existe una $h = g + \lambda \mathbf{1} \in \mathcal{A}_1$ tal que $\|f - h\|_\infty < \varepsilon$. Pero $|\lambda| = |h(\infty)| = |f(\infty) - h(\infty)| < \varepsilon$. Por lo tanto $\|f - g\|_\infty < 2\varepsilon$, con $g \in \mathcal{A}$. ■

Ejemplos 7.2.5. Si en el Teor. de SW 7.2.3 trabajamos con una $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$, para que sea densa en $C(X, \mathbb{R})$ alcanza que $\mathcal{A}$ cumpla las condiciones 2 y 3 (separa puntos y tiene constantes). Esto sale haciendo de nuevo la cuenta, o fijándose que eso era lo que cumplía la $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ de allí. Lo mismo vale para el Teo. 7.2.4 si $\mathcal{A} \subseteq C_0(X, \mathbb{R})$ para un X que es LKH.

Ya contamos que el teorema de Weierstrass decía que los polinomios de $\mathbb{R}[x]$ son uniformemente densos en $C([a, b], \mathbb{R})$ para cualquier intervalo cerrado (idem con $\mathbb{C}[x]$ en $C[a, b]$). Esto es porque $1 \in \mathbb{R}[x]$ y $x \in \mathbb{R}[x]$, y con ellos alcanza.

Otro caso es el de las $f \in C(\mathbb{R})$ que son 2π periódicas. Ellas se pueden identificar con $C(S^1)$ (enrollándolas). Allí el denso posta son los polinomios en z y $\bar{z}$ ($z \in \mathbb{C}$). Observar que no hay productos mezclados porque $z\bar{z} \equiv 1$ en S^1 . Es fácil ver que, volviendo a $\mathbb{R}$, quedan los llamados polinomios tigonométricos (en $\sin nx$ y $\cos nx$). Es interesante observar que, si bien la serie de Fourier de una f periódica continua no siempre aproxima bien a f (uniformemente), sí hay siempre alguna sucesión de polis trigos que lo hace.

Veamos un ejemplo famoso en que no hay densidad porque falla la condición “cerrada por conjugación”. Sea $B = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, el disco cerrado en $\mathbb{C}$. Consideremos $H(\mathbb{D}) \subseteq C(B)$ el álgebra de las $f \in C(B)$ que son holomorfas en $\mathbb{D}$. Es sabido (y fácil de probar) que $H(\mathbb{D})$ es cerrada para la $\|\cdot\|_\infty$, aunque separa puntos y tiene a las constantes. De hecho, $H(\mathbb{D})$ es la clausura del álgebra de polinomios $\mathbb{C}[z]$ que también cumple aquello, pero no llega a ser densa en todo $C(B)$. Lo que les falta es $\bar{z}$. Por ello, como antes la subálgebra que sirve para $C(B)$ es $\mathbb{C}[z, \bar{z}]$. ▲

7.3 Teoremas de Baire

Empecemos con un resultado fácil que motivará lo que sigue: Sea (X, τ) un ET, y tomemos $A, B \subseteq X$ dos **cerrados**. Luego se tiene que

$$(A \cup B)^\circ \neq \emptyset \implies A^\circ \neq \emptyset \text{ o } B^\circ \neq \emptyset, \quad (7.2)$$

y quien dice dos, dice finitos (la inducción es directa). En efecto, tomando complementos, esto equivale a decir que, dados dos **abiertos** $U, V \subseteq X$, vale que

si tanto U como V son **densos** en X , también debe ser denso $U \cap V$.

Veamos esto: Si me dan un $x \in X$ y un $W \in \mathcal{O}^a(x)$, usando que U es denso tenemos que $\emptyset \neq W \cap U \in \tau$. Tomando cualquier $y \in W \cap U$, nos queda que $W \cap U \in \mathcal{O}^a(y)$. Ahora por la densidad de V arribamos a que $W \cap (U \cap V) \neq \emptyset$. Por ello, $x \in \overline{U \cap V}$.

Como decíamos antes, estos resultados se extienden a uniones finitas de cerrados sin interior, o intersecciones finitas de abiertos densos. Pensando en una generalización a uniones o intersecciones infinitas, uno no puede aspirar a algo completamente general, porque en cualquier espacio X que sea razonable, todo abierto es unión de cerrados sin interior (los singuletes de todos sus elementos).

Pero imaginándose rectas en $\mathbb{R}^2$ o superficies en $\mathbb{R}^3$, uno llegaría a arriesgar que si la cantidad de cerrados es **numerable**, podría valer una fórmula tipo (7.2). Sin embargo, algunas restricciones habrá que poner. Por ejemplo, si $X = \mathbb{Q}$, la obstrucción recién planteada seguiría vigente (con numerables puntos uno llena lo que sea). De hecho, mirando el argumento de arriba, si los abiertos fueran numerables haría falta “encajar” infinitos entornos y que quede algo en todos a la vez.

Y ahora les contamos el final: Tenemos dos situaciones en las que se puede manejar bien una intersección numerable: Encajes de cerrados en un EM completo, y cerrados con la PIF (si uno tiene alguna vecindad compacta). Y termina pasando lo mejor posible en esos casos: Hay dos caminos para asegurarse la extensión de (7.2) al caso numerable: que X sea un EMC, o que sea un ET localmente compacto Hausdorff. Y el “detective” que los descubrió es René-Louis Baire.

Teorema 7.3.1 (Baire). Sea (X, τ) un ET que cumple alguna de estas dos hipótesis:

EMC: X es un espacio métrico **completo**.

LKH: X es localmente compacto Hausdorff.

Entonces para toda familia **numerable** $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de cerrados de X se tiene que

$$F_n^\circ = \emptyset \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \quad \implies \quad \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right)^\circ = \emptyset.$$

Existen otras dos maneras de enunciar lo mismo, que conviene explicitar:

B2: Si $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right)^\circ \neq \emptyset$ (por ejemplo si $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = X$), entonces algún $F_n^\circ \neq \emptyset$.

B3: Dada una sucesión $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de abiertos densos, se tiene que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ es también denso.

Demostración. Probaremos en ambos casos el enunciado B3. Observar que, si tenemos cerrados F_n como en B2, y para cada $n \in \mathbb{N}$ hacemos $U_n = X \setminus F_n$, queda que

$$\overline{U_n} = X \setminus F_n^\circ \quad \text{y que} \quad \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n} = \overline{X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n} = X \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right)^\circ.$$

Caso EMC: Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos la bola cerrada $B_0 = \overline{B}(x, \varepsilon)$. Como U_1 es denso, tenemos que $\emptyset \neq U_1 \cap B(x, \varepsilon) \in \tau$. Luego existe una bola $B_1 = \overline{B}(x_1, \varepsilon_1) \subseteq U_1 \cap B(x, \varepsilon)$, donde podemos asumir que $\varepsilon_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Ahora cortamos $B_1^\circ = B(x_1, \varepsilon_1)$ con U_2 . Por la densidad de U_2 podemos armar una bola cerrada B_2 , de radio no mayor a $\frac{\varepsilon}{4}$, tal que $B_2 \subseteq B_1^\circ \cap U_2 \subseteq U_1 \cap U_2$. Recursivamente, obtenemos una sucesión $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de bolas cerradas tales que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{I}_n} U_k \quad , \quad B_{n+1} \subseteq B_n^\circ \quad \text{y} \quad \text{diam}(B_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n} .$$

La Prop. 4.4.5 nos dice ahora que existe un $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Y la primera condición de arriba fuerza a que $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$, además de estar en $B(x, \varepsilon)$, que era un entorno genérico del puntito x . Así llegamos a que x está en la clausura de $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$, para todo $x \in X$. ▲

Caso LKH: La construcción es similar. Recordemos que, como ahora X es LKH, el Cor. 7.1.10 nos dice todo punto de X tiene una **base** de entornos compactos. Si me dan $x \in X$ y un $V \in \mathcal{O}^a(x)$, como $V \cap U_1 \neq \emptyset$, encuentro un $y \in V \cap U_1$. Tomo un $K_1 \in \mathcal{O}(y)$ que sea compacto tal que $K_1 \subseteq V \cap U_1$. Después corto K_1° con U_2 , y tomo un entorno compacto K_2 de algún punto de $K_1^\circ \cap U_2$ tal que $K_2 \subseteq K_1^\circ \cap U_2 \subseteq U_1 \cap U_2$ (sabemos que $K_1^\circ \neq \emptyset$ porque K_1 es entorno de y). Así siguiendo, construyo la sucesión $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de compactos (con interior) tales que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$K_n \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{I}_n} U_k \quad \text{y} \quad K_{n+1} \subseteq K_n^\circ \subseteq K_1 \subseteq V .$$

Ahora uso que K_1 es compacto, y que la sucesión $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene la PIF para K_1 (toda intersección finita me da el último $K_n \neq \emptyset$ y además $K_n \subseteq K_1$). Por ello, el Teo. 6.1.3 asegura que puedo tomar un $z \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$. Como en el caso anterior, me queda que $z \in V \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Como $V \in \mathcal{O}^a(x)$ era genérico, volvemos a llegar que x está en la clausura de $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$, para todo $x \in X$. ■

Observación 7.3.2. Las pruebas de las dos mitades del Teorema de Baire son casi iguales, pero no se puede usar un solo argumento para ambas. Esto es así porque hay espacios LKH que, aún siendo métricos no son completos, como el intervalo $(0, 1)$. Y porque hay EM's completos donde las bolas (cerradas) no pueden ser compactas. Esto pasa en el Ejem. 7.1.5, y en todos los espacios de Banach de dimensión infinita (ver el Capítulo de EVT's). ▲

7.4 Convergencia compacto abierta

Recordemos que, dados X e Y dos conjuntos, denotamos por Y^X al conjunto de todas funciones $f : X \rightarrow Y$. Si asumimos que X e Y son ET's, daremos algunas topologías a este conjunto, y por herencia al conjunto más interesante $C(X, Y)$. En el caso de que Y fuera un EM (mejor si es acotado) ya tenemos las distancias d_u y d_∞ , que no hay problemas para definir en todo Y^X . Como vimos, la topología resultante es aquella cuya convergencia es la uniforme en X (muy restrictiva, es lo mejor que uno puede esperar). Veamos ahora tres topologías menos ambiciosas:

Definición 7.4.1. Sean X un conjunto e (Y, σ) un ET.

1. Se define la **topología de la convergencia puntual** (o topología punto-abierta) τ_P en Y^X a la topología producto de Y^X al pensarlo como $Y^X = \prod_{x \in X} Y$. Los abiertos sub-básicos, vistos como funciones, son:

$$S_{x,U} = \{f \in Y^X : f(x) \in U\} = \pi_x^{-1}(U), \quad \text{para } x \in X \quad \text{y} \quad U \in \sigma.$$

2. Si (X, τ) es también ET, se define **topología compacto-abierta** τ_{KA} en Y^X como la generada por la sub-base

$$S_{K,U} = \{f \in Y^X : f(K) \subseteq U\}, \quad \text{para } K \subseteq X \text{ compacto y } U \in \sigma. \quad (7.3)$$

3. Si ahora le pedimos a Y que sea un EM, con una métrica d (que da $\sigma = \tau_d$), entonces se define en Y^X la topología de la convergencia **uniforme en compactos** τ_{UK} , como la generada por la sub-base

$$S_{g,K,\varepsilon} = \{f \in Y^X : d_{K,\infty}(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in K} d_Y(f(x), g(x)) < \varepsilon\}, \quad (7.4)$$

para $g \in Y^X$, $K \subseteq X$ compacto, y $\varepsilon > 0$.

Será particularmente interesante las inducciones de estas topologías al espacio $C(X, Y)$. Los entornos sub-básicos de los tres tipos, cortados con $C(X, Y)$, mantendrán los mismos nombres ya que el contexto sea suficiente aclaración. ▲

Observación 7.4.2. Es claro que una red $\mathbf{f} = (f_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en Y^X τ_P -converge a una $g \in Y^X$ si y sólo si hay convergencia puntual, o sea que $f_i(x) \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} g(x)$ para todo $x \in X$. Esto es así porque “evaluar” en $x \in X$ es tomar la coordenada x -ésima de una f , y lo anterior es conocido para productos (es la Prop. 5.3.4).

Con respecto a la topología τ_{UK} , observar que si uno fija $g \in Y^X$, entonces los abiertos $S_{g,K,\varepsilon}$ de la Ec. (7.4) forman una **base** (no solo sub-base) de entornos de g . Es porque una unión finita de compactos queda compacta. Y porque vale la igualdad

$$S_{g,K_1,\varepsilon} \cap S_{g,K_2,\varepsilon} = S_{g,K_1 \cup K_2,\varepsilon}.$$

Por ello es evidente que una red $\mathbf{f} = (f_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en Y^X converge a una $g \in Y^X$ con respecto a τ_{UK} si y sólo si $f_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} g$ uniformemente en compactos, o sea que

$$d_{K,\infty}(f_i, g) = \sup_{x \in K} d_Y(f_i(x), g(x)) \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} 0 \quad \text{para todo compacto } K \subseteq X. \quad (7.5)$$

Ahora veremos en qué casos $C(X, Y)$ queda cerrado para esta topología. ▲

Ejercicio 7.4.3. Probar que los conjuntos abiertos $S_{g,K,\varepsilon}$ de la Ec. (7.4) forman una **base** de toda la topología τ_{UK} en Y^X y no sólo bases de entornos de cada $f \in Y^X$. ▲

Proposición 7.4.4. Sea (X, τ) un ET y sea (Y, d) un EM acotado. Entonces:

$$\text{Si } X \text{ es LK} \implies C(X, Y) \text{ es } \tau_{UK}\text{-cerrado en } (Y^X, \tau_{UK}).$$

Demostración. Sea $K \subseteq X$ un conjunto compacto. Tomemos la proyección

$$\pi_K : Y^X \rightarrow Y^K \quad \text{dada por} \quad Y^X \ni f \mapsto f|_K.$$

El conjunto Y^K es un EM con la métrica $d_\infty = d_{K,\infty}$ estudiada en la sección 5.4. Por la Ec. (7.5) la proyección π_K queda $\tau_{UK} \rightarrow d_{K,\infty}$ continua. Además, en la Prop. 5.4.3 vimos que $C(K, Y)$ es cerrado en Y^K , con esa métrica.

Por lo tanto, dada una red $\mathbf{f} = (f_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en $C(X, Y)$ que τ_{UK} -converge a un $g \in Y^X$, entonces tenemos que $\pi_K(f_i) \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} \pi_K(g) = g|_K$. Pero $\pi_K(f_i) \in C(K, Y)$ para todo $i \in \mathbb{I}$. Por lo dicho arriba, concluimos que $g|_K$ es continua, para todo $K \subseteq X$ compacto. Acá es donde usamos que X es localmente compacto, y podemos deducir que $g \in C(X, Y)$. ■

Observación 7.4.5. La Proposición anterior sigue siendo válida si a Y no le pedimos que sea acotado. La prueba se arregla cambiando $d_{K,\infty}$ por $d_{K,u,\infty}$ (que se define igual, pero usando la $d_u = \min\{1, d_\infty\}$ en lugar de d) en donde haga falta.

Observar que en la Ec. (7.4), si uno toma $\varepsilon < 1$, entonces da lo mismo poner d_u que d , por lo que las dos topologías τ_{UK} resultantes quedan equivalentes en Y^X y en $C(X, Y)$. ▲

Observación 7.4.6. Sea (X, τ) un ET. Se dice que X es **compactamente generado** (se abrevia KG) si todo subconjunto $U \in \mathcal{P}(X)$ cumple que

$$U \in \tau \iff K \cap U \in \tau_K \quad (\text{la inducida de } \tau \text{ en } K) \quad , \quad \text{para todo compacto } K \subseteq X.$$

En tal caso, si $f \in Y^X$ para cierto espacio (Y, σ) , entonces

$$f \in C(X, Y) \iff f|_K \in C(K, Y) \text{ para todo compacto } K \subseteq X.$$

Esto sale usando que $(f|_K)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap K$ para todo abierto $V \in \sigma$. Por lo tanto la Prop. 7.4.4 sigue siendo válida si uno reemplaza la hipótesis *localmente compacto* por *compactamente generado*. Es fácil ver que LK $\implies$ KG (hacen falta un par de cuentas: hacerlas). Pero hay otra clase conocida de espacios que cae dentro de los compactamente generados: Los N_1 , y por lo tanto, todos los EM's. ▲

Proposición 7.4.7. Sea (X, τ) un ET. Entonces se tiene que

1. Para que X sea KG, alcanza verificar que un $F \subseteq X$ es **cerrado** siempre que $K \cap F$ sea cerrado en K para todo compacto $K \subseteq X$.
2. Si X es N_1 , entonces es KG.

Demostración. La primera afirmación se deduce directamente de las definiciones ya que, dados $F, K \subseteq X$, se tiene que $(X \setminus F) \cap K = K \setminus (F \cap K) = \{\text{los de } K \text{ que no están en } F\}$.

Sea ahora $F \subseteq X$ y $x \in \overline{F}$. Si X es N_1 la Prop. 4.3.1 dice que existe una **sucesión** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en F tal que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. Observar que $K = \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es compacto. Si asumimos que $K \cap F$ es cerrado en K (para todos los K , en particular este), entonces $x \in F$. Luego F es cerrado en X , que debe ser KG por 1. ■

Corolario 7.4.8. Sea (X, τ) un ET y sea (Y, d) un EM. Entonces:

Si X es KG (en particular, si es N_1) $\implies C(X, Y)$ es τ_{UK} -cerrado en (Y^X, τ_{UK}) . ■

A continuación veremos que la topología compacto abierta τ_{KA} coincide con τ_{UK} en $C(X, Y)$, siempre que Y sea un EM. La coincidencia de ambas topologías se interpreta como que los abiertos $S_{K,U}$ de la τ_{KA} forman una nueva sub-base de la τ_{UK} , contruida de tal modo que no se necesite usar el hecho que Y tenga una métrica. Por ello brinda una generalización natural de ese “estilo” de convergencia de funciones continuas a los pares de espacios X, Y que solamente son topológicos.

Proposición 7.4.9. Sea (X, τ) un ET y sea (Y, d) un EM. Luego, en el espacio $C(X, Y)$, las topologías τ_{UK} (uniforme en compactos) y τ_{KA} (compacto abierta) coinciden.

Demostración. Mantendremos los nombres para los abiertos sub-básicos $(S_{K,U}$ y $S_{f,K,\varepsilon})$ de ambas restricciones a $C(X, Y)$. Dados $K \subseteq X$ compacto y $U \subseteq Y$ abierto, sea $f \in S_{K,U} = \{g \in C(X, Y) : g(K) \subseteq U\}$. Por la Prop. 6.2.6, $f(K)$ es compacto, y por la Prop. 6.4.9 existe un $\varepsilon > 0$ tal que $B_Y(f(K), \varepsilon) \subseteq U$. Pero si miran bien, verán que

$$\begin{aligned} f \in S_{f,K,\varepsilon} &= \{g \in C(X, Y) : \sup_{x \in K} d_Y(f(x), g(x)) < \varepsilon\} \\ &\subseteq \{g \in C(X, Y) : g(K) \subseteq B_Y(f(K), \varepsilon)\} \subseteq S_{K,U} . \end{aligned}$$

Podemos deducir que todos los $S_{K,U} \in \tau_{UK}$, por lo que $\tau_{KA} \subseteq \tau_{UK}$.

Recíprocamente, dados $f \in C(X, Y)$, $K \subseteq X$ compacto y $\varepsilon > 0$, tomemos el abierto $V = S_{f,K,\varepsilon}$. Veamos que existe un $W \in \tau_{KA}$ tal que $f \in W \subseteq V$: Para cada $x \in K$ sea $U_x \in \mathcal{O}^a(x)$ tal que $f(U_x) \subseteq B_Y(f(x), \frac{\varepsilon}{4})$. Luego, como f es continua,

$$f(\overline{U_x}) \subseteq \overline{f(U_x)} \subseteq \overline{B_Y(f(x), \frac{\varepsilon}{4})} \subseteq \overline{B_Y(f(x), \frac{\varepsilon}{4})} \subseteq B_Y(f(x), \frac{\varepsilon}{3}) .$$

Cubro a K con finitos $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$ y tomo los compactos $K_j = \overline{U_{x_j}} \cap K$, para $j \in \mathbb{I}_n$. Luego

$$f \in W = \bigcap_{j \in \mathbb{I}_n} S_{K_j, B_Y(f(x_j), \frac{\varepsilon}{3})} \subseteq \left\{ g \in C(X, Y) : \sup_{x \in K} d(f(x), g(x)) < \varepsilon \right\} = V,$$

porque si $g \in W$ y $z \in K$, elijo el $j \in \mathbb{I}_n$ tal que $z \in K_j \subseteq \overline{U_{x_j}}$. Luego, tanto $f(z)$ como $g(z)$ están en $B_Y(f(x_j), \frac{\varepsilon}{3})$, que tiene diámetro menor que ε .

Ahora bien, dado un $U \in \tau_{UK}$ y una $f \in U$, como los $S_{f, K, \varepsilon}$ forman una **base** de $\mathcal{O}_{\tau_{UK}}(f)$ (Obs. 7.4.2), lo que acabamos de mostrar nos asegura que existe un $W \in \tau_{KA}$ tal que $f \in W \subseteq S_{f, K, \varepsilon} \subseteq U$, por lo que $U \in \tau_{KA}$. Es decir que $\tau_{UK} \subseteq \tau_{KA}$. ■

Proposición 7.4.10. Sea (X, τ) un ET que es LKH y sea (Y, σ) un ET cualquiera. Consideremos en $C(X, Y)$ la topología compacto abierta τ_{KA} . Entonces la evaluación

$$E : X \times C(X, Y) \rightarrow Y \quad \text{dada por} \quad E(x, f) = f(x), \quad \text{para } (x, f) \in X \times C(X, Y),$$

es una función continua.

Demostración. Sea $(x, f) \in X \times C(X, Y)$ y sea $V \in \sigma$ un entorno de $E(x, f) = f(x)$. Como f es continua y X es LKH, el Cor. 7.1.10 asegura que existe entorno compacto K de x tal que $f(K) \subseteq V$ (porque $x \in f^{-1}(V)$ que es abierto). Sea $U = K^\circ \in \mathcal{O}^a(x)$. Ahora podemos tomar el abierto

$$M = U \times S_{K, V} \in \tau \times \tau_{KA}$$

que es entorno de (x, f) y cumple que $E(M) \subseteq V$. ■

Observación 7.4.11. Tenemos varias topologías para el espacio $\mathcal{C} = C(X, Y)$, y nos podemos preguntar qué propiedades topológicas tendrá, al pensarlo como un ET con cada una de ellas. Cuando Y es métrico todas hacen de $\mathcal{C}$ un ET que es CR. Cuando Y no es métrico, tenemos sólo la topología τ_{KA} y la puntual. Lo que vale en tal caso es que el espacio $(\mathcal{C}, \tau_{KA})$ es Hausdorff o regular siempre que Y lo sea (Idem con τ_P).

Si se usa la d_∞ o la d_u , nuestro $\mathcal{C}$ queda métrico y por ende normal. La puntual es la producto en Y^X . Como el ser Tychonoff, regular o Hausdorff se hereda y se mantiene por productos, también sale que $\mathcal{C}$ queda, con τ_P , tan bueno como Y .

Con respecto a la τ_{KA} , la fórmula $\overline{U} \subseteq V \implies \overline{S_{K, U}}^{\tau_{KA}} \subseteq S_{K, V}$, que vale para todo par de abiertos U, V de Y y todo compacto $K \subseteq X$, sirve para demostrar lo afirmado arriba. Dejamos la prueba de los detalles como ejercicio para el lector inquieto. ▲

7.5 Particiones de la unidad

Definición 7.5.1. Sea (X, τ) un ET. Una **partición de la unidad** asociada a un cubrimiento abierto $\sigma = \{U_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ de X es una familia de funciones $\{f_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ en $C(X, [0, 1])$ tales que:

1. Para todo $i \in \mathbb{I}$ se cumple que $\text{sop}(f_i) \subseteq U_i$.
2. La suma de todas las f_i da la función constante $1 \in C(X, [0, 1])$. ▲

Estas particiones son herramientas esenciales para poder laburar localmente en ciertas partes “chicas” de X (adentro de cada U_i), y luego globalizar los resultados a todo X , multiplicando cada función local por la f_i respectiva, para “extenderla” a X .

Pero el hecho de poder sumar tantas f_i 'es y que la cosa no explote no parece fácil a priori. Sin embargo, todo tiene sentido si uno le pone condiciones fuertes al cubrimiento σ . Lo que debe cumplir es lo que suele llamarse ser un cubrimiento localmente finito:

Definición 7.5.2. Sea (X, τ) un ET. Una familia $\sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ de X es **localmente finita** (se abrevia LF) si para cada $x \in X$ existe un $U \in \mathcal{O}(x)$ tal que $\{V \in \sigma : V \cap U \neq \emptyset\}$ es finito, o sea que U corta sólo finitos conjuntos de σ . ▲

Observación 7.5.3. Si tenemos un cubrimiento **abierto** $\sigma = \{U_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ de X que es LF, y nos dan una familia de funciones $\{g_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ en $C(X, [0, 1])$ tal que todos los $\text{sop}(g_i) \subseteq U_i$, entonces sí podemos decir que la suma $\sum_{i \in \mathbb{I}} g_i$ está bien definida y es continua en todo X .

En efecto, para cada $x \in X$ tenemos el entorno $U \in \mathcal{O}(x)$ tal que $\sum_{i \in \mathbb{I}} g_i|_U$ es, en los hechos, una suma **finita** de funciones continuas, ya que todas las g_i para las que $U \cap U_i = \emptyset$ se anulan en U (porque $\text{sop}(g_i) \subseteq U_i$). Esto dice que la suma está bien definida, y que es continua en un entorno abierto U de cada punto $x \in X$, por lo que es continua en todo X .

Ya vimos que si el cubrimiento es LF, las sumas mencionadas pueden hacerse. Pero nos falta ver en qué espacios se pueden encontrar particiones de la unidad, es decir que sumen la función 1 . La hipótesis que se necesita es que X sea normal. Esto se veía venir, porque hay un olorcito al Lema de Urysohn. Pero además es necesario para poder hacer el siguiente resultado técnico que es imprescindible para construir las tan buscadas particiones. ▲

Lema 7.5.4. Sea (X, τ) un ET **normal** y sea $\sigma = \{U_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ un cubrimiento de X que es abierto y **LF**. Luego existe otro cubrimiento abierto $\{V_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ de X tal que todos los $\overline{V_i} \subseteq U_i$.

Demostración. Digamos que una familia de abiertos $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in \mathbb{J}}$ esta adaptada a σ si

$$\mathbb{J} \subseteq \mathbb{I} \quad , \quad \overline{V_i} \subseteq U_i \quad \text{para todo } i \in \mathbb{J} \quad , \quad \text{y} \quad \left(\bigcup_{i \in \mathbb{J}} V_i \right) \cup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{J}} U_i \right) = X \quad .$$

Consideremos el conjunto $\mathcal{C} = \{ \mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in \mathbb{J}} : \mathcal{V} \text{ está adaptada a } \sigma \}$, ordenado por tener más índices y abiertos V_i iguales en los comunes. El conjunto $\mathcal{C} \neq \emptyset$ porque la normalidad de X asegura que para todo $i \in \mathbb{I}$ hay una familia unitaria $\{V_i\} \in \mathcal{C}$, ya que el cerrado

$$F_i = X \setminus \left(\bigcup_{j \neq i} U_j \right) \subseteq U_i \quad , \quad \text{por lo que } F_i \subseteq V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i \quad \text{para cierto abierto } V_i \quad .$$

Dado un subconjunto $\mathcal{A}$ totalmente ordenado en $\mathcal{C}$, definimos un $\mathcal{V}$ tomando como $\mathbb{J}$ la unión de las familias de índices, y poniendo a los V_i que aparezcan (son siempre los mismos). Esta familia $\mathcal{V}$ cumple trivialmente las dos primeras condiciones para ser adaptada a σ .

Para ver la última, fijemos un $x \in X$. Si $x \in \bigcup_{i \in \mathbb{J}} V_i$, estamos hechos. Sino, tampoco estará en $\bigcup_{i \in \mathbb{K}} V_i$ para ningún $\mathcal{V}_{\mathbb{K}} = \{V_i\}_{i \in \mathbb{K}} \in \mathcal{A}$. Por lo tanto debe pasar que $x \in \bigcup_{i \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{K}} U_i$ para todos esos conjuntos $\mathbb{K}$. Como σ es LF, sabemos que existe un $W \in \mathcal{O}^a(x)$ tal que

$$\mathbb{L} = \{i \in \mathbb{I} : x \in U_i\} \subseteq \{i \in \mathbb{I} : W \cap U_i \neq \emptyset\} \text{ es } \mathbf{finito} \quad .$$

Si pasara que $x \notin \bigcup_{i \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{J}} U_i$ tendríamos que $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{J}$. Haciendo crecer los $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ de $\mathcal{A}$, podríamos encontrar uno tal que $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$, lo que contradiría que $x \in \bigcup_{i \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{K}} U_i$. Así que $\mathcal{V} \in \mathcal{C}$.

Todo esto dice que el orden de $\mathcal{C}$ es inductivo, por lo que el Lema de Zorn asegura que $\mathcal{C}$ tiene un elemento $\mathcal{V}_M = \{V_i\}_{i \in \mathbb{J}}$ maximal. Veamos ahora que ese $\mathbb{J}$ tiene que ser todo $\mathbb{I}$ (lo que en particular dirá que tenemos un cubrimiento). En efecto, si hubiera un $k \notin \mathbb{J}$, miremos los conjuntos

$$U = \left(\bigcup_{i \in \mathbb{J}} V_i \right) \cup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{I} \setminus (\mathbb{J} \cup \{k\})} U_i \right) \quad \text{y} \quad F = X \setminus U \quad \text{que es cerrado} \quad .$$

Observar que $F \subseteq U_k$. Por la normalidad, habría un $V_k \in \tau$ tal que $F \subseteq V_k \subseteq \overline{V_k} \subseteq U_k$. Agregándolo en el lugar k de $\mathbb{J} \cup \{k\}$, contradiríamos la maximalidad $\mathcal{V}_M$. ■

La prueba Zorneada de arriba tiene una particularidad interesante: el orden de $\mathcal{C}$ es rígido en el sentido de que una vez que uno “empezó” con una familia $\{V_i\}_{i \in \mathbb{K}} \in \mathcal{C}$, no la puede “arreglar” agrandando los V_i . Deberá apechugar, y seguir tomando V_j ’s nuevos hasta llegar a cubrir a todo X . El argumento de la prueba dice que siempre se puede hacer eso.

La hipótesis de que el cubrimiento σ sea LF es un poco excesiva. En realidad, basta asumir que σ sea “puntualmente finito”, o sea que cada $x \in X$ esté sólo en finitos U_i ’es. Sin embargo, alguna finitud hay que asumir. Sugerimos mostrar que el resultado es falso sin ninguna tal hipótesis, aún en el caso de que σ sea numerable (finito no vale).

Teorema 7.5.5. Sea (X, τ) un ET **normal** y sea $\{U_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ un cubrimiento abierto y LF de X . Luego existe una familia de funciones $\{f_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ en $C(X, [0, 1])$ tales que

$$\text{sop}(f_i) \subseteq U_i \text{ para todo } i \in \mathbb{I} \quad \text{y} \quad \sum_{i \in \mathbb{I}} f_i = \mathbf{1} .$$

En otras palabras, en un ET normal todo cubrimiento abierto y LF tiene alguna partición de la unidad asociada.

Demostración. Por el Lema 7.5.4 tenemos un cubrimiento abierto $\{V_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ de X tal que todos los $\overline{V_i} \subseteq U_i$, por lo que también será LF. Ya que estamos, tomemos otro cubrimiento $\{W_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ tal que todos los $\overline{W_i} \subseteq V_i$. Para cada $i \in \mathbb{I}$, el Lema de Urysohn 5.5.1 nos provee de una

$$g_i \in C(X, [0, 1]) \text{ tal que } g_i(\overline{W_i}) \equiv 1 \text{ y } g_i(X \setminus V_i) \equiv 0 \implies \text{sop}(g_i) \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i .$$

Como se indica en la Obs. 7.5.3, esto hace que la suma $h = \sum_{i \in \mathbb{I}} g_i$ esté bien definida y sea continua en X . Pero además $h(x) \geq 1$ para todo $x \in X$, por que los W_i cubren a X . La historia termina definiendo $f_i = \frac{g_i}{h} \in C(X, [0, 1])$ para cada $i \in \mathbb{I}$. ■

Terminamos la sección con un resultado sobre clausuras asociadas a cubrimientos LF's :

Proposición 7.5.6. Sea (X, τ) un ET y sea $\sigma = \{U_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ un cubrimiento LF de X .

1. La familia $\overline{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \{\overline{U_i}\}_{i \in \mathbb{I}}$ es también LF.

2. Sea $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{I}$. Entonces vale que si

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i \in \mathbb{J}} U_i \text{ entonces } \overline{V} = \bigcup_{i \in \mathbb{J}} \overline{U_i} . \quad (7.6)$$

Proof. 1. Se deduce del hecho de que si $W \in \tau$ y $U \subseteq X$ cumplen que

$$W \cap U = \emptyset \implies W \cap \overline{U} = \emptyset \quad (\text{porque } U \subseteq X \setminus W \text{ que es cerrado}) .$$

Así que el mismo W que sirve para σ (siempre que sea abierto) sirve para $\overline{\sigma}$.

2. Usando que cada $U_i \subseteq V$ ($i \in \mathbb{J}$) sale bien fácil que, si llamamos $A \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i \in \mathbb{J}} \overline{U_i}$, entonces

$$V \subseteq A \subseteq \overline{V} ,$$

por lo que alcanzaría ver que A es cerrado. Observar que para todo cacho finito $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{J}$, el subconjunto $A_{\mathbb{F}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i \in \mathbb{F}} \overline{U_i} \subseteq A$ sí lo es, porque ahí seguro vale la igualdad $\bigcup_{i \in \mathbb{F}} \overline{U_i} = \overline{\bigcup_{i \in \mathbb{F}} U_i}$.

Sea ahora $x \in \overline{A}$. Por el item 1 ($\overline{\sigma}$ era LF) el x debe tener un entorno abierto W tal que $\mathbb{F} = \{i \in \mathbb{J} : W \cap \overline{U_i} \neq \emptyset\}$ es **finito** y $W \cap A \subseteq A_{\mathbb{F}}$. Luego, dado cualquier $U \in \mathcal{O}(x)$

$$x \in \overline{A} \implies \emptyset \neq (U \cap W) \cap A \subseteq U \cap A_{\mathbb{F}} \implies x \in \overline{A_{\mathbb{F}}} = A_{\mathbb{F}} \subseteq A .$$

En resumen queda que A es cerrado y por ello $\overline{V} = \bigcup_{i \in \mathbb{J}} \overline{U_i}$. ■

- Ejercicios 7.5.7.** 1. Sea (X, τ) un ET y sea $\sigma = \{U_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ un cubrimiento LF de X . Ver que si X era compacto, entonces σ es finito.
2. Mostrar un cubrimiento abierto de $\mathbb{R}$ sin subcubrimientos LF. (sirven las semirrectas $(-n, \infty)$ para $n \in \mathbb{N}$). ▲

7.6 Paracompactos

Las particiones de la unidad son maravillosas. Pero para encontrar una (o al menos saber que la hay), hace falta tener antes un cubrimiento abierto LF. En busca de condiciones que garanticen la existencia de abundantes cubrimientos tan buenos, se define y estudia la noción de paracompacidad. Y veremos que es más común de lo que parecería. La idea clave es definir una suave relajación del concepto de subcubrimiento, cuya necesidad se advierte en el último ítem del Ejercicio anterior.

Definición 7.6.1. Sea (X, τ) un ET.

1. Dados dos cubrimientos σ y ρ de X , decimos que ρ es un **refinamiento** de σ si

para todo $V \in \rho$ existe un $U \in \sigma$ tal que $V \subseteq U$.

2. Decimos que X es **paracompacto** (abreviamos PK) si todo cubrimiento abierto de X tiene un refinamiento abierto que es **LF** (y sigue cubriendo a X). ▲

La iniciativa de considerar espacios PK's es, en forma similar a la de la clase de los LKH, la de poder obtener localmente algunas de las propiedades de los espacios compactos (cubrimientos "localmente" finitos). Los PK's, como veremos en seguida, tienen la ventaja de ser más comunes que los LKH, pero ninguna de las dos clases incluye a la otra.

Probaremos dos propiedades de los PK's, que sirven para que cierren los resultados previos. Si un espacio es PK tendrá abundantes cubrimientos LF, pero le falta ser normal para que haya particiones de la unidad asociadas a ellos (vía el Teo. 7.5.5). Ahora veremos que si el espacio era PK, le alcanza con ser Hausdorff para que todo funcione.

Proposición 7.6.2. Sea (X, τ) un ET. Si X es PKH, entonces es normal.

Demostración. La prueba es muy similar a la de que KH $\implies$ normal, porque se labura localmente. Veamos primero que X es **regular**. Si $F \subseteq X$ es cerrado y $x \notin F$, para cada $y \in F$ existen $A_y, B_y \in \tau$ tales que $A_y \cap B_y = \emptyset$, $y \in B_y$ y $x \in A_y$. Esto hace que $x \notin \overline{B_y}$.

La familia $\{B_y\}_{y \in F}$, junto con $X \setminus F$, forman un cubrimiento abierto de X , que debe tener un refinamiento abierto σ que es LF. Sea $\rho = \{U \in \sigma : U \cap F \neq \emptyset\}$. Definamos entonces el abirto $V_x \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup \rho$. Es claro que $F \subseteq V_x$.

Para ver la regularidad bastaría probar que $x \notin \overline{V_x}$, porque en tal caso existiría un $A_x \in \mathcal{O}^a(x)$ tal que $A_x \cap V_x = \emptyset$. Notemos que todo $U \in \rho$ está dentro de uno de los B_y (en

$X \setminus F$ no puede estar), y pasaba que $x \notin \overline{B}_y$, así que $x \notin \overline{U}$. Por ello, y por el hecho de que la familia ρ es LF, la Ec. (7.6) nos dice que $x \notin \bigcup \{\overline{U} : U \in \rho\} = \overline{V}_x$. Listo el regular.

Si ahora me dan un cerrado E disjunto con F , defino abiertos disjuntos $A_x \ni x$ y $V_x \supseteq F$ como los de arriba, para cada $x \in E$. Luego cada $\overline{A}_x \cap F = \emptyset$. Cubro X con los A_x y $X \setminus E$, y tomo otro refinamiento LF que llamo γ . Sigo definiendo $\omega = \{U \in \gamma : U \cap E \neq \emptyset\}$ y $W = \bigcup \omega \supseteq E$. Por la LF de γ vemos que $\overline{W} = \bigcup_{U \in \omega} \overline{U}$. Como cada $U \in \omega$ tiene un $x \in E$ tal que $U \subseteq A_x$, sale que $\overline{U} \cap F \subseteq \overline{A}_x \cap F = \emptyset$ y llegamos a que

$$E \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq X \setminus F$$

como queríamos. Renormalito nos quedó el X . ■

La Prop. 7.6.2 dice, en particular, que los espacios de Hausdorff que no sean normales no pueden ser PK (ver 8.2.1). Sin embargo, en la práctica todo ET es PK, porque es difícil dar contraejemplos concretos, y todos ellos son rebuscados y “armados” ad hoc.

La macana es que tampoco es fácil asegurarse de que un ET sí es PK. De las condiciones conocidas que aseguran ser PK, la más económica es pedir regular y Lindeloff. Como demostrar esto es muy complicado, daremos un enunciado menos general cuya prueba sale un poco más rápido, y que cubre la mayoría de los casos útiles (sin ir las lejos, los $\mathbb{R}^n$):

Proposición 7.6.3. Sea (X, τ) un ET. Si X es LKH y Lindeloff (o σ -K), entonces es PK.

Demostración. Solíamos decir que un $U \subseteq X$ es kabierto si es abierto y $\overline{U}$ es compacto. Observar que la unión finita de kabiertos es kabierto. Recordar que, como X es LKH y Lindeloff, la Prop. 7.1.15 asegura que existe una sucesión $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{P}(X)$ tal que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = X, \quad E_n \text{ es kabierto} \quad \text{y} \quad \overline{E}_n \subseteq E_{n+1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Llamemos $E_0 = E_{-n} = \emptyset$ y $K_n = \overline{E}_n \setminus E_{n-1}$ (todos compactos) para $n \in \mathbb{N}$. Observar que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_n \setminus E_{n-1}) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Además, es fácil ver que cada $K_n \subseteq E_{n+1} \setminus \overline{E}_{n-2} \in \tau$.

Conviene imaginarse a los $E_n = B_{\mathbb{C}}(0, n)$ en el plano complejo, por lo que los K_n son los anillos $\{z \in \mathbb{C} : n-1 \leq |z| \leq n\}$ que sólo se tocan en el borde. Y que los kabiertos $E_{n+1} \setminus \overline{E}_{n-2} = \{z \in \mathbb{C} : n-2 < |z| < n+1\}$, que sólo se cortan con dos o tres vecinos.

Sea ahora $\sigma = \{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ un cubrimiento abierto de X (por Lindeloff asumimos que es numerable). Luego podemos cubrir a cada compacto K_n con los kabiertos

$$B_{k,n} = U_k \cap (E_{n+1} \setminus \overline{E}_{n-2}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Luego existen sendos conjuntos finitos $\mathbb{J}_n \subseteq \mathbb{N}$ tales que cada $K_n \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{J}_n} B_{k,n}$. Llamemos

$\mathbb{A} = \{(k, n) \in \mathbb{N}^2 : k \in \mathbb{J}_n\}$ y tomemos la sucesión de kabiertos $\rho = \{B_{k,n}\}_{(k,n) \in \mathbb{A}}$. Es claro que ρ cubre a X y que es un refinamiento de σ . Ahora veremos que ρ es LF:

Dado un $x \in X$, se tiene que x está en exactamente un conjunto $E_{n+1} \setminus E_n$. Llamemos entonces $W_x = E_{n+1} \setminus \overline{E}_{n-1} \supseteq E_{n+1} \setminus E_n$. Luego $W_x \in \mathcal{O}^a(x)$, y cumple que

$$\emptyset \neq W_x \cap B_{k,m} \subseteq \left(E_{n+1} \setminus \overline{E}_{n-1} \right) \cap \left(E_{m+1} \setminus \overline{E}_{m-2} \right) \implies n-1 \leq m \leq n+2,$$

porque $m \leq n-2 \implies E_{m+1} \subseteq E_{n-1}$ mientras que $n+3 \leq m \implies E_{n+1} \subseteq E_{m-2}$. Luego

$$\emptyset \neq W_x \cap B_{k,m} \implies (k, m) \in \bigcup_{r=n-1}^{n+2} \mathbb{J}_r \times \{r\},$$

que es un conjunto finito. Así que ρ es un refinamiento LF de σ . ■

A continuación enumeraremos una serie de resultados sobre la paracompacidad. Omitiremos las demostraciones, así que puede considerarse que es una lista de ejercicios. Una exposición completa de estos temas puede encontrarse en el libro de Munkres [2] o el de Kelley [1].

7.6.4. Sea (X, τ) un ET.

1. Si X es compacto, entonces es PK.
2. Si X es unión **disjunta** de subconjuntos abiertos y PK's, entonces X es PK.
3. Si X es regular y Lindeloff (o σ -K), entonces es PK.
4. En particular, si X es LKH y Lindeloff (o σ -K), entonces es PK (Prop. 7.6.3).

