

Libros de **Cátedra**

Cálculo integral para funciones a valores reales y vectoriales

María Cristina Vacchino

Viviana Gómez

Pablo Acosta

FACULTAD DE
INGENIERÍA

e
exactas

 **EduLP**
Editorial
de la Universidad
de La Plata



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

CÁLCULO INTEGRAL

PARA FUNCIONES A VALORES REALES Y VECTORIALES

María Cristina Vacchino

Viviana Gómez

Pablo Acosta



2014

Acosta, Pablo

Cálculo integral : para funciones a valores reales y vectoriales / Pablo Acosta ; Viviana Edith Gómez ; María Cristina Vacchino. - 1a ed. - La Plata : Universidad Nacional de La Plata, 2014.

E-Book: ISBN 978-950-34-1105-6

1. Cálculo Integral. 2. Sucesiones. 3. Campos Vectoriales. I. Gómez, Viviana Edith II. Vacchino, María Cristina

CDD 515.43

Fecha de catalogación: 17/06/2014

Diseño de tapa: Dirección de Comunicación Visual de la UNLP



Universidad Nacional de La Plata – Editorial de la Universidad de La Plata

47 N.º 380 / La Plata B1900AJP / Buenos Aires, Argentina

+54 221 427 3992 / 427 4898

editorial@editorial.unlp.edu.ar

www.editorial.unlp.edu.ar

Edulp integra la Red de Editoriales Universitarias Nacionales (REUN)

Primera edición, 2014

ISBN 978-950-34-1105-6

© 2014 - Edulp

Acerca de este libro

Este libro es el material de la asignatura “Matemática B” que cursan los alumnos de todas las carreras de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata. Es la versión actual de las guías teórico-prácticas que, redactadas en el marco del cambio de planes de estudio del año 2002, comenzaron a utilizarse en esa materia en 2003 y que, desde entonces, se han ido corrigiendo y modificando con aportes de docentes y alumnos.

La materia se desarrolla teniendo al proceso de integración como eje conceptual y la metodología de enseñanza adoptada es la de la clase teórico-práctica, donde lo primordial pasa por el trabajo de los alumnos y la guía de los docentes a través de discusiones en las mesas del aula y explicaciones en el pizarrón. Esta propuesta de contenidos y de metodología ha podido implementarse fundamentalmente por dos razones: por una lado, la posibilidad de contar con aulas planas, con mesas amplias en las que grupos de alumnos trabajan con la supervisión de los docentes y por otro, por contar con un material impreso propio, diseñado de acuerdo a los objetivos y características de la materia. Ese material es el que se presenta en este libro.

Índice general

Capítulo I: Integral definida

Área debajo de la gráfica de $v(t) = t^2$ en el intervalo $[0,4]$	2
Integral definida de una función continua y no negativa en un intervalo	5
El teorema fundamental del cálculo	10
Integral definida de una función continua en un intervalo	15
Más generalizaciones de la definición de integral	20
El teorema del valor medio	22
Aplicaciones de la integral definida	24
Integral indefinida	40
Técnicas de integración	41
Integración aproximada	61
Autoevaluaciones	67

Capítulo II: Ecuaciones diferenciales

Introducción	72
Ecuaciones ordinarias de primer orden - Métodos de resolución	81
Problema de valor inicial	92
Modelado de problemas	95
Curvas ortogonales y familias de curvas ortogonales	100
Autoevaluación	105

Capítulo III: Integrales Múltiples

Integrales dobles	106
Aplicaciones de la integral doble	123
Cambio de variables en la integral doble	132
Coordenadas polares	144
Integrales triples	160
Cambio de variables en la integral triple	166
Coordenadas cilíndricas	167
Coordenadas Esféricas	173
Autoevaluaciones	181

Capítulo IV: Integrales impropias y series numéricas

Integrales impropias	184
Sucesiones numéricas	195
Series numéricas	204
Series de términos positivos - Criterios de convergencia	211
Series de términos positivos y negativos- Series alternadas	217
Autoevaluación	226

Capítulo V: Integrales de línea

Curvas en el plano y en el espacio - Parametrización	228
Longitud de un arco de curva	239
Función longitud de arco	241
Campos vectoriales	244
Campo gradiente	250
Estudio de la variación de un campo	254
Integral de línea	263
Integral de línea de un campo vectorial	271
Teorema de Green	277
Campos conservativos e independencia del camino	287
Autoevaluaciones	298

Capítulo VI: Integrales de superficie

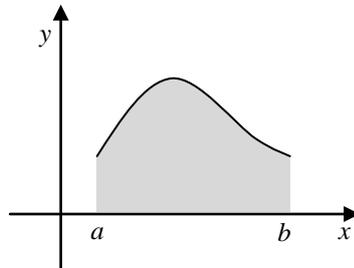
Superficies	305
Dirección normal a una superficie	312
Área de una superficie	314
Integral de superficie	319
Flujo de un campo vectorial a través de una superficie	325
Teorema de Stokes	333
Teorema de Gauss	343
Autoevaluaciones	348

Capítulo I: Integral definida

El concepto de integral definida tuvo su origen en un problema geométrico: el cálculo del área de una región plana, cuya frontera no está formada por segmentos rectilíneos.

Es éste uno de los grandes problemas de la historia de la matemática, pues, más allá de su importancia dentro de la propia disciplina, está relacionado con incontables aplicaciones.

El cálculo del área de la región encerrada entre la gráfica de una función $f(x)$ y el eje x en un intervalo dado puede brindar información de mucho interés según sea lo que representa la función $f(x)$.



Actividad 1

Situación 1: Un automóvil se desplaza en línea recta y su velocidad es constante e igual a 80 km/h.

- Calculen el desplazamiento entre $t = 0$ y $t = 4$ (t representa el tiempo y se supone expresado en horas)
- Grafiquen la función $v(t)$ (velocidad) entre $t = 0$ y $t = 4$
- Observen que el desplazamiento entre $t = 0$ y $t = 4$ coincide con el área debajo de la gráfica de v en el intervalo $[0,4]$

Situación 2: Un automóvil se desplaza en línea recta y su velocidad, en el tiempo t (en horas), es $v(t) = 20t$ (en km/h)

- ¿Cuál es la velocidad máxima y la velocidad mínima en el intervalo de tiempo $[0,1]$? ¿y en $[1,2]$? ¿y en $[3,4]$?
- Calculen el desplazamiento entre $t = 0$ y $t = 1$, entre $t = 1$ y $t = 2$, entre $t = 2$ y $t = 3$ y entre $t = 3$ y $t = 4$.

- c) ¿Cuál es el desplazamiento entre $t = 0$ y $t = 4$?
- d) Grafiquen la función v y verifiquen que, en cada intervalo, el desplazamiento coincide con el área debajo de la gráfica de v .

Situación 3: Un automóvil se desplaza en línea recta y su velocidad, en el tiempo t (en horas), es $v(t) = t^2$ (en km/h)

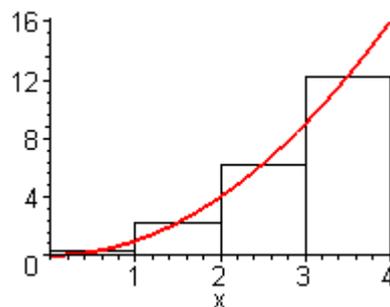
- a) ¿Cuántos km se desplaza el automóvil entre $t = 0$ y $t = 4$?
- b) Grafiquen la función $v(t)$. Para hacer una verificación similar a la realizada en las situaciones anteriores... ¿el área de qué región tendrían que calcular?

Área debajo de la gráfica de $v(t) = t^2$ en el intervalo $[0,4]$

Para una función lineal o lineal a trozos el problema del cálculo del área encerrada por la gráfica de la función en un intervalo dado y el eje x es simple: basta con sumar áreas de rectángulos y triángulos. Pero, ¿cómo calcular el área debajo de la gráfica de $v(t) = t^2$ en el intervalo $[0,4]$? Podríamos aproximar el valor del área utilizando un número finito de rectángulos como veremos en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

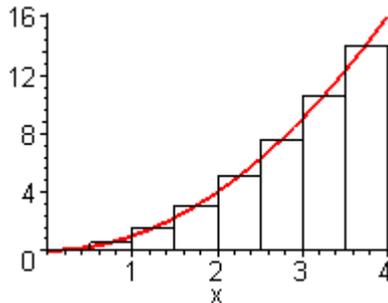
Si tomamos rectángulos con base de longitud 1 y altura igual al valor de la función en el punto medio del intervalo correspondiente y llamamos A al área bajo la curva de $v(t) = t^2$ desde $t = 0$ a $t = 4$...



$$A \cong v\left(\frac{1}{2}\right) + v\left(\frac{3}{2}\right) + v\left(\frac{5}{2}\right) + v\left(\frac{7}{2}\right) = \dots\dots\dots$$

Ejemplo 2

Si tomamos rectángulos con base de longitud $\frac{1}{2}$ y altura el valor de la función en el punto medio del intervalo correspondiente ...



$A \cong \dots\dots\dots$

Ejemplo 3

Si tomamos rectángulos con base de longitud $\frac{1}{16}$ y altura igual al valor de la función en el punto medio del intervalo correspondiente ... ¿Cuántos términos debemos sumar? (¡sería conveniente contar con una notación abreviada para expresar sumas!)

Notación

La letra griega Σ (sigma) es el símbolo que se utiliza para indicar de manera abreviada una suma de varios términos:

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Con esta notación,

- la suma $(\frac{1}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2 + (\frac{5}{2})^2 + (\frac{7}{2})^2$ del ejemplo 1 se expresa $\sum_{i=1}^4 \left(\frac{2i-1}{2}\right)^2$

La expresión $\left(\frac{2i-1}{2}\right)^2$ es el *término general* de esa sumatoria. Si se reemplaza en el

término general i sucesivamente por 1, 2, 3 y 4 intercalando el signo $+$, se obtiene

$$(\frac{1}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2 + (\frac{5}{2})^2 + (\frac{7}{2})^2$$

- la suma del ejemplo 2 se expresa $\sum_{i=1}^8 \left(\frac{2i-1}{4}\right)^2 \frac{1}{2}$

- La suma del ejemplo 3 se expresa

Volvamos al problema que nos ocupa y al procedimiento seguido en los ejemplos. En lugar de elegir el punto medio en cada intervalo para establecer la altura de los rectángulos podríamos haber elegido el extremo derecho del intervalo, el extremo izquierdo, o un punto cualquiera interior. Es obvio que, en cualquier caso, *cuantos más rectángulos con bases cada vez más pequeñas consideremos, tanto mejor será la aproximación que obtendremos del área*. Ciertamente es también, que el proceso se vuelve pronto tedioso.

La siguiente tabla fue elaborada usando un software matemático. En ella pueden observar los resultados que se obtienen al reproducir el procedimiento de los ejemplos para valores crecientes del número de rectángulos considerados y para diferentes elecciones de la altura de esos rectángulos. Se llama “Suma izquierda”, “Suma con el punto medio” y “Suma derecha” a la suma de las áreas de los rectángulos eligiendo como altura de cada uno de ellos respectivamente al valor de la función en el extremo izquierdo, en el punto medio y en el extremo derecho de la base. En la tercera columna está calculada la diferencia entre Suma derecha y la Suma izquierda.

	Número de rectángulos	Suma izquierda	Suma con punto medio	Suma derecha	Diferencia
<i>tabla :=</i>	1000	21.30134400	21.33332800	21.36534400	0.06400000
	2000	21.31733600	21.33333200	21.34933600	0.03200000
	3000	21.32266785	21.33333274	21.34400118	0.02133333
	4000	21.32533400	21.33333300	21.34133400	0.01600000
	5000	21.32693376	21.33333312	21.33973376	0.01280000
	6000	21.32800029	21.33333319	21.33866696	0.01066667
	7000	21.32876212	21.33333322	21.33790498	0.00914286
	8000	21.32933350	21.33333325	21.33733350	0.00800000
	9000	21.32977791	21.33333326	21.33688902	0.00711111
	10000	21.33013344	21.33333328	21.33653344	0.00640000

Hemos visto de qué manera podemos aproximar el valor del área debajo de la gráfica de una función como $v(t) = t^2$ en un intervalo dado... pero ¿cuál es el valor exacto del área?

Integral definida de una función continua y no negativa en un intervalo

Definición 1

Siendo f una función continua y no negativa en $[a,b]$, la integral definida de f en $[a,b]$, que se denota $\int_a^b f(x)dx$, es el área de la región limitada por la gráfica de f , el

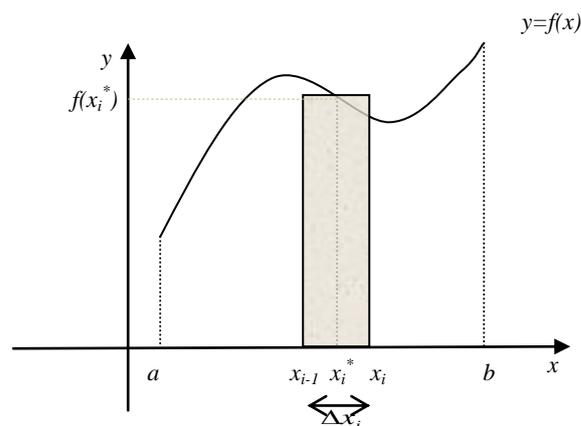
eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. Convendremos además en que $\int_a^a f(x)dx = 0$.

De acuerdo con esta definición, y en base a lo que hicimos antes, podríamos decir que la integral definida de una función continua y no negativa en un intervalo $[a,b]$ resulta ser el número al que se aproximan, a medida que n se hace cada vez más grande, las sumas de la forma $\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i$, en la que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$ son $n+1$

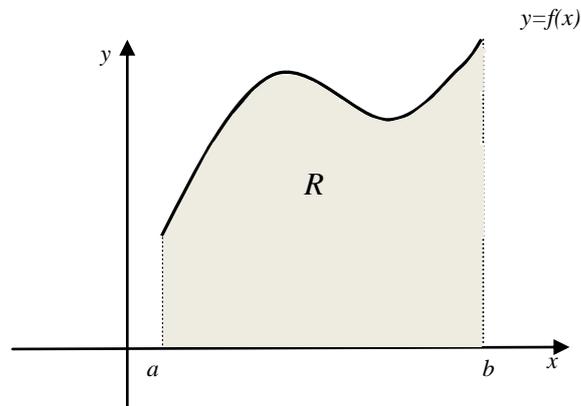
puntos equidistantes del intervalo $[a,b]$, x_i^* es un punto cualquiera del subintervalo

$[x_{i-1}, x_i]$ y $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$, o sea :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i \quad (1)$$



$f(x_i^*)\Delta x_i$ es el área del rectángulo con base en $[x_{i-1}, x_i]$ y altura $f(x_i^*)$



$$\int_a^b f(x)dx = \underset{i}{\text{área de la región } R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

Comentario 1

Los puntos $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$ constituyen lo que se llama una *partición* \wp de $[a, b]$ y $|\wp| = \text{máx}\{\Delta x_i, i = 1 \dots n\}$ se llama *norma* de la partición \wp .

Siendo los x_i equidistantes, $|\wp| = \frac{b-a}{n}$. Pero podríamos soslayar la condición de

equidistancia de los puntos x_i . Con tal de asegurarnos de que todos los Δx_i sean cada

vez más pequeños, es intuitivamente claro que las sumas $\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$ se irán

aproximando al área debajo de la gráfica de f en el intervalo $[a, b]$ o sea que :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\wp| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i \quad (2)$$

Comentario 2

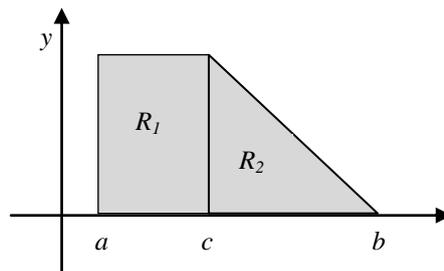
Por el momento, seguimos sin contar con un método efectivo para calcular en forma exacta el área debajo de una curva cualquiera (¡el cálculo de los límites planteados en (1) o (2) es por lo general inviable!)

Veremos a continuación algunas propiedades que se deducen inmediatamente de la definición 1.

Propiedad 1 (Aditividad respecto al intervalo de integración)

Si f es continua y no negativa en $[a, b]$ y $a < c < b$ entonces

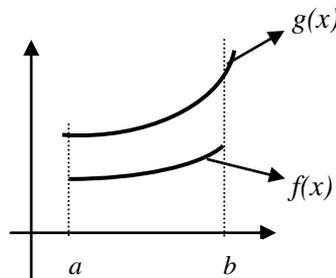
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



Propiedad 2 (Monotonía)

Si f y g son continuas y no negativas en $[a, b]$ y $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ entonces

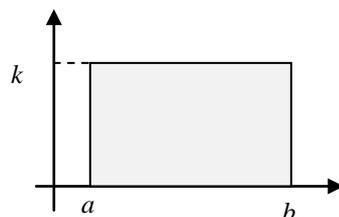
$$0 \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$



Propiedad 3

Si $f(x) = k \quad \forall x \in [a, b]$ (donde k es una constante mayor o igual que cero) entonces

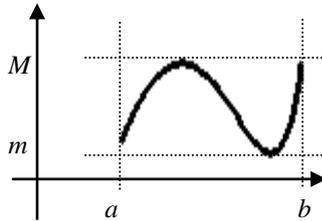
$$\int_a^b f(x) dx = k(b - a)$$



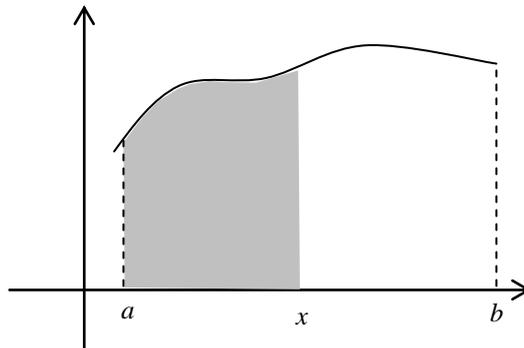
Propiedad 4

Si f es continua y no negativa en $[a,b]$ siendo $m = \text{mín de } f$ en $[a,b]$ y

$$M = \text{máx de } f \text{ en } [a,b], \text{ es } m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

**Definición 2**

Siendo f continua y no negativa en $[a,b]$ podemos definir una nueva función A , asignando a cada $x \in [a,b]$ el valor de la integral de f en el intervalo $[a,x]$. Así definida, la función A se llama *función integral de f en $[a,b]$* .



$$A(x) = \int_a^x f(t) dt = \text{área de la región limitada por la gráfica de } f$$

y el eje x en el intervalo $[a,x]$

El estudio de la variación de $A(x)$ nos conducirá a la solución del problema del cálculo del valor exacto del área debajo de la gráfica de una función en un intervalo. Antes de abordar ese estudio les proponemos resolver algunos ejercicios relacionados con las definiciones y propiedades que hemos presentado.

Ejercicio 1

Grafiquen en $[0,1]$ las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \sqrt{x}$

- a) ¿Qué relación hay entre f y g en $[0,1]$?
- b) ¿Cuál es el signo de $\int_0^1 g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx$?
- c) ¿Qué representa esa diferencia?

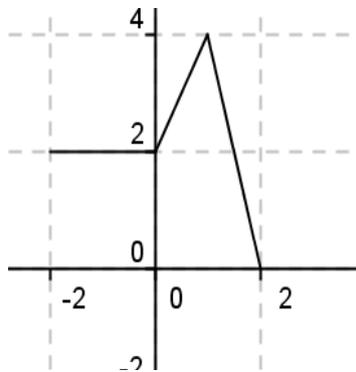
Ejercicio 2

Estudien la función $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 4$ en el intervalo $[-2,3]$.

- a) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo absolutos de f en $[-2,3]$?
- b) ¿Qué cotas admite $\int_{-2}^3 f(x) dx$?

Ejercicio 3

Sea $g(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$ donde f es la función del gráfico



- a) Evalúen $g(-2)$, $g(0)$, $g(1)$ y $g(2)$.
- b) Encuentren la expresión analítica de g .
- c) ¿Es derivable g ? ¿Cuál es su derivada?

Ejercicio 4

a) Grafiquen la recta $y = 3t + 2$. Utilizando las fórmulas de la geometría calculen el área determinada por la recta, el eje t y las rectas $t = 2$ y $t = 5$.

b) Sea $x > 2$. Consideramos $A(x)$ la función que describe el área de la región que se encuentra debajo de la recta $y = 3t + 2$, el eje t y las rectas $t = 2$ y $t = x$. Dibujen un esquema de esta región y usen la geometría con el fin de hallar una expresión para la función $A(x)$.

c) Deriven la función $A(x)$. ¿Qué conclusión pueden obtener?

El teorema fundamental del cálculo

Teorema 1

Si f es continua y no negativa en $[a, b]$ y $A(x) = \int_a^x f(t) dt$ entonces

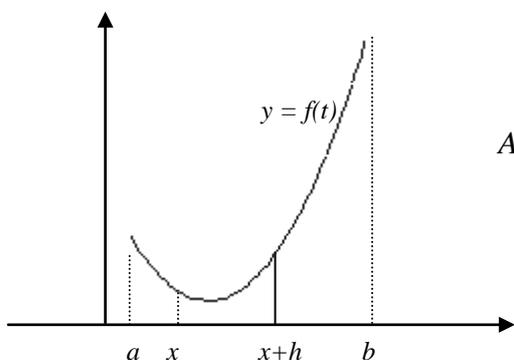
$$A'(x) = \frac{d\left(\int_a^x f(t) dt\right)}{dx} = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

Demostración:

Para comprobar que existe $A'(x) \quad \forall x \in (a, b)$ debemos calcular

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \quad \text{para } x \in (a, b)$$

Supongamos primero $h > 0$. A partir de la definición de la función $A(x)$ y aplicando la propiedad de aditividad en el intervalo de la integral definida tenemos:



$$A(x+h) - A(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt$$

Si m_h y M_h son respectivamente los valores mínimo y máximo que toma $f(x)$ en el intervalo $[x, x+h]$, resulta (por propiedad de la integral definida):

$$m_h \cdot h \leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq M_h \cdot h$$

de donde

$$m_h \leq \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \leq M_h$$

Cuando $h \rightarrow 0^+$, el intervalo $[x, x+h]$ tiende a reducirse al único punto x y tendremos, ya que f es continua,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} m_h = \lim_{h \rightarrow 0^+} M_h = f(x)$$

Por propiedad del límite concluimos que:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = A'_+(x) = f(x)$$

Suponiendo $h < 0$ con un razonamiento similar se concluye que:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = A'_-(x) = f(x)$$

Por lo tanto:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = A'(x) = f(x)$$

Observaciones:

1) Se puede demostrar con un razonamiento similar que $A'_+(a) = f(a)$ y que $A'_-(b) = f(b)$

2) Cuando una función $F(x)$ es tal que $F'(x) = f(x)$ para todo x de cierto intervalo I se dice que $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en ese intervalo. Así por ejemplo, en cualquier intervalo I de números reales, $F(x) = \text{sen } x$ es una primitiva de $f(x) = \cos x$ (¿pueden dar otras?).

El Teorema Fundamental del Cálculo nos está diciendo que toda función f continua y no negativa en $[a, b]$, tiene una primitiva en ese intervalo dada por

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt .$$

Corolario del teorema 1 (**Regla de Barrow**)

Si f es continua y no negativa en $[a,b]$ y F es una primitiva de f en ese intervalo entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Demostración

En virtud del Teorema Fundamental del Cálculo, $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ es una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$.

Consideremos ahora otra primitiva de $f(x)$ y llamémosla $F(x)$.

$$A(x) = F(x) + k \quad (\text{¿Por qué?})$$

En particular, $A(a) = F(a) + k$

Como $A(a) = 0$ (¿Por qué?) resulta $k = -F(a)$ y $A(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$

y, en particular, $A(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Ejemplo 4

Calculemos $\int_0^4 x^2 dx$

$F(x) = \frac{x^3}{3}$ es una primitiva de $f(x)=x^2$ en el intervalo $[0,4]$ ($F'(x) = x^2$)

Aplicando la Regla de Barrow: $\int_0^4 x^2 dx = F(4) - F(0) = \frac{4^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{64}{3} = 21,\bar{3}$

(¡ $\frac{64}{3}$ es el valor exacto del área debajo de la gráfica de $f(x)=x^2$ en el intervalo $[0,4]$!)

Escribimos en la práctica:
$$\int_0^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{64}{3} = 21,3\bar{3}$$

Ejercicio 5

Calculen aplicando la regla de Barrow las siguientes integrales definidas. Grafiquen e interpreten geoméricamente.

a) $\int_0^3 2 dx$

b) $\int_1^6 x dx$

c) $\int_0^1 (x^2 + 2x + 2) dx$

d) $\int_{-1}^3 f(x) dx$ siendo $f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 3-x & 1 < x \leq 3 \end{cases}$

e) $\int_{-1}^2 |x| dx$

f) $\int_0^1 e^x dx$

g) $\int_0^\pi \sin x dx$

h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

i) $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

Ejercicio 6

Calculen las derivadas de las siguientes funciones

a) $F(x) = \int_2^x \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} dt$

b) $G(x) = \int_2^{x^2} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} dt$

Hemos visto hasta aquí que:

1. Siendo f una función continua y positiva en $[a, b]$, $\int_a^b f(x) dx$ representa el área de la región limitada por la gráfica de f , el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ y su valor es $F(b) - F(a)$ siendo F una primitiva de f en $[a, b]$.

2. Si una función continua y positiva $v(t)$ representa la velocidad de una partícula que se mueve a lo largo de una recta, el área debajo de la gráfica de v en el intervalo $[t_1, t_2]$ coincide con el desplazamiento de la partícula en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$.

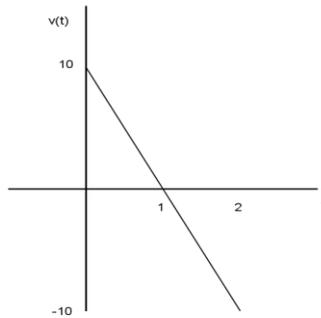
En efecto, el desplazamiento es $p(t_2) - p(t_1)$ donde $p(t)$ es la función posición y como $v(t) = p'(t)$ (esto es, $p(t)$ es una primitiva de $v(t)$) tenemos:

Área debajo de la gráfica de v en el intervalo $[t_1, t_2]$ =

$$= \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = p(t_2) - p(t_1) = \text{desplazamiento de la partícula en el intervalo } [t_1, t_2]$$

A continuación extenderemos la definición de integral definida a funciones continuas (cualesquiera) en un intervalo $[a, b]$. Reflexionen antes sobre la siguiente situación:

Situación 4: Un objeto ha sido arrojado verticalmente hacia arriba y $v(t) = 10 - 10t$ es su velocidad en el instante t .



La posición $p(t)$ es una primitiva de $v(t)$ ($v(t) = p'(t)$)

En principio, podemos decir entonces que será: $p(t) = 10t - 5t^2 + C$

Si suponemos $p(0) = 0$ debe ser $p(t) = 10t - 5t^2$

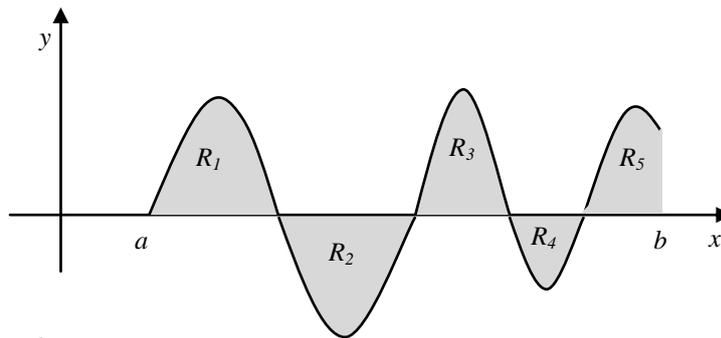
En el intervalo $[0, 1]$ la velocidad es positiva y el desplazamiento en ese intervalo es $p(1) - p(0) = 5$ y coincide con el área debajo de la gráfica de $v(t)$ en ese intervalo (y con la integral de $v(t)$ en el intervalo $[0, 1]$)

El desplazamiento en el intervalo $[1, 2]$ es negativo: $p(2) - p(1) = 0 - 5 = -5$

¿Qué relación hay entre este número y el área de la región comprendida entre la gráfica de $v(t)$ y el eje t en el intervalo $[1, 2]$? ¿Cuál es el desplazamiento en el intervalo $[0, 2]$?

Integral definida de una función continua en un intervalo

Por nuestra reflexión anterior parecería tener sentido definir la integral definida de una función que sea menor o igual que cero en un intervalo como menos el área de la región comprendida entre la gráfica de dicha función y el eje x en ese intervalo y que, para una función continua como muestra la figura siguiente . . .



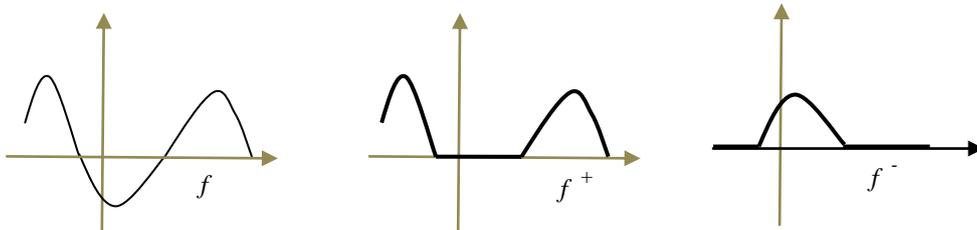
resulte :
$$\int_a^b f(x)dx = \text{área}(R_1) - \text{área}(R_2) + \text{área}(R_3) - \text{área}(R_4) + \text{área}(R_5)$$

Para formalizar la definición, observemos que una función siempre puede expresarse como la diferencia de dos funciones no negativas:

Dada $f(x)$ definida en $[a, b]$, sean:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \\ 0 & \text{si } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

vean que $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, que f^+ y f^- son ambas no negativas y que, si f es continua , f^+ y f^- son continuas.



Definición 3

Siendo f continua en el intervalo $[a, b]$,
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f^+(x) dx - \int_a^b f^-(x) dx$$

Observen!

1) **Las propiedades antes vistas siguen cumpliéndose para f continua** (no necesariamente positiva) en un intervalo $[a, b]$. Las recordamos:

- Si $a < c < b$ entonces
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$
- Si g también es continua en $[a, b]$ y $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ entonces

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

- Si $f(x) = k \quad \forall x \in [a, b]$ entonces
$$\int_a^b f(x) dx = k(b-a)$$
- Siendo $m = \text{mín de } f \text{ en } [a, b]$ y $M = \text{máx de } f \text{ en } [a, b]$ es

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

2) **Se extienden también al caso de una función continua el Teorema Fundamental y la Regla de Barrow:**

Si f es continua en $[a, b]$, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ es una primitiva de f

En efecto: $F(x) = \int_a^x f^+(t) dt - \int_a^x f^-(t) dt$ donde f^+ y f^- son continuas y no

negativas así que, al derivar ambos miembros, resulta:

$$F'(x) = f^+(x) - f^-(x) = f(x)$$

y podemos razonar como antes para concluir que, si G es cualquier primitiva de f

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) \quad .$$

3) Si f y g son continuas en $[a,b]$ y α y β son números reales

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Para demostrar esta propiedad bastará con tener en cuenta que: si F es una primitiva de f y G es una primitiva de g entonces $(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g$ es decir que $\alpha F + \beta G$ es una primitiva de $\alpha f + \beta g$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx &= (\alpha F + \beta G) \Big|_a^b = (\alpha F + \beta G)(b) - (\alpha F + \beta G)(a) = \\ &= (\alpha F(b) - \alpha F(a)) + (\beta G(b) - \beta G(a)) = \alpha(F(b) - F(a)) + \beta(G(b) - G(a)) = \\ &= \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

4) Siendo f continua en $[a,b]$, y considerando:

- $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$ partición \wp que divide a $[a,b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de longitud $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ siendo $|\wp| = \max\{\Delta x_i, i = 1 \dots n\}$ la norma de esa partición
- x_i^* punto cualquiera de $[x_{i-1}, x_i]$
- $\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i \approx \int_a^b f(x) dx$, aproximación que será tanto mejor cuanto más

pequeños sean todos los Δx_i lo que expresamos escribiendo:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\wp| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

Ejercicio 7

Evalúen las siguientes integrales. En los incisos a) al h) interpreten geoméricamente los valores obtenidos.

a) $\int_{-2}^4 (3x - 5) dx$

b) $\int_0^1 (1 - 2x - 3x^2) dx$

c) $\int_1^2 x^{-2} dx$

d) $\int_1^4 \sqrt{x} dx$

e) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{sen} t dt$

f) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t dt$

g) $\int_{\ln 3}^{\ln 6} 5e^x dx$

h) $\int_{-e^2}^{-e} \frac{3}{x} dx$

i) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sec^2 t dt$

j) $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

k) $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

l) $\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$

m) $\int_1^4 \frac{t^6 - t^2}{t^4} dt$

n) $\int_0^{\pi/2} (\cos \theta + 2\operatorname{sen} \theta) d\theta$

ñ) $\int_{-3}^0 (5y^4 - 6y^2 + 14) dy$

o) $\int_a^b x^n dx \quad (n \neq 1)$ (¿Qué debemos tener en cuenta si n es menor que 1?)

Ejercicio 8

En cada uno de los siguientes incisos hallen la expresión analítica de la función integral de $f(x)$ en el intervalo dado.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \end{cases} \text{ en } [-1,3] \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -x + 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \text{ en } [0,2]$$

Ejercicio 9

Determinen una función continua f tal que

$$\int_0^x f(t) dt = x e^{2x} - \int_0^x e^{-t} f(t) dt$$

Ejercicio 10

Supongan que f tiene derivada negativa para todo x y que $f(1) = 0$. ¿Cuáles de las

siguientes afirmaciones son verdaderas para la función $h(x) = \int_0^x f(t) dt$?

- a) h es dos veces derivable como función de x
- b) h y $\frac{dh}{dx}$ son funciones continuas
- c) La gráfica de h tiene una tangente horizontal en $x = 1$
- d) h tiene un máximo local en $x = 1$
- e) h tiene un mínimo local en $x = 1$
- f) La gráfica de h tiene un punto de inflexión en $x = 1$
- g) La gráfica de $\frac{dh}{dx}$ cruza el eje x en $x = 1$

Ejercicio 11

Hallen la función lineal aproximante de:

a) $f(x) = 2 - \int_2^{x+1} \frac{9}{1+t} dt$ centrada en $x = 1$

b) $g(x) = 3 + \int_1^{x^2} \sec(t-1) dt$ centrada en $x = -1$

Ejercicio 12 (Usen algún software matemático)

Sean $f(x) = \sin(2x)\cos(x/3)$, $x \in [0, 2\pi]$ y F la función integral de f en ese intervalo

- a) Grafiquen f y F en un mismo sistema de coordenadas.
- b) Resuelvan la ecuación $F'(x) = 0$. ¿Qué pasa en las gráficas de f y F en los puntos donde $F'(x) = 0$? ¿Concuerda ello con el teorema fundamental del cálculo integral?
- c) ¿En qué intervalos crece y en cuáles decrece la función F ? ¿Qué pasa con f en esos intervalos?
- d) ¿Qué pasa en la gráfica de F en los puntos donde $f'(x) = 0$?

Ejercicio 13

a) Grafiquen la función $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ \text{sen}((\pi/2)t) & \text{si } 1 < t \leq 2 \end{cases}$ y observen que es continua

en $[0,2]$. Calculen $\int_0^2 f(t) dt$ indicando las propiedades que usan.

b) Encuentren $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ para $x \in [0,2]$ y calculen $F(0), F(1), F(3/2)$

c) Supongan que G es una primitiva de f en $[0,2]$ ¿existe alguna relación entre F y G ? Justifiquen su respuesta.

Más generalizaciones de la definición de integral**Definición 4**

Siendo $a < b$, $\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$

Observen que la definición anterior es razonable: para que la propiedad de aditividad siga valiendo debe ser

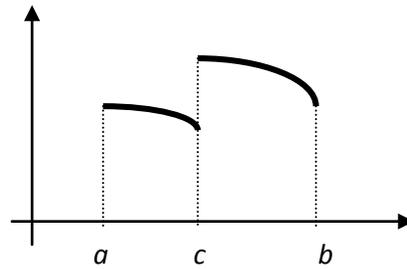
$$0 = \int_a^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx, \text{ de donde, } \int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

Definición 5

Si f es continua en $[a,b]$ salvo en un número c , $a < c < b$ y si los límites laterales

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \text{ existen, } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f_1(x)dx + \int_c^b f_2(x)dx$$

$$\text{donde } f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } a \leq x < c \\ \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) & \text{si } x = c \end{cases} \text{ y } f_2(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } c < x \leq b \\ \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) & \text{si } x = c \end{cases}$$

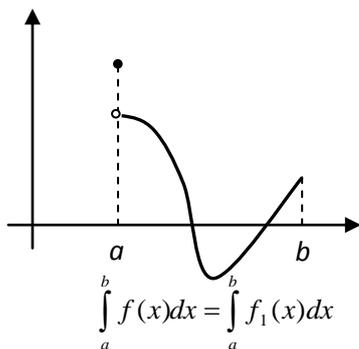


Veán que las funciones f_1 y f_2 son continuas en $[a, c]$ y $[c, b]$ respectivamente y

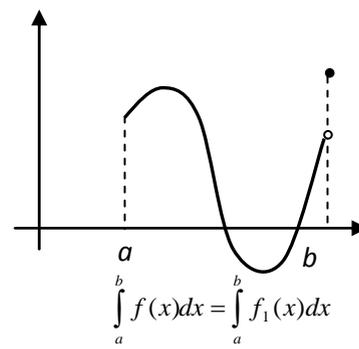
por lo tanto las integrales $\int_a^c f_1(x)dx$ y $\int_c^b f_2(x)dx$ están definidas.

Observaciones

- 1) Cuando una función f no es continua en c pero existen los límites laterales $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ decimos que f tiene en c una discontinuidad de primera especie.
- 2) La definición anterior se extiende naturalmente al caso en que f sea continua en $[a, b]$ salvo en un número finito de puntos c_1, c_2, \dots, c_k y en todos ellos presente discontinuidades de primera especie.
- 3) La discontinuidad podría presentarse en los extremos del intervalo, como sucede en los siguientes ejemplos



$$\text{donde } f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in (a, b] \\ \lim_{x \rightarrow a^+} [f(x)] & \text{si } x = a \end{cases}$$



$$\text{donde } f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a, b) \\ \lim_{x \rightarrow b^-} [f(x)] & \text{si } x = b \end{cases}$$

Ejercicio 14

Grafiquen la función $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{si } 1 < x \leq 3 \end{cases}$, observen que cumple las

condiciones de la definición 5 y evalúen $\int_{-1}^3 f(x)dx$.

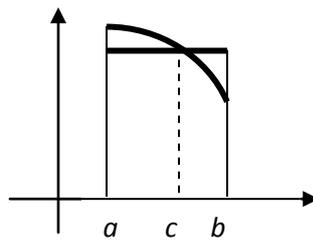
Ejercicio 15

Sea $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -2 \leq t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq t < 2 \end{cases}$ y sea $F(x) = \int_{-2}^x f(t)dt$, $x \in [-2, 2]$

- Hallen la expresión analítica de $F(x)$
- Tracen las gráficas de f y de F
- Estudien la continuidad y la derivabilidad de ambas funciones en el intervalo $[-2, 2]$.
- Reflexionen sobre la validez del Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

El teorema del valor medio

El siguiente Teorema tiene, para el caso de una función continua y positiva, una interpretación geométrica sencilla: el área debajo de la gráfica de la función en el intervalo $[a, b]$ resulta ser igual al área de un rectángulo de base $b-a$ y altura igual al valor de la función en cierto punto c del intervalo (a, b)

**Teorema 2**

Si f es continua en $[a, b]$, existe un número c entre a y b tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Demostración:

Consideremos la función $G(x) = \int_a^x f(t) dt$. Siendo f continua en $[a, b]$ G resulta continua

en $[a, b]$ y derivable en (a, b) (¿por qué?) (¿quién es $G'(x)$?). Podemos aplicar entonces el teorema del valor medio para derivadas y concluir que existe $c \in (a, b)$ tal que $G(b) - G(a) = G'(c)(b - a)$. Veán que reemplazando en la igualdad anterior

$G(b)$, $G(a)$ y $G'(c)$ se obtiene: $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$.

El número $\frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}$ es llamado *valor promedio de f en $[a, b]$* .

El teorema del valor medio para integrales nos dice que, si f es continua en $[a, b]$, ese valor promedio coincide con el valor de f en algún $c \in (a, b)$.

Si $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -2 \leq t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < t < 2 \end{cases}$ ¿cuál es el valor promedio de f en $[-2, 2]$?

¿es ese número el valor de la función en algún c entre -2 y 2 ? (¿contradice esto lo dicho previamente?)

Ejercicio 16

Calculen el valor promedio de f en el intervalo dado.

- a) $f(x) = x^2 - 2x$; $[0, 3]$ b) $f(x) = \text{sen } x$; $[0, \pi]$ c) $f(x) = x^4$; $[-1, 1]$
 d) $f(x) = 1/x$; $[1, 4]$ e) $f(x) = \sqrt{x}$; $[4, 9]$

Ejercicio 17

Encuentren los posibles valores de b para que el valor promedio de $f(x) = 2 + 6x - 3x^2$ en el intervalo $[0, b]$ sea igual a 3.

Ejercicio 18

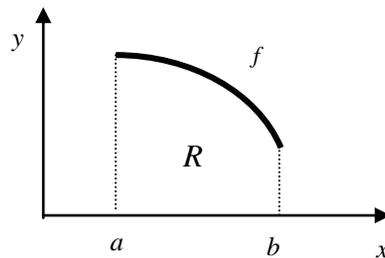
Encuentren todos los valores α tales que $f(\alpha)$ sea igual al valor promedio de $f(x) = 1 + x^2$ en el intervalo $[-1, 2]$

Aplicaciones de la integral definida

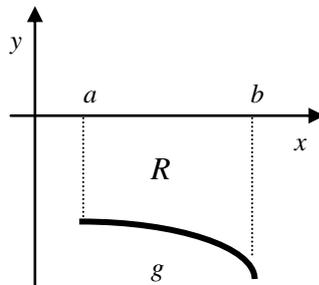
I. Área de una región entre dos curvas

Actividad 2

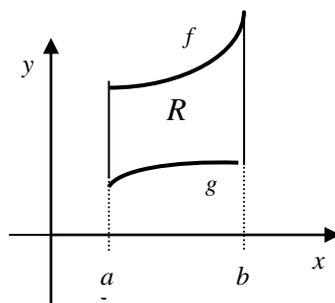
Sabemos que si f es continua y no negativa en $[a, b]$ entonces $\int_a^b f(x) dx$ representa el área de una región plana que podemos describir como $R = \{(x, y) / a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$



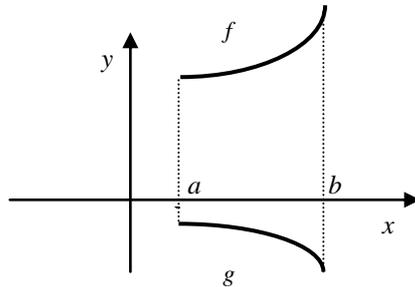
Observen el siguiente dibujo. ¿Cómo es $g(x)$? ¿Qué representa $\int_a^b g(x) dx$? . Describan la región R



Consideren ahora la siguiente región R y descríbanla. ¿Cómo calcularían el área de la región R ?



Les planteamos una nueva región. Describanla. ¿Cómo calcularían el área de R ?



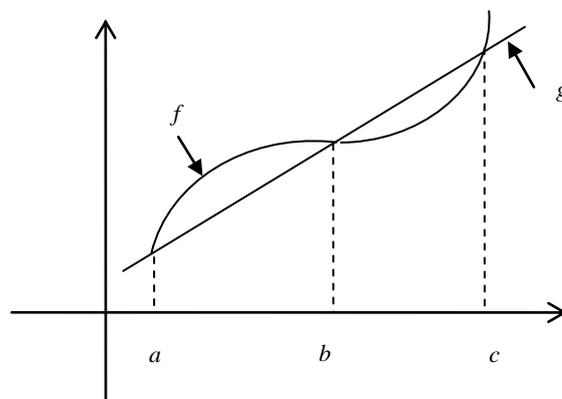
Ya estamos en condiciones de enunciar en general:

Si f y g son continuas en $[a, b]$ y en ese intervalo es $f(x) \geq g(x)$, queda definida una región plana que puede describirse como $R = \{(x, y) / a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq f(x)\}$ y

cuya área es

$$A(R) = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Consideren ahora la siguiente situación



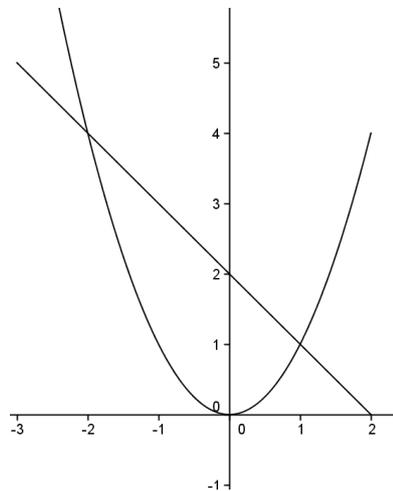
Observen el dibujo. Vean que: en el intervalo $[a, b]$ es $f(x) \geq g(x)$ y en el intervalo $[b, c]$ es $g(x) \geq f(x)$. ¿Cómo pueden describir la región limitada por las gráficas de f y g ? ¿Cómo calculan su área?

Ejemplo 5

Grafiquemos la región R limitada por $y = x^2$ y $x + y = 2$ y calculemos su área.

1°) Buscamos los puntos comunes a ambas gráficas resolviendo el sistema $\begin{cases} y = x^2 \\ x + y = 2 \end{cases}$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \wedge x_2 = -2$$



2°) Siendo $f(x) = 2 - x$ y $g(x) = x^2$ es $f(x) \geq g(x)$ en $[-2, 1]$ en consecuencia,

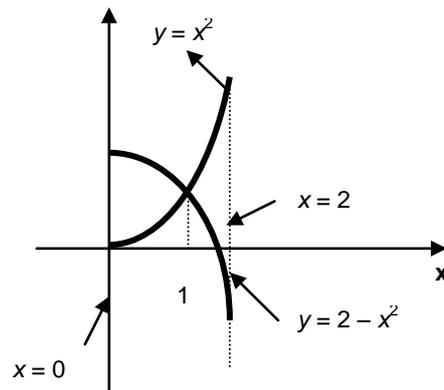
$$R = \{(x, y) / -2 \leq x \leq 1 \wedge x^2 \leq y \leq 2 - x\} \quad y$$

$$\text{área}(R) = \int_{-2}^1 [f(x) - g(x)] dx = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)_{-2}^1 = \frac{7}{6} - \left(-\frac{20}{6} \right) = \frac{27}{6}$$

Ejemplo 6

Calculemos el área de la región limitada por: $y = x^2$; $y = 2 - x^2$; $x = 0$ y $x = 2$.

Para resolver, graficamos y determinamos el punto de intersección de las parábolas.



En el intervalo $[0,1]$ es $2 - x^2 \geq x^2$ y en el intervalo $[1,2]$ es $x^2 \geq 2 - x^2$

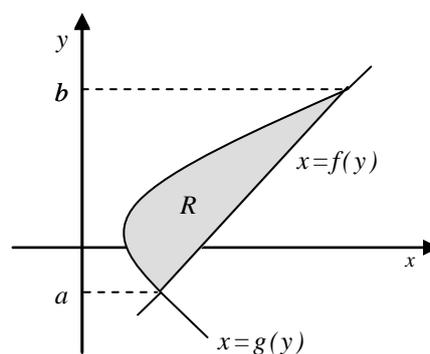
Describimos entonces la región como unión de dos subregiones:

$$R = \left\{ (x, y) / 0 \leq x \leq 1 \wedge x^2 \leq y \leq 2 - x^2 \right\} \cup \left\{ (x, y) / 1 \leq x \leq 2 \wedge 2 - x^2 \leq y \leq x^2 \right\}$$

Por lo tanto el área es:

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^1 (2 - 2x^2) dx + \int_1^2 (2x^2 - 2) dx = 2x - 2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + 2 \frac{x^3}{3} - 2x \Big|_1^2 = \\ &= \left(2 - \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{16}{3} - 4 \right) - \left(\frac{2}{3} - 2 \right) = 4 \end{aligned}$$

Conviene a veces describir la región de otra manera y calcular el área integrando respecto de la variable y . Vean:



$$R = \left\{ (x, y) / a \leq y \leq b \wedge g(y) \leq x \leq f(y) \right\}$$

$$A(R) = \int_a^b [f(y) - g(y)] dy$$

Ejercicio 19

En el intervalo dado, hallen el área de la región limitada por las curvas.

a) $y = e^x$; $y = x - 1$ en $[-2, 0]$

b) $y = x^3 - 1$; $y = 1 - x$ en $[-2, 2]$

Ejercicio 20

Hallen el área de la región encerrada por las curvas.

a) $y = x^3$; $y = x^2$ b) $y = -x^4 + 2$; $y = x^2$

c) $y = 2x$; $y = x^4$ d) $y = x^2 - 2$; $y = x$

Ejercicio 21

Grafiquen la región limitada por $xy = 2$; $x = \frac{1}{2}y$; $x = 2y$

- Describan analíticamente la región.
- ¿Ofrece alguna ventaja considerar los tramos de la frontera como funciones de x ó como funciones de y ?
- Calculen el área.

Ejercicio 22

Hallen el área de la región encerrada por las curvas

a) $4x + y^2 = 0$; $y = 2x + 4$ b) $x + 1 = 2(y - 2)^2$; $x + 6y = 7$

Ejercicio 23

Calculen el área de la región limitada por la parábola $y = x^2$, la tangente a esa curva en $(1, 1)$ y el eje x .

Ejercicio 24

¿Para qué valores de m la recta $y = mx$ y la curva $y = x^3$ definen una región?

Encuentren el área de esa región para un m fijo

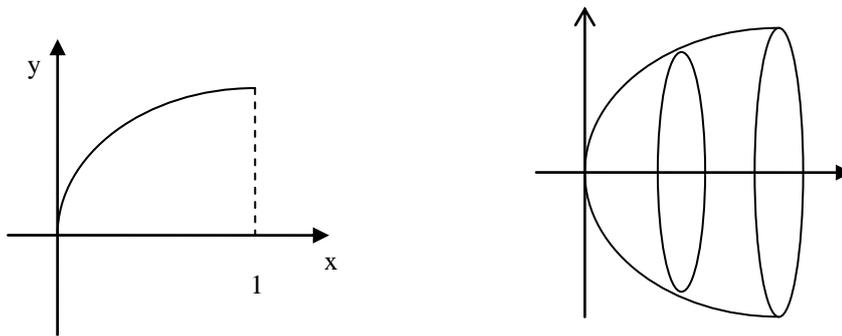
Ejercicio 25

- Calculen y llamen A al valor promedio de $f(x) = x^2$ sobre el intervalo $[0, 3]$
- Calculen el área de la región por encima de $y = A$ y por debajo de $y = f(x)$.

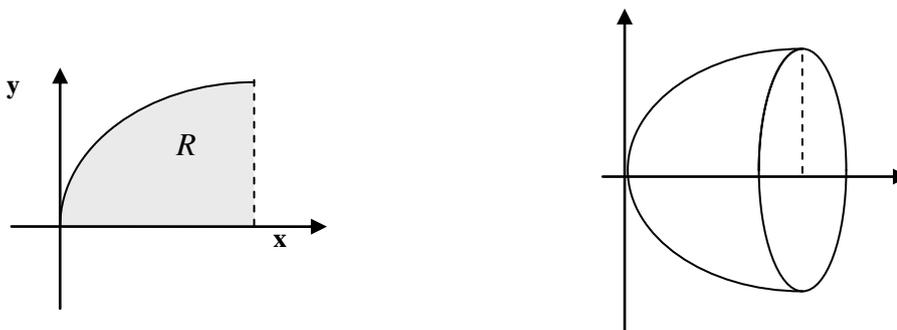
- c) Calculen el área de la región por debajo de $y = A$ y por encima de $y = f(x)$.
- d) Comparen los resultados obtenidos en b) y c), grafiquen y describan en lenguaje coloquial.
- e) Muestren que el resultado obtenido en d) es verdadero para f continua en $[a, b]$ probando que $\int_a^b [f(x) - A] dx = 0$.

II. Volumen de un sólido de revolución

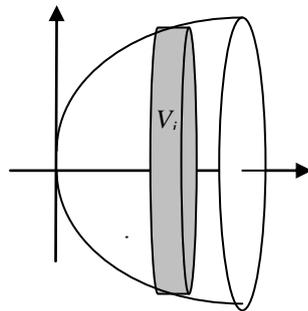
Imaginen que el arco de curva $C: y = \sqrt{x}$ con $x \in [0, 1]$ gira alrededor del eje $x \dots$ Cada punto (x, \sqrt{x}) de la curva describe una circunferencia centrada en $(x, 0)$ y de radio \sqrt{x} , generándose una superficie que decimos es *una superficie de revolución*.



Esa superficie está limitando un sólido que decimos es un *sólido de revolución*. Podemos interpretar que dicho sólido es el generado al rotar alrededor del eje x la región comprendida entre la curva $y = \sqrt{x}$ y el eje x en el intervalo $[0, 1]$.



Vamos a describir a continuación un método que nos permitirá calcular el volumen de un sólido de revolución V y que reproduce, adaptándolo a este nuevo problema, nuestro procedimiento para calcular el área debajo de la gráfica de una función continua y positiva en un intervalo ¿lo recuerdan? Al valor del área de la región comprendida entre la gráfica de una función f (continua y no negativa), el eje x y las rectas $x=a$ y $x=b$ lo hemos aproximado sumando las áreas de rectángulos convenientemente elegidos. Ahora, al volumen del sólido lo aproximaremos considerando cilindros como el que muestra la siguiente figura



Siendo el arco C la gráfica de la función f , continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$, tomemos una partición ρ de $[a, b]$ por medio de $n+1$ puntos de división, igualmente espaciados, esto es, consideremos $n+1$ puntos

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

que definen n subintervalos de longitud $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$

Si elegimos $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ arbitrariamente, $f(x_i^*)$ representa el radio de un cilindro sólido V_i cuyo volumen es:

$$\text{Vol}(V_i) = \pi [f(x_i^*)]^2 \Delta x_i$$

En consecuencia,

$$\text{Vol}(V) \cong \sum_{i=1}^n \pi [f(x_i^*)]^2 \Delta x_i$$

A medida que n sea cada vez más grande... los cilindros V_i cubrirán cada vez mejor al sólido V y por lo tanto las sumas de sus volúmenes se aproximarán cada vez más al

volumen del sólido V , esto es: $\text{Vol}(V) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi [f(x_i^*)]^2 \Delta x_i$

Observemos el 2º miembro de esa igualdad: cada término de la suma resulta ser el producto entre el valor de $g(x) = \pi[f(x)]^2$ en $x = x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ y la longitud de ese intervalo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Siendo f continua en $[a, b]$, $g(x) = \pi[f(x)]^2$ es continua y no negativa en $[a, b]$ y

es entonces
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi[f(x_i^*)]^2 \Delta x_i = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$

Concluimos entonces que
$$Vol(V) = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx$$

Ejemplo 7

El volumen del sólido generado al rotar la región comprendida entre la curva $y = \sqrt{x}$ y el eje x en el intervalo $[0,1]$ es:

$$Vol(V) = \int_0^1 \pi(\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^1 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2} \pi$$

Actividad 3

Piensen ahora en la siguiente situación:

La gráfica de $x = f(y)$, función continua en un intervalo $[c, d]$, rota alrededor del eje y .

Interpreten gráficamente y repitan el razonamiento anterior para encontrar una fórmula para el volumen del sólido de revolución correspondiente. (Como verán, el integrar con respecto a x ó y no depende de la característica de la curva, sino del eje elegido como eje de rotación)

Ejercicio 26

Calculen el volumen del sólido de revolución que se genera cuando la región comprendida entre $y = 4 - x^2$ y el eje x en el intervalo $[0,2]$ rota alrededor de:

a) el eje x b) el eje y

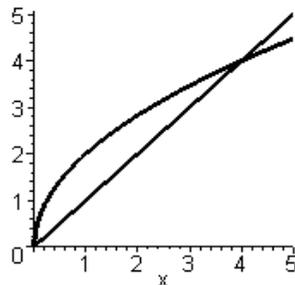
Actividad 4

Les proponemos que traten de responder la siguiente pregunta:

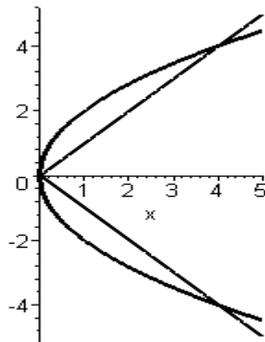
¿Cuál será el volumen del sólido generado al girar en torno al eje x la región comprendida entre los gráficos de dos funciones f y g , con $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[a, b]$? Para responder pueden ayudarse con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 8

Sea R la región limitada por $y = \sqrt{4x}$ e $y = x$



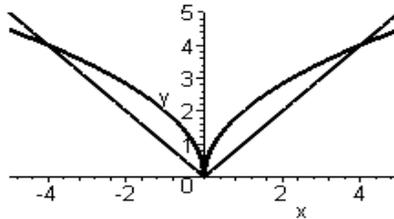
a) Al rotar R alrededor del eje x se produce un sólido V con “cavidad”. No se pretende graficar en el espacio con precisión, pero, por lo menos, intentamos un esquema de una sección del sólido generado y nos damos cuenta de que el volumen puede obtenerse como diferencia entre los volúmenes de dos sólidos V_1 y V_2 (¿cuáles?)



Los puntos comunes son $O(0,0)$ y $A(4,4)$ en consecuencia

$$vol(V) = vol(V_1) - vol(V_2) = \pi \int_0^4 (\sqrt{4x})^2 dx - \pi \int_0^4 x^2 dx = \pi \int_0^4 4x dx - \pi \int_0^4 x^2 dx = \pi \left[4 \frac{x^2}{2} \right]_0^4 - \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \frac{64}{6} \pi$$

b) Si rotamos la región alrededor del eje y , también obtenemos un sólido con cavidad. Su volumen otra vez puede obtenerse como diferencia de los volúmenes de dos sólidos (¿cuáles?)



No debemos olvidar que cada arco debe considerarse en este caso gráfica de una función de y .

Para el arco de parábola: $x = \frac{y^2}{4}$; para el segmento: $x = y$

$$\therefore \text{vol}(V) = \pi \int_0^4 y^2 dy - \pi \int_0^4 \left[\frac{y^2}{4} \right]^2 dy = \pi \left[\frac{64}{3} - \frac{64}{5} \right] = \pi \frac{128}{15}$$

Ejercicio 27

Sea R la región limitada por $y = x^2$ e $y = 1$

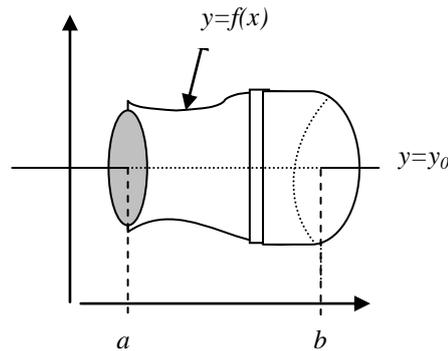
- Grafiquen
- Roten la región R alrededor del eje x y observen el sólido que se genera.
- Observen que todas las secciones perpendiculares al eje x del sólido son coronas circulares. ¿Cuál es el área de tales secciones? d) ¿Cómo calcularían el volumen de dicho sólido?

Actividad 5

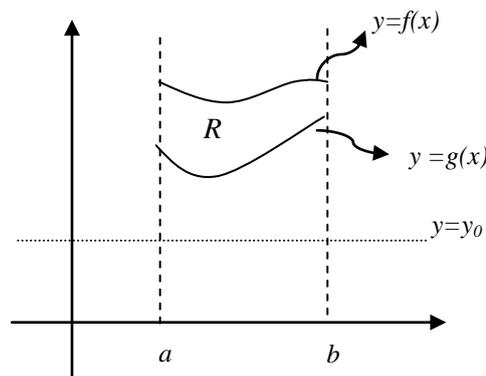
Analicen el procedimiento a emplear cuando el eje de rotación es una recta paralela a uno de los ejes coordenados.

- Supongan que $y = y_0$ es el eje de rotación y C el arco de ecuación $y = f(x)$, $x \in [a, b]$. Al seccionar el sólido en discos, ¿qué radio puede tomarse para cada uno de ellos? ¿puede ser $f(x) - y_0$? ¿por qué?

Completen la propuesta y analicen cómo se procede al rotar alrededor de una recta paralela al eje y ($x = x_0$).



b) En la misma forma les proponemos que analicen cómo proceder cuando una región determinada por dos curvas rota alrededor de una recta paralela al eje x o al eje y . Observen la gráfica siguiente. ¿Cómo calcularían el volumen del sólido generado por la rotación?



Ejercicio 28

Calculen el volumen de la esfera que se obtiene haciendo rotar la región limitada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, alrededor del eje x .

Ejercicio 29

Calculen el volumen del sólido que se obtiene haciendo rotar en torno al eje x la región limitada por la gráfica de $f(x) = x^2$ y las rectas $x = 1$ e $y = 0$

Ejercicio 30

Calculen el volumen del sólido obtenido haciendo rotar en torno al eje x la región limitada por las curvas $y = x$ e $y = x^2$.