Asumamos ahora que X es PK. Se tiene que

5. Si X es Hausdorff (o sea que X es PKH), entonces es normal (Prop. 7.6.2).
6. Todo $F \subseteq X$ que sea **cerrado** queda PK con la inducida.
7. Si Y es otro espacio que es **compacto**, entonces $X \times Y$ es PK.
8. Puede pasar que $X \times X$ deje de ser PK (adivinen el contraejemplo: Sí, ver 8.2.1).

Un resultado mucho más difícil, que es cierto pero no probaremos, es que

Todo espacio métrico (o todo ET metrizable) es PK.

Observar que este resultado garantiza que en todo EM (basta que sea PKH y por tanto normal) se puede construir una partición de la unidad “subordinada” a cualquier cubrimiento abierto fijo. La subordinación significa que el soporte de cada f_i vive adentro de “algún” abierto del cubrimiento (aunque tengan distintos conjuntos de índices). ▲

Ejercicio 7.6.5. Veamos ahora otro ET que no es PK (aparte de 8.2.1): Sea A un conjunto no numerable, y consideremos el espacio $X = \mathbb{N}^A = \prod_{a \in A} \mathbb{N}$, donde cada $\mathbb{N}$ es discreto y la topología de X es la producto de las discretas. Probar que no es PK. ▲

7.7 Arzela Áscoli

Sea (X, τ) un ET que es CR, o mejor aún normal. Nos preguntamos cómo caracterizar aquellos conjuntos $\mathcal{F} \subseteq C_b(X) = C_b(X, \mathbb{C})$ que son compactos, o de clausura compacta (con la $\|\cdot\|_\infty$). Está claro que la respuesta es que sean TA, como en todo EM completo. Pero eso es poco satisfactorio en la práctica. Se busca otra caracterización en términos de las propiedades de las funciones de $\mathcal{F}$. Lo que describiremos a continuación es una propiedad que resolverá el problema planteado (si X era KH), llamada equicontinuidad:

Definición 7.7.1. Sea (X, τ) un ET. Una familia $\mathcal{F} \subseteq C(X) = C(X, \mathbb{C})$ es **equicontinua** (abreviamos EC) en un punto $x \in X$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $U_\varepsilon \in \mathcal{O}(x)$ tal que

$$y \in U_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{para todas las } f \in \mathcal{F}.$$

Lo importante (es decir la *equi*) es que se puede usar el **mismo** $U_\varepsilon \in \mathcal{O}(x)$ para todas las $f \in \mathcal{F}$ (cuando fijamos el ε). En el caso de EM's, suele decirse que “el δ no depende de f ”. Otra manera de formularlo que muestra mejor ese fenómeno es que

$$\text{para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } U_\varepsilon \in \mathcal{O}(x) \text{ tal que } U_\varepsilon \subseteq \bigcap_{f \in \mathcal{F}} f^{-1}(B_{\mathbb{C}}(f(x), \varepsilon)). \quad (7.7)$$

Diremos que $\mathcal{F}$ es EC a secas si lo es para todo $x \in X$. El hecho de haber elegido como codominio a $\mathbb{C}$ es por simplicidad. Si Y es cualquier EM y pensamos que $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$, la Ec. (7.7) tiene sentido (cambiando $B_{\mathbb{C}}$ por B_Y), y define EC idad en $x \in X$. ▲

Ejemplos 7.7.2. Fijemos Y un EM.

1. Si $X = [0, 1]$, la familia $\mathcal{F} = \{f_n(t) = t^n : n \in \mathbb{N}\}$ no es EC en $x = 1$, porque para todo $\varepsilon \in (0, 1)$ se tiene que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}(B(1, \varepsilon)) = \{1\}$. En efecto, cualquier $t \in [0, 1)$ cumple que $t^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, por lo que $t \notin f_n^{-1}(B(1, \varepsilon))$ para n grande enough.
2. Por otro lado, si la familia $\mathcal{F} \subseteq C(X)$ es finita (y X es cualquier cosa), entonces $\mathcal{F}$ es automáticamente EC, porque se pueden intersectar finitos entornos y queda entorno. Como la onda era buscar compacidad, esto era de esperar.
3. Asumamos ahora que $\mathcal{F} \subseteq C_b(X, Y)$ es EC. Un ejercicio interesante (sobre todo para acostumbrarse a la intrincada definición de EC) es demostrar que la clausura de la familia $\mathcal{F}$, con la métrica d_∞ de $C_b(X, Y)$, sigue siendo EC (cuenta de $\frac{\varepsilon}{3}$ si las hay). Idem con la métrica d_u de $C(X, Y)$.
4. Otro ejercicio: si $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y) \subseteq Y^X$ es EC (y X es cualquier ET), entonces
 - (a) La clausura **puntual** $\overline{\mathcal{F}}^p \subseteq Y^X$ sigue siendo EC. En particular, los límites puntuales de cosas en $\mathcal{F}$ se quedan en $C(X, Y)$.
 - (b) Si $\mathcal{F}$ es “puntualmente acotada”, entonces es “acotada en compactos” de X .

Si no les salen, chusmeen la prueba del Teo. 7.7.6. ▲

Teorema 7.7.3 (Arzela-Áscoli). Sea (X, τ) un ET compacto Hausdorff. En tal caso sucede que $C(X) = C_b(X)$, y allí usaremos la la $\|\cdot\|_\infty$. Dada $\mathcal{F} \subseteq C(X)$ se tiene que

$$\mathcal{F} \text{ es totalmente acotada} \iff \mathcal{F} \text{ es acotada y EC} . \quad (7.8)$$

Demostración. La parte fácil es $\Rightarrow$. En efecto, si me dan $\varepsilon > 0$, encuentro primero funciones $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ tales que $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{I}_n} B_{C(X)}(f_k, \frac{\varepsilon}{3})$ (las hay porque $\mathcal{F}$ era TA). Si fijamos ahora $x \in X$, podemos encontrar un $U \in \mathcal{O}(x)$ tal que $U \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{I}_n} f_k^{-1}(B_{\mathbb{C}}(f_k(x), \frac{\varepsilon}{3}))$. Haciendo el típico argumento $\frac{\varepsilon}{3}$ a partir de estos datos, sale que $U \subseteq \bigcap_{f \in \mathcal{F}} f^{-1}(B_{\mathbb{C}}(f(x), \varepsilon))$.

Veamos ahora $\Leftarrow$, que es la parte jodida. Asumamos que $\mathcal{F} \subseteq C(X)$ es EC y acotado. Luego existe un $M > 0$ tal que $\|f\|_\infty \leq M$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Fijemos $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in X$, tomemos un $U_x \in \mathcal{O}^a(x)$ asociado a la EC para x , $\mathcal{F}$ y $\frac{\varepsilon}{3}$. En otras palabras, tal que $U_x \subseteq \bigcap_{f \in \mathcal{F}} f^{-1}(B_{\mathbb{C}}(f(x), \frac{\varepsilon}{3}))$. Como X es compacto, podemos elegir

$$x_1, \dots, x_n \in X \quad \text{tales que} \quad X = \bigcup_{k \in \mathbb{I}_n} U_{x_k} . \quad (\star)$$

Vamos ahora a $\mathbb{D}_M = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq M\}$, que es compacto. Tomemos

$$A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subseteq \mathbb{D}_M \quad \text{tal que} \quad \mathbb{D}_M \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{I}_m} B_{\mathbb{C}}(\alpha_k, \frac{\varepsilon}{3}) . \quad (\star\star)$$

Construiremos funciones subindicadas en el conjunto A^n que es finito ($|A^n| = m^n$). El cubrimiento abierto $\sigma = \{U_{x_k}\}_{k \in \mathbb{I}_n}$ de X dado en $(\star)$ es LF porque es finito. Por la Prop. 7.5.5 (K-H $\Rightarrow$ normal), existe una partición de la unidad $\phi_1, \dots, \phi_n$ de X asociada a σ . Para cada $b = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in A^n$, definamos la función

$$g_b \in C(X) \quad \text{dada por} \quad g_b(x) = \sum_{k \in \mathbb{I}_n} \beta_k \phi_k(x) , \quad \text{para} \quad x \in X .$$

Ahora sí, podemos asegurar que $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{b \in A^n} B_{C(X)}(g_b, \varepsilon)$, lo que nos dirá que $\mathcal{F}$ es TA.

Para probarlo, tomemos $f \in \mathcal{F}$, y la n -upla $(f(x_1), \dots, f(x_n)) \in \mathbb{D}_M^n$ (porque $\|f\|_\infty \leq M$). Usando $(\star\star)$, podemos encontrar un $b = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in A^n$ tal que $|\beta_k - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $k \in \mathbb{I}_n$. Ahora veremos que $f \in B_{C(X)}(g_b, \varepsilon)$ para ese $b \in A^n$. En efecto, dado $x \in X$,

$$|f(x) - g_b(x)| = \left| f(x) - \sum_{k \in \mathbb{I}_n} \beta_k \phi_k(x) \right| \stackrel{\textcircled{a}}{=} \left| \sum_{k \in \mathbb{I}_n} (f(x) - \beta_k) \phi_k(x) \right| \leq \sum_{k \in \mathbb{I}_n} |f(x) - \beta_k| \phi_k(x) ,$$

donde $\stackrel{\textcircled{a}}{=}$ vale porque $\sum_{k \in \mathbb{I}_n} \phi_k(x) = 1$. Para los $k \in \mathbb{I}_n$ tales que $x \in U_{x_k}$, el coeficiente

$$|f(x) - \beta_k| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - \beta_k| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3} \varepsilon ,$$

donde el primer $\frac{\varepsilon}{3}$ surge de la definición de U_{x_k} , y el segundo de cómo elegimos los β_k . Observar que si $x \notin U_{x_k}$ el coeficiente no importa, porque $\phi_k(x) = 0$. En resumidas cuentas, de las desigualdades anteriores, y del hecho de que $\sum_{k \in \mathbb{I}_n} \phi_k = \mathbf{1}$, deducimos que

$$|f(x) - g_b(x)| \leq \sum_{k \in \mathbb{I}_n} |f(x) - \beta_k| \phi_k(x) < \sum_{k \in \mathbb{I}_n} \frac{2\varepsilon}{3} \cdot \phi_k(x) = \frac{2\varepsilon}{3} \cdot \mathbf{1}(x) = \frac{2\varepsilon}{3},$$

para todo $x \in X$, por lo que $\|f - g_b\|_\infty \leq \frac{2}{3} \varepsilon < \varepsilon$. ■

Corolario 7.7.4. Sea (X, τ) un ET compacto Hausdorff. Dado $\mathcal{F} \subseteq C(X)$ se tiene que

$$\mathcal{F} \text{ es compacto} \iff \mathcal{F} \text{ es cerrado, acotado y EC}.$$

Otra versión: Vale que $\overline{\mathcal{F}}$ es compacto $\iff \mathcal{F}$ es acotado y EC.

Demostración. Sólo hace falta aclarar que un cerrado en un completo queda completo, y que la clausura uniforme de una familia EC sigue siendo EC (idem con acotada). ■

Ejercicio 7.7.5. Sea (X, τ) un ET que es LKH. Dada una familia $\mathcal{F} \subseteq C_0(X)$, se tiene que

$$\mathcal{F} \text{ es TA} \iff \mathcal{F} \text{ es acotada, EC y se anula uniformemente en el } \infty. \quad (7.9)$$

Esto último significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe un compacto K_ε tal que

$$\sup \{ |f(x)| : x \in X \setminus K_\varepsilon \text{ y } f \in \mathcal{F} \} < \varepsilon.$$

Insistimos: Fijado el ε , sirve el mismo K_ε para todas las $f \in \mathcal{F}$ a la vez. ▲

Si uno quiere cambiar $\mathbb{C}$ por otro espacio métrico Y en el Teorema de Arzela-Ascoli, le tiene que pedir a Y que las bolas cerradas sean TA's (fijarse en la Ec. $(\star\star)$). Además, hay que asumir que el espacio Y es completo para generalizar el Cor. 7.7.4. Esto incluye, por la Prop. 6.4.13, a todos los $\mathbb{R}^n$. Siempre con la d_∞ de $C(X, Y)$.

Existe una versión del Teorema de Arzela-Ascoli relativa a la topología τ_{UK} de $C(X)$ en lugar de la uniforme que produce la d_∞ . Observar que si X es compacto son la misma cosa, así que la onda es extenderse a dominios no compactos como en el Ejercicio de arriba. En principio, para que una $\mathcal{F} \subseteq C(X)$ tenga τ_{UK} -clausura que no se salga de $C(X)$, el Cor. 7.4.8 pedía que X sea al menos KG.

Sin embargo, teniendo la hipótesis de que $\mathcal{F}$ es EC ya eso no hace falta, y uno se extiende tanto que basta con pedirle la H a X para que una $\mathcal{F}$ “puntualmente acotada” y EC tenga clausura compacta en $C(X)$ (todo con τ_{UK}). En cambio la recíproca, que era lo fácil cuando X era compacto, sí necesita hipótesis: Que X sea LKH.

Teorema 7.7.6. Sea (X, τ) un ET que es Hausdorff, y sea $\mathcal{F} \subseteq C(X)$. Entonces:

1. Si $\mathcal{F}$ es EC y “puntualmente acotada”, es decir que

$$M_x = \sup\{|f(x)| : f \in \mathcal{F}\} < \infty \quad \text{para cada } x \in X \quad (7.10)$$

(e.g. si $\mathcal{F}$ es acotada), entonces $\mathcal{F}$ tiene τ_{UK} -clausura compacta dentro de $C(X)$.

2. La recíproca vale siempre que X sea LKH.

Demostración. Para cada $x \in X$, tomemos el disco $\mathbb{D}_x = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq M_x\}$. El espacio $\mathbb{P} = \prod_{x \in X} \mathbb{D}_x$ es compacto con la topología producto. Observar que $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{P}$. Sean

- $\mathcal{K} \subseteq C(X) \cap \mathbb{P}$ la τ_{UK} -clausura de $\mathcal{F}$ en $C(X)$ (que $\mathcal{K} \subseteq C(X)$ lo vemos en seguida).
- $\mathcal{G}$ la clausura de $\mathcal{F}$ en $\mathbb{P}$ con la topología producto (i.e. puntual).

Tenemos dos cosas claras: Que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{G}$, y que $\mathcal{G}$ es compacta. Lo que probaremos es que son iguales, y que en $\mathcal{K}$ las dos topologías coinciden, por lo que $\mathcal{K}$ será compacta.

Fijemos $x \in X$, un $\varepsilon > 0$, y tomemos un $U \in \mathcal{O}^a(x)$ tal que $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$ y todo $y \in U$ (el tal U existe porque $\mathcal{F}$ era EC).

Dada una $g \in \mathcal{G}$, sea $\mathbf{f} = (f_i)_{i \in \mathbb{I}}$ una red en $\mathcal{F}$ que converge **puntualmente** a g . Luego

$$|g(y) - g(x)| = \lim_{i \in \mathbb{I}} |f_i(y) - f_i(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{para todo } y \in U.$$

Verificando lo anterior para cada $g \in \mathcal{G}$ (todas son límites puntuales) vemos que $\mathcal{G}$ (y por ello también $\mathcal{K}$) es EC. En particular esto dice que también $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{G} \subseteq C(X)$.

Tomemos ahora una red $\mathbf{g} = (g_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en $\mathcal{K}$ tal que $g_i \xrightarrow[\mathbb{I}]{\tau_{\mathbb{P}}} h \in \mathcal{G}$. Veamos que esa convergencia es también UK. Para ello, fijemos un compacto $K \subseteq X$ (la H la hereda). La familia

$$\mathcal{K}_K = \{f|_K \in C(K) : f \in \mathcal{K}\}$$

sigue siendo EC, ahora en el espacio métrico completo $(C(K), d_{K, \infty})$. Pero si asumimos la Ec. (7.10) (para las $f \in \mathcal{K}$), ahora veremos que también sale que $\mathcal{K}_K$ es $d_{K, \infty}$ -acotada (se usa que K es compacto y que $\mathcal{K}$ es EC y puntualmente acotada).

En efecto, pongamos $\varepsilon = 1$ y para cada $x \in K$ tomemos un abierto $V_x \subseteq K$ tal que todas las $f \in \mathcal{K}_K$ cumplan que $|f(y) - f(x)| < 1$ para $y \in V_x$ (eso es EC). Fijemos $x_1, \dots, x_r$ tales que sus V_{x_k} cubran K y, recordando antes la Ec. (7.10), llamemos

$$M = \max \left\{ \sup_{g \in \mathcal{K}} |g(x_k)| : 1 \leq k \leq r \right\} = \max_{1 \leq k \leq r} M_{x_k} < \infty.$$

Se usó que $\mathcal{K}$ es puntualmente acotada con los mismos M_x que $\mathcal{F}$ (sale fácil), y que los puntos x_k son finitos. Ahora sí sale fácil que $\|g\|_{K, \infty} \leq M + 1$ para toda $g \in \mathcal{K}$.

Por el Cor. 7.7.4, $\mathcal{K}_K$ tiene clausura compacta. Luego cualquier subred de $\mathbf{g}_K = (g_i|_K)_{i \in \mathbb{I}}$ tiene subredes convergentes con la $d_{K,\infty}$ de $C(K)$. Pero todas esas sub-subredes deben converger a lo mismo, que es nuestra h , por la convergencia puntual. Por la Prop. 4.2.5, deducimos que $g_i|_K \xrightarrow[i \in \mathbb{I}]{d_{K,\infty}} h|_K$ (toda la red $\mathbf{g}_K$). Así vemos que $g_i \xrightarrow[i \in \mathbb{I}]{\tau_{UK}} h$ y, como $\mathcal{G} \subseteq C(X)$, que $h \in \mathcal{K}$. En resumen, llegamos a que $\mathcal{G} = \mathcal{K}$, y que en $\mathcal{K}$ las convergencias puntual y UK coinciden. Luego la τ_{UK} de $\mathcal{K}$ es la producto, que la hace compacta.

La recíproca es fácil usando el Cor. 7.7.4, porque asumiendo que X es LKH, para testear que

$$\text{dada } \mathcal{K} \subseteq C(X) \text{ , si } \mathcal{K} \text{ es } \tau_{UK}\text{-compacta} \implies \mathcal{K} \text{ es EC ,}$$

basta hacerlo en los entornos compactos K de los puntos de X , donde las restricciones de las $f \in \mathcal{K}$ forman un $d_{K,\infty}$ -compacto (y en los puntos solitos, para ver la Ec. (7.10)). ■

7.8 Ejercicios

Ejercicio 7.8.1. Probar que la clase de los LKH no es hereditaria, aunque sí la heredan los subconjuntos abiertos o cerrados.

Ejercicio 7.8.2 (Tietze para LKH's). Sea (X, τ) un ET que es LKH y sea $K \subseteq X$ un compacto. Probar que, dada una $f \in C(K, [a, b])$, existe una extensión $\tilde{f} \in C(X, [a, b])$.

Ejercicio 7.8.3. Sea (X, τ) un ET que es LKH. Probar que las funciones de $C_K(X, \mathbb{R})$ separan compactos de cerrados disjuntos.

Ejercicio 7.8.4. Sea (X, τ) un ET que es LKH. Sea $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ su compactificación de Alexandrov con un punto. Probar que:

1. Toda $f \in C_0(X, \mathbb{R})$ se extiende a una función $\tilde{f} \in C(\tilde{X}, \mathbb{R})$ poniendo $\tilde{f}(\infty) = 0$.
2. Si pensamos que $C_0(X, \mathbb{R}) \subseteq C(\tilde{X}, \mathbb{R})$ vía esta extensión, y tomamos $\mathbf{1} \in C(\tilde{X}, \mathbb{R})$ la función constantemente igual a 1, entonces $C(\tilde{X}, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \cdot \mathbf{1} + C_0(X, \mathbb{R})$.

Los mismos enunciados valen para $C_0(X)$ y $C(\tilde{X}) = C(\tilde{X}, \mathbb{C})$.

Ejercicio 7.8.5. Sea (X, τ) un ET que es LKH. Probar que el espacio de funciones $C_K(X, \mathbb{R})$ es τ_{UK} -denso en $C_0(X, \mathbb{R})$. Lo mismo vale tomando a $\mathbb{C}$ como codominio.

Ejercicio 7.8.6. Sea (X, τ) un ET que es LKH. Probar las siguientes afirmaciones:

1. $C_K(X) \subseteq C_0(X) \subseteq C_b(X)$, y son métricos con la d_∞ .
2. El espacio $C_K(X)$ es d_∞ -denso en $C_0(X)$.
3. Dada $f \in C_0(X)$ y $\varepsilon > 0$, el conjunto $\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ es compacto en X .
4. Si X era un EM, toda función $f \in C_0(X)$ es **uniformemente** continua.

Sugerimos mostrar que si dos sucesiones en X cumplen que $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces alguna de las dos tiene una subsucesión convergente.

Ojo: La gran tentación es decir que f se sube a una continua en $\tilde{X}$ que es compacto. Pero quién nos asegura que $\tilde{X}$ es un EM? De paso, mostrar un ejemplo de un X que sea métrico y LKH tal que $\tilde{X}$ no sea metrizable. Y también dar condiciones que aseguren la metrizabilidad de $\tilde{X}$.

Ejercicio 7.8.7. Sea (X, τ) un ET que es LK y sea $f \in C(X, Y)$ una función que además es suryectiva y **abierto** (por la que la topología de Y es la cociente). Probar que

1. Y es también LK.
2. Para todo compacto $C \subseteq Y$ existe un compacto $K \subseteq X$ tal que $f(K) = C$.

Sugerencia: Subir, cubrir, bajar y elegir. Pero con entornos compactos.

Ejercicio 7.8.8. Sea (X, τ) un ET que es CR. Las siguientes propiedades son equivalentes:

1. X tiene **alguna** H -compactificación K tal que X queda **abierto** en K .
2. X queda abierto dentro de **toda** H -compactificación que tenga.
3. X era LKH.

Ejercicio 7.8.9. Sea (X, τ) un ET que es LKH y sea $A \subseteq X$. Probar que

$$A \text{ es LKH (con la inducida)} \iff A \text{ es abierto en } \bar{A}.$$

Sugerencia: Asumir primero que $\bar{A}$ es compacta. Luego generalizar cortando con entornos compactos.

Ejercicio 7.8.10. Probar que $\sigma\text{-K} \implies \text{Lindeloff}$. ▲

Ejercicio 7.8.11. Sea (X, τ) un ET que es LKH y Lindeloff. Probar que entonces X es $\sigma\text{-K}$. Más aún, mostrar que existe un cubrimiento abierto $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de X tal que

$$\bar{E}_n \text{ es compacto y } \bar{E}_n \subseteq E_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \quad \blacktriangle$$

El siguiente ejercicio intenta mostrar que las H -compactificaciones de un X que es LKH (pero no compacto) tienen un orden natural, determinado por cuántas $f \in C_b(X, \mathbb{R})$ pueden extenderse con continuidad al compacto. Damos sin embargo una definición mas estructural: Dadas dos H -compactificaciones (g, W) y (h, Z) de X , un **morfismo** entre ellas es una

$$\Phi \in C(Z, W) \quad \text{tal que} \quad g = \Phi \circ h.$$

Esto se traduce (si pensamos que Z y W “contienen” a X), a que $\Phi|_X = \mathcal{I}_X$. La densidad de X en Z hace que un morfismo, de existir, sea único. El tema para que exista el tal Φ es que una red (en X) que tiene límite del lado de Z también converja a algo del lado de W .

Se dirá que $W \leq Z$ si existe un **epimorfismo** $\Phi : Z \rightarrow W$ (o sea un morfismo sobre). En tal orden habrá un máximo que será $\beta(X)$ y el mínimo será la de Alexandrov $\tilde{X}$, como cualquiera habría imaginado. Insistimos en que toda esta maquinaria sólo funciona si se empieza con un espacio LKH. No camina tan redonda en cualquier CR porque uno necesita el Ejer. 7.1.13, o sea que X quede siempre abierto en sus compactos.

Ejercicio 7.8.12. Sea X un espacio localmente compacto Hausdorff.

1. Dadas (g, W) y (h, Z) dos H -compactificaciones de X , mostrar que son equivalentes:
 - (a) Que $W \leq Z$, o sea que exista un epimorfismo $\Phi : Z \rightarrow W$.
 - (b) Que toda función $f \in C_b(g(X), \mathbb{R})$ que se extiende con continuidad a todo W satisfaga que la función $\tilde{f} : h(X) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\tilde{f}(h(x)) = f(g(x))$, $x \in X$, se extiende con continuidad a Z .

Sugerencia: Hacer un embedding de W con esas efes. Después seguir como en el Teo. 6.5.8.

2. Probar que toda $f \in C_0(X, \mathbb{R})$ se extiende a cualquier H -compactificación (h, Z)

$$\text{poniendo } \tilde{f}(Z \setminus h(X)) \equiv 0 \quad \text{y} \quad \tilde{f}(h(x)) = f(x) \quad \text{para } x \in X,$$

y que la tal $\tilde{f} \in C(Z, \mathbb{R})$.

3. Deducir que para cualquier H -compactificación (h, Z) de X vale que $\tilde{X} \leq Z$. O sea que existe un epimorfismo $\Phi : Z \rightarrow \tilde{X}$, tal que $\Phi \circ h = \mathcal{I}_X$. Sugerencia: Usar el Ejer. 7.1.18, para ver cuales son las $f \in C_b(X, \mathbb{R})$ que se extienden a $\tilde{X}$.
4. Reinterpretar el Teorema de Stone-Cech como el hecho de que $\beta(X)$ es la máxima H -compactificación de X , y que tal máximo es único módulo hómo-isomorfismos.
5. Mirar el caso en que $X = \mathbb{Q}$. Podemos hacer $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \tilde{\mathbb{R}} = S^1$ (ver Ejer. 6.5.6). Observar que $\mathbb{Q}$ queda denso (por serlo en $\mathbb{R}$), así que esto es una H -compactificación. Pero $\mathbb{Q}$ no queda abierto en ella, lo no es tan raro porque $\mathbb{Q}$ no es LK. Encima, como lo que le sobra a S^1 es denso en S^1 , es imposible mandar S^1 sobre $\tilde{\mathbb{Q}}$ (la de un punto), dejando fijo a $\mathbb{Q}$, como se hace arriba con los LKH.

Ejercicio 7.8.13. Sea (X, τ) un ET. Recordar que KG significa ser **compactamente generado**.

1. Si X es KG, y nos dan una $f \in Y^X$ para cierto espacio (Y, σ) , probar que $f \in C(X, Y) \iff f|_K \in C(K, Y)$ para todo compacto $K \subseteq X$.
2. Mostrar que localmente compacto implica compactamente generado.
3. Probar que ser N_1 también implica ser KG (o sea que todo EM es KG).
4. Si asumimos que X es KG e (Y, d) que es EM, probar que $C(X, Y)$ es cerrado en (Y^X, τ_{UK}) .

Ejercicio 7.8.14. Sea (X, τ) un ET y sea $\sigma = \{U_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ un cubrimiento LF de X .

1. Si X es compacto, entonces $\mathbb{J} = \{i \in \mathbb{I} : U_i \neq \emptyset\}$ es finito.
2. $\sigma' = \{\overline{U_i}\}_{i \in \mathbb{I}}$ es también LF.
3. Si $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{I}$, entonces $\rho = \{U_i\}_{i \in \mathbb{J}}$ es también LF (aunque no cubra a X). Además, si

$$V = \bigcup_{i \in \mathbb{J}} U_i \quad \text{entonces} \quad \overline{V} = \bigcup_{i \in \mathbb{J}} \overline{U_i} . \quad (7.11)$$

4. Si σ es abierto, y nos dan una familia $\{g_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ en $C(X, [0, 1])$ tal que todos los

$$\text{sop}(g_i) = \overline{g_i^{-1}((0, 1])} \subseteq U_i ,$$

probar que la suma $g = \sum_{i \in \mathbb{I}} g_i$ está bien definida y es continua en todo X .

5. Aunque $\mathbb{R}$ es PK, mostrar un cubrimiento abierto de $\mathbb{R}$ sin subcubrimientos LF.

Ejercicio 7.8.15. Sea A un conjunto no numerable, y tomemos el espacio $X = \mathbb{N}^A = \prod_{a \in A} \mathbb{N}$, donde cada $\mathbb{N}$ es discreto y la topología de X es la producto de las discretas. Probar que X no es PK.

Ejercicio 7.8.16. Sea (X, τ) un ET. Probar las siguientes propiedades:

1. Si X es compacto, entonces es PK.
2. Si X es unión **disjunta** de subconjuntos abiertos y PK's, entonces X es PK.
3. Ya que estamos, mostrar que $\mathbb{R}^n$ es PK.

Asumamos ahora que X es PK. Se tiene que

4. Todo $F \subseteq X$ que sea **cerrado** queda PK con la inducida.
5. Si Y es otro espacio que es **compacto**, entonces $X \times Y$ es PK.
6. Puede pasar que $X \times X$ deje de ser PK.

Ejercicio 7.8.17. Sea (X, τ) un ET **normal** y sea $\sigma = \{U_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ un cubrimiento de X que es abierto y **LF**. Luego existe otro cubrimiento abierto $\{V_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ de X tal que todos los $\overline{V_i} \subseteq U_i$. Probar que el resultado es falso (en general) si no se pide que σ sea LF. ▲

Ejercicio 7.8.18. Sean X es un ET de Hausdorff e Y es un EM. Sea $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$. Probar que

1. Si $\mathcal{F}$ es EC y “puntualmente precompacta”, es decir que

la clausura de $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ es **compacta** en Y , para todo $x \in X$.

entonces $\mathcal{F}$ tiene τ_{UK} -clausura compacta dentro de $C(X, Y)$.

2. La recíproca vale siempre que X sea LKH.

Capítulo 8

Algunos ejemplos

8.1 Primeros ejemplos

8.1.1. Topología cofinita: Sea X un conjunto infinito. La topología cofinita en X es:

$$\tau_{CF}(X) = \{\emptyset\} \cup \{X \setminus V : V \in \mathcal{P}_F(X)\} = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ es finito}\}.$$

Es fácil ver que $\tau_{CF}(X)$ es una topología. Este ejemplo es un caso bastante patológico, que induce a pensar que los axiomas de la topología pueden ser demasiado débiles si uno no pide condiciones extra. Lo único bueno que tiene es que los puntos de X son cerrados.

Por lo tanto, una topología τ en un conjunto X es de tipo T_1 si y sólo si $\tau_{CF}(X) \subseteq \tau$. Sin embargo, es claro que $(X, \tau_{CF}(X))$ no es un espacio de Hausdorff, porque no tiene abiertos disjuntos (no vacíos).

En este espacio, muchas redes convergen a **todos** los puntos de X . Por ejemplo, asumamos que una red $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en X cumple que $\mathbb{I}$ es infinito sin último elemento, y que la función $\mathbf{x} : \mathbb{I} \rightarrow X$ es inyectiva. Luego, si $U \in \tau_{CF}(X)$, el conjunto $\{i \in \mathbb{I} : x_i \notin U\}$ es finito, por lo que $\mathbf{x} \xrightarrow{E} U$ (Ejercicio: probar eso usando que no hay último elemento). Y estamos hablando de todos los abiertos de X , o sea los entornos de todos los puntos. Si la red cumple algo menos: que las colas

$$C_i(\mathbf{x}) = \{x_j : j \geq i\} \quad \text{son infinitas para todo } i \in \mathbb{I},$$

entonces todo $x \in X$ es punto de acumulación de $\mathbf{x}$.

Observar que todo subconjunto $K \subseteq X$ es compacto, porque lo que le falte cubrir al “primer” abierto de cualquier cubrimiento, es un conjunto finito. Y esto se va cubriendo de a un abierto por elemento. Así vemos que hay compactos que no son Hausdorff. ▲

8.1.2. Ni las sucesiones ni los cofinales alcanzan: Llamemos $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, y sea $X = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Le daremos a X una topología τ bastante rara:

- Pongamos que todos los puntos de $X_0 \stackrel{\text{def}}{=} X \setminus \{(0,0)\}$ son abiertos.
- Los entornos $\mathcal{O}_\tau(0,0)$ del $(0,0)$ son los $U \subseteq X$ tales que $(0,0) \in U$ y además, salvo para finitos $m \in \mathbb{N}_0$, en la recta vertical $L_m = \{(m,n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ hay sólo finitos puntos fuera de U . O sea que existe

$$M_U \subseteq \mathbb{N}_0 \text{ tal que } |N_0 \setminus M_U| < \infty \text{ y } |L_m \cap (X \setminus U)| < \infty \text{ para todo } m \in M_U .$$

Otra manera de decirlo es que

“existen cofinitos $m \in \mathbb{N}_0$ tales que L_m corta a U en un conjunto cofinito” .

Es bien fácil ver que $\tau = \mathcal{P}(X_0) \cup \mathcal{O}_\tau(0,0)$ forma una topología para X . Notar que todos los abiertos raros $U \in \mathcal{O}_\tau(0,0)$ son clopen. Vale que

1. Todo punto de X es la intersección de numerables entornos clopen. Esto sale fácil.
2. (X, τ) es Hausdorff y Lindeloff. Más fácil.
3. El conjunto X_0 es abierto y denso en X . Fácil mal.
4. Luego hay redes en X_0 que convergen a $(0,0)$.
5. Sin embargo, ninguna **sucesión** $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X_0 lo hace.

En efecto, si existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $A_m = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in L_m\}$ es infinito, tomamos $U = \{(0,0)\} \cup X \setminus A_m$ y sonó. En caso contrario sacamos todos los x_n y queda un U de los buenos, porque faltan de a finitos por cada L_m . No va a quedar ninguno.

6. A pesar de lo que dice 1, X no puede ser de la clase N_1 , porque 5 no se lo permite.
7. Pero hay una sucesión $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X_0 tal que $(0,0)$ es un punto de acumulación de $\mathbf{x}$. En efecto, basta tomar una $\mathbf{x} : \mathbb{N} \rightarrow X_0$ que sea biyectiva. Como todos los $U \in \mathcal{O}_\tau(0,0)$ son infinitos, cortan a cualquier cola de $\mathbf{x}$ (porque los anteriores a un x_n son finitos).
8. En conclusión, existen subredes de la sucesión $\mathbf{x}$ de 7 que convergen a $(0,0)$. Pero por el punto 5, ninguna de ellas puede estar dada por un conjunto cofinal de $\mathbb{N}$ (o sea, una subsucesión). ▲

8.1.3. Topología del orden: Sea $(X, <)$ un conjunto dotado de un orden total y anti-simétrico (en el sentido de que $x \not< x$). Esto se define como un $\leq$ usual en $X \times X$, sacándole la diagonal. Definamos la topología del orden τ_o en X como aquella dada por la sub-base

$$\rho = \{(-\infty, a) : a \in X\} \cup \{(a, +\infty) : a \in X\} ,$$

donde $(-\infty, a) = \{x \in X : x < a\}$ y $(a, +\infty) = \{x \in X : x > a\}$. Probar que

1. El orden $<$ es τ_o -continuo: Dados $a < b$ en X , existen $U_a, U_b \in \tau_o$ tales que

$$U_a < U_b \quad , \quad \text{o sea que} \quad x \in U_a \text{ e } y \in U_b \implies x < y \quad .$$

2. Además, τ_o es la **menor** topología con la propiedad anterior.
3. Es falso, en general, que si $Y \subseteq X$, entonces la topología definida en Y por el orden del ambiente es lo mismo que la inducida a Y por la τ_o de X . ¿Cuál es más chica?
4. Si (X, τ_o) es conexo, entonces $<$ cumple el axioma del supremo (todo subconjunto acotado superiormente y no vacío tiene supremo).
5. La recíproca vale siempre que X no tenga “gaps”, o sea pares $a < b$ en X sin ningún punto intermedio.

8.1.4. La recta larga. Sea Ω_1 un conjunto no numerable al que, axiomas mediante, le damos un buen orden $\preceq$ (y el símbolo $\prec$ significará $\preceq$ pero $\neq$). Dado $w \in \Omega_1$, llamemos $M_w = \{v \in \Omega_1 : v \prec w\}$. Sea $A = \{w \in \Omega_1 : M_w \text{ es no numerable}\}$. Si $A = \emptyset$, ponemos $\Omega = \Omega_1$. Sino, denotamos por w_1 al primer elemento de A , y $\Omega = M_{w_1}$. Observar que cada $\omega \in \Omega$ produce un “siguiente” $\omega + 1 = \min\{v \in \Omega : \omega \prec v\}$. Pero no todos tienen anterior. El conjunto Ω es como **muchas** copias de $\mathbb{N}_0$ una después de la otra, y los principios de cada copia de $\mathbb{N}_0$ son los que no tienen anterior. Insistimos en que Ω es no numerable, pero para todo $\omega \in \Omega$, su M_ω es numerable.

Sea $L = \Omega \times [0, 1) \setminus (\omega_0, 0)$, donde ω_0 es el primer elemento de Ω . A este L le damos el orden lexicográfico: Primero comparamos las “partes enteras” en Ω , y si coinciden comparamos las “mantisas” en $[0, 1)$.

Observar que, si en vez de Ω poníamos a $\mathbb{N}_0$ con su buen orden usual, eso que armamos quedaba “igual” a $(0, +\infty)$ y por lo tanto sería hómoeo a $\mathbb{R}$. Por eso L se llama la “recta larga”. Va en singular porque $(\Omega, \preceq)$ es el primer ordinal no numerable.

La topología que usaremos para L es la del orden vista en 8.1.3. Localmente, esta recta es hómoeo con la recta usual, incluso en los principios de cada ciclo infinito en Ω (los $\omega \in \Omega$ que no tienen un elemento “anterior”). Más todavía, L es conexa.

Esto es medio dificultoso de probar, hacen falta inducciones transfinitas y mas yerbas conjuntísticas. La idea base es que cada ciclo $\mathbb{N}_0$ de Ω produce una semirrecta tipo $[0, +\infty)$, y estas se “pegan” entre sí como una semirrecta normal en $\mathbb{R}$. Esto sale porque la cantidad de cosas de Ω que hay antes de cualquier $\omega \in \Omega$ es numerable, por lo que en $\mathbb{R}$ hay lugar para armar y pegar los ciclos anteriores a ω . Así que creamos en ello, y pensemos que pudimos armar una recta sobre unos enteros que no son numerables.

Una cosa interesante de la recta larga es que, siendo localmente hómoeo a $\mathbb{R}$, L es LKH. Sin embargo, L no es PK.

8.1.5. La Viborita del topólogo: El conjunto en cuestión, que vive en $\mathbb{R}^2$, es la viborita

$$A = \left\{ \left(t, \sin \frac{1}{t} \right) : t \in (0, 1] \right\},$$

con la topología inducida por la usual de $\mathbb{R}^2$. Este espacio cumple las siguientes propiedades (aquellas no demostradas se dejan como ejercicio al lector):

1. Su clausura $V = \overline{A}$ consiste en agregarle el segmento vertical $B = \{(0, s) : s \in [-1, 1]\}$.
2. A es conexo (más aún, es ar-C), por lo que también $V = A \cup B$ es conexo.
3. Si embargo, $V = A \cup B$ **no** es ar-C: Supongamos que hubiera una curva continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \overline{A}$ con $\gamma(0) \in B$ y $\gamma(1) \in A$. Como B es cerrado, también lo es $\gamma^{-1}(B)$. Luego existe $c = \max\{t \in [a, b] : \gamma(t) \in B\} < 1$. Quedémonos con la curva empezando en c , y reparametricemos $\alpha : [0, 1] \rightarrow \overline{A}$ tal que $\alpha(0) \in B$, pero $\alpha(t) = (x(t), y(t)) \in A$, por lo que $y(t) = \sin \frac{1}{x(t)}$, para todo $t > 0$.

Obviamente α sigue siendo continua. Sin embargo, vamos a exhibir una sucesión $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ tal que $y(t_n) = (-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para ello observemos que $x(t)$ es una función continua, que sólo vale 0 en $t = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, elijamos un $u_n \in (0, x(\frac{1}{n}))$ tal que $\sin \frac{1}{u_n} = (-1)^n$. Luego, aplicando el teorema del valor medio (Cor. 3.2.3), podemos obtener un $t_n \in (0, \frac{1}{n})$ tal que $x(t_n) = u_n$. Esa era la sucesión anunciada, que dice que la curva γ (o α , que es lo mismo) no puede existir.

4. Las componentes arcoconexas de V son A y B .
5. A pesar de ser conexo, el espacio V no es localmente conexo (ni loc. ar-C) en los puntos de B , aunque sí lo es en los puntos de A . Lo que pasa es que **todos** los entornos pequeños de los puntos de B tienen infinitos “cachitos” de la curva A , lo que los hace muy desconexos. Con respecto al Teo. 3.4.4, si $x \in B$ y tomamos una $B(x, \varepsilon) \cap V$, casi todas sus componentes conexas son abiertas (los cachitos de la curva A), salvo una de ellas: $B(x, \varepsilon) \cap B$ no es abierta en V . ▲

En breve usaremos un viejo ejercicio. Lo reenunciamos ahora por comodidad del lector:

Ejercicio 8.1.6. Sea (X, τ) un ETy sea β una base de τ . Luego para probar que X es Lindeloff se puede asumir que el cubrimiento inicial cumple que $\sigma \subseteq \beta$, o sea trabajar con cubrimientos de abiertos de la base.

Sug: Dado un cubrimiento cualquiera σ , cubrir con los de la base que estén dentro de abiertos de σ y seguir adelante. ▲

8.2 $\mathbb{R}_s$ y la máquina de hacer contraejemplos

8.2.1. Topología semiabierta en $\mathbb{R}$: Consideremos en $\mathbb{R}$ la familia

$$\beta = \{ [a, b) : a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a < b \} .$$

La topología semiabierta en $\mathbb{R}$ se define como $\tau_s = \tau(\beta)$. El espacio $\mathbb{R}_s = (\mathbb{R}, \tau_s)$ provee de un verdadero potpurri de contraejemplos anunciados previamente. Para mostrarlo, tenemos que estudiar numerosas propiedades de $\mathbb{R}_s$, que detallamos a continuación:

1. β es **base** de τ_s (porque es cerrado por $\cap$'s finitas) y sus elementos son todos clopen.
2. Si τ es la topología usual de $\mathbb{R}$, entonces $\tau \subseteq \tau_s$. En efecto, dados $a < b$ en $\mathbb{R}$, entonces se tiene que $(a, b) = \bigcup_{t \in (a, b)} [t, b) \in \tau_s$.
3. $\mathbb{R}_s$ es separable, N_1 y Lindeloff, pero no es N_2 . En efecto:
 - (a) Separable: $\mathbb{Q}$ es tan denso en $\mathbb{R}_s$ como lo era en $\mathbb{R}$.
 - (b) $\mathbb{R}_s$ es N_1 : Si $a \in \mathbb{R}$, la familia $\{ [a, a + 1/n) : n \in \mathbb{N} \}$ es una base de $\mathcal{O}_{\mathbb{R}_s}(a)$.
 - (c) Lindeloff: Usando el Ejer. 8.1.6, podemos asumir que tenemos un cubrimiento $\sigma \subseteq \beta$. Definamos ahora el τ -abierto V que sería la unión de todos los intervalos de σ , pero sacándoles sus puntos iniciales (para que queden abiertos). O sea que

$$V = \bigcup \{ (a, b) : [a, b) \in \sigma \} .$$

Por un lado, su complemento $P = \mathbb{R} \setminus V$ tiene que ser numerable. En efecto, dado $a \in P$, debe existir un $b_a > a$ tal que $[a, b_a) \in \sigma$ (porque si $a \in [c, b) \in \sigma$, no puede pasar que $a \in (c, b) \subseteq V$, así que $a = c$). Entonces $\emptyset \neq (a, b_a) \subseteq V$. Eligiendo un $q_a \in (a, b_a) \cap \mathbb{Q}$ queda una flecha $P \ni a \mapsto q_a \in \mathbb{Q}$ que es inyectiva, por ser estrictamente creciente: Notar que $a < q_a \in V$ y entre a y q_a no hay nadie de P ($(a, q_a) \subseteq (a, b_a) \subseteq V$). Luego si $c \in P$ cumple $a < c \implies q_a < c < q_c$.

Por otro lado, V es unión de intervalos abiertos, de los cuales se puede extraer numerables que lo sigan cubriendo, porque $\mathbb{R}$ con τ es N_2 y eso lo hereda V , que por la Prop. 2.4.2 queda Lindeloff (con la inducida τ_V de la usual de $\mathbb{R}$, total los intervalos que cubrían V son τ_V -abiertos por ser τ -abiertos dentro de V).

Ahora la terminamos eligiendo uno cualquiera de σ para cada $a \in P$ y los numerables intervalos que cubrían V (agregándoles sus puntitos iniciales para que estén en σ) y así cubrimos todo $\mathbb{R}$ con numerables de σ .

- (d) $\mathbb{R}_s$ no es N_2 : Dada cualquier base ρ de τ_s , consideremos la familia

$$\rho_0 = \left\{ B \in \rho : B \in \rho \text{ es acotado inferiormente} \right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{A} = \left\{ \inf B : B \in \rho_0 \right\} .$$

Para cada $a \in \mathbb{R}$, la relación $a \in [a, a + 1)$ debe producir un $B \in \rho_0$ tal que $a \in B \subseteq [a, a + 1)$, o sea que $a = \inf B \in \mathcal{A}$. Luego la flecha $\rho_0 \ni B \mapsto \inf B \in \mathbb{R}$ es suryectiva. Mal podría ρ ser numerable si contiene al tal ρ_0 .

4. Por ser N_1 , en $\mathbb{R}_s$ alcanzan las sucesiones. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está en $\mathbb{R}$,

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\tau_s} x \iff x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{usual}} x \quad \text{y} \quad x_m \geq x \quad \text{salvo finitos} \quad m \in \mathbb{N},$$

dado que ambas cosas implican que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{E} [x, x + \varepsilon)$. De esto podemos deducir que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión **decreciente** que va al x .

4.5 $\mathbb{R}_s$ es **regular**. Es T_1 porque es trivialmente Hausdorff. Si me dan un $a \in U \in \tau_s$, basta encontrar un $b \in \mathbb{R}$ tal que $a \in [a, b) = \overline{[a, b)}^{\tau_s} \subseteq U$, que debe existir por que β era base. Así de facilonga la regularidad. Y esto más Lindeloff implica normal! (Prop. 2.4.10). El que no se crea mucho la prueba del item 3 (c), que lea lo que viene.

5. $\mathbb{R}_s$ es **normal**. Que es T_1 ya lo vimos. Dado un cerrado $F \subseteq U \in \tau_s$ definamos, para cada $x \in F$, el número $a_x = \sup\{b \geq x : [x, b] \subseteq F\}$. Luego el intervalo $[x, a_x) \subseteq F$ (incluso si es vacío o es una semirrecta). Tenemos dos posibilidades:

- (a) Sea F_1 el conjunto de los $x \in F$ tales que $a_x \notin F$ (incluso si $a_x = +\infty$). Los $x \in F_1$ cumplen que $a_x > x$, por lo que $x \in [x, a_x) \subseteq F$.
- (b) Sea F_2 el conjunto de los $x \in F$ tales que $a_x \in F$, por lo que $[x, a_x] \subseteq F$. Esto incluye los casos en que $a_x = x$, que pueden ser mayoritarios.

Cuando $x \in F_2$, como $a_x \in U$ existe un $\varepsilon_x > 0$ tal que $[a_x, a_x + \varepsilon_x) \subseteq U$. Sean

$$V_1 = \bigcup_{x \in F_1} [x, a_x) \subseteq F \subseteq U, \quad V_2 = \bigcup_{x \in F_2} [x, a_x + \varepsilon_x) \quad \text{y} \quad V = V_1 \cup V_2 \in \tau_s.$$

Es claro que $F \subseteq V \subseteq U$. Falta ver que $\overline{V} \subseteq U$. Sea $x \in \overline{V}$ y $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente en V tal que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ (existe por 4). Si $\mathbf{x} \xrightarrow{F} F$, sale que $x \in F$. Sino, asumamos que $\mathbf{x}$ vive en $V \setminus F \subseteq \bigcup_{z \in F_2} (a_z, a_z + \varepsilon_z)$. Si existe un $z \in F_2$ tal

que $\mathbf{x} \xrightarrow{E} (a_z, a_z + \varepsilon_z)$, entonces $x \in [a_z, a_z + \varepsilon_z) \subseteq V$. Sino, existe una subsucesión $\mathbf{y} = (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbf{x}$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$y_k \in (a_{z_k}, a_{z_k} + \varepsilon_{z_k}) \quad \text{para elementos } z_k \in F_2 \text{ tales que} \quad y_{k+1} \leq a_{z_k} < y_k.$$

Luego las sucesiones $\mathbf{a} = (a_{z_k})_{k \in \mathbb{N}}$ e $\mathbf{y}$ son ambas decrecientes y se entrelazan, por lo que $a_{z_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\tau_s} x$. Pero la sucesión $\mathbf{a}$ vive en F (los z_k estaban en F_2), así que $x \in F$. En resumen, $x \in V$, por lo que V era clopen. Esto no es muy sorprendente, ya que a F solo le agregamos cosas por la derecha.

6. En $\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s$ tomemos la topología producto $\tau_s \times \tau_s$ (que incluye a la usual). Consideremos al conjunto cerrado $\Delta = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s$ como un ET con la topología inducida por $\tau_s \times \tau_s$. Nos queda que Δ es un ET discreto. Por lo tanto

- (a) Vimos que $\mathbb{R}_s$ es separable, y el Ejer. 5.3.10 dice que $\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s$ también lo es. Sin embargo Δ , al ser discreto, no hereda la separabilidad (ver Prop. 2.4.15).
- (b) Veamos ahora que $\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s$ **no** es normal. En efecto, tomemos los cerrados disjuntos

$$\Delta_1 = \{ (x, -x) : x \in \mathbb{Q} \} \quad \text{y} \quad \Delta_2 = \{ (x, -x) : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \}.$$

El hecho de que son cerrados se prueba sin dificultad, usando que Δ es cerrado y discreto. Si $V \in \tau_s \times \tau_s$ contiene a Δ_2 , para cada $n \in \mathbb{N}$ llamemos

$$A_n = \{ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : [x, x + \frac{1}{n}) \times [-x, -x + \frac{1}{n}) \subseteq V \}.$$

Luego $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, por lo que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Por el Teorema de Baire 7.3.1

(a $\mathbb{Q}$ lo pensamos como $\aleph_0$ conjuntos de un elemento), eso implica que algún $\overline{A_n}$ debe tener interior (usual de $\mathbb{R}$), por lo que existe un $q \in \overline{A_n} \cap \mathbb{Q}$. Entonces es fácil ver que, para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene que $[q, q + \varepsilon) \times [-q, -q + \varepsilon) \cap V \neq \emptyset$ (basta tomar un $x \in A_n$ tal que $|x - q|^2 < 2 \min\{\varepsilon^2, n^{-2}\}$ y usar Pitágoras). Por ello no puede haber un entorno $U \in \tau_s \times \tau_s$ de Δ_1 que no corte a V .

7. El ítem 5 dice que $\mathbb{R}_s$ es normal, y por ello regular e incluso CR (por la Obs. 5.5.8). Estas propiedades suben a los productos (regularidad por la Prop. 5.3.6 y ser CR por el Cor. 6.5.4). Por ello vemos que $\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s$ es regular y CR.
8. En resumen, $\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s$ tiene las siguientes propiedades contraejemplares:
- (a) Es completamente regular pero anormal. Esto sólo ya es interesante (no teníamos un ejemplo de eso antes).
 - (b) Da un ejemplo de un producto de normales que es anormal (ver Prop. 5.3.6).
 - (c) Como si ésto fuera poco, también permite dar un ejemplo de que la normalidad no se hereda (ver Prop. 2.4.15). Para ello basta incrustarlo en una H -compactación (las tiene por ser CR, vía la Prop. 6.5.3). Luego su imagen seguirá siendo anormal, con la inducida de un ambiente que es compacto Hausdorff, y que por ello sí es normal.
 - (d) Y para completar la oferta, dijimos que $\mathbb{R}_s$ es Lindeloff, pero se puede ver que $\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s$ no lo es. Una manera de convencerse es porque es regular pero anormal, vía la Prop. 2.4.10. Pero hagamos una prueba directa que es más lindo: Tomemos el cubrimiento dado por un U que consiste de los puntos de $\mathbb{R}^2$ que están abajo de Δ (o sea los (x, y) tales que $x < -y$), y luego los abiertos $U_t = [t, +\infty) \times [-t, +\infty)$, $t \in \mathbb{R}$, que cubren Δ y lo que tiene arriba. Es fácil ver que sacando solo un abierto de esos se deja de cubrir $\mathbb{R}^2$. Así que minga Lindeloff.
 - (e) El bendito espacio $\mathbb{R}_s$ no es metrizable, porque si lo fuera también lo sería $\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s$, y eso lo obligaría a ser normal (o porque es separable pero no N_2). Lástima.
 - (f) Tampoco es LK, porque si lo fuera podríamos poner un $[a, b)$ adentro de un compacto. Como $[a, b)$ es cerrado, sería él mismo un compacto, pero es fácil ver que no lo es.

- (g) Sin embargo, como $\mathbb{R}_s$ es regular y Lindeloff, entonces es paracompacto (por 7.6.4), a pesar de no ser ni metrizable, ni localmente compacto, ni N_2 .
- (h) Encima, como $\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s$ es Hausdorff pero anormal, no puede ser paracompacto (por 7.6.4), aunque $\mathbb{R}_s$ lo sea.

Parte II

Teorías más específicas

Capítulo 9

Grupos topológicos

9.1 Definiciones y ejemplos

Un grupo topológico (se abrevia GT) es un par (G, τ) en que G es un grupo (a priori con notación multiplicativa y no abeliano) y τ es una topología en G que cumple ciertas condiciones de compatibilidad: Las siguientes dos funciones relacionadas con la estructura algebraica de G deben ser **continuas** (en $G \times G$ usamos la topología producto $\tau \times \tau$).

- La función “producto” $M : G \times G \rightarrow G$ dada por $M(g, h) = gh$, para $g, h \in G$.
- La inversión $\text{Inv} : G \rightarrow G$ dada por $\text{Inv}(g) = g^{-1}$, para $g \in G$.

Un ejercicio tradicional es verificar que las dos funciones anteriores quedan continuas si y sólo si la función $G \times G \ni (g, h) \mapsto gh^{-1} \in G$ es continua. Con estos supuestos, aparecen automáticamente un montón de homeomorfismos de G :

1. La inversión $G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$, cuya inversa (como función) es ella misma.
2. Fijando un $g \in G$ producimos dos “traslaciones” que son también hómoeos:

$$L_g \text{ y } R_g : G \rightarrow G \quad \text{dadas por} \quad L_g(h) = gh \quad \text{y} \quad R_g(h) = hg \quad \text{para} \quad h \in G.$$

Sus inversas están dadas por las traslaciones asociadas a g^{-1} (el inverso de g en G). La continuidad de las traslaciones sale porque la función $G \ni h \mapsto (g, h) \in G \times G$ (resp. $h \mapsto (h, g)$) es continua. Y luego se compone con M .

3. Las conjugaciones $G \ni h \mapsto ghg^{-1} \in G$. Observar que coinciden con $L_g \circ R_{g^{-1}}$.

Ejemplos 9.1.1. La mayoría de los grupos conocidos que tienen una topología usual resultan GT's. Daremos ahora una primera lista de ejemplos (las pruebas son ejercicios):

1. Cualquier grupo “discreto” (esto es poniéndole la topología discreta $\tau = \mathcal{P}(G)$). Esto se usa para los grupos finitos y algunos numerables como $\mathbb{Z}$ y sus potencias.
2. Los grupos aditivos $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ con las topologías usuales (de la métrica euclídea).

3. Los grupos multimplicativos $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, también con la euclídea.
4. Las matrices inversibles $Gl_n(\mathbb{R})$ y $Gl_n(\mathbb{C})$ con la topología usual de $\mathbb{C}^{n \times n}$, que coincide con la inducida por la “norma” matricial $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$. En todos estos grupos la operación es el producto de matrices. Junto con los finitos son los primeros ejemplos de GT’s no abelianos.
5. Sea (X, τ) un ET. Llamemos $H(X) = \{g \in C(X, X) : g \text{ es hómoeo}\}$, que es un grupo con la composición de funciones. Dotándolo de la topología inducida por cualquiera de las estudiadas en $C(X, X)$ (puntual, KA, uniforme o UK si X era métrico, ver Secciones 5.4 y 7.4), nos queda que $H(X)$ es un GT.
6. Dado K un ET compacto Hausdorff, consideremos el grupo $G(K) \subseteq C(K) = C(K, \mathbb{C})$ de funciones “inversibles”, o sea las que no se anulan. La operación puede ser tanto la suma en todo $C(K)$ como el producto en $G(K)$ (ambas operaciones se hacen en $\mathbb{C}$ después de evaluar). Tanto $(C(K), +)$ como $(G(K), \cdot)$ son GT’s con la métrica d_∞ de $C(K)$ (ver el último ítem del Ej. 7.1.21).
7. Todos los subgrupos de los anteriores, con la topología inducida. Entre ellos aparecen
 - (a) El círculo $S^1 \subseteq \mathbb{C}^*$ y sus potencias que son toros.
 - (b) El grupo $SLO_n(\mathbb{C}) \subseteq Gl_n(\mathbb{C})$ (las de determinante uno).
 - (c) $\mathcal{U}_n(\mathbb{C}) \subseteq Gl_n(\mathbb{C})$ (matrices unitarias) y $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (ortogonales).
 - (d) Las isometrías sobreyectivas de un EM.

Observar que algunos de estos grupos (los finitos, los toros, $\mathcal{U}_n$ y $\mathcal{O}_n$) son compactos. Todos ellos (salvo algunos $H(X)$ y sus isometrías) son métricos y LKH, menos los grupos $C(K)$ y $G(K)$ que son métricos pero no son LK a menos que K sea finito. ▲

9.2 Propiedades básicas

Sea (G, τ) un GT. En adelante llamaremos $e \in G$ a su neutro. Fijaremos a continuación otras notaciones propias de grupos: Dados $A, B \subseteq G$, llamaremos

- $A \cdot B = M(A \times B) = \{ab : a \in A \text{ y } b \in B\}$.
- Cuando $A = \{a\}$, escribiremos $aB = L_a(B) = \{ab : b \in B\}$. Idem con $Ba = R_a(B)$.
- $A^{-1} = \text{Inv}(A) = \{a^{-1} : a \in A\}$. Diremos que A es **simétrico** si $A = A^{-1}$.

Ahora haremos algunas reflexiones acerca de estos objetos:

- Observar que $A \cdot B = \bigcup_{a \in A} aB = \bigcup_{b \in B} Ab$.
- Por lo tanto si A como B son abiertos, también lo será $A \cdot B$.

- Además se ve que $A \subseteq A \cdot B$ siempre que $e \in B$.
- Por lo tanto, si $U \in \mathcal{O}^a(e)$, entonces $A \cdot U$ es un “entorno” del conjunto A .
- Con respecto a clausuras, se tiene que $\overline{A \cdot B} \subseteq \overline{A \cdot B}$. En efecto, esto sale fácil usando redes (y que M es continua).
- Para que valga la igualdad hay pedir cosas:

$$\text{Si } \overline{A} \text{ y } \overline{B} \text{ son compactos y } G \text{ es Hausdorff} \implies \overline{A \cdot B} = \overline{A} \cdot \overline{B}. \quad (9.1)$$

En efecto, en tal caso el producto $A \cdot B \subseteq \overline{A} \cdot \overline{B} = M(\overline{A} \times \overline{B})$, que queda compacto y, por la H, también cerrado.

Veremos a continuación una serie de propiedades que tienen las bases de entornos de puntos de un GT. Muchas veces estas permiten reproducir las técnicas usuales de “manipular” bolas y sus tamaños, típicas de los EM’s, en un contexto no necesariamente métrico.

Proposición 9.2.1. Sea (G, τ) un GT.

1. Si tenemos una base β_e de entornos del $e \in G$, entonces $\beta_a = a\beta_e = \{aU : U \in \beta_e\}$ es base de entornos de $a \in G$ para cualquier tal a .
2. Existen bases β_e de $\mathcal{O}(e)$ tales que todos sus elementos son simétricos.
3. Dado $U \in \mathcal{O}(e)$, existe otro $V \in \mathcal{O}^a(e)$ tal que $V \cdot V^{-1} \subseteq U$.
4. Idem con $W \cdot W \subseteq U$.

Demostración.

1. Se deduce de que L_a es un hómoio para cualquier $a \in G$.
2. Dada una base β_e de $\mathcal{O}(e)$, cambiarla por $\beta_e^s = \{U \cap U^{-1} : U \in \beta_e\}$. Como invertir era hómoio, los nuevos siguen siendo entornos y encima son más chicos, y simétricos.
3. Fijemos el $U \in \mathcal{O}(e)$. Como $G \times G \ni (a, b) \mapsto ab^{-1} \in G$ es continua, existe un entorno abierto básico $V_1 \times V_2$ de (e, e) en $G \times G$ (o sea que $V_1, V_2 \in \mathcal{O}^a(e)$) tal que $\{ab^{-1} : (a, b) \in V_1 \times V_2\} = V_1 \cdot V_2^{-1} \subseteq U$. Basta ahora tomar $V = V_1 \cap V_2$.
4. Sale usando la función $M(a, b) = ab$ o usando el ítem 3 + los entornos simétricos. ■

Estas propiedades especiales de los entornos permiten ver que en un GT las primeras clases de separación (las llamadas T_k) resultan equivalentes entre sí. La excepción es ser T_4 o normal, que sigue siendo más restrictiva que las demás.

Proposición 9.2.2. Sea (G, τ) un GT. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. G es Hausdorff (i.e. T_2).
2. $\bigcap \mathcal{O}(e) = \{e\}$ (i.e. G es T_1 , o que los puntos de G son cerrados).
3. G es T_0 (i.e. $\mathcal{O}(a) = \mathcal{O}(b) \implies a = b$).
4. $\{e\}$ es cerrado en G .

Demostración. Es obvio que $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$. Asumamos que G es T_0 y veremos que entonces G es Hausdorff. Para ello fijemos $a \neq b$ en G . Multiplicando por a^{-1} y usando que $L_{a^{-1}}$ es hómoeo, vemos que nos alcanzaría encontrar entornos disjuntos de e y cualquier otro punto (quedaría $a^{-1}b$, pero lo renombramos b para abreviar).

Asumamos primero que existe $U \in \mathcal{O}(e)$ tal que $b \notin U$. Por la Prop. 9.2.1 existe $V \in \mathcal{O}(e)$ tal que $V \cdot V^{-1} \subseteq U$. Tomemos ahora los abiertos $V \in \mathcal{O}(e)$ y $bV \in \mathcal{O}(b)$. Ellos son disjuntos, porque si $c \in V \cap bV$ entonces existiría un $d \in V$ tal que $c = bd$, por lo que llegaríamos a que $b = cd^{-1} \in V \cdot V^{-1} \subseteq U$. Como esto no vale, listo el pollo.

Si existe un $W \in \mathcal{O}(b)$ tal que $e \notin W$, tomamos $U = b^{-1}W$ y caemos en el caso anterior (entre e y b^{-1}). Tomando los entornos disjuntos $V \in \mathcal{O}(e)$ y $b^{-1}V$ como arriba, pero con un V simétrico, queda que $Vb \in \mathcal{O}(b)$ y $V \cap Vb = \emptyset$. Así que sale que si G es T_0 entonces es Hausdorff, por lo que $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3$.

Es claro que $2 \Rightarrow 4$. Pero usando traslaciones vemos que $4 \Rightarrow$ que todo punto es cerrado, que no es otra cosa que 2. ■

Ejercicio 9.2.3. Mostrar que un GT es discreto $\iff$ tiene algún punto que es abierto $\iff \{e\}$ es abierto. ▲

Observación 9.2.4. Hemos visto (Prop. 6.2.4) que en un espacio Hausdorff se llega a algoito menos que la normalidad: que compactos disjuntos tienen entornos disjuntos (finitas bolas de cada lado y sale). En los GT's (aún sin pedir Hausdorff) llegamos a algo mejor: ▲

Proposición 9.2.5. Sea (G, τ) un GT. Si $K, F \subseteq G$ son un compacto y un cerrado disjuntos, existe una abiertito $W \in \mathcal{O}(e)$ tal que los “entornos” abiertos $K \cdot W$ y $F \cdot W$ (de K y F) siguen siendo disjuntos. En particular, todo GT que es T_1 , ya con eso queda **regular**.

Demostración. Para cada $x \in K$ tomo $U_x \in \mathcal{O}(e)$ tal que $x \cdot U_x \cap F = \emptyset$. Por la Prop. 9.2.1 hay un $V_x \in \mathcal{O}(e)$ tal que $V_x \cdot V_x^{-1} \subseteq U_x$. Y un paso más, un $W_x \in \mathcal{O}(e)$ tal que $W_x \cdot W_x \subseteq V_x$. Como $K \subseteq \bigcup_{x \in K} x \cdot W_x$, nos quedamos con finitos tales que cubran a K . Finalmente, tomamos $W \in \mathcal{O}(e)$ la intersección de esos finitos W_x .

Si hubiera un $y \in K \cdot W \cap F \cdot W$, elegimos un $z \in W$ tal que $yz^{-1} \in F$ y un $v \in W$ tal que $a = yv^{-1} \in K$. Entonces $a = xw \in x \cdot W_x$ para alguno de los finitos de antes. Por ello,

$$F \ni yz^{-1} = avz^{-1} = x(wvz^{-1}) = x[(wv)(ze)^{-1}] \in x \cdot V_x \cdot V_x^{-1} \subseteq x \cdot U_x,$$

lo que es claramente ilegal. ■

El siguiente resultado es útil pero muy específico. Incluimos un sketch de la prueba sobre todo porque ilustra sobre algunas de las técnicas típicas de GT's.

Proposición 9.2.6. Sea (G, τ) un GT. Si G es LKH, entonces también es PKH.

Demostración. Sea U un entorno simétrico de e tal que $\overline{U}$ es compacto. Pongamos $U_2 = \overline{U} \cdot U$. Se define inductivamente $U_{k+1} = \overline{U_k} \cdot U$, para $k \in \mathbb{N}$. Sea $G_0 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \overline{U_k}$.

Por un lado, por la Ec. (9.1), cada $\overline{U_k} = \overline{U}^k$ que es compacto. Los U_k son abiertos, y cada $\overline{U_k} \subseteq U_{k+1}$. Luego $G_0 = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} U_m$ por lo que es abierto. Pero además, G_0 es subgrupo de G , porque $U_n \cdot U_m \subseteq U_{n+m}$ y porque U era simétrico, así que todos los U_m lo son.

Por el Cor. 7.1.11, nuestro G_0 es también LKH (porque es abierto), pero ahora sabemos que es σ -K. Aplicando 7.6.4 llegamos a que G_0 es PK. Pero como G_0 es subgrupo, nos queda que G es unión disjunta de coclases $g \cdot G_0$, que son todas homeomorfas a G_0 . Como una unión disjunta de abiertos PK's sigue siendo PK, terminamos con la porfía. ■

Con respecto a las clases de numerabilidad también pasan cosas buenas:

Proposición 9.2.7. Entre los GT's, se tiene que $N_1 + \text{separable} \implies N_2$. ■

En realidad pasa algo un poquito más general, que dejamos para divertimento del lector:

Ejercicio 9.2.8. Sea (G, τ) un GT. Si $D \subseteq G$ es un denso y β_e una base de $\mathcal{O}^a(e)$, entonces

$$\beta = \{d \cdot U : d \in D \quad \text{y} \quad U \in \beta_e\}$$

es una base de τ (aunque no es cerrado por intersecciones finitas). ▲

9.3 Pseudonormas y grupos topológicos

En esta sección estudiaremos la noción de pseudonormas en grupos. Luego de mostrar varias de sus propiedades, llegaremos a los dos resultados principales al respecto: Que toda topología que haga de un grupo G un GT de tipo T_1 está generada por familias de pseudonormas, y que por ello tales GT's deben ser completamente regulares (i.e. de Tychonoff), lo que mejora lo visto en la Prop. 9.2.5.

9.3.1 Definiciones y propiedades

Empecemos con las definiciones básicas:

Definición 9.3.1. Sean G un grupo (con neutro e) y $N : G \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ una función. Diremos que N es una **pseudonorma** (se abrevia SN) en G si N cumple que

$$N(e) = 0 \quad \text{y} \quad N(xy^{-1}) \leq N(x) + N(y) . \quad (9.2)$$

para todo par $x, y \in G$. ▲

Lema 9.3.2. Sean G un grupo y N una SN en G . Luego N cumple que, dados $x, y \in G$,

$$N(x^{-1}) = N(x) , \quad N(xy) \leq N(x) + N(y) \quad \text{y} \quad |N(x) - N(y)| \leq N(x^{-1}y) . \quad (9.3)$$

Observar que las primeras dos (junto con $N(e) = 0$) implican que N era SN.

Proof. Fijemos un $x \in G$. En principio notemos que la Ec. (9.2) aplicada al par e y x muestra que $N(x^{-1}) \leq N(x)$. Aplicando eso a x^{-1} nos queda la igualdad $N(x^{-1}) = N(x)$. Esto además muestra la desigualdad del medio, a partir de la Ec. (9.2).

Sean ahora $x, y \in G$. Por un lado, y usando las cosas que acabamos de ver, tenemos que

$$N(y) = N(y^{-1}) = N((y^{-1}x)x^{-1}) \leq N(y^{-1}x) + N(x) = N(x^{-1}y) + N(x) .$$

Por otro lado,

$$N(x) = N(x^{-1}) \leq N(x^{-1}y) + N(y^{-1}) = N(x^{-1}y) + N(y) .$$

Todo eso claramente implica que $|N(x) - N(y)| \leq N(x^{-1}y)$. ■

Observación 9.3.3. Sea G un grupo. Dados $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y M, N dos pseudonormas en G , entonces unas cuentas directas muestran que tanto

$$kN \quad \text{como} \quad N + M \quad \text{son también SN's en } G.$$

También vale que se pueden trincar las SN's, en el sentido de que

$$N_1 : G \rightarrow [0, 1] \quad \text{dada por} \quad N_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{N(x), 1\} , \quad x \in G \quad (9.4)$$

es otra SN. En efecto, si $N(xy^{-1}) > 1 \xrightarrow{(9.2)} N(x) + N(y) > 1$. Luego en ese caso

$$N_1(xy^{-1}) = 1 \leq N_1(x) + N_1(y) \quad (\text{si alguna cambia ya le alcanza, si no también}) .$$

Y si $N(xy^{-1}) \leq 1$, sale argumentando igual. Obvio que $N_1(e) = 0$. ▲

Proposición 9.3.4. Sea $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos. Si M es una SN en H entonces $N = M \circ f$ es una SN en G .

Proof. Se deduce directamente de la Ec. (9.2) usando que

$$f(e_G) = e_H \quad \text{y que} \quad f(xy^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} \quad \text{para todo par} \quad x, y \in G . \quad \text{■}$$

9.3.2 Hay muchas pseudonormas

Veremos en esta sección lo que anunciamos antes: que toda topología que haga de un grupo G un GT, en realidad está generada por una familia adecuada de SN's en G . Y con eso saldrá que si G era Hausdorff (o incluso T_1), entonces más que regular, como decía la Prop. 9.2.5, queda **completamente** regular, o sea de Tychonoff.

Proposición 9.3.5. Sea G un grupo. Si $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ es **acotada**, entonces la función

$$N : G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{dada por} \quad N(x) = \sup_{y \in G} |f(yx) - f(y)| \quad \text{para cada} \quad x \in G$$

es una pseudonorma en G .

Proof. El hecho de que $N(e) = 0$ es inmediato. Sean ahora $x, y \in G$. Luego

$$\begin{aligned} N(xy^{-1}) &= \sup_{z \in G} |f(zxy^{-1}) - f(z)| \\ &\leq \sup_{z \in G} |f(zxy^{-1}) - f(zx)| + \sup_{z \in G} |f(zx) - f(z)| \\ &= \sup_{t \in G} |f(ty^{-1}) - f(t)| + N(x) = N(y^{-1}) + N(x). \end{aligned}$$

Por otro lado, reemplazando en algún momento $z = yx^{-1}$, vemos que

$$N(x^{-1}) = \sup_{y \in G} |f(yx^{-1}) - f(y)| = \sup_{z \in G} |f(z) - f(zx)| = N(x).$$

Entonces $N(xy^{-1}) \leq N(y^{-1}) + N(x)$ y N es una pseudonorma en G . ■

Definición 9.3.6. Sean G un GT y N una SN en G (por fin empezamos con la topología). La N será una SN continua si $N \in C(G, \mathbb{R})$ (es continua como función).

Ejercicio 9.3.7. Sea (G, τ) un GT. Decidir lo siguiente: Dada una $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y **continua**, entonces ¿será también continua la N resultante de la Prop. 9.3.5? ▲

Proposición 9.3.8. Sean G un grupo y N una SN en G y fijemos un $g \in G$. Luego

$$N_g : G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{dada por} \quad N_g(x) = N(g^{-1}xg) \quad \text{para cada} \quad x \in G$$

es otra SN en G . Además, si G era un GT, N_g es continua siempre que N lo sea.

Proof. Llamemos $c_g : G \rightarrow G$ al automorfismo (que es también un hómo) dado por $c_g(x) = g x g^{-1}$, para $x \in G$. Luego N_g no es otra cosa que $N \circ c_g$. Ahora usar la Prop. 9.3.4. ■

Definición 9.3.9. Sean G un grupo y N una SN en G . Diremos que N es **invariante** si $N = N_g$ (la de la Prop. 9.3.8) para todo $g \in G$. Es fácil ver que uno puede postular esta definición equivalente para ser una SN invariante:

$$N(yx) = N(xy) \quad \text{para todo par} \quad x, y \in G. \quad \text{▲}$$

Ejercicio 9.3.10. Sean G un grupo y N una SN en G . Probar que

1. El “núcleo” $K_N = \{x \in G : N(x) = 0\}$ es subgrupo de G .
2. Si N era invariante, también lo es K_N , ahora como subgrupo.
3. En tal caso se puede bajar N al grupo cociente G/K_N y queda una SN. ▲

9.3.3 SN's continuas en GT's

En esta sección asumiremos que el grupo G es un GT con una topología τ . Construiremos y analizaremos las propiedades de las SN's continuas en ese contexto.

Proposición 9.3.11. Sean G un GT y N una SN en G . Luego N es continua si y sólo si

para todo $\varepsilon > 0$ existe $U \in \mathcal{O}(e)$ tal que $U \subseteq B_N(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in G : N(x) < \varepsilon\}$.

En particular, N es continua $\iff N$ es continua en el neutro e .

Proof. Si N es continua, dado un $\varepsilon > 0$ existe un $U \in \mathcal{O}^a(e)$ tal que

$$x \in U \implies N(x) = |N(x)| = |N(x) - N(e)| < \varepsilon \implies x \in B_N(\varepsilon).$$

Si para todo $\varepsilon > 0$ existe $U_\varepsilon \in \mathcal{O}^a(e)$ tal que $U_\varepsilon \subseteq B_N(\varepsilon)$, cada $y \in G$ cumple que

$$z \in yU_\varepsilon \implies y^{-1}z \in U_\varepsilon \xrightarrow{(9.3)} |N(y) - N(z)| \leq N(y^{-1}z) < \varepsilon.$$

Como los conjuntos $yU_\varepsilon \in \mathcal{O}^a(y)$, llegamos a que N es continua en todo $y \in G$. ■

Repitamos la nueva notación: las “bolas en el origen”

$$B_N(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in G : N(x) < \varepsilon\} \quad \text{y} \quad C_N(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in G : N(x) \leq \varepsilon\}.$$

Teorema 9.3.12. Sea G un GT. Si $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es una sucesión decreciente tal que

$$U_n \in \mathcal{O}(e) \quad , \quad U_n = U_n^{-1} \quad \text{y} \quad U_{n+1}^2 \subseteq U_n \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (9.5)$$

Luego se puede definir una SN continua $N : G \longrightarrow [0, 1]$ tal que

$$B_N\left(\frac{1}{2^n}\right) \subseteq U_n \subseteq C_N\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (9.6)$$

Además, si los U_n cumplen que

$$y^{-1}U_n y \subseteq U_n \quad \text{para todo} \quad y \in G \quad \text{y todo} \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

entonces a N se la puede definir como una SN invariante.

Proof. Construiremos por inducción una familia **creciente** de entornos $U(r) \in \mathcal{O}^a(e)$ para cada $r \in D = \{\frac{j}{2^n} : n \in \mathbb{N} \text{ y } 0 < j \leq 2^n\}$, los diádicos del $(0, 1]$: Empecemos poniendo

$$U(1) = U_0 \quad \text{y} \quad U\left(\frac{1}{2}\right) = U_1, \quad \text{después} \quad U\left(\frac{1}{4}\right) = U_2 \quad \text{y} \quad U\left(\frac{3}{4}\right) = U\left(\frac{1}{2}\right) U_2.$$

Si asumimos ya definidos todos los $U(\frac{j}{2^n})$ para $0 < j \leq 2^n$ para un cierto n (como de hecho ya pasa hasta $n = 2$) seguimos hacia abajo poniendo

$$U\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = U_{n+1} \quad \text{y} \quad U\left(\frac{2m+1}{2^{n+1}}\right) = U\left(\frac{m}{2^n}\right) U_{n+1} \quad \text{para} \quad 1 \leq m < 2^n. \quad (9.7)$$

Definimos sólo para numeradores impares para que no se repitan fracciones. Además, si $m > 2^n$ tomamos $U\left(\frac{m}{2^n}\right) = G$. Luego tenemos definido $U(r)$ para todo $r \in D_\infty$, los diádicos de $(0, \infty)$. Falta ver que es creciente. Para ello fijaremos un nivel $\frac{1}{2^n}$ y veremos que los $U(r)$ crecen en “esa fila”. En efecto, probaremos por inducción sobre n que

$$U\left(\frac{m}{2^n}\right) U\left(\frac{1}{2^n}\right) \subseteq U\left(\frac{m+1}{2^n}\right) \quad \text{para todo} \quad m \in \mathbb{N}. \quad (9.8)$$

Los casos $m \geq 2^n$ son obvios. Empecemos con $n = 1$. Nos queda un solo caso ($m = 1$):

$$U\left(\frac{m}{2}\right) U\left(\frac{1}{2}\right) = U_1 U_1 \subseteq U_0 = U(1) = U\left(\frac{m+1}{2}\right)$$

Supongamos que la relación vale para $p < n$. Probaremos que vale para n . Dos casos:

1. Si m es par, o sea que $m = 2k < 2^n$. Por la relaciones vistas tenemos que

$$U\left(\frac{m}{2^n}\right) U\left(\frac{1}{2^n}\right) \stackrel{(9.7)}{=} U\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) U_n \stackrel{(9.7)}{=} U\left(\frac{2k+1}{2^n}\right) = U\left(\frac{m+1}{2^n}\right).$$

Notar que no importa si k es par o impar, y que acá (9.8) vale con igualdad.

2. Si m es impar, o sea que $m = 2k + 1 < 2^n$. Tenemos que

$$\begin{aligned} U\left(\frac{m}{2^n}\right) U\left(\frac{1}{2^n}\right) &= U\left(\frac{2k+1}{2^n}\right) U_n \stackrel{(9.7)}{=} U\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) U_n U_n \\ &\stackrel{(9.5)}{\subseteq} U\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) U_{n-1} \\ &\stackrel{(9.7)}{=} U\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) U\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &\stackrel{\text{HI}}{\subseteq} U\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right) = U\left(\frac{m+1}{2^n}\right). \end{aligned}$$

En esta parte es donde se usa la hipótesis de que $U_n U_n \subseteq U_{n-1}$.

Por lo tanto la Ec. (9.8) está demostrada. Y con ella sale que los $U(r)$ son crecientes. En efecto si $r, s \in D$ cumplen que $0 < r < s$, podemos suponer que $r = \frac{k}{2^n}$ y $s = \frac{l}{2^n}$ con $k < l$. Pero la Ec. (9.8) (mírenla de nuevo) dice que vamos creciendo (con el m) si el divisor 2^n esta fijo (porque $e \in U(\frac{1}{2^n})$). Así que $r < s \implies U(r) \subseteq U(s)$. Definamos ahora la función

$$f : G \rightarrow [0, 1] \quad \text{dada por} \quad f(x) = \inf \{r \in D_\infty : x \in U(r)\} \quad \text{para} \quad x \in G .$$

Bien onda Uryson. Aclaremos que $f(G) \subseteq [0, 1]$ (y esta definida para todo $x \in G$) porque $U(r) = G$ si $r > 1$. Por otro lado, por la monotonía (y la def) tenemos las implicaciones

$$f(x) < r \implies x \in U(r) \implies f(x) \leq r . \quad (9.9)$$

En particular $f(e) = 0$, porque $e \in U\left(\frac{1}{2^n}\right)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como f es acotada, la Prop. 9.3.5 nos provee de una SN en G vía la f : Como el diámetro del $[0, 1] = 1$, queda

$$N : G \rightarrow [0, 1] \quad \text{dada por} \quad N(x) = \sup_{y \in G} |f(yx) - f(y)| \quad \text{para cada} \quad x \in G . \quad (9.10)$$

Encima de ser una SN, esta N cumple la Ec. (9.6) que buscábamos, es decir que

$$B_N\left(\frac{1}{2^n}\right) \stackrel{B}{\subseteq} U_n \stackrel{C}{\subseteq} C_N\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}_0 .$$

En efecto, para ver la $\stackrel{B}{\subseteq}$ notemos que si $x \in B_N\left(\frac{1}{2^n}\right)$ entonces incluso si $n = 0$,

$$f(x) = |f(ex) - f(e)| \leq N(x) < \frac{1}{2^n} \stackrel{(9.9)}{\implies} x \in U\left(\frac{1}{2^n}\right) = U_n , \quad \text{i.e.} \quad B_N\left(\frac{1}{2^n}\right) \subseteq U_n .$$

Vamos ahora por la $\stackrel{C}{\subseteq}$. Dado cualquier $y \in G$, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{k-1}{2^n} \leq f(y) < \frac{k}{2^n} \quad \text{y, en particular, ese} \quad y \in U\left(\frac{k}{2^n}\right) .$$

Si tomamos ahora un $x \in U_n$ (podemos suponer que $n \geq 2$ porque $C_N(1) = G$), sale que

$$yx \in U\left(\frac{k}{2^n}\right) U_n \quad \text{y también} \quad yx^{-1} \in U\left(\frac{k}{2^n}\right) U_n^{-1} = U\left(\frac{k}{2^n}\right) U_n .$$

La Ec. (9.8) decía que $U\left(\frac{k}{2^n}\right) U_n = U\left(\frac{k}{2^n}\right) U\left(\frac{1}{2^n}\right) \subseteq U\left(\frac{k+1}{2^n}\right)$. Por esto y lo de arriba, deducimos que $f(xy) \leq \frac{k+1}{2^n}$ y también $f(yx^{-1}) \leq \frac{k+1}{2^n}$. Si seguimos otro poco,

$$f(yx) - f(y) \leq \frac{k+1}{2^n} - \frac{k-1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{and} \quad f(yx^{-1}) - f(y) \leq \frac{k+1}{2^n} - \frac{k-1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} .$$

Notar que ahora estas dos desigualdades valen **para todo** $y \in G$ (el k que traía nuestro y ya no figura). En particular, sustituyendo y por yx en la de la derecha queda que también

$$f(y) - f(yx) \leq \frac{1}{2^{n-1}} \implies |f(yx) - f(y)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad , \quad \text{para todo } y \in G .$$

Es decir que cualquier $x \in U_n$ debe cumplir que

$$N(x) = \sup_{y \in G} |f(yx) - f(y)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \implies U_n \subseteq C_N \left(\frac{1}{2^{n-1}} \right) .$$

Lista la prueba de la Ec. (9.6), que de paso (el $\subseteq$ de recién) asegura que N es continua (vía la Prop. 9.3.11, por suerte no se usa el Ejer. 9.3.7). En efecto, dado $\varepsilon > 0$, si

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon \implies U_n \subseteq C_N \left(\frac{1}{2^{n-1}} \right) \subseteq B_N(\varepsilon) .$$

El tema de la invariancia cuando los U_n cumplían que $y^{-1}U_n y \subseteq U_n$ para todo $y \in G$ sale usando que todas las contrucciones anteriores cumplen eso mismo (los $U(r)$, la f y por ende también la N). Lo dejamos como ejercicio para el lector invariante. ■

Teorema 9.3.13. Sea (G, τ) un GT. Entonces, para cualquier abierto $U \in \mathcal{O}_\tau^a(e)$ existe una SN continua N en G tal que $B_N(1) \subseteq U$.

Proof. Construiremos una sucesión $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ en $\mathcal{O}_\tau^a(e)$ como la de la Ec. (9.5), a saber

$$U_n \in \mathcal{O}(e) \quad , \quad U_n = U_n^{-1} \quad \text{y} \quad U_{n+1}^2 \subseteq U_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0 .$$

Empezamos con $U_0 = U \cap U^{-1}$. Seguimos inductivamente. Si ya tengo el U_n , definimos el $U_{n+1} \in \mathcal{O}_\tau^a(e)$ pidiéndole que cumpla la condición de ser simétrico y de que $U_{n+1}^2 \subseteq U_n$. Tal cosa seguro existe por la Prop. 9.2.1.

Teniendo esta sucesión $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ podemos aplicarle el Teo. 9.3.12 que nos provee de una SN continua $N : G \rightarrow [0, 1]$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}_0$ cumplía que

$$B_N \left(\frac{1}{2^n} \right) \subseteq U_n \subseteq C_N \left(\frac{1}{2^{n-1}} \right) .$$

En particular, para $n = 0$ tenemos $B_N(1) = B_N \left(\frac{1}{2^0} \right) \subseteq U_0 \subseteq U$. ■

Corolario 9.3.14. La topología de cualquier grupo topológico (G, τ) se puede generar mediante una familia de pseudonormas continuas.

Proof. Tomemos una base β de $\mathcal{O}_\tau^a(e)$. Para cada $U \in \beta$ tomamos la SN continua N_U del Teo. 9.3.13. Como son todas continuas, todas las bolas $B_{N_U}(\varepsilon) \in \tau$ y forman otra base de $\mathcal{O}_\tau^a(e)$. Trasladándolas forman una base de τ . ■

Finalmente, llegamos al resultado esperado:

Teorema 9.3.15. Todo grupo topológico Hausdorff es completamente regular.