Ejercicio 31

Calculen el volumen del sólido obtenido haciendo girar la región limitada por la gráfica de $f(x) = x^2$ y las rectas $x = 1$ e $y = 0$ en torno a la recta $y = 2$ y luego alrededor de $x = 4$.

Ejercicio 32

Calculen el volumen del sólido obtenido haciendo girar la región del ejercicio 29 en torno al eje y .

Ejercicio 33

Calculen el volumen de un cono circular recto con altura h y radio de la base r .

Ejercicio 34

En los siguientes problemas, calculen el volumen del sólido generado por la rotación de la región R limitada por las curvas dadas en torno al eje indicado. Aconsejamos en cada caso graficar la región R .

- $y = \frac{4}{x}, x = 1, x = 4, y = 0$, alrededor del eje x
- $y = x^2, x = 2, y = 0$, alrededor del eje y
- $y = \sqrt{x}, x = 4, y = 0$, alrededor del eje y
- $y = 4 - x^2, (x \geq 0), x = 0, y = 0$, alrededor del eje y
- $y = 4 - x^2, (x \geq 0), x = 0, y = 0$, alrededor de la recta $x = 2$

Ejercicio 35

Bosquejen la región R , limitada por $y = \frac{1}{x^3}, x = 1, x = 3$ e $y = 0$. Planteen las integrales

que permiten calcular:

- el área de R
- el volumen del sólido obtenido cuando R gira en torno del eje y
- el volumen del sólido obtenido cuando R gira en torno de la recta $y = -1$
- el volumen del sólido obtenido cuando R gira en torno de la recta $x = 4$

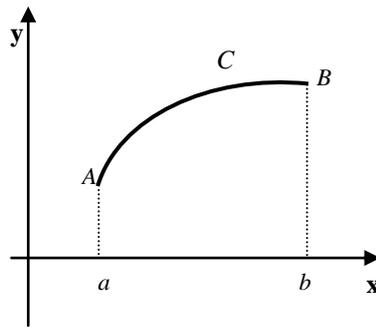
Uso de Maple

Con los siguientes comandos podrán graficar un sólido de revolución, plantear la integral que permite calcular su volumen y obtener dicho volumen.

```
> with(Student[Calculus1]):
> VolumeOfRevolution(x^2,x=0..2,output = plot);
> VolumeOfRevolution(x^2,x=0..2,output = integral);
> VolumeOfRevolution(x^2,x=0..2,output = value);
```

III. Longitud de un arco de curva

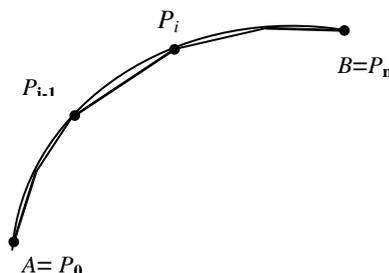
Sea C el arco de curva correspondiente a la gráfica de una función continua $y = f(x)$ con $x \in [a, b]$. Los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ son los extremos de C .



Nuestro objetivo es encontrar una expresión que nos permita calcular la longitud del arco C . Utilizaremos un procedimiento similar al que usamos antes para calcular áreas y volúmenes.

Consideremos una partición del intervalo $[a, b]$ formada por $n+1$ puntos equidistantes $\varphi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$.

Esta partición de $[a, b]$ determina sobre el arco C $n+1$ puntos $P_i(x_i, f(x_i))$ y n subarcos $P_{i-1}P_i$ cuyas longitudes se pueden aproximar por la longitud de los segmentos $\overline{P_{i-1}P_i}$



$$\text{long del arco } P_{i-1}P_i \cong \text{long } \overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

$$\text{Entonces: } \text{long del arco } AB \cong \sum_{i=1}^n \text{long } \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

Si f , que se supone continua en $[a, b]$, es además derivable en (a, b) , entonces por el teorema del valor medio aplicado a f en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ podemos afirmar:

$$\text{existe } x_i^* \in (x_{i-1}, x_i) \text{ tal que } f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = f'(x_i^*)\Delta x_i$$

$$\therefore \text{long del arco } AB \cong \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f'(x_i^*)\Delta x_i]^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x_i$$

y a medida que n sea cada vez más grande, esa aproximación será cada vez mejor:

$$\text{long del arco } AB = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x_i \right)$$

Si agregamos la hipótesis de continuidad a la derivada de f , $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ resulta también continua (y no negativa) (analice por qué) y resulta

$$\therefore \text{long del arco } AB = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x_i \right) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

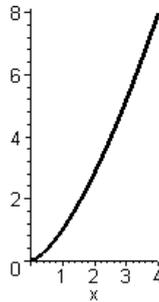
Conclusión:

Sea C un arco de curva de extremos A y B , gráfica de cierta función $y = f(x)$ continua, derivable y con derivada continua en el intervalo $[a, b]$ entonces:

$$\text{Longitud del arco } AB = L_A^B = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \text{ siendo } A(a, f(a)) \text{ y } B(b, f(b))$$

Ejemplo 9

Calculemos la longitud del arco de curva $y = \sqrt[2]{x^3}$ de extremos $A(0,0)$ y $B(4,8)$



Siendo $y = f(x) = \sqrt[3]{x^3}$ es $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ (continua)

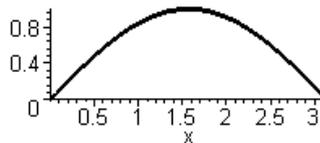
$\therefore \sqrt{1+[f'(x)]^2} = \sqrt{1+\frac{9}{4}x} = \frac{1}{2}\sqrt{4+9x}$ y entonces

$$L_A^B = \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{4+9x} \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \left[\frac{(4+9x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{1}{27} (\sqrt{40^3} - 8)$$

(verifiquen que $\frac{1}{9} \cdot \frac{(4+9x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$ es una primitiva de $\sqrt{4+9x}$)

Ejemplo 10

Sea C el arco de senoide desde $(0,0)$ hasta $(\pi,0)$.



En este caso es $f(x) = \text{sen } x$; $x \in [0, \pi]$.

Como $f'(x) = \cos x$ (continua): $L_A^B = \int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2 x} \, dx$

¿Cómo hallar una primitiva para calcular esta integral? Por el momento no tenemos método para hallarla, sólo podemos asegurar que esa integral representa la longitud del arco propuesto.

Conviene en este punto advertir que, al tomar al azar una curva gráfica de $y = f(x)$, es casi seguro que la integral de $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ no pueda resolverse sin ayuda de una tabla o un software. Vamos a proponerle, para afianzar el método, resolver algunos casos sencillos en los siguientes ejercicios.

Ejercicio 36

Usen una integración en x para encontrar la longitud del segmento de recta $y = 3x + 5$ para $1 \leq x \leq 4$. Comprueben el resultado usando la fórmula de distancia entre dos puntos.

Ejercicio 37

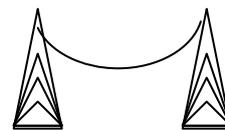
Usen una integración en y para encontrar la longitud del segmento de recta $2x + 6 = 4y$ para $0 \leq y \leq 2$. Comprueben el resultado usando la fórmula de distancia entre dos puntos.

Ejercicio 38

Calculen la longitud del arco de curva $y = 2x^{3/2}$ para $1/3 \leq x \leq 7$

Ejercicio 39

Un cable suspendido entre dos torres eléctricas que distan 40 metros adopta forma de catenaria de ecuación $y = 20 \cosh(\frac{x}{20})$, con $-20 \leq x \leq 20$, donde x e y se miden en metros. ¿Cómo calcularían la longitud del cable?



Uso de Maple

Con los siguientes comandos podrán graficar un arco de curva, plantear la integral que permite calcular su longitud y obtener su valor.

- > with(Student[Calculus1]):
- > ArcLength(t^2,t=0..5, output=integral);
- > ArcLength(t^2,t=0..5, output=plot);
- > ArcLength(t^2,t=0..5, output=value);
- > evalf(%);(este comando da el valor aproximado del resultado previo)

Integral indefinida

Como hemos visto, el problema del cálculo de la integral definida de una función continua en un intervalo queda resuelto una vez hallada una primitiva de la función. A esta altura hemos llevado adelante dicha búsqueda con éxito para diversas funciones. Pero encontrar primitivas no siempre es sencillo (¿cuál es por ejemplo, una función cuya derivada sea igual $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$?)

No hay reglas que nos conduzcan, a través de su aplicación sistemática, a la determinación de las primitivas de una función. Conoceremos sí, en las siguientes páginas, ciertas técnicas que pueden aplicarse en determinados casos. Introducimos antes una notación que resulta cómoda.

Recordemos que si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces toda otra primitiva tiene la forma $F(x) + C$ siendo C una constante arbitraria. $F(x) + C$ se llama primitiva general de $f(x)$.

El símbolo $\int f(x) dx$ (que se lee “integral indefinida de f con respecto a x ”) representa la primitiva general de $f(x)$. Así, $\int f(x) dx = F(x) + C$ donde $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$.

Ejemplo 11

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Verifíquelo derivando la función $F(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

La igualdad anterior es válida en cualquier intervalo de números reales que no contenga al cero.

Ejercicio 40

Resuelvan las siguientes integrales indefinidas. (Recuerden verificar sus respuestas así

como observar los intervalos de números reales en donde las mismas tienen validez)

$$a) \int (x^3 + \sqrt{3}) dx$$

$$b) \int \frac{x^4 - 2x^3 + 1}{x^2} dx$$

$$c) \int \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{\sqrt{x}} dx$$

$$d) \int y^2 (y^2 - 3) dy$$

$$e) \int (t^2 + 1)^2 dt$$

$$f) \int \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$g) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$h) \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$i) \int \frac{1}{2x} dx$$

$$j) \int (\cos(3x) + 3 \operatorname{sen} x) dx$$

Técnicas de Integración

I. Método de sustitución

Supongamos que nos piden resolver $\int (x^4 + 3x)^{30} (4x^3 + 3) dx$

Alguien podría proponer desarrollar la potencia 30 del binomio, distribuir el producto con el otro factor y así reducir todo a integrar potencias, pero ¿sería práctico eso? ¿Se animarían a desarrollar la potencia 30? Bueno, no lo intenten siquiera, ya que si llamamos $g(x) = x^4 + 3x$ entonces $g'(x) = 4x^3 + 3$ y tendríamos:

$$\int [g(x)]^{30} g'(x) dx$$

Observen que, de acuerdo con la regla de la cadena, el integrando no es otra cosa que la derivada respecto de x de $\frac{[g(x)]^{31}}{31}$ y, por lo tanto,

$$\int (x^4 + 3x)^{30} (4x^3 + 3) dx = \int [g(x)]^{30} g'(x) dx = \frac{[g(x)]^{31}}{31} + C = \frac{[x^4 + 3x]^{31}}{31} + C$$

Intenten ahora resolver $\int \operatorname{sen}^{20} x \cos x dx$

Lo que hemos hecho en el ejemplo es una simple sustitución. El método que permite resolver una integral indefinida (o sea, hallar la primitiva general de una función) de esta manera se conoce como *método de sustitución* que se puede formalizar diciendo:

Si $u = g(x)$ es una función derivable y F es una primitiva de f entonces:

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

Ejemplo 12

Si queremos resolver $I = \int (2x+3)\cos(x^2+3x) dx$ podemos intentar $u = x^2 + 3x$ y entonces $du = (2x+3)dx$.

Esto nos permite transformar la integral en $\int \cos u du$

La respuesta es entonces: $I = \text{sen } u + C = \text{sen } (x^2 + 3x) + C$

Ejemplo 13

Si queremos resolver $I = \int (5x^2 + 1)(5x^3 + 3x - 8) dx$ podemos intentar $u = 5x^3 + 3x - 8$ y entonces $du = 3(5x^2 + 1)dx$.

Esto nos permite transformar la integral en $\int u \frac{1}{3} du$

La respuesta es entonces $I = \frac{1}{3} \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{6} (5x^3 + 3x - 8)^2 + C$

Cabe acotar (aunque obvio sea) que no siempre vamos a tener una situación tan favorable y serán necesarios entonces otros recursos para calcular integrales.

Podríamos mediante un sencillo ejemplo, ilustrar el comentario anterior:

Si $I = \int (x^2 + 1)^3 x^2 dx$ y hacemos $u = x^2 + 1$ entonces $du = 2x dx$. Reemplazando

en la integral quedaría $\int u^3 \frac{x}{2} du$. Por linealidad podríamos pasar $\frac{1}{2}$ al frente del signo

integral, pero no podemos hacer lo mismo con el factor x restante (¿por qué?), de manera que no conseguimos una integral de la forma $\int f(u)du$ que podamos resolver. (Tal vez quieran intentar otra posible elección de u , si la hubiera, y ver si tienen mejor suerte. . .)

Ejercicio 41

Resuelvan las siguientes integrales aplicando el método de sustitución:

$$a) \int \frac{\arctg x}{1+x^2} dx \quad b) \int \frac{\ln x}{x} dx \quad c) \int \operatorname{tg}^5 x \sec^2 x dx \quad d) \int \operatorname{tg} x dx$$

$$e) \int \cot g x dx \quad f) \int 3x^4(2x^5+9)^3 dx \quad g) \int \cos(3x+2)dx \quad h) \int x\sqrt{x^2+4} dx$$

$$i) \int \frac{x \operatorname{sen} \sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}} dx \quad j) \int \left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2} \left(\frac{1}{t^2}\right) dt \quad k) \int \frac{\ln^3 x}{x} dx \quad l) \int x \operatorname{sen}(\pi x^2) dx$$

$$m) \int x e^{x^2} dx \quad n) \int \frac{e^x}{1+e^x} dx \quad o) \int (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 dx \quad p) \int \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\cos x) dx$$

Ejercicio 42

Hallen una primitiva para cada una de las siguientes funciones

$$a) f(x) = x - e^{4x} \quad b) f(x) = e^x(1 - e^{-x}) \quad c) f(x) = \frac{e^{1/x}}{x^2}$$

$$d) f(t) = \frac{6 \cos t}{(2 + \operatorname{sen} t)^3} \quad e) f(t) = 4t \sec^2(t^2) \operatorname{tg}(t^2) \quad f) f(s) = e^s(1 + e^s)^2$$

$$g) f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^5}} \quad h) f(t) = \frac{t}{t^2+4} \quad i) f(x) = \frac{1}{4+x^2} \quad j) f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

Cambio de variable en integrales definidas

De acuerdo con lo que hemos visto, para calcular la integral definida $\int_{-1}^5 x(x^2 + 1)^3 dx$

debemos: 1º) buscar una primitiva F de $f(x) = x(x^2 + 1)^3$

2º) aplicar la Regla de Barrow.

En este caso, para buscar F es conveniente aplicar el método de sustitución a la integral indefinida:

$$\int x(x^2 + 1)^3 dx = \frac{1}{2} \int u^3 du = \frac{u^4}{8} + C = \frac{(x^2 + 1)^4}{8} + C$$

O sea que, una primitiva de $f(x)$ es $F(x) = \frac{(x^2 + 1)^4}{8}$

$$\text{Luego, } \int_{-1}^5 x(x^2 + 1)^3 dx = F(5) - F(-1) = \frac{26^4}{8} - \frac{2^4}{8}$$

Observen que se podríamos haber resuelto de otra manera:

$$\int_{-1}^5 x(x^2 + 1)^3 dx = \frac{1}{2} \int_2^{26} u^3 du = \frac{26^4}{8} - \frac{2^4}{8}$$

Resulta mucho más sintético ¿verdad?

El último procedimiento se puede sintetizar como sigue:

Llamamos $u = g(x)$ y entonces $du = g'(x) dx$. Reemplazamos en la integral y cambiamos los límites de integración considerando que cuando $x = a$ es $u = g(a)$ y cuando $x = b$ es $u = g(b)$. Se tiene entonces:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Ejercicio 43

Resuelvan las siguientes integrales definidas.

a) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$

b) $\int_0^2 x\sqrt{x^2+4} dx$

c) $\int_0^1 (e^x - 2)^2 dx$

d) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$

e) $\int_0^1 t e^{t^2} dt$

f) $\int_0^2 \frac{x}{x^2+1} dx$

II. Integración por partes

Recordemos que si u y v son funciones derivables de x , entonces:

$$D_x[u(x)v(x)] = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

integrando ambos miembros: $u(x)v(x) = \int u(x)v'(x) dx + \int v(x)u'(x) dx$

pero $v'(x) dx = dv$ y $u'(x) dx = du$

entonces $u(x)v(x) = \int u(x) dv + \int v(x) du$

Sintetizando:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Esta fórmula traslada el problema de integrar $u dv$ al de integrar $v du$.

Con elección apropiada de u y dv , la 2da integral debe ser más simple. No son muchas las opciones, pero al no haber reglas fijas es solo cuestión de probar. La práctica del método, permite "intuir" la elección adecuada.

Ejemplo 14

$$\int x e^x dx$$

Veamos que el método de sustitución no es aplicable en este caso. Si hacemos (es una

posibilidad) $u = e^x$ y $dv = x dx$ tenemos: $du = e^x dx$ y $v = \frac{x^2}{2}$

y, al aplicar la fórmula de integración por partes:

$$\int x e^x dx = e^x \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} e^x dx$$

¿Qué ocurrió? la 2da integral es más "complicada" que la original ya que ahora tenemos segunda potencia de x .

Probemos la otra posibilidad: $u = x$ $dv = e^x dx$

entonces: $du = dx$ $v = e^x$

y reemplazando en la fórmula queda: $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$ (¡la segunda integral es inmediata!)

Conclusión: $\int x e^x dx = x e^x - e^x + C$

Con respecto a este ejemplo, podríamos concluir que la elección para u es la potencia de x , pues al formar el diferencial se reduce una unidad (¿esto será siempre así?)

Ejemplo 15

$$\int x \ln x dx$$

Si "copiamos" el esquema anterior, haríamos: $u = x$ y $dv = \ln x dx$

de donde: $du = dx$ y . . . ¿qué resulta ser v ?

Se nos presenta el problema de obtener una antiderivada de $\ln x$ y eso no lo sabemos!!

Si cambiamos la elección: $u = \ln x \wedge dv = x dx$

entonces: $du = \frac{1}{x} dx \wedge v = \frac{x^2}{2}$

y al reemplazar en la fórmula: $\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx$

En este caso la segunda integral se reduce a: $\frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{4} + C$

$$\therefore \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

Como podemos ver, no funcionó elegir u como la potencia de x , en consecuencia, no podemos establecer una regla, pero convenimos en que disminuir el grado de una potencia de x , por medio de la diferenciación, es una posibilidad que debe intentarse.

Actividad 6

a) Les proponemos que resuelvan $\int x^2 e^x dx$. De acuerdo con el ejemplo 14, Uds.

decidirán tomar $u = x^2 \quad dv = e^x dx$

en consecuencia: $du = 2x dx \quad v = e^x$

Aplicando la fórmula: $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx$

Pueden entonces observar que la elección fue adecuada, se redujo el grado de la potencia, pero la 2da integral requiere a su vez, una nueva integración por partes. Completen el resultado.

Pregunta: ¿Cuántas veces deberían aplicar el método para obtener una primitiva de $f(x) = x^{10} e^x$?

b) Resuelvan ahora $\int e^x \cos x dx$

En este caso tienen el producto de dos funciones trascendentes, no hay ninguna potencia que requiera reducir el grado. Pueden entonces probar con cada una de las alternativas.

Si $u = e^x$ y $dv = \cos x \, dx$ entonces: $du = e^x \, dx$ y $v = \operatorname{sen} x$

y al aplicar la fórmula: $\int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$ (1)

La 2da integral es del mismo tipo que la dada originalmente. Les sugerimos que vuelvan a aplicar el método con ella tomando ahora $u = e^x$ y $dv = \operatorname{sen} x \, dx$ (si no se equivocan con los signos van a tener como 2da integral nuevamente a la pedida) y que reemplacen en (1) la expresión obtenida. Despejando $\int e^x \cos x \, dx$ obtendrán:

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x}{2} + C$$

Ejercicio 44

Resuelvan:

$$\begin{array}{llll} a) \int x^2 \cos x \, dx & b) \int x \operatorname{sen} x \, dx & c) \int x \sec^2 x \, dx & d) \int \ln x \, dx \\ e) \int \operatorname{arctg} x \, dx & f) \int \operatorname{arcsen} x \, dx & g) \int (\ln x)^2 \, dx & h) \int \operatorname{sen}(\ln x) \, dx \end{array}$$

Ejercicio 45

Calculen:

a) el área da la región limitada por las gráficas de $y = \ln x$; $y = 0$; $x = 6$

b) el área de la región limitada por las gráficas de $y = \operatorname{arcsen} x$; $y = 0$; $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ejercicio 46

La región limitada por las graficas de $y = \ln x$; $y = 0$; $x = 5$ se hace girar alrededor del eje x . Hallen el volumen del sólido generado.

III. Integrales Trigonómicas

Muchas integrales indefinidas que comprenden productos y potencias de funciones trigonométricas se pueden calcular con ayuda de *identidades trigonométricas*.

Ejemplo 16

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx \quad \text{y} \quad \int \cos^2 x \, dx$$

Para tratar estos integrandos, debe tenerse en cuenta que:

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \quad (1)$$

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x \quad (2)$$

Sumando miembro a miembro (1) y (2) se obtiene $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

Restando miembro a miembro (1) y (2) se obtiene $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$$\text{Luego: } \int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx = \dots\dots\dots(\text{completar})$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, dx = \dots\dots\dots(\text{completar})$$

Ejemplo 17

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx \quad \text{y} \quad \int \operatorname{cotg}^2 x \, dx$$

$$\text{En este caso usaremos que: } \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 \quad (1)$$

$$\operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1 \quad (2)$$

Verificaremos (1) (hagan Uds. lo mismo con (2)):

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \sec^2 x - 1$$

$$\text{En consecuencia: } \int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) \, dx = \int \sec^2 x \, dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C$$

Completen la otra integral.

Observación

El método para calcular $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$ y $\int \operatorname{cos}^2 x \, dx$ se puede usar también para calcular $\int \operatorname{sen}^n x \, dx$ y $\int \operatorname{cos}^n x \, dx$ cuando n es un entero positivo par.

Ejemplo 18

$$\int \operatorname{sen}^4 x \, dx$$

$$\int \operatorname{sen}^4 x \, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \, dx = \int \left(\frac{1 - \operatorname{cos} 2x}{2} \right)^2 \, dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2 \operatorname{cos} 2x + \operatorname{cos}^2 2x) \, dx = \dots\dots\dots$$

completan el cálculo teniendo presente que $\operatorname{cos}^2 2x = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{cos} 4x)$.

Ejemplo 19

$$\int \operatorname{sen}^3 x \, dx$$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^3 x \, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x \, dx = \int (1 - \operatorname{cos}^2 x) \cdot \operatorname{sen} x \, dx = \int \operatorname{sen} x \, dx - \int \operatorname{cos}^2 x \cdot \operatorname{sen} x \, dx = \\ &= -\operatorname{cos} x + \frac{\operatorname{cos}^3 x}{3} + C \end{aligned}$$

De la misma forma se obtiene: $\int \operatorname{cos}^3 x \, dx = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$

Ejercicio 47

La gráfica de la región limitada por: $y = x + \operatorname{sen} x$; $y = 0$; $x = \pi$ gira alrededor del eje x .
Calculen el volumen del sólido resultante.

Ejercicio 48

Resuelvan

a) $\int \sec^2 x \, dx$ b) $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$ c) $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$

d) $\int \sec^2 x \, dx$ (Indicación: tengan en cuenta que $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$)

Ejercicio 49

Resuelvan las siguientes integrales indefinidas teniendo en cuenta que:

$$\operatorname{sen} A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(A - B) + \operatorname{sen}(A + B)]$$

$$\operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

a) $\int \operatorname{sen} 2x \cdot \cos 3x \, dx$ b) $\int \operatorname{sen} 8x \cdot \operatorname{sen} 3x \, dx$

c) $\int \cos 4x \cdot \cos 5x \, dx$ d) $\int \operatorname{sen} 5x \cdot \operatorname{sen} 5x \, dx$

IV. Integrales del tipo $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$, $\int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx$, $\int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx$

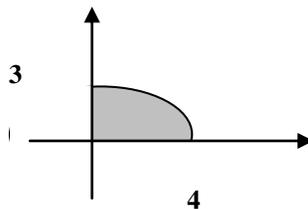
Sustituciones trigonométricas

Ejemplo 20

Consideremos el problema de hallar el área de la región limitada por la elipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Podemos observar que debido a la simetría que guarda con respecto a los ejes, podemos calcular el área en un cuadrante y multiplicar por 4.



Despejando “y” tenemos: $y = \pm \frac{3}{4} \sqrt{16 - x^2}$

entonces: $\frac{A}{4} = \frac{3}{4} \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} dx$

o bien: $A = 3 \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} dx$

Resolver esta integral no es tan sencillo . . . requiere de una sustitución adecuada.

Si hacemos $x = 4 \operatorname{sen} u$, $dx = 4 \operatorname{cos} u du$

$$x = 0 \Rightarrow 0 = 4 \operatorname{sen} u \quad \therefore \quad u = 0$$

$$x = 4 \Rightarrow 4 = 4 \operatorname{sen} u \Rightarrow 1 = \operatorname{sen} u \quad \therefore \quad u = \pi/2$$

$$\begin{aligned} \text{y tenemos:} \quad \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} 4 \operatorname{cos} u \cdot 4 \operatorname{cos} u du = 16 \int_0^{\pi/2} \operatorname{cos}^2 u du = \\ &= \frac{16}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \operatorname{cos} 2u) du = \frac{16}{2} \left(u + \frac{\operatorname{sen} 2u}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{16}{2} (u + \operatorname{cos} u \operatorname{sen} u) \Big|_0^{\pi/2} = 4\pi \end{aligned}$$

Les encargamos que completen el cálculo.

Nota:

En este ejemplo vimos que la sustitución $x = 4 \operatorname{sen} u$ resultó adecuada para transformar el integrando en una función con primitiva casi inmediata. El problema requirió además –ya que se trataba de una integral definida- la modificación de los límites de integración.

Aunque no se mencionó, la sustitución propuesta es válida para $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, ya que implícitamente se está utilizando la inversa de la función seno.

Teniendo en cuenta la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 u + \operatorname{cos}^2 u = 1$, en una integral del tipo $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ (como la del ejemplo anterior) cabe proponer la sustitución $x = a \operatorname{sen} u$ o $x = a \operatorname{cos} u$ (ya que de esa manera $a^2 - x^2 = a^2 \operatorname{cos}^2 u$ o $a^2 - x^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 u$ y $dx = a \operatorname{cos} u du$ o $dx = -a \operatorname{sen} u du$ resultando más sencilla la integral en la variable u)

Considerando las identidades trigonométricas dadas, traten de encontrar una sustitución adecuada según sea la forma del integrando y completen el siguiente cuadro:

<i>Forma del integrando</i>	<i>Identidad trigonométrica</i>	<i>Sustitución adecuada</i>
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\text{sen}^2 u + \text{cos}^2 u = 1$	$x = a \text{sen } u$ ó $x = a \text{cos } u$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$\text{cosh}^2 u - \text{senh}^2 u = 1$	
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$\text{cosh}^2 u - \text{senh}^2 u = 1$	

Ejercicio 50

a) Hallen el área de la región limitada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

b) Hallen el área de la región limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$

c) Calculen $\int_1^4 \sqrt{x^2 - 1} \, dx$

V. Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales

Ejemplo 21

Supongan que deben resolver $\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx$

Para tratar de expresar el integrando en una forma sencilla corresponde preguntarse:

¿Se pueden dividir esos polinomios? La respuesta es NO. (¿Por qué?)

¿Se puede factorar el polinomio del denominador? ¿Cuáles son las raíces?

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

de manera que
$$\frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{x+5}{(x-1)(x+2)}$$

Veremos que ese cociente puede expresarse como suma de fracciones más simples (fracciones parciales). Más precisamente: veremos que es posible hallar constantes A y B tales que

$$\frac{x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \quad (*)$$

Si se opera con el segundo miembro de (*) obtenemos:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{Ax + 2A + Bx - B}{(x-1)(x+2)}$$

Esta fracción tiene coincidir con la original, o sea:
$$\frac{Ax + 2A + Bx - B}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+5}{(x-1)(x+2)}$$

Para que las fracciones sean iguales deben serlo los numeradores debido a que los denominadores lo son.

Igualando los numeradores $(A + B)x + (2A - B) = x + 5$

y por ende $A + B = 1$ y $2A - B = 5$ (¿Por qué?)

Resolviendo el sistema de ecuaciones $\begin{cases} A + B = 1 \\ 2A - B = 5 \end{cases}$ se obtiene $A = 2$, $B = -1$

Reemplazando en (*) la fracción dada se puede expresar como suma de fracciones parciales:

$$\frac{x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{2}{x-1} + \frac{-1}{x+2}$$

Ahora ya están en condiciones de resolver la integral.

El procedimiento seguido para resolver la integral del ejemplo anterior se llama *método de fracciones parciales* o *método de fracciones simples*.

Este método se usa para integrar funciones racionales $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde P y Q son polinomios y el grado de P es menor que el grado de Q (si el grado de P fuera mayor o igual al de Q , ¿qué harían ustedes?)

Sucede que toda función racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ en la que el grado del numerador es menor que el grado del denominador puede descomponerse como suma finita de fracciones (simples) de la forma $\frac{A}{(x+a)^n}$ o $\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^m}$ donde n y m son enteros positivos y A, B, C, a, b y c son constantes reales con la condición $b^2 - 4c < 0$.

Describiremos a continuación el método y les mostraremos por medio de algunos ejemplos cómo se obtienen las fracciones simples. Les recomendamos que antes de seguir avanzando repasen *descomposición factorial de polinomios*.

Descripción del método de fracciones simples

Dada $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ donde P y Q son polinomios y el grado de P es menor que el de Q

1º) Factorizamos el polinomio $Q(x)$ como producto de factores irreducibles.

2º) Según sea la factorización de $Q(x)$ obtenida, *proponemos una descomposición* de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de fracciones parciales. Por ejemplo:

i) $Q(x) = (x+1)(x+2)(x-4)$ ($Q(x)$ es un producto de factores lineales distintos)

Se propone en este caso :
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x-4)}$$

ii) $Q(x) = (x - 1)(x + 1)^2$ (el factor lineal $(x + 1)$ está repetido)

$$\text{Se propone en este caso : } \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

iii) $Q(x) = (x + 3)(x^2+1)$ ((x^2+1) es un factor cuadrático irreducible)

$$\text{Se propone en este caso : } \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

iv) $Q(x) = (x + 2)(x^2 + 4)^2$ (hay un factor cuadrático irreducible repetido)

$$\text{Se propone en este caso : } \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{Bx+C}{(x^2+4)} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}$$

3º) *Determinamos las constantes A, B, C, D, E, etc en la forma sugerida en el primer ejemplo y reemplazamos los valores obtenidos para obtener la expresión de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como*

suma de fracciones simples. La integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ podrá así resolverse como una suma de integrales.

Nota:

Si el grado de P es mayor o igual al de Q se pueden dividir esos polinomios y expresar

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad \text{siendo el grado de } R \text{ menor que el grado de } Q$$

Ejercicio 51

Resuelvan:

a) $\int \frac{dx}{x^2 - 4}$

b) $\int \frac{x^3 - x + 1}{x^2(x-1)^3} dx$

c) $\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$

d) $\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} dx$

e) $\int \frac{x^2+1}{x^2-x} dx$

f) $\int \frac{1}{(t+4)(t-1)} dt$

Hemos estudiado sólo algunas de las muchas técnicas de integración que existen. Habrán notado que no basta saber cómo utilizarlas sino que es preciso además saber cuándo. En el cálculo de una integral indefinida está presente un problema de reconocimiento: hay que reconocer qué regla o técnica utilizar para encontrar una primitiva. Nos ocuparemos en breve del empleo de tablas de integrales o Maple pero antes debemos aclarar que

No siempre se puede encontrar la expresión de la integral indefinida de una función continua en términos de funciones elementales

¿A qué nos referimos con “funciones elementales”? A todas las que ustedes conocen y a las que se pueden obtener a partir de éstas por medio de las cinco operaciones: suma, resta, multiplicación, división y composición.

Consideren la función $f(x) = e^{x^2}$. Como esta función es continua para todo $x \in \mathfrak{R}$ existe $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ para todo $x \in \mathfrak{R}$ y, por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, $F'(x) = f(x) = e^{x^2}$. Sucede que $F(x)$ no es una función elemental.

Esto significa que no importa cuánto lo intenten, nunca podrán encontrar la expresión de F en términos de las funciones que conocen.

Lo mismo se puede decir por ejemplo, de las funciones integrales de

$$g(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$h(x) = \operatorname{sen}(x^2)$$

$$l(x) = \cos(e^x)$$

$$k(x) = \sqrt{x^3 + 1}$$

$$s(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$t(x) = \frac{1}{\ln(x)}$$

Haciendo uso del Teorema Fundamental del Cálculo Integral y estudiando intervalos de crecimiento, decrecimiento, extremos locales y absolutos y concavidad es posible al menos encontrar en forma aproximada la gráfica de cada una de las funciones integrales de esas funciones. Esa es la tarea que les proponemos en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 52

Estudien y grafiquen las siguientes funciones

a) $f_{err}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ (función error)

b) $Is(x) = \int_0^x \frac{\text{sen}(t)}{t} dt$

Integración mediante tablas y programas de álgebra simbólica (PAS)

Las tablas de integrales y los PAS son en la práctica muy usados para resolver integrales que tienen cierto grado de dificultad.

Cuando usamos una tabla de integrales es frecuentemente necesario realizar un cambio de variables o alguna simplificación algebraica en la integral dada para poder resolverla usando alguna de las integrales que aparecen en la tabla.

Ejemplo 22

Hallemos $\int_0^2 \frac{x^2 + 12}{x^2 + 4} dx$ usando una tabla de integrales.

En una tabla de integrales encontramos:

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$$

Tengan en cuenta que $\tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) = \text{actg}\left(\frac{u}{2}\right)$

Podemos escribir: $\frac{x^2 + 12}{x^2 + 4} = 1 + \frac{8}{x^2 + 4}$

$$\text{luego: } \int_0^2 \frac{x^2 + 12}{x^2 + 4} dx = \int_0^2 \left(1 + \frac{8}{x^2 + 4} \right) dx = 2 + 8 \int_0^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx$$

Ahora se puede usar la fórmula de la tabla con $a = 2$ para obtener:

$$\int_0^2 \frac{x^2 + 12}{x^2 + 4} dx = 2 + 8 \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{2} \right) \right)_0^2 = 2 + 4 \operatorname{arctg}(1) = 2 + 4 \frac{\pi}{4} = 2 + \pi$$

Resultados obtenidos con Maple:

Con los comandos siguientes se obtiene una primitiva y la integral definida.

`>int((x^2+12)/(x^2+4),x);`

Rta: $x + 4 \operatorname{arctan}(x/2)$

`>int((x^2+12)/(x^2+4),x=0..2);`

Rta: $2 + \pi$

Observen que en la respuesta que corresponde al primer comando no aparece la constante C.

Ejemplo 23

Hallemos una primitiva de $f(x) = x^3 \operatorname{sen}(x)$

.En una tabla de integrales encontramos:

$$\int u^n \operatorname{senu} du = -u^n \operatorname{cosu} + n \int u^{n-1} \operatorname{cosu} du$$

Sustituyendo en la fórmula u por x y n por 3 obtenemos:

$$\int x^3 \operatorname{sen} x dx = -x^3 \operatorname{cos} x + 3 \int x^2 \operatorname{cos} x dx$$

Buscamos a continuación en la tabla una fórmula adecuada para $\int x^2 \cos x \, dx$

$$\begin{aligned} \int x^3 \operatorname{sen} x \, dx &= -x^3 \cos x + 3 \left(x^2 \operatorname{sen} x - 2 \int x \operatorname{sen} x \, dx \right) = \\ &= -x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x - 6(\operatorname{sen} x - x \cos x + K) = \\ &= -x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x - 6 \operatorname{sen} x + 6x \cos x + C \end{aligned}$$

Verificamos usando Maple:

`> int(x^3 * sin(x), x);`

$$\text{Rta: } -x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x - 6 \operatorname{sen} x + 6x \cos x$$

Ejemplo 24

Hallemos una primitiva de $f(x) = \frac{1}{3x+2}$

En una tabla de integrales encontramos:

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$

Si sustituimos $3x+2$ por u y dx por $(1/3)du$ se tiene:

$$\int \frac{1}{3x+2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{3} \ln |u| + C = \frac{1}{3} \ln |3x+2| + C$$

Con Maple:

`> int(1/(3*x+2), x);`

$$\text{Rta: } \frac{1}{3} \ln(3x+2)$$

Nota:

En el resultado no aparecen las barras de valor absoluto. Esta fórmula es válida si

$x > -\frac{2}{3}$. Si se está interesado en otros valores hay que agregar las barras de valor absoluto.

Los distintos programas de álgebra simbólica varían en su forma de procesar las integraciones. Aún cuando los PAS son muy potentes y nos pueden ayudar a resolver

problemas difíciles, cada PAS tiene sus propias limitaciones. Incluso hay casos en los que un PAS puede complicar más el problema, por cuanto proporciona una respuesta extremadamente difícil de usar o interpretar.

Ejercicio 53

Resuelvan usando tabla de integrales y Maple. Comparen los resultados obtenidos.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int x^2 \sqrt{5-x^2} dx & \text{b) } \int \frac{x}{\sqrt{x^2-4x}} dx & \text{c) } \int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x dx \\ \text{d) } \int \frac{dx}{e^x(1+2e^x)} & \text{e) } \int x^4 e^x dx & \text{f) } \int \operatorname{tg}^3 x dx \end{array}$$

Ejercicio 54

i) Resuelvan las integrales usando Maple

$$\text{a) } \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad \text{b) } \int \frac{\ln x}{x^3} dx \quad \text{c) } \int \frac{\ln x}{x^4} dx$$

Observen los integrandos y los resultados de a) ,b), y c) y digan cuáles son las similitudes entre ellos.

ii) Teniendo en cuenta lo observado traten de predecir una fórmula para $\int \frac{\ln x}{x^5} dx$

Averigüen si el resultado es correcto usando Maple.

iii) ¿Cuál es la fórmula para $\int \frac{\ln x}{x^n} dx$, $n \geq 2$?

Integración aproximada

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, como sabemos es:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (\text{Regla de Barrow})$$

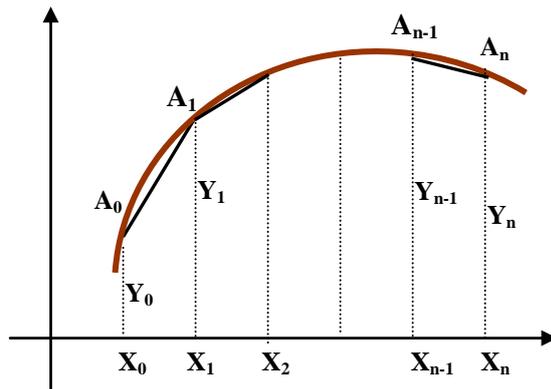
Cuando no es posible obtener $F(x)$, a pesar de ser $f(x)$ continua en $[a,b]$, resulta necesario recurrir a métodos de cálculo aproximado.

Además, si no se conoce la expresión analítica de $f(x)$ sino una tabla de valores- que puede eventualmente provenir de resultados experimentales – tampoco es posible aplicar la regla de Barrow.

Para obtener aproximadamente el valor de la integral ya describimos en el comienzo y motivados por la búsqueda del área bajo una curva, un método de aproximación por medio de sumas de áreas de rectángulos aproximantes construidos a partir de la división del intervalo. Supongamos ahora que en vez de aproximar con rectángulos, lo hacemos con trapecios (¿mejor aproximación?). Pasamos a describir el procedimiento:

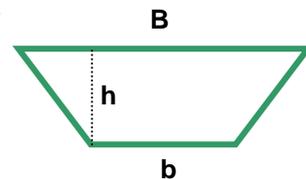
Sea $y = f(x)$ con $x \in [a, b]$.

Supongamos conocidos los valores de f $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$ en puntos equidistantes $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ siendo $h = x_{i+1} - x_i$



Al sumar las áreas de los trapecios inscriptos se tiene una aproximación del área de la región bajo la curva y en consecuencia una aproximación de la integral.

Recordemos que el área de un trapecio es $A = \frac{1}{2} (b + B) h$



En consecuencia: $\text{Área}(x_0, A_0, A_1, x_1) \cong \frac{1}{2} (y_0 + y_1) h$

$\text{Área}(x_1, A_1, A_2, x_2) \cong \frac{1}{2} (y_1 + y_2) h$

.....

$$\text{Área } (x_{n-1}, A_{n-1}, A_n, x_n) \cong \frac{1}{2} (y_{n-1} + y_n) h$$

y sumando resulta: $\text{Área} \cong (\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n) h$

$$\therefore \int_a^b f(x) dx \cong \left(\frac{E}{2} + P + I \right) \cdot h$$

siendo: $E = y_0 + y_n$ (suma de ordenadas extremas)

$P =$ suma de ordenadas de subíndice par

$I =$ suma de ordenadas de subíndice impar

Nota:

Esta forma de aproximar el área (la integral) por medio de trapecios es conocida como *Fórmula de los Trapecios*.

Ejemplo 25 (muy sencillo)

Calculemos $\int_1^{12} x^2 dx$ por la fórmula de los trapecios, dividiendo el intervalo en once partes iguales.

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{12-1}{11} = 1 \qquad \begin{array}{l} x_0 = 1, \quad x_1 = 2, \quad x_3 = 3, \dots, x_{11} = 12 \\ y_0 = 1, \quad y_1 = 4, \quad y_3 = 9, \dots, y_{11} = 144 \end{array}$$

Aplicando la fórmula : $\int_1^{12} x^2 dx \cong (\frac{1}{2} + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 + 121 + \frac{1}{2} 144) \cdot 1 = 577,5$

Ahora, calculen ustedes el valor exacto de la integral y comparen el resultado obtenido. Como ya sabemos, si aumentáramos el número de puntos de división mejoraríamos la aproximación.

Ejemplo 26

Hallemos el valor aproximado de $I = \int_0^2 \sqrt{4+x^3} dx$ tomando $n = 4$

(en este caso $h = 0.5$)

Construimos la tabla de valores:

x	0	0.5	1	1.5	2
y	2	2,031	2,236	2,716	3,464

$$\therefore I \cong (\frac{1}{2} \cdot 2 + 2,031 + 2,236 + 2,716 + \frac{1}{2} \cdot 3,464) \cdot 0.5 \cong 4,858$$

Nota:

Si $n = 10$ obtenemos $I \cong 4,826$ (puede comprobarlo)

Consideraremos en los siguientes ejercicios casos donde no se conoce la función pero si valores de la misma, obtenidos a través de lecturas o datos recogidos.

Ejercicio 55

El velocímetro de un auto se observó cada minuto y las lecturas de la velocidad V se anotaron en la tabla siguiente

T (min)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
V (km/h)	65	72	84	95	103	110	110	96	82	75

Estimen la distancia recorrida por el vehículo:

- a) Con la suma derecha y la suma izquierda. Noten que esto implica suponer velocidad constante en cada intervalo
- b) Una idea tal vez mejor sería suponer que la velocidad varió linealmente en cada intervalo. Obtengan una estimación de la distancia recorrida formulando esta hipótesis.
- c) Comprueben, interpretando geoméricamente, que el proceso efectuado en b) consiste en cambiar los rectángulos de aproximación por trapecios.

Ejercicio 56

El precio de la madera se expresa en $\$/m^3$. Para estimar el volumen de un tronco de cedro de 12 m de largo, se midió su circunferencia a intervalos de 1 metro, obteniéndose los siguientes valores (use regla del trapecio)

x (m)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C (cm)	140	132	129	119	115	110	101	97	94	89	84	80

Estimen el valor de venta del tronco, a un precio de 78\$ por metro cúbico.

Ejercicio 57

Calculen $\int_{5100}^{5140} f(x) dx$ conociendo la siguiente tabla de valores:

x	5.100	5.110	5.120	5130	5.140
$f(x)$	8,53700	8,53895	8,54051	8,54286	8,54481

Observación: la tabla de valores corresponde a $f(x) = \ln x$ cuya primitiva es $F(x) = x (\ln x - 1)$. Comparen resultados

Ejercicio 58

Comprueben que $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx \cong 0,693147$

Uso de Maple

Le presentamos aquí el cálculo aproximado de algunas integrales definidas usando la Fórmula de los trapecios. Observe que de acuerdo a la salida (*output = value, sum, plot, o animation*) se obtiene el valor, la expresión de la suma, el dibujo o la animación. Cuando la salida no está especificada, la respuesta es el valor. Con la opción *partition =* se puede modificar el número de subintervalos considerados.

Si se desea aproximar usando sumas a izquierda, derecha o la regla del punto medio hay que cambiar el método (*method = left, right o midpoint*)

```
> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(sin(x), x=0..5, method = trapezoid);
> evalf(%);
```

- > *ApproximateInt(sin(x), x=0..5, method = trapezoid, output=sum);*
- > *ApproximateInt(x*(x - 2)*(x - 3),x=0..5,method = trapezoid, output = plot);*
- > *ApproximateInt(tan(x) - 2*x, x=-1..1, method = trapezoid, output = plot, partition = 50);*
- > *ApproximateInt(ln(x), x=1..100, method = trapezoid, output = animation);*

Con el objetivo de comparar el valor de la aproximación por los distintos métodos,

calculen en forma aproximada $\int_1^{100} \frac{1}{x} dx$ usando: fórmula de los trapecios, sumas a

izquierda, a derecha y la regla del punto medio.

Las siguientes “autoevaluaciones”, al igual que las que aparecen al final de cada una de los capítulos posteriores, se proponen como actividades para realizar en forma individual.

Autoevaluación 1

1. ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\int_a^b f(x) dx$ si $f(x) \geq 0$?

2. ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\int_a^b f(x) dx$ si $f(x)$ toma valores tanto

positivos como negativos? Ilustre su respuesta con gráficos.

3. Si $r(t)$ es la velocidad a la cual fluye el agua hacia un depósito ¿qué representa

$$\int_{t_1}^{t_2} r(t) dt ?$$

4. Suponga que una partícula se mueve hacia uno y otro lado a lo largo de una recta con una velocidad $v(t)$ medida en *cm por seg.* y una aceleración $a(t)$ a) ¿Cuál es el

significado de $\int_{60}^{120} v(t) dt$? b) ¿Cuál es el significado de $\int_{60}^{120} |v(t)| dt$? c) ¿Cuál es el

significado de $\int_{60}^{120} a(t) dt$?

5. $\int_2^2 x^2 dx = \dots\dots\dots$

6. Escriba la expresión analítica de $\int_2^x t^2 dt$

7. Si $h(x) = \int_2^x t^2 dt$ entonces $h(2) = \dots\dots\dots$, $h(5) = \dots\dots\dots$, $h(-1) = \dots\dots\dots$

8. Si f es continua y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [0,1]$ entonces la función integral

$g(x) = \int_0^x f(t) dt$ representa para cada $x \in [0,1]$

9. Enuncie el teorema fundamental del cálculo integral.

$$10. \frac{d}{dx} \left(\int_2^x t^2 dt \right) = \dots\dots\dots \quad \frac{d}{dx} \left(\int_2^{x^2} t^2 dt \right) = \dots\dots\dots$$

11. La función $g(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen } x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es una función y por lo tanto,

en virtud del Teorema fundamental del cálculo integral $\frac{d}{dx} \left(\int_0^x g(t) dt \right) = \dots\dots\dots$

12. Encuentre una función f y un valor de la constante a tales que

$$2 \int_a^x f(t) dt = 2 \text{sen } x - 1$$

13. Si f es continua y además $\int_0^{x^2} f(t) dt = x \cos(\pi x)$, entonces $f(4) = \dots\dots\dots$

14. Grafique la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 2x & \text{si } 3 < x \leq 5 \end{cases}$. Escriba la expresión analítica de

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

15. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas

a) Si f y g son funciones continuas en $[a, b]$ entonces

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

b) Si f y g son funciones continuas en $[a, b]$ entonces

$$\int_a^b (f(x) g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$$

c) Si f' es continua en $[1, 3]$ entonces $\int_1^3 f'(v) dv = f(3) - f(1)$

d) Si f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ entonces

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

e) $2 \leq \int_0^2 [x + e^{x^2}] dx \leq 4 + 2e^4$

f) Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

g) Si f es continua en $[a, b]$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}$$

h) Si una función f es continua en $[-1, 2]$ y $\int_{-1}^2 f(x) dx = 18$ entonces f toma el valor 6 al menos una vez en el intervalo $[-1, 2]$.

i) El valor promedio de $\frac{1}{x}$ en el intervalo $[1, 3]$ es $\frac{1}{2} \ln(3)$

j) $\int_0^2 (x - x^3) dx$ representa el área debajo de la curva $y = x - x^3$ desde 0 hasta 2.

16. Calcule el área de la región comprendida entre las curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = 2$ en el intervalo $[0, 9]$

17. Sea R la región del plano limitada por $x = y^2$, $y = 2$ y $x = 0$. Calcule el volumen del sólido de revolución que genera R al rotar:

a) alrededor del eje x b) alrededor de la recta $y = 2$

18. Plantee el cálculo de la longitud del arco de parábola $x = y^2$ de extremos $(0, 0)$ y $(4, 2)$

Autoevaluación 2

1. ¿Qué significa hallar una primitiva de cierta función $y = f(x)$?

2. ¿Cuántas primitivas admite una función?

3. Sea f continua. Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ entonces $g(x) = \int_0^x f(t) dt$

y $F(x)$ difieren en

4. ¿A qué se llama *primitiva general* de una función?

5. ¿Cuál es el significado de $\int f(x) dx$?

6. ¿Qué relación hay entre $\int_a^b f(x) dx$ y $\int f(x) dx$?

7. ¿Cuáles de las siguientes igualdades son verdaderas y cuáles falsas?

a) $\int f'(x) dx = f(x) + C$

b) $\int 2f(x) dx = 2 \int f(x) dx$

c) $\int 2f(x) dx = \int 2 dx \int f(x) dx$

d) $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

e) $\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$

f) $\int (f(x) \cdot g(x)) dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$

g) $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx}$

h) $\int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx = f(x)g(x) + C$

i) $\int \frac{(f'(x)g(x) - f(x)g'(x))}{(g(x))^2} dx = \frac{f(x)}{g(x)} + C$

8. ¿Qué resultado se tiene para $\int u^r du$ si $r \neq -1$? ¿y si $r = -1$?

9. Describa brevemente el método de sustitución para integrales indefinidas y proponga un ejemplo.

10. Complete: $\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{\dots}^{\dots} f(u) du$

11. a) Si f es una función continua y $\int_0^4 f(x) dx = 10$, determine $\int_0^2 f(2x) dx$.

b) Si f es continua y $\int_0^9 f(x) dx = 4$, determine $\int_0^3 x f(x^2) dx$.

12. Usando una sustitución adecuada calcule las siguientes integrales:

a) $\int_{-1}^1 \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$ b) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$

13. Complete: $\int_a^b u dv = \dots - \int_a^b v du$

14. $\int_0^{\pi} \cos^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \dots dx$ (usando identidades trigonométricas)

15. $\int_0^{\pi} \sen^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \dots dx$ (usando identidades trigonométricas)

16. $\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$ siendo $A = \dots$ y $B = \dots$

por lo tanto $\int_3^5 \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = \dots$

Capítulo II: Ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales se presentan como *modelos matemáticos* de infinidad de fenómenos en las distintas ramas del conocimiento, en particular en la ingeniería.

¿Qué es un modelo matemático? Es la traducción al lenguaje matemático de algo que sucede en la realidad. Es una descripción (por medio de una función, de una ecuación, de un sistema de ecuaciones) de un fenómeno del mundo real y que tiene por finalidad comprender dicho fenómeno y hacer predicciones acerca del comportamiento futuro del mismo.

Presentaremos más adelante el modelado de algunos problemas sencillos de biología, química y física que ilustrarán el comentario anterior. Ahora analicemos los siguientes problemas geométricos:

Problema 1: ¿Cuál es la ecuación de la curva que pasa por el punto (3,4) y es tal que en cada punto (x,y) tiene pendiente igual a $2x$?

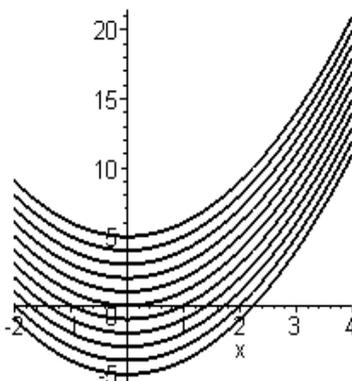
Ya hemos discutido esta situación anteriormente. A esta altura, interpretando que la curva buscada es la gráfica de una función $y = f(x)$, ustedes tienen en claro que tendrá que ser $y' = 2x$ (pues la pendiente en cada punto, es la pendiente de la recta tangente en ese punto, y la misma es igual a la derivada de la función) con lo cual, integrando respecto a x se obtiene:

$$y = x^2 + C, \text{ donde } C \text{ es la constante de integración.}$$

La curva buscada pertenece a una *familia de parábolas* con eje coincidente con el eje y .

Como la curva debe pasar por (3,4), debe ser $4 = (3)^2 + C$, luego, $C = -5$.

La curva buscada es entonces: $y = x^2 - 5$.



Problema 2: Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto $(0,1)$ y es tal que, en cada punto (x,y) de la misma, tiene pendiente igual a $x + y$.

De acuerdo con el significado geométrico ya comentado, esa curva es la gráfica de cierta función desconocida, $y = f(x)$ tal que $y' = x + y$, satisfaciendo además la condición $f(0) = 1$

En el problema 1 se conocía la derivada con respecto a x de la función en términos de esa única variable x y bastó entonces con integrar con respecto a x para llegar a la solución buscada. En el problema 2, la derivada, además de depender de x , depende de la función desconocida y (que a su vez es dependiente de x), lo que hace imposible resolver el problema con el procedimiento anterior. . .

Ahora bien, si alguien dice “la curva que tiene ecuación $y = 2e^x - x - 1$ es una solución para el problema 2”, podrán ustedes verificar rápidamente que eso es cierto:

Siendo
$$y = 2e^x - x - 1 \quad (1)$$

derivando con respecto a x se tiene
$$y' = 2e^x - 1 \quad (2)$$

además, de (1)
$$x + y = 2e^x - 1$$

por lo tanto, reemplazando en (2),
$$y' = x + y$$

comprobándose también que la igualdad $y = 2e^x - x - 1$ se verifica con $x=0$ e $y=1$.

Podemos decir que la función $y = f(x) = 2e^x - x - 1$ es “solución” de la ecuación: $y' = x + y$ y satisface $f(0) = 1$.

Observaciones:

1) Los problemas 1 y 2 son conceptualmente idénticos, pero operativamente distintos. En el problema 1 bastó con integrar con respecto a x , en el problema 2 eso no fue posible, pero por algún método -que aún no hemos estudiado- puede obtenerse la función $y = 2e^x - x - 1$, como “solución” de $y' = x + y$.

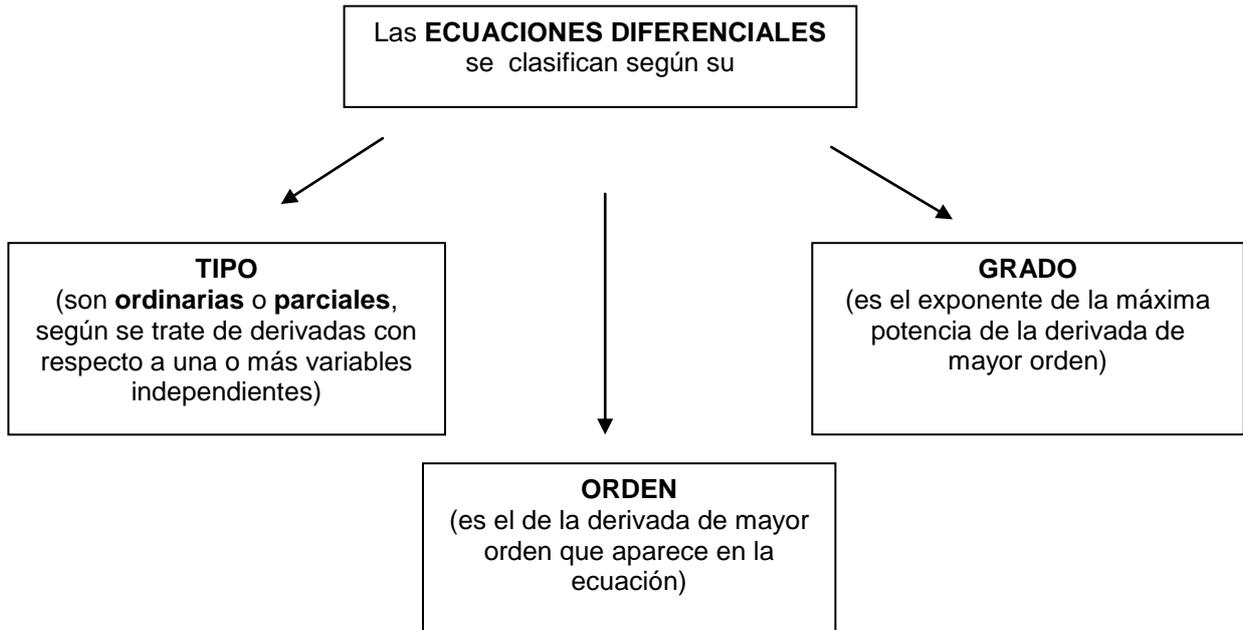
2) Anticipándonos a lo que definiremos a continuación, digamos que las ecuaciones $y' = 2x$ e $y' = x + y$, son *ecuaciones diferenciales ordinarias* pues relacionan una función desconocida y que depende de x , la variable x y la derivada primera de y con respecto a x .

Como la derivada y' puede expresarse como cociente de diferenciales, dichas ecuaciones también pueden escribirse en la forma $\frac{dy}{dx} = 2x$ y $\frac{dy}{dx} = x + y$ respectivamente (de ahí la denominación de **ecuaciones diferenciales**).

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es una ecuación que vincula a una función desconocida $y = y(x)$ con su variable independiente, y con sus derivadas sucesivas hasta un orden n y puede expresarse en la forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad \text{o también} \quad F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Además de las ecuaciones diferenciales ordinarias existen las *ecuaciones diferenciales parciales* que son las que involucran derivadas con respecto a más de una variable independiente. Vean el siguiente cuadro y los ejemplos que le siguen.



$y' = 2x$ y $y' = x + y$ son ecuaciones diferenciales ordinarias de orden 1 y grado 1

$y'' + y' + x = \cos x$ es una ecuación diferencial ordinaria de orden 2 y grado 1

$(y'')^2 + (y')^3 + 3y = x^2$ es una ecuación diferencial ordinaria de orden 2 y grado 2

$y''' + 2(y'')^2 + y' = e^x$ es una ecuación diferencial ordinaria de orden 3 y grado 1

$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ es una ecuación diferencial parcial de segundo orden y grado 1 en la

variable y como función de x y de t .

$\left[\frac{d^3 z}{dt^3} \right]^4 + \left[\frac{d^2 z}{dt^2} \right]^5 + \frac{1}{z^2 + 1} = \sin t$ es una ecuación diferencial ordinaria de orden 3 y

grado 4 en la variable z como función de t

Una **solución** de la ecuación diferencial $F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0$ en un intervalo (a, b) es una función $y = \varphi(x)$, que admite derivadas sucesivas hasta un orden n inclusive en (a, b) y es tal que, al hacer la sustitución $y = \varphi(x)$ en la ecuación diferencial, se satisface la igualdad. Es decir:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

La gráfica de una solución de la ecuación diferencial es una **curva integral** de la ecuación.

Ejemplo 1

La función $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x$ es una solución de $y'' + y = 0$ en \mathfrak{R}

En efecto:

$$y' = \operatorname{cos} x - \operatorname{sen} x$$

$$y'' = -\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x$$

y al reemplazar en la ecuación diferencial se obtiene :

$$(-\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x) + (\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x) = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{R}$$

Luego, $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x$, $\forall x \in \mathfrak{R}$, es solución de $y'' + y = 0$.

Ejercicio 1

Verifiquen en cada uno de los siguientes casos si la función dada es solución de la ecuación diferencial que la acompaña.

- a) $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$; $x y' + y = \operatorname{cos} x$ b) $y = C e^{-2x} + \frac{1}{3} e^x$; $y' + 2y = e^x$
- c) $y = 2 + C \sqrt{1+x^2}$; $(1+x^2)y' - xy = -2x$ d) $y = x \sqrt{1-x^2}$; $y y' = x - 2x^3$
- e) $y = e^x \int_0^x e^{t^2} dt + C e^x$; $y' - y = e^{x+x^2}$ f) $y = x \left(\int \frac{e^x}{x} dx + C \right)$; $x y' - y = x e^x$

Según vimos en el ejemplo 1 $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x$ es solución de $y'' + y = 0$.
 Observen que $y(x) = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \operatorname{cos} x$, cualesquiera sean C_1 y C_2 , también es solución de esa ecuación diferencial.

Debemos aclarar que $y(x) = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \operatorname{cos} x$ en realidad *no* es una función sino una *familia de funciones*, que depende de *dos* parámetros arbitrarios C_1 y C_2 . Para cada par de valores que se asignen a esos parámetros se obtiene una solución.

Entonces, ¿cuántas soluciones se tienen para esa ecuación diferencial?

Son infinitas las soluciones posibles, y se forman como combinaciones lineales de las funciones: $y_1(x) = \operatorname{sen} x$ e $y_2(x) = \operatorname{cos} x$ (que pueden comprobar, son también soluciones).

Decimos: La familia $y(x) = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \operatorname{cos} x$, donde C_1 y C_2 son dos *parámetros arbitrarios*, es *solución general* de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$. Para cada elección de esos parámetros se tiene una *solución particular* de dicha ecuación diferencial.

Ejemplo 2

Observen que $y = C_1x + C_2$ es solución de $y'' = 0$ cualesquiera sean C_1 y C_2 . Decimos: La familia $y = C_1x + C_2$, donde C_1 y C_2 son dos *parámetros arbitrarios*, es *solución general* de $y'' = 0$

Ejemplo 3

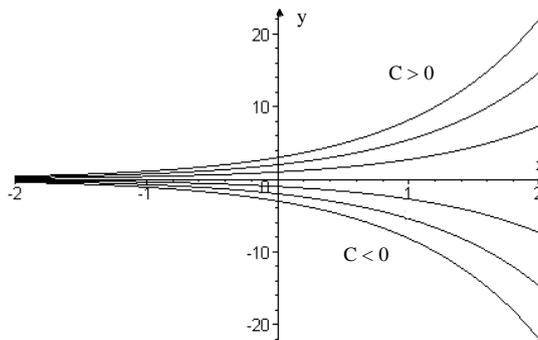
$y(x) = Ce^x$ es solución de: $y' - y = 0$ cualquiera sea C . (Para verificarlo basta con derivar: $y' = Ce^x$, luego: $Ce^x - Ce^x = 0 \quad \forall x$, cualquiera sea C)

La familia $y(x) = Ce^x$, dependiente de *un parámetro arbitrario*, es *solución general* de $y' - y = 0$ (Como habrán notado, el número de parámetros presentes en la que llamamos solución general guarda relación con el orden de la ecuación diferencial)

Si, para un valor particular de C , graficamos, en un sistema de coordenadas cartesianas el conjunto de puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen $y = Ce^x$,

obtenemos una curva (es *una curva integral de la ecuación diferencial $y' - y = 0$*)

Distintos valores de C dan distintas curvas integrales. El conjunto de todas esas curvas (para todos los posibles valores de C) es una familia de curvas (*familia de curvas integrales de la ecuación diferencial $y' - y = 0$*). Para graficar esa familia de curvas, graficamos, en un sistema de coordenadas, algunos de sus miembros



Se llama **solución general** de una ecuación diferencial de orden n , a toda **familia de funciones** dependiente de n **parámetros esenciales** $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ tal que, para cada elección particular de esos parámetros, se obtiene **una** solución la que se dice es una **solución particular**.

Las gráficas de las soluciones dadas por una solución general, forman una **familia de curvas integrales** de la ecuación diferencial.

Observaciones

- 1) Se entiende por parámetros esenciales aquellos que no pueden ser reducidos a un número menor.
- 2) La solución general de una ecuación diferencial se presenta a veces definida en forma **implícita**. Es decir, en la forma $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$.

Ejemplo 4

$y = \varphi(x, C_1, C_2, C_3) = x^2 + C_1 + C_2 + C_3$ es en apariencia una familia de funciones dependiente de tres parámetros, pero sólo tiene un parámetro esencial, puesto que la suma de tres constantes da por resultado otra constante:

$$C_1 + C_2 + C_3 = C \quad \therefore \quad y = \varphi(x, C) = x^2 + C$$

Ejemplo 5

$y = \varphi(x, C_1, C_2) = C_1 + \ln(C_2 x)$ se ve como una familia de funciones dependiente de dos parámetros, ¿podría ser solución general de una ecuación diferencial de segundo orden?

Para responder tal pregunta debemos decidir si son o no, parámetros esenciales.

Como: $y = C_1 + \ln(C_2 x) = C_1 + \ln C_2 + \ln x$

y $C_1 + \ln C_2 = C$ (otra constante),

se tiene: $y = C + \ln x$

En consecuencia, los parámetros no son esenciales, y no podría ser solución general de una ecuación de segundo orden.

Ejemplo 6

$(x-c)^2 + y^2 = 4$ define implícitamente la solución general de $y^2 + y^2 (y')^2 = 4$

En efecto: siendo $(x-c)^2 + y^2 = 4$ (1)

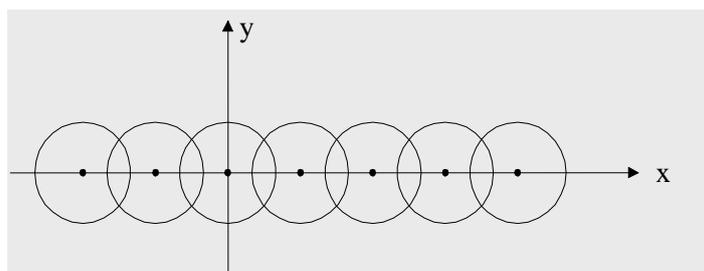
se tiene, derivando implícitamente, $2(x-c) + 2y y' = 0$ (2)

de (1) : $y^2 = 4 - (x-c)^2$

de (2) : $(y y')^2 = (x-c)^2$

y sumando miembro a miembro las dos últimas igualdades se tiene $y^2 + (y y')^2 = 4$

La familia de curvas integrales es en este caso una familia de circunferencias con centro en $(C, 0)$ y radio 2. (Observen que C puede tomar valores positivos y negativos)

**Observación:**

En este último ejemplo -además- se cumple que $y = \pm 2$ representan soluciones de $y^2 + y^2 (y')^2 = 4$ ya que $(\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 \cdot 0 = 4$. Noten que las soluciones $y = 2$ e $y = -2$ **no provienen de la solución general** (no pueden obtenerse a partir de la solución general reemplazando a C por algún número)

*Las soluciones que no provienen de la solución general, son llamadas **soluciones singulares**.*

Ecuación diferencial asociada a una familia de curvas

Dada $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ o $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ podemos obtener la que llamamos *ecuación diferencial asociada*, eliminando los n parámetros C_1, C_2, \dots, C_n entre las $n+1$ ecuaciones, formadas por la expresión original y sus derivadas sucesivas hasta el orden n , con respecto a la variable independiente.

Ejemplo 7

Al derivar $y = C e^x$ se obtiene $y' = C e^x$ y eliminando C entre ambas, se tiene $y' = y$, o bien: $y' - y = 0$ (como ya vimos).

$y' - y = 0$ es la ecuación diferencial asociada a la familia $y = C e^x$

Ejemplo 8

Dada $y = C x^2$ (familia de parábolas), al derivar se tiene $y' = 2Cx$. Eliminando C entre ambas ecuaciones resulta: $xy' = 2y$ (que es la ecuación diferencial asociada a $y = C x^2$)

Ejemplo 9

Sea $y = C_1 \cos ax + C_2 \operatorname{sen} ax$, donde suponemos $a \neq 0$ (fijo)

Derivando dos veces: $y' = -C_1 a \operatorname{sen} ax + C_2 a \cos ax$

$$y'' = -C_1 a^2 \cos ax - C_2 a^2 \operatorname{sen} ax$$

Vemos que: $y'' = -a^2 (C_1 \cos ax + C_2 \operatorname{sen} ax) = -a^2 y$

$y'' + a^2 y = 0$ es la ecuación diferencial asociada a la familia $y = C_1 \cos ax + C_2 \operatorname{sen} ax$

Ejercicio 2

Obtengan la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas dada:

- | | | |
|---------------------------------|------------------------------------|---|
| a) $y = Ax$ | d) $y = Ae^x + B$ | e) $x^2 + 2y^2 = C$ (flia de elipses) |
| b) $y = Ax + B$ | e) $y = Ax^2 + B$ | d) $xy = C$ (flia de hipérbolas) |
| c) $y = A \operatorname{sen} x$ | f) $y = \operatorname{sen}(x + A)$ | e) $x^2 - y^2 = C$ (flia de hipérbolas) |

Ecuaciones diferenciales de primer orden

Una ecuación diferencial de primer orden puede estar expresada de diferentes formas:

- (1) Forma implícita: $F(x, y, y') = 0$ (Ej: $e^y x^2 + x y' = 0$)
 (2) Forma explícita: $y' = f(x, y)$ (Ej: $y' = \cos(xy)$)
 (3) Forma diferencial: $P(x,y) dx + Q(x,y) dy = 0$ (Ej: $x^2 dy + y^2 dx = 0$)

Nos ocuparemos de algunos tipos particulares de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y de los métodos de resolución que permiten resolverlas.

I. Ecuaciones de variables separadas o separables

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es de variables separables si puede expresarse en la forma $p(x) dx + q(y) dy = 0$.

La solución general de una ecuación de este tipo se obtiene integrando cada término con respecto a la variable correspondiente: $\int p(x) dx + \int q(y) dy = C$

En efecto: de $\int p(x) dx + \int q(y) dy = C$

derivando respecto de x se obtiene: $p(x) + q(y) y' = 0$

y de allí: $p(x) dx + q(y) dy = 0$

Ejemplo 10

$2x dx + y dy = 0$ es de variables separadas.

Para hallar la solución general integramos cada término respecto a la variable correspondiente:

$$\int 2x dx + \int y dy = C$$

$$x^2 + \frac{y^2}{2} = C$$

$x^2 + \frac{y^2}{2} = C$ ($C > 0$) define implícitamente la solución general. (Se trata de una

familia de elipses centradas en el origen)

Si queremos obtener la elipse que pasa por el punto de coordenadas (3, 4), basta con

$$\text{reemplazar en } x \text{ e } y : \quad 3^2 + \frac{4^2}{2} = C \quad \therefore \quad C = 17$$

Se obtiene así la solución particular $x^2 + \frac{y^2}{2} = 17$, que puede expresarse también

$$\text{en la forma } \frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{34} = 1.$$

Ejemplo 11

Consideremos ahora la ecuación diferencial $(x y^2 + x) dx + (y x^2 + y) dy = 0$

Podemos escribirla en la forma $x(y^2 + 1) dx + y(x^2 + 1) dy = 0$

y, dividiendo ambos miembros por $(y^2 + 1)(x^2 + 1)$, $\frac{x}{(x^2 + 1)} dx + \frac{y}{(y^2 + 1)} dy = 0$

Ahora podemos integrar para obtener la solución general:

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2} \ln(y^2 + 1) = C$$

Esta solución general puede escribirse de manera más compacta, empleando

propiedades del logaritmo: $\ln(x^2 + 1) + \ln(y^2 + 1) = 2C = C_1$

$$\ln((x^2 + 1)(y^2 + 1)) = C_1$$

y aplicando la función exponencial en ambos miembros:

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) = e^{C_1} = C_2 \quad (C_2 > 0)$$

Ejemplo 12

Busquemos la solución general de $3e^x \operatorname{tg} y dx + (2 - e^x) \sec^2 y dy = 0$

Suponiendo $(2 - e^x) \operatorname{tg} y \neq 0$, podemos dividir ambos miembros de la ecuación

por $(2 - e^x) \operatorname{tg} y$ para separar las variables: $\frac{3e^x}{2 - e^x} dx + \frac{\sec^2 y}{\operatorname{tg} y} dy = 0$

e integrar ambos términos para obtener la solución general: $-3 \ln|2 - e^x| + \ln|\operatorname{tg} y| = C_1$

También aquí podemos aplicar propiedades del logaritmo para expresar dicha solución

general en la forma:
$$\ln \frac{|tg y|}{|2 - e^x|^3} = C_1$$

y aplicar exponencial en ambos miembros para obtener:
$$\left| \frac{tg y}{(2 - e^x)^3} \right| = e^{C_1} = C_2 \quad (C_2 > 0)$$

Finalmente, quitando las barras de valor absoluto:
$$\frac{tg y}{(2 - e^x)^3} = \pm C_2 = C \quad (C \neq 0)$$

o bien:
$$tg y = C(2 - e^x)^3 \quad (C \neq 0)$$

Observamos además que $tg y = 0$ también define soluciones de la ecuación (verifíquelo).

Ejemplo 13

La ecuación $(1 + e^x)y y' = e^y$ puede escribirse en la forma diferencial

$$e^y dx - (1 + e^x)y dy = 0$$

Dividiendo ambos miembros por $(1 + e^x)e^y$ (que siempre es diferente de cero)

tenemos:
$$\frac{1}{(1 + e^x)} dx - \frac{y}{e^y} dy = 0 \quad (\text{donde las variables están separadas})$$

Ahora integrando cada término puede obtenerse la solución general. (Completen)

Ejercicio 3

Hallen la solución general en los siguientes casos.

a) $(1 + y^2) dx + (1 + x^2) dy = 0$

b) $(1 + y^2) dx + x y dy = 0$

c) $(y^2 + x y^2) y' + (x^2 - y x^2) = 0$

d) $y \ln y dx + x dy = 0$

II. Ecuaciones diferenciales exactas

La ecuación diferencial de 1^{er} orden $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ es una **ecuación diferencial exacta** en cierto dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ si existe una función $f(x, y)$ en D tal

que $P(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $Q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$. En tal caso $f(x, y) = C$ es **solución general** de

la ecuación dada.

En efecto, si $P(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $Q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$, derivando en $f(x, y) = C$ tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0 \Rightarrow P(x, y) + Q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

¿Cómo podemos reconocer una ecuación diferencial exacta?

Si $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ es exacta sabemos que existe f tal que:

$$P(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{y} \quad Q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y},$$

suponiendo que P y Q admiten derivadas parciales continuas, necesariamente debe

verificarse: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ (pues $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ¿lo recuerdan?)

Así, hemos establecido una **condición necesaria** para que $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ sea una ecuación diferencial exacta:

Si $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ es una ecuación diferencial exacta en D y

las derivadas parciales de P y Q son continuas en D entonces $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

Ejemplo 14

$$(x - y^2) dx + (y - x^2) dy = 0$$

Aquí $P(x, y) = x - y^2$ y $Q(x, y) = y - x^2$ tienen derivadas parciales continuas en todo \mathbb{R}^2 . $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x$ y $\frac{\partial P}{\partial y} = -2y$ siendo entonces $\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$ por lo que

concluimos que la ecuación diferencial no es exacta.

Ejemplo 15

Dada $(y - x^2) dx + (x - y^2) dy = 0$ observamos que:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= y - x^2 \\ Q(x, y) &= x - y^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Abordamos entonces la búsqueda de f de manera que se verifiquen:

$$P(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1) \quad \text{y} \quad Q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (2)$$

Por (1) podemos asegurar que f debe ser una primitiva de P , con respecto a x (dejando y constante) o sea que debe ser:

$$f(x, y) = \int (y - x^2) dx = yx - \frac{x^3}{3} + g(y)$$

(observen que la constante de integración es una función de la variable y)

Para determinar $g(y)$ y tener la expresión completa de $f(x, y)$ tengamos en cuenta que

debe verificarse (2) y por lo tanto : $\frac{\partial f}{\partial y} = x + g'(y) = Q(x, y) = x - y^2$

De allí, $g'(y) = -y^2$ y entonces $g(y) = -\frac{y^3}{3} + C$

con lo cual se tiene: $f(x, y) = yx - \frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{3} + C$ con $C \in \mathfrak{R}$ (cualquiera)

Resumiendo: Dada $(y - x^2) dx + (x - y^2) dy = 0$

1) $f(x, y) = yx - \frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{3}$ es una función que verifica $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = P(x, y) = y - x^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q(x, y) = x - y^2 \end{cases}$

2) $yx - \frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{3} = C$ es la solución general de la ecuación diferencial dada.

Verificación: derivando en $yx - \frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{3} = C$ tenemos

$$y'x + y - x^2 - y^2y' = 0$$

$$y'(x - y^2) + (y - x^2) = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(x - y^2) + (y - x^2) = 0$$

$$(y - x^2)dx + dy(x - y^2) = 0$$

Ejercicio 4

Comprueben que las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas y obtengan su solución general.

a) $6xy dx + (3x^2 + 2y) dy = 0$ b) $(y^3 + 6xy) dx + (3xy^2 + 3x^2 - 2y) dy = 0$

Ejercicio 5

- a) Hallen $y = \varphi(x)$ solución particular de $y(4x+6)dx - (x^2 + 3x + 2)dy = 0$ que verifique $\varphi(0) = 4$
- b) Hallen la solución particular de $y \cos(xy)dx + [1 + x \cos(xy)]dy = 0$ que pasa por $(0,1)$

III. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Toda ecuación lineal respecto de la función desconocida y su derivada se llama **ecuación lineal de primer orden**. Las ecuaciones lineales de primer orden ecuación pueden expresarse en la forma:

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad (*)$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas de x en cierto dominio $D \subset \mathfrak{R}$

Las siguientes ecuaciones diferenciales son lineales de primer orden:

$$y' + 2xy = e^x \quad (P(x) = 2x, Q(x) = e^x)$$

$$y' = \operatorname{sen} x \quad (P(x) = 0, Q(x) = \operatorname{sen} x)$$

$x^2 y' + x y = e^x$ (en este caso puede llevarse la ecuación a la forma de la general (*) dividiéndola por x^2 ; de esa manera, suponiendo $x \neq 0$, se tiene:

$$y' + \frac{1}{x} y = \frac{e^x}{x^2} \quad \text{y entonces} \quad P(x) = \frac{1}{x}; \quad Q(x) = \frac{e^x}{x^2} \quad \text{en } D = \mathfrak{R} - \{0\}$$

Presentaremos a través de los siguientes ejemplos un método de resolución para ecuaciones de este tipo.

Ejemplo 16

Hallaremos la solución general de la ecuación diferencial $y' + 2xy = e^x$

1. Es ésta una ecuación lineal de primer orden: tiene la forma $y' + P(x)y = Q(x)$ donde $P(x) = 2x$ y $Q(x) = e^x$.
2. Vamos a suponer que la solución es de la forma $y = u(x)v(x)$ (tendremos que encontrar $u(x)$ y $v(x)$)

Si $y = u(x)v(x)$ entonces $y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ y, reemplazando y e y' en la ecuación original se tiene: $u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + 2x u(x)v(x) = e^x$

3. Sacando factor común $u(x)$ del segundo término y del tercer término nos queda

$$u'(x)v(x) + u(x)[v'(x) + 2xv(x)] = e^x$$

Hagamos aquí un alto y reflexionemos... Si pudiéramos encontrar alguna función $v(x) \neq 0$ para la que sea $v'(x) + 2xv(x) = 0$, sólo faltaría luego encontrar $u(x)$ que verifique $u'(x)v(x) = e^x$

4. Busquemos entonces $v(x) \neq 0$ solución de $v'(x) + 2xv(x) = 0$.

$$v'(x) + 2xv(x) = 0 \quad \text{es de variables separables}$$

podemos escribirla en la forma $\frac{dv}{dx} + 2xv = 0$

$$dv + 2xv dx = 0$$

$$\frac{dv}{v} + 2x dx = 0 \quad (\text{sup } v \neq 0)$$

Integrando resulta: $\ln|v| + x^2 = C \Rightarrow \ln|v| = -x^2 + C$

y aplicando exponencial en cada miembro $|v| = e^{-x^2+C} = e^{-x^2} e^C = k e^{-x^2}$, $k > 0$

$$\therefore v(x) = \pm k e^{-x^2}$$

Dándole a k cualquier valor diferente de 0 se obtiene la función $v(x)$ buscada.

Por ejemplo si $k = 1$, $v(x) = e^{-x^2}$ (solución particular de $v'(x) + 2xv(x) = 0$)

5. Hallada $v(x)$, ahora debemos encontrar $u(x)$ tal que $y = u(x)e^{-x^2}$ sea solución de la ecuación original. Para ello, $u(x)$ debe satisfacer $u'(x)e^{-x^2} = e^x$ entonces

$$u'(x) = e^x e^{-x^2} = e^{x-x^2} \quad \text{y hallamos } u(x) \text{ integrando: } u(x) = \int e^{x-x^2} dx$$

6. La solución general de $y' + 2xy = e^x$ es: $y(x) = u(x)v(x) = e^{-x^2} \int e^{x-x^2} dx$

Observación: la imposibilidad de expresar una primitiva de e^{x+x^2} en términos de funciones elementales nos ha obligado en el ejemplo anterior a dejar expresada la solución con dicha integral.

Ejemplo 17

Hallar la solución particular de $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$ que satisface $y(0) = 3$.

a) Solución general

Suponemos que la solución general tiene la forma $y(x) = u(x)v(x)$

Para que así sea tendrá que ser $u'v + uv' - \frac{2}{x+1}uv = (x+1)^3$

o sea $u'v + u\left(v' - \frac{2}{x+1}v\right) = (x+1)^3$ (*)

Búsqueda de $v(x)$: Buscamos $v(x) \neq 0$ que sea una solución particular de la ecuación

de variables separables $v' - \frac{2}{x+1}v = 0$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} - \frac{2}{x+1}dx = 0 \Rightarrow \ln|v| - 2\ln|x+1| = C_1 \Rightarrow \ln|v| = C_1 + \ln|x+1|^2$$

$$\Rightarrow |v| = e^{C_1 + \ln|x+1|^2} = e^{C_1}(x+1)^2 = C_2(x+1)^2 \Rightarrow v = \pm C_2(x+1)^2 = C(x+1)^2, \quad C \neq 0$$

Si elegimos $C_1 = 1$, $v(x) = (x+1)^2$

La solución general será entonces $y(x) = u(x)(x+1)^2$ pero falta hallar $u(x)$.

Búsqueda de $u(x)$: Haciendo $v(x) = (x+1)^2$ en la igualdad (*) obtenemos:

$$u'(x+1)^2 = (x+1)^3 \quad \text{de donde} \quad u'(x) = (x+1)$$

e integrando obtenemos: $u(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 + C$

y la solución general es: $y(x) = u(x)v(x) = \left(\frac{1}{2}(x+1)^2 + C\right)(x+1)^2$

o sea: $y(x) = \frac{1}{2}(x+1)^4 + C(x+1)^2$

b) Solución particular que cumpla $y(0) = 3$

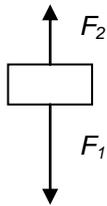
Se reemplazan x por 0 e y por 3: $3 = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \frac{5}{2}$

La solución particular buscada es: $y_p(x) = \frac{1}{2}(x+1)^4 + \frac{5}{2}(x+1)^2$

Pregunta: ¿Existe alguna solución que satisfaga: $y(-1) = 3$? o ¿ $y(-1) = 0$?

Ejemplo 18

Desde cierta altura se arroja un cuerpo de masa m .



- a) Determinaremos la ley según la cual cambia la velocidad de caída $v(t)$ suponiendo que sobre el cuerpo, además de la fuerza de gravedad, actúa la fuerza de resistencia del aire, y que ésta es aproximadamente proporcional a la velocidad $v(t)$.

En virtud de la segunda ley de Newton: $F = m \cdot a(t)$, donde $a(t) = \frac{dv}{dt}$, es la aceleración del cuerpo en movimiento y F es la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo en la dirección del movimiento. Esta es resultante de dos fuerzas: la de gravedad, $F_1 = m \cdot g$ y la de la resistencia del aire, $F_2 = k \cdot v(t)$ donde k es el factor de proporcionalidad.

Entonces: $F = F_1 - F_2$, (F_2 va con signo negativo debido a que se adopta una convención de signos, positivo hacia abajo y negativo hacia arriba $F_1 > 0$, $F_2 < 0$).

Se obtiene así, la ecuación diferencial: $m \frac{dv}{dt} = m g - k v$

que puede escribirse también $m v'(t) + k v(t) = m g$,

Dividiendo por m queda $v'(t) + \frac{k}{m} v(t) = g$ (ecuación diferencial lineal de primer orden, en la función desconocida $v(t)$)

b) Comprueben que la solución general es: $v(t) = C e^{\left(\frac{-k}{m} t\right)} + \frac{m g}{k}$

c) Si consideramos ahora, que al arrojar el cuerpo, le damos una velocidad inicial v_0 , (que en particular puede ser igual a cero) ¿cuál es la relación entre v y t ?

Si $t = 0$ (principio del movimiento): $v = v_0$. Entonces: $v_0 = C + \frac{mg}{k}$

de donde: $C = v_0 - \frac{mg}{k}$ (queda así determinada la constante C)

Por consiguiente, la dependencia buscada entre v y t es: $v(t) = \left(v_0 - \frac{mg}{k} \right) e^{\left(-\frac{k}{m} t \right)} + \frac{mg}{k}$

Observaciones:

- 1) Si t es suficientemente grande, la velocidad v depende poco de v_0 .
- 2) Si $k = 0$ (es decir, la resistencia del aire no existe, o es tan pequeña, que puede despreciarse), la ecuación se reduce a $m \frac{dv}{dt} = m \cdot g$, o bien, $\frac{dv}{dt} = g$.

Al resolver tendríamos: $v(t) = v_0 + g t$ (ecuación bien conocida de la física que satisface la condición $v = v_0$, para $t = 0$)

Ejercicio 6

a) Hallen la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$a_1) y' + 2x y = 2x e^{-x^2} \quad a_2) x y' = y + x^2 \operatorname{sen} x \quad a_3) y' + 2y = x^2 + 2x$$

b) Hallen la solución particular, en el siguiente caso: $y' - y \operatorname{tg} x = \sec x$; $y(0) = 0$

c) Hallen la ecuación de la curva que pasa por el punto $(0, 1)$ de tal forma que en cada punto (x, y) de la misma, su pendiente es la suma de abscisa y ordenada.

Campo direccional o campo de pendientes

Desafortunadamente es imposible resolver la mayor parte de las ecuaciones diferenciales en el sentido de obtener una fórmula explícita para la solución. A pesar de la falta de una solución explícita podemos obtener información gracias a un procedimiento gráfico utilizando el concepto de campo de direcciones.

Suponga que tenemos una ecuación diferencial de primer orden $y' = f(x, y)$. La ecuación diferencial expresa que la pendiente de la curva solución en un punto (x, y) de la curva es $f(x, y)$. Si trazamos segmentos rectilíneos cortos con pendiente $f(x, y)$ en

varios puntos (x,y) , a ese conjunto de segmentos se le llama **campo direccional** o **campo de pendientes**. Cada segmento rectilíneo tiene la misma pendiente que la curva solución en (x,y) y, por tanto, es tangente a la curva en ese punto. Recordemos que en la vecindad de (x,y) , si existe la derivada, la tangente aproxima bien a la curva, o sea que los pequeños segmentos son aproximadamente una porción de la curva. Cuantos más segmentos se tracen, más claras se vuelven las imágenes de las curvas solución. . .

Uso de MAPLE

Con los siguientes comandos podrán visualizar el campo direccional de una ecuación diferencial, hallar la expresión de la solución general o una solución particular que pase por un punto dado

```
> with(DEtools):
> dfieldplot(diff(y(x),x)=x+y(x), y(x), x=-3..3, y=3..3, color=blue ,arrows=SLIM);(se
grafica el campo direccional de  $y' = x + y$ )
> ODE1 := D(y)(x) = x + y(x): (definición de la ecuación diferencial)
> sol := dsolve(ODE1, y(x)); (se obtiene la solución general)
> solp := dsolve({D(y)(x)=x+y(x), y(0)=0}, y(x));(se obtiene la expresión de la solución
particular que pasa por (0,0))
```

A continuación se muestra cómo puede graficarse una solución de tipo numérico para $y' = e^{x^2}$ y que pase por $(0,1)$

```
> with(plots):
> p := dsolve({D(y)(x)=exp(x^2), y(0)=1}, y(x), type = numeric):
> odeplot(p, [x, y(x)], -1..1);
```

Con el comando *DEplot* se grafica a continuación el campo de direcciones y algunas varias trayectorias específicas para la ecuación $y'(t) = -y(t) + t$

```
> restart: with(DEtools):
> ec1 := diff(y(t),t) = -y(t)+t;
> DEplot([ec1], [y(t)], t=-6..6, y=-6..6, thickness=2, scaling=constrained, arrows=SLIM);
> DEplot([ec1], [y(t)], t=-6..6, [[y(1)=2], [y(1)=4], [y(2)=1], [y(4)=0]], y=6..6,
stepsize=.1, linecolor=blue, scaling=constrained);
```

Problema de valor inicial

Hemos dicho ya que las ecuaciones diferenciales permiten modelar infinidad de situaciones de la vida real. En muchos problemas interesa encontrar, para cierta ecuación diferencial, no la solución general, sino una solución que satisfaga lo que se denomina una *condición inicial* o sea una condición de la forma $y(x_0) = y_0$.

Geoméricamente, cuando imponemos una condición inicial, queremos *seleccionar*, de la familia de curvas integrales de la ecuación diferencial, aquella que pase por un punto dado (x_0, y_0) . En términos físicos, identificando a x con el tiempo, esto equivale a especificar el estado inicial del sistema físico en el instante x_0 y usar la solución del problema con valor inicial para hallar el estado del sistema en un instante posterior, es decir, para predecir el comportamiento futuro del problema.

Al problema de hallar una solución de una ecuación diferencial con cierta condición inicial se le llama *Problema de valor inicial*.

Considerando las dificultades que puede presentar la resolución de una ecuación diferencial, comprenderán que es de mucho interés, dado un problema de valor inicial, poder decidir, antes de abordar la búsqueda de la solución, si dicha solución existe y si es única. El siguiente teorema trata sobre esa cuestión.

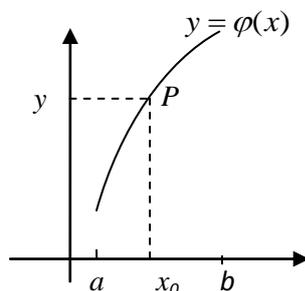
Teorema de existencia y unicidad

Si la función $f(x, y)$ es continua en algún rectángulo del plano xy que contiene en su interior al punto (x_0, y_0) entonces el problema de valor inicial $y' = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$ tiene al menos una solución.

Si además, la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en ese rectángulo, la solución de $y' = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$ es única en algún intervalo (a, b) que contenga a x_0 .

El teorema garantiza, bajo las hipótesis mencionadas, que, en algún intervalo (a, b) al que pertenece x_0 , existe una y sólo una solución $y = \varphi(x)$ de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ que satisface la condición inicial $y_0 = \varphi(x_0)$, es decir que, cerca de x_0 , está

definida una única función $y = \varphi(x)$ cuya gráfica tiene en cada punto (x, y) pendiente igual a $f(x, y)$ y pasa además por el punto $P_0(x_0, y_0)$.



¡Atención! El teorema da condiciones suficientes para la existencia y la unicidad de solución del problema de valor inicial $y' = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$, pero no necesarias.

Ejemplo 19

Consideremos la ecuación diferencial $y' = x y + e^{-x} y^2$

Como $f(x, y) = x y + e^{-x} y^2$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2 e^{-x} y$ son continuas en todo \mathbb{R}^2 , el Teorema

de existencia y unicidad puede aplicarse al PVI $y' = x y + e^{-x} y^2$; $y(x_0) = y_0$

cualquiera sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, y garantiza la existencia y unicidad de la solución en algún intervalo que contiene a x_0 . Geométricamente esto significa que por cada punto $P_0(x_0, y_0)$ pasa una única curva, gráfica de una solución de la ecuación dada.

Ejemplo 20

¿Cuál es el conjunto de puntos (x_0, y_0) para los que se podría garantizar, aplicando el teorema, la existencia y unicidad de la solución del problema de valor inicial

$$y' = \frac{3}{2} \sqrt[3]{y^2} \ ; \ y(x_0) = y_0 ?$$

$f(x, y) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{y^2}$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$ son ambas continuas en $\{(x, y) / y > 0\}$ y

también en $\{(x, y) / y < 0\}$. Así que el teorema puede aplicarse, y garantiza la existencia y unicidad de la solución, para todo (x_0, y_0) con $y_0 \neq 0$.

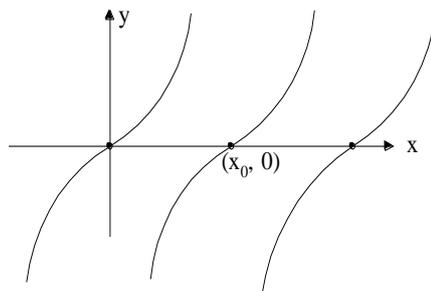
¿Qué sucede con los puntos de la forma $(x_0, 0)$?

Ya que $f(x, y) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$ es una función continua en todo \mathbb{R}^2 , el teorema garantiza también la *existencia* de solución de $y' = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$; $y(x_0) = 0$ pero, como la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$ no es continua cuando y es igual a 0, **el teorema no puede aplicarse**

para saber si hay o no más de una solución.

Observación:

$y = \frac{(x-x_0)^3}{8}$ e $y=0$ son dos soluciones del PVI $y' = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$ $y(x_0) = 0$ (verifíquenlo)



Ejemplo 21

$y(x) = \frac{x}{C x - 1}$ es solución general de $y^2 + x^2 y' = 0$ (verifíquenlo)

Observen que (cualquiera sea el valor de C) $y(0) = 0$, de manera que, **hay un número infinito de soluciones** (las que se obtienen reemplazando en la solución general C por cualquier número real) **que satisfacen la condición inicial $y(0)=0$** . Además, otra vez en este caso, la función constante $y(x) = 0$ también resulta ser una solución (singular, ya que no se obtiene a partir de la general) de la ecuación diferencial.

¿Se contradicen las afirmaciones anteriores con el teorema de existencia y unicidad

antes enunciado? NO! En este ejemplo es $y' = f(x, y) = -\frac{y^2}{x^2}$. **f no es continua en**

$(0,0)$ y por lo tanto **no se puede aplicar el teorema** para analizar la existencia y unicidad de solución del problema de valor inicial

$$y^2 + x^2 y' = 0 ; y(0) = 0$$

Veán que el teorema tampoco permite decir nada acerca de la existencia y unicidad de solución para $y^2 + x^2 y' = 0$; $y(0) = y_0$, si $y_0 \neq 0$

Lo que podemos asegurar en virtud del teorema de existencia y unicidad es que:

si $x_0 \neq 0$ e y_0 es cualquier número real , $y^2 + x^2 y' = 0$; $y(x_0) = y_0$

tiene una única solución ya que $f(x, y) = -\frac{y^2}{x^2}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{2y}{x^2}$ son continuas

en $D_1 = \{(x, y); x > 0\}$ y también en $D_2 = \{(x, y); x < 0\}$

Ejercicio 7

En los siguientes incisos, señalen el conjunto de puntos (x_0, y_0) para los que podría garantizar, aplicando el teorema, la existencia y unicidad de la solución del problema de valor inicial $y' = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$

a) $y' = x^2 + y^2$

b) $y' = y + 3\sqrt[3]{y}$

c) $y' = \frac{x}{y}$

d) $y' = \frac{y-1}{x-y}$

e) $y' = \sqrt{x^2 - y} - x$

Ejercicio 8

En los siguientes incisos, vean si pueden, antes de comenzar a resolver, garantizar la existencia y unicidad de solución y, a continuación, hallen la solución.

a) $(1 + e^x)y y' = e^x$; $y(0) = 1$.

b) $y' \operatorname{sen} x = y \ln y$; $y(\pi/2) = e$

c) Hallar una curva que pasa por $P_0(0, -2)$ de modo que la pendiente de la tangente en cualquiera de sus puntos $P(x, y)$ sea igual a la ordenada del punto aumentada en 3 unidades.

Modelado de problemas de biología, física, química

I. Modelo de crecimiento de una célula

Supongan que una célula tiene una masa m_0 y que su masa crece en un medio ideal.

Así, su masa m se puede considerar como una función del tiempo, $m = m(t)$. Además, supongan que los compuestos químicos atraviesan rápidamente la pared de la célula o sea, que el crecimiento sólo está determinado por el metabolismo de la célula. Como el metabolismo depende de la masa de las moléculas participantes, es razonable suponer que la velocidad con que aumenta la masa de la célula es proporcional a la masa en cada instante.

Siendo t : tiempo ($t \geq 0$)
 m_0 : masa existente en $t = 0$
 $m(t)$: masa existente en el instante t ,
 k : constante

el modelo matemático que corresponde a la situación descripta es:
$$\begin{cases} m'(t) = k m(t) \\ m(0) = m_0 \end{cases}$$

- Esbozen la gráfica de la función masa $m(t)$ de la célula en función del tiempo sin resolver la ecuación diferencial.
- Resuelvan y comparen con lo obtenido en a).
- Suponiendo $k = 2/100$ calculen el tiempo t para que la masa inicial se duplique.
- Discutan posibles limitaciones de este modelo (por ejemplo, ¿les parece que podría crecer ilimitadamente? ¿se refleja esto en la expresión obtenida para $m(t)$?)

II. Modelo de crecimiento restringido de una población.

Las poblaciones y los organismos no crecen indefinidamente. Hay limitaciones como la escasez de alimento, vivienda, espacio, condiciones físicas intolerables. Supongan que existe un límite superior fijo para el tamaño de una población, de modo que la velocidad de crecimiento del número de individuos tiende a cero cuando $N(t)$ tiende a ese límite superior. (La hipótesis más sencilla consiste en suponer que la velocidad de crecimiento de la población es proporcional a $B - N(t)$)

- Planteen el modelo matemático que corresponde a la situación descripta.
- Esbozen la gráfica de $N(t)$ sin resolver la ecuación diferencial.
- Resuelvan. ¿Cuál es la solución general? ¿Cuál es el signo de la constante?
- Suponiendo que el número de individuos, en un instante cualquiera, es muy pequeño con respecto al límite superior, ¿en qué forma crece el número de individuos?

III. Modelo de enfriamiento de Newton.

Consideremos una sustancia cuya temperatura es más alta que la del ambiente que la rodea. La experiencia dice que la temperatura de la sustancia descenderá hasta igualar la del medio externo. A modo de ejemplo podemos pensar en un recipiente con un líquido a temperatura ambiente que se coloca dentro de la heladera. La ley de enfriamiento de Newton establece que, bajo determinadas condiciones, la razón de cambio de la temperatura, o sea, la velocidad de enfriamiento, es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la sustancia y la del medio más frío que la rodea.

Siendo t : el tiempo
 T_0 : la temperatura de la sustancia en el instante inicial $t = 0$,
 $T(t)$: la temperatura de la sustancia en el instante t
 T_a : la temperatura constante del ambiente más frío.

- Expresen la ley de Newton matemáticamente.
- Esbozen la gráfica de $T(t)$ sin resolver la ecuación diferencial.
- Resuelvan la ecuación diferencial y comparen con lo obtenido en el inciso b).
- Discutan las posibles limitaciones de este modelo.

IV. Modelo de desintegración radiactiva.

Detalle de interés general: Las ideas que se presentan en este ejemplo son la base de un método científico que ha tenido una profunda relevancia en geología y en arqueología. Esencialmente, los elementos radiactivos que se encuentran en la naturaleza (de semividas conocidas) pueden utilizarse para fechar sucesos que ocurrieron con una antigüedad comprendida entre unos miles y millones de años.

El radiocarbono, un isótopo radiactivo del carbono tiene una semivida de unos 5600 años (semivida es el tiempo requerido para que la cantidad de sustancia se reduzca a la mitad).

El radiocarbono se produce en la alta atmósfera por la acción de los rayos cósmicos sobre el nitrógeno. Este radiocarbono pasa por oxidación a dióxido de carbono, que se mezcla por el viento con el dióxido de carbono no radiactivo ya presente. Como se está formando radiocarbono continuamente y volviéndose a transformar en nitrógeno, su proporción en el carbono ordinario de la atmósfera ha alcanzado hace tiempo un estado

de equilibrio. Todas las plantas incorporan esa proporción de radiocarbono en sus tejidos, así como los animales que comen plantas.

Mientras el animal o la planta vive, esa proporción se mantiene constante, pero al morir cesa la absorción de radiocarbono, y el que había en el momento de su muerte sigue desintegrándose. Así pues si un fragmento de madera antigua tiene la mitad de radiactividad que un árbol vivo, vivió hace unos 5600 años, y si sólo tiene la cuarta parte, vivió hace unos 11200 años.

Situación: El radiocarbono se desintegra, en un instante cualquiera, con una rapidez proporcional a la cantidad existente en dicho instante y tiene una semivida de 5600 años.

a) Planteen el modelo matemático que corresponde a la situación descrita considerando:

t : tiempo

C_0 : cantidad de radiocarbono existente en $t = 0$,

$C(t)$: cantidad de radiocarbono existente en el instante t

b) Resuelvan.

c) Suponiendo que se ha encontrado un hueso fosilizado que contiene 1/1000 de la cantidad inicial de radiocarbono determinen la edad de dicho fósil.

d) Si la mitad de cierta cantidad de radio se desintegra en 1600 años ¿qué porcentaje de la cantidad original quedará al cabo de 2400 años? ¿y de 8000 años?

e) Si la semivida de una sustancia radiactiva es de veinte días ¿cuánto tardará en desintegrarse el 90% de ella?

V. Vibraciones

Supongamos que una partícula de masa m está unida a un resorte, y obligada a moverse a lo largo de una trayectoria recta.

La segunda ley del movimiento de Newton dice que:

(A) “La aceleración sobre una partícula será proporcional a la Fuerza resultante ejercida sobre la misma”.

¿Cuáles son las fuerzas que actúan sobre esta partícula?

Se sabe que un sistema elástico obedece la Ley de Hooke:

(B) “Dentro de ciertos límites, un resorte ejercerá una Fuerza proporcional a la elongación del mismo”.

Y finalmente, se puede suponer que existe un

(C) rozamiento aproximadamente proporcional a la velocidad de la partícula.

La aparente simplicidad de este modelo no es obstáculo para su utilización en el estudio del importante problema de las vibraciones en sistemas elásticos en ingeniería.

Como una primera aproximación, toda estructura puede pensarse como un conjunto de partículas unidas entre sí por resortes que obedecen leyes similares a las que aquí se describen.

Expresemos la ley (A) matemáticamente: $F = m \cdot a = m \frac{d^2 x}{dt^2}$

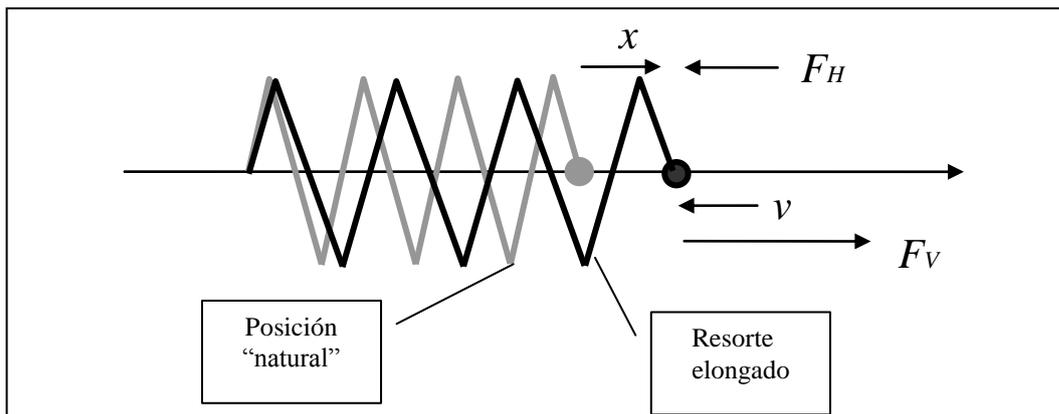
Queda aún por escribir F como suma de dos contribuciones : $F = F_H + F_v$.

Veamos la fuerza elástica: (B) $F_H = -k \cdot x$

(donde x es la elongación, y k es un factor de proporcionalidad)

La fuerza resistente será: (C) $F_v = -b \cdot v = -b \cdot \frac{dx}{dt}$

(donde v es la velocidad y b es una constante de proporcionalidad)



por lo tanto: $-k x - b \cdot \frac{dx}{dt} = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$

que constituye una ecuación diferencial de segundo orden que puede escribirse también en la forma: $m \cdot x'' + b \cdot x' + k \cdot x = 0$

Ejercicio 9

Expresen mediante ecuaciones diferenciales las siguientes situaciones:

- a) Una partícula se mueve a lo largo de una recta, de manera que su velocidad en el instante t es $2 \operatorname{sent} t$.
- b) Cien gramos de azúcar de caña que están en agua, se convierten en dextrosa a una velocidad que es proporcional a la cantidad que aún no se ha convertido.
- c) Según la ley de Newton, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia entre la temperatura T del cuerpo y la temperatura T_a del aire.
- d) La población P de una ciudad aumenta a una velocidad proporcional a la población y a la diferencia entre 200.000 y la población.
- e) El radio se desintegra a una velocidad proporcional a la cantidad Q del radio presente.
- f) Para cierta sustancia, la velocidad de cambio de la presión de vapor P respecto de la temperatura T , es proporcional a la presión de vapor e inversamente proporcional al cuadrado de la temperatura.

Ejercicio 10

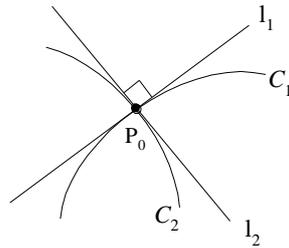
- a) Apliquen la ley de Newton al siguiente caso: la temperatura del aire es de 20°C y el cuerpo se enfría en 20 minutos desde 100°C hasta 60°C ¿dentro de cuánto tiempo la temperatura del cuerpo descenderá hasta 30°C ?
- b) Un barco apaga sus motores cuando se desplaza a 100 m/s . Consideren que sobre él actúa solamente la Fuerza de roce del agua. Ésta es aproximadamente proporcional a la velocidad del barco con respecto al agua. Luego de 5 segundos, su velocidad será 8 m/s . ¿Después de cuánto tiempo la velocidad se hará 1 m/s ?

Curvas ortogonales y familias de curvas ortogonales

Los pares de familias de curvas mutuamente ortogonales aparecen en aplicaciones físicas. En la teoría del electromagnetismo, las líneas de fuerza asociadas a un campo dado son trayectorias ortogonales a las correspondientes curvas equipotenciales.

También en el estudio de la termodinámica el flujo de calor a través de una superficie plana es ortogonal a las curvas isotermas (curvas de temperatura constante).

*Dos curvas C_1 y C_2 se dicen **ortogonales** en un punto común P_0 , cuando las respectivas rectas tangentes en ese punto, son perpendiculares entre si.*



Observación:

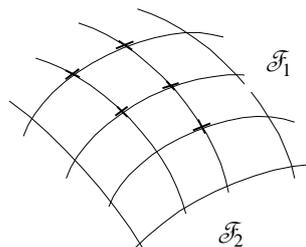
Si $m_1 \neq 0$ es la pendiente de l_1 y $m_2 \neq 0$ es la pendiente de l_2 , $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$
 Analíticamente, podemos interpretar que si C_1 es gráfica de $y = \varphi_1(x)$ y C_2 es gráfica de $y = \varphi_2(x)$, siendo φ_1 y φ_2 derivables en x_0 (abscisa de P_0) y $\varphi_1'(x_0) \neq 0$; $\varphi_2'(x_0) \neq 0$, entonces la ortogonalidad de C_1 y C_2 en P_0 equivale a $\varphi_1'(x_0) \cdot \varphi_2'(x_0) = -1$,

o sea:

$$\varphi_1'(x_0) = -\frac{1}{\varphi_2'(x_0)}.$$

En el caso de ser nula una de las pendientes, la recta perpendicular debe ser vertical (formando ángulo recto con el eje x).

*Dos familias de curvas \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 se dicen **mutuamente ortogonales** si cada curva de cada familia es ortogonal con las curvas de la otra familia.*



Observación:

Sean \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 dos familias de curvas dependientes de un parámetro:

$\mathcal{F}_1 : \Phi_1(x, y, C) = 0$ y $\mathcal{F}_2 : \Phi_2(x, y, C) = 0$ Sabemos que \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 están asociadas con sendas ecuaciones diferenciales de primer orden: $y' = f_1(x, y)$ e $y' = f_2(x, y)$ obtenidas eliminando los parámetros de las ecuaciones originales, con auxilio de las respectivas derivadas.

En general, la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ está informando cual es en cada punto del plano (x, y) , la pendiente de la curva integral que pasa por ese punto. Por eso podemos interpretar que la ortogonalidad de ambas familias, va a darse cuando en cada punto común de las curvas de una y otra familia, las tangentes sean perpendiculares y en consecuencia:

$$f_1(x, y) = -\frac{1}{f_2(x, y)}$$

Ejemplo 22

Sea \mathcal{F}_1 la familia de hipérbolas $x^2 - y^2 = C_1$. Son hipérbolas equiláteras, con eje coincidente con el eje x si $C_1 > 0$ y con el eje y si $C_1 < 0$)

Sea \mathcal{F}_2 la familia de hipérbolas $x \cdot y = C_2$. Éstas son hipérbolas con eje formando un ángulo de amplitud $\pi/4$ con los ejes coordenados, ubicadas en el primer y el tercer cuadrante si $C_2 > 0$, y en el segundo y el cuarto cuadrante si $C_2 < 0$.

Comprobaremos que las familias \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 son mutuamente ortogonales.

Para ello bastará con obtener y comparar las ecuaciones diferenciales asociadas.

Ecuación asociada a \mathcal{F}_1 : Derivamos con respecto a x la ecuación de \mathcal{F}_1 y obtenemos

$$2x - 2y y' = 0$$

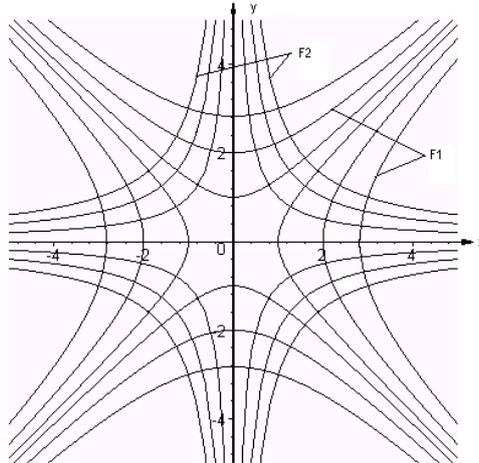
$$\therefore y' = \frac{x}{y} = f_1(x, y) \quad (\text{si } y \neq 0)$$

Ecuación asociada a \mathcal{F}_2 : Derivamos con respecto a x la ecuación de \mathcal{F}_2 y obtenemos

$$y + x \cdot y' = 0$$

$$\therefore y' = -\frac{y}{x} = f_2(x, y) \quad (\text{si } x \neq 0)$$

Como $f_1(x, y) = -\frac{1}{f_2(x, y)}$ las familias son mutuamente ortogonales.



Si \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 son familias de curvas monoparamétricas (dependientes de un solo parámetro), mutuamente ortogonales, las curvas que componen una y otra familia se denominan **trayectorias ortogonales** (unas de otras).

Para obtener las trayectorias ortogonales de una familia dada \mathcal{F}_1 , se procede de la siguiente manera:

1º) Se busca la ecuación diferencial asociada a \mathcal{F}_1 : $y' = f_1(x, y)$

2º) La ecuación diferencial asociada a la familia ortogonal buscada \mathcal{F}_2 debe ser:

$$y' = f_2(x, y) = -\frac{1}{f_1(x, y)}$$

3º) La solución general de esta ecuación representa la ecuación de la familia buscada \mathcal{F}_2 , es decir, las trayectorias ortogonales a \mathcal{F}_1

Ejemplo 23

Obtendremos las trayectorias ortogonales a la familia \mathcal{F}_1 : $y = c x^2$.

Observemos que para $c \neq 0$, $y = c x^2$ es una parábola con vértice en el origen y eje coincidente con el eje y , orientada hacia arriba, si $c > 0$ y, hacia abajo si $c < 0$.

1º) Eliminando c entre $\begin{cases} y = cx^2 \\ y' = 2cx \end{cases}$ obtenemos la

ecuación diferencial asociada a \mathcal{F}_1 : $y' = 2\frac{y}{x}$ (si $x \neq 0$)

2º) La ecuación diferencial asociada a la familia ortogonal \mathcal{F}_2 es entonces:

$$y' = -\frac{x}{2y} \quad (\text{si } y \neq 0)$$

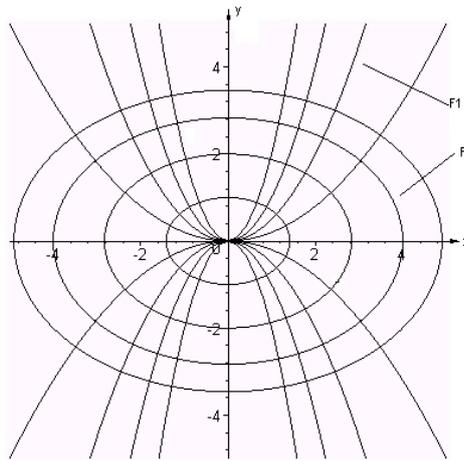
3º) Resolvemos esta última ecuación: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y} \quad \therefore \quad x dx + 2y dy = 0$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{2} + y^2 = k \quad (k > 0) \quad (\text{solución general})$$

Conclusión: $\mathcal{F}_2: \frac{x^2}{2k} + \frac{y^2}{k} = 1$ (familia de elipses con eje coincidente con el eje x)

es la familia de trayectorias ortogonales a la familia $\mathcal{F}_1: y = c x^2$.

En el siguiente gráfico están representadas algunas curvas de ambas familias:



Ejercicio 11

Muestren que las familias de curvas $\mathcal{F}_1: x^2 + y^2 - 2ax = 0$ y $\mathcal{F}_2: x^2 + y^2 - 2ay = 0$ son mutuamente ortogonales.

Ejercicio 12

Hallen las trayectorias ortogonales para las siguientes familias de curvas. Grafiquen ambas familias.

a) $y^2 = Cx$ b) $y^2 = Cx^3$ c) $y = mx$ d) $y = Ce^{-x}$ e) $x^2 + 3y^2 = C$

Autoevaluación

1. ¿Qué es una ecuación diferencial? ¿Qué es el orden de una ecuación diferencial?
¿A qué se llama solución general, solución particular y solución singular de una ecuación diferencial?
2. ¿Cómo resuelve una ecuación diferencial de tipo separable?
3. Describa una ecuación diferencial exacta. ¿Cómo puede resolverla?
4. Describa una ecuación diferencial lineal de primer orden. ¿Cómo puede resolverla?
5. Resuelva: a) $(1 - y^2 \operatorname{sen} x) dx + 2y \operatorname{cos} x dy = 0$ b) $3x(xy - 2) dx + (x^3 + 2y) dy = 0$
c) $\frac{ds}{dt} \operatorname{cost} + s \operatorname{sint} = 1$ d) $x \cdot y' - y = 3x^2$ e) $y' - \frac{2}{x}y = x^3$; $y(2) = 1$
6. Verifique que la función $y = x \int_0^x \frac{\operatorname{sint}}{t} dt$ es solución de la ecuación $xy' = y + x \operatorname{sen} x$ y satisface la condición inicial $y(0) = 0$.
7. ¿Cómo piensa que podría resolver la ecuación integral $y(x) + \int_0^x y(t) dt = x$?
8. Halle la solución $y(x)$ de la ecuación $x^{-3} y' \operatorname{cos} y = 2$ que verifica $y(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ para $x \rightarrow 0$.
9. ¿Cuál es la curva integral de $y' = e^{3x - 2y}$ que pasa por $(0,0)$?
10. Para un problema de valor inicial, $y' = f(x,y)$; $y(x_0) = y_0$ ¿cuáles son las condiciones suficientes para poder afirmar la existencia de solución única?
11. ¿Cuántas soluciones de la ecuación diferencial $y' = x^2 + y^2$ pasan por el punto $(1,0)$?
12. Hallar las curvas que satisfacen cada una de las condiciones geométricas siguientes: (a) la porción de la tangente limitada por los ejes tiene como punto central al punto de tangencia. (b) la proyección sobre el eje x de la parte de la normal entre (x,y) y el eje x tiene longitud 1. (c) la proyección sobre el eje x de la parte de la tangente entre (x,y) y el eje x tiene longitud 1.
13. Una curva arranca desde el origen por el primer cuadrante. El área bajo la curva desde $(0,0)$ hasta (x,y) es un tercio del área del rectángulo que tiene a esos puntos como vértices opuestos. Hallar la ecuación de esa curva.
14. Hallar la ecuación diferencial de cada una de las siguientes familias de curvas: (a) todas las circunferencias que pasan por $(1,0)$ y $(-1,0)$, (b) todas las circunferencias con centros en la recta $y = x$ que son tangentes a ambos ejes, (c) todas las parábolas con vértice en $(0,0)$ y de eje y .
15. Explique cómo se obtiene la familia de curvas ortogonales a una familia de curvas dada.

Capítulo III: Integrales Múltiples

Integrales dobles

Actividad 1

1. Piensen en una función $f(x,y)$ continua, definida sobre un rectángulo

$$R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\} \quad \text{y tal que } f(x,y) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

¿Cómo imaginan su gráfica?

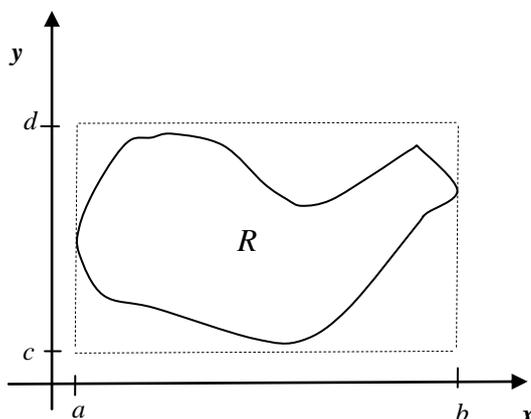
La gráfica de una función continua de dos variables es una superficie. La superficie que es gráfica de f tiene ecuación $z = f(x,y)$ (¿recuerdan alguna en particular?).

2. Siendo f con valores no negativos, la gráfica está totalmente ubicada por arriba del plano xy . Considerando todos los puntos del espacio entre el plano xy y la gráfica de f queda definido un subconjunto de \mathbb{R}^3 llamado “sólido”. La descripción analítica de ese sólido es:

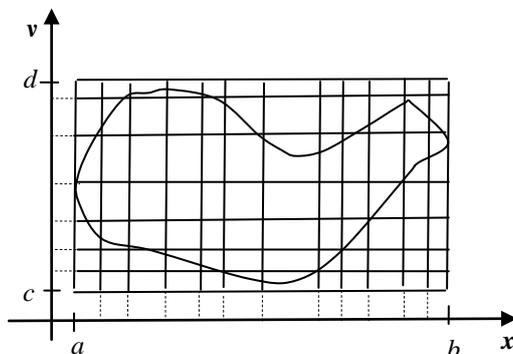
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in R \wedge 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

Traten ahora de graficar el conjunto V en un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio y propongan un procedimiento para calcular el volumen del mismo. Les damos una pista: adapten, con los cambios que sean necesarios, el procedimiento usado para obtener el área de una región plana; en ese procedimiento el área de una región plana se aproximaba con la suma de las áreas de un número finito de rectángulos, ¿qué sólidos elementales pueden utilizarse para aproximar el volumen de V ?

Contando con la actividad anterior y con lo visto en nuestro recorrido por las integrales de funciones de una variable, pasemos a considerar una función continua $f(x,y)$ definida sobre una región $R \subset [a,b] \times [c,d]$ como la que muestra la figura:



Si se consideran $n+1$ puntos de división en $[a, b]$ y $m+1$ puntos en $[c, d]$ y se trazan rectas paralelas a los ejes x e y por esos puntos, el rectángulo $[a, b] \times [c, d]$ queda dividido en $n \times m$ subrectángulos R_i . Supongamos que $R_1, R_2, R_3, \dots, R_k$ son los subrectángulos que están totalmente contenidos en R .

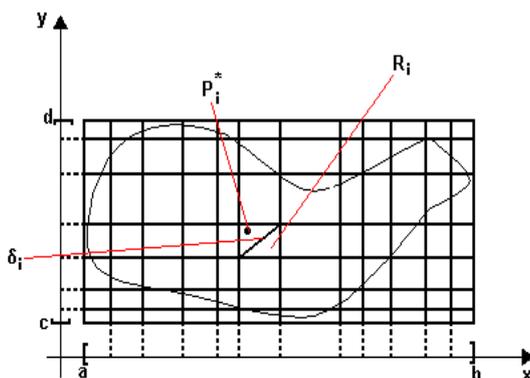


El conjunto $\wp = \{R_1, R_2, R_3, \dots, R_k\}$ se dice que es una *partición de R*.

Llamamos *norma* de \wp y denotamos $|\wp|$ a la mayor entre todas las longitudes de las diagonales de los R_i , o sea : $|\wp| = \max\{\delta_i / \delta_i = \text{longitud de la diagonal de } R_i, i = 1 \dots k\}$

Siendo $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ un punto cualquiera de R_i y ΔR_i el área del subrectángulo R_i ,

llamemos
$$J_k = \sum_{i=1}^k f(P_i^*) \Delta R_i = f(P_1^*) \Delta R_1 + f(P_2^*) \Delta R_2 + \dots + f(P_k^*) \Delta R_k$$



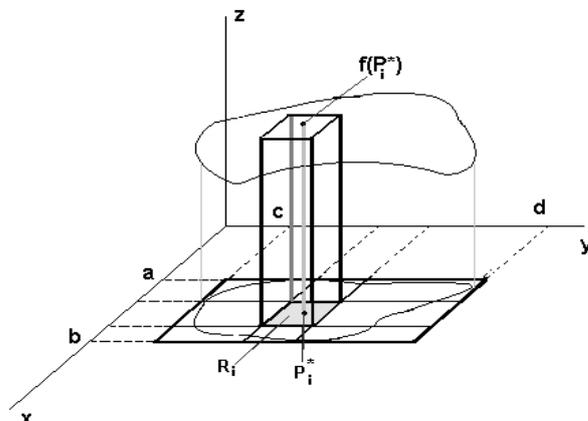
La integral doble de $f(x, y)$ sobre R se denota $\iint_R f(x, y) dA$ y es el límite de J_k cuando

$|\wp|$ tiende a cero, límite que existe y no depende de las particiones consideradas ni de los P_i^* elegidos.