Proof. Sea (G, τ) un GT de clase T_1 . Dados $x \in G$ y $U \in \mathcal{O}^a(x)$, entonces $x^{-1}U \in \mathcal{O}^a(e)$. Por el Teo. 9.3.13 existe una SN continua N en G tal que $B_N(1) \subseteq x^{-1}U$. Si la truncamos con 1 como en la Ec. (9.4) cumple lo mismo. En realidad no hacía falta truncar, porque por construcción la N de la Ec. (9.10) ya lo estaba. Y es la que se usa en el Teo. 9.3.13. Sea

$$f : G \longrightarrow [0, 1] \quad \text{dada por} \quad f(y) = N(x^{-1}y) \quad \text{para cada} \quad y \in G .$$

Es claro que f es continua (porque N lo es), y además ella cumple que

$$f(x) = N(x^{-1}x) = N(e) = 0 .$$

Por otro lado, dado cualquier $y \in G$, tendremos que si

$$f(y) = N(x^{-1}y) < 1 \implies x^{-1}y \in B_N(1) \subseteq x^{-1}U \implies y \in U .$$

En otras palabras vemos que $\{y \in G : f(y) < 1\} \subseteq U$. Repasando la Def. 5.5.5, es claro que esto alcanza para que G sea completamente regular (porque $f \equiv 1$ en $F = G \setminus U$). ■

9.4 Subgrupos y cocientes

Ya lo dijimos pero va de nuevo: Si G es un GT, todo subgrupo con la topología inducida es también GT. Daremos a continuación un listado de propiedades de dichos subgrupos, pero ahora pensados en tanto subconjuntos de G :

9.4.1. Sea (G, τ) un GT y sea $H \subseteq G$ un subgrupo.

1. H es abierto $\iff H^\circ \neq \emptyset$. Esto sale fácil trasladando.
2. Si H es abierto, entonces es cerrado. Esto sale porque $F = G \setminus H = F \cdot H$.
3. $S^1 \subseteq \mathbb{C}^*$ es cerrado pero no abierto. Idem $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ y $\mathcal{U}_n \subseteq Gl_n(\mathbb{C})$.
4. En cambio $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ no es ni lo uno ni lo otro, aunque es denso.
5. La τ -clausura $\overline{H}$ es también subgrupo de G . Sale con redes, usando que las operaciones M e Inv son continuas en G .
6. Si H es invariante ($gHg^{-1} = H$ para todo $g \in G$), también lo es $\overline{H}$. Otra vez redes. ▲

Repasemos las definiciones del “cociente” G/H : Dado $a \in G$, el conjunto $\bar{a} = aH$ es la coclase a izquierda de a por H . Estas son las clases de la relación de equivalencia $a \sim_H b$ si $b^{-1}a \in H$. Y se toma la función cociente

$$P_H : G \rightarrow G/H = \{aH : a \in G\} \quad \text{dada por} \quad P_H(a) = aH \quad \text{para } a \in G .$$

Si dotamos a G/H de la topología cociente por P_H , resulta que P_H es una función **abierto**. Esto sale porque el saturado de un $U \subseteq G$ no es ni más ni menos que $U \cdot H$. Lo mismo pasa con las coclases a derecha Ha y su espacio cociente. Sugerimos repasar la Prop. 5.3.23 y su entorno.

En el caso de que H sea invariante, entonces G/H es un grupo, con la operación dada por

$$(aH) \cdot (bH) = (ab)H \quad \text{para } a, b \in G,$$

que está bien definida. Este nuevo grupo cumple las siguientes propiedades:

Proposición 9.4.2. Sea (G, τ) un GT y sea $H \subseteq G$ un subgrupo invariante. Consideremos en el grupo G/H la topología cociente de $P_H : G \rightarrow G/H$. Entonces

1. P_H es un epimorfismo, continuo y abierto.
2. G/H es él también un GT.
3. G/H hereda de G el ser N_1 o N_2 .
4. Si G es LK, también lo será G/H .
5. G/H es regular (T_1 o Hausdorff) $\iff H$ era cerrado en G .
6. G/H es discreto $\iff H$ era abierto en G .

Demostración. Las propiedades de P_H ya las habíamos visto. La prueba de que G/H es un GT es algo engorrosa. Como es importante la hacemos: Dados $a, b \in G$, tomamos un entorno abierto W de

$$P_H(a)P_H(b)^{-1} = aH \cdot (bH)^{-1} = aH \cdot b^{-1}H = ab^{-1}H \quad \text{en } G/H.$$

Entonces sale que $U = P_H^{-1}(W) \in \mathcal{O}_G^a(ab^{-1})$. Como G es un GT, existen $V_a \in \mathcal{O}_G^a(a)$ y $V_b \in \mathcal{O}_G^a(b)$ tales que $V_a \cdot V_b^{-1} \subseteq U$. Luego tomamos el entorno $P_H(V_a) \times P_H(V_b)$ de (aH, bH) en $G/H \times G/H$, que cae adentro de W al multiplicar el primero por el inverso del segundo. Juntando todo esto, sale que G/H es un GT.

Sabemos que regularidad de un GT equivale a tener puntos cerrados. Eso da 5, porque alguien es cerrado abajo si y sólo si P_H^{-1} de él es cerrado en G . Y para cualquier $a \in G$ tenemos que $P_H^{-1}(\{P_H(a)\}) = aH \subseteq G$. La prueba de 6 es exactamente igual (puntos abiertos). Las de 3 y 4 son bien fáciles. Salen por las propiedades antes mencionadas de P_H . Recordar que, por ser continua, P_H manda compactos en compactos. ■

Definición 9.4.3. Sean G_1 y G_2 dos GT's.

1. Llamaremos $MC(G_1, G_2) = C(G_1, G_2) \cap \text{Hom}(G_1, G_2)$, los morfismos continuos.
2. Si una f es un iso y está en $MC(G_1, G_2)$, nadie nos garantiza que f^{-1} sea continuo. A los que sí les pasa eso los llamaremos **iso-hómeos**.

3. De existir un iso-hómeo entre ellos, diremos que $G_1 \cong G_2$. ▲

Ejercicio 9.4.4. Sean G_1 y G_2 dos GT's. Probar que

1. Si $f : G_1 \rightarrow G_2$ es un morfismo de grupos, entonces

$$f \in MC(G_1, G_2) \iff f \text{ es continuo en } e \in G_1.$$

2. Dado $f \in MC(G_1, G_2)$ con $\ker f = H$, se tiene que

(a) El bajado $\tilde{f} : G_1/H \rightarrow G_2$ vive en $MC(G_1/H, G_2)$

(b) Si f es epi, entonces $\tilde{f}$ es un iso-hómeo $\iff f$ es **abierto**. ▲

9.4.5. Sean G_1 y G_2 dos GT's. Se dice que ellos son **localmente isomorfos** si existen sendos entornos abiertos U_1 y U_2 de sus neutros y una función $f : U_1 \rightarrow U_2$ tales que f es un hómoe, y que tanto f como f^{-1} respetan productos, siempre que se queden en sus dominios. Tales funciones f se llaman iso-hómeos locales.

Si G es un GT y $H \subseteq G$ es un subgrupo invariante y **discreto**, hay un entorno U de e en G tal que $P_H|_U : U \rightarrow P_H(U)$ es un iso-hómeo local, por lo que G y G/H son localmente isomorfos. En efecto, basta tomar un

$$U \in \mathcal{O}_G^a(e) \text{ tal que } V = U^{-1} \cdot U \text{ cumpla que } V \cap H = \{e\}.$$

En tal caso $P_H|_U$ satisface todo lo que le pedimos. Es inyectiva porque si x e y van a lo mismo entonces $x^{-1}y \in H$. Es sobre por definición. Y como U es abierto, también la restricción $P_H|_U$ es continua y abierta, por lo que es un hómoe. Observar que el codominio $P_H(U)$ es un abierto en el cociente G/H que contiene a su neutro. La parte algebraica es trivial. ▲

En el caso en que $G = \mathbb{R}$ y $H = \mathbb{Z}$, vemos que $\mathbb{R}$ y $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ quedan localmente isomorfos. Recordar que la topología cociente de S^1 coincide con la que hereda de $\mathbb{C}^*$.

Veamos algunas cosas más, relativas a las componentes conexas de un GT:

Ejercicio 9.4.6. Sea (G, τ) un GT. Probar que

1. La componente conexa G_e de e en G es un **subgrupo invariante y cerrado** de G .
2. Para otro $a \in G$, su componente conexa es $G_a = a \cdot G_e$. En otras palabras, se tiene que las relaciones $\overset{con}{\sim}$ y $\sim_{G_e}$ coinciden.
3. La componente ar-C de e es un subgrupo invariante (por ahí no es cerrado).
4. La componente G_e es abierta $\iff G$ es localmente conexo (remember Teo. 3.4.4).
5. En tal caso G/G_e es un GT discreto y además G es localmente isomorfo a G_e . ▲

Observación 9.4.7. Si G es un grupo finito, la única topología sería que lo hace GT es la discreta. Pero como poder, se pueden poner otras. En tal caso no queda T_1 , porque un ET finito de clase T_1 debe ser discreto (el complemento de un punto es unión finita de cerrados). Es fácil ver que, en esta situación, el menor abierto que contiene al neutro es $\bigcap \mathcal{O}^a(e)$ y que este coincide con la componente G_e . Dividiendo por esos elementos “indistinguibles” (desde el punto de vista topológico) queda G/G_e , que ahora sí es un GT discreto. ▲

9.5 Grupos LKH abelianos

Sea (G, τ) un GT. Diremos que G es LKHA si es localmente compacto, abeliano y Hausdorff. Estos grupos son muy interesantes, porque en ellos se puede desarrollar el análisis armónico (transformadas de Fourier, convoluciones, etc). Esto se debe a que tienen una (única) medida boreliana regular que es invariante por traslaciones (i.e. $m(g \cdot A) = m(A)$ para todo boreliano $A \subseteq G$ y todo $g \in G$), que se llama la medida de Haar del grupo. Esta medida también existe en el caso LKH no abeliano, pero son dos (una a derecha y otra a izquierda) que no siempre coinciden, lo que complica y enriquece notablemente el asunto.

Lamentablemente toda la teoría armónica antes mencionada (aún la abeliana) excede los objetivos de este texto. Sin embargo, hay cosas más elementales que podemos estudiar de estos grupos, que están orientadas en aquella dirección. Particularmente, describiremos al grupo dual de un LKHA, y veremos algunas de sus propiedades.

9.5.1 El grupo dual

Definición 9.5.1. Sea (G, τ) un GT que es LKHA.

- El **dual** de G es el grupo

$$\Gamma = \{ \gamma \in C(G, S^1) : \gamma \text{ es morfismo algebraico} \},$$

con el producto punto a punto y dotado de la topología inducida por la τ_{KA} (compacto abierta, ver Sección 7.4) del ambiente $C(G, S^1)$ o de $C_b(G)$.

- A los elementos $\gamma \in \Gamma$ se los llama **los caracteres** del grupo G .
- Cuando haga falta, se aclarará que $\Gamma = \Gamma_G$ o $\Gamma = \widehat{G}$. ▲

Observación 9.5.2. Veamos algunas propiedades del grupo Γ que se prueban al toque:

1. Γ es cerrado en $C(G, S^1)$, porque alcanza con la convergencia puntual para que un límite de morfismos sea morfismo.
2. La Prop. 7.4.9 aclara que la convergencia entre caracteres, con la topología τ_{KA} de Γ , es la convergencia uniforme en compactos (de G) (i.e., $\tau_{KA} = \tau_{UK}$ en Γ).
3. Además, como G es LKH, la Prop. 7.4.4 nos dice que Γ es también τ_{UK} -cerrado en todo $(S^1)^G$, o sea que un τ_{UK} -límite de caracteres es siempre un caracter. ▲

Usaremos una notación ad hoc para la dualidad entre G y Γ : Dados $g \in G$ y $\gamma \in \Gamma$, denotaremos por $\langle g, \gamma \rangle = \gamma(g)$. A partir de las definiciones, es fácil ver que la flecha

$$G \times \Gamma \ni (g, \gamma) \longmapsto \langle g, \gamma \rangle = \gamma(g) \in S^1$$

es continua en cada coordenada. Más aún, la Prop. 7.4.10 nos asegura que es continua como función de dos variables (porque consiste en evaluar, G es LKH y en $\Gamma \subseteq C(G, S^1)$ usamos la τ_{KA} como se pide allí). De hecho, esta es una de las razones claves por las cuales la teoría de dualidad se hace en grupos LKH.

Antes de dar los ejemplos más interesantes necesitamos probar algunas propiedades generales del grupo dual de un LKHA. Está por ver que Γ es un GT con su τ_{KA} . Ahora veremos no sólo eso, sino que además Γ es otro grupo LKHA. Sin usar análisis armónico nos llevará bastante laburo, pero viene bien porque sirve para ver cómo se pueden usar las propiedades específicas de los abiertos en un GT:

Teorema 9.5.3. Sea (G, τ) un GT que es LKHA. Entonces su dual

$$(\Gamma, \tau_{KA}) \text{ es un GT, y es también LKHA .}$$

Demostración. La flecha $\gamma \mapsto \gamma^{-1} = \bar{\gamma}$ es continua porque la conjugación, pensada de S^1 en S^1 , es isométrica. Sean ahora $\gamma, \rho \in \Gamma$. Fijados $\varepsilon > 0$ y $K \subseteq G$ compacto, definamos

$$W = \left\{ \alpha \in \Gamma : |\alpha(g) - \gamma(g)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall g \in K \right\} \times \left\{ \beta \in \Gamma : |\beta(g) - \rho(g)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall g \in K \right\},$$

que es un entorno abierto de (γ, ρ) en la topología $\tau_{UK} \times \tau_{UK}$ de $\Gamma \times \Gamma$. Dado un par $(\alpha, \beta) \in W$ y un $g \in K$ tenemos que

$$\begin{aligned} |\alpha(g)\beta(g) - \gamma(g)\rho(g)| &\leq |\alpha(g)\beta(g) - \gamma(g)\beta(g)| + |\gamma(g)\beta(g) - \gamma(g)\rho(g)| \\ &= |\alpha(g) - \gamma(g)| + |\beta(g) - \rho(g)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto la “multiplicación” manda a W adentro del entorno básico

$$\{\delta \in \Gamma : |\delta(g) - \gamma(g)\rho(g)| < \varepsilon, \forall g \in K\}$$

alrededor de $\gamma \cdot \rho$. Con esto vimos que multiplicar es continua, por lo que Γ es un GT. El grupo Γ es abeliano porque S^1 lo es. Y es Hausdorff por lo mismo.

Dado un compacto $K \subseteq G$ y un $a \in \mathbb{R}_+$, llamemos

$$F_{K,a} = \{\gamma \in \Gamma : |\gamma(g) - 1| \leq a, \text{ para todo } g \in K\} \quad (9.11)$$

Para ver que Γ es LK, basta mostrar que si tomamos un compacto $K_0 \in \mathcal{O}_G(e)$, entonces el conjunto $F_{K_0,1}$ es un entorno **compacto** de $\gamma \equiv 1$ (ya vimos que Γ es un GT). Que es entorno es inmediato. También sale fácil (por la Ec. (9.11), tomando redes) que es cerrado en $C(G)$ con la $\tau_{UK} = \tau_{KA}$. La compacidad nos llevará algo de trabajo. Veamos que

Claim: $F_{K_0,1}$ es equicontinuo en todo punto de G .

En efecto, si $A = \{w \in S^1 : |w - 1| \leq 1\}$, se tiene que existe una constante $c \in (0, 1)$ tal que $|w - 1| \leq c|w^2 - 1|$ para todo $w \in A$. Esto sale con $c = 2/3$ porque si $w \in A$, entonces

$$|w^2 - 1| = |w + 1| \cdot |w - 1| \geq \operatorname{Re}(w + 1) \cdot |w - 1| \geq \frac{3}{2} |w - 1|.$$

Se usa que $\min\{\operatorname{Re} w : w \in A\} = 1/2$, lo que se ve al dibujar a A . La óptima es $c = 1/\sqrt{3}$. Por otro lado, usando la Prop. 9.2.1 (y que G es LKH) sabemos que existe un compacto

$$K_1 \in \mathcal{O}_G(e) \quad \text{tal que} \quad e \in K_1 \subseteq K_1 \cdot K_1 \subseteq K_0.$$

Luego, si $g \in K_1$ y $\gamma \in F_{K_0,1}$, tenemos que $|\gamma(g) - 1| \leq c|\gamma(g)^2 - 1| = c|\gamma(g^2) - 1| \leq c$, por lo que $F_{K_0,1} \subseteq F_{K_1,c}$. Tomemos ahora otro compacto

$$K_2 \in \mathcal{O}_G(e) \quad \text{tal que} \quad e \in K_2 \subseteq K_2 \cdot K_2 \subseteq K_1 \subseteq K_0.$$

Por la misma cuenta sale que $F_{K_0,1} \subseteq F_{K_1,c} \subseteq F_{K_2,c^2}$. Así siguiendo, podemos ver que para todo $\varepsilon > 0$ existe un entorno compacto K_ε del e tal que $F_{K_0,1} \subseteq F_{K_\varepsilon,\varepsilon}$.

Fijados $g \in G$ y $\varepsilon > 0$, encontramos el entorno $g \cdot K_\varepsilon \in \mathcal{O}_G(g)$ que cumple lo que uno pide:

$$\text{si } h \in g \cdot K_\varepsilon, \text{ entonces } |\gamma(h) - \gamma(g)| = |\gamma(g^{-1}h) - 1| \leq \varepsilon \text{ para toda } \gamma \in F_{K_0,1},$$

porque $g^{-1}h \in K_\varepsilon$ y $F_{K_0,1} \subseteq F_{K_\varepsilon,\varepsilon}$. Listo el Claim. ▲

Así que tenemos que $F_{K_0,1}$ es EC, cerrado y acotado (toma valores en S^1). Por el Teorema de Arzela-Áscoli generalizado 7.7.6, podemos afirmar que $F_{K_0,1}$ es compacto dentro de $C(G)$ con la τ_{UK} , que allí coincide con la τ_{KA} . Como Γ es un GT, trasladando $F_{K_0,1}$ a otros puntos vemos que Γ era LK. ■

Proposición 9.5.4. Sea (G, τ) un GT que es LKHA. Sea Γ su dual. Entonces

1. Si G es discreto $\implies \Gamma$ es compacto.
2. Si G es compacto $\implies \Gamma$ es discreto.

Demostración. Si G es discreto, la convergencia en Γ no es otra que la puntual, porque los únicos compactos de G son los finitos. En otras palabras, la topología de Γ es la inducida por la topología **producto** de la inclusión $\Gamma \subseteq (S^1)^G$. Como vimos antes, el producto $(S^1)^G$ es compacto. Como Γ era cerrado allí, queda que él también es compacto.

Si G es compacto, queda que la convergencia de los caracteres de Γ es la uniforme tutti, o sea que la topología de Γ es la inducida por la métrica $d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty$ de $C(G, S^1)$. Esto hace que Γ sea discreto, siempre que creamos en lo siguiente:

Claim: Dados $v, w \in S^1$, si se tiene que $|v^n - w^n| < 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces $v = w$.

En efecto, si llamamos $a = w^{-1}v$, tenemos que $|a^n - 1| = |w^n(a^n - 1)| = |v^n - w^n| < 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Pero a^n va “dando vueltas” por S^1 , así que si $a \neq 1$ tiene que haber un n tal que $|a^n - 1| \geq 1$ (basta que quede con parte real negativa). ▲

Volviendo a lo nuestro, si ahora tenemos un par $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ tales que $\|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty < 1$, entonces el Claim asegura que $\gamma_1 = \gamma_2$, porque dado cualquier $g \in G$ vale que

$$|\gamma_1(g)^n - \gamma_2(g)^n| = |\gamma_1(g^n) - \gamma_2(g^n)| \leq \|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty < 1 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z},$$

así que $\gamma_1(g) = \gamma_2(g)$. En resumen, probamos que Γ es discreto. ■

9.5.2 Los tres ejemplos más famosos

Entre GT's usaremos el signo $\cong$ para denotar que hay un isomorfismo que es a la vez un hómoeo entre los grupos en cuestión. En los tres ejemplos que siguen exhibiremos estos iso-hómeos entre un grupo dual y otro grupo conocido. La parte “iso” (el que la flecha sea morfismo de grupos) será trivial en los tres casos, y no la demostraremos.

1. Si tomamos $G = \mathbb{Z}$ con la discreta, entonces queda que $\widehat{\mathbb{Z}} \cong S^1$, vía el iso-hómeo

$$S^1 \ni w \mapsto \gamma_w \in \widehat{\mathbb{Z}}, \quad \text{dado por } \gamma_w(n) = w^n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

cuya inversa está dada por $\widehat{\mathbb{Z}} \ni \gamma \mapsto w = \gamma(1) \in S^1$. Esto sale porque 1 es un generador de $\mathbb{Z}$, y porque $\mathbb{Z}$ es discreto, así que cualquier morfismo $\gamma : \mathbb{Z} \rightarrow S^1$ es continuo. La topología de $\widehat{\mathbb{Z}}$ es la usual de S^1 , porque para que los γ 's converjan, alcanza con que lo hagan evaluados en el $1 \in \mathbb{Z}$. Observar que $\langle n, w \rangle = w^n$.

2. Si ahora $G = S^1$, como uno sospecharía queda que $\widehat{S^1} \cong \mathbb{Z}$. El iso-hómeo es

$$\mathbb{Z} \ni n \mapsto \gamma_n \in \widehat{S^1}, \quad \text{dado por } \gamma_n(w) = w^n, \quad w \in S^1,$$

así que ahora $\langle w, n \rangle = w^n$ de nuevo. La idea de la prueba es usar que el subgrupo de todas las raíces de la unidad

$$G_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n = \{e^{i 2\pi q} : q \in \mathbb{Q}\} \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

es denso en S^1 y coincide con el conjunto de elementos de S^1 que tienen orden finito (la torsión). Esto hace que $\gamma(G_\infty) \subseteq G_\infty$ para todo $\gamma \in \widehat{S^1}$. Luego cada $\gamma|_{G_\infty}$ se levanta a un morfismo (de grupos aditivos) de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ que manda $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ (repasar un poco de álgebra). Como estos están caracterizados por su valor en 1, no queda otra que “multiplicar” por algún $n \in \mathbb{Z}$. Finalmente, la densidad hace que la restricción de γ a G_∞ caracterice a γ . El hecho de que $\widehat{S^1}$ sea discreto se deduce de que S^1 es compacto, como vimos hace poquito (en realidad, el Claim de allí era esto).

3. Si $G = \mathbb{R}$, queda que también $\widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$, vía el iso-hómeo

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma_t \in \widehat{\mathbb{R}}, \quad \text{dado por } \gamma_t(x) = e^{i 2\pi t \cdot x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

el de la transformada de Fourier usual. La prueba de que esto es un hómoio (entre $\widehat{\mathbb{R}}$ y $\mathbb{R}$ con su topología usual) es bastante más complicado que los casos anteriores: Dada $\gamma \in \widehat{\mathbb{R}}$, como $\gamma(0) = 1$ y γ es continua, existe un $a > 0$ tal que

$$\alpha = \int_0^a \gamma(t) dt \neq 0.$$

Usando que $\gamma(x+t) = \gamma(x)\gamma(t)$ para todo par $x, t \in \mathbb{R}$ ($\star$), sale que

$$\alpha \gamma(x) = \gamma(x) \int_0^a \gamma(t) dt = \int_0^a \gamma(x+t) dt = \int_x^{x+a} \gamma(t) dt.$$

Como γ es continua, la integral de la derecha es derivable (respecto de x). Así que γ lo es. Derivando la expresión ($\star$) respecto de t (con x fijo), queda la ecuación diferencial

$$\gamma'(x) = z \gamma(x), \quad \text{donde} \quad z = \gamma'(0) \in \mathbb{C}.$$

Usando que $\gamma(0) = 1$ y que γ es acotada, resulta de algún curso de ecuaciones que $\gamma(x) = e^{z \cdot x}$ y que z es imaginario puro, por lo que podemos escribir que $z = i 2\pi t$ para algún $t \in \mathbb{R}$. Llegamos a que $\gamma = \gamma_t$ y nuestra flecha es sobre. Que es inyectiva es fácil. Con respecto a las topologías, observemos que los abiertos

$$B_{\varepsilon, n} = \{ \gamma_t \in \widehat{\mathbb{R}} : |\gamma_t(s) - 1| < \varepsilon \text{ siempre que } |s| \leq n \}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 < \varepsilon < 2,$$

forman una base de $\mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{R}}}(1)$. Pero es fácil ver que $\gamma_t \in B_{\varepsilon, n} \iff \pi n |t| < \arcsen \frac{\varepsilon}{2}$ (si no le parece tan fácil, haga un dibujo). Como las bases de entornos se trasladan de los dos lados, esto muestra que la flecha $t \mapsto \gamma_t$ es un hómoio. ▲

9.5.3 Algunas cosas más

9.5.5 (Dual del cociente). Sea (G, τ) un GT que es LKHA, y sea H un subgrupo de G (que es automáticamente invariante). Hemos visto que entonces G/H es un GT y es LKA. Para que sea Hausdorff se necesita que H sea **cerrado**. En este caso, nos interesa calcular su dual $\widehat{G/H}$. Veremos que es un subgrupo de $\widehat{G}$ que ahora definimos. Es el **anulador** de H ,

$$A(H) = \{ \gamma \in \widehat{G} : H \subseteq \ker \gamma \}, \quad \text{que es un subgrupo cerrado de } \widehat{G}.$$

Si $P_H : G \rightarrow G/H$ es la de siempre, la aplicación $\widehat{G/H} \ni \rho \mapsto \rho \circ P_H \in A(H)$ es el iso-hómoio que anunciamos. Su inversa está dada por la flecha $A(H) \ni \gamma \mapsto \bar{\gamma} \in \widehat{G/H}$, donde $\bar{\gamma}$ es el “bajado” al cociente de γ , que existe porque $H \subseteq \ker \gamma$. La Prop. 5.3.16 nos asegura que $\bar{\gamma}$ es continuo. Las cuestiones topológicas salen bien, y las dejamos como ejercicio. Sugerimos repasar el Ejer. 7.1.20 para “levantar” compactos de G/H . ▲

9.5.6 (Potpurri de teoremas sin pruebas). Si uno observa atentamente, las hipótesis generales de que G sea LKHA solo se usaron fuertemente al probar que Γ es LK y que es cerrado en $(S^1)^G$. Son además esenciales para que valgan varios teoremas importantes

que nos están faltando, sobre todo el hecho de que Γ tenga siempre “suficientes” elementos. Lamentablemente las pruebas de esos teoremas necesitan un montón de teoría armónica y de álgebras de Banach que no estamos dispuestos a desarrollar aquí. Como solución de compromiso, enunciaremos varios resultados que redondean la cosa, pero sin agregar demostraciones:

Sean G un grupo LKHA y Γ su dual.

- Γ separa puntos de G , o sea que siempre hay bastantes caracteres.
- **Dualidad de Pontryagin:** Sea ahora $\widehat{\Gamma}$ el dual de Γ . Luego vale que la flecha

$$G \ni g \mapsto \hat{g} \in \widehat{\Gamma} \quad \text{dada por} \quad \hat{g}(\gamma) = \gamma(g) \quad \text{para} \quad \gamma \in \Gamma, \quad (9.12)$$

que manda a G “dentro” de $\widehat{\Gamma}$, es un iso-hómeo. O sea que el dual de Γ es justo G .

Para esto faltan varias cosas: que esté bien definida (o sea que $\hat{g} \in \widehat{\Gamma}$, esta sale), que sea inyectiva (usa que Γ separa puntos), suryectiva (esta es complicada) y hómeo (no tanto). Lo único fácil es que es un morfismo.

- Todo grupo LKHA era entonces el dual de alguien, y vale la Prop. 9.5.4 al revés.
- Si $H \subseteq G$ es un subgrupo cerrado, vale que el doble anulador $A(A(H)) = H$ vía la flecha de (9.12), y por lo tanto, que $\widehat{H} \cong \Gamma/A(H)$. ▲

Para quien sepa del tema, damos un esbozo de por qué lado va la cosa: Si G es LKHA, existe su medida de Haar, y se considera el álgebra de Banach conmutativa $L^1(G)$, con el producto de convolución, todo respecto de la medida de Haar. Luego se prueba que los caracteres de ésta álgebra se identifican con los del grupo (o sea nuestro Γ), mediante la flecha

$$\Gamma \ni \gamma \mapsto \left[L^1(G) \ni f \mapsto \hat{f}(\gamma) = \int_G f(x) \overline{\langle x, \gamma \rangle} dx \right] \in M_{L^1(G)}.$$

Estos quedan caracteres de $L^1(G)$ porque la transformada de Fourier cambia convolución por producto. Y son todos. Después se muestra que nuestra τ_{UK} en Γ viaja justo a la topología de Gelfand de los caracteres de $L^1(G)$ (la que heredan de la w^* del dual de $L^1(G)$ como espacio de Banach). Como la de Gelfand es LK, eso muestra de una que Γ es LK. Además, allí se puede usar que los caracteres de $L^1(G)$ separan f 's de $L^1(G)$, con el curro de los ideales maximales y Zorn. Y de eso se puede deducir que Γ separa puntos de G .

La prueba de la dualidad Pontryagin usa muchas más cosas: transformada inversa, Bochner, Plancherel y la mar en coche. Recomendamos el libro de W. Rudin [6] para estudiar a fondo esta teoría. Obviamente también el del mismísimo L. S. Pontryagin [5].

9.5.4 Compactación de Bohr

Sea (G, τ) un GT que es LKHA. Tomemos su dual Γ y llamemos Γ_d al mismo Γ pero pensado con la topología discreta, que también lo hace GT y LKHA.

Luego Γ_d tiene un grupo dual $\mathcal{B}(G)$ que, amén de ser un GT abeliano y Hausdorff, es compacto por la Prop. 9.5.4. Por otra parte, podemos mandar a G dentro de $\mathcal{B}(G)$ usando la Ec. (9.12) que reescribimos: Sea $F : G \rightarrow \mathcal{B}(G)$ el morfismo definido por

$$G \ni g \xrightarrow{F} F(g) = \hat{g} \in \mathcal{B}(G) \quad \text{dado por} \quad \hat{g}(\gamma) = \langle g, \gamma \rangle = \gamma(g) \quad \text{para} \quad \gamma \in \Gamma_d. \quad (9.13)$$

A continuación mostraremos las propiedades de esta flecha, pero basándonos en los resultados “divulgados” en la sección anterior.

Teorema 9.5.7. Sea (G, τ) un GT que es LKHA. Luego el la función $F : G \rightarrow \mathcal{B}(G)$ definida en (9.13) cumple las siguientes propiedades:

1. Es un monomorfismo.
2. Es continua.
3. La imagen $F(G)$ es densa en $\mathcal{B}(G)$.

Esto dice que G se puede “modelar” dentro del compacto $\mathcal{B}(G)$ y que los caracteres continuos de Γ son densos en los algebraicos. Sin embargo, F no es en general un embedding.

Demostración. El hecho de que F sea morfismo es de verificación directa. Es inyectiva porque Γ separa puntos de G . Es continua porque la convergencia en $\mathcal{B}(G)$ es la puntual (porque Γ_d es discreto). Y como los $\gamma \in \Gamma$ son continuos en G , tenemos que

$$g_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} g \quad (\text{en } G) \implies \hat{g}_i(\gamma) = \gamma(g_i) \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} \gamma(g) = \hat{g}(\gamma) \quad \text{para cada} \quad \gamma \in \Gamma.$$

Salió que F es continua. Sea $H = \overline{F(G)}$, que es un subgrupo de $\mathcal{B}(G)$. Si no fuera todo, el cociente $\mathcal{B}(G)/H$ sería un GT compacto Hausdorff abeliano no trivial. Dado un

$$\rho \in \mathcal{B}(G) \setminus H, \quad \text{o sea tal que} \quad \rho \cdot H \neq e \cdot H \quad \text{en} \quad \mathcal{B}(G)/H,$$

existiría un caracter continuo φ de $\mathcal{B}(G)/H$ tal que $\varphi(\rho \cdot H) \neq 1$. Ahora bien, la composición $\varphi \circ P_H$ resulta ser un caracter continuo en $\mathcal{B}(G)$. Por la Dualidad de Pontryagin, $\varphi \circ P_H = \hat{\gamma}$ para cierto $\gamma \in \Gamma_d = \Gamma$, y γ no sería constante porque φ no lo era y P_H es epi.

Sin embargo, $\hat{\gamma}(H) \equiv 1$, por lo que $\hat{\gamma}(F(G)) \equiv 1$. Luego $\hat{\gamma}(F(g)) = \hat{\gamma}(\hat{g}) = \hat{g}(\gamma) = \gamma(g) = 1$ para todo $g \in G$. Esta absurdidad provino de suponer que $\overline{F(G)}$ no era todo $\mathcal{B}(G)$. ■

Observación 9.5.8. Usamos la palabra “compactación” para la de Bhor porque en general no es una compactificación en el sentido de los capítulos anteriores, ya que no es un embedding. Y uno no puede esperar que lo sea, porque si G es un GT que es LKH (y no compacto), es imposible encontrar un GT compacto Hausdorff K_G y un **morfismo** $F : G \rightarrow K_G$ que sea una H -compactificación. Esto es así porque, como G es LKH, su imagen sería **abierto** en K_G (se usa el Cor. 7.1.13). Pero un subgrupo abierto es cerrado y no puede ser denso.

Recordar que, si tomamos $G = \mathbb{R}$, la compactificación de Alexandrov (un punto) de $\mathbb{R}$ da justo S^1 , un excelente GT compacto y Hausdorff. Pero lamentablemente ninguna de las flechas que incrustan densamente a $\mathbb{R}$ en S^1 puede ser morfismo. ▲

9.6 Ejercicios

Ejercicio 9.6.1. Probar que todos los grupos de los Ejemplos 9.1.1 son GT's y verificar las propiedades allí mencionadas.

Ejercicio 9.6.2. Mostrar que un GT es discreto $\iff$ tiene algún punto que es abierto $\iff \{e\}$ es abierto.

Ejercicio 9.6.3. Sea (G, τ) un GT. Si $D \subseteq G$ es un denso y β_e una base de $\mathcal{O}^a(e)$, entonces

$$\beta = \{d \cdot U : d \in D \text{ y } U \in \beta_e\}$$

es una base de τ (aunque no es cerrado por intersecciones finitas).

Ejercicio 9.6.4. Sea (G, τ) un GT. Decidir lo siguiente: Dada una $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y **continua**, entonces ¿será también continua la N resultante de la Prop. 9.3.5?

Ejercicio 9.6.5. Sean G un grupo y N una SN en G . Probar que

1. El “núcleo” $K_N = \{x \in G : N(x) = 0\}$ es subgrupo de G .
2. Si N era invariante, también lo es K_N , ahora como subgrupo.
3. En tal caso se puede bajar N al grupo cociente G/K_N y queda una SN.

Ejercicio 9.6.6. Sean G_1 y G_2 dos GT's. Probar que

1. Si $f : G_1 \rightarrow G_2$ es un morfismo de grupos, entonces

$$f \in MC(G_1, G_2) \iff f \text{ es continuo en } e \in G_1.$$

2. Dado $f \in MC(G_1, G_2)$ con $\ker f = H$, se tiene que

- (a) El bajado $\tilde{f} : G_1/H \rightarrow G_2$ vive en $MC(G_1/H, G_2)$
- (b) Si f es epi, entonces $\tilde{f}$ es un iso-hómeo $\iff f$ es **abierto**.

Ejercicio 9.6.7. Sea (G, τ) un GT. Probar que

1. La componente conexa G_e de e en G es un **subgrupo invariante y cerrado** de G .
2. Para otro $a \in G$, su componente conexa es $G_a = a \cdot G_e$. En otras palabras, se tiene que las relaciones de equivalencia $\overset{con}{\sim}$ y $\sim_{G_e}$ coinciden.
3. La componente ar-C de e es un subgrupo invariante (por ahí no es cerrado).
4. La componente G_e es abierta $\iff G$ es localmente conexo (remember Teo. 3.4.4).
5. En tal caso G/G_e es un GT discreto y además G es localmente isomorfo a G_e .

Ejercicios nuevos

Sea (G, τ) un GT y sea $f \in C(G, \mathbb{C})$. Aunque G no sea métrico, podemos definir una noción de continuidad uniforme para f . Ella es G -uniformemente continua si, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\text{existe un } U \in \mathcal{O}^a(e) \text{ tal que } h^{-1}g \in U \implies |f(g) - f(h)| < \varepsilon.$$

Ejercicio 9.6.8. Sea (G, τ) un GT. Probar que

1. Si G era métrico, las dos nociones de continuidad uniforme pueden no coincidir.
2. Si G es LKH, entonces toda función $f \in C_0(G)$ es G -uniformemente continua.

Capítulo 10

Espacios vectoriales

10.1 EVT's

Llamemos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Un **espacio vectorial topológico** (EVT) es un espacio topológico (E, τ) en el que E es un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, y la topología τ es de Hausdorff y cumple que las operaciones vectoriales

$$E \times E \ni (x, y) \mapsto x + y \in E \quad \text{y} \quad \mathbb{C} \times E \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda x \in E \quad (10.1)$$

son continuas, cuando en $E \times E$ y en $\mathbb{C} \times E$ se usan las topologías producto. En particular esto hace que, para cada $x \in E$ fijo, las aplicaciones $T_x : E \rightarrow E$ dada por $T_x(y) = x + y$

$$\text{y} \quad M_x : \mathbb{C} \rightarrow E \quad \text{dada por} \quad M_x(\lambda) = \lambda x \quad (10.2)$$

sean continuas. Luego E es en particular un GT (invertir con $\lambda = -1$). Ya habíamos visto entonces que las traslaciones T_x son hómoeos, con inversa T_{-x} . Esto dice que, fijado un $x \in E$, podemos calcular siempre los entornos de x como

$$\mathcal{O}_\tau(x) = x + \mathcal{O}_\tau(0) := \{x + U = T_x(U) : U \in \mathcal{O}_\tau(0)\}.$$

O sea que para dar una topología de EVT, basta con conocer una base (o sub-base) de entornos del cero de E .

Como al introducir los ET's generales, en este caso también veremos en principio los ejemplos dados por una métrica. En el contexto de espacios vectoriales, interesan particularmente las métricas d que cumplen dos condiciones de compatibilidad con la estructura: que d sea invariante por traslaciones (i.e. $d(x + z, y + z) = d(x, y)$) y que sea homogénea (i.e. $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$). Estas métricas se definen a través de la noción de **norma** en el espacio vectorial.

10.1.1. Fijemos un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial E . Diremos que una función $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ es

1. Una **norma**, si cumple que

- (a) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (\alpha \in \mathbb{K}, x \in E)$.
- (b) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (x, y \in E)$.
- (c) Dado $x \in E$, se tiene que $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

La métrica resultante se define como $d(x, y) = \|x - y\|$, para $x, y \in E$. El par $(E, \|\cdot\|)$ pasa a llamarse un espacio normado. Y se llamará **espacio de Banach** si E resulta completo con la métrica d .

- 2. Si $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, denotaremos por $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ a su bola cerrada de radio uno.
- 3. $\|\cdot\|$ es una **seminorma**, si cumple (a) y (b) pero no necesariamente (c).
- 4. Una función $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ se llama **sublineal** si cumple la desigualdad triangular (simil (b) de arriba) y una versión débil de (a):

$$q(\lambda x) = \lambda q(x) \quad (\text{sin módulo}) \quad , \quad \text{para todo } x \in E \text{ y todo } \lambda \in \mathbb{R}_+ . \quad \blacktriangle$$

Vimos que una sola norma produce una estructura métrica en E . Una seminorma no alcanza (la d asociada es solo un pseudodistancia, como la $\|\cdot\|_p$ antes de cocientar a L^p). Sin embargo, es muy común construir topologías en espacios vectoriales usando familias de muchas seminormas (dejamos para este caso general el ver que dan EVT's). Como se pide Hausdorff, hagamos una definición:

Definición 10.1.2. Sea E un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial.

- 1. Una familia $\mathcal{F}$ de seminormas en E se llama **separadora** si para cada par de puntos $x \neq y$ de E existe $p \in \mathcal{F}$ tal que $p(x - y) \neq 0$. Esto implica que la familia de funciones $d_{z,p} : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ dadas por $d_{z,p}(x) = p(x - z)$, para $x \in E$ (con parámetros $(z, p) \in E \times \mathcal{F}$) separe los puntos de E .
- 2. Llamaremos $\sigma(E, \mathcal{F})$ a la topología inicial inducida por esta familia de funciones. Es decir, la menor topología sobre E que hace continuas a las funciones $d_{z,p}$ (para todo $z \in E$ y toda $p \in \mathcal{F}$).

Observaciones: 10.1.3. Si la familia $\mathcal{F}$ de seminormas separe puntos de E , resulta que $\sigma(E, \mathcal{F})$ es una topología de Hausdorff. En efecto, observar que:

- 1. Dado $x \in E$, una sub-base de entornos de x está constituida por conjuntos de la forma

$$U_{z,p,\varepsilon} = \{y \in E : |d_{z,p}(y) - d_{z,p}(x)| < \varepsilon\} = \{y \in E : |p(y - z) - p(x - z)| < \varepsilon\} ,$$

donde $z \in E$, $p \in \mathcal{F}$ y $\varepsilon > 0$.

2. Más aún, para obtener una sub-base de $\mathcal{O}_{\sigma(E, \mathcal{F})}(x)$ alcanza con tomar los conjuntos

$$U_{x, p, \varepsilon} = U_{p, \varepsilon} = \{y \in E : p(y - x) < \varepsilon\} \quad \text{para todo par } p \in \mathcal{F}, \quad \varepsilon > 0.$$

En efecto, la desigualdad triangular asegura que $U_{p, \varepsilon} \subseteq U_{z, p, \varepsilon}$ para todo $z \in E$.

3. Con estos semibásicos alcanza para testear que $\sigma(E, \mathcal{F})$ es Hausdorff. Para verlo alcanza con recordar que fijados $x, y \in E$, se tiene que $p(x - y) \leq p(x - z) + p(y - z)$ para todo $z \in E$ y toda $p \in \mathcal{F}$.
4. Una base de $\mathcal{O}_{\sigma(E, \mathcal{F})}(x)$ está formada por conjuntos de la forma

$$\bigcap_{k \in \mathbb{I}_n} U_{p_k, \varepsilon} = \{y \in E : p_k(y - x) < \varepsilon, \quad k \in \mathbb{I}_n\}, \quad (10.3)$$

moviendo $n \in \mathbb{N}$, n -uplas $(p_k)_{k \in \mathbb{I}_n}$ en $\mathcal{F}$ y $\varepsilon > 0$.