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{|\wp| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(P_i^*) \Delta R_i$$

Para $f(x, y)$ continua y no negativa:

$f(P_i^*)\Delta R_i$ es el volumen de un paralelepípedo con base en R_i y altura igual a $f(P_i^*)$



Siendo $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in R \wedge 0 \leq z \leq f(x, y)\}$,

$$J_k = \sum_{i=1}^k f(P_i^*) \Delta R_i \approx \text{volumen del sólido } V$$

y
$$\lim_{|\phi| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(P_i^*) \Delta R_i = \iint_R f(x, y) dA = \text{volumen del sólido } V$$

Comenten ustedes la interpretación geométrica de $\iint_R f(x, y) dA$ en los siguientes casos:

- $f(x, y) \leq 0 \quad \forall (x, y) \in R$
- $f(x, y)$ toma tanto valores positivos como negativos sobre R
- $f(x, y) = 1 \quad \forall (x, y) \in R$

Observación:

En todo lo anterior la condición de *continuidad* sobre R para f podría reemplazarse por la de *acotación y continuidad salvo en un número finito de subconjuntos de área nula* (como son curvas y puntos). Son *integrables sobre R* tanto las funciones continuas sobre R como aquellas que presentan “saltos finitos” en un número finito de subconjuntos de R con área nula.

Ejercicio 1

Den una aproximación del volumen del sólido que está por arriba de $R = [0,2] \times [0,2]$ y debajo del paraboloides $z = 16 - x^2 - 2y^2$, utilizando una partición de R en cuatro cuadrados iguales y tomando como punto de muestra (punto arbitrario) el vértice superior derecho de cada uno.

Ejercicio 2

Sea $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 2 \wedge 1 \leq y \leq 2\}$. Obtengan una aproximación de: $\iint_R (x - 3y^2) dA$ por medio de una partición en R en cuatro rectángulos iguales, tomando el punto medio de cada uno como punto arbitrario P_i^* . ¿Representa esa integral el volumen de un sólido? (tengan en cuenta el signo de $f(x, y) = x - 3y^2$ sobre R)

Ejercicio 3

Siendo $f(x, y) = k$ (constante) en $R = [a, b] \times [c, d]$, muestren que $\iint_R f(x, y) dA = \text{área}(R) \cdot k$

Ejercicio 4

Siendo $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$

a) Representen curvas de nivel de $f(x, y) = x + y$ en R . Deduzcan el resultado de

$\iint_R x + y dA$ a partir del conocimiento de los valores que toma el integrando en R .

b) Representen curvas de nivel de $g(x, y) = |x + y|$ en R . Deduzcan el resultado de

$\iint_R |x + y| dA$ a partir del conocimiento de los valores que toma el integrando en R y de la

interpretación geométrica de dicha integral.

Propiedades de la integral doble

Propiedad 1 (Linealidad)

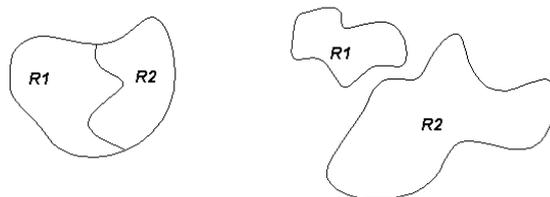
Para f y g integrables sobre $R \subset \mathbb{R}^2$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (constantes)

$$\iint_R [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] dA = \alpha \iint_R f(x, y) dA + \beta \iint_R g(x, y) dA$$

Propiedad 2 (Aditividad de la región de integración)

Para f integrable sobre R siendo $R = R_1 \cup R_2 \subset \mathfrak{R}^2$ con $R_1 \cap R_2$ conjunto de área

nula,
$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA .$$



Propiedad 3 (La integral doble preserva desigualdades)

Si $f(x, y) \geq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in R$ entonces
$$\iint_R f(x, y) dA \geq \iint_R g(x, y) dA$$

En particular, si $f(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in R$ entonces
$$\iint_R f(x, y) dA \geq 0 .$$

Propiedad 4 (Propiedad de acotamiento)

Si $|f(x, y)| \leq M \quad \forall (x, y) \in R$ entonces
$$-M \text{ área}(R) \leq \iint_R f(x, y) dA \leq M \text{ área}(R)$$

Ejercicio 5

Si $R = [0,1] \times [0,1]$ muestren que
$$0 \leq \iint_R \text{sen}(x+y) dA \leq 1 .$$

¿Recuerdan el Teorema del valor medio para integrales definidas? Ese teorema tiene también una “versión” para integrales dobles:

Teorema del valor medio (para integrales dobles)

Si f es continua en $R \subset \mathfrak{R}^2$ entonces existe $P^* \in R$ tal que

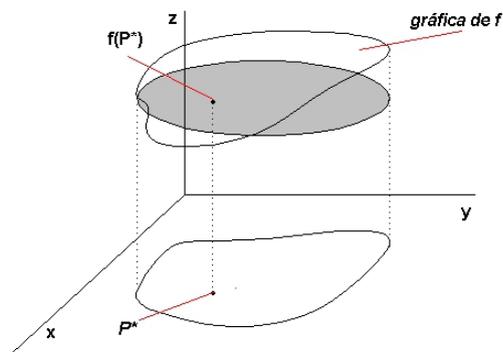
$$\iint_R f(x, y) dA = f(P^*) \text{área}(R)$$

Observaciones:

1. Se llama valor promedio de f en R al cociente $\frac{\iint_R f(x, y) dA}{\text{área}(R)}$

El Teorema del valor medio afirma que, siendo f continua en R , el valor promedio de f en R coincide con el valor de f en algún punto P^* de R

2. Si es $f \geq 0$ en R , significa que el volumen del sólido, limitado por la gráfica de f y el plano xy restringido a R , es equivalente al de un “cilindro” de base R y altura $f(P^*)$.

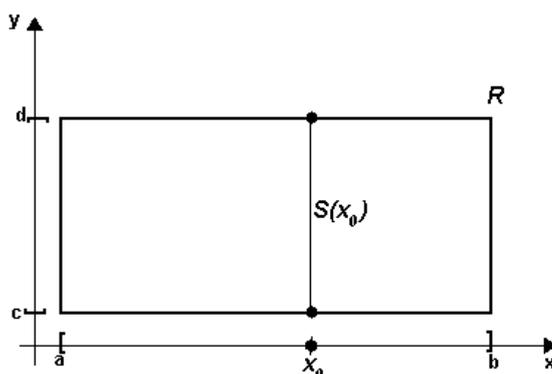


Cálculo de la integral doble

Plantearemos dos casos:

- A) cuando la región de integración es un rectángulo.
- B) cuando la región de integración es más general.

A) Supongamos $z = f(x, y)$ continua en un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$



Sea $x_0 \in [a, b]$.

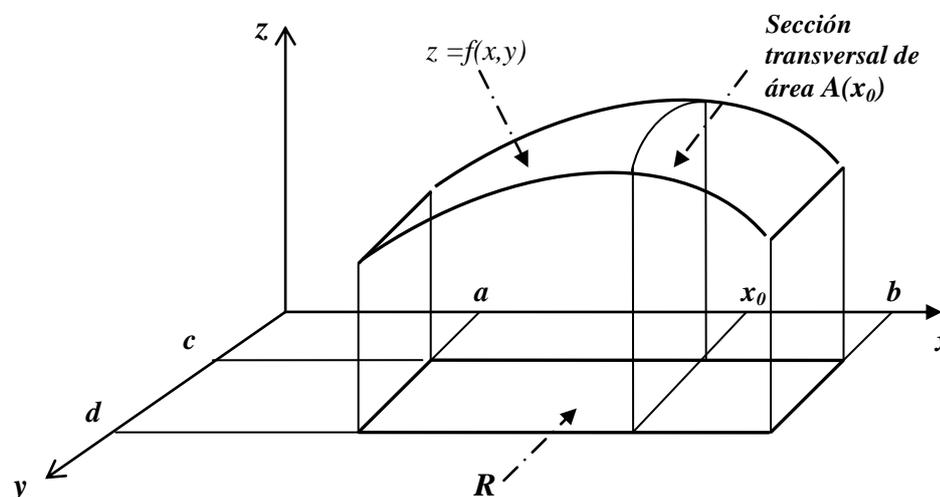
Como f es continua en R , también lo es en el segmento $S(x_0) = \{(x_0, y) / c \leq y \leq d\}$

En consecuencia f restringida a $S(x_0)$ es integrable con respecto a y , y existe

$$A(x_0) = \int_c^d f(x_0, y) dy$$

¿Qué significado tiene $A(x_0)$?

Si suponemos que $f(x, y) \geq 0$ en R , $A(x_0)$ representa el área de la sección plana obtenida al intersecar el sólido $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in R \wedge 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ con el plano $x = x_0$ (¿Por qué?)



Esto que interpretamos para cierto x_0 fijo, ocurre para todo $x \in [a, b]$ quedando así definida

la función $A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$.

Al variar x , las secciones producidas “barren” el sólido en su totalidad, lo que nos permite

concluir que $\int_a^b A(x) dx$ representa el volumen del mismo.

Entonces:

$$Vol(V) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

La expresión de la derecha es llamada integral iterada integrando primero con respecto a y (dejando a x fijo) y al resultado con respecto a x .

¿Y si calculamos el volumen formando rebanadas con planos perpendiculares al eje y ?

El área de una sección transversal es: $A(y) = \int_a^b f(x, y) dx$

Por tanto el volumen de todo el sólido es: $Vol(V) = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$

La expresión de la derecha se llama **integral iterada** integrando primero con respecto a x y al resultado con respecto a y .

La interpretación geométrica anterior nos permite comprender el siguiente resultado

Teorema de Fubini

Para toda función continua en un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Ejemplo 1

Calcular $\iint_R f(x, y) dA$, siendo: $f(x, y) = 1 - 6x^2y$ y $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 2 \wedge -1 \leq y \leq 1\}$

Aplicamos el teorema de Fubini (integrando primero con respecto a y):

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_0^2 \int_{-1}^1 (1 - 6x^2y) dy dx = \int_0^2 (y - 3x^2y^2) \Big|_{-1}^1 dx = \int_0^2 [1 - 3x^2 - (-1 - 3x^2)] dx = \int_0^2 2 dx = 4$$

Si invertimos el orden de integración:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{-1}^1 \int_0^2 (1 - 6x^2y) dx dy = \int_{-1}^1 (x - 3x^3y) \Big|_0^2 dy = \int_{-1}^1 (2 - 16y) dy = (2y - 8y^2) \Big|_{-1}^1 = 4$$

Pregunta: ¿Podrían afirmar que el resultado obtenido representa el volumen de un sólido?

Ejercicio 6 Grafiquen la región de integración y evalúen la integral.

$$\begin{array}{lll}
 a) \int_0^3 \int_0^2 (4 - y^2) dy dx & b) \int_0^3 \int_{-2}^0 (x^2 y - 2xy) dy dx & c) \int_{-1}^0 \int_{-1}^1 (x + y + 1) dx dy \\
 d) \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin x + \cos y) dx dy & e) \int_0^4 \int_0^2 x \sqrt{y} dx dy & f) \int_0^{\ln 2} \int_0^{\ln 5} e^{2x-y} dx dy
 \end{array}$$

Ejercicio 7 Integren $f(x, y) = \frac{1}{xy}$ en el cuadrado $1 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 2$

Ejercicio 8 Integren $f(x, y) = y \cos(xy)$ en el rectángulo: $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$

Ejercicio 9 Dibujen el sólido cuyo volumen está dado por la integral iterada

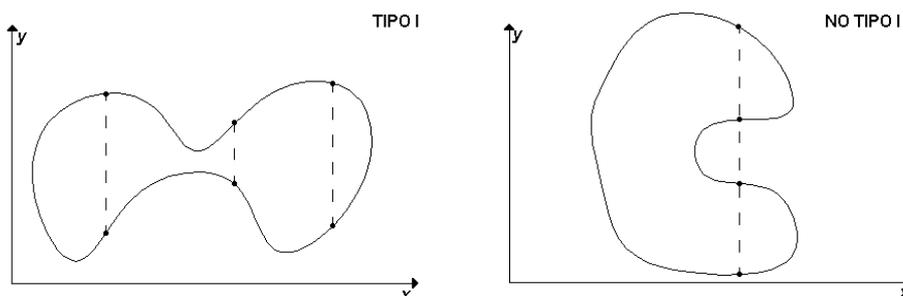
$$\begin{array}{ll}
 a) \int_0^1 \int_0^1 (4 - x - 2y) dx dy & b) \int_0^1 \int_0^1 (2 - x^2 - y^2) dx dy
 \end{array}$$

B) Supongamos ahora $z = f(x, y)$ continua en una región R . Podemos imaginar – para interpretar el cálculo- que f toma valores no negativos en R , aunque esto no es estrictamente necesario, ya que sólo pretendemos establecer un procedimiento operativo para resolver la integral de una función continua, en una región que no sea un rectángulo.

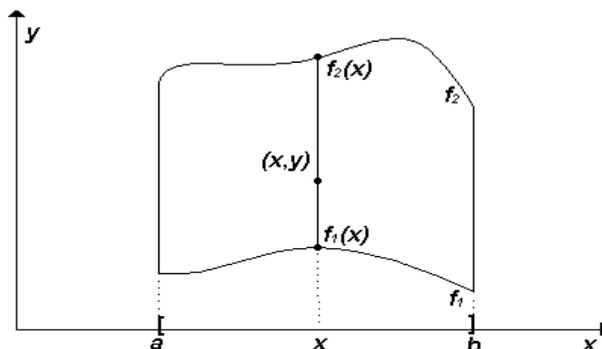
Vamos a distinguir dos regiones especiales:

B1) Región del tipo I:

Se reconoce cuando al trazar una recta vertical por cualquier punto interior de la misma, la frontera es cortada en dos puntos exactamente.



Analíticamente una región tipo I se describe: $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \wedge f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$
 donde f_1 y f_2 son dos funciones continuas definidas en el intervalo $[a, b]$



El teorema de Fubini se extiende a esta situación: Para cada $x \in [a, b]$, f es continua en el segmento $s(x) = \{(x, y) / f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$ y por lo tanto existe $A(x) = \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy$

Luego, al variar x e integrar $A(x)$ se tiene:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy dx$$

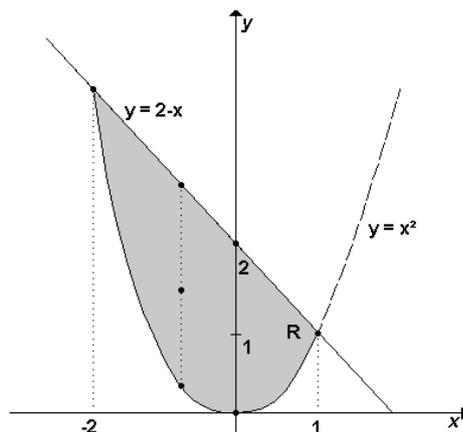
La región tipo I, permite calcular la integral doble por medio de una integral iterada primero con respecto a y , y luego con respecto a x .

Observación: La clave para resolver con este procedimiento, está en poder describir la región dada, como región de tipo I. Hay que tener en cuenta que no toda región responde a esa característica.

Ejemplo 2

Integrar $f(x, y) = 2xy + y$ en la región limitada por $y = x^2$ y $x + y = 2$.

i) Es imprescindible hacer un croquis de la región, para saber si se adapta al caso presentado.



Podemos apreciar que la parábola y la recta limitan una región tipo I: trazando una recta vertical por cada punto interior, esta corta la frontera en dos puntos exactamente. La recta como parte superior de la frontera y la parábola limitando inferiormente.

ii) ¿Cuál es la variación de x ? Buscamos las abscisas de los puntos en que se cortan ambas

líneas:
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x \end{cases} \rightarrow x^2 = 2 - x \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

¿Cuál es la variación de y ? $x^2 \leq y \leq 2 - x$

Entonces: $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -2 \leq x \leq 1 \wedge x^2 \leq y \leq 2 - x\}$ y la integral puede calcularse

integrando primero con respecto a y , y luego con respecto a x :

$$I = \int_{-2}^1 \int_{x^2}^{2-x} (2xy + y) dy dx$$

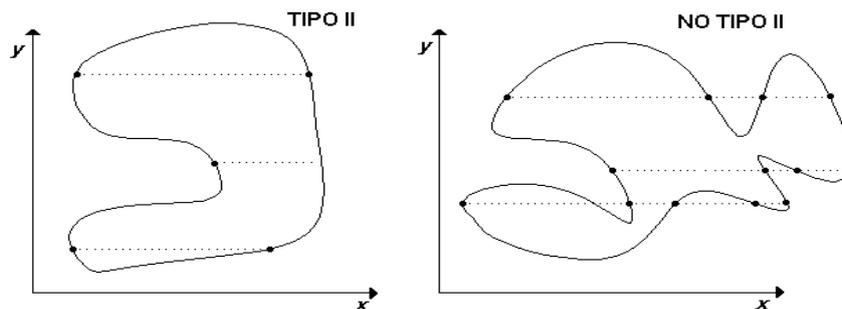
Resolviendo con respecto a y :

$$I = \int_{-2}^1 \left(xy^2 + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^{2-x} dx = \int_{-2}^1 \left[\left(x + \frac{1}{2} \right) (2-x)^2 - x \cdot x^4 - \frac{x^4}{2} \right] dx$$

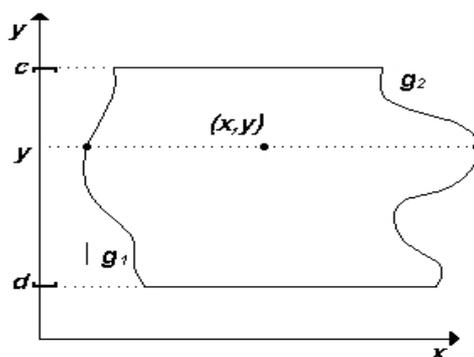
Completen el cálculo (Ordenen el integrando y resuelvan con respecto a x)

B2) Región del tipo II:

Se reconoce, cuando al trazar una recta horizontal por cada punto interior de la misma, la frontera es cortada en dos puntos exactamente.



Analíticamente una región tipo II se describe: $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / g_1(y) \leq x \leq g_2(y) \wedge c \leq y \leq d\}$
 donde g_1 y g_2 son funciones continuas en $[c, d]$



En este caso, como $y \in [c, d]$, f es integrable en $[g_1(y), g_2(y)]$ definiendo así la función:

$$A(y) = \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx$$

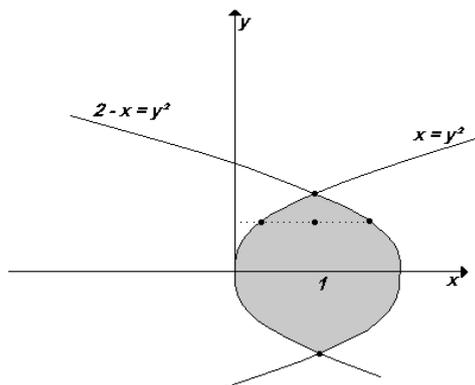
Finalmente:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx dy$$

Ejemplo 3

Calcular $\iint_R 2xy dA$ siendo R la región limitada por: $x = y^2$ y $2 - x = y^2$.

i) Imprescindible graficar:



ii) ¿Cuál es la variación de y ? Buscamos las ordenadas de los puntos de intersección entre

ambas parábolas:
$$\begin{cases} x = y^2 \\ 2 - x = y^2 \end{cases} \rightarrow y^2 = 2 - y^2 \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} y_1 = -1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

La variación de x , se obtiene observando que toda recta horizontal trazada por puntos interiores a R , corta por la izquierda a la parábola $x = y^2$ y por la derecha, a la parábola $x = 2 - y^2$.

Entonces $R = \{(x, y) / y^2 \leq x \leq 2 - y^2 \wedge -1 \leq y \leq 1\}$ y la integral se calcula integrando

primero con respecto a x y luego con respecto a y :
$$I = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^{2-y^2} 2xy \, dx \, dy$$

O sea:
$$I = \int_{-1}^1 x^2 y \Big|_{y^2}^{2-y^2} dy = \int_{-1}^1 [(2 - y^2)^2 y - y^4 y] dy$$

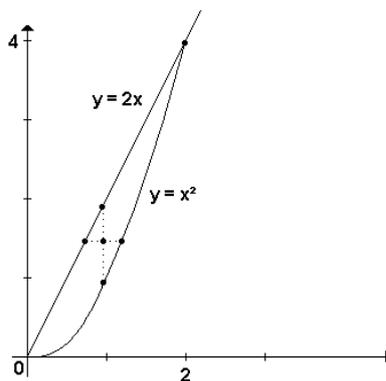
Completen el cálculo (ordenen el integrando, resuelvan con respecto a y , y den el resultado)

Algunas regiones (como la que se presenta en el siguiente ejemplo) son de tipo I y de tipo II

Ejemplo 4

Calcular $\iint_R (4x + 2) dA$ siendo R la región limitada por $y = x^2$ e $y = 2x$.

i) Al graficar la región de integración apreciamos que R es de tipo I y de tipo II.



ii) Describiendo a R como región de tipo I:

$$R = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 / 0 \leq x \leq 2 \wedge x^2 \leq y \leq 2x\}$$

y la integral se calculará integrando primero respecto de y y luego respecto de x :

$$\begin{aligned} \iint_R (4x+2)dA &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x+2)dy dx = \int_0^2 [4xy + 2y]_{y=x^2}^{y=2x} dx = \int_0^2 (8x^2 + 4x - 4x^3 - 2x^2)dx = \\ &= \int_0^2 (6x^2 + 4x - 4x^3)dx = (2x^3 + 2x^2 - x^4) \Big|_0^2 = 8 \end{aligned}$$

Describiendo a R como región de tipo II tenemos:

$$R = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 / 0 \leq y \leq 4 \wedge \frac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{y}\}$$

y la integral se calculará integrando primero respecto de x y luego respecto de y :

$$\begin{aligned} \iint_R (4x+2)dA &= \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x+2)dx dy = \int_0^4 [2x^2 + 2x]_{x=y/2}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^4 \left(2y + 2\sqrt{y} - \frac{y^2}{2} - y \right) dy \\ &= \int_0^4 \left(y + 2\sqrt{y} - \frac{y^2}{2} \right) dy = \left(\frac{y^2}{2} + \frac{4}{3}y^{3/2} - \frac{y^3}{6} \right) \Big|_0^4 = 8 \end{aligned}$$

El resultado de la integral es el mismo, ya sea que describamos a R como región de tipo I o de tipo II. El cambio en el orden de integración es posible mediante el cambio de descripción de la región.

Obsevación: Debe quedar bien claro que **no toda región es necesariamente de tipo I o de tipo II** ¿qué puede hacerse entonces para poder integrar?

Tratar de subdividir la región en un número finito de subregiones que puedan describirse como tipo I o II y aplicar la propiedad aditiva. Habiendo más de una posible descripción de la región de integración, se elegirá, por lo general, la descripción más simple aunque a veces es la observación del integrando lo que nos hace decidir el orden de integración más favorable y por ende, la descripción que ha de hacerse de la región. Vean el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5

Supongamos que nos proponen calcular $\iint_R \frac{\text{sen } x}{x} dA$, siendo R el triángulo en el plano xy limitado por el eje x , la recta $y = x$ y la recta $x = 1$.

Grafiquen la región R y observen que es tanto de tipo I como de tipo II.

Si describimos R como tipo II, $R = \{(x, y) / 0 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq x \leq y\}$ y la integral doble

se calcula:

$$\iint_R \frac{\text{sen } x}{x} dA = \int_0^1 \int_0^y \frac{\text{sen } x}{x} dx dy$$

Pero en este punto quedamos detenidos pues como recordarán $\int \frac{\text{sen } x}{x} dx$ no puede expresarse en términos de funciones elementales.

En cambio, si describimos R como región tipo I, $R = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x\}$

y el cálculo de la integral doble puede efectuarse sin dificultad alguna:

$$\iint_R \frac{\text{sen } x}{x} dA = \int_0^1 \int_0^x \frac{\text{sen } x}{x} dy dx = \int_0^1 y \frac{\text{sen } x}{x} \Big|_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \text{sen } x dx = -\cos x \Big|_0^1 = -\cos 1 + 1 \cong 0,46$$

Ejercicio 10

Resuelvan las siguientes integrales y grafiquen la región de integración correspondiente.

a) $\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y} dx dy$ b) $\int_0^{\pi} \int_0^{\text{sen } x} y dy dx$ c) $\int_0^{\pi} \int_0^x x \text{sen}(y) dy dx$ d) $\int_1^2 \int_y^{y^2} dx dy$

Ejercicio 11 En las siguientes propuestas, identifiquen el orden de integración dado, grafique la región e inviertan el orden.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_0^1 \int_2^{4-2x} f(x, y) dy dx & \text{b) } \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx dy & \text{c) } \int_0^2 \int_{y-2}^0 f(x, y) dx dy \\ \text{d) } \int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} f(x, y) dy dx & \text{e) } \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy & \text{f) } \int_0^2 \int_{1-y}^{4-y^2} f(x, y) dx dy \end{array}$$

Ejercicio 12

Dibujen la región de integración y determinen un orden de integración conveniente para calcular la integral doble.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_0^1 \int_x^1 \text{sen}(y^2) dy dx & \text{b) } \int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\text{sen } y}{y} dy dx & \text{c) } \int_0^3 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy dx \end{array}$$

Ejercicio 13

En los siguientes incisos, grafiquen la región R y descríbanla en la forma que consideren más conveniente para el cálculo de la integral doble de la función f en R . Evalúen dicha integral.

- a) $f(x, y) = \frac{x}{y}$ R en el primer cuadrante limitada por $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$, $x = 2$.
- b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ R es el triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.
- c) $f(u, v) = v - \sqrt{u}$, R región triangular en el primer cuadrante, limitada por la recta $u + v = 1$
- d) $f(s, t) = e^s \ln t$ R región del primer cuadrante del plano s, t , por arriba de la curva $s = \ln t$ entre $t = 1$ y $t = 2$.
- e) $f(x, y) = y - 2x^2$ R es la región dentro del cuadrado $|x| + |y| = 1$
- f) $f(x, y) = xy$ R es la región limitada por las rectas $y = x$, $y = 2x$, $x + y = 2$

Ejemplo 6

Calculamos $\iint_R f(x, y) dA$ donde $R = [1,3] \times [2,5]$ y $f(x, y) = \frac{x^2}{y^2}$ usando MAPLE con los

siguientes comandos:

```
> f:=x^2/y^2;
> INT:=int(int(f,y=2..5),x=1..3);
```

Ejemplo 7

Calculamos $\iint_R f(x,y)dA$ donde $f(x,y) = \frac{x^2}{y^2}$ y R es la región del plano limitada por la curva $y = \frac{1}{x}$ y las rectas $x = 2$ e $y = x$, usando MAPLE.

Como la región no es un rectángulo hay que caracterizarla como de tipo I o II (o como unión finita de regiones de tipo I o de tipo II) según corresponda.

- Para ello, conviene representarla:

```
> y1:=1/x;
> ecua:=x=2;
> y2:=x;
> fig1:=plot(y1, x=0.2..3, y=0..3, color=red):
> fig2:=implicitplot( ecua, x=0..2, y=0..4, color=blue):
> fig3:=plot(y2, x=0.2..3, y=0..3, color=green):
> with(plots):
> display({fig1, fig2, fig3});
```

- Además hay que encontrar el punto de intersección entre las curvas $y1$ e $y2$:

```
> solve(y1=y2,x);
```

Ahora es claro que la región de integración puede describirse como región de tipo I :

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 2 \wedge \frac{1}{x} \leq y \leq x \right\}$$

- Definimos la función que vamos a integrar e integramos:

```
> f:= x^2/y^2;
> INT:=int(int(f,y=1/x..x),x=1..2);
```

Aplicaciones de la integral doble

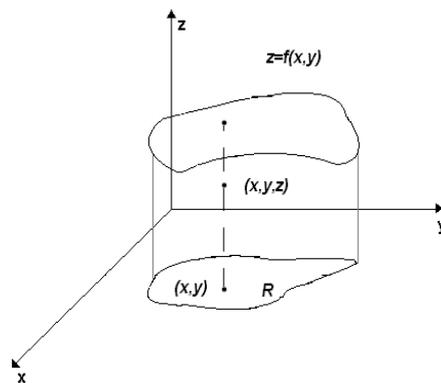
Las aplicaciones más obvias son el cálculo de volumen de un sólido y el cálculo del área de una región plana como habíamos visto en clases anteriores.

I. Volumen de un sólido

Situación 1: Volumen de un sólido apoyado sobre el plano xy

En la presentación del tema, vimos que si se tiene $z = f(x, y)$; $(x, y) \in R$ (región) y es $f(x, y) \geq 0$ en R , queda definido en \mathfrak{R}^3 un subconjunto llamado “sólido” que se describe analíticamente $V = \{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 / (x, y) \in R \wedge 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ y cuyo volumen se

calcula por medio de la integral $\iint_R f(x, y) dA$



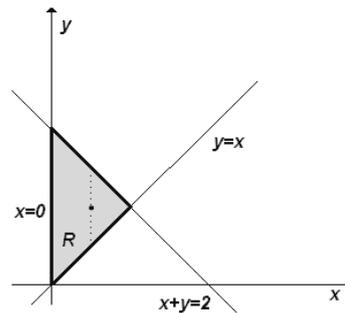
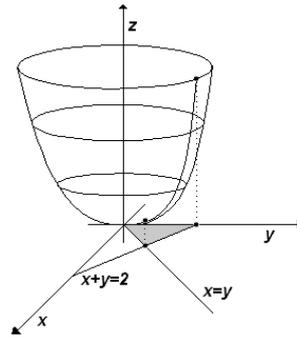
Cabe notar que el sólido tiene una “tapa” que es la gráfica de f (restringida a R) y un “piso” que es en el plano xy , la región R .

¡El cálculo realizado debe arrojar en este caso un resultado positivo! El éxito de la operación, reside en describir bien la región de integración y tener bien en claro cual es la “tapa” del sólido, ya que su identificación es la que nos indica la función a integrar.

Ejemplo 8

Calcular el volumen del sólido formado bajo el paraboloides $z = x^2 + y^2$ restringido al triángulo limitado por las rectas $y = x$, $x = 0$ y $x + y = 2$ en el plano xy .

Conviene -aunque no salga muy bien- hacer un esquema del sólido y de la región de integración:



Podemos observar que la “tapa” es la porción de paraboloides que se encuentra sobre la región $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1 \wedge x \leq y \leq 2 - x\}$.

Observen que la descripción de R corresponde a una región tipo I (¿por qué no

conviene hacerla como tipo II?) $\therefore \text{Vol}(V) = \iint_R (x^2 + y^2) dA = \int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 + y^2) dy dx$

Completen el cálculo y comprueben que el resultado es $4/3$ unidades cúbicas.

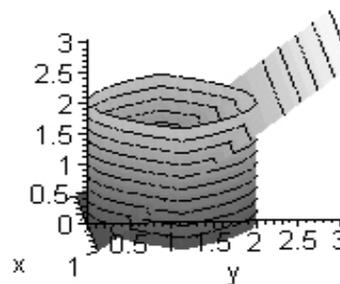
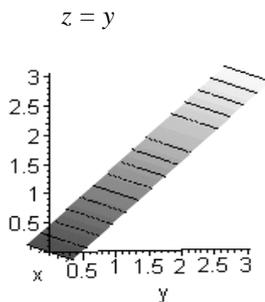
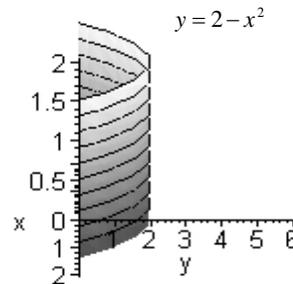
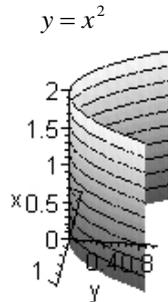
En algunas ocasiones (como en el ejemplo siguiente) el sólido se describe en términos de las superficies que forman su frontera, razón por la cual es imprescindible reconocer las ecuaciones dadas, para luego determinar la “tapa” del sólido, como también la región que se forma en el plano xy , a partir de las “trazas” de las superficies limitantes.

Ejemplo 9

Supongamos que nos piden calcular el volumen del sólido limitado por las superficies $y = x^2$, $y = 2 - x^2$ y $z = y$ por arriba del plano xy .

Las ecuaciones $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$ tienen una característica común: falta una variable. Podemos afirmar entonces que representan cilindros rectos (con generatrices paralelas al

eje de la variable que falta y con directrices en los planos coordenados correspondientes a las variables involucradas, y en esos planos, las curvas correspondientes determinan la forma de la región R)



Ahora que hemos reconocido las superficies que constituyen la frontera y visualizado el sólido podrán contestar las siguientes preguntas:

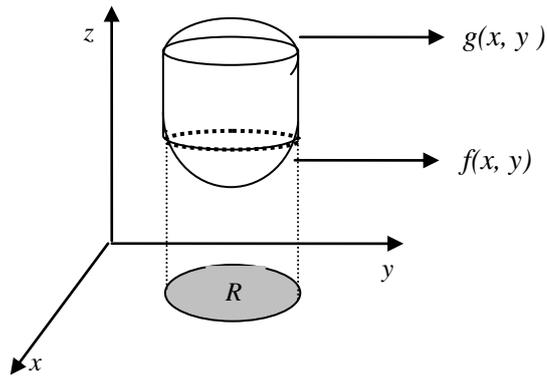
- ¿Cuál es la superficie que hace de “tapa” del sólido?
- ¿Cuál es la superficie que hace de “piso” del sólido?
- ¿Cómo puede describir analíticamente la región R ? (gráfiquela previamente)
- ¿Cómo se describe analíticamente el sólido V ?
- ¿Cómo calcula el volumen de V ?

Situación 2: Volumen de un sólido que no se apoya sobre el plano xy

Suponga que el sólido no se apoya en el plano xy , es decir que está limitado por dos superficies, gráficas de funciones continuas f y g definidas en una misma región R con $f(x, y) \leq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in R$. En ese caso,

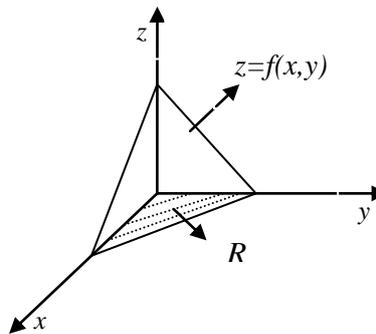
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in R \wedge f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$$

y
$$Vol(V) = \iint_R [g(x, y) - f(x, y)] dA \quad (\text{¿cierto?})$$



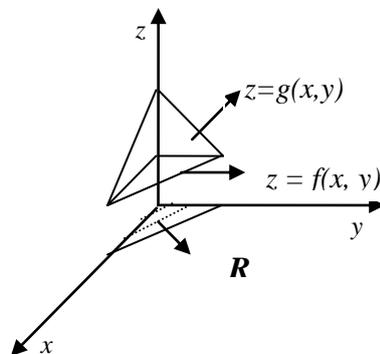
Ejercicio 14

Calculen el volumen del sólido limitado por $x + y + z = 3$ y los planos coordenados en el primer octante.



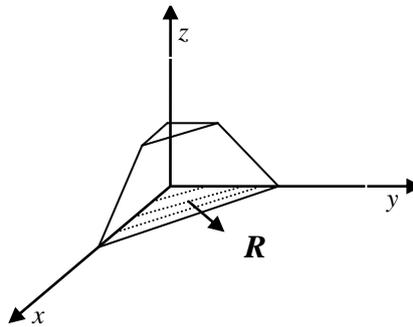
Ejercicio 15

Calculen el volumen del sólido limitado por $x + y + z = 3$ y los planos $z = 1$, $y = 0$ y $x = 0$ en el primer octante.



Ejercicio 16

Calculen el volumen del sólido limitado por $x + y + z = 3$ y los planos $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ y $z = 1$ en el primer octante.

**Ejercicio 17**

Calculen el volumen del sólido $V = \{(x, y, z) / (x, y) \in R \wedge 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$

siendo R triángulo encerrado por las rectas $x = y$; $y = 0$ y $x + y = 2$ en el plano xy .

Ejercicio 18

Calculen el volumen del sólido limitado por:

- i) $z = x^2$, $y = 2 - x^2$, $y = x$ y $z = 0$
- ii) $x^2 + y^2 = 4$, $z + y = 2$ y los planos coordenados en el primer octante.
- iii) $y = x^2$ y $z + y = 4$ con $z \geq 0$
- iv) $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ y $z = 0$
- v) $z = x^2 + y^2 + 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y = 1$
- vi) $z^2 + y^2 = 4$, $x = 2y$, $x = 0$ y $z = 0$ en el primer octante.

II. Área de una región plana

Si $z = f(x, y) = 1$ en $R \subset \mathbb{R}^2$, región cerrada y acotada entonces

$$\text{área de } R = \iint_R dA$$

Ejercicio 19

Empleando integral doble calculen el área de la región limitada por las siguientes curvas:

- i) $y = x^2$; $y = 8 - x^2$
- ii) $y = x^2$; $x = y^2$
- iii) $y = x^2$; $y = x + 2$

$$\text{iv) } x = y^2 ; x = 8 - y^2 \quad \text{v) } y = -x^2 + 3 ; y = -1 \quad \text{vi) } y = x ; y = x + 2 ; x = 3 ; x = 0$$

III. Valor promedio de f en R

Si $z = f(x,y)$ continua en la región cerrada y acotada $R \subset \mathfrak{R}^2$, entonces

$$\text{valor promedio de } f \text{ en } R = \frac{\iint_R f(x, y) dA}{\text{area}(R)}$$

Ejercicio 20

Calculen el valor promedio de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en la región limitada por $y = x^2 - 4$ e $y = 3x$.

Ejercicio 21

La temperatura en el punto (x, y) perteneciente a una región R está dada por $T(x, y) = 50 + 2x + y$. R está limitada por $y = x^2$ e $y = 8 - x^2$. Calculen la temperatura promedio en R .

IV. Masa y centro de masa de una placa delgada

Desde un conjunto discreto a una distribución continua

Un sistema rígido es todo conjunto de partículas obligadas a permanecer a distancias relativas absolutamente fijas. Por supuesto, no existen en la naturaleza sistemas de esta clase ya que, los átomos que componen un cuerpo, están siempre sujetos a movimientos relativos. No obstante, si estamos interesados en una descripción macroscópica del sistema, tales efectos pueden ser ignorados. Por otra parte, todo cuerpo sufre deformaciones o variación de su tamaño, pero en la mayoría de los cuerpos sólidos, en condiciones ordinarias, tales cambios son suficientemente pequeños y pueden ser despreciados cuando se estudia el movimiento del sólido como un todo.

El cálculo de magnitudes que caracterizan a un sistema rígido ideal puede realizarse considerando al mismo, como un conjunto discreto de partículas o como una distribución continua de materia. Es habitual comenzar trabajando con sumatorias extendidas a las partículas y pasar a la segunda descripción sustituyendo tales sumas por integraciones extendidas a distribuciones másicas.

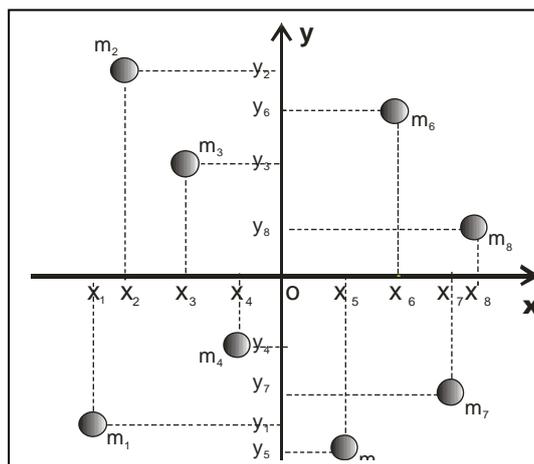
Supongamos que **se quiere encontrar la masa y el centro de masa de una placa plana y delgada**. Por ejemplo un ingeniero puede estar interesado en conocer cual es la masa de un disco hecho de una determinada aleación y determinar donde debe poner un pivote para equilibrarlo. Hay que observar que si la placa es relativamente pequeña y puede manipularla puede obtener esta información realizando algunas mediciones experimentales. Lamentablemente no siempre las condiciones son tan favorables y es necesario agudizar el ingenio. Si se conocen las dimensiones de la placa y una función que dé cuenta de la densidad de masa de la misma, el problema puede ser abordado analíticamente.

Es bien conocido que si se tiene un sistema coplanar formado por n partículas de masa m_i ubicadas en las posiciones (x_i, y_i) ($i = 1, \dots, n$), **la masa del sistema** está dada por

$$M = \sum_{i=1}^n m_i$$

y **las coordenadas del centro de masa**, (\bar{x}, \bar{y}) , pueden calcularse como

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$



Supongamos que la placa delgada en estudio tiene una forma coincidente con la región $R \subset \mathbb{R}^2$ y cuya **densidad superficial de masa** (masa por unidad de área) es dada por

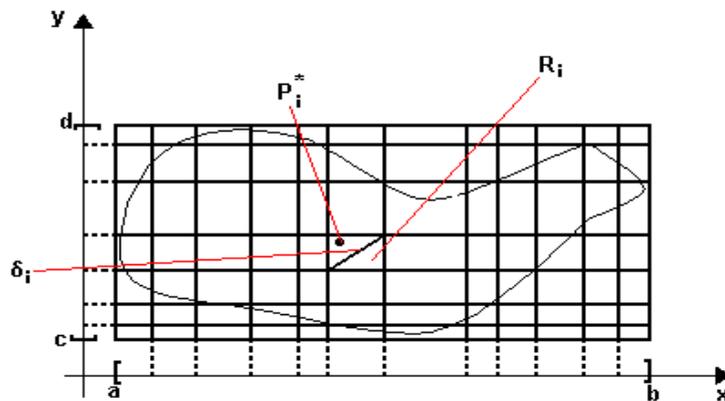
$\delta(x, y)$ (la densidad no es constante, es decir, algunas partes de la placa son más densas que otras). Procedemos de la forma habitual:

1) Siendo R acotada, existe un rectángulo $[a, b] \times [c, d]$ que la contiene. Tomamos n puntos de división en $[a, b]$ y m puntos en $[c, d]$, de esta manera, trazando rectas paralelas a los ejes por esos puntos de división, el rectángulo queda dividido en $n \times m$ subrectángulos R_i cuyas áreas indicaremos con ΔR_i .

Supongamos que k de esos subrectángulos quedan totalmente contenidos en R .

$\wp = \{R_1, R_2, R_3, \dots, R_k\}$ es una partición de R cuya norma es

$$|\wp| = \max\{\delta_i / \delta_i = \text{long de la diagonal de } R_i, i = 1..k\}$$



2) Elegimos arbitrariamente un punto $P_i^*(x_i^*, y_i^*) \in R_i$ y suponemos que en R_i la densidad es constante y que toma el valor $\delta(x_i^*, y_i^*)$. Podemos imaginar que en la posición P_i^* se encuentra una partícula puntual cuya masa m_i es igual a la masa del rectángulo R_i , es decir $m_i^* = \delta(x_i^*, y_i^*) \Delta R_i$. De esta forma hemos “discretizado” la placa (k partículas de masa m_i^* localizadas en las posiciones (x_i^*, y_i^*) , $i = 1, \dots, k$) y podemos

decir que: $\text{masa de la placa} = M \cong \sum_{i=1}^k m_i^* = \sum_{i=1}^k \delta(x_i^*, y_i^*) \Delta R_i$

De forma análoga, las coordenadas del **centro de masa** (\bar{x}, \bar{y}) de la placa pueden aproximarse de la siguiente manera:

$$\bar{x} \cong \frac{\sum_{i=1}^k x_i^* m_i^*}{\sum_{i=1}^k m_i^*} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i^* \delta(x_i^*, y_i^*) \Delta R_i}{\sum_{i=1}^k \delta(x_i^*, y_i^*) \Delta R_i} \quad \bar{y} \cong \frac{\sum_{i=1}^k y_i^* m_i^*}{\sum_{i=1}^k m_i^*} = \frac{\sum_{i=1}^k y_i^* \delta(x_i^*, y_i^*) \Delta R_i}{\sum_{i=1}^k \delta(x_i^*, y_i^*) \Delta R_i}$$

3) Como suponemos que estamos frente a una placa real es natural suponer que $\delta(x, y)$ es una función continua (o con discontinuidades de primera especie) en R , con lo cual existen los límites de éstas sumas cuando la norma de la partición tiende a cero, obteniendo así los valores exactos de estas magnitudes

$$M = \iint_R \delta(x, y) dA \quad \bar{x} = \frac{\iint_R x\delta(x, y) dA}{\iint_R \delta(x, y) dA} \quad \bar{y} = \frac{\iint_R y\delta(x, y) dA}{\iint_R \delta(x, y) dA}$$

Resumiendo:

Para una placa bidimensional R , que tiene una densidad de masa variable descrita por una función $\delta(x, y)$, la masa de la placa está dada por $M = \iint_R \delta(x, y) dA$

y las coordenadas del centro de masa son:

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x\delta(x, y) dA}{M} \quad \bar{y} = \frac{\iint_R y\delta(x, y) dA}{M}$$

Ejercicio 22

Hallen el centro de masa de una lámina delgada con densidad de masa

$$\delta(x, y) = y^2 + x + 1 \text{ cuya forma coincide con la región } R \text{ limitada por } x = y^2 \text{ y } x = 1.$$

Ejercicio 23

Hallen el centro de masa de una lámina delgada con densidad de masa

$$\delta(x, y) = 4 \text{ cuya forma coincide con la región } R \text{ limitada por } y = x^2 \text{ e } y = 3 - x^2.$$

Observación: Si la densidad es constante, el centro de masa es el *centroide*. En este caso, la posición del centro de masa depende de la forma del objeto y no del material con que está fabricado.

Ejercicio 24

a) Calculen el valor promedio de $f(x, y) = y$ sobre la región limitada por $y = x^2$ e $y = 4$. b) Comparen el valor promedio de f calculado en a) con la ordenada del centro de masa de una lámina con la misma forma que la de a) y densidad constante.

Cambio de variables en la integral doble

Recuerden que en la integral definida el cambio de variable $x = g(u)$, con $a = g(c)$ y

$$b = g(d) \text{ nos permite establecer que } \int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)du .$$

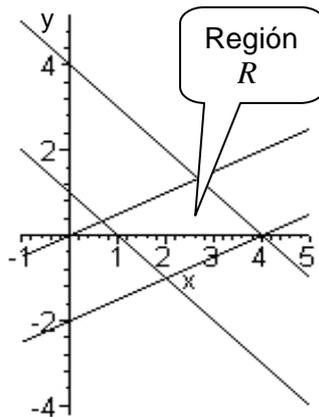
Noten que el cambio de variable introduce el factor adicional $g'(u)$ en el integrando.

¿Qué sucede en las integrales dobles? Les anticipamos que el cambio de variables en una integral doble introduce un factor llamado *Jacobiano* que definiremos luego.

Actividad 2

Traten de calcular, si pueden, la integral $\iint_R \left(\frac{x-2y}{x+y}\right)^{20} dA$ donde R es la región

limitada por las rectas $x-2y=0$, $x-2y=4$, $x+y=1$ y $x+y=4$.



¿Cuáles son las dificultades que encuentran?

Seguramente responderán: la forma de la región R y la expresión del integrando.

Observen que si llama u a $x+y$ y v a $x-2y$ la expresión del integrando queda más simple que la anterior .

En efecto: haciendo $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - 2y \end{cases}$ el integrando es $\left(\frac{v}{u}\right)^{20} = \frac{v^{20}}{u^{20}}$

En forma similar a lo realizado para integrales definidas, habrá que analizar:

- ¿Cuál es la región donde varían u y v ?
- ¿Cuál es la relación entre el diferencial de área en xy y el diferencial de área en uv ?

A partir de este planteo comencemos a formalizar algunos conceptos.

Un cambio de variables viene dado por una transformación T de una región S del plano uv en una región R del plano xy , de la forma

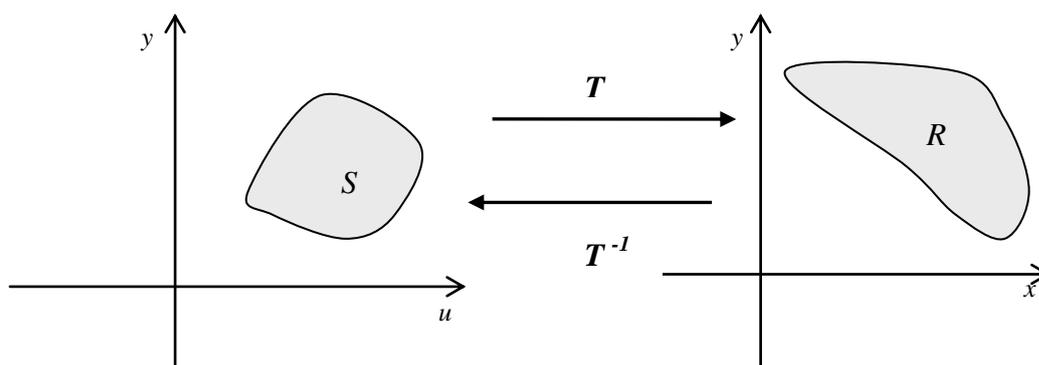
$$T(u, v) = (x, y) = (g(u, v), h(u, v))$$

donde cada punto (x, y) de R es imagen de un único punto (u, v) de S y g y h tienen derivadas parciales continuas en la región S .

T tiene inversa, $T^{-1}(x, y) = (u, v) = (U(x, y), V(x, y))$

Escribimos habitualmente:

$$T = \begin{cases} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in S \qquad T^{-1} = \begin{cases} u = U(x, y) \\ v = V(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \in R$$



Volvamos al ejemplo de la actividad 1:

$$T^{-1} = \begin{cases} u = x + y \\ v = x - 2y \end{cases} \quad (x, y) \in R \qquad T = \begin{cases} x = \frac{1}{3}(2u + v) \\ y = \frac{1}{3}(u - v) \end{cases} \quad (u, v) \in S$$

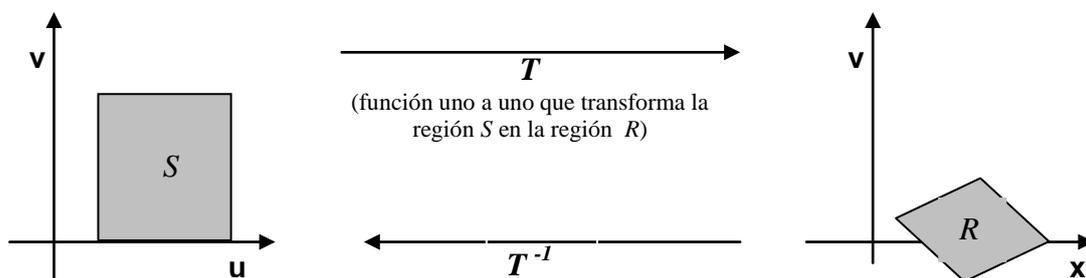
¿Cómo encontrar la región S ?

La región R está limitada por:

$$\begin{array}{ll} x + y = 1 & \Rightarrow u = 1 \\ x + y = 4 & \Rightarrow u = 4 \\ x - 2y = 0 & \Rightarrow v = 0 \\ x - 2y = 4 & \Rightarrow v = 4 \end{array}$$

La región S está limitada por:

Grafiquemos las regiones R y S :



(Noten que los vértices de S se transforman en los vértices de R)

¿Cuál es la relación entre el diferencial de área del plano xy y el diferencial de área del plano uv ?

Consideremos el caso en que S es un rectángulo del plano uv con vértices (u, v) , $(u + \Delta u, v)$, $(u, v + \Delta v)$ y $(u + \Delta u, v + \Delta v)$. Las imágenes de esos vértices en el plano xy son los puntos M , Q , P y N . Si Δu y Δv son pequeños, hacen que R sea aproximadamente un paralelogramo determinado por los vectores \vec{MN} y \vec{MQ}

El área del paralelogramo determinado por los vectores \vec{MN} y \vec{MQ} es el módulo del *producto cruz* de esos vectores. Haremos un paréntesis, para referirnos a esta operación.

El **producto cruz** (o producto vectorial) de dos vectores $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ es el vector $\vec{a} \times \vec{b} = \langle a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1 \rangle$

Definido de esta manera (que por cierto parece muy extraña) el producto cruz tiene varias propiedades útiles. Para que la definición sea más fácil de recordar usamos la notación de *determinantes*:

Determinante de orden 2 (o determinante 2x2)

}

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Determinante de orden 3 (o determinante 3x3)

}

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Observen:

- $\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$ es el determinante 2x2 que se obtiene al suprimir en $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ la fila y la columna de a
- $\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$ es el determinante 2x2 que se obtiene al suprimir en $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ la fila y la columna de b
- $\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$ es el determinante 2x2 que se obtiene al suprimir en $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ la fila y la columna de c

Noten también el signo menos en el segundo término del desarrollo.

Usando determinantes podemos escribir:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1 \rangle = \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} = \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

La fórmula simbólica $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ es la manera más sencilla de recordar y

calcular el producto cruz de $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$.

Calculemos a manera de ejemplo $\vec{a} \times \vec{b}$ siendo $\vec{a} = \langle 1, 2, -1 \rangle$ y $\vec{b} = \langle 2, -3, 4 \rangle$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \vec{k} = \\ &= (2 \cdot 4 - (-3)(-1))\vec{i} - (1 \cdot 4 - 2 \cdot (-1))\vec{j} + (1 \cdot (-3) - 2 \cdot 2)\vec{k} = \\ &= (8 - 3)\vec{i} - (4 + 2)\vec{j} + (-3 - 4)\vec{k} = 5\vec{i} - 6\vec{j} - 7\vec{k} = \langle 5, -6, 7 \rangle \end{aligned}$$

Observación: Si $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\vec{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, $\vec{a} \times \vec{b}$ es el producto cruz de los vectores tridimensionales $\vec{a} = \langle a_1, a_2, 0 \rangle$ y $\vec{b} = \langle b_1, b_2, 0 \rangle$

Propiedades del producto cruz

1. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

En efecto, siendo $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$,

$$\vec{a} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \vec{k} = 0\vec{i} - 0\vec{j} - 0\vec{k} = \vec{0}$$

2. $\vec{a} \times \vec{b}$ es ortogonal a \vec{a} y a \vec{b}

Verifiquenlo calculando $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}$ y $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b}$ y observando que en ambos casos el resultado es 0. Completen luego los siguientes ejemplos:

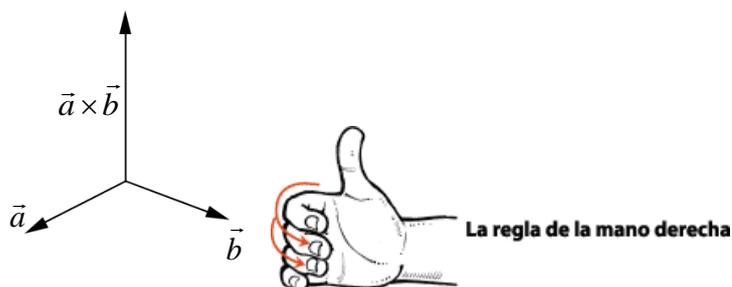
Consideren los siguientes ejemplos:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \dots\dots\dots$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = \dots\dots\dots$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = \dots\dots\dots$$

La propiedad 2. está diciendo que el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular al plano determinado por \vec{a} y \vec{b} . El sentido en el que apunta puede determinarse usando la *regla de la mano derecha*: si se colocan los dedos (todos menos el pulgar) apuntando en la dirección de \vec{a} y los gira barriendo el ángulo agudo desde \vec{a} hasta \vec{b} , el pulgar apuntará en la dirección de $\vec{a} \times \vec{b}$.



3. Si θ es el ángulo entre \vec{a} y \vec{b} ($0 \leq \theta \leq \pi$), $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \operatorname{sen} \theta$

Pueden comprobarlo calculando:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 =$$

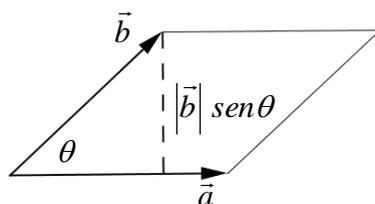
$$= |\vec{a}| |\vec{b}| - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \theta = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \theta) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

Se tiene entonces que $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \operatorname{sen}^2 \theta$ y, teniendo en cuenta que $\sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta} = \operatorname{sen} \theta$

ya que $\operatorname{sen} \theta \geq 0$ pues $0 \leq \theta \leq \pi$, $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \operatorname{sen} \theta$

Ahora podemos afirmar:

El módulo del vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es igual al área del paralelogramo determinado por \vec{a} y \vec{b} .



Además, a partir de la igualdad $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \operatorname{sen} \theta$ se deduce que:

Dos vectores no nulos \vec{a} y \vec{b} son paralelos si y sólo si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

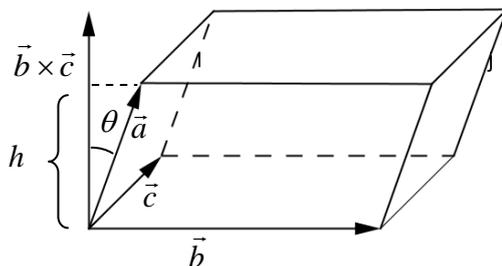
Las propiedades vistas nos permiten dar una caracterización geométrica completa del vector $\vec{a} \times \vec{b}$:

$\vec{a} \times \vec{b}$ es el vector que es perpendicular a \vec{a} y a \vec{b} , cuyo sentido está determinada por la regla de la mano derecha y cuyo módulo es igual al área del paralelogramo determinado por \vec{a} y \vec{b} .

El producto cruz no cumple con todas las propiedades que cabe esperar de un producto. Habrán observado ya que no es conmutativo ($\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \neq -\vec{k} = \vec{j} \times \vec{i}$), además, no es asociativo pues, en general, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ como lo muestra el siguiente ejemplo: $(\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{j} = \vec{0} \times \vec{j} = \vec{0}$ mientras que $\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j}) = \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$. Sin embargo, valen además de las vistas, algunas propiedades que enunciaremos a continuación y que pueden demostrarse de manera más o menos sencilla escribiendo los vectores en términos de sus componentes y usando las definiciones de las operaciones correspondientes

- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
- $(c \vec{a}) \times \vec{b} = c(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (c \vec{b})$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$
- $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

Además ...



El volumen del paralelepípedo de la figura es igual al área de la base ($|\vec{b} \times \vec{c}|$) por la altura (h)

Por otro lado, $h = |\vec{a}| \cos \theta$ donde θ es el ángulo entre $(\vec{b} \times \vec{c})$ y \vec{a}

Entonces: $Volumen\ del\ paralelepípedo = |\vec{b} \times \vec{c}| |\vec{a}| |\cos \theta| = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$

Retomamos ahora el estudio del cambio de variables en la integral doble.

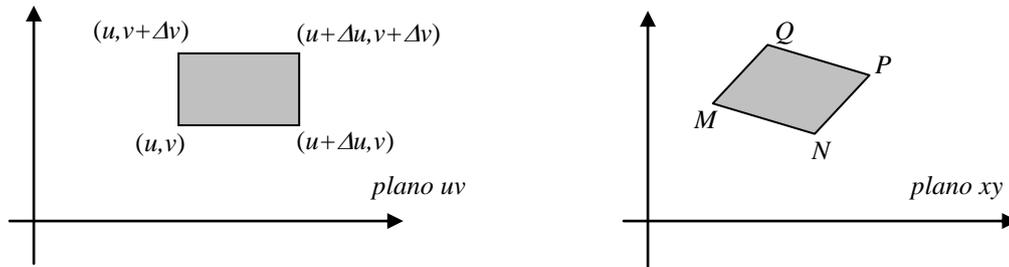
Nos preguntábamos, frente a un cambio de variables dado por $T = \begin{cases} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in S$

con $T^{-1} = \begin{cases} u = U(x, y) \\ v = V(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \in R$, cuál es la relación entre un diferencial de área del

plano xy y un diferencial de área del plano uv , y dijimos que: si S es un rectángulo del plano uv con vértices (u, v) , $(u + \Delta u, v)$, $(u, v + \Delta v)$ y $(u + \Delta u, v + \Delta v)$, las imágenes de

esos vértices en el plano xy son los puntos M , Q , P y N y , siendo Δu y Δv pequeños, R es aproximadamente un paralelogramo determinado por los vectores \vec{MN} y \vec{MQ} . De modo que:

$$\Delta R = \text{área de } R \approx \|\vec{MN} \times \vec{MQ}\|$$



Si Δu y Δv son pequeños las derivadas parciales de g y h con respecto a u pueden aproximarse por

$$g_u(u, v) \approx \frac{g(u + \Delta u, v) - g(u, v)}{\Delta u} \quad \text{y} \quad h_u(u, v) \approx \frac{h(u + \Delta u, v) - h(u, v)}{\Delta u}$$

$$\begin{aligned} \text{En consecuencia, } \vec{MN} &= [g(u + \Delta u, v) - g(u, v)] \vec{i} + [h(u + \Delta u, v) - h(u, v)] \vec{j} \approx \\ &\approx [g_u(u, v) \Delta u] \vec{i} + [h_u(u, v) \Delta u] \vec{j} = \\ &= \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u \vec{j} \end{aligned}$$

y, análogamente, el vector \vec{MQ} se puede aproximar por $\frac{\partial x}{\partial v} \Delta v \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v \vec{j}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \vec{MN} \times \vec{MQ} &\approx \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v & \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u \\ \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v & \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v \end{vmatrix} \vec{k} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \Delta u \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v - \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u \right) \vec{k} = \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \Delta u \Delta v \vec{k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \Delta u \Delta v \vec{k} \\ \therefore \Delta R &\approx \|\vec{MN} \times \vec{MQ}\| \approx \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right| \Delta u \Delta v \quad (1) \end{aligned}$$

Definición de Jacobiano

Si $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$, el Jacobiano de x, y respecto de u, v es:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}$$

El nombre Jacobiano se debe al matemático alemán Carl Gustav Jacobi (1804-1851), conocido por su contribución en distintas áreas de la matemática. El interés de Jacobi por la integral comenzó cuando pretendió calcular la longitud de la elipse.

Usando la definición de Jacobiano en (1) se tiene:

$$\Delta R \approx \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta S$$

Ahora estamos en condiciones de enunciar:

Cambio de variables en integrales dobles

Sean R y S regiones en los planos xy y uv relacionadas por las ecuaciones $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$, tales que cada punto en R es imagen de un único punto de S y sea f una función continua en R . Si g y h tienen derivadas parciales continuas en S y $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ es distinto de cero en S , entonces

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_S f(g(u, v), h(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Podemos por fin completar el cálculo de la integral de la actividad 2:

Siendo $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - 2y \end{cases}$ entonces $\begin{cases} x = \frac{1}{3}(2u + v) \\ y = \frac{1}{3}(u - v) \end{cases}$

y el jacobiano de x, y respecto u, v es en este caso :

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

Por lo tanto, siendo R la región limitada por las rectas $x - 2y = 0$, $x - 2y = 4$,
 $x + y = 1$ y $x + y = 4$,

$$\iint_R \left(\frac{x-2y}{x+y}\right)^{20} dA = \iint_S \left(\frac{v}{u}\right)^{20} \left| -\frac{1}{3} \right| dA = \frac{1}{3} \iint_S v^{20} u^{-20} dA$$

donde S es la región limitada por las rectas $u = 1$, $u = 4$, $v = 0$, $v = 4$. Podrán ustedes completar el cálculo de la última integral sin dificultad.

Actividad 3

Calculen el jacobiano de la transformación $T^{-1} = \begin{cases} u = x + y \\ v = x - 2y \end{cases} \quad (x, y) \in R$

y compárenlo con el Jacobiano de $T = \begin{cases} x = \frac{1}{3}(2u + v) \\ y = \frac{1}{3}(u - v) \end{cases} \quad (u, v) \in S$ ¿Qué observan?

La relación que existe entre los Jacobianos que han comparado se da también en otras transformaciones. Se puede demostrar que $J_{T^{-1}} = \frac{1}{J_T}$ siempre que $J_T \neq 0$.

Actividad 4

Las transformaciones $T = \begin{cases} x = \frac{1}{3}(2u + v) \\ y = \frac{1}{3}(u - v) \end{cases} \quad (u, v) \in S$ y $T^{-1} = \begin{cases} u = x + y \\ v = x - 2y \end{cases} \quad (x, y) \in R$

de la actividad 2 son ejemplos de transformaciones *lineales*.

Una transformación lineal responde a la forma general: $\begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases}$

donde a, b, c, d son números reales tales que $ad - cb \neq 0$.

Verifiquen las siguientes propiedades de las transformaciones lineales:

i) El jacobiano es constante.

ii) Es una transformación uno a uno de una región S del plano uv en una región R del plano xy . Se puede encontrar la expresión de la transformación inversa.

iii) Si $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = 1$ entonces conserva el tamaño. En caso contrario, dilata o contrae la región.

Ejercicio 25

Calculen utilizando un cambio de variables adecuado $\iint_R (x-y)^9 (x+y)^8 dA$ siendo

$$R = \{(x, y) / x \geq y-1, y \geq x, x+y \geq 1, x+y \leq 2\}.$$

Ejercicio 26

Calculen el área de la región R usando un cambio de variables adecuado para los casos siguientes:

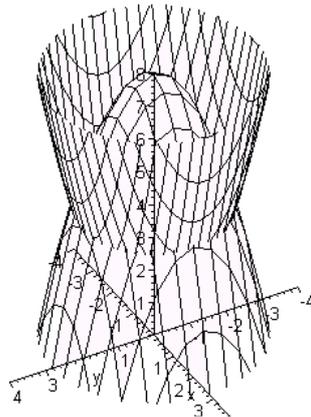
- a) R limitada por $y=4x+2$, $y=4x+5$, $y=3-2x$, $y=1-2x$
 b) R limitada por $y=e^x$, $y=e^x+1$, $y=3-e^x$, $y=5-e^x$

Actividad 5

Plantear la integral que permite calcular el volumen del sólido, limitado por

$$z = x^2 + y^2 \text{ y } 8 - z = x^2 + y^2.$$

- a) En primer lugar tratemos de “visualizar” el sólido: las superficies limitantes son paraboloides circulares de eje z . Uno de ellos tiene vértice en el origen y está orientado hacia z^+ . El otro tiene vértice en el punto $(0,0,8)$ y está orientado hacia z^- .



- b) La región de integración R , tiene por frontera la proyección de la curva intersección de ambas superficies. Recordemos que la representación analítica de la curva intersección de ambas superficies debe darse por medio del sistema:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ 8 - z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Eliminando z entre ambas ecuaciones se obtiene una ecuación en x e y que representa un

cilindro recto que contiene a la curva y la proyecta como tal, sobre el plano xy :

$$x^2 + y^2 = 4$$

En consecuencia la región es el círculo $R = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 4\}$

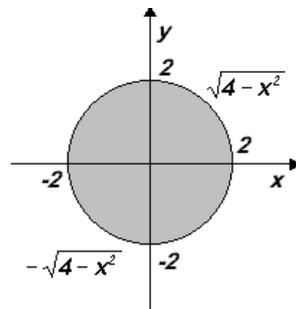
c) Para describir el sólido, observamos los valores de cota que se obtienen al trazar por cada punto de R , una recta paralela al eje z . En este caso la cota mínima se obtiene al intersecar el paraboloides $z = x^2 + y^2$, y la máxima se logra en $8 - z = x^2 + y^2$.

$$V = \{(x, y, z) / (x, y) \in R \wedge x^2 + y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2\}$$

$$\text{vol}(V) = \iint_R (8 - x^2 - y^2 - x^2 - y^2) dA = \iint_R 8 - 2(x^2 + y^2) dA$$

Considerando R como tipo I (también es de tipo II) se tiene:

$$R = \{(x, y) / -2 \leq x \leq 2 \wedge -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$$



y entonces:
$$\text{vol}(V) = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 8 - 2(x^2 + y^2) dy dx$$

¿Les parece que podrían resolver esa integral?

Es cierto que podríamos simplificar la expresión del volumen observando la simetría

del sólido respecto a los planos yz y xz :
$$\text{vol}(V) = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} 8 - 2(x^2 + y^2) dy dx$$
 pero la

integral sigue presentando ciertas dificultades debido a la presencia de una raíz cuadrada. (Al buscar una primitiva con respecto a la variable y , y aplicar la regla de

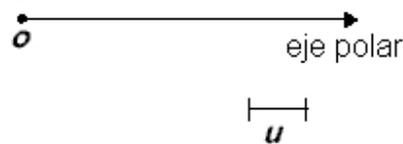
Barrow, quedan términos en $\sqrt{4-x^2}$, que requieren para su integración un cambio de variables (sustitución trigonométrica ¿recuerdan?).

¿Podría intentarse un cambio de variables que involucre simultáneamente a x e y , de forma tal que la integral iterada resulte más sencilla?

¿Cuál es la región más adecuada para resolver una integral doble? Obviamente un rectángulo; pero la región que tenemos es un círculo, ¿puede un círculo “verse” como un rectángulo? La pregunta parece descabellada, pero les respondemos que..... SI !

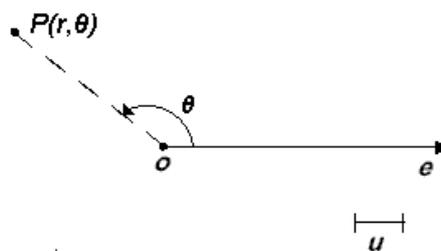
Sistema de coordenadas polares en el plano

Se define a partir de un punto O llamado polo, una semirrecta horizontal con origen en el polo, llamada eje polar y una unidad de medida u , que permitirá calcular distancias en el plano.



Cualquier punto P del plano, puede individualizarse en este sistema por medio de su distancia al polo (longitud del segmento \overline{OP}) y la medida del ángulo que este segmento forma con el eje polar.

Es decir:



De esta manera el par (r, θ) describe la posición de un único punto del plano $P \neq O$.

Llamaremos coordenadas polares de P , al par (r, θ) que lo identifica en ese sistema.

Indicaremos $P(r, \theta)$ al punto de coordenadas polares (r, θ) .

De acuerdo con la convención adoptada:

- $r > 0$ para todo punto que no sea el polo y $r = 0$ exclusivamente para el polo.
- el ángulo θ (llamado ángulo polar) varía en $[0, 2\pi)$.
- todos los pares de la forma $(0, \theta)$ identifican al polo.

Observación: En el sistema cartesiano, la correspondencia punto, par es biunívoca: “cada punto del plano queda identificado con un único par ordenado de números reales (x, y) y recíprocamente” En el sistema polar esto también es válido, salvo para el polo.

Ejercicio 27

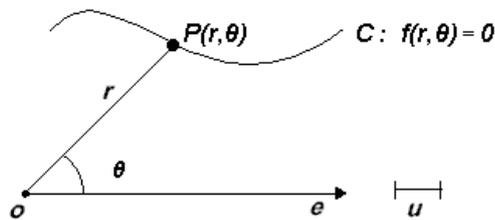
Grafiquen en un sistema polar, los puntos: $A(2, \pi/3)$; $B(3, 3\pi/4)$; $C(4, 3\pi/2)$; $D(4, 0)$

Indicación : Conviene trazar en 1º lugar el lado terminal del ángulo indicado para la 2º componente del par, medido desde el eje polar, con sentido antihorario y sobre esa semirrecta transportar tantas unidades de medida como indique la 1º componente.

Ecuaciones polares

Si C es un lugar geométrico del plano, su ecuación referida al sistema de coordenadas polares, es una ecuación de dos variables ¿qué variables? r y θ

Es decir, $C : f(r, \theta) = 0$

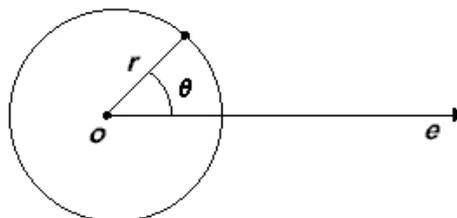


$$\therefore P_0(r_0, \theta_0) \in C \Leftrightarrow f(r_0, \theta_0) = 0$$

Veamos algunos ejemplos

1) Circunferencia con centro en el polo y radio a .

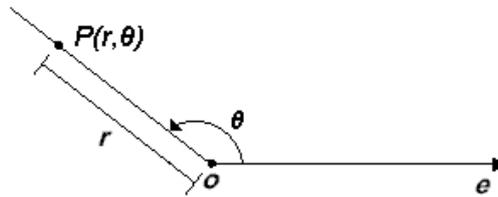
Sabemos que los puntos de una circunferencia se encuentran a distancia constante del punto llamado centro y esa distancia medida es el radio.



Entonces: $P(r, \theta) \in C \Leftrightarrow r = a$, cualquiera sea θ .

Por lo tanto $r = a$ es la ecuación en coordenadas polares de la circunferencia propuesta.

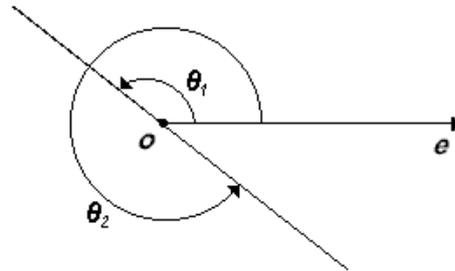
2) Semirrecta que tiene su origen en el polo y que forma un ángulo θ con el eje polar



Todo punto $P(r, \theta)$ de la misma, cualquiera sea r , debe ser tal que $\theta = \theta_1$, (¿por qué?)

La ecuación de esa semirrecta es entonces $\theta = \theta_1$

¿Cuál sería la ecuación de su prolongación a partir del polo?



Sería $\theta = \theta_2$ con $\theta_2 = \theta + \pi$ Podría haber sido también $\theta_2 = \theta - \pi$ (¿en qué caso?)

Como conclusión podemos establecer que:

3) si l es una recta que pasa por el polo, las dos semirrectas que la forman quedaran identificadas por las ecuaciones $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$ respectivamente y en consecuencia la recta puede darse por la ecuación $(\theta - \theta_1)(\theta - \theta_2) = 0$.

Ejercicio 28

Grafiquen las curvas cuyas ecuaciones polares son $r = 1$; $r = 2$; $r = 4$.

Ejercicio 29

Grafiquen las curvas cuyas ecuaciones polares son $\theta = \pi/4$; $\theta = 7\pi/6$; $\theta = 3\pi/2$; $\theta = 0$ y escriban las ecuaciones polares de sus respectivas prolongaciones.

Graficas de curvas en el sistema polar

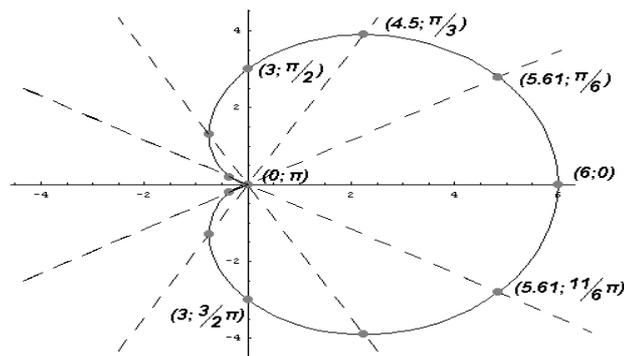
Ejemplo 10

Graficar la ecuación $r = 3(1 + \cos \theta)$

Asignando valores a θ y calculando los correspondientes r por medio de la ecuación, obtenemos puntos que al unirse forman la gráfica pedida. Tomando para θ valores entre 0 y 2π podemos construir la siguiente tabla:

θ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$11\pi/6$	2π
$\cos \theta$	1	0.87	0.5	0	-0.5	-0.87	-1	-0.87	-0.5	0	0.5	0.87	1
r	6	5.61	4.5	3	1.5	0.39	0	0.39	1.5	3	4.5	5.61	6

Representando estos puntos en el sistema polar, se tiene la siguiente gráfica:



Esta curva es llamada “cardioide” y es un caso particular de una de las siguientes ecuaciones: (con $a > 0$):

- 1) $r = a(1 + \cos \theta)$
- 2) $r = a(1 - \cos \theta)$
- 3) $r = a(1 + \sin \theta)$
- 4) $r = a(1 - \sin \theta)$

Como vemos responde a la forma 1) con $a = 3$. Estas cuatro ecuaciones representan cardioides con gráficas similares pero orientadas en forma diferente.

Ejercicio 30

Analicen para cada uno de los casos del ejemplo anterior la gráfica correspondiente.

Comentario Hay muchas curvas del plano que necesariamente deben darse por medio de una ecuación polar, ya que su ecuación cartesiana resulta muy complicada.

Uso de Mapple

Con los comandos que se muestran a continuación podrán graficar curvas dadas coordenadas polares usando Maple.

> *with(plots):*

> $r:=1;$ (ecuación de una circunferencia de radio 1)

> *plot([r, t, t=0..2*Pi], coords=polar);*

> $r:=2*\sin(t);$ (ecuación de una circunferencia de radio 1)

> *plot([r, t, t=0..2*Pi], coords=polar);*

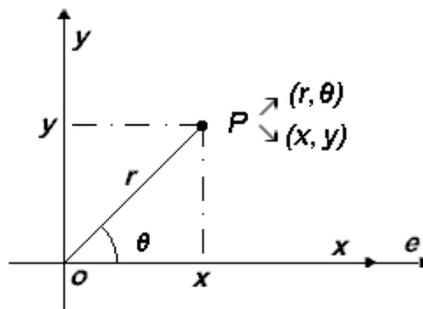
> $r:=1/(1-\cos(t));$ (ecuación de una parábola)

> *plot([r, t, t=0..2*Pi], coords=polar);*

Relación entre coordenadas polares y coordenadas cartesianas de un punto

Dado P en el plano, con coordenadas (x,y) y (r,θ) en un sistema cartesiano y un sistema polar respectivamente ¿Qué relación hay entre esas coordenadas?

Supongamos que el sistema de coordenadas cartesianas ortogonales y el sistema polar, se colocan en el plano de tal manera que el polo coincide con el origen del sistema cartesiano y el eje polar, con la parte positiva del eje x .



De inmediato se establece que
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (1)$$

Este par de ecuaciones permite pasar del sistema polar al sistema cartesiano.

Ejemplo 11

Si $(4, \pi/3)$ son las coordenadas polares de A ¿Cuáles son sus coordenadas cartesianas?

Basta con remplazar en (1):
$$\begin{cases} x = 4 \cos \pi/3 = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \\ y = 4 \sin \pi/3 = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

∴ $(2, 2\sqrt{3})$ son las coordenadas de ese punto en el sistema cartesiano.

¿Y si conocemos las coordenadas cartesianas de un punto? ¿cómo obtenemos las polares?

Del sistema (1) obtenemos:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

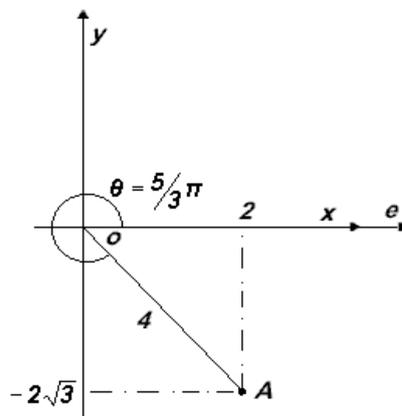
Además, $\text{si } x = 0 \text{ e } y > 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ y $\text{si } x = 0 \text{ e } y < 0 \rightarrow \theta = \frac{3}{2}\pi$

Para $x \neq 0$ debe tenerse en cuenta que de acuerdo con la variación que convenimos para θ (entre 0 y 2π) vamos a tener dos ángulos para cada valor de $\operatorname{tg} \theta$. ¿Cómo decidimos cuál es el que corresponde? Simplemente teniendo en cuenta los signos que acompañan a x e y .

Ejemplo 12 Si $(2, -2\sqrt{3})$ son las coordenadas cartesianas del punto A, hallar sus coordenadas polares.

$$\begin{cases} r = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4 \\ \operatorname{tg} \theta = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Hay dos ángulos entre 0 y 2π cuya tangente es $-\sqrt{3}$: uno es $\frac{2\pi}{3}$ (del segundo cuadrante) y el otro es $\frac{5\pi}{3}$ (del cuarto cuadrante). Como A tiene abscisa positiva y ordenada negativa, es un punto del 4^{to} cuadrante y el correspondiente valor de θ es entonces $\frac{5\pi}{3}$. Las coordenadas polares de A son $(4, \frac{5}{3}\pi)$.



Así como podemos transformar las coordenadas de un punto de uno a otro sistema, también podemos transformar ecuaciones de lugares geométricos.

A partir de la ecuación cartesiana $f(x, y) = 0$ de una curva, obtenemos la ecuación polar reemplazando x por $r \cos \theta$ e y por $r \operatorname{sen} \theta$ en esa ecuación.

$$\begin{array}{ccc} \text{Ecuación en coordenadas cartesianas} & & \text{Ecuación en coordenadas polares} \\ f(x, y) = 0 & \rightarrow & f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) = 0 \end{array}$$

Ejemplo 13

Escribir la ecuación polar de la circunferencia $x^2 + (y - 2)^2 = 4$

$$x^2 + (y - 2)^2 = 4 \rightarrow x^2 + y^2 - 4y = 0 \rightarrow (r \cos \theta)^2 + (r \operatorname{sen} \theta)^2 - 4r \operatorname{sen} \theta = 0$$

$$r^2(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) - 4r \operatorname{sen} \theta = 0 \rightarrow r^2 = 4r \operatorname{sen} \theta \rightarrow r = 4 \operatorname{sen} \theta$$

$\therefore r = 4 \operatorname{sen} \theta$ es la ecuación polar de la circunferencia dada.

Para obtener la ecuación cartesiana, conociendo la ecuación polar de una curva, basta con relacionar los términos de la misma con las ecuaciones (1).

Ejemplo 14

Escribir la ecuación cartesiana de la curva cuya ecuación polar es $r = 4 \cos \theta$

$$r = 4 \cos \theta \rightarrow r^2 = 4r \cos \theta \rightarrow x^2 + y^2 = 4x \rightarrow x^2 + y^2 - 4x = 0$$

Completando cuadrados, la ecuación obtenida puede escribirse también en la forma $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ que vemos que corresponde a la circunferencia con centro $C(2, 0)$ y radio 2.

Ejercicio 31

Hallen las coordenadas cartesianas de los siguientes puntos dados por sus coordenadas polares: $A(4, \frac{\pi}{4})$; $B(4, \frac{5\pi}{4})$; $C(5, \frac{4\pi}{3})$; $D(4, \pi)$; $E(5, \frac{\pi}{2})$; $F(3, 0)$

Ejercicio 32

Hallen las coordenadas polares de cada uno de los puntos, cuyas coordenadas cartesianas se dan: $A(-2\sqrt{3}; 2)$; $B(-4; 4)$; $C(0; -2)$; $D(5; -5\sqrt{3})$; $E(-\sqrt{3}; -1)$

Ejercicio 33

Grafiquen en un sistema de coordenadas polares las siguientes curvas y den sus ecuaciones cartesianas: a) $r = 5$ b) $\theta = \frac{\pi}{3}$ c) $r = 6 \operatorname{sen} \theta$ d) $r = 8 \cos \theta$

e) $r \operatorname{sen} \theta = 4$ f) $r \cos \theta = -2$ g) $r^2 = 9 \cos 2\theta$

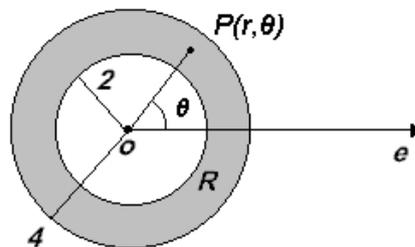
Ejercicio 34

Den la ecuación polar de cada una de las siguientes curvas:

a) $y^2 = 6x$ b) $xy = 10$ c) $2x + 4y - 5 = 0$ d) $x^2 - y^2 = a^2$

Descripción de regiones en el sistema polar

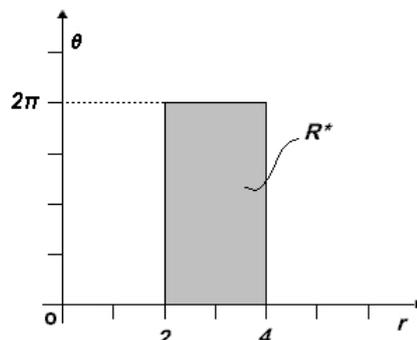
Supongamos tener una región limitada por las circunferencias centradas en el polo, con radios 2 y 4 respectivamente:



Piensen en un punto cualquiera $P(r, \theta)$ de la región R (**corona circular**): θ podrá tener cualquier valor entre 0 y 2π y el valor de r está entre 2 y 4. Una descripción adecuada en el sistema polar sería:

$$R = \{(r, \theta) / 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 2 \leq r \leq 4\}$$

Es decir que tendríamos tanto para r como para θ , una variación en intervalos con extremos fijos, lo que nos induciría a pensar que R en el sistema polar se comporta como un rectángulo. ¿es R un rectángulo? Claro que no, pero si imaginamos el sistema polar representado por un par de ejes perpendiculares – tal como el sistema cartesiano – representando en el eje horizontal los valores de r y en el vertical los valores de θ tendríamos una “imagen” de R , tal como si fuera un rectángulo:

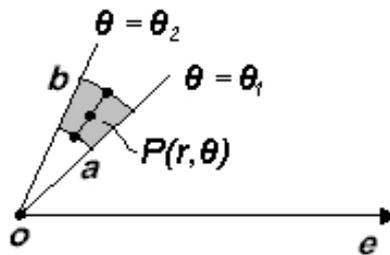


Les comentamos que la corona circular R es la imagen del rectángulo R^* , por medio de la transformación que se produce en el plano, al aplicar las ecuaciones
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Podemos enfatizar que la región no cambia pero al cambiar el sistema de referencia (cambiando el sistema de coordenadas) la misma se ve de diferente manera en uno y otro sistema.

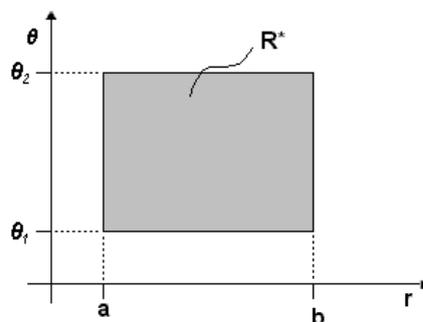
Ejemplo 15

Sea R la región limitada por dos circunferencias centradas en el polo con radios a y b ($a < b$) respectivamente y dos semirrectas pasando por el polo: $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$ con $\theta_1 < \theta_2$. Describir la región en el sistema polar e interpretar su forma en el sistema cartesiano xy .



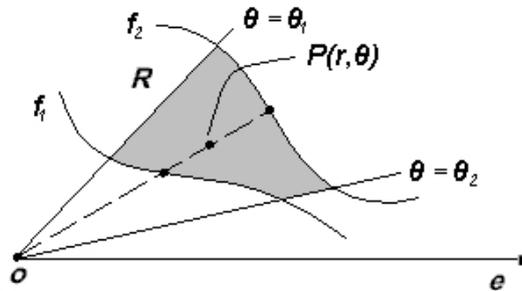
R es un *trapezio circular* (también llamado *rectángulo polar*).

Su descripción en el sistema polar es $R = \{(r, \theta) / \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \wedge a \leq r \leq b\}$ y en un sistema ortogonal $r\theta$ se ve como un rectángulo.

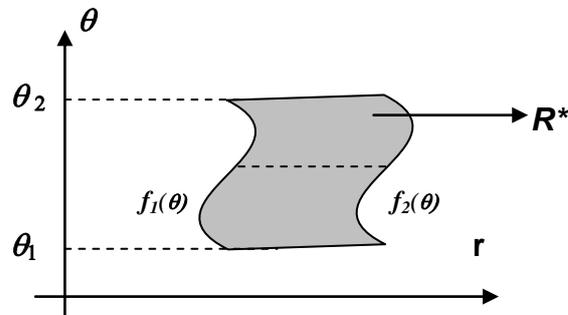


En general si se tienen dos curvas, con ecuaciones polares $r = f_1(\theta)$ y $r = f_2(\theta)$ con

$f_1(\theta) \leq f_2(\theta)$ y dos semirrectas $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$ con $\theta_1 \leq \theta_2$, la región limitada por ellas en el sistema polar es: $R = \{(r, \theta) / \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \wedge f_1(\theta) \leq r \leq f_2(\theta)\}$



En el sistema ortogonal $r\theta$ resulta:



R se comporta como una región del tipo II en ese sistema.*

Ejercicio 35

Grafiquen la región R del plano xy limitada por $x^2 + y^2 = 4$ y las semirrectas $y = x$ e $y = -x$ (con $y \geq 0$). Describan R en coordenadas polares. Interpreten R en un sistema ortogonal $r\theta$.

Ejercicio 36

Grafiquen cada una de las regiones R del plano xy que se dan a continuación y describanlas luego en coordenadas polares.

a) R es la región del plano xy limitada por $x^2 + y^2 = 4$, $y = 4$ y las semirrectas

$$y = -\sqrt{3}x \text{ e } y = \sqrt{3}x \text{ con } y \geq 0.$$

b) R es la región del plano xy limitada por $x^2 + y^2 = 4$ con $y \geq 1$.

c) R es círculo limitado por $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

d) R es círculo limitado por $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

e) R es la región del plano xy limitada por las circunferencias $x^2 + y^2 - 4y = 0$ y $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

f) R es la región del plano xy intersección de las regiones $x^2 + y^2 \geq 4$ y $x^2 + (y - 2)^2 \leq 4$.

Cálculo de la integral doble en coordenadas polares

Hemos estudiado:

- Las ecuaciones polares y gráfica de curvas en sistema polar.
- La relación entre las coordenadas polares y las cartesianas en un punto.
- Cómo escribir en coordenadas polares una ecuación dada en coordenadas cartesianas
- Cómo describir una región del plano en coordenadas polares conociendo la región en coordenadas cartesianas.

Veremos ahora cómo calcular la integral doble sobre R de una función $f(x, y)$ haciendo el cambio de variables a coordenadas polares.

Dada $\iint_R f(x, y) dA$ (f es una función continua en R , región cerrada y acotada del plano),

consideremos la transformación $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases}$ con la que $(r, \theta) \in R^*$ se transforma en

$(x, y) \in R$ o sea, la región R^* del plano $r\theta$ se transforma en la región R del plano xy . El

Jacobiano de esta transformación es:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \operatorname{sen}^2 \theta = r$$

y se tiene:

$$\iint_R f(x, y) dA_{xy} = \iint_{R^*} f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} dA_{r\theta} = \iint_{R^*} f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) r dA_{r\theta}$$

Si $R = \{(r, \theta) / \alpha \leq \theta \leq \beta \wedge f_1(\theta) \leq r \leq f_2(\theta)\}$ entonces

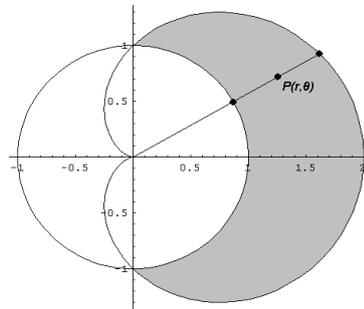
$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta$$

Ejemplo 16

Sea R la región formada por puntos interiores a la cardioide $r = 1 + \cos \theta$ y exteriores a la circunferencia $r = 1$. Plantear el cálculo de $\iint_R f(x, y) dA$ usando coordenadas polares.

Para plantear la integral haciendo un cambio de variables a coordenadas polares es esencial poder describir la región en esas coordenadas:

Tomando un punto genérico $P(r, \theta)$, al unirlo con el polo, debe quedar en claro cual es, para cada θ , el r mínimo y el r máximo. Asimismo, debe determinarse la variación de θ .



Los valores máximo y mínimo de θ pueden obtenerse resolviendo el sistema

$$\begin{cases} r = 1 + \cos \theta \\ r = 1 \end{cases}$$

Eliminando r entre ambas ecuaciones, se obtiene $\cos \theta = 0$. Esta ecuación tiene en el intervalo $[0, 2\pi]$ dos raíces: $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y $\beta = \frac{3\pi}{2}$.

Cada rayo trazado con ángulo θ , corta en primer lugar a la circunferencia y luego a la cardioide. Luego $1 \leq r \leq 1 + \cos \theta$ cuando θ varía entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$.

Aclaración: Observando la región vemos que para ser coherentes con la variación de θ , deberíamos integrar entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ y entre $\frac{3\pi}{2}$ y 2π . Pero numéricamente va a dar el mismo resultado que hacerlo entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ (Recuerden que $-\frac{\pi}{2}$ es la medida tomada en sentido antihorario del ángulo de medida positiva $\frac{3\pi}{2}$).

Resulta entonces:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{1+\cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

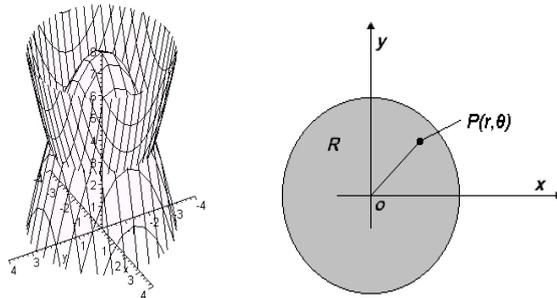
Ejemplo 17

Retornemos el problema planteado como motivación al estudio de coordenadas polares:

“Hallar el volumen del sólido limitado por $z = x^2 + y^2$ y $8 - z = x^2 + y^2$ ”

Habíamos logrado establecer que $vol(V) = \iint_R 8 - 2(x^2 + y^2) dA$

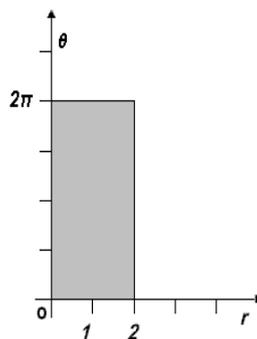
siendo $R = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 4\}$ (círculo con centro en O y radio 2)



Si consideramos ahora el sistema polar superpuesto con el cartesiano se puede ver que:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{y} \quad 0 \leq r \leq 2$$

$\therefore R^* = \{(r, \theta) / 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq r \leq 2\}$ (que en el sistema ortogonal $r\theta$ representa un rectángulo)



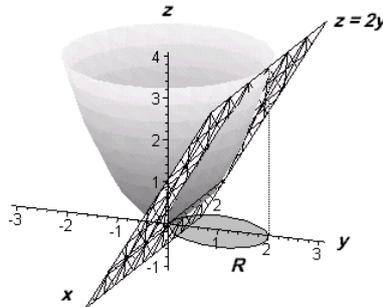
Completamos entonces el cálculo de la integral:

$$vol(V) = \iint_R 8 - 2(x^2 + y^2) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (8 - 2r^2) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(4r^2 - \frac{r^4}{2} \right) \Big|_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} 8 d\theta = 16\pi$$

Ejemplo 18

Calcular el volumen del sólido limitado por el paraboloides $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2y$.

a) Comenzamos haciendo un esquema gráfico.



b) Proyectamos el sólido sobre el plano xy :

Eliminando z entre las ecuaciones de las dos superficies se obtiene $x^2 + y^2 = 2y$

(¿Qué representa en el plano xy ?)

Observamos que el sólido se proyecta en la región R limitada por la circunferencia

$x^2 + (y - 1)^2 = 1$ en el plano xy y que el sólido se describe:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in R \wedge x^2 + y^2 \leq z \leq 2y\}$$

Por lo tanto, en coordenadas cartesianas $Vol(V) = \iint_R (2y - (x^2 + y^2)) dA_{xy}$

La forma de la región de integración y el integrando hacen que sea apropiado el cambio de variables a coordenadas polares:

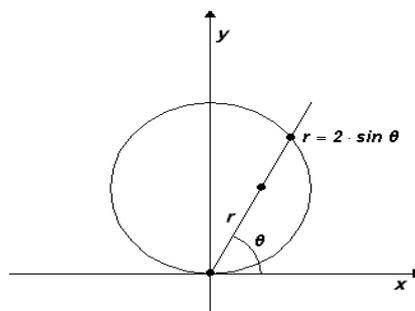
c) El integrando debe expresarse en coordenadas polares:

$$2y - (x^2 + y^2) \rightarrow 2r \sin \theta - r^2$$

La región de integración también debe describirse en coordenadas polares.

Para ello hallamos la ecuación polar de la curva frontera: $x^2 + y^2 = 2y \rightarrow r = 2 \sin \theta$

y observamos que la variación de θ está entre 0 y π



$$R^* = \{(r, \theta) / 0 \leq \theta \leq \pi \wedge 0 \leq r \leq 2 \operatorname{sen} \theta\}$$

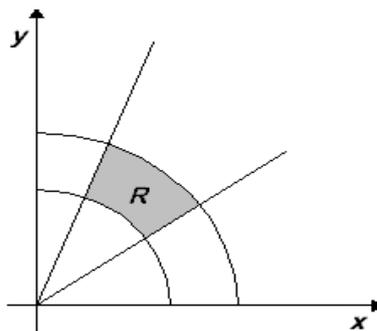
Entonces
$$\operatorname{Vol}(V) = \int_0^{\pi} \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} [2 r \operatorname{sen} \theta - r^2] r dr d\theta$$

d) Completen el cálculo de la integral.

Ejemplo 19

Calcular el área de la región plana limitada por: $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ e $y = \sqrt{3}x$ en el primer cuadrante.

a) Graficamos la región en el sistema cartesiano.



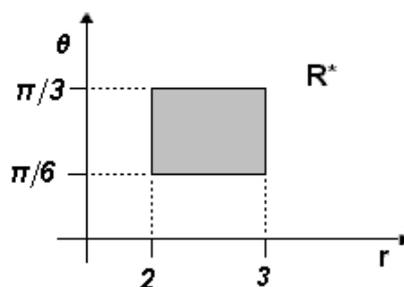
b) Hallamos las ecuaciones polares de las curvas que conforman la frontera:

$$x^2 + y^2 = 4 \rightarrow r = 2$$

$$x^2 + y^2 = 9 \rightarrow r = 3$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$y = \sqrt{3}x \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$



$$R^* = \left\{ (r, \theta) / \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \wedge 2 \leq r \leq 3 \right\}$$

c) Calculamos el área:

$$\text{Área}(R) = \iint_R dA = \iint_{R^*} r \, dr \, d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \int_2^3 r \, dr \, d\theta \quad (\text{completan el cálculo})$$

Resumimos a continuación el procedimiento para realizar el cambio de variables a coordenadas polares en una integral doble $\iint_R f(x, y) \, dA$

1. Sustituir x por $r \cos \theta$ e y por $r \operatorname{sen} \theta$ en la función y el elemento $dx dy$, empleado en la integración iterada en cartesianas, por $r \, dr \, d\theta$.
2. Obtener los límites polares de integración para la frontera de R .

Al describir R en coordenadas polares e interpretar luego el aspecto que presenta en un sistema ortogonal $r\theta$ (diferente al que muestra como R en el sistema cartesiano) podemos darle una denominación R^* , pero remarcando que la región formalmente no cambia, cambia el sistema de coordenadas y en consecuencia su descripción.

Sintetizando: $\iint_R f(x, y) \, dA = \iint_{R^*} f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) \, r \, dr \, d\theta$ donde R^* es la descripción

en coordenadas polares de la región R .

En particular: $\text{Área}(R) = \iint_R dA = \iint_{R^*} r \, dr \, d\theta$

Ejercicio 37

Grafiquen y calculen el área de las regiones indicadas a continuación.

- a) región limitada por las semirrectas $\theta = \frac{\pi}{4}$; $\theta = \frac{\pi}{2}$ e interior a $r = 4 \cos \theta$.
- b) región exterior a la circunferencia $r = 4$ e interior a $r = 8 \operatorname{sen} \theta$.
- c) región interior a $r = 1$ y exterior a la cardioide $r = 1 + \cos \theta$.
- d) región encerrada por la curva de ecuación $r^2 = 9 \cos 2\theta$ (lemniscata).
- e) región limitada por $r \operatorname{sen} \theta = 4$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ y $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Ejercicio 38

Calculen el volumen de los sólidos que se describen a continuación (En todos los casos hagan un esquema gráfico)

a) Sólido limitado por $x^2 + y^2 = 4$ entre $z = 0$ y $z = 4 - y$.

b) Esfera de radio a

c) Sólido limitado por $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ y $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Ejercicio 39

Calculen la masa de la placa metálica limitada por $x^2 + (y - 2)^2 = 4$; $y = x$; $y = -x$, $y = 8$ siendo la función densidad de masa $\delta(x, y) = x^2 + y^2$.

Ejercicio 40

Calculen $\iint_R e^{x^2+y^2} dA$ siendo R la corona circular limitada por $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$.

Ejercicio 41

Integren $f(x, y) = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ en la región $1 \leq x^2 + y^2 \leq e$.

Ejercicio 42

Hallen el valor promedio de $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ en el círculo $x^2 + y^2 \leq a^2$.

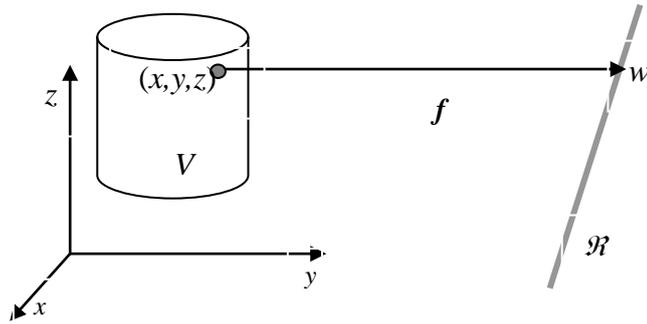
Ejercicio 43

Hallen el valor promedio de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ en el círculo $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Integrales triples

El proceso continúa: dividir, aproximar, integrar... ¿Qué elementos intervienen ahora?

- Un sólido V acotado, cuya frontera sea unión finita de superficies suaves unidas a lo largo de curvas suaves o suaves a trozos.
- Una función $w = f(x, y, z)$ definida sobre el sólido V , continua o a lo sumo con discontinuidades de tipo finito en un número finito de subconjuntos de V de volumen nulo (puntos, curvas, superficies)



Ya no podemos dibujar la gráfica de f .

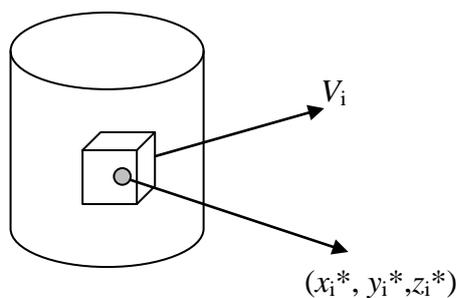
Suponiendo $f(x, y, z) \geq 0$ en cada punto de V , f podría interpretarse como una distribución de masa por unidad de volumen, o sea, f podría ser la densidad volumétrica de masa sobre V

El sólido acotado, puede considerarse contenido en un paralelepípedo rectángulo $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$. Trazando planos paralelos a los planos coordenados por puntos de $[a, b]$, de $[c, d]$ y de $[e, f]$, ese paralelepípedo queda dividido en un número finito de paralelepípedos V_i con volúmenes ΔV_i .

Si k es el número de paralelepípedos V_i contenidos en V , $\wp = \{V_1, V_2, V_3, \dots, V_k\}$ es una partición de V cuya norma $|\wp|$ es la máxima diagonal de los V_i .

Eligiendo un punto P_i^* en cada V_i calculamos $f(P_i^*) \cdot \Delta V_i = f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \Delta V_i$

y sumamos: $J_k = \sum_{i=1}^k f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \Delta V_i$



La integral triple de f sobre V que se denota $\iiint_V f(x, y, z) dV$ es el límite de J_k cuando $|\phi|$ tiende a cero, límite que existe y no depende de las particiones consideradas ni de los P_i^* elegidos.

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \lim_{|\phi| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(P_i^*) \Delta V_i$$

Observaciones

1) Si suponemos que $f(x, y, z) \geq 0$ en V es la función “densidad volumétrica de masa” entonces $f(P_i^*) \Delta V_i$ representa en forma aproximada la masa del paralelepípedo V_i

$$\therefore \text{masa}(V) \cong \sum_{i=1}^k f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta V_i$$

y en el límite se tiene: $\text{masa}(V) = \iiint_V f(x, y, z) dV$

2) Si $f(x, y, z) = 1$ en V entonces $\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_V 1 dV = \text{volumen}(V)$

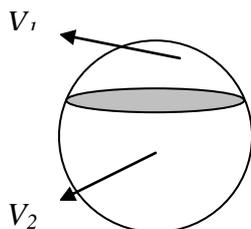
Propiedades de la integral triple

Las propiedades de la integral triple son las mismas que se dan para las integrales que ya estudiamos.

Propiedad 1 (Aditividad respecto al sólido de integración)

Si $V = V_1 \cup V_2$, siendo $V_1 \cap V_2$ vacío o, a lo sumo, igual a una superficie como muestra

la figura siguiente, entonces $\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_{V_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{V_2} f(x, y, z) dV$



$$V = V_1 \cup V_2$$

Propiedad 2 (Linealidad)

Si α y $\beta \in \mathbb{R}$ (constantes), entonces
$$\iiint_V (\alpha f + \beta g) dV = \alpha \iiint_V f dV + \beta \iiint_V g dV$$

Propiedad 3 (La integral triple preserva desigualdades):

Si $f \geq g$ en V entonces
$$\iiint_V f(x, y, z) dV \geq \iiint_V g(x, y, z) dV$$

En particular: si $f(x, y, z) \geq 0$ en V entonces
$$\iiint_V f(x, y, z) dV \geq 0.$$

Propiedad 4 (Propiedad de acotamiento):

Si $|f(x, y, z)| \leq M \quad \forall (x, y, z) \in V$ entonces
$$-M \text{ vol}(V) \leq \iiint_V f(x, y, z) dV \leq M \text{ vol}(V)$$

Teorema del valor medio (para integrales triples)

Si f es continua en $V \subset \mathbb{R}^3$ entonces existe $P^* \in V$ tal que
$$\iiint_V f(x, y, z) dV = f(P^*) \text{ vol}(V)$$

Observación: Se llama valor promedio de f en V al cociente
$$\frac{\iiint_V f(x, y, z) dV}{\text{vol}(V)}$$

El Teorema del valor medio afirma que, siendo f continua en V , el valor promedio de f en V coincide con el valor de f en algún punto $P^* \in V$

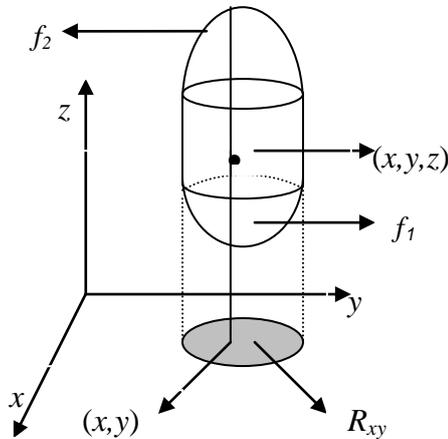
Cálculo de la integral triple

El cálculo se reduce a la generalización del teorema de Fubini a tres variables y tiene que ver con la descripción que pueda hacerse de V .

Sólido proyectable sobre el plano xy .

Un sólido V es proyectable sobre el plano xy si, al trazar una recta perpendicular al plano xy por cualquier punto interior a V , la frontera del mismo es cortada en dos puntos exactamente. Analíticamente, significa que existe una región R_{xy} en el plano xy y dos funciones continuas f_1 y f_2 que verifican $f_1(x, y) \leq f_2(x, y) \quad \forall (x, y) \in R_{xy}$ tales que:

$$V = \{(x, y, z) / (x, y) \in R_{xy} \wedge f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}$$



Si f es una función continua en V , ¿cómo se comporta f restringida al segmento $S(x, y) = \{(x, y, z) / f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}$ con x e y fijos?

Si f es continua en V , también lo es en $S(x, y) = \{(x, y, z) / f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}$

Si $A(x, y) = \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) dz$, integrando $A(x, y)$ en R_{xy} obtenemos el resultado de la integral triple de f en V :

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iint_{R_{xy}} A(x, y) dA_{xy} = \iint_{R_{xy}} \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) dz dA_{xy}$$

Este procedimiento indica que la integral triple se obtiene mediante integrales iteradas: en primer lugar se integra con respecto a z , luego se calcula la integral doble en xy , que a su vez, y de acuerdo con la descripción adecuada para R_{xy} , se resuelve, como ya sabemos, empleando integrales iteradas:

Si R_{xy} se describe como región tipo I, entonces la integral resulta:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

Si R_{xy} se describe como región tipo II, entonces

Ejercicio 44

Calculen cada una de las siguientes integrales, describan el sólido en el que se integra y hagan un esquema gráfico del mismo.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \int_1^2 \int_0^1 \int_2^4 x^2 y^2 z \, dz dy dx & \text{b) } \int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-y} x \, dz dy dx & \text{c) } \int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_{4-2x}^{4-x^2-y^2} dz dy dx
 \end{array}$$

Ejercicio 45

a) Describan teniendo en cuenta lo ya explicado, en que condiciones un sólido es proyectable sobre el plano xz . Grafiquen y planteen la integral iterada que da como resultado la integral triple. b) Idem, si V es proyectable sobre el plano yz .

Ejercicio 46

i) Comprueben que $\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^2 dx \, dy \, dz = \int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-z} dy \, dz \, dx$. ii) ¿Qué calculan con esta integral?

¿Puede graficar el sólido?

Ejercicio 47

Calculen el valor promedio de $f(x, y, z) = xyz$ en el cubo limitado por los planos coordenados y los planos $x = 2$, $y = 2$ y $z = 2$ en el primer octante.

Ejercicio 48

Describan el sólido limitado por las superficies dadas y calculen su volumen:

- a) $x + y + 2z = 2$ y $2x + 2y + z = 4$ en el primer octante.
- b) $z = 0$, $z = y^2$, $x = 0$, $x = 1$, $y = -1$ e $y = 1$.
- c) $x + z = 1$ e $y + 2z = 2$ en el primer octante.
- d) $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + z^2 = 1$ en el primer octante.
- e) $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ y $x + z = 3$.

Ejercicio 49

Hemos mencionado anteriormente que, si $\delta(x, y, z) \geq 0$ en V es la función “densidad volumétrica de masa”, la masa del sólido V es $M = \iiint_V \delta(x, y, z) dV$.

Agreguemos ahora que las *coordenadas del centro de masa*, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ se calculan en ese caso de la siguiente manera:

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x \delta(x, y, z) dV}{M} \quad \bar{y} = \frac{\iiint_V y \delta(x, y, z) dV}{M} \quad \bar{z} = \frac{\iiint_V z \delta(x, y, z) dV}{M}$$

- a) Hallen el centroide ($\delta(x, y, z)$ constante) del tetraedro de vértices $(0,0,0)$; $(1,0,0)$; $(0,1,0)$; $(0,0,1)$.
- b) Hallen la masa del sólido limitado por $x + y + z = 2$ y planos coordenados siendo la densidad $\delta(x, y, z) = 2x$

Cambio de variables en la integral triple

El cambio de variables está, como ya vimos, vinculado con el cambio del sistema de coordenadas. En el espacio, los sistemas de coordenadas más empleados – aparte del sistema cartesiano ortogonal – son: **el sistema de coordenadas cilíndricas y el sistema de coordenadas esféricas.**

La descripción de algunas superficies (en particular la de cilindros como $x^2 + y^2 = a^2$) y por ende, la de algunos sólidos que las tienen como frontera, se simplifica notablemente utilizando coordenadas cilíndricas. Las coordenadas esféricas, por su parte, permiten simplificar ecuaciones de esferas y conos, y describir de manera sencilla los sólidos limitados por ellos.

Necesitamos generalizar el teorema de cambio de variables que enunciamos para integrales dobles. Aclaremos previo a ello que:

el *Jacobiano* de la transformación $\begin{cases} x = g(u, v, t) \\ y = h(u, v, t) \\ z = l(u, v, t) \end{cases}$ es

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix} - \frac{\partial y}{\partial u} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix} + \frac{\partial z}{\partial u} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \dots$$

Cambio de variables en integrales triples

Sean V y V^* regiones del espacio xyz y uvt relacionadas por las ecuaciones

$$x = g(u, v, t), \quad y = h(u, v, t) \quad \text{y} \quad z = l(u, v, t)$$

tales que cada punto en V es imagen de un único punto de V^* . Si f es continua en V , g , h y l tienen derivadas parciales continuas en V^*

y si $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, t)}$ es distinto de cero en V^* entonces

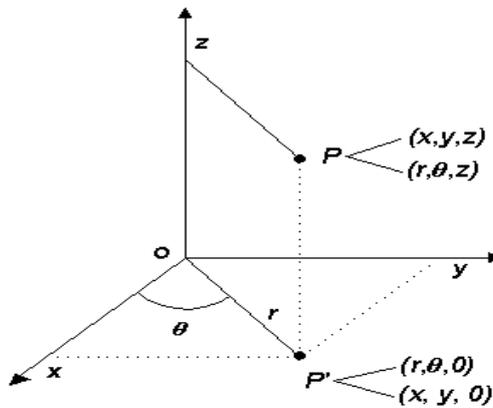
$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(g(u, v, t), h(u, v, t), l(u, v, t)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, t)} \right| du dv dt$$

Coordenadas cilíndricas

Se asigna a cada punto $P(x, y, z)$ del espacio la terna (r, θ, z) , donde (r, θ) son las coordenadas polares de la proyección P' del punto P y z es la coordenada original.

r, θ, z son las **coordenadas cilíndricas** del punto P y verifican: $r \geq 0$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$;

$z \in \mathbb{R}$



La relación entre ambas ternas esta dada por:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Observación: Es posible también ubicar el sistema polar en el plano xz y mantener la coordenada y original o ubicar el sistema polar en el plano yz y mantener la coordenada x original.

Ejercicio 50

De acuerdo con lo visto en el plano con el sistema de coordenadas polares y procediendo de forma análoga,

a) obtengan las coordenadas cartesianas de los puntos cuyas coordenadas cilíndricas se dan:

$$A(3, \frac{\pi}{3}, 4), \quad B(1, \frac{\pi}{6}, -3), \quad C(2, \frac{3\pi}{4}, 0), \quad D(2, \frac{5\pi}{6}, 3), \quad E(4, \frac{7\pi}{4}, 1)$$

b) obtengan las coordenadas cilíndricas de los puntos:

$$A(2, -2\sqrt{3}, 4), \quad B(1, -1, 2), \quad C(3\sqrt{3}, 3, -5)$$

c) hagan un esquema aproximado de las siguientes superficies y hallen sus ecuaciones cilíndricas

c1) $x^2 + y^2 = 4$

c2) $y = x$ con $x \geq 0, y \geq 0$

c3) $y = x$ con $x \leq 0, y \leq 0$

c4) $y = x\sqrt{3}$ con $x \geq 0, y \geq 0$ c5)

$x^2 + y^2 = z$

c6) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

c7) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

c8) $x^2 + (y - 3)^2 = 9$

d) identifiquen los conjuntos representados por las siguientes ecuaciones (e inecuaciones) cilíndricas. Grafiquen aproximadamente.

d1) $r = 0$ d2) $z = 0$ d3) $\theta = \frac{\pi}{3}$ d4) $\theta = 0$ d5) $\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$ d6) $2 \leq r \leq 3$

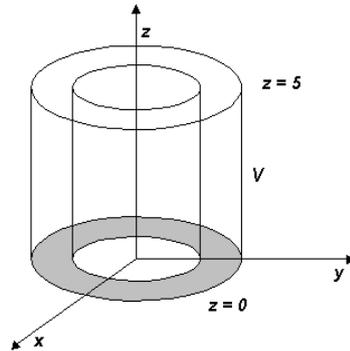
Descripción de sólidos en coordenadas cilíndricas

Si la frontera de un sólido V está dada por medio de ecuaciones cartesianas, al transformar las mismas al sistema cilíndrico, vamos a poder describirlo en términos de las variables r, θ, z . A su vez – como hicimos con las coordenadas polares – podemos

representar en un sistema ortogonal $r\theta z$ e interpretar la forma adoptada por el sólido que, si bien no cambia, se ve diferente en el nuevo sistema.

Ejemplo 20

Consideremos el sólido V limitado por $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$ y $z = 5$. La gráfica de V en el sistema $x y z$ se muestra a continuación.



Obtengamos las ecuaciones cilíndricas de la frontera:

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow r = 1$$

$$x^2 + y^2 = 9 \rightarrow r = 3$$

$$z = 0 \rightarrow z = 0$$

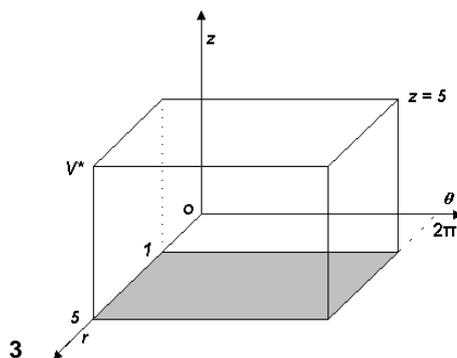
$$z = 5 \rightarrow z = 5$$

Observemos que θ varía entre 0 y 2π .

El sólido descrito en coordenadas cilíndricas es:

$$V^* = \{(r, \theta, z) / 1 \leq r \leq 3 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq z \leq 5\}$$

Podemos ver que en un sistema ortogonal r, θ, z se tiene un paralelepípedo rectángulo:



¿Son V y V^* el mismo sólido? Si ! el sólido no cambió, lo que cambió es el sistema de referencia que nos hace verlo diferente (como imágenes diferentes de un mismo objeto, frente a espejos deformantes)

Ejercicio 51

Interpreten en el sistema de coordenadas cilíndricas, el sólido V , definido en el sistema cartesiano por: $9 \leq x^2 + y^2 \leq 16$, $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ y $1 \leq z \leq 4$ con x e y no negativos.

Grafiquen en un sistema ortogonal $r\theta z$ y en el sistema cartesiano.

Cálculo de la integral triple en coordenadas cilíndricas

Nuestro objetivo es calcular $\iiint_V f(x, y, z) dV$ utilizando el cambio de variables

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Para ello necesitaremos conocer el Jacobiano de la transformación:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

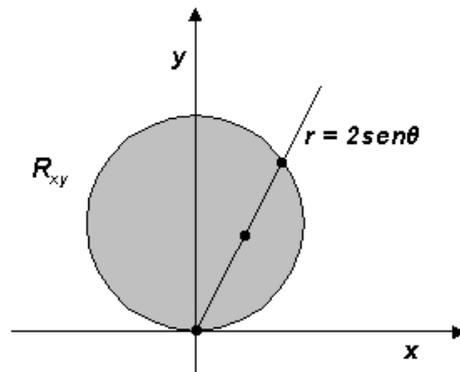
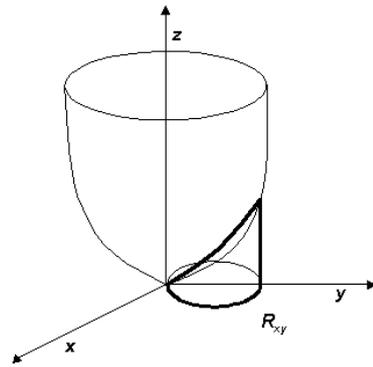
Entonces: $\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = r$, así que, si V^* es la descripción en coordenadas cilíndricas

del sólido V : $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$

Ejemplo 21

Sea $f(x, y, z)$ una función continua en el sólido V limitado por $z = 0$; $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ $z = x^2 + y^2$. Plantearemos el cálculo de $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ utilizando coordenadas cilíndricas.

Comenzaremos interpretando el sólido en el sistema ortogonal xyz y luego lo describiremos en el sistema cilíndrico.



Proyección del sólido sobre el plano xy

Escribamos las ecuaciones cilíndricas de las superficies que forman la frontera del sólido:

$$z=0 \rightarrow z=0$$

$$z = x^2 + y^2 \rightarrow z = r^2$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \rightarrow r = 2 \operatorname{sen} \theta$$

$$\therefore V^* = \{(r, \theta, z) / 0 \leq r \leq 2 \operatorname{sen} \theta \wedge 0 \leq \theta \leq \pi \wedge 0 \leq z \leq r^2\}$$

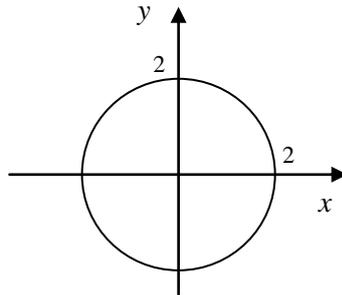
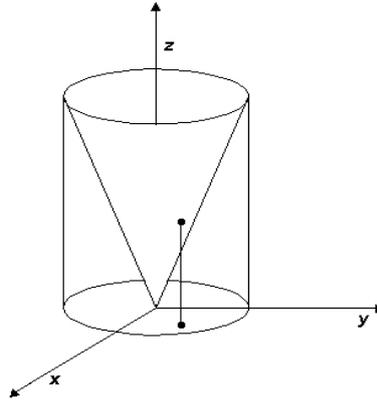
$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^\pi \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} \int_0^{r^2} f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z) r dz dr d\theta$$

Ejemplo 22

Hallar $\iiint_V x^2 + y^2 dV$ siendo V el sólido limitado por $x^2 + y^2 = 4$; $z=0$ y

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

La forma del integrando y las características del sólido (representado abajo) sugieren el uso de coordenadas cilíndricas.



Proyección del sólido sobre el plano xy

Haciendo
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$
 se tiene: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 \rightarrow r^2$

y las ecuaciones de las superficies que constituyen la frontera se transforman de la siguiente manera:

$$x^2 + y^2 = 4 \rightarrow r = 2$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow z = r$$

$$z = 0 \rightarrow z = 0$$

$$\therefore V^* = \{(r, \theta, z) / 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq r \leq 2 \wedge 0 \leq z \leq r\}$$

$$\iiint_V (x^2 + y^2) dV = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^r r^2 \cdot r \, dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^4 \, dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left. \frac{r^5}{5} \right|_0^2 d\theta = \frac{32}{5} 2\pi = \frac{64\pi}{5}$$

Ejercicio 52

Sea V , limitado por $z = x^2 + y^2$ y $z = 4$. Descríbanlo en coordenadas cilíndricas, calculen su volumen y su centroide.

Ejercicio 53

- a) Sea V limitado por $2y = x^2 + z^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Describan V en coordenadas cilíndricas (en este caso deben ubicar el sistema polar en otro plano coordenado).
 b) Obtengan su masa, si la función de densidad es $\delta(x, y, z) = x^2 + z^2$.