5. Es fácil ver que $\sigma(E, \mathcal{F})$ hace de E un EVT. En efecto, como es una topología inicial, el Cor. 5.3.3 dice que basta ver que las funciones

$$E \times E \ni (x, y) \mapsto p(x + y - z) \quad \text{y} \quad \mathbb{C} \times E \ni (\lambda, x) \mapsto p(\lambda x - z)$$

son continuas para todo $z \in E$ y toda $p \in \mathcal{F}$. Para ello usemos que

$$|p(x + y - z) - p(x' + y' - z)| \leq p(x + y - x' - y') \leq p(x - x') + p(y - y').$$

Si tomamos $(x', y') \in U_{x, p, \varepsilon} \times U_{y, p, \varepsilon}$, entonces $p(x - x') + p(y - y') < 2\varepsilon$, lo que muestra la continuidad de la primera función. Por otra parte,

$$\begin{aligned} |p(\lambda x - z) - p(\lambda' x' - z)| &\leq p(\lambda x - \lambda' x') = p(\lambda x - \lambda' x + \lambda' x - \lambda' x') \\ &\leq |\lambda - \lambda'| p(x) + |\lambda'| p(x - x'). \end{aligned}$$

Tomando entornos adecuados, sale la continuidad como antes. ▲

La verdadera utilidad de estos procesos para producir topologías EVT radica en que ellos permiten encontrar la topología que se adecue a una convergencia dada en el espacio E . Sin entrar en detalles, pensemos en convergencias “de la f y de todas sus derivadas”, o convergencia uniforme en compactos, etc. Una familia muy importante de convergencias en el contexto de espacios normados (llamadas “la débil w ” y “la débil estrella w^* ”), acompañadas de sus topologías $\sigma(E, \mathcal{F})$, se verá en las secciones siguientes. Veamos ahora en qué sentido la topología $\sigma(E, \mathcal{F})$ se describe en términos de convergencias:

Proposición 10.1.4. Sea E un $\mathbb{K}$ -EV, y sea $\sigma(E, \mathcal{F})$ la topología inducida por una familia $\mathcal{F}$ de seminormas que separa puntos de E . Dada una red $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en E , se tiene que

$$x_i \xrightarrow[i \in \mathbb{I}]{\sigma(E, \mathcal{F})} x \in E \iff p(x - x_i) \xrightarrow[i \in \mathbb{I}]{\mathbb{R}} 0 \quad \text{para toda } p \in \mathcal{F}. \quad (10.4)$$

Demostración. Para mostrarlo basta fijarse quienes son los $\sigma(E, \mathcal{F})$ -entornos del x , como se describe en la Ec. (10.3). O bien, recordar qué pasaba con las topologías iniciales. ■

La Proposición anterior ayuda notablemente a la hora de testear si una función dada (que sale de, o que llega a un EVT dado por seminormas) es continua. Como estamos en un contexto “lineal”, lo primero que uno debe estudiar es la continuidad de los operadores lineales. Para ello pongamos algunos nombres:

Notaciones 10.1.5. Sea E un $\mathbb{K}$ -EV.

1. Denotaremos por $E' = \{\varphi : E \rightarrow \mathbb{K} : \varphi \text{ es lineal} \}$ al espacio dual algebraico de E .
2. Los ejemplos más usuales de seminormas en E consisten en tomar una funcional lineal $\varphi \in E'$ y definir $p = p_\varphi = |\varphi|$.
3. Por lo general, uno toma un subespacio $F \subseteq E'$ de funcionales, le pide que separe puntos de E , y toma la familia separadora de seminormas $\mathcal{F} = \{p_\varphi : \varphi \in F\}$. En tal caso suele escribirse $\sigma(E, F)$ en lugar de $\sigma(E, \mathcal{F})$.
4. Si me dan cualquier topología τ que haga de E un EVT, no toda $\varphi \in E'$ debe ser automáticamente continua. De hecho, si $\dim E = \infty$, la “mayoría” de las funcionales no lo son. Por ello se denomina dual “topológico” de E al $\mathbb{K}$ -EV

$$E_\tau^* = (E, \tau)^* = \{\varphi \in E' : \varphi \text{ es } \tau\text{-continua}\} = E' \cap C((E, \tau), \mathbb{K}). \quad (10.5)$$

En el caso que τ provenga de una norma $\|\cdot\|$, se escribirá E^* a secas.

5. Observar que para cualquier $\varphi \in E'$, se tiene que $\varphi \in (E, \tau)^* \iff \varphi$ es τ -continua en el punto $0 \in E$. Esto se debe a la igualdad $\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x - y)$ (y a que $\varphi(0) = 0$). Recordar que la condición (10.1) asegura que una red $x_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} x \iff x - x_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} 0$.
6. Si E era un $\mathbb{C}$ -EV, denotaremos por $E'_\mathbb{R}$ y $(E, \tau)_\mathbb{R}^*$ a sus duales pensándolo como $\mathbb{R}$ -EV (o sea las funcionales $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ que son $\mathbb{R}$ -lineales). Si era normado, ponemos $E_\mathbb{R}^*$. ▲

Proposición 10.1.6. Sea E un $\mathbb{K}$ -EV y sea $\varphi \in E'$.

1. Dada una familia separadora $\mathcal{F}$ de seminormas, se tiene que φ es $\sigma(E, \mathcal{F})$ -continua si y sólo si existen un $M \geq 0$ y una n -upla $(p_k)_{k \in \mathbb{I}_n}$ en $\mathcal{F}$ tales que

$$|\varphi(x)| \leq M \max_{k \in \mathbb{I}_n} p_k(x), \quad \text{para todo } x \in E.$$

2. Si tenemos una norma $\|\cdot\|$ en E , entonces

$$\varphi \in E^* \iff \|\varphi\| := \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)| < \infty.$$

En tal caso, se tiene la siguiente igualdad:

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)| = \min \left\{ M \geq 0 : |\varphi(x)| \leq M \|x\| \text{ para todo } x \in E \right\}. \quad (10.6)$$

Además, $\varphi \mapsto \|\varphi\|$ es una norma en E^* , con la que resulta ser un espacio de Banach.

Demostración. Si $\varphi \in (E, \sigma(E, \mathcal{F}))^*$, por ser continua en 0 debe existir un entorno básico del 0, pongamos que dado por un $\varepsilon > 0$ y una n -upla $(p_k)_{k \in \mathbb{I}_n}$ en $\mathcal{F}$, tales que

$$\bigcap_{k \in \mathbb{I}_n} \{x \in E : p_k(x) < \varepsilon\} \subseteq \{x \in E : |\varphi(x)| < 1\} . \quad (10.7)$$

Es algo engorroso, aunque elemental, verificar que esto implica que

$$|\varphi(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \max_{k \in \mathbb{I}_n} p_k(x) , \quad \text{para todo } x \in E .$$

En efecto, el caso $|\varphi(x)| = 0$ no tiene gracia. Si $|\varphi(x)| > 0$ y sucediera que $p_k(x) < \varepsilon|\varphi(x)|$ para todo $k \in \mathbb{I}_n$, la Ec. (10.7) aseguraría que vale la siguiente contradicción flagrante:

$$p_k \left(\frac{x}{|\varphi(x)|} \right) < \varepsilon \quad \text{para todo } k \in \mathbb{I}_n \quad \implies \quad 1 = \frac{|\varphi(x)|}{|\varphi(x)|} = \left| \varphi \left(\frac{x}{|\varphi(x)|} \right) \right| < 1 .$$

Poniendo $M = \frac{1}{\varepsilon}$, tenemos una implicación del ítem 1. La recíproca es inmediata, ya que las p_k son continuas en 0 por hipótesis.

El ítem 2 se deduce del 1, porque ahora hay una sola seminorma. La prueba de la Ec. (10.6) es un ejercicio fácil. Llamemos $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$. El hecho de que E^* es Banach se deduce de que se lo puede identificar (isométricamente) con un subespacio cerrado de $(C_b(B_E, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$, que es un Banach por la Prop. 5.4.4. ■

Teorema 10.1.7. Sea E un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial y sea $F \subseteq E'$ un **subespacio** vectorial que separa puntos de E . Consideremos en E la topología $\sigma(E, F)$. Luego se tiene que

$$\left(E, \sigma(E, F) \right)^* = F . \quad (10.8)$$

Es decir que las únicas funcionales lineales sobre E que son $\sigma(E, F)$ -continuas son las que ya estaban en F .

Demostración. Es claro que toda $\varphi \in F$ queda $\sigma(E, F)$ -continua (si no lo ve claro, repase la Ec. (10.4)). Para la recíproca, hace falta el siguiente lema algebraico:

Lema 10.1.8. Sean f y $(f_k)_{k \in \mathbb{I}_n}$ funcionales lineales en el $\mathbb{K}$ -espacio vectorial E . Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $f = \sum_{k \in \mathbb{I}_n} \alpha_k f_k$, para ciertas $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.
2. Existe $\alpha > 0$ tal que $|f(x)| \leq \alpha \max_{k \in \mathbb{I}_n} |f_k(x)|$ para todo $x \in E$.
3. $\bigcap_{k \in \mathbb{I}_n} \ker f_k \subseteq \ker f$.

Demostración. La única implicación que no es evidente es (3) $\implies$ (1). Si $A : E \rightarrow \mathbb{K}^n$ es el operador lineal $Ax = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^n \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & \mathbb{K} \end{array}$$

Como $\ker A = \bigcap_{k \in \mathbb{I}_n} \ker f_k \subseteq \ker f$, existe una funcional lineal $g : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g \circ A = f$. O, si se prefiere, la condición $\ker A \subseteq \ker f$ permite definirla (bien) como

$$g : R(A) \rightarrow \mathbb{K} \quad \text{dada por} \quad g(Ax) = f(x) ,$$

y luego extenderla $\mathbb{K}^n$. Pero toda funcional lineal sobre $\mathbb{K}^n$ es de la forma

$$g(z) = \sum_{k \in \mathbb{I}_n} \alpha_k z_k \quad \text{para} \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{K}^n .$$

En particular, tomando $z = Ax = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ obtenemos que

$$f(x) = g(Ax) = \sum_{k \in \mathbb{I}_n} \alpha_k f_k(x) \quad \text{para todo} \quad x \in E , \quad \blacktriangle$$

Seguimos con el Teorema: Si $\varphi \in E'$ es $\sigma(E, F)$ -continua, la Prop. 10.1.6 asegura que existen $M > 0$ una n -upla $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{I}_n}$ en F tales que

$$|\varphi(x)| \leq M \max_{k \in \mathbb{I}_n} |\varphi_k(x)| \quad \text{para todo} \quad x \in E \quad \xRightarrow{\text{Lema 10.1.8}} \quad \varphi = \sum_1^n \alpha_k \varphi_k ,$$

para ciertos $\alpha_k \in \mathbb{K}$. Esto dice que $\varphi \in F$. ■

10.2 Espacios localmente convexos.

Una de las ventajas de trabajar en $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales es que en ellos tiene sentido la noción de convexidad. Ya vimos una definición en el caso $E = \mathbb{R}$. Veamos la general: Sea E un $\mathbb{K}$ -EV, y sea $A \subseteq E$. Decimos que A es **convexo** si, dados $x, y \in A$ se tiene que

$$[x, y] := \{(1-t)x + ty : t \in [0, 1]\} \subseteq A .$$

Observar que $[x, y]$ denota al “segmento” recto que une a x con y dentro de E . La teoría de conjuntos convexos dentro de EVT’s está muy desarrollada, y algunas cosas de ella veremos en lo que sigue. Empecemos con algunas propiedades quasitriviales, para entrar en tema.

Proposición 10.2.1. Sea E un $\mathbb{K}$ -EV. Se tienen las siguientes propiedades:

1. La intersección de cualquier cantidad de conjuntos convexos en E queda convexa.

2. El trasladar a un convexo le conserva esa propiedad. Es decir que si $A \subseteq E$ es convexo, también lo será $A + x = \{a + x : a \in A\}$, para todo $x \in E$.
3. Si $A \subseteq E$ es convexo, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene que $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$ es convexo.
4. Dada una topología τ que haga de E un EVT, y un $A \subseteq E$ convexo, se tiene que $\overline{A}^\tau$ es también convexo.

Demostración. Es un ejercicio ideal para rumiar la definición de convexidad. Hagamos el ítem 4, que no es tan fácil: Si $x \in A$ pero $y \in \overline{A}^\tau$, tomemos una red $\mathbf{y} = (y_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en A tal que $y_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} y$. Entonces, para todo $\lambda \in [0, 1]$ sale que

$$A \ni \lambda y_i + (1 - \lambda)x \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} \lambda y + (1 - \lambda)x \implies [x, y] \subseteq \overline{A}^\tau.$$

Haciendo lo mismo, pero ahora del lado del x , sale que $\overline{A}^\tau$ es también convexo. ■

Volviendo a la sección anterior, en particular a la Ec. (10.3), notamos que si nos dan una familia $\mathcal{F}$ separadora de seminormas en E , resulta que la topología $\sigma(E, \mathcal{F})$ tiene, en cada punto $x \in E$, una base de entornos formada por abiertos convexos. A esta propiedad le daremos un nombre:

Definición 10.2.2. Sea (E, τ) un ETV. Decimos que E es un **espacio localmente convexo** (se abrevia ELC) si, para cada $x \in E$ existe una base β_x de $\mathcal{O}_\tau^a(x)$ que consiste de abiertos convexos. ▲

Observación 10.2.3. Dado (E, τ) un ETV, se tiene que

1. Si queremos verificar que E es ELC, la condición anterior (bases de entornos convexos para cada punto x) basta testearla en $x = 0$, porque todo $U \in \mathcal{O}_\tau^a(x)$ se puede escribir como $U = W + x$ con $W \in \mathcal{O}_\tau^a(0)$.
2. Si uno sabe que E es un ELC, se puede asumir que la base β_0 consta de convexos simétricos, en el sentido de que $V = -V = \{-x : x \in V\}$.

En efecto, dado un W de la base que uno tenía, se lo cambia por $V = W \cap -W$, que es más chico, sigue siendo abierto y convexo, pero ahora queda simétrico.

3. Más aún, se puede hacer una base de $\mathcal{O}_\tau^a(0)$ que consta de abiertos de la forma

$$V = U - U = \{x - y : x, y \in U\} \quad \text{para algún } U \text{ abierto convexo}.$$

Para ello, observemos que si V es simétrico y convexo como en 2, y tomamos $U = \frac{1}{2}V$, entonces $V = U - U$. En efecto, si $x, y \in U$, luego $x - y = \frac{1}{2}(2x + 2(-y)) \in V$. ▲

Esta observación será clave a la hora de sacarle el jugo al siguiente Teorema de Minkowski, que de alguna manera dice que toda topología en E que lo haga ELC viene dada como una $\sigma(E, \mathcal{F})$ vía una familia adecuada de $\mathbb{R}$ -seminormas.

Recordemos que, dado E un $\mathbb{K}$ -EV, una función $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ se llamaba **sublineal** si cumple la desigualdad triangular ($q(x+y) \leq q(x) + q(y)$ para todo par $x, y \in E$) y además

$$q(\lambda x) = \lambda q(x) \quad (\text{sin módulo}) \quad , \quad \text{para todo } x \in E \text{ y todo } \lambda \in \mathbb{R}_+ . \quad (10.9)$$

Teorema 10.2.4. Sean E un ETV y $U \subseteq E$ un abierto **convexo** tal que $0 \in U$. Entonces

1. La función $p_U : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por

$$p_U(x) = \inf \left\{ s > 0 : \frac{1}{s} x \in U \right\} , \quad \text{para } x \in E , \quad (10.10)$$

es una función sublineal, y se denomina la **funcional de Minkowski** de U .

2. Se tiene además que $U = \{x \in E : p_U(x) < 1\}$.

Demostración. Recordemos que, por la Ec. (10.1), si fijamos un $x \in E$ se tiene que la función $\mathbb{K} \ni \lambda \mapsto \lambda x$ es continua. En particular, tenemos que $\frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \in U$, por lo que $\frac{1}{n} x \in U$ a partir de cierto n_0 . Luego $p_U(x) \leq n_0 < \infty$. La comprobación que p_U es homogénea respecto a escalares positivos es un ejercicio elemental sobre ínfimos, que omitiremos.

Fijemos $x, y \in E$ y tomemos escalares $s, t > 0$ tales que $\frac{1}{s} x$ y $\frac{1}{t} y \in U$. Como U es convexo

$$\frac{1}{s+t}(x+y) = \frac{s}{s+t} \left(\frac{1}{s} x \right) + \frac{t}{s+t} \left(\frac{1}{t} y \right) \in U \implies p_U(x+y) \leq s+t .$$

Esto muestra que $p_U(x+y) \leq p_U(x) + p_U(y)$. Veamos ahora el item 2: Si $x \in U$, debe existir un $\varepsilon > 0$ tal que también $(1+\varepsilon)x \in U$ (de nuevo porque $\mathbb{K} \ni \lambda \mapsto \lambda x$ es continua). Entonces tenemos que $p_U(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. Recíprocamente, si $p_U(x) < 1$, debe existir un $s < 1$ tal que $\frac{1}{s} x \in U$. Como $0 \in U$ y U es convexo nos queda que $x = (1-s)0 + s \frac{1}{s} x \in U$. ■

Observación 10.2.5. Si uno asume que (E, τ) es un $\mathbb{R}$ -ELC, y toma β_0 una base de entornos abiertos, convexos y simétricos del $0 \in E$ (se usa la Obs. 10.2.3), cada $U \in \beta_0$ produce, vía el Teo. 10.2.4 una sublineal p_U tal que $U = \{x \in E : p_U(x) < 1\}$. Ahora bien, el hecho de que los U 'es sean simétricos implica que $p_U(-x) = p_U(x)$ para todo $x \in E$ (esto se deduce de la Ec. (10.10)). Pero esto sumado a la homogeneidad para $t \geq 0$, asegura que las p_U son $\mathbb{R}$ -seminormas. Si ahora uno toma la familia

$$\mathcal{F} = \{p_U : U \in \beta_0\} ,$$

es fácil ver que $\tau = \sigma(E, \mathcal{F})$, como asegurábamos antes. ▲

10.3 Hahn Banach:

Existencia de muchas *funcionales* continuas

En este nivel tenemos un problema. La idea del capítulo es estudiar EVT's desde un punto de vista topológico. Sin embargo, la teoría detallada de los espacios normados y de Banach entra

en el territorio de la materia Análisis Funcional (AF), en el que no queremos inmiscuirnos demasiado. Pero para poder seguir con las ideas principales de los ETV's necesitamos un teorema tradicional del AF, que es el Hahn-Banach. Este resultado será clave para poder ver que los EVT's dados por familias de seminormas tienen muchas funcionales continuas (por ejemplo, familias que separen puntos del dominio, como usábamos recién). También será clave para tratar las propiedades de los conjuntos convexos en estos espacios.

Como solución de compromiso, daremos un esbozo mínimo de su prueba, y seguiremos adelante sin desarrollar demasiado sus aplicaciones clásicas del AF, pero sí aquellas que son de espíritu esencialmente topológico, incluso dentro del mundo de los espacios de Banach.

10.3.1 H-B onda normados

Observación 10.3.1. Como muchas cuentas se hacen con funcionales $\mathbb{R}$ -lineales, sus extensiones al caso complejo se harán tomando partes reales de funcionales complejas. Para que esto camine bien, hacen falta unas cuantas: Sea E un $\mathbb{C}$ -EV.

1. Dada $\phi \in E'_{\mathbb{R}}$ ($\mathbb{R}$ -lineal), se verifica que la funcional

$$\phi_{\mathbb{C}} : E \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{dada por} \quad \phi_{\mathbb{C}}(x) = \phi(x) - i \phi(ix), \quad x \in E, \quad (10.11)$$

es $\mathbb{C}$ -lineal (o sea que $\phi_{\mathbb{C}} \in E'$) y cumple que $\text{Re } \phi_{\mathbb{C}} = \phi$.

2. Dada $\varphi \in E'$ ($\mathbb{C}$ -lineal), se tiene que $\text{Re } \varphi \in E'_{\mathbb{R}}$ y que $\varphi = (\text{Re } \varphi)_{\mathbb{C}}$.
3. Por lo tanto, dadas $\varphi_1, \varphi_2 \in E'$, vemos que $\text{Re } \varphi_1 = \text{Re } \varphi_2 \implies \varphi_1 = \varphi_2$.
4. Si me dan una $\mathbb{C}$ -seminorma p para E , y una funcional $\phi \in E'_{\mathbb{R}}$, vale que

$$\phi \leq p \iff |\phi_{\mathbb{C}}| \leq p.$$

La implicación $\Leftarrow$ es obvia ($\phi = \text{Re } \phi_{\mathbb{C}}$). Veamos la otra: Dado un punto $x \in E$, pongamos que $\phi_{\mathbb{C}}(x) = e^{i\theta} |\phi_{\mathbb{C}}(x)|$, y consideremos ahora $y = e^{-i\theta} x \in E$. Luego

$$|\phi_{\mathbb{C}}(x)| = e^{-i\theta} \phi_{\mathbb{C}}(x) = \phi_{\mathbb{C}}(y) = \text{Re } \phi_{\mathbb{C}}(y) = \phi(y) \leq p(y) = p(e^{-i\theta} x) = p(x).$$

Observar que podemos decir lo mismo al revés: Si $\varphi \in E'$, $|\varphi| \leq p \iff \text{Re } \varphi \leq p$. ▲

Teorema 10.3.2. [Hahn-Banach] Sea E un $\mathbb{R}$ -EV, $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ una función sublineal, $S \subseteq E$ un subespacio y $\varphi \in S'$ una funcional que cumple la acotación

$$\varphi(y) \leq q(y), \quad \text{para todo } y \in S.$$

Entonces existe una funcional $\Phi \in E'$ que cumple lo siguiente:

1. $\Phi(x) \leq q(x)$, para todo $x \in E$.
2. Φ extiende a φ , o sea que $\Phi(y) = \varphi(y)$, para todo $y \in S$.

Demostración. Por una Zornificación, alcanza hacer el “paso inductivo”, que consiste en suponer que $E = S \oplus \mathbb{R} \cdot x$ para cualquier $x \notin S$. En tal caso, cualquier $\Phi \in E'$ que extienda a φ actúa así: $\Phi(y + tx) = \varphi(y) + t\alpha$, ($y \in S$, $t \in \mathbb{R}$) para algún $\alpha = \varphi(x) \in \mathbb{R}$ a elegir. La pregunta es si existe algún α que cumpla lo otro, que se traduce a que

$$\varphi(y) + t\alpha \leq \varphi(y + tx), \quad \text{para todo } y \in S, t \in \mathbb{R}.$$

Unas intrincadas cuentas elementales (que el lector ya verá/vió en AF, y que puede encarar como ejercicio si gusta) muestran que un tal α siempre existe. Y con ese α uno se construye la Φ buscada. ■

Teorema 10.3.3 (H-B con seminormas y módulos). Sea E un $\mathbb{K}$ -EV, $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ una **seminorma**, $S \subseteq E$ un subespacio y $\varphi \in S'$ una funcional que cumple la acotación

$$|\varphi(y)| \leq p(y), \quad \text{para todo } y \in S.$$

Entonces existe una funcional $\Phi \in E'$ que cumple lo siguiente:

1. $|\Phi(x)| \leq p(x)$, para todo $x \in E$.
2. Φ extiende a φ , o sea que $\Phi(y) = \varphi(y)$, para todo $y \in S$.

Demostración. El caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sale usando que las seminormas son sublineales, y que $p(-x) = p(x)$ para todo $x \in E$. El caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, se deduce del anterior usando la Obs. 10.3.1: Empiezo con una $\mathbb{C}$ -lineal $\varphi \in S'$, y llamo $\phi = \operatorname{Re} \varphi$, que también está acotada por p . Extiendo ϕ a una $\mathbb{R}$ -lineal $\Psi \in E'_{\mathbb{R}}$, y tomo ahora $\Phi = \Psi_{\mathbb{C}}$. Luego Φ sigue acotada por p , y veo que tanto φ como $\Phi|_S$ tienen la misma parte real ϕ , por lo que deben coincidir. ■

Corolarios 10.3.4. Sea E un espacio normado.

1. El espacio dual topológico (respecto a la norma) E^* separa puntos de E .
2. Más aún, dado $x \in E$, existe una $\varphi \in E^*$ tal que

$$\|\varphi\| = 1 \quad \text{y} \quad |\varphi(x)| = \|x\|.$$

3. Esto dice que se puede calcular $\|x\|$ en forma dual usando a E^* . Es decir que

$$\text{para cualquier } x \in E \text{ vale que } \|x\| = \max \{ |\varphi(x)| : \varphi \in E^* \text{ y } \|\varphi\| = 1 \}. \quad (10.12)$$

4. Como E^* es también un normado (es un Banach), podemos considerar a su dual topológico $E^{**} = (E^*)^*$. Definamos $J : E \rightarrow E^{**}$ al morfismo inducido por la dualidad $(x, \varphi) \mapsto \langle x, \varphi \rangle = \varphi(x)$. O sea que, dado un $x \in E$, definimos

$$J_x \in E^{**} \quad \text{por la fórmula} \quad J_x(\varphi) = \varphi(x), \quad \text{para toda } \varphi \in E^*. \quad (10.13)$$

La Ec. (10.6) nos dice que J reduce normas (en particular que las funcionales J_x son continuas en E^*). Pero ahora aseguramos que J es **isométrica**: $\|J_x\|_{E^{**}} = \|x\|_E$.

Demostración. Estos son resultados usuales de AF, y su prueba es directa a partir del Teo. 10.3.3. Veamos mínimamente la prueba de 2. La clave es definir una buena φ_0 en el dual del subespacio $S = \text{span}\{x\} = \mathbb{K}x$. Buena significa que

$$\varphi_0(x) = \|x\| \quad \text{por lo que} \quad |\varphi_0(\lambda x)| = |\lambda| \|x\| = \|\lambda x\| \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{K} .$$

Es decir que φ_0 cumple que $|\varphi_0| \leq \|\cdot\|$ en todo S . Si $\varphi \in E^*$ extiende a φ_0 y cumple que $|\varphi(y)| \leq \|y\|$ para todo $y \in E$, es claro que $\|\varphi\| = 1$ como aspirábamos. A partir de 2, los otros 3 items se deducen sin dificultad. ■

10.3.2 H-B onda separar convexos en EVT's

Teorema 10.3.5 (de separación de H-B). Sea (E, τ) un EVT y sean $U, V \subseteq E$ dos convexos disjuntos y no vacíos, tales que U es abierto. Luego existen $\varphi \in (E, \tau)^*$ y $t \in \mathbb{R}$ tales que

$$\text{Re } \varphi(x) < t \leq \text{Re } \varphi(y) \quad \text{para todo } x \in U, y \in V .$$

Demostración. **Caso real.** Fijemos $x_0 \in U, y_0 \in V$, y consideremos el conjunto

$$W = y_0 - x_0 + U - V . \quad \text{Como} \quad W = \bigcup_{y \in V} y_0 - x_0 - y + U ,$$

vemos que W es abierto. Es claro que $0 \in W$, y una cuenta directa muestra que W es, además, convexo. Tomemos la funcional de Minkowski p_W de la Teo. 10.2.4 y el punto $z = y_0 - x_0$. Usando que $U \cap V = \emptyset$, concluimos que $z \notin W$, por lo que $p_W(z) \geq 1$. Definamos $\varphi_0 : \mathbb{R}z \rightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi_0(az) = a$, ($a \in \mathbb{R}$). Entonces si $a \geq 0$, se tiene que

$$\varphi_0(az) = a \leq ap_W(z) = p_W(az) .$$

Si $a < 0$, tenemos que $\varphi_0(az) = a < 0 \leq p_W(az)$. Así, $\varphi_0 \leq p_W$ en todo $\mathbb{R}z$. Por el teorema de Hahn-Banach 10.3.2, podemos extender φ_0 a una funcional $\mathbb{R}$ -lineal $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) \leq p_W(x)$, ahora para todo $x \in E$. Veamos que esta $\varphi \in (E, \tau)^*$. Basta ver la continuidad en $0 \in E$. Para ello, observemos que si $x \in W$, se tiene que $\varphi(x) \leq p_W(x) < 1$. Si ahora me dan un $\varepsilon > 0$, podemos deducir de lo anterior que

$$|\varphi(x)| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad x \in -\varepsilon W \cap \varepsilon W ,$$

que es un entorno de 0. Lista la continuidad. Si $x \in U, y \in V$ entonces

$$x - y + z \in W \implies \varphi(x - y + z) < 1 \xrightarrow{\varphi(z)=1} \varphi(x) < \varphi(y) .$$

Además $\varphi(U)$ y $\varphi(V)$ son intervalos reales disjuntos, puesto que U y V son convexos y φ es lineal. Por otra parte $\varphi(U)$ es abierto pues U lo es. Basta entonces tomar $t = \sup \varphi(U)$. ▲

Caso complejo. Consideremos a E como $\mathbb{R}$ -EV, y encontremos, por el caso anterior, una funcional $\mathbb{R}$ -lineal $\phi \in (E, \tau)_{\mathbb{R}}^*$ tal que

$$\phi(U) < t \leq \phi(V) , \quad \text{para cierto} \quad t \in \mathbb{R} .$$

Luego $\varphi(x) = \phi(x) - i\phi(ix)$ cumple que es $\mathbb{C}$ -lineal, τ -continua, y que $\text{Re } \varphi = \phi$. ■

Corolario 10.3.6. Si (E, τ) es un ELC, su dual $E_\tau^* = (E, \tau)^*$ separa puntos de E .

Demostración. Sabemos que E es Hausdorff. Luego, dados $x, y \in E$ distintos, existe un $U \in \mathcal{O}_\tau^a(x)$ tal que $y \notin U$. Y como E es ELC, podemos asumir que U es convexo. Aplicamos ahora el teorema de separación de HB 10.3.5 para separar los convexos U e $\{y\}$, y nos aparece la $\varphi \in E_\tau^*$ tal que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. ■

10.4 Krein-Milman

Definición 10.4.1. Sea E es un $\mathbb{K}$ -EV y fijemos $K \subseteq E$.

1. Un subconjunto $A \subseteq K$ es **extremal** en K si para cada par $x, y \in K$ se cumple que

$$(x, y) \cap A \neq \emptyset \implies x, y \in A,$$

donde $(x, y) = \{(1 - \lambda)x + \lambda y : \lambda \in (0, 1)\}$ es el segmento “abierto” que va de x a y .

2. Un $z \in K$ es un **punto extremal** de K si el conjunto $\{z\}$ es extremal en K , o sea si para cada par $x, y \in K$ se cumple que

$$z \in (x, y) \implies x = y = z.$$

3. Denotaremos por $\text{Ext}(K)$ al conjunto de puntos extremales de K .

Ejemplo 10.4.2. Sea E es un $\mathbb{K}$ -EV y sea $K \subseteq E$. Los subconjuntos extremales de K se pueden visualizar como vértices, lados o caras de K (sobre todo si es convexo y cerrado).

Intuitivamente, una manera de encontrar ese tipo de partes es cortar a K con un hiperplano de E , e ir corriéndose hasta los dos bordes, a ver que queda. Esto se puede hacer analíticamente cortando a K con hiperplanos afines del tipo $\{x \in E : \varphi(x) = \lambda\}$ para una $\varphi \in E_\mathbb{R}^*$, y distintos valores de λ . En efecto, si K es acotado, los conjuntos

$$m_\varphi(K) = \{x \in K : \varphi(x) = \inf_{y \in K} \varphi(y)\} \quad \text{y} \quad M_\varphi(K) = \{x \in K : \varphi(x) = \sup_{y \in K} \varphi(y)\} \quad (10.14)$$

son, efectivamente, extremales para K . La prueba es directa, y queda como ejercicio.

Lo interesante es que, si K era **compacto**, entonces $m_\varphi(K) \neq \emptyset \neq M_\varphi(K)$. Esto se prueba tomando, por ejemplo, una red $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en K tal que $\varphi(x_i) \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} \inf_{y \in K} \varphi(y)$, y luego una subred convergente, cuyo límite debe caer en $m_\varphi(K)$. ▲

Ejercicio 10.4.3. Sea E es un $\mathbb{K}$ -EV y sea $K \subseteq E$. Si me dan un conjunto $A_0 \subseteq K$ que es extremal para K , y otro $A_1 \subseteq A_0$ que es extremal para A_0 , probar que A_1 es también extremal para K . ▲

Proposición 10.4.4. Sea E un $\mathbb{K}$ -ELC. Si $K \subseteq E$ es compacto, entonces $\text{Ext}(K) \neq \emptyset$.

Demostración. Sea $\mathcal{C} = \{A \subseteq K : \emptyset \neq A, \text{ que es extremal en } K \text{ y cerrado}\}$, ordenado por la inclusión al revés. $\mathcal{C} \neq \emptyset$ porque $K \in \mathcal{C}$. Para usar el Lema de Zorn, veamos que el orden de $\mathcal{C}$ es inductivo: Sea $\mathcal{A}$ una familia totalmente ordenada dentro de $\mathcal{C}$. Llamemos $A = \bigcap \mathcal{A}$. Como $\emptyset \notin \mathcal{C}$ y el orden en $\mathcal{A}$ es total, vemos que $\mathcal{A}$ tiene la PIF. Como K es compacto, el Teo.6.1.3 nos da que $A \neq \emptyset$. El hecho de que una intersección de extremales es extremal es bien fácil. Y de cerrados ni hablar.

Así que $A \in \mathcal{C}$ y es una buena cota inferior de $\mathcal{A}$. Ahora sí, Zorn asegura que existe un $A_0 \in \mathcal{C}$ maximal (o sea que A_0 es minimal para la $\subseteq$). Veremos que A_0 contiene un único punto, que será entonces un punto extremal de K .

Supongamos que existieran $x_1, x_2 \in A_0$ dos puntos distintos. Como E es un ELC, el Cor.10.3.6 nos asegura que existe una $\varphi \in E_{\mathbb{R}}^*$ tal que $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$. Observar que, como A_0 es cerrado y vive en K , debe ser compacto. Por el Ejem.10.4.2, el conjunto

$$m_{\varphi}(A_0) = \{x \in A_0 : \varphi(x) = \inf_{y \in A_0} \varphi(y)\} \subseteq A_0$$

es cerrado, no vacío y extremal para A_0 . Por el Ejer.10.4.3, vemos que $m_{\varphi}(A_0)$ es también extremal para K . Sin embargo, tenemos que $A_0 \neq m_{\varphi}(A_0)$, porque $m_{\varphi}(A_0)$ no puede contener simultáneamente a los puntos x_1 y x_2 . Como esto contradice la maximalidad-minimalidad de A_0 , vemos que $A_0 = \{x\}$ y que $x \in \text{Ext}(K)$. ■

El resultado más importante de esta sección es el Teorema de Krein Milman, que formaliza un enunciado intuitivamente natural: un convexo compacto es el conjunto de combinaciones convexas de sus puntos extremales. Uno se imagina polígonos o elipses y parece convincente. Además, ahora ya sabemos que los compactos en un ELC tienen extremales. Definamos ahora las cápsulas convexas:

Definición 10.4.5. Sea E un $\mathbb{R}$ -EV, y sea $A \subseteq E$. La cápsula convexa de A es el conjunto

$$\text{Conv}(A) = \{ \text{combinaciones convexas de elementos de } A \}.$$

O sea que los elementos de $\text{Conv}(A)$ son todos los del tipo $\sum_{k \in \mathbb{I}_n} \lambda_k a_k$, donde los $a_k \in A$ y los λ_k viven en $\mathbb{R}_+$ y cumplen que $\sum_{k \in \mathbb{I}_n} \lambda_k = 1$. Si ahora tenemos que (E, τ) es un EVT, denotaremos por $\overline{\text{Conv}}(A) = \overline{\text{Conv}}^{\tau}(A)$ a la τ -clausura de $\text{Conv}(A)$. ▲

Veamos ahora una propiedades obvias de estas nociones: Sea E un EVT, y sea $A \subseteq E$.

1. Tanto $\text{Conv}(A)$ como $\overline{\text{Conv}}(A)$ son convexas.
2. Más aún, se puede caracterizar a $\text{Conv}(A)$ (resp. $\overline{\text{Conv}}(A)$) como el **menor** convexo (resp. convexo cerrado) que contiene a A .
3. A es convexo si y sólo si $A = \text{Conv}(A)$.

4. $\text{Conv}(\text{Conv}(A)) = \text{Conv}(A)$. ▲

Teorema 10.4.6 (Krein - Milman). Sea E un ELC y sea $K \in E$ compacto. Entonces

$$K \subseteq \overline{\text{Conv}} \text{Ext}(K) .$$

En particular, se tienen las siguiente igualdades:

1. $\overline{\text{Conv}} \text{Ext}(K) = \overline{\text{Conv}} K$.
2. Si asumimos que K es convexo (y compacto), entonces $K = \overline{\text{Conv}} \text{Ext}(K)$.

Demostración. Llamemos $K_0 = \overline{\text{Conv}} \text{Ext}(K)$, y supongamos que existe un $x_0 \in K \setminus K_0$. Por el teorema de separación de Hahn-Banach 10.3.5, deben existir $\varphi \in E_{\mathbb{R}}^*$ y $t \in \mathbb{R}$ tales que $\varphi(x_0) < t \leq \varphi(K_0)$. Llamemos $K_1 = m_{\varphi}(K) \subseteq K$, que ya sabemos que es un subconjunto no vacío, cerrado (luego compacto) y extremal en K . Por la Prop. 10.4.4, podemos tomar un $x \in \text{Ext}(K_1)$ que, por el Ej. 10.4.3 es también extremal para K . Sin embargo,

$$\varphi(x) = \inf_{y \in K} \varphi(y) \leq \varphi(x_0) < t \leq \varphi(\text{Ext}(K)) .$$

Esta contradicción muestra que $K \subseteq \overline{\text{Conv}} \text{Ext}(K)$. ■

Ejercicio 10.4.7. Sean (E, τ) un ELC y $K \subseteq E$ un compacto.

1. Dado $x \notin K$, existe $U \in \mathcal{O}_{\tau}^a(0)$ **convexo** tal que $(x + U) \cap (K + U) = \emptyset$.
2. Deducir que, si K fuera también convexo, existe $\varphi \in E_{\mathbb{R}}^*$ tal que

$$\varphi(x) < t < t + \varepsilon < \varphi(K) \quad \text{para ciertos } t \in \mathbb{R} \text{ y } \varepsilon > 0 .$$

3. Encontrar un compacto K (ahora no convexo) tal que $\overline{\text{Conv}} K$ no es compacto.
4. En cambio, si también $\overline{\text{Conv}} K$ es compacto, entonces $\text{Ext}(\overline{\text{Conv}} K) \subseteq K$. ▲

10.5 Topologías débiles en espacios normados y ELC's

Sea E un espacio de Banach. Se dice que E es **reflexivo** si la imagen de E por la isometría $J_E : E \hookrightarrow E^{**}$ es todo el espacio E^{**} . En otras palabras, si las únicas funcionales continuas sobre E^* son las evaluaciones en puntos de E .

Esto es siempre así cuando $\dim E < \infty$, y también para los $L^p(X, \Sigma, \mu)$ y los ℓ^p , para $1 < p < \infty$. Pero muchas veces deja de pasar en el caso infinitodimensional (sin ir más lejos, $L^1(X, \Sigma, \mu)$ no es reflexivo). Mucha teoría de espacios de Banach sale bien redonda en los espacios reflexivos, por lo que está muy desarrollado el estudio de condiciones que aseguren la reflexividad. Algunos de estos criterios, en particular aquellos que involucran el comportamiento de E relativo a sus topologías débiles, serán tratados en este texto.

Sin embargo, la mayoría de los espacios de Banach importantes no son reflexivos. Para desfacer este entuerto, las topologías débiles también ayudan lo suyo. Esto se debe a una especie de reflexividad débil que es automática, como veremos enseguida. Otras grandes ventajas de usarlas provienen de dos teoremas muy profundos, el de Goldstine (que da otro sucedáneo de la reflexividad), y fundamentalmente el de Alaoglu, que asegura que en ciertos espacios de Banach (aquellos que son el dual de otro) la bola es, al menos, w^* -compacta.

10.5.1. Hay dos ejemplos importantes de topologías inducidas por seminormas, en el contexto de espacios normados y ELC:

1. Sea E un espacio normado y E^* su dual (topológico). Consideremos sobre E la familia de seminormas

$$\mathcal{F} = \{p_\varphi : \varphi \in E^*\} , \quad \text{donde} \quad p_\varphi(x) = |\varphi(x)| , \quad (x \in E) .$$

Como ya vimos, la topología inducida por $\mathcal{F}$ sobre E se denota $\sigma(E, E^*)$ y se denomina la **topología débil** de E . A veces se la abrevia como “ w ”.

2. La topología $\sigma(E^*, E)$ en E^* , es la inducida por la familia de seminormas

$$\mathcal{F} = \{p_x : x \in E\} , \quad \text{donde} \quad p_x(\varphi) = |J_x(\varphi)| = |\varphi(x)| , \quad (\varphi \in E^*) . \quad (10.15)$$

A $\sigma(E^*, E)$ se la denomina **topología débil *** de E^* , y se la abrevia con w^* .

3. Observar que, en realidad, la $\sigma(E^*, E)$ está producida por un subespacio de E^{**} , que no es otro que $J_E(E)$, donde $J_E : E \rightarrow E^{**}$ es la isometría definida en la Ec. (10.13). Pero como la acción de estas funcionales sobre E^* es justamente operar por evaluación en los $x \in E$, la notación $\sigma(E^*, E)$ es justa, y por supuesto es más económica que poner $\sigma(E^*, J_E(E))$.
4. Más aún, si ahora suponemos que (E, τ) es solo un ELC, también tenemos un dual topológico $E_\tau^* = (E, \tau)^*$ que separa puntos. Luego podemos definir:
 - (a) En E una topología débil $\sigma(E, E_\tau^*)$, también llamada w .
 - (b) En E_τ^* , que a priori no tiene ninguna topología el pobre, ponemos también la topología w^* , o sea la $\sigma(E_\tau^*, E)$, con la misma definición que en la Ec. (10.15) (pero acá el $J_x \in (E_\tau^*)'$).
5. Observar que $\sigma(E, E_\tau^*)$ y $\sigma(E_\tau^*, E)$ tienen una linda propiedad (esto incluye el caso en que E es normado): Por el Teo. 10.1.7, vemos que

$$\left(E , \sigma(E, E_\tau^*) \right)^* = E_\tau^* \quad \text{y} \quad \left(E_\tau^* , \sigma(E_\tau^*, E) \right)^* \cong E , \quad (10.16)$$

donde el $\cong$ es lo que uno se imagina.

6. Estas dos topologías se describen bien por convergencias: Por la Ec. (10.4), se tiene que

- (a) $x_i \xrightarrow[i \in \mathbb{I}]{w} x \iff \varphi(x_i) \xrightarrow[i \in \mathbb{I}]{} \varphi(x)$ para toda $\varphi \in E^*$ (o $\varphi \in E_\tau^*$).
- (b) $\varphi_i \xrightarrow[i \in \mathbb{I}]{w^*} \varphi \iff \varphi_i(x) \xrightarrow[i \in \mathbb{I}]{} \varphi(x)$ para todo $x \in E$.

En otras palabras, la convergencia w es la convergencia “contra toda φ del dual”, y la w^* es ni más ni menos que la puntual. Observar que estas caracterizaciones muestran, en particular, que las topologías débiles recién definidas son efectivamente más débiles que las del ambiente (cuando las hay). Veremos ahora una importantísima consecuencia del teorema de separación de HB 10.3.5, que va en la otra dirección: ▲

Proposición 10.5.2. Sea (E, τ) un ELC, y sea $A \subseteq E$ un conjunto **convexo**. Luego

$$\overline{A}^\tau = \overline{A}^{\sigma(E, E_\tau^*)}.$$

Es decir que, para un convexo, las clausuras fuerte y débil coinciden.