Ejercicio 54

- Calculen el volumen de: a) el sólido limitado por $z = x^2 + y^2$; $z = 1$ y $z = 9$.
 b) el sólido limitado por la esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Ejercicio 55

Sea V el sólido en el 1^{er} octante limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y los planos coordenados. Calculen $\iiint_V xyz \, dV$

Ejercicio 56

Calculen la masa del sólido en el 1^{er} octante interior al cilindro $x^2 + y^2 = 4x$ y bajo la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ siendo $\delta(x, y, z) = z$ la densidad de masa.

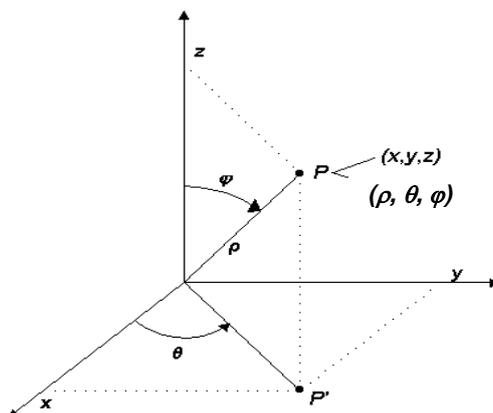
Ejercicio 57

Calculen el volumen del sólido limitado por $z = x^2 + y^2$ y $z^2 = x^2 + y^2$

Coordenadas Esféricas

Las coordenadas esféricas permiten localizar puntos en el espacio por medio de dos ángulos y una distancia. Si P es un punto cualquiera del espacio, se consideran:

ρ = distancia de O a P ; θ = ángulo desde x^+ hasta $\overline{OP'}$, siendo P' la proyección de P sobre el plano xy (ángulo de giro) ; φ = ángulo medido desde z^+ hasta \overline{OP}



La terna (ρ, θ, φ) representa las coordenadas esféricas de P donde

$$\rho \geq 0; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

La relación con las coordenadas cartesianas se da a través de las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

Verifiquen la validez de esas igualdades interpretando las proyecciones de OP sobre los ejes coordenados. Compruebe además a partir de ellas que:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad \text{si } z \neq 0 \end{cases}$$

¿Qué ángulo θ corresponde si $x = 0$? ¿Dónde se encuentra el punto? ¿Qué ángulo φ corresponde si $z = 0$? ¿Dónde se encuentra el punto?

Ejercicio 58

a) Hallen las coordenadas cartesianas de los puntos cuyas coordenadas esféricas se dan:

$$A\left(\sqrt{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right); \quad B(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}); \quad C(\sqrt{2}, \pi, \frac{\pi}{4})$$

b) Hallen las coordenadas esféricas de los puntos cuyas coordenadas cartesianas se dan:

$$A(1,0,0); \quad B(0,1,0); \quad C(0,0,1); \quad D(2,2\sqrt{3},4)$$

c) Interpreten las siguientes ecuaciones y grafiquen : $\rho = 4$; $\theta = \frac{3\pi}{4}$; $\varphi = \frac{2\pi}{3}$

d) Describan en general, las superficies cuyas ecuaciones esféricas son:

$$\text{d1) } \rho = a \quad \text{d2) } \theta = \theta_0 \quad \text{d3) } \varphi = \varphi_0 \quad (a, \theta_0 \text{ y } \varphi_0 \text{ son constantes})$$

Si una superficie S tiene ecuación $F(x, y, z) = 0$ en coordenadas cartesianas,

la correspondiente **ecuación en coordenadas esféricas** es:

$$F(\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi) = 0$$

Ejercicio 59

Grafiquen y hallen la ecuación en coordenadas esféricas de las siguientes superficies:

a) $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$

b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

c) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

d) $z = 4$

e) $y = \sqrt{3}x$

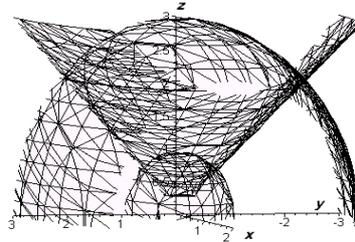
f) $z = x^2 + y^2$

Descripción de sólidos en el sistema esférico**Ejemplo 23**

Sea V el sólido limitado por las esferas: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y el semicono

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Grafiquemos en un sistema de coordenadas cartesianas para entender el sólido y, para cada punto del sólido, analicemos la variación de ρ, θ, φ



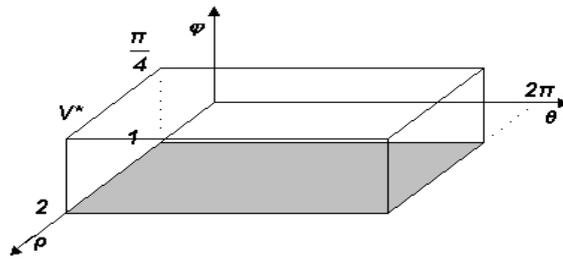
Las ecuaciones en coordenadas esféricas de las superficies que forman la frontera de V son: $\rho = 1$ (superficie esférica de radio 1) ; $\rho = 3$ (superficie esférica de radio 3) ;

$\varphi = \frac{\pi}{4}$ (semicono). Observen que si (ρ, θ, φ) son las coordenadas esféricas de un punto de V , θ (el ángulo de giro) puede tomar cualquier valor entre 0 y 2π ; cualquiera sea θ , el valor mínimo que puede tomar φ es 0 y el máximo $\frac{\pi}{4}$ (φ es igual a $\frac{\pi}{4}$ en la superficie del cono) y, cualesquiera que sean θ y φ , el valor mínimo de ρ es 1 y el máximo es 3 (el sólido se desarrolla entre las dos superficies esféricas).

La descripción del sólido en coordenadas esféricas es:

$$V^* = \{ (\rho, \theta, \varphi) / 1 \leq \rho \leq 3, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$$

y en un sistema ortogonal ρ, θ, φ se ve como muestra la figura siguiente:



El sólido V , interpretado en ρ, θ, φ como V^* , resulta un paralelepípedo rectángulo. Pero enfatizamos una vez más que el sólido no cambió, se lo ve diferente al cambiar el sistema de referencia y como consecuencia cambia su descripción. Pero, ¡qué ventajoso! ¿no? El sólido más favorable para resolver una integral triple es un paralelepípedo rectángulo, cualquiera sea el sistema de coordenadas que lo haga ver como tal.

Ejercicio 60

Describan en términos de desigualdades y grafiquen –si es que no se complica– en un sistema ortogonal ρ, θ, φ el sólido V limitado por.

- $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = 4$.
- $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $y \geq 0$, $x \geq 0$ y $z \geq 0$.
- $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$; $z = 4$
- $y = x$; $y = \sqrt{3}x$; $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ con $x \geq 0$ e $y \geq 0$.
- $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $z = 4$

Indicación: En todos los casos grafiquen en el sistema cartesiano y para cada punto del sólido analice la variación de ρ, θ y φ .

Cálculo de la integral triple usando coordenadas esféricas

Nuestro objetivo es calcular $\iiint_V f(x, y, z) dV$ utilizando como cambio de variables, las

coordenadas esféricas. Para ello, necesitamos conocer el Jacobiano de x, y, z respecto

$$\text{de } \rho, \theta, \varphi \text{ siendo } \begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \varphi \cos \theta & \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta & \cos \varphi \\ -\rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta & 0 \\ \rho \cos \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \operatorname{sen} \theta & -\rho \operatorname{sen} \varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \cos \varphi \begin{vmatrix} -\rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ \rho \cos \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \end{vmatrix} - 0 + (-\rho \operatorname{sen} \varphi) \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \varphi \cos \theta & \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ -\rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \end{vmatrix} =$$

$$= -\rho^2 \operatorname{sen} \varphi \quad (\text{verifiquen})$$

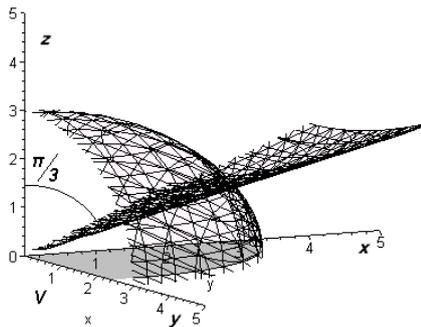
Como $0 \leq \varphi \leq \pi$ es $-\rho^2 \operatorname{sen} \varphi < 0$ por lo tanto: $\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} \right| = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi$

Así que, si V^* es la descripción en coordenadas cilíndricas del sólido V :

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_{V^*} f(\rho \cos \theta \operatorname{sen} \varphi, \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \rho \cos \varphi) \rho^2 \operatorname{sen} \varphi d\rho d\theta d\varphi$$

Ejemplo 24

Calcular el volumen del sólido limitado por las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $\sqrt{3} z = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Hallemos las ecuaciones en coordenadas esféricas de las superficies que forman la frontera de V :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \rightarrow \rho = 1$$

$$\sqrt{3} z = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

Podemos ver que V en términos de las coordenadas esféricas es:

$$V^* = \{(\rho, \theta, \varphi) / 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$\therefore \text{vol}(V) = \iiint_V dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \frac{\pi}{3} \quad (\text{verifiquen!})$$

Ejemplo 25

Si se quiere evaluar $\iiint_V x^2 + y^2 \, dV$ siendo V el sólido del ejemplo anterior,

cambiamos las variables en la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2$:

$$f(\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi) = (\rho \cos \theta \sin \varphi)^2 + (\rho \sin \theta \sin \varphi)^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi$$

luego,

$$\iiint_V x^2 + y^2 \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 \rho^2 \sin^2 \varphi \, \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

(completan el cálculo y comprueben que el resultado es $\pi/12$)

Ejercicio 61

Evalúen las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2 \sin \varphi} \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta \quad \text{b) } \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^2 \rho \cos \varphi \, \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$\text{c) } \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sin \varphi} \rho \cos \varphi \, \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

Ejercicio 62

Describan en coordenadas esféricas y calculen el volumen del sólido limitado por:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $x^2 + y^2 = z^2$; $x^2 + y^2 = 3z^2$ con $z \geq 0$.

b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $z = 1$.

c) abajo por la esfera $\rho = 2 \cos \varphi$ y arriba por el semicono $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Ejercicio 63

Hallen el valor promedio de:

a) $f(\rho, \theta, \varphi) = \rho$ en la región esférica $\rho \leq 1$.

b) $f(\rho, \theta, \varphi) = \rho \cos \varphi$ en el sólido definido por $\rho \leq 1$; $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

Sintetizando:

1. Para calcular $\iiint_V f(x, y, z) dV$ en **coordenadas cilíndricas:**

- Interpretar el sólido V graficando en un sistema de coordenadas cartesianas.
- Obtener V^* (descripción del sólido en las coordenadas r, θ, z).
- Transformar la función a integrar reemplazando x por $r \cos \theta$ e y por $r \operatorname{sen} \theta$ (z queda igual)
- Recordar multiplicar el integrando por el Jacobiano de la transformación (r) o sea: $dV = dx dy dz \rightarrow r dz dr d\theta$
- $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z) r dr d\theta dz$

2. Para calcular $\iiint_V f(x, y, z) dV$ en **coordenadas esféricas:**

- Interpretar el sólido V graficando en un sistema de coordenadas cartesianas.
- Obtener V^* (descripción del sólido en las coordenadas ρ, θ, φ)
- Transformar la función a integrar reemplazando x por $\rho \cos \theta \operatorname{sen} \varphi$, y por $\rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$ y z por $\rho \cos \varphi$.
- Recordar multiplicar el integrando por el valor absoluto del Jacobiano de la transformación ($\rho^2 \operatorname{sen} \varphi$) o sea: $dV = dx dy dz \rightarrow \rho^2 \operatorname{sen} \varphi d\rho d\theta d\varphi$
- $\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_{V^*} f(\rho \cos \theta \operatorname{sen} \varphi, \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \rho \cos \varphi) \rho^2 \operatorname{sen} \varphi d\rho d\theta d\varphi$

Ejercicio 64

Empleando el sistema de coordenadas que consideren conveniente calculen el volumen del sólido limitado por:

a) $z = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 - y = 0$; $z = 0$ b) $x^2 + y^2 = 4$; $x^2 + y^2 = 2z$; $z = 0$

c) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$; $x^2 + y^2 = 6z$ d) $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$; $x^2 + y^2 = 6z$; $z = 1$

e) el paraboloido $z = 9 - x^2 - y^2$ por arriba y el plano xy por debajo, en el exterior del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

f) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y los planos $z = 1$ y $z = 2$.

g) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el plano $z = 1$, con $z \geq 1$.

Uso de MAPLE

Para dibujar superficies en coordenadas cilíndricas se utiliza el comando **cylinderplot** :

```
> with(plots):
> cylinderplot(1,theta=0..2*Pi,z=-1..1);
> cylinderplot(z+ 3*cos(2*theta),theta=0..Pi,z=0..3);
```

Para dibujar superficies en coordenadas esféricas se utiliza el commando **sphereplot** :

```
> with(plots):
> sphereplot(1,theta=0..2*Pi,phi=0..Pi);
> sphereplot((1.3)^(rho)*sin(theta), rho=1..2*Pi, theta=0..Pi, style=patch,color=z);
```

Para calcular el volumen de un sólido limitado por el paraboloides $z = x^2 + 2y^2$ y el cilindro $z = 4 - 2y^2$ se puede proceder de la siguiente manera:

```
> z1:=x^2 + 2*y^2;
> z2:= 4 - 2 * y^2;
> with(plots):
> fig1:= plot3d({z1}, x=-2..2, y=-2..2, color= blue);
> fig2:= plot3d({z2}, x=-2..2, y=-2..2, color= green);
> display({fig1,fig2});
> solve(z1=z2,y);
> implicitplot(z1=z2,x=-2..2,y=-2..2);
> Vol:=int(int(int(1,z=x^2+y^2..4 - 2*y^2),
  y=-1/2*(-x^2+4)^(1/2)..1/2*(-x^2+4)^(1/2)),x=-2..2);
> Vol= evalf(9/2*Pi);
```

Resuelvan usando Maple los siguientes problemas:

- 1) Calcular el volumen del sólido limitado por $x^2 + y^2 = 1$; $z = y$; $z = 0$
- 2) Hallar el volumen resultante de taladrar, un agujero cilíndrico de radio $r = 2$, de lado a lado de una esfera de radio $R = 4$ pasando por el centro de la esfera y a lo largo del polo.
- 3) Hallar el volumen de la porción entre 30 grados y 60 grados de pastel cilíndrico de altura 2 y radio 5.

Autoevaluación (Integrales dobles y coordenadas polares)

1. Interprete geoméricamente $\iint_R f(x, y) dA$ para el caso $f(x, y) \geq 0$ sobre R .
2. Justifique: $\text{área}(R) = \iint_R dA$
3. Si f es continua y $f(x, y) \geq 0$ en el sólido V , ¿qué interpretación física puede dar para $\iint_R f(x, y) dA$?
4. ¿Qué propiedades tiene $\iint_R f(x, y) dA$?
5. Justifique el siguiente enunciado:

Si $|f(x, y)| \leq M \quad \forall (x, y) \in R \subset \mathcal{R}^2$ y f es continua en R entonces

$$\left| \iint_R f(x, y) dA \right| \leq M \text{área}(R)$$

6. ¿Cómo calcula el valor promedio de una función continua $f(x, y)$ en la región R ?
¿Qué afirma el teorema del valor medio para integrales dobles?
7. a) Explique qué significa “ R es una región tipo I” y “ R es una región tipo II” y cómo se calcula $\iint_R f(x, y) dA$ en cada caso. b) ¿Cómo calcula $\iint_R f(x, y) dA$ si R no es una región tipo I ni tipo II?
8. Evalúe la siguiente integral: $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$

9. Complete las siguientes tablas

Coordenadas polares	Coordenadas cartesianas
$(\sqrt{2}, \pi/4)$	
	$(3, 4)$
$(2, 5\pi/3)$	
	$(-1, 1)$
$(4, 3\pi)$	

Coordenadas polares	Coordenadas cartesianas
	$y = 5$
$r \text{ sen } \theta = 2$	
	$x^2 - y^2 = 1$
$r = 2 \text{ sen } \theta$	
	$y = x + 1$

10. Decida para cada una de las regiones siguientes si usaría coordenadas polares o cartesianas para calcular $\iint_R f(x, y) dA$.
 - a) R región exterior a $x^2 + y^2 = 1$ e interior a $x^2 + y^2 = 2x$
 - b) R región limitada por $x = -2$; $y = 2$; $y = x$
 - c) R región limitada por $y = x$; $x^2 + y^2 = 4$

11. Calcule:

a) $\iint_R \operatorname{sen}(x^2 + y^2) dA$ donde R es la región anular $1 \leq x^2 + y^2 \leq 16$

b) $\iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dA$ donde R es la región exterior a $r = 1$ e interior a la cardioide $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$

12. Indique cómo pasa a coordenadas polares la integral $\iint_R f(x, y) dA$.

13. ¿Qué tiene en cuenta para decidir si le conviene usar coordenadas cartesianas o coordenadas polares en el cálculo de una integral doble ?

14. Calcule el volumen del sólido limitado por $x^2 + y^2 = 1$; $x^2 + y^2 = 4$; $z = 0$ y $z = 5$.

15. Indique cómo usa la transformación $T: x = X(u, v)$; $y = Y(u, v)$, $(u, v) \in S$ en el cálculo de $\iint_R f(x, y) dA$.

Autoevaluación (Integrales triples, coordenadas cilíndricas y coordenadas esféricas)

1. Defina: $\iiint_V f(x, y, z) dV$

2. Justifique: $\operatorname{vol}(V) = \iiint_V dV$

3. Si f es continua y $f(x, y, z) \geq 0$ en el sólido V , ¿qué interpretación física puede dar para $\iiint_V f(x, y, z) dV$?

4. ¿Qué propiedades tiene $\iiint_V f(x, y, z) dV$?

5. Justifique el siguiente enunciado:

Si $|f(x, y, z)| \leq M \quad \forall (x, y, z) \in V$ sólido de \mathcal{R}^3 y f es continua en V entonces

$$\left| \iiint_V f(x, y, z) dV \right| \leq M \operatorname{vol}(V)$$

6. ¿Cómo calcula el valor promedio de una función continua $f(x, y, z)$ en el sólido V ?
¿Qué afirma el teorema del valor medio para integrales triples?

7. a) ¿Qué significa que un sólido V sea proyectable en el plano xy ? ¿Cómo se calcula

$$\iiint_V f(x, y, z) dV \text{ en ese caso? Dé un ejemplo.}$$

b) Idem a) para el plano xz

c) Idem a) para el plano yz

8. Describa el sólido limitado por las superficies dadas y calcule su volumen:

a) $x + y + z = 2$; $y = 2x$ (en el primer octante)

b) $x + y + z = 2$; $3x + 3y + 2z = 6$ (en el primer octante)

9. Complete los espacios en blanco

a) $dV = dz dy dx$ asume la forma en coordenadas cilíndricas

y la forma en coordenadas esféricas.

b) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^3 x y dz dy dx$ se convierte enen coordenadas esféricas.

c) Si V es una esfera de radio 1 con centro en el origen, entonces el volumen de V escrita como una integral iterada en coordenadas esféricas esy su valor es.....

d) Si el sólido V está dado en coordenadas cartesianas entonces el volumen de V se calcula mediante la integral

e) Si el sólido V está dado en coordenadas cilíndricas entonces el volumen de V se calcula mediante

f) Si el sólido V está dado en coordenadas esféricas entonces el volumen de V se calcula mediante

10. a) Indique cómo pasa a coordenadas esféricas y a coordenadas cilíndricas

$$\iiint_V f(x, y, z) dV$$

b) ¿Qué tiene en cuenta para decidir si le conviene usar coordenadas cartesianas o coordenadas cilíndricas o esféricas en el cálculo de una integral triple ?

c) Calcule el volumen del sólido limitado por $x^2 + y^2 = 1$; $x^2 + y^2 = 4$; $z = 0$, $z = 5$

Capítulo IV: Integrales impropias y series numéricas

En el capítulo I trabajamos con funciones continuas definidas en un intervalo cerrado y para ellas definimos $\int_a^b f(x)dx$. También lo hicimos para funciones que tienen un número finito de discontinuidades de primera especie en el intervalo $[a, b]$. En base a lo estudiado anteriormente, ¿podremos dar algún significado a $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ para f continua en el intervalo $[a, +\infty)$? ¿y a $\int_a^b f(x)dx$, cuando f tiene una discontinuidad de tipo infinito en el intervalo $[a, b]$?

Actividad 1

¿Cómo reaccionarían ante la expresión $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ si les informamos que f es continua y no negativa en la semirrecta $[a, +\infty)$? Seguramente responderán que puede hallar una primitiva de f , pero ¿qué significado tendría la Regla de Barrow? Ninguno ciertamente, debido a que el símbolo $+\infty$ no puede ser reemplazado en ninguna expresión numérica.

Es cierto que: $\forall b > a$, la integral $\int_a^b f(x)dx$ existe y su resultado depende de b .

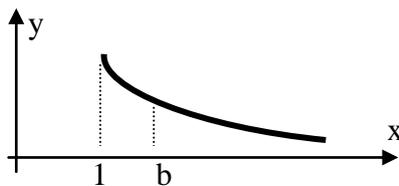
Siendo $I_b = \int_a^b f(x)dx$, si $\lim_{b \rightarrow +\infty} I_b = I$, tiene sentido asignar al símbolo $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ el valor

I y decir que ese número representa el área debajo de la curva $y = f(x)$ en el intervalo infinito $[a, +\infty)$.

Ejemplo 1

Dada $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $\forall b > 1$ la integral $I_b = \int_1^b f(x)dx$ existe pues f es continua en el

cerrado $[1, b]$, y es $I_b = -\left[\frac{1}{x}\right]_1^b = -\frac{1}{b} + 1$



Siendo $f(x)$ positiva en $[1, b]$, I_b representa el área bajo la curva en $[1, b]$

¿Qué ocurre con I_b cuando $b \rightarrow +\infty$?

Obviamente $\lim_{b \rightarrow +\infty} I_b = 1$. El limite obtenido se asume como valor de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$ y asignamos el valor 1 al área debajo de la curva $y = \frac{1}{x^2}$ en $[1, +\infty)$.

Conclusión: ¿Pudo calcularse naturalmente la integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$? ¿Pudo medirse la región no acotada bajo la curva? No, de acuerdo con el procedimiento habitual. Si, analizando el comportamiento de I_b . Se dice entonces que la integral propuesta es una *integral impropia convergente*.

Definición 1

1 - Siendo f continua en $[a, +\infty)$, $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ si ese límite existe.

2 - Siendo f continua en $(-\infty, a]$, $\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f(x) dx$ si ese límite existe.

En ambos casos, cuando esto sucede, se dice que la integral propuesta es una *integral impropia convergente*.

Observaciones

1) Si $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, +\infty)$ (o $\forall x \in (-\infty, a]$), el límite en la definición puede considerarse como el área debajo de la gráfica de f en ese intervalo.

2) Si el límite de I_b no existe o es infinito se dice que la integral *diverge*.

Podemos extender la definición a toda la recta:

Definición 2

Siendo f continua en \mathbb{R} , $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$ si las dos integrales del segundo miembro convergen.

Para cerrar esta presentación – y antes de proponerles la ejercitación correspondiente – queremos enfatizar que las integrales simbolizadas

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx ; \int_{-\infty}^a f(x) dx ; \int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (a \in \mathbb{R})$$

donde f es continua, no pueden ser calculadas en términos de la regla de Barrow. El valor que puede ser asignado a cada una de ellas, *proviene de un límite*. Si ese límite es un n° real, se dice que la integral *converge*. En caso contrario, se dice que la integral *diverge*, no pudiendo asignarse ningún valor a la misma.

Estas propuestas de integrales son llamadas integrales *impropias*.

¿Puede haber alguna otra situación que escapa a cánones establecidos para resolver una integral? Si! ya lo comentaremos más adelante.

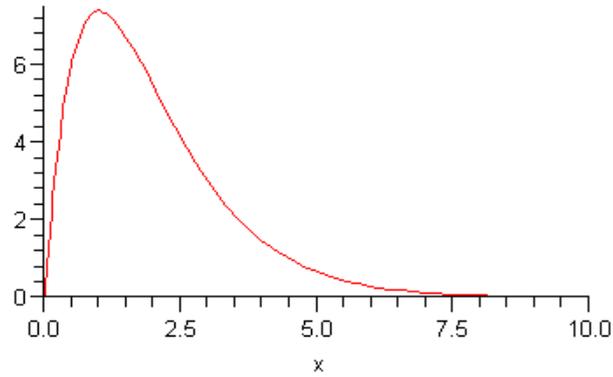
Ejemplo 2

Supongan que en una empresa se estima que se estará recaudando, por algún concepto, al cabo de x semanas de iniciada una operación, a razón de $f(x)=xe^{3-x}$ millones de pesos por semana. ¿En qué momento la afluencia de dinero será máxima? ¿Cuánto será lo recaudado en las tres primeras semanas? ¿Cuánto se recaudaría si el tiempo fuese ilimitado?

Para determinar cuándo la afluencia de dinero será máxima busquemos los puntos críticos de f :

$$f'(x) = e^{3-x}(1-x) = 0 \rightarrow x = 1$$

Observen que para $0 < x < 1$ f crece y para $x > 1$ f decrece, por lo tanto en $x=1$ la función tiene un máximo local (en este caso también es máximo absoluto).



La afluencia de dinero será máxima en la primera semana.

Lo recaudado en las tres primeras semanas será:

$$\int_0^3 f(x)dx = -4 + e^3 \cong 16,086 \text{ millones de pesos}$$

En tiempo ilimitado, la recaudación será: $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ (si existe)

$$I_b = \int_0^b (xe^{3-x})dx = [-4e^{3-x} + e^{3-x}(3-x)]_0^b = (-e^{3-b} - e^{3-b}b + e^3)$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} I_b = e^3 \cong 20,086 \text{ millones de pesos.}$$

Ejercicio 1

Decidan la convergencia ó divergencia da las siguientes integrales impropias:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$

b) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-1)^2} dx$

c) $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$

d) $\int_{-\infty}^{-1} x e^{-x^2} dx$

e) $\int_{-\infty}^1 e^x dx$

f) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

g) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} dx$

h) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$

Ejercicio 2

¿Por qué no converge $\int_0^{\infty} \cos x dx$?

Ejercicio 3

Hallar el área de la región bajo la curva $y = \frac{2}{4x^2 - 1}$ a la derecha de $x=1$.

Ejercicio 4

Sea $f(x) = \frac{1}{x}$; $x \in [1, +\infty)$

- a) Comprueben que el volumen generado al rotar la gráfica alrededor del eje x es π .
- b) Comprueben que el área de la región bajo la gráfica es infinita.
- c) Grafiquen ambas situaciones. ¿Parece un resultado coherente?

Ejercicio 5

Hallar K de forma tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{K}{1+x^2} dx = 1$

Comentario: la función $f(x) = \frac{K}{1+x^2}$ se presenta en la teoría de probabilidades y se

llama *función de densidad de Cauchy*. (Grafíquenla).

Ejercicio 6

Comprueben que:

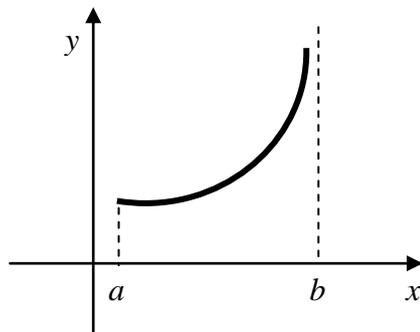
a) $\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{4}$ b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \pi$ c) $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$ ($a > 0$)

Actividad 2

Si f es una función continua en $[a, b]$, o si tiene en $[a, b]$ un nº finito de discontinuidades

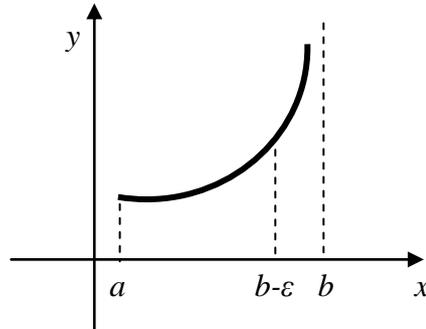
finitas, sabemos que existe $\int_a^b f(x) dx$. Supongamos ahora que f es continua en $[a, b)$ y

que $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$.



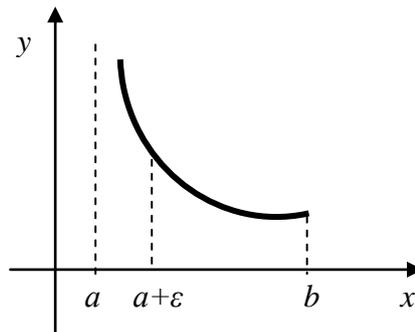
En ese caso, $\forall \varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, existe $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = I_\varepsilon$.

Si existe $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_\varepsilon = I$, ese valor se adopta como resultado de $\int_a^b f(x)dx$ y cuando $f(x) \geq 0$ en $[a, b)$ puede interpretarse como área debajo de la curva $y=f(x)$ en el intervalo.



Si f es continua en $(a, b]$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$, se calcula $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx = I_\varepsilon$

y se investiga el comportamiento de $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_\varepsilon$



De acuerdo con estos comentarios podemos dar la siguiente definición:

Definición 3

1) Siendo f continua en $[a, b)$ y $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \quad \text{si ese límite existe.}$$

2) Siendo f continua en $(a, b]$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \quad \text{si ese límite existe.}$$

Observación: Estas integrales también son llamadas integrales impropias y se dice que convergen, si el límite existe. Los límites son llamados valores de las integrales impropias. Si los límites no existen las integrales impropias se dicen divergentes.

Ejemplo 3

Para $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ es una integral impropia pues $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ es

continua en $[0, a)$ siendo $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = +\infty$.

Considerando $\varepsilon > 0$ pequeño, calculamos $I_\varepsilon = \int_0^{a-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, que existe pues

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ es continua en el intervalo $[0, a - \varepsilon]$.

$$I_\varepsilon = \arcsen\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_0^{a-\varepsilon} = \arcsen\left(\frac{a-\varepsilon}{a}\right) - \arcsen(0) = \arcsen\left(\frac{a-\varepsilon}{a}\right)$$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \arcsen\left(\frac{a-\varepsilon}{a}\right) = \arcsen(1) = \frac{\pi}{2}$ \therefore la integral converge a $\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo 4

Decidir el comportamiento de $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

La integral es impropia pues $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es continua en $(0, 1]$ con $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$$\text{Para } \varepsilon > 0, I_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_\varepsilon^1 = -1 + \frac{1}{\varepsilon}$$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$ pero este límite es infinito, en consecuencia la integral diverge.

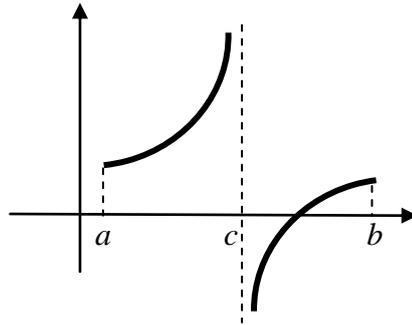
Definición 4

Sea f continua en $[a, c) \cup (c, b]$ con $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty$ (o $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$) y

$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty$ (o $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$), $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ siempre que las

dos integrales impropias del segundo miembro sean convergentes y, siendo así, decimos

que $\int_a^b f(x)dx$ es una integral impropia convergente.



Ejemplo 5

Analizar $\int_0^3 \frac{2x}{(x^2 - 1)^{2/3}} dx$.

Observen que $f(x) = \frac{2x}{(x^2 - 1)^{2/3}}$ es continua en $[0,3] - \{1\}$

y que $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{(x^2 - 1)^{2/3}} = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{(x^2 - 1)^{2/3}} = +\infty$.

Deben analizarse entonces dos integrales:

$$\text{i) } \int_0^1 \frac{2x}{(x^2 - 1)^{2/3}} dx \quad \text{y} \quad \text{ii) } \int_1^3 \frac{2x}{(x^2 - 1)^{2/3}} dx$$

i) Sea $I_\varepsilon = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{2x}{(x^2 - 1)^{2/3}} dx = 3(x^2 - 1)^{1/3} \Big|_0^{1-\varepsilon} = 3(\sqrt[3]{(1-\varepsilon)^2 - 1} + 1) \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_\varepsilon = 3$

$$\therefore \int_0^1 \frac{2x}{(x^2 - 1)^{2/3}} dx = 3$$

ii) Sea $I_\varepsilon = \int_{1+\varepsilon}^3 \frac{2x dx}{(x^2 - 1)^{2/3}} = 3(x^2 - 1)^{1/3} \Big|_{1+\varepsilon}^3 = 3[\sqrt[3]{9-1} - \sqrt[3]{(1+\varepsilon)^2 - 1}] =$

$$= 3[2 - \sqrt[3]{(1+\varepsilon)^2 - 1}] \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_\varepsilon = 6 \quad \therefore \int_1^3 \frac{2x}{(x^2 - 1)^{2/3}} dx = 6$$

Conclusión: $\int_0^3 \frac{2x}{(x^2 - 1)^{2/3}} dx$ es una integral impropia convergente

$$\int_0^3 \frac{2x}{(x^2 - 1)^{2/3}} dx = 3 + 6 = 9$$

Ejercicio 7

Analicen la integral $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ y comprueben que no converge.

Observen: si intentaran – incorrectamente – resolver $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ aplicando la regla de Barrow, ignorando la discontinuidad de la función en $x=1$, tendrían ... ¿qué resultado?

Ejercicio 8

Verifiquen cada uno de resultados los siguientes:

$$a) \int_1^5 \frac{x dx}{\sqrt{5-x}} = \frac{44}{3}$$

$$b) \int_1^2 \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{4} \sqrt{3}$$

Criterios para la convergencia y la divergencia

Actividad 3

Estudiar la convergencia de $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

No nos es posible en este caso resolver $I_b = \int_1^b e^{-x^2} dx$ y calcular $\lim_{b \rightarrow +\infty} I_b$, pero

observen: 1) $I_b = \int_1^b e^{-x^2} dx$ es una función creciente de b (¿por qué?)

2) Dado que $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ para todo $x \geq 1$,

$$I_b = \int_1^b e^{-x^2} dx \leq \int_1^b e^{-x} dx = -e^{-b} + e^{-1} < e^{-1} \approx 0.36788$$

Por lo tanto, existe $\lim_{b \rightarrow +\infty} I_b$ (es un número real menor que 0.36788) y podemos afirmar

entonces que $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$ es una integral impropia convergente (aunque desconocemos a qué valor converge).

Supongan ahora que f y g son dos funciones cualesquiera, continuas en $[a, +\infty)$ y

tales que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq a$. Supongan también que $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge.

¿Pueden afirmar que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge? ¿por qué?

Criterio por comparación directa.

Sean f y g dos funciones continuas en $[a, +\infty)$ con $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq a$.

1. Si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge entonces $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.
2. Si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge entonces $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge.

Ejercicio 9

Analicen el comportamiento de las siguientes integrales impropias aplicando el criterio por comparación directa.

a) $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$

b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 0.1}} dx$

c) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$

El siguiente criterio dice que si dos funciones positivas crecen a la misma razón cuando $x \rightarrow \infty$, entonces sus integrales se comportan en forma similar: ambas divergen o ambas convergen (no necesariamente al mismo valor).

Criterio de comparación del límite.

Si f y g son funciones continuas y positivas en $[a, +\infty)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe y es un

número real mayor que cero, entonces $\int_a^{\infty} f(x)dx$ y $\int_a^{\infty} g(x)dx$ son ambas convergentes

o ambas divergentes.

Ejercicio 10

Haciendo uso del criterio de comparación del límite, analicen el comportamiento de las

integrales a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ y $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$ b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ y $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$

Ejercicio 11

Analicen si las siguientes integrales son convergentes o divergentes. Háganlo recurriendo a las definiciones cuando las integrales y límites a calcular sean sencillos, y en caso contrario, apliquen los criterios vistos, usando otras integrales cuyo comportamiento conoce o puede conocer fácilmente.

a) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$ b) $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2} dx$ c) $\int_1^5 \frac{x dx}{\sqrt{25-x^2}}$ d) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}}$

Uso de MAPLE

Para calcular integrales impropias se usan los comandos que se muestran a continuación

```
> limit(int( 1/x, x), x = infinity);
> limit(int( 1/x, x = a..5), a=0);
> limit(int( 1/x^2, x), x = infinity);
> limit(int( 1/sqrt(x), x = a..5), a=0);
```

Comentario:

Situaciones equivalentes a las estudiadas hasta aquí en este capítulo podrían presentarse

en integrales múltiples. Por ejemplo, $\iint_R \frac{1}{x^2 y^2} dA$ donde $R = \{(x, y) / x \geq 1 \wedge y \geq 1\}$,

$\iint_R e^{-(x^2+y^2)} dA$ donde $R = \mathbb{R}^2$ y $\iint_R \frac{1}{x^2+y^2} dA$ con $R = \{(x, y) / x^2+y^2 \leq 1\}$ son

integrales dobles impropias. Las dos primeras integrales son impropias ya que el dominio de integración no es acotado. En el tercer caso el dominio de integración es acotado pero la integral es impropia dado que el integrando es una función que no está definida en $(0,0) \in R = \{(x, y) / x^2+y^2 \leq 1\}$ y toma valores tan grandes como se quiera considerando $0 < x^2+y^2 \leq 1$. Les proponemos que reflexionen sobre cómo podrían adaptarse a estas integrales las ideas presentadas para integrales impropias en una variable.

Sucesiones numéricas

Una sucesión numérica puede pensarse como una lista (finita o infinita) de números escritos en un orden determinado:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$$

Observen que a_1 es el primer término de la sucesión, a_2 el segundo término, y, en general, a_n es el n -ésimo término que tendrá como sucesor en la lista a a_{n+1} .

Podemos decir entonces que n es el lugar que el número a_n ocupa en la lista. Puesta la lista en forma de tabla

lugar	1	2	3	4	5	n	$n+1$
valor	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_n	a_{n+1}

nos hace pensar a la sucesión como una función f cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos. O sea, $f(n) = a_n$

La sucesión $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$ se indica a veces $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

o también $\{a_n\}$ (cuando se sobreentiende la variación del índice)

a_n es el *término n -ésimo* o *término general* de la sucesión,

Ejemplos:

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $a_n = c$, es una sucesión constante (todos sus términos son iguales a c)
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde $a_n = n$ es la sucesión de los números naturales.

La sucesión consta de los términos $1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots$

- El término general de la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$ es $a_n = \frac{1}{n}$

- Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $a_n = (-1)^n$

Esta sucesión consta de los términos $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$

- Para n entero y mayor o igual a cero, se llama *factorial* de n y se denota $n!$

al número definido de la siguiente manera: $n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$

de manera que :

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ 1! &= 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1 \\ 2! &= 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2 \\ 3! &= 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 = 6 \\ 4! &= 4 \cdot 3! = \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ con $a_n = n!$ (vean que no necesariamente el valor inicial del índice debe ser 1) Los primeros términos de esta sucesión son:

$$1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, \dots\dots \text{ (¡Verifíqueno!)}$$

■ La sucesión $3, 7, 11, 15, 19, 23, \dots$ tiene primer término igual a 3 y luego cada término se obtiene sumando el número 4 al término anterior. Podríamos expresarla de la siguiente manera:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ con } a_1 = 3 \text{ y } a_n = a_{n-1} + 4 \text{ para } n \geq 2$$

Es esta una *progresión aritmética* de primer término 3 y *diferencia* 4.

En general, se llama *progresión aritmética de primer término a y diferencia h*, a toda sucesión que pueda definirse de la siguiente manera:

$$a_1 = a \text{ ; } a_n = a_{n-1} + h \text{ si } n \geq 2$$

■ La sucesión $1, -4, 16, -64, 256, \dots$ tiene primer término igual a 1 y luego cada término se obtiene multiplicando por (-4) al término anterior. Podríamos expresarla de la siguiente manera:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ con } a_1 = 1 \text{ y } a_n = a_{n-1} \cdot (-4) \text{ para } n \geq 2$$

Es esta una *progresión geométrica* de primer término 1 y razón igual a -4.

En general, se llama *progresión geométrica de primer término a y razón r*, a toda sucesión que pueda definirse de la siguiente manera

$$a_1 = a \text{ ; } a_n = a_{n-1} \cdot r \text{ si } n \geq 2$$

Los n primeros términos de una progresión geométrica de primer término a y razón r son: $a, a \cdot r, a \cdot r^2, a \cdot r^3, \dots\dots\dots, a \cdot r^{n-1}$

- Las sucesiones cuyos términos se definen en función de los anteriores (como sucede en las progresiones aritméticas y geométricas) reciben el nombre de *sucesiones recurrentes*. Un ejemplo muy citado de sucesión de sucesión recurrente es la sucesión de Fibonacci:

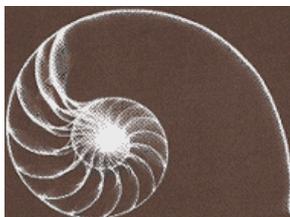
$$a_1 = 1 \quad ; \quad a_2 = 1 \quad \text{y} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad , \quad \text{para} \quad n \geq 3 \quad .$$

Los primeros términos de la sucesión de Fibonacci son:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,.....

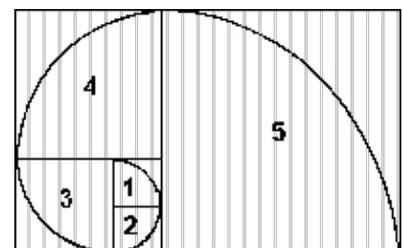
Esta sucesión de números aparece en la Naturaleza en formas curiosas.

Las escamas de una piña están dispuestas en espiral alrededor del vértice. Si contamos el número de espiras de una piña, encontraremos que siempre es igual a uno de los números de la sucesión de Fibonacci.



La misma sucesión aparece también en el estudio de las leyes mendelianas de la herencia, en la divergencia foliar, en la formación de la concha de algunos moluscos...

Una manera práctica de dibujar una espiral consiste en disponer sucesivos cuadrados cuyos lados tienen longitudes que coinciden con los números de Fibonacci y unir con un arco de circunferencia los vértices opuestos de cada nuevo cuadrado que se añade.



Actividad (para realizar fuera del horario de clase):

En todo colmenar hay un tipo especial de abejas llamadas "reina". Hay otro tipo, también hembras, que se llaman "trabajadoras" que a diferencia de las reinas no producen huevos. Hay abejas "machos" que no trabajan y que son engendrados por los huevos no fertilizados de las reinas, por lo tanto tienen madre pero no padre. Todas las hembras son engendradas por la unión de la reina con un macho, de manera que las hembras tienen padre y madre.

De acuerdo al relato anterior, les pedimos que:

- a) Construyan el diagrama de árbol genealógico de una abeja macho, colocando al macho en la base del diagrama.
- b) ¿Cuántos padres tiene?
- c) ¿Cuántos abuelos?
- d) ¿Cuántos bisabuelos? ¿y tatarabuelos? ¿y choznos?
- e) Escriban una sucesión con los valores obtenidos de las respuestas anteriores. ¿Observan alguna particularidad?
- f) Construyan ahora el árbol genealógico de una abeja hembra, y respondan las mismas preguntas anteriores ¿hay alguna similitud?
- g) Construyan su propio árbol genealógico. ¿Se mantienen las mismas relaciones anteriores? ¿Por qué?
- h) Escriban el término general de cada una de las sucesiones obtenidas.

Hagamos un poco de historia

¿Quién fue Fibonacci? Leonardo de Pisa, mejor conocido por su apodo Fibonacci (que significa hijo de Bonacci) nació en la ciudad italiana de Pisa y vivió de 1170 a 1250. Su padre trabajaba como representante de la casa comercial italiana más importante de la época, en el norte de África. Este lo animó a estudiar matemáticas. Leonardo recibió este tipo de enseñanza de maestros árabes. Se convirtió en un especialista en Aritmética y en los distintos sistemas de numeración que se usaban entonces. Convencido de que el sistema indo-arábigo era superior a cualquiera de los que estaban en uso, decidió llevar este sistema a Italia y a toda Europa, en donde aún se usaban los numerales romanos y el ábaco. Escribió gran cantidad de libros y textos de matemáticas: Liber Abaci escrito en 1202, Practica Geometriae en 1220, Flos en 1225 y Liber Quadratorum en 1227. Es importante destacar que en esa época no existía la imprenta, por lo tanto los libros y sus copias eran escritos a mano. Fue sin duda el matemático más original de la época medieval cristiana.

Ejercicio 12

Escriban los cuatro primeros términos de las sucesiones definidas a continuación.

a) $a_n = 3^n$, $n \geq 1$

b) $b_n = 2n^2 + 3n - 4$, $n \geq 1$

c) $c_n = (-1)^n n^2$, $n \geq 1$

d) $d_1 = 0$; $d_n = d_{n-1} + 3$, $n \geq 2$

Ejercicio 13

Escriban una fórmula para el término general de las siguientes sucesiones.

a) $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$

c) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

b) $1, 8, 27, 64, 125, \dots$

d) $2, 5, 8, 11, 14, \dots$

Ejercicio 14

Para la sucesión definida por: $s_n = 2n - 1, n \geq 1$ a) Determinen s_3, s_8 y s_{100}

b) Escriban una fórmula que defina la misma sucesión tomando como índice inicial 0.

Convergencia de sucesiones

Actividad 4

Consideren las sucesiones: 1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 2) $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ 3) $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$

¿Se aproximan a algún valor los términos de cada una de las sucesiones cuando n se hace muy grande?

En el caso 1) los términos de la sucesión son tan cercanos a cero como se quiera considerando valores de n suficientemente grandes. Decimos: $\frac{1}{n}$ tiende a cero cuando

n tiende a ∞ y escribimos: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

En el caso 2) los términos de la sucesión son $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$. Claramente no se acercan a ningún valor (no existe $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$)

En el caso 3) los términos de la sucesión no se aproximan a ningún valor a medida que n se hace cada vez más grande: son tan grandes como se quiera considerando valores de n suficientemente grandes ($\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$)

Decimos que $\{a_n\}$ es una sucesión convergente (que converge a L) cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ ($L \in \mathbb{R}$) lo que significa que los términos a_n se acercan tanto como se quiera a L considerando valores de n suficientemente grandes. Si esto no sucede se dice que la sucesión es divergente.

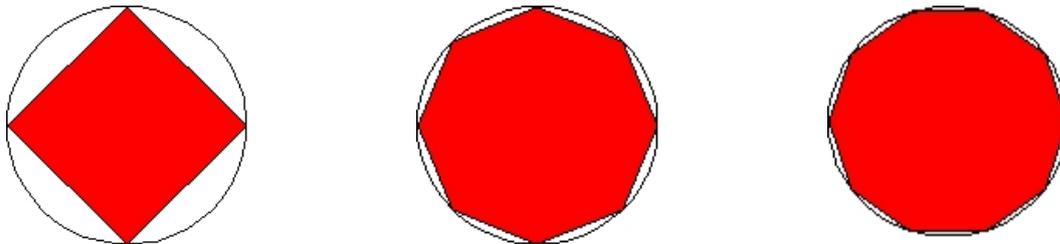
La sucesión $\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente (converge a 0).

Los casos 2) y 3) son ejemplos de sucesiones divergentes.

Actividad 5

Los griegos en tiempos remotos dieron una respuesta geométrica al problema del cálculo del área de un círculo consistente en aproximar la región por medio de una sucesión de polígonos inscritos cuyas áreas, al aumentar suficientemente el n° de lados, representan prácticamente el área buscada.

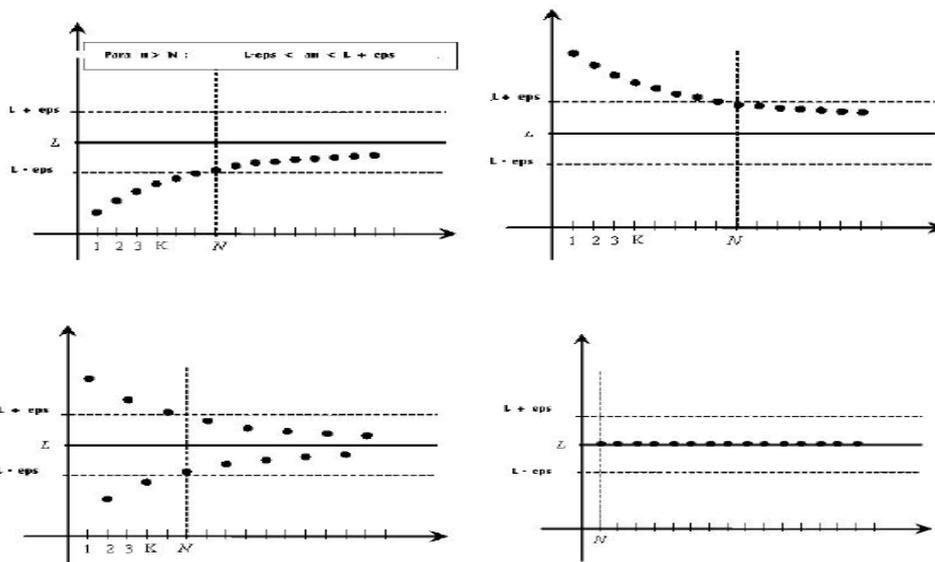
Para un círculo de radio 1, consideren polígonos regulares inscritos P_1 de 4 lados, P_2 de 8 lados, P_3 de 16 lados . . . etc.



Escriban la sucesión de las áreas de estos polígonos. ¿Cómo se puede pensar el área del círculo?

Actividad 6

Observen las figuras siguientes que ilustran varias maneras en las que una sucesión $\{a_n\}$ puede ser convergente a un número L .



Observación importante! Si $\{a_n\}$ converge, entonces, para $\varepsilon > 0$ cualquiera, todos los términos a_n , excepto eventualmente un número finito de ellos (que corresponden a $n < N_\varepsilon$), están en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Ejercicio 15

Determinen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, si es que existe, en los siguientes casos. Indicación: procedan tal como lo hacen en la evaluación del límite para x tendiendo a infinito de una función $f(x)$.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } a_n = \frac{10}{\sqrt{n+1}} & \text{b) } a_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}} & \text{c) } a_n = \frac{3n-2}{6n+1} & \text{d) } a_n = \cos(n\pi) \\ \text{e) } a_n = \operatorname{sen}(n\pi) & \text{f) } a_n = \frac{\ln(n)}{n} & \text{g) } a_n = \frac{3-2^{-n}}{6+4^{-n}} & \text{h) } a_n = n^3 e^{-n} \end{array}$$

Ejercicio 16

Analicen si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas. Si lo son ¿cuál es la razón? ¿Son sucesiones convergentes?

$$\text{a) } \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^n \right\} \quad \text{b) } \{e^{-n}\} \quad \text{c) } \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}$$

A partir de este ejercicio ¿qué pueden concluir para la sucesión $\{r^n\}$? Le sugerimos que considere los casos en que $|r| < 1$, $|r| = 1$ y $|r| > 1$.

Uso de MAPLE

Para generar sucesiones (numéricas o no) podemos utilizar el comando `seq` como se muestra en el siguiente ejemplo:

```
> pares:=seq(2*i,i=1..10); (En pares se guardan los primeros diez números pares)
```

Podemos luego acceder a la sucesión completa escribiendo simplemente

```
> pares;
```

O a algún elemento en particular escribiendo:

```
> pares[3];
```

El comando `For...do` se emplea para repetir un cierto número de veces una serie de instrucciones y se puede utilizar para generar sucesiones elemento por elemento.

Generemos los números pares del 2 al 20:

```
> for k from 1 to 10 do;
    2*k;
od;
```

Asignemos un nombre a cada elemento:

```
> for k from 1 to 10 do;
    a[k]:=2*k;
od;
```

Definiendo la sucesión de este modo podemos recuperar los números generados. Por ejemplo el quinto par es:

```
> a[5];
```

El comando Plot se utiliza para graficar funciones o listas de puntos. Vamos a usar esto último para dibujar algunos puntos en el plano

```
> plot ([[1.2,1.8],[2,2],[1,-1]],style=point,color=red);
> plot ([[1.2,1.8],[2,2],[1,-1]],style=line);
```

Grafiquemos la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ en el plano:

```
> a:=seq([n,1/n],n=1..40);
> grafa:=plot([a],style=point,color=blue);
> grafa;
```

Para visualizar la propiedad que se conoce como “Lema del sándwich”, grafiquemos en un mismo sistema de coordenadas la sucesión $\{a_n\}$ anterior y las sucesiones que tienen

término general $b_n = \frac{\text{sen}(15n)}{n}$ y $c_n = \frac{-1}{n}$

Para graficar las tres sucesiones juntas se utiliza el comando *display*. Este comando se encuentra en el paquete *plots*, el cual antes deberá ser “bajado” con el comando *with*:

```
> b:=seq([n,sin(15*n)/n],n=1..40);
> grafb:=plot([b],style=point,color=red);
> c:=seq([n,-1/n],n=1..40);
> grafca:=plot([c],style=point,color=green);
> with(plots):
> display([grafa,grafb,grafca],axes=normal,title="Lema del sandwich.",
xtickmarks=0,symbol=circle);
```

Grafiquen ustedes ahora la sucesión $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Algo más sobre sucesiones

Una sucesión $\{a_n\}_n$ está *acotada superiormente* si existe algún número $K \in \mathfrak{R}$ tal que, $a_n \leq K$ para todo n y está *acotada inferiormente* si existe algún número $k \in \mathfrak{R}$ tal que $a_n \geq k$ para todo n .

Se dice que $\{a_n\}_n$ está *acotada* si lo está superior e inferiormente. Esto equivale a que exista un número $M > 0$ tal que, para todo n , $|a_n| < M$.

Verifiquen que:

- $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada superiormente por 1 e inferiormente por 0
- $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada superiormente por 1 e inferiormente por (-1)
- $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada superiormente por 1 e inferiormente por 0
- $\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^n\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada inferiormente por 1

Sucesiones monótonas

Las definiciones sobre monotonía de sucesiones se obtienen particularizando a sucesiones las que estudiaron sobre monotonía de funciones. Esto equivale a lo siguiente:

- a) Una sucesión $\{a_n\}$ es *monótona creciente* si y sólo si para todo n es $a_n \leq a_{n+1}$.
- b) Una sucesión $\{a_n\}$ es *monótona decreciente* si y sólo si para todo n es $a_n \geq a_{n+1}$.
- c) Una sucesión $\{a_n\}$ es *estrictamente creciente* si y sólo si para todo n es $a_n < a_{n+1}$.
- d) Una sucesión $\{a_n\}$ es *estrictamente decreciente* si y sólo si para todo n es $a_n > a_{n+1}$.
- e) Una sucesión se dice que es *monótona* si es de alguno de los tipos anteriores.

Resultados útiles:

- Toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente es convergente
- Toda sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente es convergente
- Toda sucesión convergente está acotada.

Tarea: Ejemplifiquen las situaciones planteadas en “Resultados útiles” y comprueben la validez de cada una de las afirmaciones.

Ejemplo 6

Puede demostrarse que la sucesión de término n -ésimo $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es una sucesión estrictamente creciente y acotada superiormente por 3 (calculen algunos términos de la sucesión) y, por lo tanto, es una sucesión convergente. El límite de esta sucesión es el número e, base de los logaritmos neperianos o naturales y de la función exponencial.

Ejemplo 7 La sucesión $\{x^n\}_n$ es monótona decreciente y acotada si $x \in [0,1)$; su límite es 0 si $x \in [0,1)$. Si $x = 1$ es una sucesión constante. Cuando $x \in (1, +\infty)$ la sucesión $\{x^n\}_n$ es estrictamente creciente y no acotada. Verifíquelo !!

Series numéricas

Informalmente, una serie es una suma de infinitos sumandos (¿?) que se denota $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

o también $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

Sumas de ese tipo usamos implícitamente al considerar desarrollos decimales de números. Por ejemplo: la igualdad $\frac{7}{3} = 2,3333333333\dots$ significa

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots$$

(¿cómo se entiende esa suma con infinitos sumandos de la forma $\frac{3}{10^n}$?)

Reflexionen sobre las situaciones que plantean los siguientes problemas:

Problema 1:

Se deja caer una pelota desde una altura inicial de 15 m sobre una losa de concreto. Cada vez que rebota, alcanza una altura que es $\frac{2}{3}$ de la altura anterior. Interprete gráficamente. Determine la altura que alcanza en su tercer rebote, y halle la expresión de la altura en su n -ésimo rebote. Si la pelota rebotara indefinidamente, ¿cuál sería la suma de las alturas verticales recorridas?

Problema 2:

Consideren la expresión $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

¿Qué número le asignarían a la suma?

Puede que alguien piense en simplificar en forma consecutiva los términos y responda “0”, pero tal vez otro estudiante separe el primer término (¿por qué no?) y, simplificando los siguientes, responda “1”. . . ¿Qué piensan al respecto?

En general, dada una sucesión cualquiera $\{a_n\}_n$, ¿qué sentido habrá que darle a la expresión $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$? La respuesta se impone de modo natural: el valor que asignemos a

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene que ser el $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i$ cuando ese límite exista, o sea que, a partir de la sucesión de sumandos $\{a_n\}$ formaremos una nueva sucesión (de *sumas parciales*) $\{S_n\}_n$ donde $S_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, y estudiaremos el límite de la sucesión $\{S_n\}_n$

Ejemplo 8

Para la sucesión $\left\{\frac{3}{10^{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de sumas parciales es:

$$S_1 = 3, S_2 = 3 + \frac{3}{10}, S_3 = 3 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2}, S_4 = 3 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3}, \dots$$

Vean:

$$S_n = 3 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^{n-1}}$$

$$\therefore \frac{1}{10} S_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \dots + \frac{3}{10^n}$$

Restando miembro a miembro esas igualdades obtenemos:

$$S_n - \frac{1}{10} S_n = 3 - \frac{3}{10^n} \quad \rightarrow \quad S_n \left(1 - \frac{1}{10}\right) = 3 \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

y podemos así, en este caso, expresar *en forma sintética* la suma parcial n -ésima S_n :

$$S_n = \frac{3\left(1 - \frac{3}{10^n}\right)}{\left(1 - \frac{1}{10}\right)} \quad \text{y evaluar el límite:} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\left(1 - \frac{3}{10^n}\right)}{\left(1 - \frac{1}{10}\right)} = \frac{3}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{30}{9}$$

La sucesión $\{S_n\}$ es entonces en este caso una sucesión convergente que converge a $\frac{30}{7}$.

Siendo así, decimos que *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^{n-1}}$ *converge a* $\frac{30}{7}$ o equivalentemente, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^{n-1}} \text{ es una serie convergente y su suma es } \frac{30}{7} \text{ y escribimos: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^{n-1}} = \frac{30}{7}$$

Ejemplo 9

Para la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $a_n = (-1)^{n+1}$ la correspondiente sucesión de sumas

parciales será: $S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, \dots$ O sea: $S_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$.

Claramente la sucesión de las sumas parciales diverge. Siendo así, no es posible asignar un

valor a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ y decimos en este caso que: *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ *es divergente*.

Resumiendo:

• Si $\{a_n\}$ es una sucesión infinita de números reales, entonces el símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ representa una *serie infinita* (o simplemente una *serie*).

a_n es el *término general de la serie*

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$ es la *n-ésima suma parcial*

$\{S_n\}$ es la *sucesión de sumas parciales*

• Si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ diremos que *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge a* S . Además, llamaremos a S *suma de*

la serie y escribiremos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

• Si la sucesión $\{S_n\}$ diverge, diremos que *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es divergente*.

Algunos ejemplos de series que tienen una forma especial

En general, no son muchas las series que pueden ser estudiadas usando directamente la definición (esto es, calculando el límite de la sucesión de sumas parciales). Una excepción son las *series geométricas* y las *telescopicas*, cuya convergencia es fácil de estudiar, y, cuando resultan convergentes, hasta se puede encontrar el valor de la suma.

Series geométricas

$\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1}$ es una serie geométrica de primer término a y razón r

(a y r son números reales fijos, diferentes de cero)

i) Si $|r| < 1$ la serie converge, y su suma es $\frac{a}{1-r}$

ii) Si $|r| \geq 1$ la serie diverge.

En efecto, la suma parcial n -ésima es en este caso: $S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$

entonces, $r S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n$

de donde se obtiene, si $r \neq 1$, $S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r}$

Por otro lado, si $r = 1$, $S_n = a + a + \dots + a = n a$

Evalúen el $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ de acuerdo a los posibles valores de r ($|r| < 1$, $|r| > 1$, $r = -1$ y $r = 1$) para justificar la validez de las afirmaciones i) y ii).

Observación: Escribimos por lo general $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para referirnos a una serie, pero tengan

en cuenta que la variación del índice puede comenzar a partir de un natural cualquiera o desde cero.

Ejercicio 17

Muestren que, siendo $|r| < 1$, $\sum_{n=k}^{\infty} ar^n = \frac{ar^k}{1-r}$

Ejercicio 18

Estudien la convergencia de las siguientes series, y en caso de ser posible, obtenga su

suma: a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n}}{7^n}$ c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$

Ejercicio 19

Muestren que $2,99999\dots = 3$

Series telescópicas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) \text{ es una serie telescópica}$$

La peculiar forma de su término general nos permite expresar la suma parcial S_n en forma sintética:

$$S_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \dots + (b_{n-1} - b_n) + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

Ejemplo 10

Observen que el término general de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)}$

puede expresarse usando fracciones parciales en la forma:

$$a_n = \frac{1}{(n+4)} - \frac{1}{(n+5)} = b_n - b_{n+1} \quad (\text{verifiquen}). \text{ Se trata entonces de una serie telescópica.}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right] + \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right] + \left[\frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right] + \dots + \left[\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} \right] \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{n+5} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{5}$$

Por lo tanto:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+4)(n+5)} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} \right) = \frac{1}{5}$$

Ejercicio 20

Hallen la sucesión de sumas parciales S_n para las siguientes series, analicen si convergen y, en caso de ser posible, encuentren la suma.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

Propiedades de las series

A partir de las propiedades de las sumas: $\sum_{i=1}^n c a_i = c \cdot \sum_{i=1}^n a_i$

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

y las de los límites: \blacksquare Si $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = L$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} cA_n = c \cdot L$

\blacksquare Si $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = L_1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = L_2$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n + B_n) = L_1 + L_2$

se deduce que:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ y c es un número real entonces

a) $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c A$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$

(o sea: si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series convergentes entonces son también convergentes

las series $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$)

Podemos afirmar entonces también que:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son dos series y $c \neq 0$ es un número real, entonces

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ diverge

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverge.

Al depender la convergencia de una serie de la existencia del límite de las sumas parciales, es evidente que los primeros términos (cualquier cantidad finita, por grande que ésta sea) de una serie no afectan la convergencia o divergencia de dicha serie, aunque su suma, en caso de existir, se vea, eventualmente modificada. Queda claro entonces que si se suprimen los N primeros términos de una serie no se modifica su comportamiento.

Podemos enunciar lo anterior de la siguiente manera:

Para todo N , las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ son ambas convergentes o ambas

divergentes. Si $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = S$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_N + S$.

Ejercicio 21

Estudien la convergencia de las siguientes series, y en caso de ser posible, obtengan su suma:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3+n}}{7^n} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{6^n} \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{6}{5}\right)^n - \left(\frac{2}{5}\right)^n \right]$$

Ejercicio 22

Hallen la suma de la serie: $4 - 6 + \pi + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

Observación: Al ir estudiando este tema, vemos que hay dos cuestiones básicas acerca de las series: ¿converge?, y si converge, ¿cuál es su suma? No siempre son fáciles de contestar, sobre todo la segunda. Comenzaremos nuestra búsqueda de respuestas con un sencillo teorema conocido como el *criterio de condición necesaria*:

Teorema (Condición necesaria para la convergencia de una serie):

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Observaciones: 1) La demostración es inmediata escribiendo $a_n = S_n - S_{n-1}$

2) **¡Atención!** El teorema nada afirma sobre el comportamiento de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

en caso de que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, pero provee un potente criterio para la divergencia:

Criterio para la divergencia:

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge .

Así por ejemplo, como $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \neq 0$ podemos afirmar usando el criterio para la divergencia que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$ diverge.

Pero, ese criterio no brinda información alguna sobre el comportamiento de series como

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ o como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ porque en ambos casos $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. De hecho, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es una

serie convergente (ustedes lo saben, ya que es una serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$)

mientras que a serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, llamada *serie armónica*, diverge (como veremos más

adelante).

Conclusión: Siendo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ puede ser convergente o divergente.

Ejercicio 23

Estudien la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{10}{n} - \frac{1}{2^n} \right)$

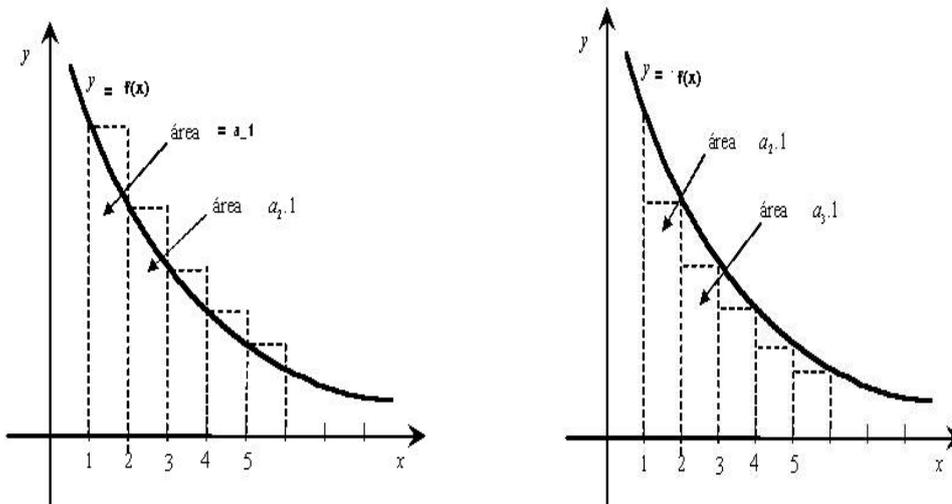
Series de términos positivos

En este apartado vamos a ver algunos resultados (criterios) que nos van a permitir determinar la convergencia o divergencia de series que tengan todos sus términos positivos. Teniendo en cuenta que el comportamiento de una serie no se modifica si suprimimos los N primeros términos de la misma, lo que digamos se aplicará a series

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ donde $a_n > 0 \quad \forall n > N$ sin importar el signo de los N primeros términos.

El primer criterio que estudiaremos relaciona los conceptos de convergencia y divergencia de una integral impropia con la convergencia y divergencia de una serie.

Supongamos que una función f es continua, positiva y decreciente en el intervalo $[1, \infty)$ como muestran las figuras siguientes y sean $a_n = f(n)$ y $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.



Considerando las áreas de los rectángulos resaltados, resulta

$$0 \leq a_2 + a_3 + \dots + a_n \leq \int_1^n f(x) dx \leq a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}$$

o sea,
$$S_n - a_1 \leq \int_1^n f(x) dx \leq S_{n-1}$$

A partir de esa doble desigualdad y teniendo en cuenta que $\left\{ \int_1^n f(x) dx \right\}_n$ y $\{S_n\}_n$ son monótonas crecientes, se desprende que si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existe entonces también existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx \text{ y que, recíprocamente, si } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx \text{ existe, también existe } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Esto nos conduce a concluir que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si la integral impropia

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \text{ converge.}$$

Se tiene entonces:

Criterio de la integral

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos y supongamos que f es una función tal que:

1. $f(n) = a_n$ para $n \geq 1$
2. $f(x)$ es continua, positiva y decreciente para $x \geq 1$

Entonces: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx$ converge.

El criterio de la integral puede aplicarse por ejemplo para estudiar el comportamiento

de la *serie armónica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que le habíamos presentado anteriormente:

siendo $f(x) = \frac{1}{x}$ continua, positiva, decreciente para $x \geq 1$ y tal que $f(n) = a_n = \frac{1}{n}$, como $\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge (¿de acuerdo?) también diverge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Con el mismo criterio pueden estudiarse también las que llamamos *p-series*:

Series p (o p-series):

a) Llamamos *p-serie*, con $p > 0$, a la serie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

b) Si $p = 1$ tenemos la *serie armónica*.

Este tipo de serie converge si $p > 1$ y divergen si $0 < p \leq 1$

Ejemplo 11

Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$.

Siendo $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$, el criterio para la divergencia no ofrece información alguna sobre el comportamiento de la serie.

Como se trata de una serie de términos positivos podemos pensar en aplicar el criterio

de la integral: observe que la función $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ es continua, positiva y decreciente

para $x \geq e$ (vean que $f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$) y entonces, como $\int_3^{\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$ diverge

(compruébenlo), por el criterio de la integral, podemos concluir que $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ es

divergente (¿de acuerdo?) y por lo tanto también diverge $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$

Ejercicio 24

Utilicen el criterio de la integral para estudiar la convergencia de las p -series.

Ejercicio 25

¿Son convergentes o divergentes las siguientes series?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$

Criterio de comparación

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series tales que $0 < a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Entonces: a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge

Observaciones:

- 1) **Insistimos:** Aunque en el enunciado hemos exigido que $0 < a_n \leq b_n \quad \forall n$, como la convergencia de una serie no queda afectada por sus primeros términos, basta con que esa desigualdad se verifique a partir de algún natural en adelante.
- 2) El criterio deja de ser válido para series de términos cualesquiera.
- 3) Hemos omitido la demostración del criterio de comparación y se la proponemos como ejercicio. (Recuerde: Si una sucesión de números reales es monótona creciente y acotada superiormente entonces es convergente).

Ejemplo 12

Estudiamos el comportamiento de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(1/n)}{n^2+1}$

Observemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(1/n)}{n^2+1} = 0$ (sí, pues $-1 \leq \cos(x) \leq 1 \forall x$ y por otro lado n^2+1 tiende a infinito cuando n tiende a infinito) de manera que el criterio para la divergencia no nos da información. Además, la serie es de términos positivos (en efecto: $\forall n$ es $0 < 1/n < 1 < \pi/2$ entonces $\cos(1/n) > 0 \forall n$ y por lo tanto $\frac{\cos(1/n)}{n^2+1} > 0 \forall n$) De modo que podemos pensar en aplicar el criterio de comparación.

La cuestión es... ¿con qué serie comparamos?

A veces la respuesta no es obvia. Bueno, la búsqueda tendrá que encaminarse hacia aquellas series cuyo comportamiento conozcamos (por ejemplo series geométricas o

p-series). En este caso es fácil ver que $\frac{\cos(1/n)}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} \forall n$ y como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es una serie

convergente (¿verdad?) esta comparación sirve: en virtud del criterio de comparación

podemos concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(1/n)}{n^2+1}$ es convergente.

Ejercicio 26

Estudien la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+\sqrt{n}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}+1}$

Otros criterios de convergencia para series de términos positivos se deducen del criterio de comparación:

Criterio de la raíz:

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie tal que $a_n > 0$ para n suficientemente grande, y sea $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

Entonces:

a) Si $L < 1$ la serie converge.

b) Si $L > 1$ la serie diverge.

c) Si $L = 1$ no se obtiene información.

Ejercicio 27

Estudien la convergencia de las siguientes series:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5000}{\sqrt{n}} \right)^n \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n^n}$$

Con frecuencia, una serie dada se parece a una p-serie o a una serie geométrica, pero no resulta fácil establecer comparaciones término a término. Entonces es útil recurrir a un segundo criterio de comparación:

Criterio de comparación en el límite:

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos no negativos tales que $b_n \neq 0 \forall n$

suficientemente grande y supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$.

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen o ambas divergen.

Ejemplo 13

Estudiemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{5n^2+1}$.

El término general tiende a cero. Se trata de una serie de términos positivos.

En ella $a_n = \frac{2n+3}{5n^2+1} = \frac{1}{n} \left(\frac{2+\frac{3}{n}}{5+\frac{1}{n^2}} \right)$ donde el paréntesis tiende a $\frac{2}{5}$ cuando n tiende a

infinito. De manera que si $b_n = \frac{1}{n}$ tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+\frac{3}{n}}{5+\frac{1}{n^2}} \right) = \frac{2}{5} \quad \text{y como } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge, en virtud del criterio de}$$

comparación en el límite, concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{5n^2+1}$ es también divergente.

Ejercicio 28

Estudien la convergencia de las siguientes series:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{an+b} \quad (a > 0, b > 0) \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2-4n+5}$$

Criterio del cociente o de la razón:

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos, y supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.

- Entonces:
- a) Si $L < 1$ la serie converge.
 - b) Si $L > 1$ la serie diverge.
 - c) Si $L = 1$ no se obtiene información.

Observación: Como sucede con el criterio de la raíz, el criterio del cociente no nos da información alguna sobre el comportamiento de la serie cuando el límite en cuestión es igual a 1. Hay que usar, si ese es el caso, otro criterio.

Ejemplo 14

El comportamiento de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ puede estudiarse usando el criterio del cociente.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \div \frac{n^2}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{3} < 1$$

y por lo tanto la serie es convergente. ¿Cuál es su suma? No lo sabemos. Una suma parcial S_n es un valor aproximado de la suma. Es cierto que cuanto más grande sea n mejor será esa aproximación, pero, sería importante poder estimar el error que cometemos al considerar $S \approx S_n$

Ejercicio 29

Estudien la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

Series de términos cualesquiera (positivos y negativos) - Series alternadas

En el apartado anterior, hemos visto varios criterios de convergencia para series de términos positivos, aunque también son aplicables a aquellas series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ que tienen a

lo sumo un número finito de términos negativos. Esos criterios pueden aplicarse también al análisis de series que tienen todos los términos negativos (salvo quizás un número finito) pues en ese caso estudiamos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n)$.

Sin embargo, cuando en una serie aparecen infinitos términos negativos y positivos, los criterios anteriores no son aplicables.

Series alternadas:

Una serie es alternada si puede expresarse en la forma $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ con $b_n > 0 \forall n$

Las siguientes series son ejemplos de series alternadas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n)} = -\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 5} - \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \dots$$

Criterio de Leibniz

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ con $b_n > 0 \forall n$. Si la sucesión $\{b_n\}$ es decreciente y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ es convergente.

Ejemplo15

La serie armónica alternante $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

satisface:

- 1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ es una sucesión decreciente pues $\forall n, n+1 > n \therefore \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

y entonces, por el criterio de Leibniz, es una serie convergente.

Ejemplo 16

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ es alternante, pero $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{4n-1} = \frac{3}{4} \neq 0$ (por lo tanto no satisface la condición 2 del criterio de Leibniz)

Observe que el límite del término general de la serie (o sea, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$) no existe.

Luego, por el criterio de la divergencia concluimos que la serie diverge.

Observación: Si una serie está en las condiciones del criterio de Leibniz a partir de un cierto natural N entonces es una serie convergente (insistimos: si se suprimen los primeros N términos de una serie, su comportamiento no cambia)

Ejercicio 30

Determine la convergencia de las siguientes series:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^{n-1}} \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$$

Estimación del error que se comete al aproximar una serie alternada por una suma parcial.

Si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ con $b_n > 0 \forall n$ satisface las condiciones del criterio de Leibniz, y su suma es S , entonces el resto R_n implicado al aproximar la suma por la suma parcial S_n es, en valor absoluto, menor que el valor absoluto del primer término despreciado. Esto es: $|S - S_n| = |R_n| \leq b_{n+1}$. Es decir, el error cometido al usar la n -ésima suma parcial de la serie como aproximación de S es, a lo sumo, la magnitud del primer término no sumado.

Ejemplo 17

Mostraremos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ es convergente y calcularemos su suma aproximada a dos lugares decimales.

Analicemos las condiciones del criterio de Leibniz:

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ es una serie alternada y se verifica:

$$1) \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!(n+1)} < \frac{1}{n!} \quad \text{entonces } \left\{ \frac{1}{n!} \right\} \text{ es decreciente}$$

$$2) \quad 0 < \frac{1}{n!} < \frac{1}{n} \quad \text{entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$$

Luego, por el criterio de Leibniz, la serie converge.

Ya sabemos que la serie tiene suma. Llamemos S a la suma de la serie.

Podemos aproximar a S por una suma parcial ¿cuál? ¿cuántos términos debemos sumar si queremos aproximar a S con dos decimales exactos?

Aplicando el teorema anterior tenemos:

$$|S - S_n| = |R_n| \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

de manera que para que $|S - S_n| = |R_n|$ sea menor que 0.001 (y garantizar así una aproximación con dos decimales exactos) bastará con que n sea tal que

$$\frac{1}{(n+1)!} < 0.001 \quad (1)$$

Probamos valores de n hasta encontrar el adecuado que verifique la desigualdad. Vemos que:

$$\frac{1}{(5+1)!} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$$

$$\frac{1}{(6+1)!} = \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} < \frac{1}{1000}$$

Luego el primer natural que verifica la desigualdad (1) es $n = 6$.

La suma parcial S_6 es la aproximación adecuada para S .

$$S_6 = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \approx 0.368056 \quad \therefore S \approx 0.368056$$

Ejercicio 31

Prueben que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ es convergente y de una estimación de su suma con un error menor que 0.01.

Convergencia absoluta y convergencia condicional de una serie de términos positivos y negativos

Una serie puede tener infinitos términos positivos y negativos, sin ser alternada, como ocurre con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}$$

Una forma de obtener información sobre su convergencia es investigar la de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2} \right|$$

que, por comparación directa con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, resulta ser convergente.

Pero la cuestión es: ¿converge la serie original o no?. El próximo resultado responde a esta pregunta. Antes de enunciarlo les proponemos que completen el razonamiento que sigue haciendo uso del criterio de comparación y de algunas propiedades de las series.

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (cualquiera), consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, donde $b_n = a_n + |a_n|$.

Observe que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una serie de términos no negativos, que $b_n \leq 2|a_n|$ y que

$a_n = b_n - |a_n|$ (¿cierto?).

Por lo tanto, si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente . . .

Teorema (Convergencia absoluta):

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge \Rightarrow la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

Observaciones:

1) ¡La recíproca es “Falsa”! Por ejemplo, la serie armónica alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ es convergente (por Leibniz), y sin embargo la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.

(Decimos por ello que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge condicionalmente)

2) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge no se puede concluir nada sobre la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (¿por qué?), pero, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge entonces concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge.

Diremos que

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *absolutamente convergente*, si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *condicionalmente convergente*, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge pero $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge.

Ejemplo 18

Estudiemos la convergencia de las siguientes series

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}$$

a) Podemos analizar el comportamiento de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-2)^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ con el criterio de la razón.

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \div \frac{2^n}{n!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n+1} \right) = 0 < 1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-2)^n}{n!} \right|$ es convergente.

Concluimos entonces que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$ es absolutamente convergente.

b) En este caso con el criterio de la razón no podemos decidir el comportamiento de

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ ya que se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n+1}}{n+2} \div \frac{\sqrt{n}}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)\sqrt{n+1}}{(n+2)\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

Como $\frac{\sqrt{n}}{n+1} > \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{1/2}}$ para todo $n > 2$, aplicando el criterio de comparación,

concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ es divergente ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge si

$0 < p \leq 1$ ¿lo recuerdan?) Pero... ¿es convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}$?

Observemos que: 1º) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}/n}{(n+1)/n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{1/n}}{1 + 1/n} \right) = 0$

2º) La sucesión $\left\{ \frac{\sqrt{n}}{n+1} \right\}$ es decreciente (deriven $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ para mostrarlo)

Entonces, por el criterio de Leibniz, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}$ es convergente.

Como hemos visto que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ diverge, concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}$ es

condicionalmente convergente.

Ejercicio 32

Determinen si convergen las siguientes series, y en caso afirmativo si lo hacen absoluta o condicionalmente:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{3^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$

Ejercicio 33

Estudien la convergencia de las siguientes series y, en caso de ser posible, calculen su suma.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^{n+1}}{3^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-2}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(1/n)}{n^2+1}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2-n-1}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n!+1}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n}$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{4n-5n^2}$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-10}{4n^5+n^3}$

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}}$

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sqrt{n}-1}{n^2+2\sqrt{n}}$

ñ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n-1}$

o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+n+1}$

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n^3+5)\text{sen}(1/n)}{n^2 \cdot 3^n}$

q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n}$

Ejercicio 34

i) Determinen si convergen las siguientes series, y en caso afirmativo, si lo hacen absoluta o condicionalmente. ii) En caso de ser posible calculen su suma con un error menor que 0.001

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\ln(2n)}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{3n+2}{4n-3} \right)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{4n^5+n^3}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{3^n}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{3^n}$

Uso de MAPLE

1) Dada la sucesión de término general $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, construyamos la sucesión de sumas parciales, cuyo término general es $S_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i$, usando el comando `for ...do... od` para $n = 10$:

```
> S[1]:=0.5;
> for i from 2 to 10 do;
  S[i]:=0.5^i+S[i-1];
od;
```

¿Tiene límite la sucesión de sumas parciales?

2) Para calcular el valor de la SUMA de una serie que converge podemos usar la sentencia *sum* que es muy sencilla:

```
> sum(1/2^n,n=1..infinity);
```

3) Calculemos algunos valores de la sucesión de sumas parciales de la SERIE

ARMÓNICA

```
> A[1]:=1;
> for i from 2 to 15 do;
  A[i]:=1./i + A[i-1];
od;
```

4) Calculemos los primeros valores de la sucesión de sumas parciales de la SERIE

ARMONICA ALTERNADA y su suma.

```
> B[1]:=1;
> for i from 2 to 20 do;
  B[i]:=(-1)^(i+1.)/i+B[i-1];
od;
> log(2.);
> sum((-1)^(n+1)/n,n=1..infinity);
```

Algo más acerca de las series absolutamente convergentes

Las series absolutamente convergentes tienen una interesante propiedad:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces los términos de la serie pueden ser reacomodados o reagrupados de cualquier manera, y la serie resultante es convergente al mismo número que la serie original.

Por el contrario, si los términos de una serie condicionalmente convergente se escriben en un orden distinto, la nueva serie puede ser divergente o convergente a un número diferente. . .

Veán el siguiente ejemplo: Si S es la suma de la serie armónica alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = S$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{2}S$$

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2}S.$$

$$1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots = S + \frac{1}{2}S.$$

Entonces la serie reordenada $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$ converge a $\frac{3}{2}S$.

Autoevaluación (Series numéricas)

1. ¿Cuál es la diferencia entre una sucesión y una serie?

¿Qué es una serie convergente? ¿Qué es una serie divergente?

2. Explique el significado de la expresión $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$.

3. Sea $a_n = \frac{2n}{3n+1}$. a) ¿ $\{a_n\}$ es convergente? b) ¿ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente?

4. Analice si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos:

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \neq 0$) es convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ es divergente

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ es divergente.

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son divergentes $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ es divergente.

5. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de términos positivos y la sucesión $\{S_n\}$ es acotada por 1000,

explique por qué $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ debe ser convergente.

6. Suponga que si f es una función continua, positiva y decreciente para $x \geq 1$ y $a_n = f(n)$. Mediante una gráfica, clasifique las siguientes cantidades en orden

creciente: $\int_1^n f(x) dx$, $\sum_{i=1}^{n-1} a_i$, $\sum_{i=2}^n a_i$

7. ¿Para qué valores de p converge la serie siguiente $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$?

8. Suponga que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series de términos positivos y que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

a) Si $a_n > b_n$ para todo n ¿Qué puede decir de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$? ¿Por qué?

b) Si $a_n < b_n$ para todo n ¿Qué puede decir de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$? ¿Por qué?

9. Suponga que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series de términos positivos y que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

a) Si $a_n > b_n$ para todo n ¿Qué puede decir de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$? ¿Por qué?

b) Si $a_n < b_n$ para todo n ¿Qué puede decir de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$? ¿Por qué?

10. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente de términos positivos, ¿es convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(a_n)?$$

11. ¿Qué es una serie alternante? ¿qué condiciones garantizan su convergencia? Si esas condiciones se satisfacen ¿qué puede decir acerca del error que se comete al aproximar la suma con la suma parcial n -ésima?

12. Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente, ¿es convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

13. ¿Qué significa la expresión: la serie converge absolutamente?

14. ¿Qué significa la expresión: la serie converge condicionalmente?

Capítulo V: Integrales de línea

Nuestro próximo paso será el estudio de la *integral de línea*. El dominio de integración pasará a ser una curva del plano o del espacio y el integrando, un campo escalar (función a valores reales) o un campo vectorial definidos sobre la curva. Para poder abordar la definición, el cálculo y las propiedades de este nuevo tipo de integrales nos ocuparemos previamente de las curvas y de su representación vectorial paramétrica y de los campos vectoriales.

Curvas en el plano y en el espacio - Parametrización

Toda curva plana puede darse por medio de un par de *ecuaciones paramétricas*:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I$$

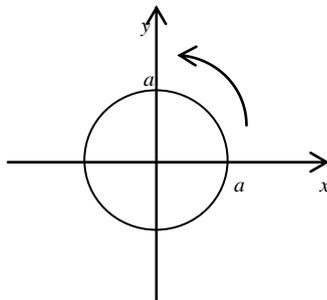
donde I es un intervalo de números reales llamado intervalo paramétrico y $x(t)$ e $y(t)$ son funciones a valores reales.

Ejemplo 1

Para $a > 0$, $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}$ con $t \in [0, 2\pi]$ son las ecuaciones paramétricas de la

circunferencia centrada en el origen de radio a . Observemos que, al considerar valores crecientes de t , “recorremos” la curva en el sentido indicado en el dibujo por la flecha.

Las ecuaciones paramétricas definen una *orientación* (en este caso *antihoraria*)



Actividad 1

a) Comprueben que las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = a \sin t \\ y = a \cos t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$ corresponden

a la misma circunferencia recorrida ahora en sentido horario.

b) Consideren ahora las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = a \cos(2t) \\ y = a \operatorname{sen}(2t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$

Observen que al variar t desde 0 hasta 2π , nos encontramos con la misma circunferencia recorrida en sentido antihorario, pero . . . dos veces.

Grafiquen y comenten:

c) $C: \begin{cases} x = a \cos(2t) \\ y = a \operatorname{sen}(2t) \end{cases} t \in [0, \pi]$

d) $C: \begin{cases} x = a \operatorname{sen} t \\ y = a \cos t \end{cases} t \in [0, \pi]$

Actividad 2

Sea $C: \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 4 \operatorname{sen} t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$

Despejando $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$ de las ecuaciones dadas y haciendo uso de la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, eliminamos el parámetro y obtenemos la ecuación

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

¿De qué curva del plano se trata?

Grafiquen e identifiquen la orientación definida por las ecuaciones paramétricas dadas.

Actividad 3

Eliminen el parámetro t para hallar la ecuación en x e y . Grafiquen e indiquen la orientación en los siguientes casos.

a) $C: \begin{cases} x = 2 \cos(-t) \\ y = 3 \operatorname{sen}(-t) \end{cases} t \in [0, 2\pi]$

b) $C: \begin{cases} x = 2 + 4 \cos t \\ y = 3 + 3 \operatorname{sen} t \end{cases} t \in [0, 2\pi]$

c) $C: \begin{cases} x = 2 + 4 \cos t \\ y = 3 + 3 \operatorname{sen} t \end{cases} t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

d) $C: \begin{cases} x = 1 + 2 \operatorname{sen} t \\ y = 2 + 2 \cos t \end{cases} t \in [0, 2\pi]$

Actividad 4

Sea $C: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}, t \in [0, 1]$

Verifiquen que estas ecuaciones paramétricas corresponden al segmento de recta desde el punto (1,2) hasta el punto (3,5).

Consideren ahora:

$$\text{a) } \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}t \end{cases} \quad t \in [1,3] \quad \text{b) } \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 + 3t \end{cases} \quad t \in [-1,0] \quad \text{c) } \begin{cases} x = 1 + 2(1-t) \\ y = 2 + 3(1-t) \end{cases} \quad t \in [0,1]$$

¿Corresponden al mismo segmento? ¿Cuál es la orientación en cada caso?

Actividad 5

Sea C la curva del plano de ecuación $y = 1 - x^2$

Haciendo $x = t$ tenemos la *parametrización trivial*: $C: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t^2 \end{cases} \quad t \in \mathfrak{R}$

Grafiquen e indiquen la orientación definida por esta parametrización.

Consideren ahora las siguientes ecuaciones paramétricas y describan las curvas que definen (no olvide observar la orientación)

$$\text{a) } \begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = 1 - t \end{cases} \quad t > 0 \quad \text{b) } \begin{cases} x = -t \\ y = 1 - t^2 \end{cases} \quad t \in \mathfrak{R} \quad \text{c) } \begin{cases} x = 2u \\ y = 1 - 4u^2 \end{cases} \quad u \in \mathfrak{R}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t^2 \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad \text{e) } \begin{cases} x = a + b - t \\ y = 1 - (a + b - t)^2 \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

Ejercicio 1

Escriban ecuaciones paramétricas para las siguientes curvas.

- El segmento de recta desde (0,0) hasta (4,-3).
- El segmento de recta desde (5,2) hasta (1,-1).
- La circunferencia con centro en (2,3) y radio $\sqrt{2}$ recorrida en sentido antihorario.
- La elipse $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1$ recorrida en sentido horario.
- La porción de elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, en el primer cuadrante, desde (2,0) hasta (0,3).
- La porción de parábola $y = 2x^2 - 1$ desde (1,1) hasta (3,17).
- La porción de parábola $y = 2x^2 - 1$ desde (3,17) hasta (1,1).

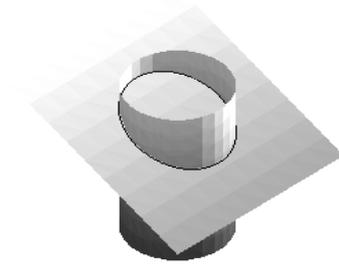
Actividad 6 Sea $C: \begin{cases} x = t^2 - 2 \\ y = t^3 - t \end{cases} \quad t \in \mathfrak{R}$

No parece buena idea expresarla en las variables x e y para dibujarla!

Algunas consideraciones acerca de las funciones $x(t) = t^2 - 2$ e $y(t) = t^3 - t$ (¿presentan máximos o mínimos? ¿son funciones pares o impares?) y la elaboración de una tabla en la que se calculen las coordenadas x e y para algunos valores de t nos permitirán trazar en forma aproximada la curva. Les proponemos que lo hagan y que utilicen luego Maple para constatar su dibujo.

Consideremos ahora una curva en el espacio . . .

Sea $C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$ (C es la intersección de un cilindro con un plano)



La proyección de C en el plano xy es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, así que podemos escribir :

$$x = \cos t \quad ; \quad y = \operatorname{sen} t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

De la ecuación del plano, $z = 2 - y = 2 - \operatorname{sen} t$

Tenemos entonces una descripción paramétrica de la curva:

$$C: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \\ z = 2 - \operatorname{sen} t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

(¿Cuál es la orientación que determina esta parametrización?)

Veremos más adelante otros ejemplos de curvas en el espacio. Introduciremos previamente otra manera de describir curvas: la descripción vectorial

Funciones vectoriales

Una función vectorial \vec{r} es una función cuyo dominio es un conjunto de números reales y cuya imagen es un conjunto de vectores.

Para cada t en el dominio de \vec{r} es:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \quad (\text{si la imagen de } \vec{r} \text{ es un conjunto de vectores del plano})$$

o bien:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad (\text{si la imagen de } \vec{r} \text{ es un conjunto de vectores del espacio})$$

Las funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ son las componentes de \vec{r} (son funciones reales a valores reales). Escribimos a veces, para simplificar la notación,

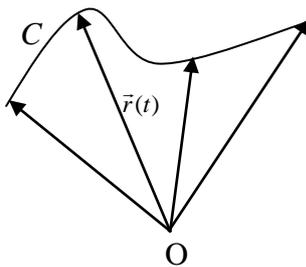
$$\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle \quad \text{o} \quad \vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$$

Una curva (del plano o del espacio) puede describirse con una función vectorial:

$$C: \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \quad (\text{en dos dimensiones}) \quad \text{o}$$

$$C: \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad (\text{en tres dimensiones})$$

El extremo de cada vector $\vec{r}(t)$ corresponde a un punto de la curva.



Ejemplo 2

Hemos visto que la curva $C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$ puede describirse por medio de las

ecuaciones paramétricas
$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 2 - \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$\vec{r} = \vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + (2 - \sin t) \vec{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ es una descripción vectorial de dicha curva (decimos, una ecuación vectorial de la curva)

Ejemplo 3

La ecuación vectorial $\vec{r} = \vec{r}(t) = 2 \cos t \vec{i} + 2 \sin t \vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ corresponde a la circunferencia de radio 2 centrada en el origen en el plano.

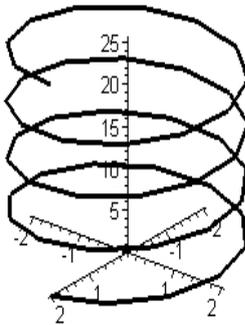
Ejemplo 4

Una curva muy importante del espacio es la *hélice circular* que puede describirse con la ecuación vectorial $\vec{r} = \vec{r}(t) = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + bt \vec{k}$ con a y b no nulos y $t \in \mathcal{R}$.

La curva se halla sobre un cilindro circular de radio a , de forma tal que $\forall P(x,y,z)$ de la misma: $x = a \cos t$, $y = a \sin t$. La restante ecuación $z = bt$ "hace mover" los puntos de la curva con movimiento uniforme en dirección del eje z .

Cuando t crece en 2π , x e y vuelven a sus valores iniciales, mientras que z crece (si $b > 0$) o decrece (si $b < 0$) en $2\pi |b|$, que es llamado *paso* de la hélice.

Si t se restringe al intervalo $[0, 2\pi]$ se tiene una "*espira*" de la hélice.



Hélice con $b > 0$

Ejemplo 5

La intersección de un elipsoide con un plano que contiene al eje x es una elipse en el espacio. Sea por ejemplo $C: \begin{cases} x^2 + 4y^2 + z^2 = 16 \\ z = 2y \end{cases}$

Eliminando z entre ambas ecuaciones, se obtiene la proyección de C sobre el plano xy :

$$x^2 + 4y^2 + 4y^2 = 16 \quad (\text{o sea, } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{2} = 1)$$

que podemos parametrizar en la forma $\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = \sqrt{2} \sin t \end{cases}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$

Además $z = 2y \therefore z = 2\sqrt{2} \sin t$.

Por lo tanto, todo punto $P(x,y,z) \in C$ queda expresado en función de t con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = \sqrt{2} \operatorname{sen} t \\ z = 2\sqrt{2} \operatorname{sen} t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

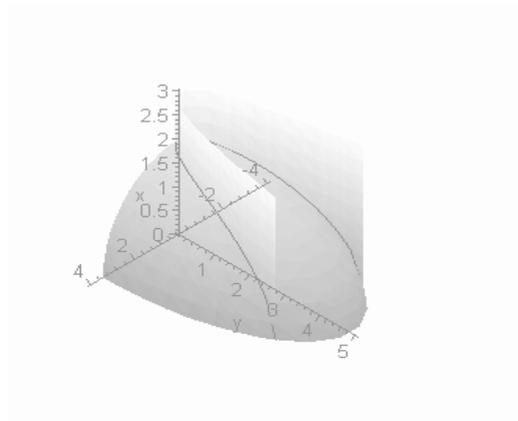
Tenemos entonces la siguiente representación vectorial de C :

$$C: \vec{r} = \vec{r}(t) = 4 \cos t \, \vec{i} + \sqrt{2} \operatorname{sen} t \, \vec{j} + 2\sqrt{2} \operatorname{sen} t \, \vec{k}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Ejemplo 6

$$\text{Sea } C: \begin{cases} \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{24} + \frac{z^2}{4} = 1, \quad z \geq 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

C viene dada como intersección de dos superficies (¿de qué superficies se trata?)



$$\text{Haciendo } x = t \text{ resulta: } y = x^2 = t^2, \quad z^2 = 4 - \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 4 - \frac{t^2}{3} - \frac{t^4}{6}$$

$$\text{de donde, ya que } z \geq 0, \quad z = \sqrt{\frac{24 - 2t^2 - t^4}{6}} \text{ debiendo ser } -2 \leq t \leq 2$$

Tenemos entonces las ecuaciones paramétricas de C

$$C: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = \sqrt{\frac{24 - 4t^2 - t^4}{6}} \end{cases} \quad -2 \leq t \leq 2$$

y la correspondiente ecuación vectorial paramétrica:

$$C: \vec{r} = \vec{r}(t) = t \vec{i} + t^2 \vec{j} + \sqrt{\frac{24 - 4t^2 - t^4}{6}} \vec{k}, \quad -2 \leq t \leq 2$$

Identifiquen los puntos de la curva que corresponden a $t = -2$, $t = 0$, $t = 2$ y determinen la orientación definida por la parametrización dada.

Ejercicio 2

Parametricen las siguientes curvas del espacio

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 2y \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 5x^2 + y^2 + z^2 = 125 \\ y = 2z \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

$$\text{h) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = x^2 \end{cases}$$

$$\text{i) } \begin{cases} 4x^2 + y^2 = z \\ y = x^2 \end{cases}$$

Observación: Para curvas cerradas, el parámetro adecuado es el ángulo de giro. Para otro tipo de curvas, puede tomarse una de las variables como parámetro y despejar las otras dos en función del mismo.

Operaciones con funciones vectoriales – Derivada de una función vectorial

Para las funciones vectoriales - como vectores que son - son válidas todas las operaciones que para vectores se han definido: suma, producto por un escalar, producto escalar (ó interior) y producto vectorial.

La operación producto por escalar, se extiende al producto por una función real, definida en el mismo dominio de la función vectorial.

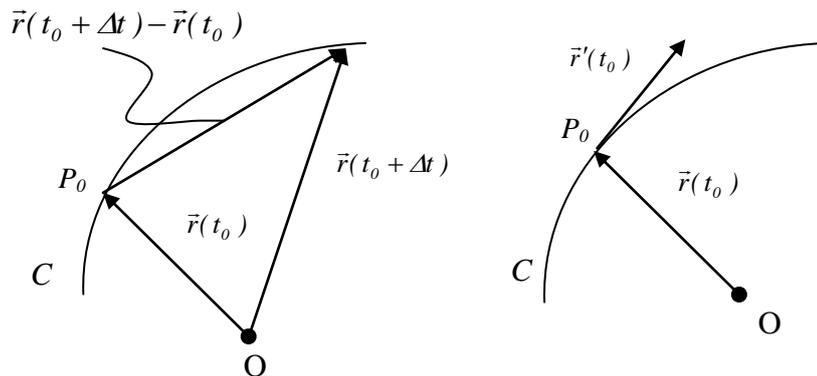
Es decir, si $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, con $t \in I$ y $f: I \rightarrow R$ entonces

$$(f \cdot \vec{r})(t) = f(t)x(t)\vec{i} + f(t)y(t)\vec{j} + f(t)z(t)\vec{k}$$

Recordemos que los conceptos vinculados al cálculo con funciones reales, se extienden a las funciones vectoriales (a través de sus componentes) pudiendo así definirse la derivada de una función vectorial:

Si $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, siendo $x(t), y(t), z(t)$ derivables en t_0 entonces existe $\vec{r}'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}$ que define en P_0 (extremo de $\vec{r}(t_0)$) la dirección tangente a la curva que describe $\vec{r} = \vec{r}(t)$ suponiendo $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$

$$\vec{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$



Recordemos también que a partir de ese resultado, puede trazarse en P_0 la recta tangente, que es la recta que pasa por P_0 , dirigida por $\vec{r}'(t_0)$.

Ejemplo 7

Si queremos escribir la ecuación de la recta tangente a la hélice circular

$C: \vec{r} = \vec{r}(t) = 4\cos t \vec{i} + 4\sin t \vec{j} + 3t \vec{k}$ en el punto correspondiente a $t = \frac{\pi}{4}$, buscamos

las coordenadas del punto de tangencia:

$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\cos\frac{\pi}{4}\vec{i} + 4\sin\frac{\pi}{4}\vec{j} + 3\frac{\pi}{4}\vec{k} = 4\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + 4\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + 3\frac{\pi}{4}\vec{k}$$

Entonces el punto correspondiente a $t = \frac{\pi}{4}$ es $P_0 = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\frac{\pi}{4})$

La dirección tangente $\vec{r}'(t) = -4\sin t \vec{i} + 4\cos t \vec{j} + 3\vec{k}$ evaluada en $t = \frac{\pi}{4}$ es:

$$\vec{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2}\vec{i} + 2\sqrt{2}\vec{j} + 3\vec{k}$$

La recta tangente queda definida por:

$$(x, y, z) = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\frac{\pi}{4}) + h(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3)$$

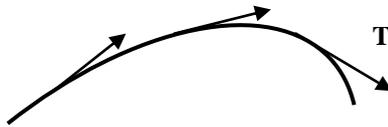
$$\text{o sea: } \begin{cases} x = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} h \\ y = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} h \\ z = 3\frac{\pi}{4} + 3h \end{cases}, \quad h \in \mathfrak{R}$$

Si $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$, se define como vector tangente a la curva $C: \vec{r} = \vec{r}(t)$ en el punto correspondiente a t_0 , al vector unitario con la dirección de $\vec{r}'(t_0)$

$$\vec{T}(t_0) = \frac{\vec{r}'(t_0)}{|\vec{r}'(t_0)|}$$

Observaciones:

1) La dirección de una curva es la que definen los valores crecientes del parámetro y es esta dirección la que en cada punto tiene $\vec{r}'(t)$ y por consiguiente $\vec{T}(t)$. Se dice entonces que el vector tangente define la dirección de la curva en cada punto.



2) Desde ahora en más, vamos a considerar funciones vectoriales, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ derivables con continuidad ($\vec{r}'(t)$ función continua de t) siendo además $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$. Tales funciones son llamadas *suaves*. Si un arco C está definido por una función vectorial suave, se dice que es un *arco suave*. Geométricamente esto significa que en cada punto admite vector tangente que varía con continuidad a lo largo del mismo.

Actividad 7

Antes de continuar, les proponemos que enuncien y justifiquen las siguientes propiedades de la derivada de una función vectorial, con respecto a las operaciones entre vectores.

$$[\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)]' = \dots\dots\dots$$

$$[\alpha \vec{r}(t)]' = \dots\dots\dots$$

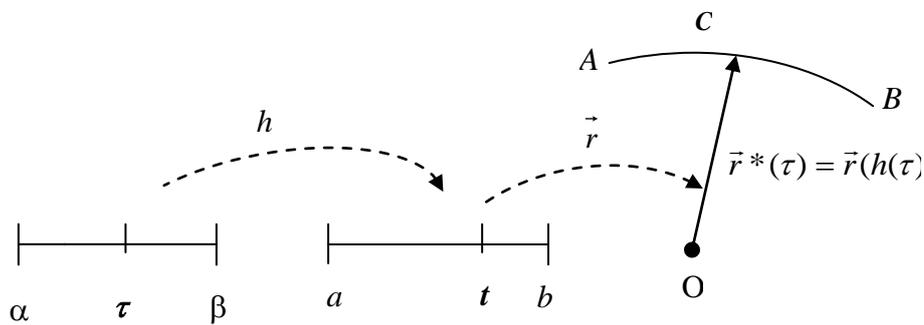
$$[\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)]' = \dots\dots\dots$$

$$[\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)]' = \dots\dots\dots$$

$$[(f \vec{r})(t)]' = \dots\dots\dots \quad (\text{si } f \text{ es una función real})$$

Otra operación no mencionada hasta ahora es la composición de función vectorial con función escalar:

Si $\vec{r} = \vec{r}(t)$ con $t \in [a, b]$ y $h: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ está dada por $h = h(\tau)$ se define $\vec{r}^*(\tau) = \vec{r}(h(\tau)) = (\vec{r} \circ h)(\tau)$ y se dice que es la *composición de h con \vec{r}*



Reflexionemos sobre esta composición:

Supongamos que h es derivable en (α, β) y $h'(\tau) > 0 \forall \tau \in (\alpha, \beta)$, (h es por lo tanto una función estrictamente creciente). Supongamos además que $Imagen(h) = [a, b]$, en ese caso $\vec{r} \circ h(\tau) = \vec{r}^*(\tau)$ describe la misma curva C , conservando además la orientación definida por $\vec{r}(t)$ (tenemos entonces la misma curva C parametrizada con el parámetro τ)

Ahora respondan:

¿Cómo debería ser la función h para obtener una parametrización de la misma curva C pero recorrida ahora en dirección contraria?

Derivada de la función compuesta

Siendo $\vec{r}^*(\tau) = \vec{r} \circ h(\tau) = \vec{r}(t)$ deduzcan la derivada de \vec{r}^* con respecto a τ ¿cómo se relaciona con la derivada de \vec{r} con respecto a t y con $h'(\tau)$?

Indicación: Siendo $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$;

$$\vec{r}^*(\tau) = x(h(\tau))\vec{i} + y(h(\tau))\vec{j} + z(h(\tau))\vec{k} \quad \therefore \quad \frac{d\vec{r}^*}{d\tau} = \dots\dots\dots$$

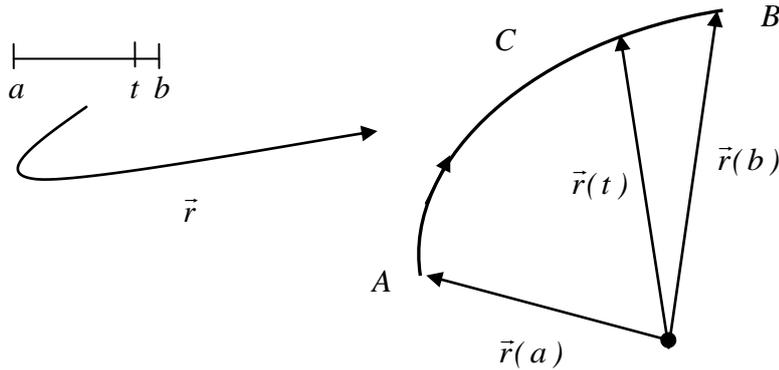
Apliquen regla de la cadena en cada componente y comprueben que $\frac{d\vec{r}^*}{d\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt} h'(\tau)$

Longitud de un arco de curva

Hemos visto en la primera parte del curso que si f y f' son continuas en $[a, b]$, la longitud del arco de curva $y = f(x)$ en ese intervalo viene dada por:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Consideremos ahora una curva suave $C : \vec{r} = \vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ con $t \in [a, b]$ ¿cómo calculamos la longitud de C ?



Dividamos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de longitud $\frac{b-a}{n}$ mediante

$n + 1$ puntos $A = t_0 < t_1 < \dots < t_n = B$.

Uniendo con líneas rectas los sucesivos pares de puntos $P_i = (x(t_i), y(t_i), z(t_i))$ y $P_{i+1} = (x(t_{i+1}), y(t_{i+1}), z(t_{i+1}))$ obtenemos una aproximación poligonal de C .

El segmento rectilíneo $\overline{P_i P_{i+1}}$ tiene longitud

$$|\overline{P_i P_{i+1}}| = \sqrt{[x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2 + [z(t_{i+1}) - z(t_i)]^2}$$

y la longitud de la poligonal es: $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} |\overline{P_i P_{i+1}}|$.

Por el teorema del valor medio aplicado a las funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ en $[t_i, t_{i+1}]$

(recuerden que suponemos que $\vec{r}(t)$ es suave), existen $c_i, d_i, e_i \in (t_i, t_{i+1})$ tales que:

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(c_i)(t_{i+1} - t_i)$$

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = y'(d_i)(t_{i+1} - t_i)$$

$$z(t_{i+1}) - z(t_i) = z'(e_i)(t_{i+1} - t_i)$$

con lo cual:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[x'(c_i)]^2 + [y'(d_i)]^2 + [z'(e_i)]^2} (t_{i+1} - t_i)$$

Considerando que cuando n tiende a infinito la poligonal se aproxima cada vez más a la curva.

$$L_A^B = \text{longitud de } C = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

y, en virtud de la continuidad de x' , y' y z' podemos asegurar que dicho límite existe y es :

$$L_A^B = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

o sea:
$$L_A^B = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt$$

Observemos que, para cada $t \in [a, b]$, la longitud de la porción de curva entre los puntos

$A = (x(a), y(a), z(a))$ y $P = (x(t), y(t), z(t))$ estará dada por:

$$s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(u)| du$$

Observaciones:

1) Esta función $s(t)$ se llama *función longitud de arco* (nos ocuparemos de ella más adelante)

2) Si C es una curva de \mathbb{R}^2 , $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} t \in [t_1, t_2]$, resulta

$$L_A^B = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt$$

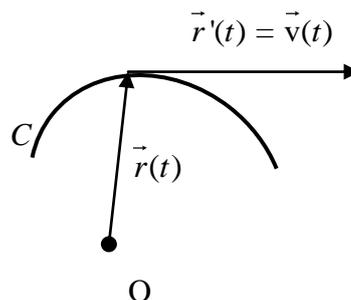
3) Si $C: \vec{r} = \vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ con $t \in [a, b]$ representa la trayectoria de una partícula (o sea, en el instante t la partícula se encuentra en el punto $P_t = (x(t), y(t), z(t))$ que es el punto final del vector $\vec{r}(t)$) . . .

$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) \longrightarrow$ vector velocidad

$s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(u)| du \longrightarrow$ distancia recorrida por la partícula a lo largo de la curva C en el intervalo de tiempo $[a, t]$

$v(t) = s'(t) = |\vec{r}'(t)| \longrightarrow$ rapidez

$\vec{v}'(t) = \vec{r}''(t) \longrightarrow$ vector aceleración



Ejercicio 3

Si $\vec{r} = \vec{r}(t) = \frac{t^3}{3}\vec{i} + t^2\vec{j} + 2t\vec{k}$ describe la posición de una partícula en función del tiempo, calculen la distancia recorrida a lo largo de la trayectoria en el intervalo $[0,4]$

Ejercicio 4

a) Hallen la longitud de una espira de hélice circular.

b) Calculen la longitud del arco definido por $\vec{r} = \vec{r}(t) = e^t \cos t \vec{i} + e^t \sin t \vec{j} + e^t \vec{k}$ desde $A(1,0,1)$ hasta $B(-e^\pi, 0, e^\pi)$

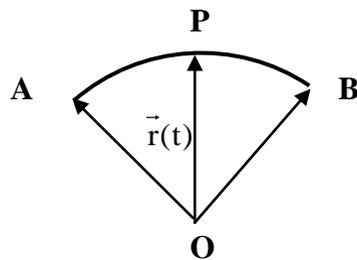
c) Idem para $\vec{r} = \vec{r}(t) = 3 \cosh(2t)\vec{i} + 3 \sinh(2t)\vec{j} + 6t\vec{k}$ para $0 \leq t \leq 1$

Función longitud de arco

Sea C un arco suave definido por $\vec{r} = \vec{r}(t)$ $t \in [a, b]$ y supongamos que

$A \leftrightarrow \vec{r}(a)$; $B \leftrightarrow \vec{r}(b)$. Ya hemos dicho que para cada $t \in [a, b]$, $s(t) = \int_a^t |\vec{r}'(x)| dx$ es

la longitud de la porción de curva entre los puntos $A = (x(a), y(a), z(a))$ y $P = (x(t), y(t), z(t))$ y que esa función s se llama *función longitud de arco*.



¿Qué podemos decir de la función s ?

1. Puede observarse que $s(a) = 0$, $s(b) = L_A^B$ (longitud total del arco)
2. La imagen de s es el intervalo $[0, L_A^B]$
3. $s(t)$ es una función integral en consecuencia es derivable y $s'(t) = |\vec{r}'(t)|$
4. Como $s'(t) > 0$ (¿pueden explicar por qué?) $s(t)$ es estrictamente creciente y podemos afirmar entonces que $s: [a, b] \rightarrow [0, L_A^B]$ admite inversa.

5. ¿Cuál es la inversa? Es una función que podemos llamar h , que asigna a cada longitud de arco s un valor de t .

$$\begin{aligned} s: [a, b] &\rightarrow [0, L_A^B] & h: [0, L_A^B] &\rightarrow [a, b] \\ t &\rightarrow s(t) = s & s &\rightarrow h(s) = t \end{aligned}$$

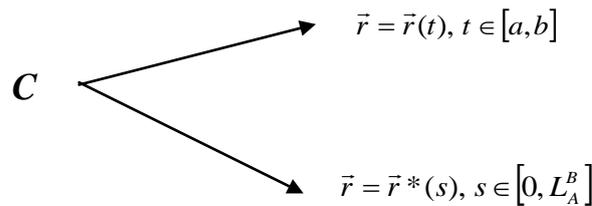
La función h es derivable en $(0, L_A^B)$ siendo

$$\frac{dt}{ds} = h'(s) = \frac{1}{s'(t)} \quad (\text{expliquen por qué})$$

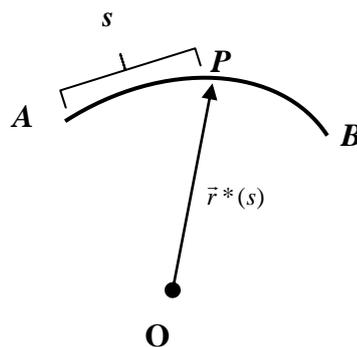
Entonces $h'(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|r'(t)|} > 0 \quad \therefore h$ es creciente

y por lo tanto, $\vec{r} = \vec{r}(h(s)) = \vec{r}^*(s)$ con $s \in [0, L_A^B]$ describe la misma curva que $\vec{r} = \vec{r}(t)$ con $t \in [a, b]$, conservando la orientación.

Conclusión:



Tenemos así, la curva parametrizada en función de la longitud de arco. Esto significa que la posición de cada punto P a lo largo de la misma queda fijada por la distancia recorrida desde el punto inicial A hasta P , medida sobre la trayectoria.



La parametrización de una curva en función de la longitud de arco, es llamada **parametrización natural** ¿qué más natural que describir la posición en términos del camino recorrido? por ejemplo, decir que cierto punto es el que está a 10 cm del punto inicial y así sucesivamente.

Sería conveniente poder expresar a toda curva en función de su parámetro natural (por lo que veremos más adelante), pero no siempre es posible.

Ejemplo 8

Sea $\vec{r} = \vec{r}(t) = a \cos t \vec{i} + a \operatorname{sen} t \vec{j}$, $t \in [0, 2\pi]$ (circunferencia con centro en el origen y radio a) Vamos a obtener su parametrización natural:

$$s : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi a]$$

$$s = s(t) = \int_0^t |\vec{r}'(x)| dx$$

$$\vec{r}'(t) = -a \operatorname{sen} t \vec{i} + a \cos t \vec{j} \quad \therefore \quad |\vec{r}'(t)| = a \quad \therefore \quad s = s(t) = \int_0^t a dx = at$$

De $s = at$ despejamos $t = \frac{s}{a}$ y reemplazamos en $\vec{r}(t)$ obteniendo:

$$\vec{r} = \vec{r}\left(\frac{s}{a}\right) = \vec{r}^*(s) = a \cos \frac{s}{a} \vec{i} + a \operatorname{sen} \frac{s}{a} \vec{j}, \quad s \in [0, 2\pi a]$$

Observación: $\frac{d\vec{r}^*}{ds} = (\vec{r}^*)'(s) = -a \operatorname{sen}\left(\frac{s}{a}\right) \frac{1}{a} \vec{i} + a \cos\left(\frac{s}{a}\right) \frac{1}{a} \vec{j}$

es decir $(\vec{r}^*)'(s) = -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{a}\right) \vec{i} + \cos\left(\frac{s}{a}\right) \vec{j}$

pudiéndose comprobar por cálculo directo que $|(\vec{r}^*)'(s)| = 1$ lo cual es válido en general ya que, siendo

$$\vec{r}^*(s) = \vec{r}(h(s))$$

$$\frac{d\vec{r}^*}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \vec{r}'(t) \cdot \frac{1}{|\vec{r}'(t)|}$$

o sea que $(\vec{r}^*)'(s)$ es el vector tangente unitario \vec{T} .

Ejercicio 5

Obtengan la parametrización natural para una espira de la hélice circular. Calculen el vector tangente unitario.

Ejercicio 6

Obtengan la parametrización natural de la curva $\vec{r}(t) = e^t \cos t \vec{i} + e^t \operatorname{sen} t \vec{j}$, $t \in [0, 1]$.

Calculen el vector tangente unitario.

Uso de MAPLE

Para graficar curvas en el espacio se puede proceder de la siguiente manera:

> *with(plots):*

> *spacecurve([cos(t),sin(t),2*t],t=-Pi..3*Pi, color = blue,*

thickness=2); (se obtiene así la gráfica de la hélice cuya ecuación vectorial

paramétrica es $\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + 2t\vec{k}$, $t \in [-\pi, 3\pi]$)

Para graficar la hélice y el cilindro que la contiene hacemos:

> *with(plots):*

> *fig1:=spacecurve([cos(t),sin(t),2*t],t=0..2*Pi, color = black, thickness=2);*

> *fig2:=implicitplot3d(x^2 + y^2 = 1, x= -1..1, y=-1..1, z= 0..18);*

> *display3d(fig1,fig2);*

Para graficar curvas en el plano podemos proceder como en el siguiente ejemplo

> *implicitplot(x^2/4+y^2/9=1,x=-2..2,y=-3..3);* (se trata de una elipse cuya ecuación está dada en forma implícita)

Si la ecuación de la elipse esta dada en forma paramétrica:

> *plot([2*sin(t),3*cos(t),t=0..2*Pi]);*

Campos vectoriales

Dado $D \subset \mathbb{R}^3$ (ó \mathbb{R}^2), un *campo escalar* f con dominio en D es una función que asigna a cada punto $P \in D$ un único número real, indicado $f(P)$.

La temperatura en una habitación es un campo escalar (suponiendo que la temperatura no varía con el tiempo, cada punto (x,y,z) tiene una temperatura, digamos $T(x,y,z)$, que es un número real medido por ejemplo en grados centígrados). La *presión atmosférica* sobre la tierra es también un campo escalar (a cada punto geográfico, identificado con su longitud, latitud y altitud, le corresponde un valor numérico de la presión, expresado, por ejemplo, en Pascales). Encontrarán fácilmente muchos otros ejemplos de campos escalares, pero también saben que, frecuentemente, es necesario recurrir al empleo de *vectores* para describir ciertos comportamientos y/o resultados. Veamos:

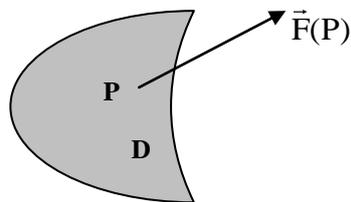
- Hemos dicho que la dirección de una curva, queda en cada punto definida por el *vector tangente* y que la variación del mismo, nos permite estudiar su forma.
- Recordemos también que - bajo ciertas condiciones - podemos conocer en qué dirección se produce la mayor rapidez de cambio de una función de dos ó tres variables en un punto dado. Tal dirección es la del *gradiente* en ese punto particular y el módulo del mismo, mide la magnitud de ese cambio. En cada

punto en que el gradiente esté definido, tenemos la posibilidad de conocer el comportamiento de tal función.

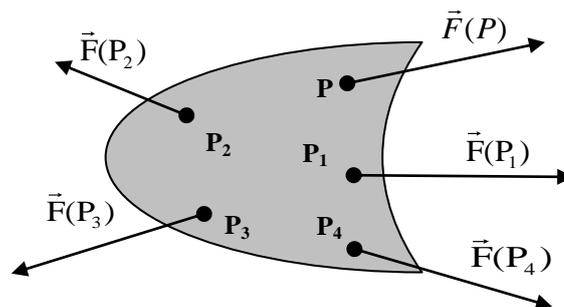
- Sabemos que sobre todo cuerpo de masa m actúa una fuerza: la fuerza de la gravedad, que se representa por medio de un vector de dirección vertical hacia abajo.
- También la velocidad de una partícula móvil, requiere de un vector para su descripción. Podríamos mencionar la velocidad del viento en cada punto de la tierra, la cual se expresa no solo con su valor, sino con la dirección en la que sopla el viento o la velocidad de una partícula de un fluido - líquido o gas - en movimiento.

Dado $D \subset \mathcal{R}^3$ (ó $D \subset \mathcal{R}^2$), un *campo vectorial* \vec{F} con dominio en D es una función que asigna a cada punto $P \in D$ un único vector, indicado $\vec{F}(P)$.

Una función de tal naturaleza no puede graficarse, pero podemos interpretar:



En cada punto $P \in D$, el vector $\vec{F}(P)$ es único. $\vec{F}(P)$ va cambiando (en módulo y dirección) punto a punto (si no es constante).



Los campos vectoriales reciben denominaciones especiales, según la interpretación física de los vectores que lo constituyen: así se tienen campos de fuerzas, campos de velocidades, campos eléctricos, etc.

Componentes de un campo vectorial

Si \vec{F} es un campo vectorial definido en un subconjunto de \mathbb{R}^3 (ó \mathbb{R}^2), queda identificado por medio de tres (dos) componentes reales, funciones de tres (dos) variables:

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

$$\text{o bien } \vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

Salvo indicación explícita, entenderemos que el dominio D de un campo vectorial \vec{F} es el mayor dominio posible, esto es, el mayor subconjunto de \mathbb{R}^3 (o \mathbb{R}^2) en el que están definidas todas las componentes del campo.

Ejemplo 9

¿Cuál es el dominio de los siguientes campos vectoriales?

a) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + 2yz)\vec{i} + (y^3 + z^2)\vec{j} + (x + y + z)\vec{k}$

d) $\vec{F}(x, y) = 2\vec{i} + 3\vec{j}$

b) $\vec{F}(x, y, z) = \text{sen } x\vec{i} + (2\text{sen } x + y)\vec{j} + \cos(xz)\vec{k}$

e) $\vec{F}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}\vec{i} + \frac{y}{x^2 + y^2}\vec{j}$

c) $\vec{F}(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2}\vec{i} + \frac{y}{x^2 + y^2}\vec{j} + \frac{z}{x^2 + y^2}\vec{k}$

f) $\vec{F}(x, y) = \frac{y}{x}\vec{i} + \frac{y}{y-1}\vec{j}$

Para los campos de los incisos a) y b), el mayor dominio posible es $D = \mathbb{R}^3$

En c) observen que las componentes no están definidas en los puntos (x, y, z) en los que $x = y = 0$. El mayor dominio posible es entonces el conjunto $D = \mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) / x = y = 0\}$ es decir, todos los puntos de \mathbb{R}^3 menos los que se encuentran en el eje z .

El campo vectorial del inciso d) está definido los puntos de $D = \mathbb{R}^2$. Observen que es éste un *campo constante* (a cada punto del plano le corresponde el mismo vector)

En e), las componentes no están definidas en los puntos (x, y) en los que $x = y = 0$. El mayor dominio posible es entonces el conjunto $D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

En f), las componentes no están definidas en los puntos (x,y) en los que $x=0$ o $y=1$. El mayor dominio posible es entonces el conjunto $D = \{(x,y)/x \neq 0 \wedge y \neq 1\}$, es decir, todos los puntos de \mathcal{R}^2 menos los que se encuentran en las rectas $x=0$ e $y=1$.