Demostración. Es claro que $\sigma(E, E_\tau^*) \subseteq \tau \implies \overline{A}^\tau \subseteq \overline{A}^{\sigma(E, E_\tau^*)}$, por ejemplo porque en τ es más difícil converger. Tomemos ahora cualquier $x \in E \setminus \overline{A}^\tau$. Como E es ELC, existe un entorno abierto y convexo U de x tal que $U \cap \overline{A}^\tau = \emptyset$. Además, la Prop. 10.2.1 nos asegura que $\overline{A}^\tau$ sigue siendo convexo. Estamos en las condiciones del Teo. 10.3.5, que asegura la existencia de una $\varphi \in (E_\tau^*)_\mathbb{R}$ y un $t \in \mathbb{R}$ tales que

$$\varphi(U) < t \leq \varphi(\overline{A}^\tau) \implies \varphi(x) = t_0 < t \leq \varphi(\overline{A}^\tau).$$

Por un lado, tenemos que $\overline{A}^\tau \subseteq F = \{y \in E : \varphi(y) \geq t\}$. Si recordamos que $\varphi \in (E_\tau^*)_\mathbb{R}$, deducimos que F es $\sigma(E, E_\tau^*)$ -cerrado. Pero además tenemos que $x \notin F$, por lo que menos podría estar en $\overline{A}^{\sigma(E, E_\tau^*)} \subseteq F$. Con todo esto vimos que $\overline{A}^{\sigma(E, E_\tau^*)} \subseteq \overline{A}^\tau$. ■

Corolario 10.5.3. Sea (E, τ) un ELC. Si $A \subseteq E$ es convexo y τ -cerrado, entonces debe ser también $\sigma(E, E_\tau^*)$ -cerrado. Observar que podemos aplicar esto a subespacios τ -cerrados y, en el caso de que E fuera normado, a las bolas cerradas. Esto dice que la convergencia w no puede “agrandar normas”. ■

Ejercicio 10.5.4. Sea E un espacio normado. Dada una sucesión $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} 0$, probar que existe otra sucesión $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que ahora vive en $\text{Conv} \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|} 0$. ▲

El siguiente resultado dice, en particular, que el Cor. 10.5.3 falla si no pedimos que los conjuntos sean convexos. Por lo general, sucede el fenómeno de que las clausuras débiles “llenan agujeros”, como veremos a continuación:

Proposición 10.5.5. Si E es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces la clausura de $S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ en la topología $w = \sigma(E, E^*)$ es toda la bola B_E .

Demostración. Antes que nada, el Cor. 10.5.3 asegura que B_E es $\sigma(E, E^*)$ -cerrada. Para probar que $B_1 = \{x \in E : \|x\| < 1\} \subseteq \overline{S_E}^{\sigma(E, E^*)}$ basta demostrar que todo entorno V de todo $x_0 \in B_1$ corta a la esfera S_E . Tomemos un básico

$$V = \{x \in E : |\varphi_k(x) - \varphi_k(x_0)| < \varepsilon, \quad k \in \mathbb{I}_n\} ,$$

para ciertos $\varepsilon > 0$ y $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E^*$. Observemos que $M = \bigcap_{k \in \mathbb{I}_n} \ker \varphi_k \neq \{0\}$, porque si no la función lineal $E \ni z \mapsto (\varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z)) \in \mathbb{C}^n$ sería inyectiva, por lo que E tendría dimensión finita. Pero $x_0 + M \subseteq V$. Tomemos un $z_0 \in M \setminus \{0\}$, y la función

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} , \quad \text{dada por} \quad f(t) = \|x_0 + tz_0\| .$$

Es claro que f es continua, $f(0) = \|x_0\| < 1$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = +\infty$. Luego existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\|x_0 + t_0 z_0\| = f(t_0) = 1$, lo que significa que $x_0 + t_0 z_0 \in V \cap S_E$. ■

La Prop. 10.5.2 estudia clausuras con la topología w de un normado. En caso de que este sea el dual de alguien, tiene también su w^* (que es más débil aún que su w , porque usa solo funcionales de su pre-dual, que son muchas menos que las de su post-dual). Veremos a continuación el renombrado teorema de Goldstine que dice que clausuras en norma y en la w^* pueden no coincidir, aún en conjuntos convexos, y muy famosos. Pero antes de enunciarlo repasemos unas cosas.

Recordemos que, dado un espacio normado E , denotamos por $J_E : E \hookrightarrow E^{**}$ denota a la isometría natural, que en general no es epi. Por ello, $J_E(B_E)$ es cerrada en la norma de E^{**} (siempre que E sea un Banach), pero por lo general (si E no es reflexivo) es mucho más chica que $B_{E^{**}}$. Sin embargo, para la otra topología usual de E^{**} , que es la $\sigma(E^{**}, E^*)$ (o sea la w^* de E^{**}), veremos que $J_E(B_E)$ es siempre **densa** en E^{**} :

Teorema 10.5.6 (Goldstine). Sea E es un espacio normado y $J_E : E \hookrightarrow E^{**}$ es la isometría natural. Llamemos $B = J_E(B_E) \subseteq E^{**}$ (que es $\|\cdot\|$ -cerrada). Luego vale que

$$B \quad \text{es } \sigma(E^{**}, E^*) \text{ densa en } B_{E^{**}} , \quad \text{o sea que} \quad \overline{J_E(B_E)}^{w^*} = B_{E^{**}} . \quad (10.17)$$

Si bien esta formulación es muy rimbombante, demos también esta otra más concreta:

Para toda $\rho \in B_{E^{**}}$ existe una red $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en B_E tal que $\varphi(x_i) \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} \rho(\varphi)$,

para todas las $\varphi \in E^*$ (con la misma red).

Demostración. En principio hace falta ver que $\overline{B}^{w^*} \subseteq B_{E^{**}}$, lo que significa que el tomar límites w^* no agranda las normas. En efecto, si tomamos una red $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en B_E , y asumimos que $J_E x_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} \rho \in E^{**}$, para cada $\varphi \in B_{E^*}$ nos da que

$$\rho(\varphi) = \lim_{i \in \mathbb{I}} J_E x_i(\varphi) = \lim_{i \in \mathbb{I}} \varphi(x_i) .$$

Como todos los términos $\varphi(x_i)$ cumplen que $|\varphi(x_i)| \leq \|\varphi\| \|x_i\| \leq 1$, vemos que $|\rho(\varphi)| \leq 1$. Como $\varphi \in B_{E^*}$ era cualquiera, deducimos que $\|\rho\| \leq 1$, o sea que $\rho \in B_{E^{**}}$.

Llamemos $A = \overline{B}^{w^*}$, que es convexo y w^* -cerrado (incluso más: en breve veremos que es w^* -compacto por Alaoglu). Supongamos que existe un $\rho \in B_{E^{**}} \setminus A$. Como (E^{**}, w^*) es un ELC, podemos encontrar un abierto $U \in \sigma(E^{**}, E^*)$ que cumpla las siguientes condiciones:

$$U \text{ es convexo} \quad , \quad \rho \in U \quad \text{y} \quad U \cap A = \emptyset \quad .$$

Les podemos aplicar el teorema separación de H-B 10.3.5 a los convexos A y U (con éstos últimos w^* -abierto). Él nos dice que existe una funcional $\Phi \in (E^{**}, w^*)^*$ tal que

$$\operatorname{Re} \Phi(A) \leq t < \operatorname{Re} \Phi(U) \quad , \quad \text{para cierto } t \in \mathbb{R} \quad .$$

Como $0 \in A$, vemos que $t \geq 0$. Observar que, por el Teo. 10.1.7, sabemos que

$$(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))^* = J_{E^*}(E^*) \subseteq E^{***} \implies \Phi = J_{E^*} \varphi \quad \text{para cierta } \varphi \in E^* \quad .$$

Así que, si tomamos un $x \in B_E$, como $J_E x \in A$, tendremos que

$$t \geq \operatorname{Re} \Phi(J_E x) = \operatorname{Re} J_{E^*} \varphi(J_E x) = \operatorname{Re} J_E x(\varphi) = \operatorname{Re} \varphi(x) \quad .$$

Pero si $\varphi(x) = e^{i\theta} |\varphi(x)|$, la misma desigualdad vale para $y = e^{-i\theta} x \in B_E$. Luego,

$$|\varphi(x)| = e^{-i\theta} \varphi(x) = \varphi(y) = \operatorname{Re} \varphi(y) \leq t \quad .$$

Esto dice que $\|\Phi\| = \|\varphi\| = \sup_{x \in B_E} |\varphi(x)| \leq t$. Lamentablemente, por otro lado tendremos que

$$\|\Phi\| \leq t < \operatorname{Re} \Phi(\rho) \leq |\Phi(\rho)| \leq \|\Phi\| \|\rho\| \leq \|\Phi\| \quad (\text{porque } \rho \text{ estaba en } B_{E^{**}}) \quad .$$

Este desastre provino de suponer que $B_{E^{**}} \setminus A \neq \emptyset$, y a otra cosa mariposa. ■

Observación 10.5.7. El Teorema de Goldstine tiene aplicaciones en la dirección de caracterizar la reflexividad de espacios de Banach (que ya veremos). Sin embargo, su formulación concreta es también muy útil en varios contextos. El más interesante lo contaremos someramente a continuación, a pesar de que habrá que creer un montón de cosas.

Sea X un ET compacto Hausdorff. Tomemos el espacio de Banach $C(X) = C(X, \mathbb{C})$, con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Un famoso teorema de Riesz dice que $C(X)^* = M(X)$, que es el espacio de medidas Borelianas, complejas y regulares, dotado de la norma $\|\mu\| = |\mu|(X)$, donde $|\mu|$ es la *variación total* de μ (que es una medida positiva finita). Las definiciones de estas cosas pueden encontrarse en cualquier tratado de teoría de la medida, o de AF, así que sigamos sin entrar en detalles. La acción de $M(X)$ sobre $C(X)$ está dada por la integración. O sea:

$$\text{Fijada } \mu \in M(X) \quad , \quad \text{hacemos} \quad \varphi_\mu(f) = \int_X f \, d\mu \quad , \quad \text{para cada} \quad f \in C(X) \quad .$$

Ahora bien, el espacio $C(X)^{**} = M(X)^*$ es inabordable. Pero uno conoce muchos de sus elementos. Por ejemplo, si $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ es medible Borel y acotada, se puede definir

$$\rho_g \in M(X)^* \quad \text{dada por} \quad \rho_g(\mu) = \int_X g \, d\mu, \quad \text{para cada} \quad \mu \in M(X).$$

Más aún, es fácil ver (si uno sabe algo de estas cosas) que $\|\rho_g\| = \|g\|_\infty$. Por ejemplo,

$$\left| \int_X g \, d\mu \right| \leq \int_X |g| \, d|\mu| \leq \|g\|_\infty |\mu|(X) = \|g\|_\infty \|\mu\|.$$

La otra desigualdad sale usando las medidas puntuales $\delta_x \in M(X)$, ($x \in X$) que integran evaluando en x y tienen norma uno. Ahora llegamos al Teorema de Goldstine 10.5.6. Él nos dice que, para cada $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ medible Borel y acotada, se puede encontrar una red $\mathbf{f} = (f_i)_{i \in \mathbb{I}}$ en $C(X)$ tal que $\|f_i\|_\infty \leq \|\rho_g\| = \|g\|_\infty$ para todo $i \in \mathbb{I}$, que además cumple que

$$\int_X f_i \, d\mu \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} \int_X g \, d\mu, \quad \text{para toda} \quad \mu \in M(X). \quad (10.18)$$

Es divertido observar que el hecho de que $f_i \xrightarrow{i \in \mathbb{I}}^w g$ significaba que convergen “puntualmente”, pero que en este contexto los “puntos” vendrían a ser todas las medidas $\mu \in M_r(X)$. Como ellas incluyen a las μ_x para los $x \in X$, eso es decir mucho más que la otra noción de convergencia “puntual” dada por $f_i(x) \xrightarrow{i \in \mathbb{I}} g(x)$ para todo $x \in X$.

La Ec. (10.18) da una aproximación débil de las acotadas por las continuas (del mismo tamaño y para todas las medidas con una sola red) que es interesante en sí misma, pero sobre todo es de capital importancia al estudiar el teorema espectral para operadores acotados autoadjuntos en espacios de Hilbert.

Todo lo anterior se puede generalizar al caso en que X sea tan solo LKH, y el Banach sea $C_0(X)$, cuyo dual sigue siendo $M(X)$. Aplicando esto a $X = \mathbb{N}$ con la topología discreta, releemos lo anterior como:

$$c_0^* = \ell^1 = M(\mathbb{N}) \quad , \quad (\ell^1)^* = \ell^\infty \quad \text{y que } \mathbf{truncar} \text{ aproxima } w^* \text{ a los elementos de } \ell^\infty.$$

Esto sale a mano, pero da una idea del tipo de teorema que hemos visto. ▲

10.6 Alaoglu

El siguiente teorema es lo más importante de todo el Capítulo. Para medir su impacto, baste decir que ningún espacio normado infinitodimensional puede tener bolas compactas. La prueba de eso es elemental, pero la dejamos para AF. El tema es que los espacios de Banach, aún siendo métricos completos, no son casi nunca localmente compactos. Y para peor, la falta compacidad local hace fallar casi la mitad de los teoremas que uno quisiera probar, y que hasta uno se cree que deben ser ciertos, porque en caso finito parecen elementales. Pero el hecho de que, en ciertos casos, uno pueda usar que la bola es compacta, aunque sea para una topología drásticamente más débil, muchas veces saca las papas del fuego.

Teorema 10.6.1 (Alaoglu). Sea E un espacio normado. Entonces se tiene que

$$B_{E^*} = \{\varphi \in E^* : \|\varphi\| \leq 1\} \quad \text{es } \sigma(E^*, E)\text{-compacta} .$$

Demostración. Abreviemos $B_{E^*} = B$. Los $\varphi \in B$ cumplen que $|\varphi(x)| \leq \|x\|$ para cada $x \in E$. Llamemos $\mathbb{D}_x = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq \|x\|\}$. Entonces $\varphi(x) \in \mathbb{D}_x$ para cada $x \in E$. Hagamos el producto $\mathbb{D} = \prod_{x \in E} \mathbb{D}_x$, dotado de la topología producto. Sabemos que $\mathbb{D}$ es compacto, por el teorema de Tychonoff. Para probar el teorema mostraremos que $(B, \sigma(E^*, E))$ es homeomorfo a un subconjunto cerrado de $\mathbb{D}$.

Definamos $\Phi : B \rightarrow \mathbb{D}$, por $\Phi(\varphi) = \{\varphi(x)\}_{x \in E}$, para $\varphi \in B$. Veamos que, si

$$\mathcal{C} = \left\{ \{\lambda_x\}_{x \in E} \in \mathbb{D} : \lambda_{x+y} = \lambda_x + \lambda_y \text{ y } \lambda_{\alpha x} = \alpha \lambda_x \text{ para todo } x, y \in E, \alpha \in K \right\} ,$$

entonces $\Phi(B) = \mathcal{C}$. En efecto, si $\varphi \in B$ entonces $\Phi(\varphi)$ cumple las condiciones de linealidad que definen a $\mathcal{C}$. Recíprocamente, si $\lambda = \{\lambda_x\}_{x \in E} \in \mathcal{C}$, entonces consideremos la funcional

$$\varphi_\lambda : E \rightarrow \mathbb{K} \quad \text{dada por} \quad \varphi_\lambda(x) = \lambda_x, \quad \text{para } x \in E .$$

Las propiedades del conjunto $\mathcal{C}$ hacen que φ_λ sea lineal. Pero además $|\varphi_\lambda(x)| = |\lambda_x| \leq \|x\|$, para todo $x \in E$. Luego tenemos que $\varphi_\lambda \in B$. De lo anterior deducimos que Φ es una biyección de B sobre $\mathcal{C}$. Para ver que $\mathcal{C}$ es cerrado, basta notar que $\mathcal{C}$ coincide con la intersección de los núcleos de las funcionales continuas de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{C}$ de la forma

$$\mathbb{D} \ni \lambda \mapsto \lambda_{y+z} - \lambda_y - \lambda_z \quad (y, z \in E) \quad \text{y} \quad \mathbb{D} \ni \lambda \mapsto \lambda_{\alpha y} - \alpha \lambda_y \quad (y \in E, \alpha \in \mathbb{K}) .$$

Solo falta ver que $\Phi : B \rightarrow \mathcal{C}$ es hómoio (si en $\mathcal{C}$ usamos la topología inducida por la producto de $\mathbb{D}$). Pero esto último es inmediato, pues basta observar que en ambos conjuntos la convergencias coinciden: ambas son la convergencia coordenada a coordenada, para cada $x \in E$. En $\mathcal{C}$ porque así es la topología producto. En B porque allí usamos la w^* . ■

Este resultado da una interpretación infinitodimensional al cántico de los estudiantes de Nuñez las marchas: “Exactas, Exactas, las bolas bien compactas”.

Corolario 10.6.2. Todo espacio de Banach E es isométricamente isomorfo a un subespacio cerrado de $C(K)$ para un conveniente ET compacto Hausdorff K .

Demostración. Sea $K = (B_{E^*}, \sigma(E^*, E))$, que sabemos que es compacto por el teorema de Alaoglu. Definamos ahora la función $T : E \rightarrow C(K)$ dada por la composición

$$E \xrightarrow{J_E} E^{**} \xrightarrow{\cdot|_{B_{E^*}}} C(K) , \quad \text{o sea} \quad T(x) = J_E x|_{B_{E^*}} , \quad x \in E .$$

Es fácil ver que $T(x) = J_E x|_{B_{E^*}}$ es $\sigma(E^*, E)$ -continua, porque esta topología es la de la convergencia puntual, y $T(x)$ actúa en B_{E^*} por evaluación en el punto x .

Por otro lado, la función T , además de ser evidentemente lineal, es isométrica. Esto se prueba directamente a partir de las definiciones involucradas (se usa la Ec. (10.12)). La imagen de T es un subespacio cerrado de $C(K)$, pues E es completo y T es isométrica. ■

Mejoraremos el resultado anterior en el caso en que E es separable. Para ello, necesitamos un lema específico:

Lema 10.6.3. Sea (K, τ) un ET compacto tal que $C(K)$ tiene un subconjunto numerable $\mathcal{F}$ que separa puntos de K . Entonces el espacio K es metrizable.

Demostración. Pongamos que $\mathcal{F} = \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq C(X)$ separa puntos de K . Entonces

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)|}{1 + |\varphi_n(x) - \varphi_n(y)|}, \quad x, y \in K,$$

define una distancia sobre K . Como todas las φ_n son τ -continuas, también lo serán las funciones $d_x : K \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $d_x(y) = d(x, y)$, ($y \in K$). Como $B_d(x, \varepsilon) = d_x^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon) \in \tau$, deducimos que la topología métrica $\tau_d \subseteq \tau$. Por otro lado, si $F \subseteq K$ es τ -cerrado, entonces F es τ -compacto, y por ende τ_d -compacto. Como τ_d es de Hausdorff (es métrica), queda que F es también τ_d -cerrado. Todo esto dice que $\tau_d = \tau$. O sea que K era metrizable. ■

Proposición 10.6.4. Si E es un espacio de Banach separable, entonces todo subconjunto $\sigma(E^*, E)$ -compacto K de E^* es metrizable.

Demostración. Si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en E entonces $\{J_E x_n : n \in \mathbb{N}\}$ distingue los puntos de E^* y, con mayor razón, los de K . Luego se aplica el lema anterior. ■

Corolario 10.6.5. Si E es un Banach separable, entonces $(B_{E^*}, \sigma(E^*, E))$ es un ET compacto metrizable y E es isométricamente isomorfo a un subespacio cerrado de $C(B_{E^*})$. ■

Observación 10.6.6. Fijemos un espacio de Banach E con $\dim E = \infty$. En la demostración de la Prop. 10.5.5 hemos probado que todo entorno básico del 0 en $\sigma(E, E^*)$ contiene subespacios de codimensión finita. En particular, esto muestra que todos los entornos básicos son no acotados. Pero sirve además para probar que la topología $\sigma(E, E^*)$ no puede ser N_1 .

Observar que, en el caso en que E sea separable, reflexivo y por ello en E coincidan la w con la w^* de su predual (esto lo probaremos detalladamente en breve), esto marca una diferencia esencial entre el comportamiento de las topologías débiles, entre su restricción a una bola cerrada (donde queda metrizable), y lo que pasa en todo el espacio (no es ni N_1).

Veamos que no queda N_1 : Supongamos que tenemos $\beta = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable en entornos básicos del 0. Para cada $U_n \in \beta$, definamos por $S_n \subseteq E^*$ al subespacio generado por las **finitas** funcionales de E^* que lo generan. Llamemos

$$M_n = S_n^0 = \bigcap_{\varphi \in S_n} \ker \varphi \subseteq E,$$

que es un subespacio cerrado de codimensión finita (basta intersectar los núcleos de los finitos generadores del entorno U_n). Observar que $M_n \subseteq U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por el Teorema de Baire 7.3.1, una unión **numerable** de subespacios finitodimensionales no puede cubrir a todo el Banach E^* (son cerrados de interior vacío). Tomemos entonces una funcional $\varphi_0 \in E^* \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n \neq \emptyset$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el Lema 10.1.8 nos dice que

$$\varphi_0 \notin S_n \iff M_n = \bigcap_{\varphi \in S_n} \ker \varphi \not\subseteq \ker \varphi_0, \quad (10.19)$$

de nuevo porque podemos realizar a M_n como una intersección finita de núcleos. Ahora bien, tomemos el entorno $U_0 = \{x \in E : |\varphi_0(x)| < 1\}$. Si me dan cualquier $n \in \mathbb{N}$, por la Ec. (10.19) puedo encontrar un $x_n \in M_n$ tal que $\varphi_0(x_n) \neq 0$. Luego existe un $N \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $|\varphi_0(Nx_n)| = N|\varphi_0(x_n)| > 1$, por lo que $Nx_n \notin U_0$, aunque sigue pasando que $Nx_n \in M_n \subseteq U_n$. En otras palabras, ningún U_n vive adentro de U_0 , así que β no puede ser una base de entornos del cero. Por todo ello, $(E, \sigma(E, E^*))$ NO es N_1 . ▲

10.7 Una caracterización de la reflexividad

Teorema 10.7.1. Si E es un espacio de Banach, entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

1. E es reflexivo.
2. E^* es reflexivo.
3. $\sigma(E^*, E) = \sigma(E^*, E^{**})$, o sea que, en E^* , coinciden la w y la w^* .
4. B_E es $\sigma(E, E^*)$ -compacta (i.e., la bola de E es w -compacta).

Demostración. $1 \Rightarrow 3$: Como $J_E : E \rightarrow E^{**}$ es sobre, las topologías $\sigma(E^*, E)$ y $\sigma(E^*, E^{**})$ están generadas por las mismas funcionales, por lo que coinciden.

$4 \Rightarrow 1$: Llamemos $F = J_E(E) \subseteq E^{**}$. Como J_E es isométrica, $B_F = J_E(B_E)$. La biyección J_E permite trasladar la topología $\sigma(E, E^*)$ a F , donde es claro que coincide con la inducida por $\sigma(E^{**}, E^*)$ sobre F . Luego, por 4, B_F es $\sigma(E^{**}, E^*)$ -compacta y por lo tanto $\sigma(E^{**}, E^*)$ -cerrada. Sin embargo, el teorema de Goldstine 10.5.6 dice que B_F es $\sigma(E^{**}, E^*)$ -densa en $B_{E^{**}}$. Ambos hechos prueban que $B_F = B_{E^{**}}$, por lo que J_E debe ser epi, y E reflexivo.

$3 \Rightarrow 2$: Por el teorema de Alaoglu 10.6.1, B_{E^*} es $\sigma(E^*, E)$ -compacta. Por la condición 3, B_{E^*} es $\sigma(E^*, E^{**})$ -compacta. Apliquemos ahora al espacio E^* la implicación $4 \Rightarrow 1$ ya demostrada, y resulta que E^* es reflexivo.

$2 \Rightarrow 1$: Sigamos con la notación $J_E(E) = F \subseteq E^{**}$. Recordemos que, por la Prop. 10.5.2, la bola $B_F \subseteq E^{**}$, al ser $\|\cdot\|$ -cerrada y convexa, debe ser también $\sigma(E^{**}, E^{***})$ -cerrada. Como E^* es reflexivo B_F es también $\sigma(E^{**}, E^*)$ -cerrada (ya vimos que $1 \Rightarrow 3$). Pero por el teorema de Goldstine 10.5.6, B_F es $\sigma(E^{**}, E^*)$ -densa en $B_{E^{**}}$. Así, B_F coincide con $B_{E^{**}}$ y, como en $4 \Rightarrow 1$, E nos queda reflexivo.

$1 \Rightarrow 4$: El teorema de Alaoglu 10.6.1 dice que $B_{E^{**}}$ es $\sigma(E^{**}, E^*)$ -compacta. Pero si E es reflexivo, pasa que $F = E^{**}$ y $B_F = B_{E^{**}}$, que es $\sigma(E^{**}, E^*)$ -compacta. Volviendo a E con la biyección J_E^{-1} , que manda B_F en B_E y transforma a $\sigma(E^{**}, E^*)$ en $\sigma(E, E^*)$, tenemos que B_E es $\sigma(E, E^*)$ -compacta. ■

10.8 Ejercicios

Ejercicio 10.8.1. Sea E un $\mathbb{K}$ -EV. Se tienen las siguientes propiedades:

1. La intersección de cualquier cantidad de conjuntos convexos en E queda convexa.
2. El trasladar a un convexo le conserva esa propiedad. Es decir que si $A \subseteq E$ es convexo, también lo será $A + x = \{a + x : a \in A\}$, para todo $x \in E$.
3. Más aún, si $A, B \subseteq E$ son ambos convexos, también $A + B = \{a + b : a \in A \text{ y } b \in B\}$ queda convexo.
4. Si $A \subseteq E$ es convexo, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene que $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$ es convexo.
5. Dada un topología τ que haga de E un EVT, para todo convexo $A \subseteq E$ se tiene que su τ -clausura $\overline{A}^\tau$ es también convexo.

Ejercicio 10.8.2. Sea (E, τ) es un ELC. Dados $K \subseteq E$ convexo compacto y $F \subseteq E$ convexo cerrado tales que $K \cap F = \emptyset$, existen una $\varphi \in (E, \tau)_{\mathbb{R}}^*$ y un $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\max_{x \in K} \varphi(x) < \alpha \leq \min_{y \in F} \varphi(y) . \quad \blacktriangle$$

Ejercicio 10.8.3. Sea E es un EVT. Dados $K \subseteq E$ y $\varphi \in E'_{\mathbb{R}}$, probar que

1. Los siguientes dos conjuntos son extremales para K (o vacíos):

$$m_\varphi(K) = \{x \in K : \varphi(x) = \inf_{y \in K} \varphi(y)\} \quad \text{y} \quad M_\varphi(K) = \{x \in K : \varphi(x) = \sup_{y \in K} \varphi(y)\} .$$

2. Si E era un ELC, K era **compacto** y $\varphi \in E^*$, entonces $m_\varphi(K) \neq \emptyset \neq M_\varphi(K)$.
3. En las condiciones anteriores, si $x \in \text{Ext}(K)$, existe una $\phi \in E^*$ tal que $x \in m_\phi(K)$.
4. Haciendo dibujos de convexos en $\mathbb{R}^2$ uno podría arriesgar que en el item anterior se podría conseguir una $\phi \in E^*$ tal que $m_\phi(K) = \{x\}$ solito. Pero eso es falso en general (aún si K es compacto). Contraejemplificarlo en $\mathbb{R}^2$. ▲

Ejercicio 10.8.4. Sea E es un $\mathbb{K}$ -EV y sea $K \subseteq E$. Si me dan un conjunto $A_0 \subseteq K$ que es extremal para K , y otro $A_1 \subseteq A_0$ que es extremal para A_0 , probar que A_1 es también extremal para K . ▲

Ejercicio 10.8.5. Sea E es un $\mathbb{K}$ -EV. Sean $K \subseteq E$ un convexo, y $x \in K$. Probar que

$$x \in \text{Ext}(K) \iff K \setminus \{x\} \text{ sigue siendo convexo} . \quad \blacktriangle$$

Ejercicio 10.8.6. Sea (E, τ) un ELC.

1. Encontrar un compacto $K \subseteq E$ (ahora no convexo) tal que $\text{Conv} K$ no es compacto.
2. En cambio, si también $\text{Conv} K$ es compacto, entonces $\text{Ext}(\text{Conv} K) \subseteq K$. ▲

Ejercicio 10.8.7. Encontrar dentro de $\mathbb{R}^3$ un conjunto convexo compacto K tal que $\text{HExt}(K)$ no sea cerrado. ▲

Ejercicio 10.8.8. Sean E un EN, $x \in E$ y una sucesión $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en E tales que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} x$, probar que

1. Nuestra $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ debe ser acotada en norma.
2. Además $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$.
3. Existe otra sucesión $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que ahora vive en la cápsula convexa $\text{Conv} \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ que cumple la condición más fuerte $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|} 0$. ▲

Ejercicio 10.8.9. Probar que no existe ningún normado E tal que $E^* \cong L^1(\mathbb{R})$ donde $\cong$ significa iso isométrico sobre (idem para $\mathbb{R}^n$ o el $[0, 1]$). Esto suele resumirse como que $L^1(\mathbb{R})$ “no es el dual de nadie”.

Sug: Si existiera el tal E se podrían aplicar eventuales teoremas de Alaoglu y Krein-Milman para mostrar que la $B_{L^1(\mathbb{R})}$ debería tener puntos extremos. ¿Los tiene?

Ejercicio 10.8.10. Sea E un EB. Dados $x \in E$ y una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en E , probar que

1. Si $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ entonces $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} x$.
2. Si $\dim E < \infty$, ahí vale que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x \iff x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} x$.

Ejercicio 10.8.11. Sean E y F espacios de Banach y $T : E \rightarrow F$ una transformación lineal. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. T es acotada.
2. $T^*(F^*) \subseteq E^*$.
3. T es continua de (E, w) en (F, w) .

Ejercicio 10.8.12. Sea E un EB de dimensión infinita. Probar que la bola $B_E^a = \{x \in E : \|x\| < 1\}$ tiene interior vacío (!) si la pensamos en (E, w) .

Ejercicio 10.8.13. Sea E un EB. Dados $\varphi \in E^*$ y una sucesión $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en E^* , probar que

1. $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi \implies \varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} \varphi \implies \varphi \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w^*} \varphi$.
2. Si $\dim E < \infty$, las tres convergencias son equivalentes.

Ejercicio 10.8.14. Sea $E = \ell^\infty(\mathbb{N})$. Si $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es la sucesión en E^* dada por $\varphi_n(\mathbf{x}) = x_n$ para $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ y $n \in \mathbb{N}$. Probar que

1. Las $\varphi_n \in B_{E^*}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. Sin embargo, $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no tiene ninguna subsucesión w^* -convergente.

¿Contradice esto el hecho de que B_{E^*} es w^* -compacta?

Ejercicio 10.8.15. Sean $1 < p < \infty$. Dados $\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(n)} \in \ell^p$ ($n \in \mathbb{N}$), probar que

$$\mathbf{x}^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbf{x} \iff \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mathbf{x}^{(n)}\|_p < \infty \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_k^{(n)} = x_k \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio 10.8.16. Sea $\mathcal{H}$ un EH. Dados $x \in \mathcal{H}$ y una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}$, probar que

1. $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} x \iff \langle x_n, y \rangle \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \langle x, y \rangle$ para todo $y \in \mathbb{H}$ (este es Rieszable).

2. Si $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un SON en $\mathcal{H}$, entonces $e_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} 0$.

Ejercicio 10.8.17. Sean $\varphi \in L^\infty[0, 1]$ y $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $L^\infty[0, 1]$. Consideremos los operadores de multiplicación asociados M_φ y M_{φ_n} ($n \in \mathbb{N}$) todos ellos en $L(L^2[0, 1])$. Probar que

$$\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w^*} \varphi \quad \text{en } L^\infty[0, 1] = L^1[0, 1]^* \iff M_{\varphi_n} f \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} M_\varphi f \quad \text{para toda } f \in L^2[0, 1].$$

Ejercicio 10.8.18. Probar que $C[0, 1]$ es cerrado en $L^\infty[0, 1]$ con la topología inducida por la norma $\|\cdot\|_\infty$ pero no en la topología w^* .

Ejercicio 10.8.19. Sea E un EVT. Dados $K, V \subseteq E$ tales que K es compacto y V es abierto y $K \subseteq V$, probar que existe un entorno U del cero tal que $K + U \subseteq V$.

Ejercicio 10.8.20. Sea E un espacio vectorial y A y B subconjuntos convexos de E . Probar que para todo par de números reales a y b el conjunto $aA + bB$ es convexo.

Ejercicio 10.8.21. Sea E un espacio vectorial y A un subconjunto convexo de E . Probar que

$$\text{si } x \in A^\circ \quad \text{and} \quad y \in \overline{A} \implies [x, y] \stackrel{\text{def}}{=} \{(1 - \lambda)x + \lambda y : \lambda \in [0, 1]\} \subseteq A^\circ.$$

Ejercicio 10.8.22. Sea E un espacio de Banach reflexivo y F un subespacio cerrado de E . Probar que para todo $x \notin F$ existe un $x_0 \in F$ tal que $\|x - x_0\| = \min\{\|x - y\| : y \in F\}$.

Ejercicio 10.8.23. Sean E, F dos EB y sea $T \in L(E, F)$. Probar que T^* pensado como $T^* : (F^*, w^*) \rightarrow (E^*, w^*)$ es también continua. Deducir que $T^*(B_{F^*})$ es $\|\cdot\|$ cerrada en E^* .

Sug: Si $\varphi_i \xrightarrow[i \in \mathbb{I}]{w^*} \varphi$ en F^* y $x \in E$, entonces $T^*_{\varphi_i} x = \varphi_i(Tx) \xrightarrow[i \in \mathbb{I}]{} \varphi(Tx) = T^*_\varphi x$.

Veamos un ejemplo: Sea $T \in L(\ell^2, \ell^1)$ dada por $T\mathbf{x} = (\frac{x_n}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ para $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$.

1. Usando Cauchy-Schwarz mostrar que $\|T\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} 1/n^2$.

2. Su adjunto $T^* \in L(\ell^\infty, \ell^2)$ se define (en las entradas) igual que T , multiplicando por $\frac{1}{n}$.

3. Mostrar que $T^*(B_{\ell^\infty})$ es compacta. ▲

Definición 10.8.24. Sean E y F dos EB's. Fijemos una red $\mathbf{T} = (T_i)_{i \in \mathbb{I}}$ y un T , todos en $L(E, F)$.

1. Decimos que $T_i \xrightarrow[i \in \mathbb{I}]{\text{S.O.T.}} T$ (se lee “ T_i converge fuertemente a T ”) si para cualquier $x \in E$ se tiene que

$$T_i x \xrightarrow[i \in \mathbb{I}]{\|\cdot\|} T x \quad (\text{en la norma de } F).$$

2. En cambio $T_i \xrightarrow[i \in \mathbb{I}]{\text{W.O.T.}} T$ (se lee “ T_i converge débilmente a T ”) si para cualquier $x \in E$ se tiene que

$$T_i x \xrightarrow[i \in \mathbb{I}]{w} T x \quad (\text{en la débil } \sigma(F, F^*) \text{ de } F). \quad \text{En otras palabras, si}$$

$$\langle T_i x, \varphi \rangle \xrightarrow[i \in \mathbb{I}]{} \langle T x, \varphi \rangle \quad \text{para todo par } x \in E, \varphi \in F^*. \quad \text{▲}$$

Ejercicio 10.8.25. Sean E y F dos EB's. En $L(E, F)$ se consideran las topologías S.O.T y W.O.T vía las convergencias homónimas.

1. Caracterizar las familias de seminormas que producen las topologías S.O.T y W.O.T de $L(E, F)$.

2. Describir los entornos (sub)básicos del 0 de las mismas.

Capítulo 11

Homotopía

Este capítulo está basado en las notas escritas por C. Eugenio Echagüe y Gisela Tartaglia, que a su vez se basaron en el capítulo correspondiente del libro de Munkres [2].

11.1 Homotopía de curvas

A lo largo de este Capítulo llamaremos I al intervalo cerrado $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

Definición 11.1.1. Sean X e Y dos ET's. Dadas dos funciones $f_0, f_1 \in C(X, Y)$, decimos que f_0 es **homotópica** a f_1 (y escribimos $f_0 \cong f_1$), si existe una función **continua**

$$F : X \times I \rightarrow Y \text{ tal que } F(x, 0) = f_0(x) \text{ y } F(x, 1) = f_1(x) \text{ para cada } x \in X. \quad (11.1)$$

A una tal función F se la llama *homotopía* entre f_0 y f_1 . Si f_1 es una función constante, diremos que f_0 es **homotópicamente nula**. ▲

Si pensamos al parámetro t como representante del tiempo, la homotopía F describe una deformación continua de f_0 en f_1 , cuando t se mueve de 0 a 1, donde las deformaciones intermedias (para $t \in (0, 1)$) serían las funciones $f_t \in C(X, Y)$ dadas por $f_t(x) = F(x, t)$, $x \in X$. Un caso particularmente importante de funciones son las curvas entre dos puntos. Para ellas se define una relación de homotopía más restrictiva:

Definición 11.1.2. Sea (X, τ) un ET.

1. Dados $x_0, x_1 \in X$, diremos que una función $\gamma \in C(I, X)$ es una **curva** de x_0 a x_1 si $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x_1$. Los puntos x_0 y x_1 se llamarán punto inicial y final de γ .
2. Dadas dos curvas γ y ρ , ambas de x_0 a x_1 , decimos que son **homotópicas como curvas** si existe entre ellas una homotopía que fija los puntos x_0 y x_1 todo el “tiempo”

$$F : I \times I \rightarrow X \text{ como en (11.1) tal que } F(0, t) = x_0 \text{ y } F(1, t) = x_1 \text{ para todo } t \in I,$$

cosa que llamaremos “una homotopía de curvas” (o p -homotopía). En tal caso escribiremos que $\gamma \cong_p \rho$, y también diremos que γ y ρ son p -homotópicas. ▲

Observación 11.1.3. Sea A un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Entonces, dos curvas cualesquiera γ, ρ en A de x_0 a x_1 son p -homotópicas en A , ya que la función

$$F : I \times I \rightarrow A \text{ dada por } F(x, t) = (1 - t)\gamma(x) + t\rho(x), \text{ para } (x, t) \in I \times I$$

es una p -homotopía entre γ y ρ . A una tal F se la llama **homotopía por rectas**. ▲

Observación 11.1.4. Tanto $\cong$ como $\cong_p$ son relaciones de equivalencia. Las demostraciones son tediosas pero elementales, se basan en reparametrizar y “pegar” homotopías, trabajo que dejamos como ejercicio. La herramienta principal es el Lema del pegoteo (2.5.6).

Dada una curva γ , denotaremos por $[\gamma]$ a su clase de equivalencia según la relación $\cong_p$. Notar que todos los elementos de $[\gamma]$ tienen el mismo principio y el mismo fin. ▲

Definición 11.1.5. Sea (X, τ) un ET. Si γ es una curva en X de x_0 a x_1 y ρ una curva en X de x_1 a x_2 , definimos el producto $\gamma * \rho$ como la función α dada por

$$\alpha(s) = \begin{cases} \gamma(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \rho(2s - 1) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} . \quad (11.2)$$

La buena definición y la continuidad de α se deducen del Lema del pegoteo 2.5.6. El resultado $\alpha = \gamma * \rho$ es una curva de x_0 a x_2 , cuya primera mitad es γ y su segunda mitad ρ . ▲

Observación 11.1.6. El producto de curvas induce una operación bien definida sobre las clases de p -homotopía, dada por la ecuación

$$[\gamma] * [\rho] = [\gamma * \rho] .$$

Para mostrarlo bastaría ver que si $\gamma_1 \cong_p \gamma_2$ y $\rho_1 \cong_p \rho_2$, entonces $\gamma_1 * \rho_1 \cong_p \gamma_2 * \rho_2$. Sean F una p -homotopía entre γ_1 y γ_2 y G otra entre ρ_1 y ρ_2 . Definimos

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2s - 1, t) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} .$$

La nueva función H está bien definida y es continua por el Lema del pegoteo 2.5.6 (cuando $s = \frac{1}{2}$ se pegan bien: $G(0, t) = F(1, t) \equiv x_1$) y es la p -homotopía requerida. ▲

Para probar las principales propiedades de la operación $*$, conviene hacer un par de observaciones previas: Supongamos que tenemos dos curvas $\gamma \cong_p \rho$ en un espacio X , a través de la p -homotopía $F : I \times I \rightarrow X$. Dada una $g \in C(X, Y)$, se ve fácilmente que las curvas

$$g \circ \gamma \text{ y } g \circ \rho \text{ son } p\text{-homotópicas vía la } p\text{-homotopía } g \circ F : I \times I \rightarrow Y . \quad (11.3)$$

Más aún, componer con g es compatible con la operación $*$, tanto en curvas concretas como en las clases: $(g \circ \gamma) * (g \circ \rho) = g \circ (\gamma * \rho)$ y $[g \circ \gamma] * [g \circ \rho] = [g \circ (\gamma * \rho)]$.

Lema 11.1.7. La operación $*$ entre clases tiene las siguientes propiedades:

1. **Asociatividad.** Si $[\gamma] * ([\rho] * [\alpha])$ está definido (si sus inicios y finales son coherentes), entonces también lo está $([\gamma] * ([\rho])) * [\alpha]$ y son iguales. Los llamaremos $[\gamma] * [\rho] * [\alpha]$.
2. **Neutro a izquierda y a derecha.** Dado $x \in X$, denotemos por e_x la curva constante $e_x \equiv x$. Si γ es una curva en X de x_0 a x_1 , entonces

$$[f] * [e_{x_1}] = [f] \quad y \quad [e_{x_0}] * [f] = [f] .$$

3. **Inverso.** Dada la curva γ en X de x_0 a x_1 , sea $\bar{\gamma}$ la curva de x_1 a x_0 definida por $I \ni s \mapsto \bar{\gamma}(s) = \gamma(1 - s)$, mentada como la inversa de γ . Entonces vale que

$$[\gamma] * [\bar{\gamma}] = [e_{x_0}] \quad y \quad [\bar{\gamma}] * [\gamma] = [e_{x_1}] .$$

Demostración. La idea de todas las pruebas es mostrar las identidades operando en el intervalo I (que es convexo), y luego componer con las curvas originales para que aparezcan las operaciones con $*$. Por ejemplo, si llamamos $e_0 : I \rightarrow I$ a la función constante $e_0 \equiv 0$,

y $m : I \rightarrow I$ dada por $m(s) = \begin{cases} 2s & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2s & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$, cuya gráfica es tipo $\wedge$, la

Obs. 11.1.3 nos dice que $e_0 \cong_p m$. Por ello (y porque $2 - 2s = 1 - (2s - 1)$) también lo serán

$$e_{x_0} = \gamma \circ e_0 \cong_p \gamma \circ m = \gamma * \bar{\gamma} \quad y \quad e_{x_1} = \bar{\gamma} \circ e_0 \cong_p \bar{\gamma} \circ m = \bar{\gamma} * \gamma .$$

Algo muy similar prueba el item 2. En cambio el 1 es algo más engorroso. La idea es mostrar que existe una curva zigzageante $h : I \rightarrow I$ que cumple las siguientes dos condiciones:

1. $h(0) = 0$ y $h(1) = 1$, por lo que $h \cong_p \mathcal{I}_I$ (dada por $\mathcal{I}_I(s) = s$).
2. $(\gamma * \rho) * \alpha = \{ \gamma * (\rho * \alpha) \} \circ h$.

Luego $\gamma * (\rho * \alpha) = \{ \gamma * (\rho * \alpha) \} \circ \mathcal{I}_I \cong_p \{ \gamma * (\rho * \alpha) \} \circ h = (\gamma * \rho) * \alpha$. Dejamos la construcción explícita de h como ejercicio para el lector aplicado. ■

11.2 El grupo fundamental

El conjunto de clases de homotopía de curvas en un espacio X no es un grupo con la nueva operación $*$ porque el producto de dos clases de equivalencia no está siempre definido.

Pero si tomamos un punto x_0 de X como base y nos restringimos a aquellas curvas que comienzan y terminan en x_0 , ahí sí el conjunto de sus clases de p -homotopía resulta ser un grupo con la operación $*$. Eso será el **grupo fundamental** de X (en x_0).

Definición 11.2.1. Sea (X, τ) un ET y fijemos x_0 un punto de X .

1. A una curva en X que comienza y termina en x_0 se lo llama x_0 -**rulo**.
2. El conjunto de las clases de p -homotopía de x_0 -rulos, dotado de la operación $*$, se denomina **grupo fundamental** (GF) de X relativo al punto base x_0 .
3. A este grupo se lo denota por $\pi_1(X, x_0)$. ▲

Veamos ahora como relacionar a los π_1 de X basados en distintos puntos:

Definición 11.2.2. Sea α una curva en X de x_1 a x_0 . Definimos el “morfismo”

$$\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1) \quad \text{dado por} \quad \hat{\alpha}([\gamma]) = [\bar{\alpha}] * [\gamma] * [\alpha] ,$$

para cada x_0 -rulo γ . La función $\hat{\alpha}$ está bien definida, por estarlo la operación $*$. ▲

Teorema 11.2.3. Sea (X, τ) un ET, y sean x_0, x_1 dos puntos de X tales que existe una curva α en X de x_1 a x_0 . Luego, la flecha $\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ es un **isomorfismo**.

Demostración. Veamos que $\hat{\alpha}$ es un morfismo de grupos: Dados x_0 -rulos γ y ρ ,

$$\hat{\alpha}([\gamma]) * \hat{\alpha}([\rho]) = ([\bar{\alpha}] * [\gamma] * [\alpha]) * ([\bar{\alpha}] * [\rho] * [\alpha]) = [\bar{\alpha}] * [\gamma] * [\rho] * [\alpha] = \hat{\alpha}([\gamma] * [\rho]) .$$

Veamos que $\hat{\alpha}$ es iso: Sea $\beta = \bar{\alpha}$, que va de x_0 en x_1 . Entonces, para un $[\delta] \in \pi_1(X, x_1)$,

$$\hat{\beta}([\delta]) = [\alpha] * [\delta] * [\bar{\alpha}], \implies \hat{\alpha}(\hat{\beta}([\delta])) = [\bar{\alpha}] * ([\alpha] * [\delta] * [\bar{\alpha}]) * [\alpha] = [\delta] .$$

De manera similar se muestra que $\hat{\beta}(\hat{\alpha}([\gamma])) = [\gamma]$ para todo $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$. ■

Corolario 11.2.4. Si X es arco-conexo y x_0 y x_1 son dos puntos de X , entonces

$$\pi_1(X, x_0) \text{ es isomorfo a } \pi_1(X, x_1) . \quad \text{■}$$

Sean X un ET, y C una componente arco-conexa de X que contiene a un punto x_0 . Es fácil ver que $\pi_1(C, x_0) = \pi_1(X, x_0)$, ya que todos los rulos y p -homotopías en X que están basados en x_0 deben permanecer en el subespacio C . De este modo, $\pi_1(X, x_0)$ depende sólo de la componente arco-conexa de X que contenga a x_0 , y no nos ofrece ninguna información del resto de X . Por esta razón, es muy usual trabajar sólo con espacios arco-conexos cuando se estudia el grupo fundamental.

Definición 11.2.5. Decimos que un espacio X es **simplemente conexo** si es arco-conexo y $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo trivial para algún $x_0 \in X$, y por tanto, para todo $x_0 \in X$. ▲

Ejercicio 11.2.6. Probar que, en un espacio simplemente conexo, dos curvas cualesquiera con los mismos puntos inicial y final son p -homotópicas. Se sugiere considerar el rulo $\gamma * \bar{\rho}$, y aprovechar lo que le pasa. ▲

Ahora veamos cómo se comporta nuestro funtor π_1 con las flechas entre ET's. Supongamos que $f \in C(X, Y)$ lleva el punto $x_0 \in X$ al punto $y_0 \in Y$. Denotaremos esto por

$$f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0) \quad \text{o bien} \quad f \in C\left((X, x_0), (Y, y_0)\right).$$

Si γ es un x_0 -rulo, entonces la composición $f \circ \gamma : I \rightarrow Y$ es un y_0 -rulo en Y . La correspondencia $\gamma \mapsto f \circ \gamma$ nos conduce a una aplicación que lleva $\pi_1(X, x_0)$ a $\pi_1(Y, y_0)$:

Definición 11.2.7. Sea $f \in C\left((X, x_0), (Y, y_0)\right)$. Definimos el morfismo

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0) \quad \text{dado por} \quad f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma], \quad \text{para} \quad [\gamma] \in \pi_1(X, x_0).$$

Se lo llama el **morfismo inducido** por f , relativo al punto base x_0 . ▲

La aplicación f_* está bien definida ya que, si F es una p -homotopía entre γ y ρ , entonces $f \circ F$ es una p -homotopía de curvas entre $f \circ \gamma$ y $f \circ \rho$. El hecho de que f_* sea un morfismo se sigue de la igualdad $(f \circ \gamma) * (f \circ \rho) = f \circ (\gamma * \rho)$, que se deduce de la Ec. (11.3).

El morfismo f_* no sólo depende de f sino también del punto base x_0 . En el caso en que haga falta, lo haremos notar escribiendo $(f_{x_0})_*$. Veamos más funtorialidades covariantes:

Proposición 11.2.8. Sean (X, x_0) , (Y, y_0) y (Z, z_0) tres ET's punteados. Entonces

1. Si $f \in C\left((X, x_0), (Y, y_0)\right)$ y $g \in C\left((Y, y_0), (Z, z_0)\right)$, entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.
2. Si $\mathcal{I} : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ es la función identidad, entonces $\mathcal{I}_*$ es el morfismo identidad.

Demostración. Más largo el enunciado que la prueba: Observar que

$$g_* \circ f_*([\gamma]) = g_*\left(f_*([\gamma])\right) = g_*([f \circ \gamma]) = [g \circ (f \circ \gamma)] = [(g \circ f) \circ \gamma] = (g \circ f)_*([\gamma]).$$

Por otro lado, $\mathcal{I}_*([\gamma]) = [\mathcal{I} \circ \gamma] = [\gamma]$, y que la clase de γ se toma en el mismo conjunto. ■

Corolario 11.2.9. Si $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ es un hómoio, entonces f_* es un isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$.

Demostración. Funtorialidad clásica. ■

11.3 Revestimientos

Definición 11.3.1. Sea $p : E \rightarrow B$ una función continua y suryectiva.

1. Se dice que un abierto $U \subseteq B$ está regularmente cubierto (o feteado) por p si la preimagen $p^{-1}(U)$ puede escribirse como unión disjunta de abiertos $V_\alpha \subseteq E$ tales que, para cada α la restricción de $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U$ es un homeomorfismo.
2. La colección $\{V_\alpha\}$ será denominada una partición de $p^{-1}(U)$ en **rebanadas**.

3. Si asumimos que E es de Hausdorff y todo punto de b de B tiene un entorno feteado U , entonces se dice que $p : E \rightarrow B$ es un **revestimiento**. ▲

Observación 11.3.2. Si $p : E \rightarrow B$ es un revestimiento, para cada $b \in B$, la **fibra** $p^{-1}(b)$ es discreta. En efecto, si U es un entorno feteado de b , cada rebanada V_α de $p^{-1}(U)$ es abierta en E y corta a $p^{-1}(b)$ en un solo punto (y hay fetas para todos). ▲

Observación 11.3.3. Si $p : E \rightarrow B$ es un revestimiento, entonces p es una función **abierta**. Más aún, p es un **homeomorfismo local** entre E y B . Es decir, cada punto $e \in E$ tiene un entorno que se aplica por p homeomórficamente sobre un subconjunto abierto de B .

En efecto, dado $a \in E$ y $x = p(a) \in B$, podemos elegir un entorno abierto y feteado U de x , y una feta V_α de $p^{-1}(U)$ tal que $a \in V_\alpha$. Pero ya sabemos que V_α es abierto y que $p : V_\alpha \rightarrow U$ es hómoio. Es muy fácil ver que ser hómoio local implica ser abierto. ▲

Ejemplo 11.3.4. La función $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \subseteq \mathbb{C}$ dada por la ecuación

$$p(x) = e^{i2\pi x} = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x \quad , \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \quad ,$$

es un revestimiento.

Demostración. Consideremos el subconjunto $U = \{z \in S^1 : \operatorname{Re} z > 0\} \subseteq S^1$. Luego

$$p^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R} : \cos 2\pi x > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n \quad , \quad \text{donde cada } V_n = \left(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}\right) \quad .$$

Tenemos que p restringida a cualquier intervalo cerrado $\overline{V}_n$ es inyectiva, porque allí la función $x \mapsto \sin 2\pi x$ es estrictamente creciente. Además $p(\overline{V}_n) = \overline{U}_n$ y $p(V_n) = U_n$, en ambos casos por el Teorema del valor medio 3.2.3 (de nuevo para $x \mapsto \sin 2\pi x$).

Como cada $\overline{V}_n$ es compacto, se ve que $p|_{\overline{V}_n} : \overline{V}_n \rightarrow \overline{U}$ es hómoio. En particular, $p|_{V_n}$ lo es. Podemos aplicar un razonamiento similar a las intersecciones de S^1 con los semiplanos abiertos superior e inferior, y con el semiplano abierto izquierdo. Estos conjuntos abiertos cubren S^1 y cada uno de ellos está feteado por p . ■

Teorema 11.3.5. Sean $p_1 : E_1 \rightarrow B_1$ y $p_2 : E_2 \rightarrow B_2$ dos revestimientos. Entonces

$$p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \rightarrow B_1 \times B_2 \quad \text{también es un revestimiento} \quad ,$$

donde $p_1 \times p_2(x_1, x_2) = (p_1(x_1), p_2(x_2)) \in B_1 \times B_2$, para $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$.

Demostración. Sea $(b_1, b_2) \in B_1 \times B_2$. Entonces existen U_1 y U_2 entornos de b_1 y b_2 , respectivamente, que están feteados por p_1 y p_2 , respectivamente. Sean $\{V_\alpha\}_\alpha$ y $\{W_\beta\}_\beta$ las fetas de $p_1^{-1}(U_1)$ y $(p_2)^{-1}(U_2)$. Entonces $(p_1 \times p_2)^{-1}(U_1 \times U_2)$ (que es un entorno de (b_1, b_2)) es la unión de todos los conjuntos de $V_\alpha \times W_\beta$. Estos conjuntos son abiertos disjuntos en $E_1 \times E_2$, y cada uno de ellos se aplica homeomórficamente sobre $U_1 \times U_2$ por $p_1 \times p_2$. ■

Corolario 11.3.6. La aplicación $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1$ dada por $P(s, t) = (e^{i2\pi s}, e^{i2\pi t})$, para $s, t \in \mathbb{R}$, es un revestimiento del toro $S^1 \times S^1$. ■

11.4 Levantes

Definición 11.4.1. Sean E, B e Y tres ET's. Fijemos $p \in C(E, B)$. Dada $f \in C(Y, B)$, una $\hat{f} \in C(Y, E)$ es una **levantada** de f si cumple que $p \circ \hat{f} = f$, o sea que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \hat{f} & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

conmuta. Observar que, para llamarla levantada, le pedimos a $\hat{f}$ que sea continua. ▲

En una serie de lemas veremos que, si $p : E \rightarrow B$ es un revestimiento, entonces se pueden levantar a E todas las curvas y p -homotopías de B . El primer lema nos asegurará de antemano la unicidad de dichas levantadas:

Lema 11.4.2. Sea $p : E \rightarrow B$ un revestimiento con $p(e_0) = b_0$. Sea Y un ET **conexo**, y sea $f \in C(Y, B)$. Fijemos un punto $y_0 \in Y$. Luego dos levantadas de f que coincidan en y_0 deben ser la misma. O sea que la levantada, con una condición inicial, si existe es única.

Demostración. Sean $g, h \in C(Y, E)$ dos levantadas de f tales que $g(y_0) = h(y_0)$. Sea $Z = \{y \in Y : g(y) = h(y)\}$. Como E es Hausdorff, la diagonal Δ_E de $E \times E$ es cerrada, así que nuestro $Z = (g \times h)^{-1}(\Delta)$ es cerrado. Como Y es conexo, bastaría ver que Z es abierto.

Dado $y \in Z$, tomemos un entorno feteado $U \in \mathcal{O}_B^a(f(y))$, y sea $V \subseteq p^{-1}(U)$ la feta que contiene al punto $g(y) = h(y)$. Consideremos el abierto

$$W = g^{-1}(V) \cap h^{-1}(V) \in \mathcal{O}_Y^a(y). \quad \text{Luego} \quad g(W) \cup h(W) \subseteq V.$$

Como $p|_V : V \rightarrow U$ es un hómo, hay una única manera de levantar a $f|_W$ desde U hacia V , y tanto $g|_W$ como $h|_W$ lo hacen. Nos queda que $W \subseteq Z$, por lo que Z tiene que ser abierto. Además, $Z \neq \emptyset$ porque $y_0 \in Z$. Así que $Z = Y$ y por ende $g = h$. ■

Lema 11.4.3. Sea $p : E \rightarrow B$ un revestimiento con $p(e_0) = b_0$. Cualquier curva γ en B con inicio en b_0 tiene una **única** levantada $\hat{\gamma}$ a E que comienza en e_0 .

Demostración. Se cubre el dominio I con γ^{-1} de entornos feteados, se toma el δ de Lebesgue 6.4.6 para ese cubrimiento, y se divide a I en finitos intervalitos de longitud menor que ese δ . Luego se levanta a γ localmente, usando el hómo entre cada entorno feteado y la feta por la que está pasando la levantada hasta ese momento. En el comienzo, se usa la feta que tiene al e_0 . En los siguientes pasos, se usa que cada intervalito va a parar por γ adentro de un entorno feteado, pero el borde izquierdo ya tenía definida su levantada del paso anterior. Todo se pega bien por el Lema del pegoteo 2.5.6. La unicidad sale por el Lema 11.4.2. ■

Lema 11.4.4. Sea $p : E \rightarrow B$ un revestimiento con $p(e_0) = b_0$. Sea $F \in C(I \times I, B)$ tal que $F(0, 0) = b_0$. Luego existe una única levantada $\hat{F} \in C(I \times I, E)$ de F tal que $\hat{F}(0, 0) = e_0$. Además, si F era una p -homotopía, entonces también $\hat{F}$ lo será.

Demostración. Levantemos primero a F en el borde de abajo $I \times \{0\}$, usando el Lema 11.4.3. Después, con el mismo Lema, levantamos a la F en cada intervalo $\{s\} \times I$, empezando por el punto $\widehat{F}(s, 0)$ que encontramos antes. Si F era una p -homotopía, es constante en los bordes laterales, por lo que se levanta como una constante en ellos por la unicidad. El tema es ver que la $\widehat{F}$ resultante sea continua.

Para verlo se toma un δ de Lebesgue como en el Lema anterior, ahora para $I \times I$. Fijado un $s \in I$, tomamos la columnita $I_s \times I$, donde $I_s = [s - \frac{\delta}{3}, s + \frac{\delta}{3}] \cap I$, y la dividimos en cuadraditos que F mande adentro de sendos entornos feteados. Subiendo paso a paso, y usando los hómoos correspondientes con la feta que marca el paso anterior, vamos viendo que $\widehat{F}$ queda continua en cada columnita. Como finitas columnas de estas cubren $I \times I$, podemos terminar usando el Lema del pegoteo 2.5.6. Dejamos los detalles (tediosos pero elementales) de ésta cuenta y la anterior como ejercicio para el lector abnegado. ■

Ahora sí podemos empezar a sacarle el jugo a los revestimientos para caracterizar al grupo fundamental de la base:

Teorema 11.4.5. Sea $p : E \rightarrow B$ un revestimiento con $p(e_0) = b_0$. Sean $\gamma \cong_p \rho$ dos curvas en B de b_0 en b_1 , y sean $\widehat{\gamma}$ y $\widehat{\rho}$ sus respectivas levantadas a curvas en E tales que ambas empiezan en e_0 . Entonces $\widehat{\gamma}$ y $\widehat{\rho}$ terminan en **el mismo** punto de E y son p -homotópicas.

Demostración. Sea $F : I \times I \rightarrow B$ la p -homotopía entre γ y ρ . Entonces $F(0, 0) = b_0$. Sea $\widehat{F} : I \times I \rightarrow E$ la levantada de F a E tal que $\widehat{F}(0, 0) = e_0$. Por el Lema 11.4.4, tenemos que $\widehat{F}$ es una p -homotopía, de manera que $\widehat{F}(\{0\} \times I) = \{e_0\}$ y $\widehat{F}(\{1\} \times I) = \{e_1\}$.

La restricción $\widehat{F}|_{I \times \{0\}}$ de $\widehat{F}$ al borde de abajo de $I \times I$ es una levantada de $F|_{I \times \{0\}} = \gamma$ que comienza en e_0 . Por la unicidad que da el Lema 11.4.3, podemos asegurar que $\widehat{F}(s, 0) = \widehat{\gamma}(s)$ para todo $s \in I$. Análogamente, $\widehat{F}|_{I \times \{1\}} = \widehat{\rho}$ (se usa que $\widehat{F}(0, 1) = e_0$). Por lo tanto, las dos levantadas $\widehat{\gamma}$ y $\widehat{\rho}$ terminan en e_1 y $\widehat{F}$ es una p -homotopía entre ellas. ■

Definición 11.4.6. Sea $p : E \rightarrow B$ un revestimiento con $p(e_0) = b_0$. Sea

$$\phi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0) \subseteq E \quad \text{dada por} \quad \phi([\gamma]) = \widehat{\gamma}(1),$$

donde $\widehat{\gamma}$ es la levantada de γ a una curva en E que comience en e_0 . A esta ϕ se la conoce como la **correspondencia de levantamiento** (CL) del revestimiento p . Está bien definida por el Teo. 11.4.5, aunque depende de la elección del punto $e_0 \in p^{-1}(b_0)$. ▲

Teorema 11.4.7. Sea $p : E \rightarrow B$ un revestimiento con $p(e_0) = b_0$.

1. Si E es ar-C, entonces la CL $\phi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$ es suryectiva.
2. Si encima E es simplemente conexo, entonces ϕ es biyectiva.

Demostración. Si E es ar-C y tomamos cualquier $e_1 \in p^{-1}(b_0)$, existe una curva $\widehat{\gamma}$ en E de e_0 a e_1 . Por ende $\gamma = p \circ \widehat{\gamma}$ es un rulo en B con base b_0 tal que $\phi([\gamma]) = e_1$.

Supongamos ahora que E es simplemente conexo. Sean $[\gamma]$ y $[\rho]$ dos elementos de $\pi_1(B, b_0)$ tales que $\phi([\gamma]) = \phi([\rho])$. Sean $\widehat{\gamma}$ y $\widehat{\rho}$ las levantadas de γ y ρ a curvas en E que empiezan

en e_0 . Entonces $\widehat{\gamma}(1) = \widehat{\rho}(1)$. Como E es simplemente conexo, el Ejer. 11.2.6 asegura que existe una p -homotopía $\widehat{F}$ en E entre $\widehat{\gamma}$ y $\widehat{\rho}$. Entonces $p \circ \widehat{F}$ es una p -homotopía en B entre γ y ρ , y así $[\gamma] = [\rho]$. ■

Corolario 11.4.8. El GF de S^1 es isomorfo al grupo aditivo de los enteros.

Demostración. Sea $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ el revestimiento del Ejem. 11.3.4, pongamos $e_0 = 0$ y sea $b_0 = 1 = p(e_0)$. Entonces el conjunto $p^{-1}(b_0)$ es el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros. Dado que $\mathbb{R}$ es simplemente conexo, la CL $\phi : \pi_1(S^1, b_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ es biyectiva.

Probemos que ϕ es un morfismo: Dados $[\gamma]$ y $[\rho]$ en $\pi_1(S^1, b_0)$, sean $\widehat{\gamma}$ y $\widehat{\rho}$ sus respectivas levantadas a curvas en $\mathbb{R}$ comenzando en 0. Sean $n = \widehat{\gamma}(1)$ y $m = \widehat{\rho}(1)$. Entonces $\phi([\gamma]) = n$ y $\phi([\rho]) = m$. Fijado ese $n \in \mathbb{Z}$, llamemos $\widehat{\rho}_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ a la curva

$$\widehat{\rho}_n(s) = n + \widehat{\rho}(s), \quad \text{para } s \in I.$$

Como $p(n+x) = p(x)$, para todo x en $\mathbb{R}$, esta $\widehat{\rho}_n$ es la levantada de ρ que comienza en n . Entonces el producto $\widehat{f} * \widehat{\rho}_n$ está definido y es la levantada de $\gamma * \rho$ que comienza en 0. Como $\widehat{\rho}_n(1) = n + m$, se tiene que $\phi([\gamma] * [\rho]) = n + m = \phi([\gamma]) + \phi([\rho])$. ■

Ejercicio 11.4.9. Probar que $\pi_1(S^1 \times S^1, (1, 1)) \cong \mathbb{Z}^2$. Se sugiere usar el revestimiento del plano $\mathbb{R}^2$ sobre el toro que brinda el Teo. 11.3.5. ▲

Ejercicio 11.4.10. Sea $p : E \rightarrow B$ un revestimiento con $p(e_0) = b_0$. Probar que

1. El morfismo $p_* : \pi_1(E, e_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$ es **mono**.
2. Sea H la imagen de p_* . Dado un rulo γ en (B, b_0) , se tiene que

$$[\gamma] \in H \iff \gamma \text{ se levanta a un rulo en } E.$$

Deducir que H es subgrupo **normal** de $\pi_1(B, b_0)$. Sea $G = \pi_1(B, b_0)/H$, que es grupo.

3. La CL induce una flecha inyectiva $\Phi : G \rightarrow p^{-1}(b_0)$, que también es suryectiva, siempre que E sea ar-C.
4. Concluir que si E es ar-C, entonces $p^{-1}(b_0)$ tiene una estructura natural de grupo, y que ese grupo es iso con $\pi_1(B, b_0)$ cuando E es simplemente conexo. ▲

11.5 Productos

Veremos ahora que el π_1 se comporta bien con el producto cartesiano finito de ET's:

Teorema 11.5.1. Sean (X, x_0) e (Y, y_0) dos ET's punteados. Luego $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ es isomorfo al producto directo $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

Demostración. Sean $p : X \times Y \rightarrow X$ y $q : X \times Y \rightarrow Y$ las dos proyecciones. Con los puntos base indicados en el enunciado, tenemos los morfismos inducidos

$$p_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0), \quad y \quad q_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(Y, y_0).$$

Definamos el morfismo $\Phi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ dado por

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \ni [\gamma] \longmapsto \Phi([\gamma]) = (p_*([\gamma]), q_*([\gamma])) = ([p \circ \gamma], [q \circ \gamma]).$$

Es claro que Φ es un morfismo de grupos. Falta ver que es un isomorfismo.

Vemos que Φ es epi: Sea ρ un x_0 -rulo en X y β un y_0 -rulo en Y . Definimos la curva

$$\gamma \in C(I, X \times Y) \quad \text{dada por} \quad \gamma(s) = (\rho(s), \beta(s)), \quad s \in I.$$

Nos queda que γ es un (x_0, y_0) -rulo en $X \times Y$. Además se tiene que

$$\Phi([\gamma]) = ([p \circ \gamma], [q \circ \gamma]) = ([\rho], [\beta]).$$

Veamos que Φ es mono: Sea γ un (x_0, y_0) -rulo en $X \times Y$ tal que $\Phi([\gamma])$ es “nulo”. Esto significa que $p \circ \gamma \cong_p e_{x_0}$ (en X) y que $q \circ \gamma \cong_p e_{y_0}$ (en Y). Sean G y H las p -homotopías asociadas. Entonces la función $F : I \times I \rightarrow X \times Y$ definida por $F(s, t) = (G(s, t), H(s, t))$ implementa la relación $\gamma \cong_p e_{(x_0, y_0)}$ en $X \times Y$. ■

Corolario 11.5.2. El grupo fundamental del toro $T = S^1 \times S^1$ es isomorfo al grupo $\mathbb{Z}^2$.

11.6 Retractos por deformación

Definición 11.6.1. Sea (X, τ) un ET. Si $A \subseteq X$, una **retracción** de X en A es una

$$r \in C(X, A) \quad \text{tal que} \quad r|_A = \mathcal{I}_A, \quad \text{la función identidad de } A.$$

En tal caso decimos que A es un **retracto** de X . ▲

Proposición 11.6.2. Sea (X, τ) un ET. Supongamos que A es un retracto de X . Si tomamos un $a \in A$ y llamamos $\mathcal{J}_A : A \rightarrow X$ (la inclusión), entonces el morfismo de grupos

$$(\mathcal{J}_A)_* : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a) \quad \text{es un monomorfismo split}.$$

Demostración. Si $r : X \rightarrow A$ es una retracción, entonces $r \circ \mathcal{J}_A = r|_A = \mathcal{I}_A$. Luego $r_* \circ (\mathcal{J}_A)_*$ es el morfismo identidad de $\pi_1(A, a)$, de manera que $(\mathcal{J}_A)_*$ tiene inversa a izquierda, que es el morfismo $r^* : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(A, a)$. Por ello $(\mathcal{J}_A)_*$ es mono y es split. ■

En todo lo que sigue usaremos la notación $\mathbb{B} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ para el disco cerrado.

Corolario 11.6.3. (Teorema de la no-retracción) El borde $S^1 \subseteq \mathbb{B}$ no es retracto de $\mathbb{B}$.

Demostración. Si ello sucediera, tendríamos que $(\mathcal{J}_{S^1})_* : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{B}, 1)$ sería mono. Pero $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$, mientras que $\pi_1(\mathbb{B}, 1)$ es trivial (porque $\mathbb{B}$ es convexo). ■

Observación 11.6.4. Otra aplicación natural de este método es para ver que la inclusión $\mathcal{J}_{S^n} : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ induce un monomorfismo de grupos fundamentales. El tema es que acá es fácil encontrar una retracción para $\mathcal{J}_{S^n}$. No es otra que la $r \in C(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, S^n)$ dada por $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Pero en seguida veremos que $(\mathcal{J}_{S^n})_*$ más que mono es iso. Pasa que esta r es una retracción de las muy buenas, como iremos viendo en esta sección. Pero empecemos ahora con un método general para comparar morfismos inducidos por funciones. Luego lo aplicaremos a retracciones e identidades. ▲

Proposición 11.6.5. Sean $h, k \in C(X, Y)$ tales que $h(x_0) = k(x_0) = y_0$. Supongamos que:

1. h y k son homotópicas.
2. La homotopía $H : X \times I \rightarrow Y$ entre h y k cumple que $H(x_0, t) = y_0$, para todo $t \in I$.

Entonces los morfismos h_* y $k_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ coinciden.

Demostración. Si γ es un rulo en X basado en x_0 , la composición

$$I \times I \xrightarrow{\gamma \times \mathcal{I}_I} X \times I \xrightarrow{H} Y$$

es una homotopía entre $h \circ \gamma$ y $k \circ \gamma$. Más aún, es una p -homotopía porque γ es un x_0 -rulo y la H aplica $x_0 \times I$ en y_0 . O sea que $h_*([\gamma]) = [h \circ \gamma] = [k \circ \gamma] = k_*([\gamma])$ en $\pi_1(Y, y_0)$. ■

Corolario 11.6.6. La inclusión $\mathcal{J}_{S^n} : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ induce un isomorfismo de grupos fundamentales.

Demostración. Para abreviar, notemos $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ y $b_0 = (1, 0, \dots, 0)$. Sea

$$r : X \rightarrow S^n \quad \text{la función dada por} \quad r(x) = \frac{x}{\|x\|} \quad \text{para } x \in X.$$

Observar que $r \circ \mathcal{J}_{S^n} = \mathcal{I}_{S^n}$, de manera que $r_* \circ (\mathcal{J}_{S^n})_* = \mathcal{I}_{\pi_1(S^n, b_0)}$. Consideremos ahora la composición $\mathcal{J}_{S^n} \circ r : X \xrightarrow{r} S^n \xrightarrow{\mathcal{J}_{S^n}} X$. Esta función no es la identidad de X , pero es homotópica a ella. En efecto, la homotopía por rectas

$$H : X \times I \rightarrow X \quad \text{dada por} \quad H(x, t) = (1-t)x + t \frac{x}{\|x\|}$$

toma valores en X (no se anula) y es allí una homotopía entre $\mathcal{I}_X$ y $\mathcal{J}_{S^n} \circ r$. El punto b_0 permanece fijo durante la homotopía (al igual que cualquier $b \in S^n$) ya que $\|b_0\| = 1$. Por la Prop. 11.6.5, también $(\mathcal{J}_{S^n})_* \circ r_* = (\mathcal{J}_{S^n} \circ r)_* = (\mathcal{I}_X)_* = \mathcal{I}_{\pi_1(X, b_0)}$. ■

¿Qué hace que la demostración anterior funcione? Hablando a grandes rasgos, su realización es posible porque disponemos de una manera natural de deformar la función identidad de $\mathbb{R}^{n+1} - \mathbf{0}$ a una función que colapsa todo $\mathbb{R}^{n+1} - \mathbf{0}$ sobre S^n . La deformación H colapsa gradualmente cada recta radial que parte del origen al punto donde se corta con S^n , y cada

punto de S^n permanece fijo durante esta deformación. Estos comentarios nos conducen a formular una situación más general en la cual se aplica el mismo procedimiento.

Definición 11.6.7. Sea (X, τ) un ET. Dado $A \subseteq X$, notemos $\mathcal{J}_A : A \rightarrow X$ es la inclusión.

1. Diremos que A es un **retracto por deformación** (se abrevia RD) de X si $\mathcal{I}_X$ es homotópica a alguna retracción de X en A , y tal que cada punto de A permanece fijo durante la homotopía. O sea que existe una $H \in C(X \times I, X)$ tal que

- (a) $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) \in A$, para todo $x \in X$.
- (b) $H(a, t) = a$, para todo $a \in A$ y todo $t \in I$.

2. Una tal homotopía H se llama **retracción por deformación** de X en A .

3. La función $r : X \rightarrow A$ definida por $r(x) = H(x, 1)$ ($x \in X$) es la retracción de X en A mencionada. Hablando con precisión, H es una homotopía entre $\mathcal{I}_X$ y $\mathcal{J}_A \circ r$ en $C(X, X)$ en el estilo de las de la Prop. 11.6.5 (para cualquier $a \in A$). ▲

Teorema 11.6.8. Sea (X, τ) un ET y sea A un RD de X . Fijemos un $x_0 \in A$. Entonces la inclusión $\mathcal{J}_A : (A, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ induce un isomorfismo de grupos fundamentales.

Demostración. Como A es RD de X , existe $H \in C(X \times I, X)$ tal que

$$H(x, 0) = x, \quad H(x, 1) = r(x) \in A \quad \text{y} \quad H(x, t) = x \quad \text{para todo } x \in A.$$

Como $r \in C(X, A)$ es una retracción de X en A ($r \circ \mathcal{J}_A = \mathcal{I}_A$), vemos que $r_* \circ (\mathcal{J}_A)_* = (\mathcal{I}_A)_*$. Por otro lado, $\mathcal{J}_A \circ r : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ es homotópica (vía H) a $\mathcal{I}_X$ y $H|_{\{x_0\} \times I} = e_{x_0}$. Luego la Prop. 11.6.5 dice que $(\mathcal{J}_A)_* \circ r_* = (\mathcal{I}_X)_*$, por lo que $(\mathcal{J}_A)_*$ es iso. ■

Ejemplo 11.6.9. 1. Sea $\mathbb{R}_p^2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$, el plano pinchado. Si

$$H : \mathbb{C}^* \times I \rightarrow \mathbb{R}_p^2 \quad \text{dada por} \quad H(z, t) = \frac{z}{(1-t) + t|z|}, \quad \text{para } (z, t) \in \mathbb{C}^* \times I,$$

obtenemos una retracción por deformación de $\mathbb{C}^*$ sobre S^1 , que le queda como RD. Entonces el Teo. 11.6.8 nos dice que $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \cong \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

2. Llamemos $\mathbb{R}_z$ al eje z de $\mathbb{R}^3$ y consideremos el espacio $\mathbb{R}_{(z)}^3 = \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_z$. Este tiene, como un retracto por deformación, al plano x, y agujereado $\mathbb{R}_p^2 \times \{0\}$. La función

$$H : \mathbb{R}_{(z)}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}_{(z)}^3 \quad \text{dada por} \quad H(x, y, z, t) = (x, y, (1-t)z), \quad (x, y, z, t) \in \mathbb{R}_{(z)}^3 \times I,$$

es una retracción por deformación de $\mathbb{R}_{(z)}^3$ sobre $\mathbb{R}_p^2 \times \{0\}$, por lo que el plano pinchado queda RD. Concluimos que $\mathbb{R}_{(z)}^3$ tiene grupo fundamental $\mathbb{Z}$. ▲

11.7 Puntos fijos

Recordar que una función que sale de un cociente es continua siempre que compuesta con la proyección lo sea (Prop. 5.3.16). Usaremos esto un par de veces en lo que viene. Por ejemplo, nos dice que un x_0 -rulo se puede pensar, vía la Obs. 5.3.24, como una $h \in C(S^1, X)$ tal que $h(1) = x_0$. En efecto, si $p : [0, 1] \rightarrow S^1$ es cocientar los bordes ($p(t) = e^{i2\pi t}$), entonces la topología usual de S^1 coincide con la cociente (por ser $[0, 1]$ compacto), así que un x_0 -rulo γ es continuo si y sólo si el “bajado” $h : S^1 \rightarrow X$ (tal que $h \circ p = \gamma$) lo es. Así que por un rato los x_0 -rulos tendrán dominio en S^1 y mandan al $1 \in S^1$ a x_0 .

Fijensé que este enfoque tiene una ventaja. Un rulo con dominio I tiene que inducir un morfismo nulo, porque I es convexo. Eso no es bueno, porque el rulo es un rulo y le pasan cosas. En cambio pensado como una $h \in C(S^1, X)$, su h_* se puede poner interesante. Por ejemplo, mirando cómo quedan las p -homotopías acá (ver abajo), la Prop. 11.6.5 nos dice que rulos equivalentes producirán **el mismo** morfismo inducido.

Las p -homotopías entre estos rulos son ahora las funciones $H \in C(S^1 \times I, X)$ definidas en el “cilindro” y tales que $H(1, t) = x_0$ para todo $t \in I$. Observar que a las p -homotopías comunes se las puede “enrollar” con la flecha $p \times Id : I \times I \rightarrow S^1 \times I$ porque eran constantes (x_0) en los bordes laterales. Y quedan continuas “si y sólo si” por lo mismo de antes (el cuadrado es compacto y la topología cociente del cilindro).

Es interesante que dadas dos funciones cualesquiera $f, g \in C(S^1, X)$, si son homotópicas (como funciones, nomás), la homotopía que las une es también una $H \in C(S^1 \times I, X)$ definida en el cilindro. La diferencia es que esta H no tiene que ser constante en la “costura del borde”, i.e. la curva $\alpha(t) = H(1, t)$ no es necesariamente constante (y tampoco se necesita que $f(1) = g(1)$). Esta diferencia se marca en lo que sigue porque dada una $h \in C(S^1, X)$ tal que $h(1) = x_0$, no es (a priori) lo mismo ser p -homotópica a un punto como x_0 -rulo ($h \cong_p e_{x_0}$ o también $0 = [h] \in \pi_1(X, x_0)$) que ser homotópicamente nula como función ($h \cong e_x$ para algún $x \in X$). Todo depende de si la curva α queda constante o no. Sin embargo ahora veremos que ambas propiedades son equivalentes y veremos también otras condiciones para que estos raros rulos nuevos sean triviales en $\pi_1(X, x_0)$:

Proposición 11.7.1. Sea (X, τ) un ET. Dada una $h \in C(S^1, X)$, son equivalentes:

1. Si $h(1) = x_0$, la clase $[h] \in \pi_1(X, x_0)$ es nula (o sea $h \cong_p e_{x_0}$ como x_0 -rulos).
2. La h es homotópica a un punto $x \in X$, es decir que $h \cong e_x$ en el ambiente $C(S^1, X)$.
3. Nuestra h tiene una extensión continua $k : \mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \rightarrow X$.
4. El morfismo $h_* : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ asociado a h es nulo.

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Ma’ vale. Recordar que ahora las p -homotopías salen de $S^1 \times I$.

2. $\Rightarrow$ 3. Supongamos que existe una homotopía $H \in C(S^1 \times I, X)$ entre h y e_x . Definamos $\pi : S^1 \times I \rightarrow \mathbb{B}$ dada por $\pi(w, t) = (1 - t)w$, que es continua y suryectiva. Como $S^1 \times I$ es compacto, el Cor. 5.3.19 dice que la topología usual del disco $\mathbb{B}$ es la cociente por π . Eso muestra la continuidad de la función $k : \mathbb{B} \rightarrow X$ dada por

$k(z) = H(w, t)$, siempre que $(w, t) \in S^1 \times I$ cumpla que $\pi(w, t) = z \in \mathbb{B}$,

ya que $k \circ \pi = H$. La buena definición de k surge de que π es biyectiva entre $S^1 \times [0, 1)$ y $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ mientras que la flecha $w \mapsto H(w, 1)$ no es otra que la constante e_x , así que hay un sólo valor de $k(0)$ para elegir. Además, si $w \in S^1$, queda que $k(w) = H(w, 0) = h(w)$.

$3 \Rightarrow 4$. Sea $\mathcal{J}_{S^1} : S^1 \rightarrow \mathbb{B}$ la inclusión. Si existe la extensión k , entonces $h = k|_{S^1} = k \circ \mathcal{J}_{S^1}$. Por lo tanto $h_* = k_* \circ (\mathcal{J}_{S^1})_*$. Pero k_* es nula porque $\mathbb{B}$ es convexo $\implies \pi_1(\mathbb{B}, 1) = \{0\}$.

$4 \Leftrightarrow 1$. Hagamos las cuentas entre rulos definidos en S^1 (al que no le gusten hace todo desde I y cociente). Tomemos el 1-rulo “ z ”, o sea $\rho \in C(S^1, S^1)$ dado por $\rho(z) = z$. Su clase $[\rho]$ genera el grupo $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$, porque su levantada a $\mathbb{R}$ “termina” en $1 \in \mathbb{Z}$. Ahora bien,

$$h_* : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \quad \text{manda} \quad h_*([\rho]) = [h \circ \rho] = [h] \in \pi_1(X, x_0) .$$

Luego el morfismo h_* es nulo $\iff [h] = 0$ en $\pi_1(X, x_0)$. ■

Corolario 11.7.2. Sea $k \in C(\mathbb{B}, \mathbb{C}^*)$, que podría pensarse como un “campo” en $\mathbb{B}$ que no se anula. Luego existen $v, w \in S^1$ tales que $k(v) = \lambda v$ y $k(w) = -\mu w$ para sendos $\lambda, \mu > 0$.

Demostración. Una de las tesis se deduce de la otra cambiando k por $-k$. Probaremos que existen el w y el μ . Sea $h = k|_{S^1} : S^1 \rightarrow \mathbb{C}^*$. La función $F : S^1 \times I \rightarrow X$ dada por

$$F(z, t) = tz + (1 - t)h(z) \quad , \quad \text{para} \quad (z, t) \in S^1 \times I$$

es una homotopía (en $\mathbb{C}$) entre h y $\mathcal{J}_{S^1}$. Por un lado, si esta F se anulara en un punto $(w, t) \in S^1 \times I$, es claro que $0 \neq t \neq 1$ porque $h(w) \neq 0 \neq w$. Entonces nos quedaría que

$$0 = tw + (1 - t)h(w) \implies h(w) = \frac{-t}{1 - t} w \implies h(w) = -\mu w \quad \text{con} \quad \mu = \frac{t}{1 - t} > 0$$

Así que si la F se anula, tenemos los w y μ buscados. Por otro lado, si la F no se anulase, sería una homotopía entre h y $\mathcal{J}_{S^1}$, pero ahora en $\mathbb{C}^*$. Veamos que eso no es posible:

En principio, por la Prop. 11.7.1, la clase $[h] \in \pi_1(\mathbb{C}^*, h(1))$ es nula, ya que existe nuestra función k y ella extiende a h a todo $\mathbb{B}$. Luego, como $\mathcal{J}_{S^1} \cong h \cong_p e_{h(1)}$ en $C(S^1, \mathbb{C}^*)$, la misma Prop. 11.7.1 ($2 \Rightarrow 4$) asegura que el morfismo $(\mathcal{J}_{S^1})_* : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$ debería ser nulo. Pero minga nulo, recordemos que el Cor. 11.6.6 mostraba que es un iso. En resumen, la F **debe** anularse, por lo que el resultado queda probado. ■

Observación 11.7.3. Otra manera de enunciar el Cor. 11.7.2 es la siguiente: Sea (X, τ) un ET. Dada una $h \in C(S^1, X)$ que cumple las condiciones de la Prop. 11.7.2 (por ejemplo si h es homotópicamente nula) entonces existen los puntos $v, w \in S^1$ que h manda para el mismo lado y para el lado contrario. ▲

Corolario 11.7.4 (Punto fijo de Brouwer). Sea $f \in C(\mathbb{B}, \mathbb{B})$. Luego f tiene punto fijo, o sea que existe un $z \in \mathbb{B}$ tal que $f(z) = z$.

Demostración. Sea $k \in C(\mathbb{B}, \mathbb{C})$ dada por $k(z) = f(z) - z$, para $z \in \mathbb{B}$. Si f no tuviera punto fijo, en realidad nos quedaría que $k \in C(\mathbb{B}, \mathbb{C}^*)$, porque $f(z) \neq z$ para todo $z \in \mathbb{B}$.

Por el Cor. 11.7.2, podríamos tomar un $v \in S^1$ tal que $k(v) = \lambda v$ con $\lambda > 0$. Pero en tal caso, $f(v) = v + k(v) = (1 + \lambda)v \notin \mathbb{B}$, porque $|v| = 1$ y $1 + \lambda > 1$. ■

Es bien fácil ver, vía un cuadrado conmutativo, que si X es un ET que es hómeco con el disco $\mathbb{B}$, entonces también las $f \in C(X, X)$ tienen puntos fijos. Usando esta idea salen dos interesantes aplicaciones:

Ejercicio 11.7.5. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matriz tal que todas sus entradas son positivas. Probar que tiene un autovalor positivo, con un autovector de entradas positivas. Sugerimos operar con A en el “triángulo” de la esfera que consiste de los vectores de norma uno que tienen sus tres entradas no negativas. Y usar que esa región es hómeco con $\mathbb{B}$. ▲

Ejercicio 11.7.6. Sea T el triángulo en $\mathbb{C}$ cuyos vértices son 0, 1 e i . Probar que si $\varepsilon \leq \frac{1}{4}$, todo cubrimiento σ de T hecho con bolas ε cumple que al menos un punto de T está dentro de 3 bolas de σ . Deducir que todo cubrimiento abierto de T tiene un refinamiento que cumple lo anterior.

Sugerimos asignar hábilmente un vértice a cada $U \in \sigma$, y luego usar una partición de la unidad para definir una función continua que mandaría a todo T hacia su borde, de tal modo que cada arista de T es mandada a sí misma. Después comparar con $\mathbb{B}$ y S^1 . ▲

11.8 Equivalencias homotópicas

Vimos hace poco que si $A \subseteq X$ es un RD, entonces los GF's de A y de X “coinciden”. Ahora buscamos condiciones más generales que nos aseguren que dos espacios tengan sus GF's isomorfos. Lo que expondremos ahora será una tal condición:

Definición 11.8.1. Sean $f \in C(X, Y)$ y $g \in C(Y, X)$. Supongamos que

$$g \circ f : X \rightarrow X \text{ es homotópica a } \mathcal{I}_X \quad \text{y} \quad f \circ g : Y \rightarrow Y \text{ es homotópica a } \mathcal{I}_Y .$$

Entonces f y g se denominan **equivalencias homotópicas** y cada una de ellas se dice que es una **inversa homotópica** de la otra. En presencia de tales equivalencias, se dice que X e Y son **homotópicamente equivalentes**, y se escribe $X \cong_H Y$ o $X \stackrel{f}{\cong}_H Y$. ▲

Es fácil ver que si $X \stackrel{f}{\cong}_H Y$ y también $Y \stackrel{h}{\cong}_H Z$, entonces $X \stackrel{h \circ f}{\cong}_H Z$. O sea que la equivalencia homotópica es una relación de equivalencia entre los ET's.

Por ejemplo, si A es un RD de X , entonces $A \stackrel{\mathcal{J}_A}{\cong}_H X$. En efecto, la inclusión $\mathcal{J}_A : A \rightarrow X$ tiene como inversa homotópica a una retracción $r : X \rightarrow A$. Observar que $r \circ \mathcal{J}_A = \mathcal{I}_A$ y que $\mathcal{J}_A \circ r$ es homotópica a $\mathcal{I}_X$ y de hecho cada punto de A permanece fijo durante la homotopía.

Habíamos anunciado que si dos espacios son homotópicamente equivalentes, entonces sus GF's deben ser isomorfos. Para llegar a ello, necesitamos estudiar qué sucede cuando tenemos

una homotopía entre dos funciones continuas de X en Y tales que el punto base de X **no** permanece fijo durante la homotopía. Va como lema técnico:

Lema 11.8.2. Sean $h, k \in C(X, Y)$ tales que $h(x_0) = y_0$ y $k(x_0) = y_1$. Asumamos que h y k son homotópicas vía una $H : X \times I \rightarrow Y$, y llamemos $\alpha \in C(I, Y)$ la curva (de y_0 a y_1) dada por $\alpha(t) = H(x_0, t)$, para $t \in I$. Luego se tiene que $k_* = \hat{\alpha} \circ h_*$, o sea que

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{h_*} & \pi_1(Y, y_0) \\ & \searrow k_* & \uparrow \hat{\alpha} \\ & & \pi_1(Y, y_1) \end{array} .$$

Demostración. Sea $\gamma : I \rightarrow X$ un rulo en X basado en x_0 . Debemos mostrar que

$$k_*([\gamma]) \stackrel{?}{=} \hat{\alpha}(h_*([\gamma])) \quad , \quad \text{o sea que} \quad [k \circ \gamma] \stackrel{?}{=} [\alpha] * [h \circ \gamma] * [\alpha] .$$

Probaremos otra fórmula equivalente a la anterior: $[\alpha] * [k \circ \gamma] \stackrel{?}{=} [h \circ \gamma] * [\alpha]$. Para ello, consideremos los rulos γ_0 y γ_1 en el espacio $X \times I$ dados por las ecuaciones

$$\gamma_0(s) = (\gamma(s), 0) \quad \text{y} \quad \gamma_1(s) = (\gamma(s), 1) \quad \text{para cada } s \in I .$$

Consideremos también la curva c en $X \times I$ dada por la ecuación

$$c(t) = (x_0, t) \quad \text{para cada } t \in I .$$

Componiéndolas con H obtenemos que $H \circ \gamma_0 = h \circ \gamma$ y $H \circ \gamma_1 = k \circ \gamma$, mientras que $H \circ c = \alpha$. Sea $F : I \times I \rightarrow X \times I$ la función dada por $F(s, t) = (\gamma(s), t)$. Consideremos las siguientes curvas en $I \times I$, que se mueven a lo largo de los cuatro lados de $I \times I$:

$$\beta_0(s) = (s, 0) \quad , \quad \beta_1(s) = (s, 1) \quad , \quad \delta_0(t) = (0, t) \quad \text{y} \quad \delta_1(t) = (1, t) .$$

Entonces $F \circ \beta_0 = \gamma_0$ y $F \circ \beta_1 = \gamma_1$, mientras que $F \circ \delta_0 = F \circ \delta_1 = c$. Las curvas (rectas a trozos) $\beta_0 * \delta_1$ y $\delta_0 * \beta_1$ viven en $I \times I$ y van de $(0, 0)$ a $(1, 1)$. Como $I \times I$ es convexo, existe una p -homotopía G entre ellas. Entonces $F \circ G$ es una p -homotopía en $X \times I$ entre las curvas $\gamma_0 * c$ y $c * \gamma_1$. Así llegamos a que $H \circ (F \circ G)$ es una p -homotopía en Y entre

$$(H \circ \gamma_0) * (H \circ c) = (h \circ \gamma) * \alpha \quad \text{y} \quad (H \circ c) * (H \circ \gamma_1) = \alpha * (k \circ \gamma) . \quad \blacksquare$$

Corolario 11.8.3. Sean $h, k \in C(X, Y)$ tales que $h(x_0) = y_0$ y $k(x_0) = y_1$. Asumamos que h y k homotópicas. Entonces si tenemos que el morfismo h_* es mono, epi, iso o nulo si y sólo si k_* lo es. En particular, si h es homotópicamente nula (o sea que es homotópica a una k que es constante), entonces h_* es el morfismo nulo.

Demostración. Basta observar que, si $\alpha \in C(I, Y)$ es la curva del Lema 11.8.2, entonces h_* difiere de k_* en el isomorfismo $\hat{\alpha}$ (recordar el Teo. 11.2.3). Lo segundo se deduce de que una función constante induce el morfismo trivial. ■

Teorema 11.8.4. Sea $f \in C(X, Y)$ tal que $f(x_0) = y_0$. Si f es una equivalencia homotópica entonces $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ es un isomorfismo.

Demostración. Sea $g \in C(Y, X)$ una inversa homotópica de f . Consideremos las aplicaciones

$$(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (X, x_1) \xrightarrow{f} (Y, y_1),$$

donde $x_1 = g(y_0)$ e $y_1 = f(x_1)$. Tenemos los correspondientes morfismos inducidos:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{(f_{x_0})_*} & \pi_1(Y, y_0) \\ & \searrow g_* & \\ \pi_1(X, x_1) & \xrightarrow{(f_{x_1})_*} & \pi_1(Y, y_1) \end{array}$$

Sabemos que $g \circ f : (X, x_0) \rightarrow (X, x_1)$ es homotópica a $\mathcal{I}_X$. Luego, por el Lema 11.8.2, existe una curva α en X , de x_0 en x_1 , tal que

$$(g \circ f)_* = \hat{\alpha} \circ (i_X)_* = \hat{\alpha} \xrightarrow{\text{Teo. 11.2.3}} (g \circ f)_* = g_* \circ (f_{x_0})_* \text{ es un isomorfismo.}$$

Como $f \circ g$ es homotópica a $\mathcal{I}_Y$, el morfismo $(f \circ g)_* = (f_{x_1})_* \circ g_*$ también es un isomorfismo.

Lo primero implica que g_* es suryectiva, y lo segundo que g_* es inyectiva. Por lo tanto, g_* es un isomorfismo. Aplicando la primera ecuación una vez más, concluimos que

$$(f_{x_0})_* = (g_*)^{-1} \circ \hat{\alpha} \implies (f_{x_0})_* \text{ es también un isomorfismo.}$$

Observemos que, aunque g es una inversa homotópica para f , se tiene que g_* no es necesariamente el morfismo inverso de $(f_{x_0})_*$. ■

11.9 El teorema de Seifert-van Kampen, versión 1

Teorema 11.9.1. Sea (X, τ) un ET y sean $U, V \in \tau$ tales que $X = U \cup V$. Supongamos que $U \cap V$ es **arcoconexo** y que $x_0 \in U \cap V$. Entonces las imágenes de los morfismos

$$(\mathcal{J}_U)_* : \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \quad \text{y} \quad (\mathcal{J}_V)_* : \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

generan todo el grupo $\pi_1(X, x_0)$.

Demostración. Traduciendo el enunciado, tenemos que probar que, dado un x_0 -rulo γ en X , éste debe ser p -homotópico a un producto de la forma $\rho_1 * \rho_2 * \dots * \rho_n$, donde cada ρ_i es un x_0 -rulo en X enteramente contenido en U o en V .

Paso 1: Probemos que existe una subdivisión $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$ del intervalo I tal que $\gamma(a_i) \in U \cap V$ y además $\gamma([a_{i-1}, a_i])$ está contenido en U o V , para cada $i \in \mathbb{I}_n$.

Por el Lema del cubrimiento de Lebesgue 6.4.6, podemos elegir una subdivisión

$$b_0, \dots, b_m \text{ de } I \text{ tal que cada curvita } \gamma([b_{i-1}, b_i]) \text{ esté contenida en } U \text{ o en } V. \quad (11.4)$$

Si alguno de los $f(b_i) \notin U \cap V$, nos fijamos adonde cae. Si $f(b_i) \in U \setminus V$, es fácil ver que toda la curvita $\gamma([b_{i-1}, b_{i+1}]) \subseteq U$ (porque ninguna de las dos mitades puede caer en V). Lo mismo pasa si $f(b_i)$ caiga en $V \setminus U$. Por ende podemos borrar al b_i de la subdivisión, y nos queda otra que sigue cumpliendo (11.4). Luego de un número finito de borradas de este tipo,

llegaremos a una subdivisión como la anunciada, porque si la curva switchea de un abierto al otro, en el borde tiene que caer en $U \cap V$.

Paso 2: Fijemos la subdivisión $a_0, \dots, a_n$ de arriba. Para cada $i \in \mathbb{I}_n$ definamos $\gamma_i \in C(I, X)$ como la función lineal de $[0, 1]$ en $[a_{i-1}, a_i]$ compuesta con γ . Entonces cada γ_i es ahora una curva contenida en U o en V , y una cuentita directa (onda el Lema 11.1.7) muestra que

$$[\gamma] = [\gamma_1] * [\gamma_2] * \dots * [\gamma_n] .$$

Nos queda el problema de que los bordes de las γ_i no dan justito x_0 . Ahora lo arreglamos: Para cada $i \in \mathbb{I}_n \cup \{0\}$, elijamos una curva α_i en $U \cap V$ de x_0 a $\gamma(a_i)$. Acá estamos usando la hipótesis clave de que $U \cap V$ es ar-C. Dado que $\gamma(a_0) = \gamma(a_n) = x_0$, podemos asumir que tanto α_0 como α_n son la curva constante x_0 . Definamos ahora

$$\rho_i = (\alpha_{i-1} * \gamma_i) * \overline{\alpha_i} , \quad \text{para cada } i \in \mathbb{I}_n .$$

Ahora sí, cada ρ_i es un x_0 -rulo en X , que está contenido en U o en V . Finalmente,

$$[\rho_1] * [\rho_2] * \dots * [\rho_n] = [\gamma_1] * [\gamma_2] * \dots * [\gamma_n] = [\gamma] .$$

Recordemos que se decía que un espacio X era **simplemente conexo** si es arcoconexo y $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo trivial para algún $x_0 \in X$, y por tanto, para todo $x_0 \in X$.

Corolario 11.9.2. Sea (X, τ) un ET que es ar-C. Si existen $U, V \in \tau$ tales que

- $X = U \cup V$,
- $U \cap V$ es ar-C y
- tanto U como V son simplemente conexos,

entonces podemos deducir que el espacio X es simplemente conexo.

Demostración. Se aplica directamente el Teo. 11.9.1. ■

Observación 11.9.3. Con las notaciones del corolario anterior, notar que la hipótesis de que X es ar-C (y por ello conexo) nos asegura que $U \cap V \neq \emptyset$. Por otro lado, si uno asume que los abiertos U y V cumplen todo lo que allí se pide, y además que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces no hace falta pedirle a X que sea ar-C, porque ello se deduce de que U y V lo son (y de que cortan), vía la Obs. 3.2.6. ▲

Corolario 11.9.4. Dado $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$, la esfera $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ es simplemente conexa.

Demostración. Sea $p = e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ y $q = -p$, los polos norte y sur de S^n .

Paso 1: Veamos que $S^n \setminus \{p\} \cong S^n \setminus \{q\} \cong \mathbb{R}^n$. En principio, observemos que la flecha $x \mapsto -x$ implementa tranquilamente un hómoio entre $S^n \setminus \{p\}$ y $S^n \setminus \{q\}$. Definamos ahora el otro hómoio anunciado: Sea $f : S^n \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1-x_{n+1}} (x_1, \dots, x_n) , \quad \text{para } x \in S^n \setminus \{p\} .$$

La función f se denomina **proyección estereográfica**. Se comprueba que es un homeomorfismo viendo que su inversa es la función $g : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{p\}$ dada por

$$g(y) = g(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{2y_1}{\|y\|^2+1}, \dots, \frac{2y_n}{\|y\|^2+1}, \frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1} \right), \quad \text{para } y \in \mathbb{R}^n.$$

Paso 2: Tomemos los conjuntos abiertos $U = S^n \setminus \{p\}$ y $V = S^n \setminus \{q\}$. Obviamente $U \cup V = S^n$. Tanto U como V son simplemente conexos al ser homeomorfos a $\mathbb{R}^n$, que es convexo. Pero $U \cap V = S^n \setminus \{p, q\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, que es ar-C (Ejercicio fácil que el lector debería hacer antes de seguir leyendo). Ahora basta aplicar el Teo. 11.9.1. ■

11.10 El teorema de Seifert-van Kampen tutti

11.10.1 Productos libres de grupos

Sea G un grupo con neutro e . Si $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{J}}$ es una familia de subgrupos de G , diremos que estos grupos **generan** G si el conjunto $A = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{J}} G_\alpha$ es un sistema de generadores de G . O

sea que todo elemento de G puede escribirse como un producto finito de elementos de los grupos G_α . Más precisamente, que existe una sucesión finita $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ de elementos de A tal que $x = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$. Una tal $\mathbf{x}$ se denomina **palabra** (de longitud n) en los grupos G_α , y se dice que ella **representa** al elemento x de G .

Si x_i y x_{i+1} pertenecen al mismo grupo G_α podemos agruparlos para obtener la palabra

$$\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_i \cdot x_{i+1}, \dots, x_n) \text{ de longitud } n - 1 \text{ que también representa a } x.$$

Además, si cualquiera de los x_i es igual al neutro e , entonces podemos suprimirlo de la sucesión, obteniendo de nuevo una palabra más corta que también representa a x .

Aplicando estas operaciones de reducción repetidamente, podemos obtener en general una palabra $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ que represente a x tal que ningún grupo G_α contiene a dos elementos consecutivos y_i e y_{i+1} , y tal que $y_i \neq e$ para todo $i \in \mathbb{I}_m$. Una tal $\mathbf{y}$ se denomina **palabra reducida**. Utilizaremos la convención de que el conjunto vacío es una palabra reducida (de longitud cero) que representa al elemento neutro e .

Definición 11.10.1. Sea G un grupo con neutro e . Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{J}}$ una familia de subgrupos que generan a G . Supongamos que $G_\alpha \cap G_\beta = \{e\}$ siempre que $\alpha \neq \beta$.

Diremos que G es el **producto libre** de los grupos G_α si para cada $x \in G$ existe una única palabra reducida en los grupos G_α que representa a x . En este caso escribiremos

$$G = \prod_{\alpha \in \mathbb{J}}^* G_\alpha \quad \text{o, en el caso finito,} \quad G = G_1 * \dots * G_n.$$

Observar que si G es un producto libre, la operación entre dos elementos de G consiste en “yuxtaponer” las palabras que los representan, y luego simplificar hasta reducir. ▲

Proposición 11.10.2. Sea G un grupo y fijemos $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{J}}$ una familia de subgrupos tales que $G = \prod_{\alpha \in \mathbb{J}}^* G_\alpha$. Entonces G satisface la siguiente condición: Dado un grupo H y una familia de morfismos $h_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$ (uno para cada $\alpha \in \mathbb{J}$), existe un único morfismo $h : G \rightarrow H$ cuya restricción a G_α coincide con h_α para cada $\alpha \in \mathbb{J}$.

Demostración. Dada una palabra reducida $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ que representa a un $x \in G$,

$$\text{ponemos } h(x) = \prod_{i=1}^n h_{\alpha_i}(x_i) \quad , \quad \text{donde asumimos que cada } x_i \in G_{\alpha_i} \quad .$$

La buena definición es gratis por la unicidad de dichas palabras (y porque los G_α no se cortan salvo en e). También es barata la unicidad de h (si existiera una, debería actuar así en dichas palabras). La cuenta de que h es morfismo la dejamos como un ejercicio straightforward (esto es más difícil de escribir que yuxtaponer). ■

11.10.3 (Versión externa). El producto libre se puede definir también en forma “externa”, o sea asumiendo que los G_α son el dato, y que al $G = \prod_{\alpha \in \mathbb{J}}^* G_\alpha$ hay que construirlo. La idea es:

- Definir a G como el conjunto de palabras reducidas, con letras en los G_α .
- El producto de las palabras se hace, como mencionábamos antes, yuxtaponiendo y simplificando hasta reducir. El neutro es la palabra vacía (el silencio es neutro).
- El inverso de una palabra es ella misma leída al revés, y cambiando cada letra por su inversa. Observar que al multiplicarla por la palabra original, se van tachando las letras una por una hasta llegar a la nada.
- A los G_α se los incrusta en ese G como las palabras de una letra.

En éste contexto, el grupo G es el producto libre (en el sentido de la Def. 11.10.1) de los subgrupos G_α incrustados dentro de G . Por ello sigue valiendo la Prop. 11.10.2. ▲

11.10.2 El teorema de Seifert-van Kampen

Ahora tenemos el esquema para completar la caracterización del GF de un espacio X que puede escribirse como la unión de dos subconjuntos abiertos U y V con intersección arco-conexa (y tales que “conocemos” sus GF’s).

Habíamos visto (Teo. 11.9.1) que si $x_0 \in U \cap V$, las imágenes de los grupos $\pi_1(U, x_0)$ y $\pi_1(V, x_0)$, bajo los morfismos inducidos por la inclusión, generan el GF de X . Esto se puede reescribir ahora diciendo que el morfismo definido en el producto libre

$$J : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

que extiende los morfismos $(\mathcal{J}_U)_*$ y $(\mathcal{J}_V)_*$ es un **epimorfismo**. Lo que nos faltaría entonces es poder calcular el $\ker J$, con lo que tendríamos la expresión con “generadores y relaciones”

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) / \ker J .$$

En teoría parece viable, y lo es, aunque después de bastante laburo. Y la caracterización que uno obtiene del $\ker J$ tampoco es maravillosa. Pero en muchos casos alcanza para calcular razonablemente el grupo. Así que a laburar.

La herramienta que necesitamos es una infernal sopa de diagramas y morfismos, cuya prueba nos llevará varias páginas. Lo podemos llamar el Lema S-vK. Ahí va.

Teorema 11.10.4 (Lema S-vK). Sea (X, τ) un ET tal que $X = U \cup V$, donde U y V son abiertos en X . Supongamos que U , V , y $U \cap V$ son ar-C. Fijemos un $x_0 \in U \cap V$ (asumimos que existe uno). Dado ahora un grupo H y sendos morfismos

$$\phi_1 : \pi_1(U, x_0) \rightarrow H \quad \text{y} \quad \phi_2 : \pi_1(V, x_0) \rightarrow H ,$$

consideremos el siguiente diagrama, donde los morfismos $\mathcal{J}_1$ y $\mathcal{J}_2$ son los inducidos por las inclusiones correspondientes:

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_1(U, x_0) & & \\ & \nearrow \mathcal{J}_1 & \downarrow (\mathcal{J}_U)_* & \searrow \phi_1 & \\ \pi_1(U \cap V, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\Phi} & H \\ & \searrow \mathcal{J}_2 & \uparrow (\mathcal{J}_V)_* & \nearrow \phi_2 & \\ & & \pi_1(V, x_0) & & \end{array}$$

Si el diagrama es conmutativo, o sea que $\phi_1 \circ \mathcal{J}_1 = \phi_2 \circ \mathcal{J}_2$, entonces existe un único morfismo $\Phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H$ que lo hace más conmutativo, o sea que $\Phi \circ (\mathcal{J}_U)_* = \phi_1$ y $\Phi \circ (\mathcal{J}_V)_* = \phi_2$.

La gracia del asunto es encontrar qué tipo de compatibilidad deben tener los dos morfismos ϕ_1 y ϕ_2 (que trabajan en U y V) para que induzcan un morfismo Φ desde todo $\pi_1(X, x_0)$ que conmute con las “inclusiones”. Gráficamente es tan solo que las composiciones “por arriba” y “por abajo” del diagrama (que salen de la intersección) coincidan. Mirando el gráfico se ve que esa condición es la de mínima, porque es necesaria para que pueda existir la Φ .

Demostración. Por el Teo. 11.9.1, dado un x_0 -rulo γ en X , éste debe ser p -homotópico a un producto de la forma $\rho_1 * \rho_2 * \dots * \rho_n$, donde cada ρ_i es un x_0 -rulo en X enteramente contenido en U o en V . Es claro que habría que definir

$$\Phi([\gamma]) = \phi_{k_1}([\rho_1]) \dots \phi_{k_n}([\rho_n]) ,$$

donde los $k_i = 1$ si ρ_i vive en U y $k_i = 2$ si ρ_i vive en V . Si en el proceso anterior hubiera buena definición (o sea que $\Phi([\gamma])$ no dependa de la factorización de γ), entonces sería automáticamente un morfismo que haría conmutativo el diagrama. Y aparte el único. Sin embargo así la cosa no camina, aunque alcanza para probar unicidad. Vamos a elegir coherentemente las factorizaciones para poder refinarlas y probar la BD.

En las cuentas que siguen vamos a aceptar que las curvas tengan como dominio intervalos variables. Siempre se puede componer con una lineal desde I , pero no escribiremos ese paso en las cuentas. Otra notación que usaremos es que si una curva f vive en un conjunto $A \subseteq X$, ponemos $[f]_A$ a su clase de p -homotopía relativa al conjunto A (que puede ser U , V , $U \cap V$ o todo X). Dado un x_0 -rulo γ en X , la idea es subdividir I en varios subintervalos tales que la restricción de γ a ellos se quede en U o en V . El tema es que esos cachos de γ no son rulos. Empecemos entonces a laburar con esas cosas:

Para cada $x \in X$ fijemos una curva α_x de x_0 a x , de tal manera que si $x \in U$, la curva α_x se quede en U , lo mismo si $x \in V$ y también si $x \in U \cap V$. Encima ponemos que α_{x_0} sea constante. Total se puede elegir muchas curvas de un saque, si creemos en el AdE.

En general, para una curva f que viaja por U o por V y que va de x a y , definimos $\hat{f} = \alpha_x * f * \bar{\alpha}_y$ que es un x_0 -rulo también en U o en V . Para estas f definimos una flecha

$$\sigma(f) = \phi_1([\hat{f}]_U) \in H \quad \text{o bien} \quad \sigma(f) = \phi_2([\hat{f}]_V) \in H \quad (11.5)$$

de acuerdo a por dónde iba la f . Falta ver una BD en caso de que f viva en $U \cap V$. Eso sale porque en tal caso también el rulo $\hat{f}$ viviría en $U \cap V$, y

$$\phi_1([\hat{f}]_U) = \phi_1 \circ \mathcal{J}_1([\hat{f}]_{U \cap V}) = \phi_2 \circ \mathcal{J}_2([\hat{f}]_{U \cap V}) = \phi_2([\hat{f}]_V) ,$$

donde la igualdad del medio sale por la condición $\phi_1 \circ \mathcal{J}_1 = \phi_2 \circ \mathcal{J}_2$ de que el diagrama sea conmutativo. Varias cuentas estándar muestran que dada otra curva g semejante,

- a. Si $[f]_U = [g]_U$ o $[f]_V = [g]_V$ (p -homotopía) $\implies \sigma(f) = \sigma(g)$. Y $\sigma(c_a) = e_H$ ($a \in X$).
- b. Si ambas viven en U o en V y tiene sentido $f * g$ entonces vale que $\sigma(f * g) = \sigma(f) \cdot_H \sigma(g)$
- c. Si f ya era un x_0 -rulo, entonces $[f]_U = [\hat{f}]_U \implies \sigma(f) = \phi_1([f]_U)$ y lo mismo con V .

Fijado el x_0 -rulo γ en X , ahora sí subdividimos el dominio I en varios subintervalos $I_k = [s_k, s_{k+1}]$ (para $k = 1, \dots, n$) de tal modo que cada $\gamma_k = \gamma|_{I_k}$ viva en U o en V (vía el Lema de Lebesgue). Queda que $\gamma = \gamma_1 * \dots * \gamma_n$ pero las γ_k no son rulos. Sin embargo ahora podemos proponer una definición: Pongamos $h(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\gamma_1) \dots \sigma(\gamma_n) \in H$ y

$$\pi_1(X, x_0) \ni [\gamma]_X \longmapsto \Phi([\gamma]_X) = h(\gamma) = \sigma(\gamma_1) \dots \sigma(\gamma_n) \in H . \quad (11.6)$$

Esto necesita mucha verificación de BD. Por un lado h anda bien porque lo de la elección de distintas particiones de I no genera problemas. Se pueden refinar ambas y no cambian los resultados finales por la propiedad b. de arriba. Además, en caso de estar bien definida Φ , cumpliría todo lo pedido: sería morfismo (eso sale poniendo de prepo el $1/2$ en la partición de un producto $\gamma * \beta$) y haría conmutativo el diagrama, porque si γ vive “de un lado”,

$$\Phi(\mathcal{J}_U([\gamma]_U)) \stackrel{(11.6)}{=} \sigma(\gamma) \stackrel{(11.5)}{=} \phi_1([\gamma]_U) \quad \text{o} \quad \Phi(\mathcal{J}_V([\gamma]_V)) = \sigma(\gamma) = \phi_2([\gamma]_V) ,$$

por las definiciones. Se usa c. de arriba. El problema que subsiste es que si dos x_0 -rulos $\gamma \cong_p \beta$, tenemos que probar que $h(\gamma) = h(\beta)$, para que la fórmula (11.6) tenga sentido.

La prueba de eso es bastante agreste, pero al menos es viable (no como lo primero que se planteaba). Lo vamos a contar a grosso modo (el lector puntilloso puede ir a ver más detalles en el libro de Munkres, o hacerlos como abnegado ejercicio).

Se fija una p -homotopía $F : I \times I \rightarrow X$ entre γ y β , y se la subdivide en $N \times m$ rectángulitos que vayan a parar por F a U o a V (Lebesgue again). Eso produce una lista finita de nuevos x_0 -rulos ρ_k : Las imágenes por F de las $m+1$ líneas largas horizontales de la partición. Notar que $\rho_0 = \gamma$ y $\rho_m = \beta$. Lo bueno es que al comparar ρ_k con ρ_{k+1} , ahora cada cachito de sus N subdivisiones es homotópico al de arriba, pero en U o en V (por uno de los rectángulitos mencionados). Cuidado acá, porque estas no son p -homotopías.

Para arreglarlo, fijado el nivel horizontal k , llamemos b_i y b_{i+1} a las curvas que resultan de aplicar F a los dos bordecitos verticales del rectángulo i -ésimo, y f_i y g_i los cachitos correspondientes de ρ_k y ρ_{k+1} (abajo y arriba). Notemos que la primera b_1 y la última b_{N+1} son constantes porque F era p -homotopía. Pensando al rectángulito como un “rombo” para que sí la juege de p -homotopía (en U o en V) y usando a. y b. de arriba, nos queda que

$$b_i * g_i \cong_p f_i * b_{i+1} \implies \sigma(b_i) \cdot \sigma(g_i) = \sigma(f_i) \cdot \sigma(b_{i+1}) \implies \sigma(g_i) = \sigma(b_i)^{-1} \sigma(f_i) \sigma(b_{i+1}) .$$

Multiplicando todos esos cachos y usando que en los bordes hay constantes, nos queda que

$$\sigma(g_1) \sigma(g_2) \dots \sigma(g_N) = \sigma(b_1)^{-1} \sigma(f_1) \sigma(f_2) \dots \sigma(f_N) \sigma(b_{N+1}) = \sigma(f_1) \sigma(f_2) \dots \sigma(f_N) .$$

En otras palabras, si miramos fijo, lo que mostramos es que $h(\rho_{k+1}) = h(\rho_k)$. Haciendo esto en cada nivel k , subiendo escalón a escalón llegamos con esfuerzo a que $h(\beta) = h(\gamma)$. Eso termina de probar la BD de Φ en (11.6) y el Teorema. ■

Lo que llamamos Lema S-vK es en realidad la formulación moderna del Teorema homónimo. Muy algebroso para mi gusto, pero así son las cosas. Veamos cómo se lo usa para calcular el núcleo $\ker J$ que buscábamos y así dar una caracterización del GF completo de X .

Teorema 11.10.5 (S-vK: Versión clásica). Con las hipótesis del Lema S-vK, sea

$$J : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

el morfismo del producto libre que extiende los morfismos $(\mathcal{J}_U)_*$ y $(\mathcal{J}_V)_*$.

Entonces J es suryectivo y su núcleo $\ker J$ se puede caracterizar como el menor subgrupo normal de $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ que contiene todas las palabras de la forma

$$\mathcal{J}_1(g)^{-1} \cdot \mathcal{J}_2(g) , \quad \text{para } g \in \pi_1(U \cap V, x_0) .$$

Demostración. El Teo. 11.9.1 asegura que $\pi_1(X, x_0)$ está generado por la imágenes de $(\mathcal{J}_U)_*$ y $(\mathcal{J}_V)_*$, por lo que J es suryectiva. Sea N el grupo mencionado en el enunciado. Veamos primero que $N \subseteq \ker J$. Como $\ker J$ es normal, bastaría ver que $\mathcal{J}_1(g)^{-1} \cdot \mathcal{J}_2(g) \in \ker J$ para todo $g \in \pi_1(U \cap V, x_0)$. Si $\mathcal{J}_{U \cap V} : U \cap V \rightarrow X$ es la función inclusión, entonces

$$J \circ \mathcal{J}_1(g) = (\mathcal{J}_U)_* \circ \mathcal{J}_1(g) = (\mathcal{J}_{U \cap V})_*(g) = (\mathcal{J}_V)_* \circ \mathcal{J}_2(g) = J \circ \mathcal{J}_2(g) .$$

De ahí sale que $\mathcal{J}_1(g)^{-1} \cdot \mathcal{J}_2(g) \in \ker J$. Luego J induce un epimorfismo

$$K : \left[\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \right] / N \rightarrow \pi_1(X, x_0).$$

Ahora nos bastaría mostrar que este K es mono. Y para verlo sería suficiente probar que K tiene una inversa a izquierda. Abreviemos $H = \left[\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \right] / N$. Ahí se viene el Lema S-vK. Definamos $\phi_1 : \pi_1(U, x_0) \rightarrow H$ como la inclusión de $\pi_1(U, x_0)$ en el producto libre compuesta con la proyección del producto libre en su cociente con N . Sea $\phi_2 : \pi_1(V, x_0) \rightarrow H$ la función definida de modo análogo. Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_1(U, x_0) & & \\ & \nearrow \mathcal{J}_1 & \downarrow (\mathcal{J}_U)_* & \searrow \phi_1 & \\ \pi_1(U \cap V, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow[\leftarrow K]{\Phi} & H \\ & \searrow \mathcal{J}_2 & \uparrow (\mathcal{J}_V)_* & \nearrow \phi_2 & \\ & & \pi_1(V, x_0) & & \end{array}$$

Veamos que $\phi_1 \circ \mathcal{J}_1 = \phi_2 \circ \mathcal{J}_2$: Si $g \in \pi_1(U \cap V, x_0)$, entonces $\phi_1(\mathcal{J}_1(g))$ es la clase $\mathcal{J}_1(g) \cdot N$ en H , y $\phi_2(\mathcal{J}_2(g))$ es la clase $\mathcal{J}_2(g) \cdot N$. Como $\mathcal{J}_1(g)^{-1} \cdot \mathcal{J}_2(g) \in N$, las clases son iguales.

Por el teorema anterior que existe un morfismo $\Phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H$ que hace conmutativo el diagrama de arriba. Esta Φ es el inverso a izquierda de K que buscamos. Para probarlo veamos que $\Phi \circ K$ deja indemne a cualquier generador de H . Esto es, a cualquier clase $g \cdot N$, para $g \in \pi_1(U, x_0)$ o $g \in \pi_1(V, x_0)$. Por ejemplo, si $g \in \pi_1(U, x_0)$, tenemos que

$$K(g \cdot N) = J(g) = (\mathcal{J}_U)_*(g) \implies \Phi \circ K(gN) = \Phi \circ (\mathcal{J}_U)_*(g) = \phi_1(g) = g \cdot N$$

como deseábamos. Un razonamiento similar se aplica al caso $g \in \pi_1(V, x_0)$. ■

“El menor subgrupo normal tal que bla, bla...”. Magoya lo calcula al $N = \ker J$. Lo importante es que depende sólo de los rulos en $U \cap V$. Su aplicación más directa es el:

Corolario 11.10.6. Bajo las hipótesis del teorema de Seifert-van Kampen, si además asumimos que $U \cap V$ es simplemente conexo, entonces se tiene que

$$\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \cong \pi_1(X, x_0) .$$

Demostración. El isomorfismo lo implementa la J del Teo. 11.10.5. Para ver que es un iso, basta fijarse que su núcleo esta generado por palabras que dependen de los $g \in \pi_1(U \cap V, x_0)$, que ahora sabemos que “son todos lo mismo”. ■

Ejemplos 11.10.7.

1. Pensemos en la figura 8 o el mismísimo ∞ . Podemos verlos como dos círculos pegados en un puntito de sus bordes. Pongamos que los dos abiertos (del ∞) sean un $U = \alpha$ (el cacho izquierdo de ∞ con dos patitas) y V una α al revés a la derecha. Entonces $\infty = U \cup V$, mientras que $U \cap V$ es la $\times$ del medio, que es claramente simplemente conexa. En cambio tanto U como V se deforman en círculos (achicando de a poco las patitas). Luego S-vK nos dice que $\pi_1(\infty, p) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \mathbb{F}_2$.

2. Algo parecido se puede hacer con la “figura θ ” pensada como un círculo con una raya horizontal al medio. Pongamos ahora U sacarle a θ un cachito de arriba (incluso un puntito sirve), y V sacar un cachito de abajo. Nuevamente U y V se pueden deformar en círculos (gracias a la raya del medio) y $U \cap V$ es una suerte de “H”, también deformable a un punto. Queda nuevamente que $\pi_1(\theta, p) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \mathbb{F}_2$.
3. Se puede probar que el “doble toro” $\mathbb{T} \parallel \mathbb{T}$ (una suerte de toro con dos asas, onda pretzel) tiene a la figura ∞ como un retracto. Lo podemos pensar dibujando el ∞ arribita de $\mathbb{T} \parallel \mathbb{T}$, luego aplanar todo (queda un ∞ gruesito) y después afinar hasta que quede sólo la línea de la figura ∞ . Por ser retracto, el morfismo de inclusión del ∞ al $\mathbb{T} \parallel \mathbb{T}$ produce un **monomorfismo** entre sus GF’s. Así que aunque no sepamos bien qué es $\pi_1(\mathbb{T} \parallel \mathbb{T}, p)$, sí sabemos que es enorme y no abeliano, dado que tiene un $\mathbb{F}_2$ adentro. ▲

11.11 Ejercicios

Ejercicio 11.11.1. Probar que, en un espacio simplemente conexo, dos curvas cualesquiera con los mismos puntos inicial y final son p -homotópicas. Se sugiere considerar el rulo $\gamma * \bar{\rho}$, y aprovechar lo que le pasa. ▲

Ejercicio 11.11.2. Probar que $\pi_1(S^1 \times S^1, (1, 1)) \cong \mathbb{Z}^2$. Se sugiere usar el revestimiento del plano $\mathbb{R}^2$ sobre el toro que brinda el Teo. 11.3.5. ▲

Ejercicio 11.11.3. Sea $p : E \rightarrow B$ un revestimiento con $p(e_0) = b_0$. Probar que

1. El morfismo $p_* : \pi_1(E, e_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$ es **mono**.
2. Sea H la imagen de p_* . Dado un rulo γ en (B, b_0) , se tiene que

$$[\gamma] \in H \iff \gamma \text{ se levanta a un rulo en } E.$$

Deducir que H es subgrupo **normal** de $\pi_1(B, b_0)$. Sea $G = \pi_1(B, b_0)/H$, que es grupo.

3. La CL induce una flecha inyectiva $\Phi : G \rightarrow p^{-1}(b_0)$, que también es suryectiva, siempre que E sea ar-C.
4. Concluir que si E es ar-C, entonces $p^{-1}(b_0)$ tiene una estructura natural de grupo, y que ese grupo es iso con $\pi_1(B, b_0)$ cuando E es simplemente conexo. ▲

Ejercicio 11.11.4. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matriz tal que todas sus entradas son positivas. Probar que tiene un autovalor positivo, con un autovector de entradas positivas. Sugerimos operar con A en el “triángulo” de la esfera que consiste de los vectores de norma uno que tienen sus tres entradas no negativas. Y usar que esa región es hómoio con $\mathbb{B}$. ▲

Ejercicio 11.11.5. Sea T el triángulo en $\mathbb{C}$ cuyos vértices son 0, 1 e i . Probar que si $\varepsilon \leq \frac{1}{4}$, todo cubrimiento σ de T hecho con bolas ε cumple que al menos un punto de T está dentro de 3 bolas de σ . Deducir que todo cubrimiento abierto de T tiene un refinamiento que cumple lo anterior. ▲

Ejercicio 11.11.6. Probar los detalles de los Ejemplos 11.10.7.

Bibliografía

Libros más recomendados:

- [1] John L. Kelley - General Topology (Springer - GTM 27 - 1955).
- [2] J. Munkres, Topology (2ed., Prentice Hall, 2000).
- [3] Pedersen - Analysis Now (Springer - GTM 118 - 1989).
- [4] G. Nagy , Real analysis, (Kansas State lecture notes, 2001).

Referncias Generales

- [5] L. S. Pontryagin, Topological Groups (Gordon and Breach, 1986, Ed Original 1908).
- [6] W. Rudin, Fourier analysis on groups (Interscience, 1962).
- [7] H. Sato, Algebraic Topology: An intuitive approach (AMS 1996).
- [8] G. Simmons, Introduction to topology and modern analysis (ISPAM, MGH, 1963).
- [9] I.M. Singer and J.A Thorpe - Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry (Scott Foresman and Company 1967).
- [10] L.A. Steen and J.A. Seebach, Counterexamples in topology (HRW Inc. 1970).
- [11] Demetrio Stojanoff, Un curso de Análisis Funcional, apunte de 2009 no publicado (bajable de mi página web).
- [12] Viro, Ivanov, Netsvetaev, Kharlamov. Elementary topology, a first course. Text-book in problems (se puede bajar libremente de internet).
- [13] Warner, Topics in topology and homotopy theory (<https://arxiv.org/abs/2007.02467>).

Referncias Adicionales

- [14] Chamizo - Topología (Apunte, muy didáctico).
- [15] Lefschetz, Algebraic topology (CP 027 AMS, 1942).
- [16] Morris, Topology without tears (Apunte).
- [17] Gustavo Robiano - Topologia General. Un primer curso (Apunte).

Autor

- Nombre: **Demetrio Stojanoff**.

- Títulos:

1. Licenciado en Ciencias Matemáticas. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad de Buenos Aires (FCEN-UBA). Diciembre de 1984. Tesis: *Sobre el teorema de Mercuriev*. Director: Dr. Enzo R. Gentile.
2. Doctor en Ciencias Matemáticas FCEN-UBA. Mayo de 1989. Tesis: *Propiedades topológicas y geométricas de las órbitas de similitud*. Director: Dr. Gustavo Corach.

- Cargos:

1. Profesor Titular con dedicación exclusiva, Facultad de Ciencias Exactas - UNLP (FCE). Cargo regular por concurso, 2005-2025. Dictado de diversas materias avanzadas de la carrera y el posgrado en Matemática. En particular Topología, Análisis Funcional, Estructuras Algebraicas, Análisis Matricial (todas ellas en varias oportunidades).
2. Investigador del CONICET desde 1992, con promoción a la categoría de Inv. Superior desde 2024.

- Publicaciones: Ha publicado cerca de 70 trabajos en revistas internacionales con referato de primer nivel internacional. Se citan los más recientes:

66. *Norm inequalities for the spectral spread of Hermitian operators* Mathematische Nachrichten (2023), 1 - 22. Autores: P. Massey, D. Stojanoff y S. Zárate.
65. *Optimal $(\alpha, \mathbf{d})$ -multi-completion of $\mathbf{d}$ -desings*. Applied and Computational Harmonic Analysis, **62** (2023) 331 - 364. Autores: M. J. Benac, P. Massey, M. A. Ruiz y D. Stojanoff.
64. *Ergodic theorem in $CAT(0)$ spaces in terms of inductive means*. Ergodic Theory and Dynamical Systems **43** 5 (2023) 1433-1454. Autores: J. Antezana, E. Ghiglioni y D. Stojanoff.

Libros: *Análisis Matricial*. Cursos y Seminarios de Matemática - Serie B. Depto. de Matemática - FCEN - UBA (297 pags.) 2008. Autores: J. Antezana y D. Stojanoff.

- El Dr. Stojanoff comenzó su trabajo en el DM-FCE-UNLP el año 1999. Ha formado desde entonces un grupo de investigación en temas de Análisis Funcional, Teoría de Operadores y Análisis Matricial, que está integrado en la actualidad por más de una decena de investigadores y becarios, todos ellos con cargos en la Facultad y el CONICET. El Dr. Stojanoff ha dirigido cuatro tesis doctorales y codirigido otras 6 de los integrantes de este grupo, que es uno de los más pujantes del área en la actualidad.

Entre sus integrantes cuenta ya con un Investigador Principal (P. Massey) y cuatro Investigadores Independientes, y ha realizado cerca de dos centenas de publicaciones en revistas internacionales de primer nivel. Ha dirigido el Departamento, el CeMaLP y ha recibido recientemente el Premio a la labor Científica, Tecnológica y Artística de la UNLP (Facultad de Ciencias Exactas - Premio a Investigadores formados - 2025).

Stojanoff, Demetrio

Un curso de Topología / Demetrio Stojanoff. - 1a ed. - La Plata : Universidad Nacional de La Plata ; La Plata : EDULP, 2026.

Libro digital, PDF - (Libros de cátedra)

Archivo Digital: descarga

ISBN 978-950-34-2742-2

1. Matemática. 2. Álgebra. I. Título.
CDD 510

Diseño de tapa: Dirección de Comunicación Visual de la UNLP

Universidad Nacional de La Plata – Editorial de la Universidad de La Plata

48 N.º 551-599 / La Plata B1900AMX / Buenos Aires, Argentina

+54 221 644 7150

edulp.editorial@gmail.com

www.editorial.unlp.edu.ar

Edulp integra la Red de Editoriales Universitarias Nacionales (REUN)

Primera edición, 2026

ISBN 978-950-34-2742-2

© 2026 - Edulp

e
exactas


EDITORIAL DE LA UNLP



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE LA PLATA