Gráficos de campos vectoriales

No es posible dibujar por completo un campo vectorial, ya que consta de infinitos vectores. En lugar de eso, lo que se hace es un esquema gráfico dibujando unos cuantos vectores representativos $\vec{F}(x,y)$ aplicados en el punto (x,y) correspondiente.

Ejemplo 10

Sea $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ ¿qué vectores corresponden a los puntos $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(2,1)$, $(0,-1)$, $(-1,0)$?

$$\vec{F}(0,0) = 0\vec{i} + 0\vec{j}$$

$$\vec{F}(1,1) = 1\vec{i} + 1\vec{j}$$

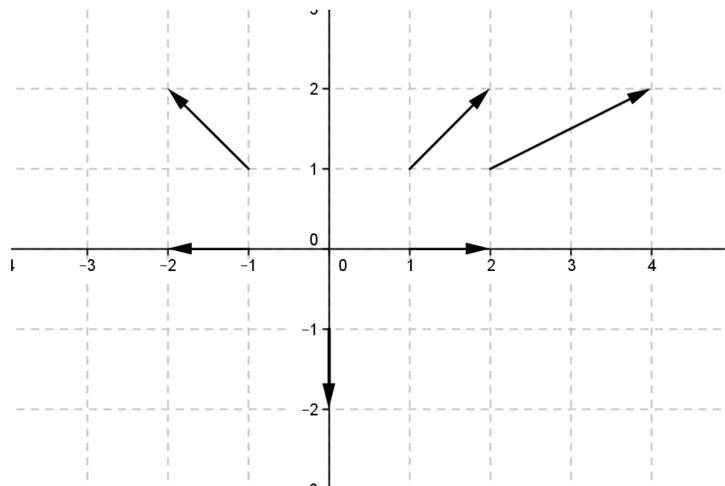
$$\vec{F}(-1,1) = -1\vec{i} + 1\vec{j}$$

$$\vec{F}(2,1) = 2\vec{i} + 1\vec{j}$$

$$\vec{F}(0,-1) = 0\vec{i} - 1\vec{j}$$

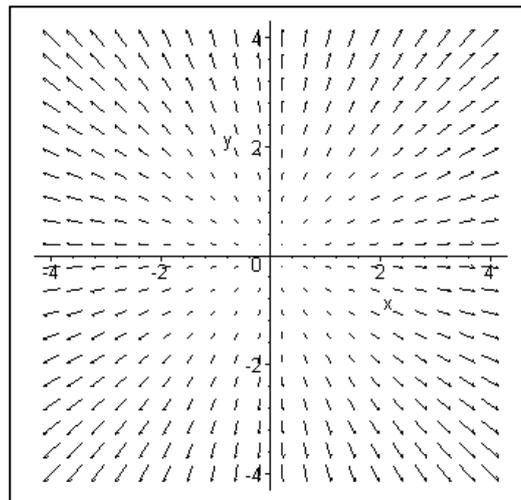
$$\vec{F}(-1,0) = -1\vec{i} + 0\vec{j}$$

Los representamos:



Cuantos más vectores representemos mejor será la idea que tendremos del campo vectorial.

Este campo es llamado *radial*, los vectores se alejan del origen e incrementan el módulo a medida que la distancia al origen es mayor.



$$\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Ejercicio 7

Dibujen algunos vectores de los siguientes campos vectoriales. Calculen $|\vec{F}|$ y comenten los resultados obtenidos.

- a) $\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ b) $\vec{F}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{j}$ c) $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} + 0\vec{j}$
d) $\vec{F}(x, y) = \text{sen } y\vec{i} + 0\vec{j}$ e) $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k}$ f) $\vec{F}(x, y, z) = -z\vec{k}$

Corroboren sus gráficas del ejercicio anterior usando MAPLE:

> *with(plots):*

> *fieldplot([x,y],x=-2..2,y=-2..2,color=blue);* (el comando *fieldplot* se usa para campos en \mathfrak{R}^2 poniendo entre corchetes las componentes del campo y luego la variación de x e y)

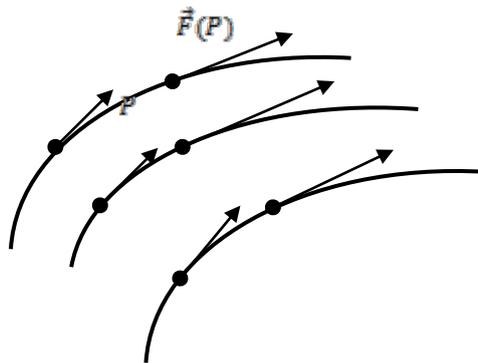
> *fieldplot3d([y,x,0],x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2,color=blue);* (el comando *fieldplot3d* se usa para campos en \mathfrak{R}^3 poniendo entre corchetes las componentes del campo y luego la variación de x , y y z .)

Comentarios:

1) Los campos vectoriales, que describen ciertos fenómenos físicos pueden depender, además de la posición, también del tiempo. Por ejemplo un campo de velocidades de un

fluido en movimiento describe la velocidad de una partícula, en función de las coordenadas del punto por donde pasa, pero, si además esa velocidad se modifica de acuerdo con el instante en que eso ocurre, el vector resulta dependiente de t (tiempo). Los campos vectoriales independientes del tiempo son llamados campos *vectoriales estacionarios*.

2) Las líneas que en cada punto son tangentes al vector campo que pasa por el mismo punto, son llamadas *líneas de campo* y también en ciertos casos particulares, *líneas de flujo* o *líneas de corriente*. Cabe aclarar que el nombre de líneas de corriente es más adecuado para las trayectorias descritas por las partículas de un fluido en movimiento, donde hay dependencia del tiempo (campo no estacionario). Para campos estacionarios, es común decir líneas de campo a esas trayectorias, pero en tal caso las líneas coinciden.



Ejercicio 8

Si $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} - y\vec{j}$ es el campo de velocidades de una partícula de un fluido en movimiento encuentren las trayectorias seguidas por ella (líneas de campo) siguiendo los pasos:

- Usen MAPLE para graficar el campo vectorial.
- Teniendo en cuenta la gráfica, ¿pueden indicar la forma de las trayectorias?
- Si las ecuaciones paramétricas de una línea de campo son $x = X(t)$, $y = Y(t)$, expliquen por qué estas funciones satisfacen las ecuaciones diferenciales $\frac{dx}{dt} = x$ y $\frac{dy}{dt} = -y$.
- Resuelvan las ecuaciones diferenciales para hallar la línea de campo que pasa por el punto $(1,1)$.
- Encuentren la línea de campo que pasa por el $(1,0)$.

Campo gradiente

Recordemos que si f es una función definida en $D \subset \mathfrak{R}^3$ que admite derivadas parciales en un entorno de $P_0 \in D$, queda definido el vector:

$$\vec{\nabla}f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\vec{k}$$

llamado *gradiente de f en P_0* . Si, además, esas derivadas son continuas, *el gradiente permite calcular la derivada direccional, en toda dirección posible*.

En cada punto $P \in D$, $\vec{\nabla}f(P)$ indica la dirección de máximo crecimiento de f , $|\vec{\nabla}f(P)|$ la tasa o razón de ese máximo crecimiento. Idéntica situación queda definida en \mathfrak{R}^2 .

Ejemplo 11

Sean $w = f(x, y, z) = 3x^2y + 2z^3x$ y el vector unitario $\vec{u} = \langle \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2} \rangle$

La derivada direccional de $f(x, y, z)$ en $P_0(3, 1, -1)$ y en la dirección del vector unitario

$$\vec{u} \text{ es: } D_{\vec{u}}f(3,1,-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, -1+h\frac{1}{2}) - f(3,1,-1)}{h}$$

y puede calcularse de la siguiente manera: $D_{\vec{u}}f(P_0) = \vec{\nabla}f(P_0) \cdot \vec{u}$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}f(x, y, z) &= (6xy + 2z^3)\vec{i} + (3x^2)\vec{j} + (6z^2x)\vec{k} \\ \vec{\nabla}f(P_0) &= 16\vec{i} + 27\vec{j} + 18\vec{k}\end{aligned}$$

$$\text{y por lo tanto: } D_{\vec{u}}f(3,1,-1) = \vec{\nabla}f(3,1,-1) \cdot \langle \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2} \rangle = \langle 16, 27, 18 \rangle \cdot \langle \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2} \rangle = 8\sqrt{3} + 9$$

Actividad 8

En un mismo sistema de coordenadas grafiquen el campo gradiente de

$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ y las curvas de nivel de f . Observen y comenten lo obtenido.

Indicación: Pueden usar MAPLE, con los comandos que se encuentran a continuación.

> *with(linalg):*

> *with(plots):*

> *f:=(x^2+y^2+1)^(1/2):*

> *g:=gradplot((x^2+y^2+1)^(1/2),x=-2..2,y=-2..2,color=red):*

> *h:=contourplot(f,x=-2..2,y=-2..2,color=blue):*

> *display({g,h}):*

Propiedad: El campo $\vec{\nabla}f$ es normal a las curvas de nivel de f .

Dicho de otra manera:

Las líneas de flujo de $\vec{\nabla}f$ son perpendiculares a las curvas de nivel de f .

Función potencial

Decimos que un campo vectorial \vec{F} es un campo gradiente en D ($D \subset \mathbb{R}^3$ ó $D \subset \mathbb{R}^2$) si existe un campo escalar f tal que $\vec{\nabla}f(P) = \vec{F}$ para todo punto de D . Si eso sucede la función f se dice que es una *función potencial* de \vec{F} en D .

Sabemos cómo construir el campo gradiente de una función f dada, pero, dado un campo vectorial \vec{F} , ¿cómo podemos decidir si es un campo gradiente?

Por ahora, simplemente, tratando de hallar una función potencial:

Si $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ se busca f tal que:
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = P \\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q \end{cases}$$

Ejemplo 12

¿Es $\vec{F}(x, y) = 2xy\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ un campo gradiente en \mathbb{R}^2 ?

Busquemos $f(x, y)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \wedge \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2$

Integrando $\frac{\partial f}{\partial x}$ con respecto a x se tiene: $f(x, y) = \int 2xy \, dx = x^2y + \varphi(y)$ (¡noten que la constante de integración puede depender de y !).

Por lo tanto: $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2 = x^2 + \varphi'(y)$ así que $\varphi'(y) = y^2$

de donde $\varphi(y) = \frac{y^3}{3}$ y $f(x, y) = x^2y + \frac{y^3}{3} + C$. Luego \vec{F} es un campo gradiente.

(Pueden verificar que $\vec{\nabla}f(P) = \vec{F}$).

Ejemplo 13

Para decidir si $\vec{F}(x, y) = xy \vec{i} + y^2 \vec{j}$ es un campo gradiente buscamos $f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xy \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y^2$$

Al integrar $\frac{\partial f}{\partial x}$ con respecto a x se tiene, en forma similar al ejemplo anterior,

$$f(x, y) = \int xy \, dx = (x^2/2)y + \varphi(y)$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial y} = y^2 = \frac{x^2}{2} + \varphi'(y)$$

$$\therefore \varphi'(y) = y^2 - \frac{x^2}{2}$$

Observen la última igualdad que escribimos: ¡la derivada con respecto a y , de una función de y , resulta dependiente de x ! Esto obviamente no es posible y nos permite concluir que no existe ninguna función que cumpla $\frac{\partial f}{\partial x} = xy$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = y^2$ simultáneamente y por lo tanto el campo no es un campo gradiente.

Actividad 9

Un campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ es un campo gradiente en $D \subset \mathbb{R}^3$ si existe un campo escalar f tal que, en todo $(x, y, z) \in D$ es:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = P(x, y, z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = Q(x, y, z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = R(x, y, z)$$

Un campo escalar f que cumpla con ello se dice que es una función potencial de \vec{F} .

Para decidir si $\vec{F}(x, y, z) = (2x-3y)\vec{i} + (-3x)\vec{j} + 2\vec{k}$ es o no un gradiente, procederemos como lo hemos hecho en los ejemplos anteriores:

A partir de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = P(x, y, z)$, integrando con respecto a x , se obtiene:

$$f(x, y, z) = \int (2x-3y) \, dx = (x^2 - 3yx) + \varphi(y, z)$$

Luego, para que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = Q(x, y, z)$ debe ser $\frac{\partial f}{\partial y} = -3x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -3x$

y por lo tanto, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ lo que significa que φ depende en este caso sólo de z ,

o sea: $\varphi(y, z) = \psi(z)$ y $f(x, y, z) = x^2 - 3yx + \psi(z)$

Finalmente, para que se cumpla que $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = R(x, y, z)$,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \psi'(z) = 2 \quad \therefore \quad \psi(z) = 2z + C \quad \text{y podemos concluir que:}$$

$f(x, y, z) = x^2 - 3yx + 2z$ es una función potencial de \vec{F} en \mathfrak{R}^3 (luego, \vec{F} es un campo gradiente en \mathfrak{R}^3)

- Verifiquen ustedes que, efectivamente, siendo $f(x, y, z) = x^2 - 3yx + 2z$ resulta

$$\vec{\nabla}f(x, y, z) = (2x - 3y)\vec{i} + (-3x)\vec{j} + 2\vec{k} \quad \forall (x, y, z) \in \mathfrak{R}^3.$$

- Decidan a continuación (procediendo como en los ejemplos) cuáles de los siguientes campos son campos gradientes en \mathfrak{R}^3 (o \mathfrak{R}^2)

a) $\vec{F}(x, y, z) = yz \cos(xyz)\vec{i} + xz \cos(xyz)\vec{j} + xy \cos(xyz)\vec{k}$

b) $\vec{F}(x, y, z) = e^y \cos z \vec{i} + x e^y \cos z \vec{j} - x e^y \operatorname{sen} z \vec{k}$

c) $\vec{F}(x, y) = x \vec{i} + y \vec{j}$

d) $\vec{F}(x, y, z) = yz \vec{i} + xz \vec{j} + xy \vec{k}$

Pueden verificar los resultados obtenidos usando MAPLE como se indica a continuación

> $g := [2*x, 2*y, 2*z];$

> $\text{potential}(g, [x,y,z], 'G');$

> $G;$

Actividad 10

De acuerdo con lo formulado por Isaac Newton, la *magnitud* de la fuerza de atracción entre objetos de masa m_1 y m_2 respectivamente, está dado por:

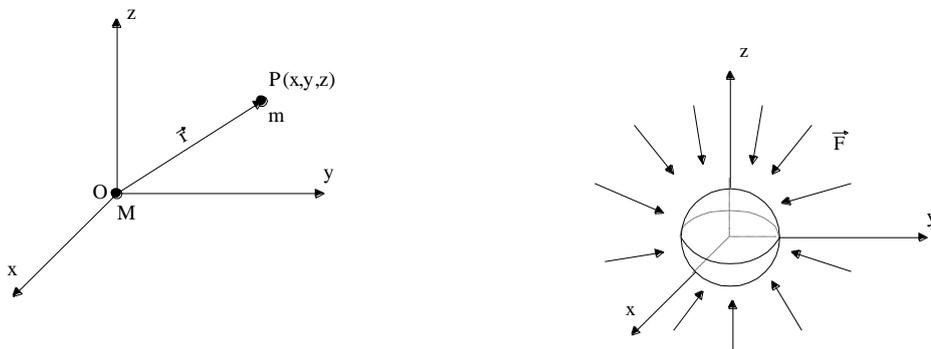
$$|\vec{F}| = g \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

donde d es la distancia entre los objetos y g es la constante gravitacional. Esta es la famosa ley gravitacional y constituye un importante ejemplo de campo de fuerzas.

Supongamos que un objeto esférico de masa M (por ejemplo la Tierra), tiene su centro en el origen. Sea $\vec{F}(x, y, z)$ la fuerza ejercida por esta masa sobre un objeto de masa m situado en un punto $P(x, y, z)$ del espacio. Podemos suponer que el objeto de masa M puede manejarse como un punto masa situado en el origen.

Si $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ entonces: $|\vec{F}| = g \frac{M.m}{|\vec{r}|^2}$

\vec{F} está dirigida hacia el origen, tiene la dirección del vector unitario $\vec{u} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$



En consecuencia: $\vec{F} = |\vec{F}|\vec{u} = g \frac{M.m}{|\vec{r}|^2} \left(-\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right)$

$$\vec{F} = -g.M.m. \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Les proponemos ahora lo siguiente:

Si llamamos $c = g.M.m$ el campo vectorial \vec{F} , resultado de la ley del inverso del cuadrado, puede ser expresado como:

$$\vec{F}(x, y, z) = -c. \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = -c. \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Comprueben que \vec{F} es un campo gradiente hallando su función potencial.

Estudio de la variación de un campo

Sabemos que la variación de una función se estudia por medio de las derivadas (parciales y/o totales) de la misma. Cuando se trata de un campo vectorial, las

derivadas parciales de sus componentes (cuando existen), combinadas de determinadas maneras, están involucradas en el estudio de su comportamiento.

Supongamos que las componentes de $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\hat{i} + Q(x, y, z)\hat{j} + R(x, y, z)\hat{k}$ admiten derivadas parciales con respecto a cada una de las variables:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{array}$$

Se definen una magnitud vectorial (un nuevo campo) y una magnitud escalar (función real de tres variables) de la siguiente manera:

a) Se llama **divergencia** del campo $\vec{F} = \langle P, Q, R \rangle$, a la función escalar:

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

(suma de las derivadas de P , Q y R , con respecto a las variables asociadas a las respectivas direcciones)

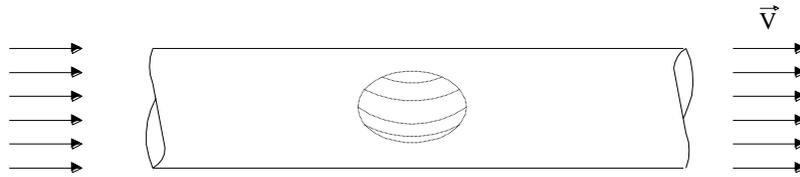
b) Se llama **rotor** (ó rotacional) de \vec{F} , al campo vectorial:

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{k}$$

que combina para cada componente, las variables y componentes de \vec{F} asociadas con el plano perpendicular al versor correspondiente.

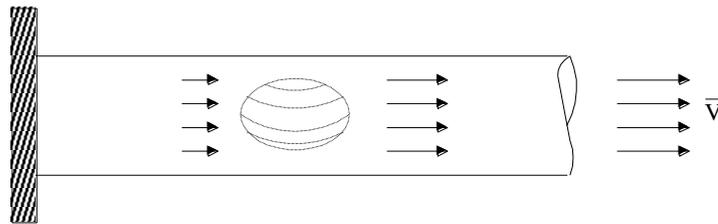
Observación: Estas definiciones, aunque parezcan arbitrarias, no lo son. Iremos descubriendo sus implicancias a lo largo de lo que resta del curso y discutiremos interpretaciones físicas concretas de ellas cuando estudiemos el Teorema de Stokes y el Teorema de Gauss. Por ahora, haremos - en forma muy elemental - algunos comentarios relacionados con el estudio de fluidos en movimiento que nos acercarán a estos conceptos.

a) Con respecto a la **divergencia**: Consideremos un tubo a través del cual fluye agua.



Podemos imaginar dentro del tubo una superficie cerrada (indicada por las líneas de punto). El agua pasa a través de esta superficie. El agua entra por un lado y sale por el otro. El líquido puede circular en cualquier forma irregular; la cantidad que entra debe ser igual a la que sale. Se probará más adelante que esto equivale a decir que el agua que es incompresible, que circula de tal manera que si representamos su velocidad por el campo \vec{V} la divergencia de \vec{V} debe ser idénticamente nula. Este es el origen de la denominación *divergencia*: el agua no puede divergir de un punto, pues dejaría un vacío, tampoco puede convergir a un punto, pues es *incompresible*.

El movimiento del aire es diferente. Supongamos un tubo de aire comprimido con cierre en un extremo. Un cierre similar acaba de ser removido del otro extremo y el aire sale hacia fuera.

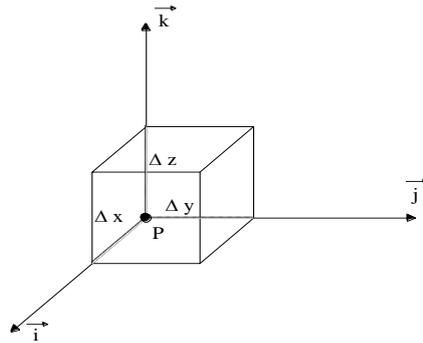


Consideremos la superficie cerrada, señalada con línea de puntos. Como *el aire se expande*, es más el aire que sale por un lado de la superficie que el que entra por el otro. En consecuencia, hay una *divergencia* de aire. Hay divergencia distinta de cero en todos los puntos en que el aire se expande. Si la velocidad del aire está representada por el campo vectorial \vec{V} , la divergencia del vector \vec{V} es distinta de cero.

Podemos también en forma breve dar una interpretación de la divergencia en términos de su definición:

Sea $\vec{V}(x, y, z) = V_1(x, y, z)\hat{i} + V_2(x, y, z)\hat{j} + V_3(x, y, z)\hat{k}$ campo de velocidades de un fluido, donde suponemos derivables sus componentes V_1 , V_2 , V_3 .

Consideremos el punto $P(x, y, z)$ y un paralelepípedo elemental que, a partir de P , tiene las aristas paralelas a los versores fundamentales \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , con longitudes Δx , Δy , Δz , respectivamente.



La cantidad de fluido que entrará en el paralelepípedo por la cara normal a \vec{i} , por unidad de tiempo será:

$$V_1(x, y, z) \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

(es el producto de la componente en \vec{i} de \vec{V} por el área de la sección de entrada:

$$\frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} \times \text{área} = \text{volúmen por unidad de tiempo}),$$

y la cantidad que saldrá por la cara opuesta será:

$$V_1(x + \Delta x, y, z) \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

Entonces
$$\frac{V_1(x + \Delta x, y, z) - V_1(x, y, z)}{\Delta x} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

representa la variación de la cantidad de fluido (saliente y entrante) en esa dirección.

Al tomar límite para $\Delta x \rightarrow 0$, se tiene $\frac{\partial V_1}{\partial x} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ que representa la **diferencia neta**

entre fluido saliente y entrante.

De igual manera, las diferencias análogas para las otras caras son:

$$\frac{\partial V_2}{\partial y} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad \text{y} \quad \frac{\partial V_3}{\partial z} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

En consecuencia, la cantidad de fluido que se ha creado en el paralelepípedo elemental

considerado es
$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} \right) \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z = \operatorname{div} \vec{V} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

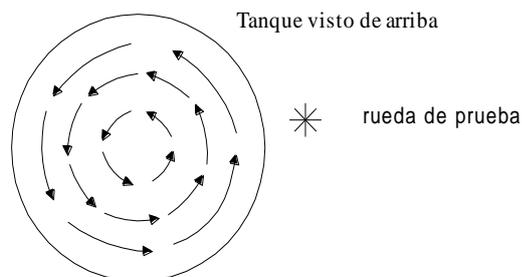
De aquí resulta que: “la divergencia de \vec{V} en el punto P es el cociente entre la cantidad de fluido que se crea por unidad de tiempo en el volumen elemental correspondiente a P , y este volumen, cuando el mismo tiende a reducirse al punto P ”.

Naturalmente, si $\operatorname{div} \vec{V}$ es negativa en vez de “crearse” fluido en P hay que entender que se “consume” fluido en ese punto. Se dice que en P hay una “fuente” o un “desagüe” (ó “sumidero”) según sea $\operatorname{div} \vec{V}$ positiva o negativa respectivamente.

b) ¿Qué podemos informarles coloquialmente acerca del rotor?

Imagine un gran tanque circular, conteniendo agua, la cual ha sido movida con una pala.

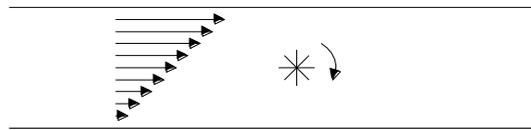
Los vectores representan la velocidad \vec{V} .



Al lado del tanque se muestra una pequeña rueda con paletas. Si esta rueda montada sobre un mecanismo libre de fricción, se sumerge en el centro del tanque, girará en sentido contrario a las agujas del reloj. En cualquier punto que se coloque la ruedita girará, pues aunque no esté en el centro, el agua corre mas rápidamente por un lado de la ruedita que por el otro. El movimiento de la rueda está indicando que el campo de velocidades tiene un rotor no nulo.

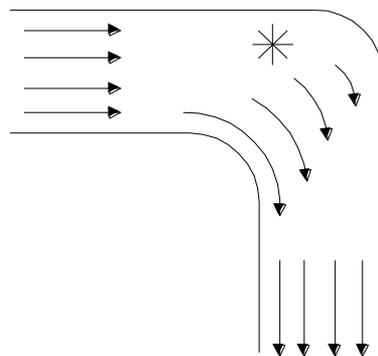
El nombre **rotor** está vinculado con el movimiento en líneas curvas. Sin embargo un movimiento rectilíneo de un fluido puede tener también un rotor no nulo.

Supongamos que el agua fluye en un canal, en tal forma que su velocidad sea mayor, cerca de la superficie que en el fondo. Toda partícula se mueve sobre una recta.



Recurriendo a la ruedita “exploradora” podemos observar que girará en sentido de las agujas del reloj, pues la corriente es mas rápida en las capas superiores. Esto significa que el rotor **no** es nulo.

También puede darse movimiento curvilíneo con rotor **nulo**.



Supongamos el canal de la figura donde en la parte recta el agua circula con velocidad uniforme. Es evidente que allí la rueda exploradora no girará.

Es posible también que en la parte curva el agua circule con rotor nulo. ¿Cómo es esto? Bueno, para ello es necesario que el agua circule con mayor velocidad en la margen interna del canal en la proporción justa.

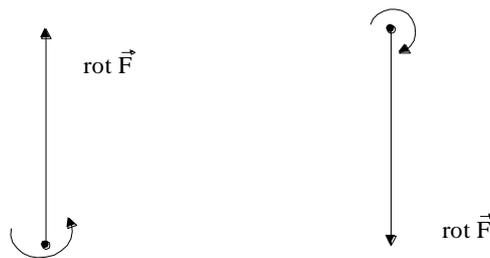
Por causa de la curvatura de las líneas de corriente, más de la mitad de las paletas de la ruedita exploradora son dirigidas en el sentido de las agujas del reloj. La velocidad, sin embargo, es mayor según supusimos en la orilla interior y aunque sean empujadas menos, en el sentido opuesto, reciben un impulso mayor.

Se puede concebir que la curvatura y la variación de velocidad estén relacionadas de tal manera que la ruedita quede sin girar. Es posible entonces, la existencia de movimientos de fluidos curvos, cuyos campos de velocidades sean de rotor nulo.

Podemos completar esta presentación, enfatizando que **la divergencia de un campo vectorial es una función escalar**. Hay divergencia de un punto o hacia un punto (positiva o negativa), pero no hay asociada a este concepto idea alguna de dirección.

El rotor de un campo vectorial es un vector. Si imaginamos el rotor como un torbellino, es evidente que este gira alrededor de un eje que puede ser vertical, horizontal, o con cualquier inclinación. La dirección de tal eje es por definición la dirección del vector que representa al rotor. Refiriéndonos a la ruedita exploradora, diremos que cuando está en la posición en que se mueve más rápidamente, su eje está en la dirección del rotor. Las componentes del rotor se encuentran colocando el eje de la ruedita paralelo a cada uno de los ejes coordenados.

El sentido del rotor está determinado por el sentido de rotación de la ruedita. Se determina de acuerdo con la regla de la mano derecha - o tornillo derecho -.



Para obtener la divergencia y el rotor de un campo c solo tenemos que aplicar la definición.

Ejemplo 14

$$\text{Sea } \vec{F} = x^2 \hat{i} - 2xy \hat{j} + yz^2 \hat{k} \Rightarrow \begin{cases} P = x^2 \\ Q = -2xy \\ R = yz^2 \end{cases} \quad \text{a) } \text{div} \vec{F} = 2x - 2x + 2yz = 2yz$$

$$\text{b) } \text{rot} \vec{F} = (z^2 - 0) \hat{i} + 0 \hat{j} + (-2y - 0) \hat{k} \Rightarrow \text{rot} \vec{F} = z^2 \hat{i} - 2y \hat{k}$$

Uso de MAPLE

Los comandos *curl* y *diverge* devuelven el rotor y la divergencia de un campo vectorial

```
> with (linalg):
> c1:=curl([2*x*y,2*y*z,2*(x+y)], [x,y,z]);
> d1:=diverge([2*x*y,2*y*z,2*(x+y)], [x,y,z]);
```

Operador nabla

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

Es un vector simbólico, que permite sintetizar las fórmulas del análisis vectorial y recordar más fácilmente las mismas. Este símbolo no tiene ningún significado salvo cuando se lo aplica a una función escalar o campo vectorial:

- . Aplicándolo a una función escalar f , se obtiene el gradiente: $\vec{\nabla}f$
- . El “producto escalar” entre $\vec{\nabla}$ y un campo \vec{F} da la divergencia de \vec{F} : $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \text{div } \vec{F}$
- . El “producto vectorial” entre $\vec{\nabla}$ y \vec{F} da el rotor de \vec{F} : $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \text{rot } \vec{F}$

Ejercicio 9

Aplicando el operador $\vec{\nabla}$, calculen divergencia y rotor de \vec{F} .

- a) $\vec{F}(x, y, z) = x^2 \hat{i} + y^2 \hat{j} + z^2 \hat{k}$ b) $\vec{F}(x, y, z) = yz \hat{i} + xz \hat{j} + xy \hat{k}$
 c) $\vec{F}(x, y, z) = (\cos x) \hat{i} + (\sin y) \hat{j} + 3 \hat{k}$ d) $\vec{F}(x, y, z) = (e^x \cdot \cos y) \hat{i} + (e^x \cdot \sin y) \hat{j} + z \hat{k}$
 e) $\vec{F}(x, y, z) = (y+z) \hat{i} + (x+z) \hat{j} + (x+y) \hat{k}$

Ejercicio 10

Sea f campo escalar y \vec{F} campo vectorial. Indiquen cuáles de los siguientes campos son escalares, vectoriales o sin significado.

- a) $\text{div } f$ b) $\text{grad } f$ c) $\text{grad } \vec{F}$ d) $\text{div}(\text{grad } f)$ e) $\text{rot}(\text{grad } f)$
 f) $\text{rot}(\text{rot } \vec{F})$ g) $\text{div}(\text{div } \vec{F})$ h) $\text{div}(\text{rot}(\text{grad } f))$

Ejercicio 11

Suponiendo que las derivadas parciales requeridas existan y sean continuas, demuestren que:

- a) $\text{div}(\vec{F} \pm \vec{G}) = \text{div } \vec{F} \pm \text{div } \vec{G}$ b) $\text{rot}(\vec{F} \pm \vec{G}) = \text{rot } \vec{F} \pm \text{rot } \vec{G}$
 c) $\text{div}(f \cdot \vec{F}) = f \cdot \text{div } \vec{F} + (\text{grad } f) \cdot \vec{F}$ d) $\text{rot}(f \cdot \vec{F}) = f \cdot \text{rot } \vec{F} + (\text{grad } f) \times \vec{F}$
 e) $\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0$ f) $\text{rot}(\text{grad } f) = \vec{0}$

Ejercicio 12

La función escalar: $\text{div}(\text{grad } f) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}f$ (escrita también como $\vec{\nabla}^2 f$) se llama

“laplaciano de f ”, y una función f que satisface $\nabla^2 f = 0$, se dice que es “armónica”.

Estos son conceptos importantes en física.

a) Prueben que:
$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

b) Encuentren $\nabla^2 f$ para cada una de las siguientes funciones y decida cuales son armónicas.

i) $f(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - z^2$

ii) $f(x, y, z) = xyz$

iii) $f(x, y, z) = x^3 - 3xy^2 + 3z$

iv) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

Ejercicio 13

a) Grafiquen el campo $\vec{F}(x, y) = \hat{i} + 2\hat{j}$ y decidan que se obtiene con $\text{div } \vec{F}$ y $\text{rot } \vec{F}$. ¿Es posible el resultado?

b) Sea $\vec{F}(x, y) = (y + 10)\hat{i}$. Grafiquen \vec{F} y calculen $\text{div } \vec{F}$ y $\text{rot } \vec{F}$. ¿Son resultados previsibles? (piensen en la ruedita de prueba).

c) Sea el campo unitario $\vec{F}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\hat{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\hat{j}$; con dirección radial.

Grafiquen y comprueben que:
$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{1}{|\vec{r}|} = \text{div } \vec{F} \quad \text{siendo } \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

y $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$.

Observación: La presencia de una divergencia está asociada con la necesidad de agregar nuevas líneas, a fin de mantener constante la intensidad del campo. Es evidente en este ejemplo que si las líneas parten de cierta región, habrá mas líneas saliendo de esa región que entrando. Esto significa que la divergencia no es nula en esa región. Vemos en este ejemplo que la divergencia aumenta a medida que nos acercamos al origen, pues es ahí donde se originan más líneas de corriente. La ecuación (*) nos dice cuantitativamente que la divergencia es inversamente proporcional a $|\vec{r}|$ y aumenta indefinidamente al acercarnos al origen.

e) Si $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$, campo en el plano xy . ¿Qué resultado arroja $\text{rot } \vec{F}$?

f) Sea $\vec{F}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}\hat{i} + \frac{y}{x^2 + y^2}\hat{j}$, hagan un esquema y calculen $\text{div } \vec{F}$ y $\text{rot } \vec{F}$.

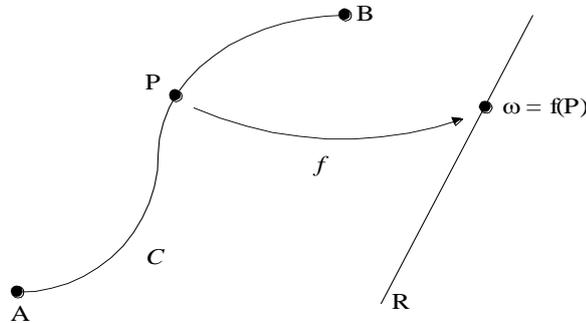
Integral de línea

El concepto de integral de línea es una generalización natural de la integral definida.

El proceso que conduce a su formulación se nutre de las tres etapas ya mencionadas: “dividir, aproximar, integrar”. Una función de *dos* o *tres* variables, definida en una curva, reemplaza a la función de una variable definida en un intervalo.

Sean entonces:

- C arco de curva suave de extremos A y B que con valores crecientes del parámetro se recorre desde A hacia B .
- $\omega = f(P)$ función real, definida y acotada en cada punto de C .

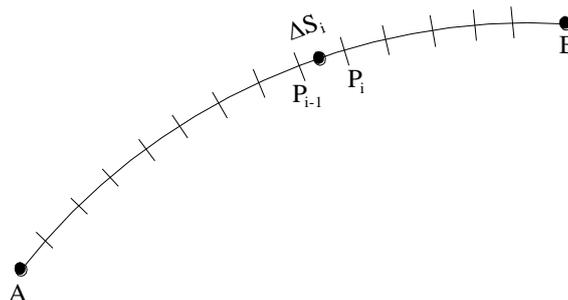


¿Qué puede representar una función de este tipo? Si $f(P) \geq 0$ en C , f podría ser la *función densidad lineal de masa*, que distribuye, a lo largo de un hilo metálico representado por C , *masa por unidad de longitud*.

1°) Se considera una partición \wp del arco C por medio de un número finito de puntos.

$$A \equiv P_0, P_1, P_2, \dots, P_{i-1}, P_i, \dots, P_n \equiv B$$

pudiendo así formarse n sub-arcos: $P_{i-1}P_i$, con longitudes $\Delta S_i, \forall i = 1, \dots, n$.

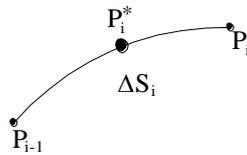


Se denomina *norma de la partición* $|\wp|$ y se simboliza $|\wp|$ al máximo de los $\Delta S_i, \forall i = 1, \dots, n$.

$$|\wp| = \max\{\Delta S_i / i = 1..n\}$$

2°) Se elige arbitrariamente $P_i^* \in P_{i-1}P_i$, se calcula $f(P_i^*) \cdot \Delta S_i$ y se suman los resultados

$$J_n = \sum_{i=1}^n f(P_i^*) \cdot \Delta S_i$$



3°) La integral de línea (o integral curvilínea) de f a lo largo de la curva C es el límite de J_n para $|\wp| \rightarrow 0$, siempre que ese límite exista y no dependa de las particiones consideradas y de la elección de los puntos P_i^* .

$$\int_{A_C}^B f(P) ds = \lim_{|\wp| \rightarrow 0} J_n \quad \text{si} \quad \lim_{|\wp| \rightarrow 0} J_n = I \in \mathfrak{R} \quad \text{independientemente de las particiones}$$

definidas y de la elección de los puntos P_i^*

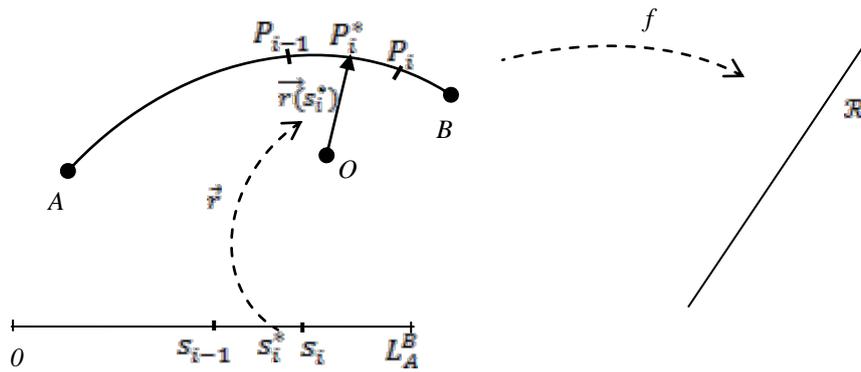
Notación: $\int_{A_C}^B f(x, y) ds$ (en \mathfrak{R}^2), $\int_{A_C}^B f(x, y, z) ds$ (en \mathfrak{R}^3) o simplemente $\int_{A_C}^B f ds$

Pregunta: Si $f(P) \geq 0$ y suponemos que representa “densidad lineal de masa”, ¿qué significado tiene $\int_{A_C}^B f ds$?

Cálculo de la integral de línea

a) En función del parámetro longitud de arco

Supongamos que la curva suave, está dada por su “representación natural”: es decir en función del parámetro longitud de arco: $C: \vec{r} = \vec{r}(s), s \in [0, L_A^B]$ y que f es continua en C .



Tomar $n + 1$ puntos de división en el arco AB , equivale a tomar una partición en $[0, L_A^B]$:

$$s_0 = 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{i-1} < s_i < \dots < s_n = L_A^B$$

formándose así n subintervalos $[s_{i-1}, s_i]$ de longitud ΔS_i (cada subintervalo $[s_{i-1}, s_i]$ representa el arco $P_{i-1}P_i$ rectificado).

Cada punto $P \in C$ es extremo de un vector $\vec{r}(s)$, entonces los P_i^* elegidos en cada $P_{i-1}P_i$ provienen de cierto $s_i^* \in [s_{i-1}, s_i]$.

En consecuencia:
$$J_n = \sum_{i=1}^n f(P_i^*) \cdot \Delta S_i = \sum_{i=1}^n f(\vec{r}(s_i^*)) \cdot \Delta S_i$$

o bien:

$$J_n = \sum_{i=1}^n (f \circ \vec{r})(s_i^*) \cdot \Delta S_i$$

$g = f \circ \vec{r}$ es la composición de la función vectorial \vec{r} con la función continua f , es decir, es una función también continua (¿por qué?) definida en $[0, L_A^B]$ a valores reales

y se tiene
$$\lim_{|P| \rightarrow 0} J_n = \int_0^{L_A^B} f(\vec{r}(s)) ds = \int_0^{L_A^B} f(x(s), y(s), z(s)) ds$$

luego
$$\int_{A_C}^B f(x, y, z) ds = \int_0^{L_A^B} f(\vec{r}(s)) ds$$

Esto significa que para obtener el resultado de la integral de línea, debe integrarse con respecto al arco -como variable- en el intervalo $[0, L_A^B]$ la función evaluada en cada punto de C .

b) Cálculo en función de un parámetro t

Ahora bien, en general toda curva está dada en función de un parámetro t . Si bien ya sabemos -¿recuerdan?- cambiar al parámetro longitud de arco, esto significaría una doble tarea. ¿Cómo podemos calcular la integral en función de t ? Simplemente haciendo un cambio de variable en la integral.

Si $C: \vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$ y $h: [0, L_A^B] \rightarrow [a, b]$ es la función cambio de parámetro, entonces: $C: \vec{r} = \vec{r}^*(s) = \vec{r}(h(s))$; $s \in [0, L_A^B]$ y por lo tanto:

$$\int_0^{L_A^B} f(\vec{r}(h(s))) ds = \int_{h(0)}^{h(L_A^B)} f(\vec{r}(t)) \cdot s'(t) dt = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot |\vec{r}'(t)| dt$$

Conclusión:

$$\int_{A_C}^B f(P) ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot |\vec{r}'(t)| dt$$

Ejemplo 15

Evaluar $\int_C xy^3 ds$, siendo C el segmento de recta $y = 2x$ (en el plano xy) comprendido

entre los puntos $A(-1, -2)$ y $B(1, 2)$.

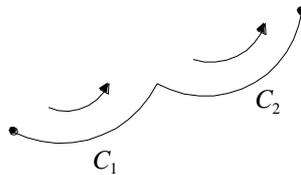
Pasos a seguir:

- Reconocer la función como $f(x, y) = xy^3$
- Parametrizar el segmento: $C: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$ con $t \in [-1, 1]$
 $\therefore C: \vec{r} = \vec{r}(t) = t\vec{i} + 2t\vec{j}$ con $t \in [-1, 1]$
- Evaluar f en C : $f(\vec{r}(t)) = t \cdot (2t)^3 = 8t^4$
- Hallar $|\vec{r}'(t)|$: $\vec{r}'(t) = 1\hat{i} + 2\hat{j}$ $\therefore |\vec{r}'(t)| = \sqrt{5}$
- Armar la integral y calcular:

$$I = \int_{-1}^1 8t^4 \cdot \sqrt{5} dt = 8\sqrt{5} \int_{-1}^1 t^4 dt = 8\sqrt{5} \left. \frac{t^5}{5} \right|_{-1}^1 = \frac{16}{\sqrt{5}}$$

Propiedades de $\int_C f \, ds$: debido a que el cálculo de esta integral se reduce a calcular una integral definida de variable t , son válidas todas las propiedades conocidas:

- a)
$$\int_C k f \, ds = k \int_C f \, ds$$
- b)
$$\int_C (f + g) \, ds = \int_C f \, ds + \int_C g \, ds$$
- c)
$$\int_C f \, ds = \int_{C_1} f \, ds + \int_{C_2} f \, ds \quad ,$$



Observaciones:

Toda trayectoria C , se supondrá suave o *suave a trozos* (unión finita de arcos suaves).

Si la trayectoria de integración es una curva cerrada, la notación usual es $\oint_C f \, ds$.

Ejercicio 14

Evalúen $\int_C (x^2 + y^2) \, ds$

- a) Sobre la trayectoria: $y = x$, desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$.
- b) Sobre la trayectoria: $y = 3x$, desde $(0,0)$ hasta $(2,6)$.
- c) Sobre el eje x , desde $(0,0)$ hasta $(1,0)$ y a continuación paralelo al eje y , desde $(1,0)$ hasta $(1,1)$.
- d) Sobre el eje y , desde $(0,0)$ hasta $(0,1)$ y a continuación paralelo al eje x , desde $(0,1)$ hasta $(1,1)$.
- e) A lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ desde $(0,1)$ hasta $(1,0)$, en sentido antihorario.
- f) A lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ desde $(0,1)$ hasta $(1,0)$, con sentido horario.
- g) A lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ desde $(0,2)$ hasta $(2,0)$, en sentido antihorario.

Ejercicio 15

Evalúen

a) $\int_C x \cdot e^y ds$, siendo C segmento de recta desde $(-1,2)$ a $(1,1)$.

b) $\int_C (2x + 9z) ds$, siendo $C : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases} ; \quad 0 \leq t \leq 1$

c) $\int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds$, siendo $C : \begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 4 \operatorname{sen} t \\ z = 3t \end{cases} ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

Ejercicio 16Sea $f(x,y) = x$

a) Sea C_1 : arco de parábola $y = x^2$ desde $A(0,0)$ hasta $B(2,4)$. Calculen: $\int_{A C_1}^B x ds$

b) Sea C_2 el segmento que une esos dos puntos. Calculen: $\int_{A C_2}^B x ds$

c) Sea C_3 el arco de parábola $y = x^2$, desde $B(2,4)$ hasta $A(0,0)$. Calculen: $\int_{B C_3}^A x ds$

Observen!

1º) Según los resultados de 3)a) y 3)b) pueden inferir que la integral depende de la trayectoria seguida, aún cuando los puntos extremos coincidan.

2º) De acuerdo con los resultados obtenidos en 3)a) y 3)c) cabría decir que el resultado de la integral no depende de la orientación dada a la curva. Claro que podría tratarse de una casualidad, pero no es así. La integral se resuelve con respecto a la longitud de arco, en consecuencia no interesa desde que punto extremo del arco comienzan a medirse las longitudes, siempre que se den con valores crecientes de parámetro. Dos orientaciones aunque opuestas entre sí, obtenidas con parámetros crecientes, producen arcos crecientes sin importar cuál es el punto inicial.

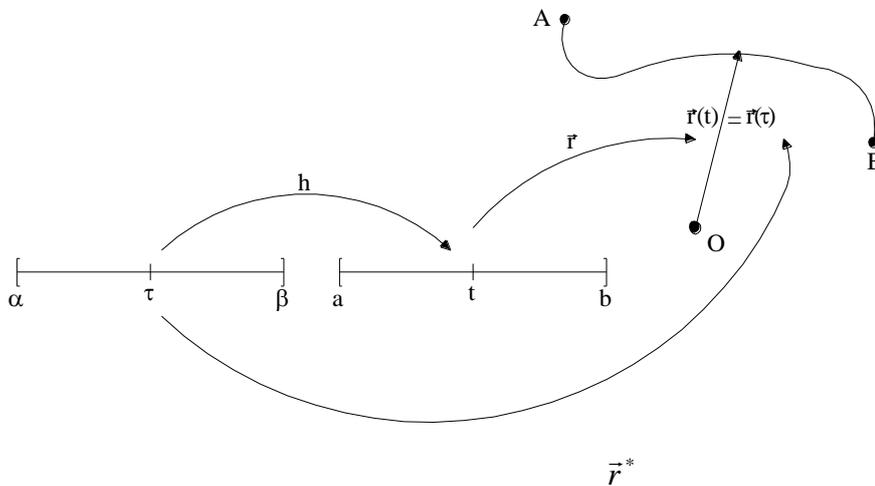
Esta conclusión, que podría describirse como “invariancia de la integral de línea ante un cambio de parámetro” puede justificarse y lo haremos a continuación. Le recomendamos su lectura.

Sea $C: \vec{r} = \vec{r}(t), t \in [a, b]$ curva suave con $\vec{r}(a) \leftrightarrow A$ y $\vec{r}(b) \leftrightarrow B$

Sea $h: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ función cambio de parámetro

$C^*: \vec{r} = \vec{r}^*(\tau) = \vec{r}(h(\tau)), \tau \in [\alpha, \beta]$

C y C^* difieren a lo sumo en la orientación (según sea $h'(\tau) > 0$ o $h'(\tau) < 0$ se conserva o se invierte respectivamente la orientación)



Si f es una función continua se tiene:
$$\int_{C^*} f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\vec{r}^*(\tau)) |\vec{r}^{*\prime}(\tau)| d\tau$$

Como $\vec{r}^* = \vec{r} \circ h$, $\vec{r}^{*\prime}(\tau) = \vec{r}'(h(\tau)) \cdot h'(\tau)$

Entonces:
$$\int_{C^*} f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\vec{r}(h(\tau))) |\vec{r}'(h(\tau))| |h'(\tau)| d\tau \quad (*)$$

Siendo $h(\tau) = t$ se tiene $h'(\tau) d\tau = dt$ y corresponde analizar dos casos:

a) Si $h'(\tau) > 0 \Rightarrow h$ creciente y por lo tanto $h(\alpha) = a$; $h(\beta) = b$ (la orientación de C y C^* es la misma). En ese caso $|h'(\tau)| = h'(\tau)$ y resulta:

$$(*) = \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \int_C f(x, y, z) ds$$

b) Si $h'(\tau) < 0 \Rightarrow h$ decreciente y por lo tanto $h(\alpha) = b$; $h(\beta) = a$, (C y C^* tienen orientaciones opuestas). En ese caso $|h'(\tau)| = -h'(\tau)$ y resulta:

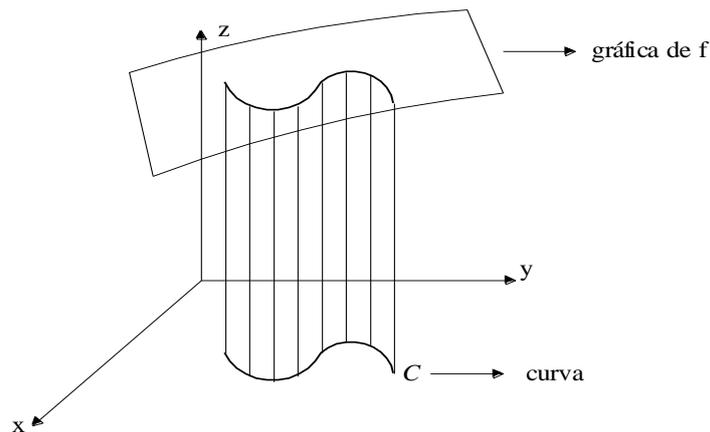
$$(*) = \int_b^a (-1) f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \int_C f(x,y,z) ds$$

Vamos a establecer una convención:

Siendo C la curva que está representada por una ecuación $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a,b]$ y su orientación la definida por los valores crecientes de t , llamaremos $-C$ a la misma curva subyacente, que, con valores crecientes del parámetro τ , en una representación $\vec{r} = \vec{r}^*(\tau)$, tiene una orientación opuesta a la dada por t .

De acuerdo a lo expuesto anteriormente: $\int_C f ds = \int_{-C} f ds$

Concluimos la presentación de la integral de línea de una función escalar (real) f , con la siguiente pregunta: Si f es función de dos variables ($z = f(x,y)$) y C curva en el plano xy , ¿qué significado geométrico puede tener $\int_C f(x,y) ds$?



Pista: interpreten $f(\vec{r}(t))$ en el gráfico.

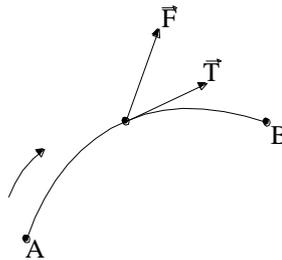
Ejercicio 17

Calculen el área de la superficie que se extiende desde la curva dada hasta la superficie dada:

- a) Sobre el segmento de recta que va de $(2,0,0)$ a $(-2,0,0)$ hasta la superficie $z = 4 - x^2 - y^2$.
- b) Sobre la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ hasta el plano $z = 4 - x$ (sólo planteen la integral)
- c) Sobre el segmento de recta que va desde $(1,1,0)$ a $(-1,1,0)$, hasta la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Integral de línea de un campo vectorial

Sea C arco suave, orientado con valores crecientes del parámetro desde A hacia B , y \vec{F} campo vectorial definido en cada punto de C , con componentes continuas.



La que llamaremos “integral de línea del campo vectorial \vec{F} a lo largo de la curva C ” es la integral de la componente tangencial del campo a lo largo de C , o sea, la integral:

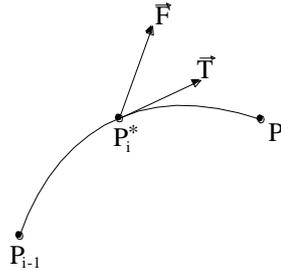
$$\int_{A_C}^B \vec{F} \cdot \vec{T} ds$$

$\vec{F} \cdot \vec{T}$ es una función escalar (real) definida en cada punto de C “es la proyección de \vec{F} en la dirección de \vec{T} (vector tangente)”.

Como \vec{T} define la dirección de la curva, se suele decir que $\vec{F} \cdot \vec{T}$ es la proyección de \vec{F} en dirección de C , en consecuencia la integral de línea de esa función a lo largo de la trayectoria C , se dice -por abuso de lenguaje- “integral de \vec{F} a lo largo de C ”.

Significado de $\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$

Si \vec{F} es un *campo de fuerzas* y $f = \vec{F} \cdot \vec{T}$, al tomar un punto arbitrario P_i^* en cada sub-arco $P_{i-1}P_i$, y calcular $f(P_i^*) \cdot \Delta S_i = \vec{F} \cdot \vec{T}(P_i^*) \Delta S_i$, se tiene el *trabajo* realizado por la componente tangencial de \vec{F} a lo largo del arco de longitud ΔS_i .



$$\vec{F} \cdot \vec{T}(P_i^*) \cdot \Delta S_i \cong w_i$$

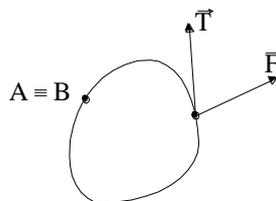
Entonces, al sumar: $\sum_{i=1}^n w_i \cong \sum_{i=1}^n (\vec{F} \cdot \vec{T})(P_i^*) \Delta S_i$

se tiene una aproximación del trabajo que realiza el campo al mover un objeto desde A hasta B , a lo largo de la trayectoria C .

Luego, en el límite: $w = \int_{A_C}^B \vec{F} \cdot \vec{T} ds$ (Trabajo total)

Observación: Si la curva es cerrada ($A \equiv B$) la integral se dice *circulación* y se

denota $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$



Esta denominación, tiene más sentido cuando el campo es un campo de velocidades de un fluido.

Cálculo de $\int_{A_C}^B \vec{F} \cdot \vec{T} ds$

Si $C: \vec{r} = \vec{r}(t), t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \int_{A_C}^B \vec{F} \cdot \vec{T} ds &= \int_a^b (\vec{F} \cdot \vec{T})(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{T}(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt \\ &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \end{aligned}$$

donde: $\vec{F}(\vec{r}(t))$: es el campo evaluado en cada punto de C .

$\vec{r}'(t)$: es el vector que define la dirección tangente a C en cada punto de acuerdo con la dirección elegida en C con los valores crecientes de t .

Ejemplo 16

Calcularemos el trabajo realizado por $\vec{F}(x, y, z) = 2xy \hat{i} + y^2 z \hat{j} + xz \hat{k}$ para transportar una partícula a lo largo de $C: \vec{r} = \vec{r}(t) = t \hat{i} + t^2 \hat{j} + (1-2t) \hat{k}$; $t \in [0, 1]$ desde $A \leftrightarrow \vec{r}(0)$ hasta $B \leftrightarrow \vec{r}(1)$.

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = 2t \cdot t^2 \hat{i} + t^4 (1-2t) \hat{j} + (t-2t^2) \hat{k} = 2t^3 \hat{i} + (t^4 - 2t^5) \hat{j} + (t - 2t^2) \hat{k}$$

(x, y, z se reemplazaron por $x(t), y(t), z(t)$, componentes del vector $\vec{r}(t)$)

$$\vec{r}'(t) = 1 \hat{i} + 2t \hat{j} - 2 \hat{k}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego: } \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) &= 2t^3 + 2t \cdot (t^4 - 2t^5) - 2 \cdot (t - 2t^2) = 2t^3 + 2t^5 - 4t^6 - 2t + 4t^2 = \\ &= -4t^6 + 2t^5 + 2t^3 + 4t^2 - 2t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Por lo tanto: } w &= \int_0^1 (-4t^6 + 2t^5 + 2t^3 + 4t^2 - 2t) dt = -4 \frac{t^7}{7} + 2 \frac{t^6}{6} + 2 \frac{t^4}{4} + 4 \frac{t^3}{3} - t^2 \Big|_0^1 = \\ &= -\frac{4}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{4}{3} - 1 = \frac{25}{42} \end{aligned}$$

Notaciones alternativas

El cálculo de $\int_{A_C}^B \vec{F} \cdot \vec{T} ds$ por medio de $\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$, sugiere:

1) Llamar $d\vec{r} = \vec{r}'(t) dt$ y adoptar como notación posible: $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

2) Siendo $\vec{F} = \langle P, Q, R \rangle$ y $\vec{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$

Se tiene que $\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = P(\vec{r}(t))x'(t) + Q(\vec{r}(t))y'(t) + R(\vec{r}(t))z'(t)$

y siendo $x'(t) dt = dx$, $y'(t) dt = dy$, $z'(t) dt = dz$ el cálculo de la integral

sugiere la notación:
$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \int_C P dx + Q dy + R dz$$

3) Como \vec{T} es un vector unitario, sus componentes son sus cosenos directores: $\vec{T} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ (¿recuerda por qué es así?) Entonces, en virtud del resultado del producto escalar $\vec{F} \cdot \vec{T}$, otra notación sugerida, es:

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \int_C (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$$

Pero deben tener en cuenta que cualquiera sea la notación empleada, el cálculo efectivo, requiere conocer el campo, la curva y los puntos extremos, para poder integrar el resultado que se obtiene del producto escalar entre el campo evaluado sobre la curva, con el vector que da la dirección tangente a la curva, entre los límites que corresponden a los valores del parámetro que identifican los puntos extremos del arco.

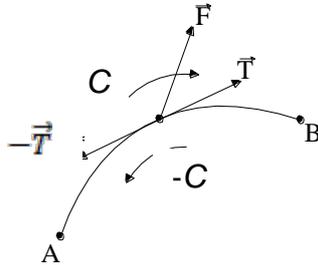
Observación (¡importante!)

Hemos visto que $\int_C f ds = \int_{-c}^c f ds$. Nos preguntamos ahora qué relación hay entre

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds \quad \text{y} \quad \int_{-c}^c \vec{F} \cdot \vec{T} ds$$

En principio podríamos decir que, siendo $\vec{F} \cdot \vec{T}$ una función escalar, su integral a lo largo de C no cambia, cualquiera sea la orientación de C , siempre que se obtenga con valores crecientes del parámetro, cualquiera sea la representación dada.

Pero ocurre lo siguiente: los vectores tangentes correspondientes a C y a $-C$ son.....¡OPUESTOS! y por consiguiente el signo del producto escalar $\vec{F} \cdot \vec{T}$ cambia

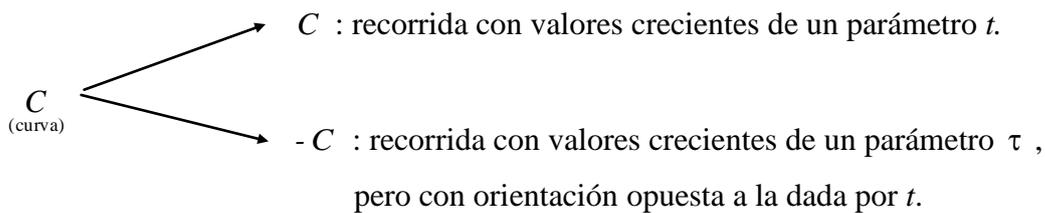


es decir, las funciones que se integran con una y otra representación son opuestas entre si, resultando:

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = - \int_{-C} \vec{F} \cdot \vec{T} ds$$

Este resultado *no contradice* la propiedad de “invariancia de la integral de línea frente a cambios de parámetro”, lo que ocurre es que la *componente* de \vec{F} en la dirección tangente cambia de signo al tomar direcciones opuestas sobre la misma trayectoria, y las funciones a integrar, siendo opuestas entre si, arrojan resultados opuestos.

Ordenando resultados y convenciones hechas anteriormente, podemos establecer:



Entonces, si f es un campo escalar y \vec{F} es un campo vectorial:

$$\int_C f ds = \int_{-C} f ds \qquad \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = - \int_{-C} \vec{F} \cdot \vec{T} ds$$

Pregunta: Supongan que tienen que calcular $\int_A^B \vec{F} \cdot \vec{T} ds$. El cálculo siempre requiere

una parametrización que, con valores crecientes del parámetro, vaya desde A hacia B , pero les resulta más fácil obtener una parametrización que, con valores crecientes del parámetro, vaya de B hacia A , ¿qué hacen entonces?

Ejercicio 18

Calculen el trabajo realizado por \vec{F} a lo largo de C :

- $\vec{F}(x, y) = \langle 2x, 2y \rangle$, C segmento de recta desde $A(3,1)$ hasta $B(5,4)$.
- $\vec{F}(x, y) = \langle 2x, -2y \rangle$, C segmento de recta desde $A(4,2)$ hasta $B(0,4)$.
- $\vec{F}(x, y) = \langle y, x \rangle$, C es el cuadrado que va de $(0,0)$ a $(1,0)$ a $(1,1)$ a $(0,1)$ a $(0,0)$.
- $\vec{F}(x, y, z) = \langle z, y, 0 \rangle$, C segmento que va desde $A(1,0,2)$ hasta $B(2,4,2)$.
- $\vec{F}(x, y, z) = \langle z, 0, 3x^2 \rangle$, C es el cuarto de elipse $\vec{r}(t) = (2 \cos t, 3 \sin t, 1)$ que va desde $(2,0,1)$ hasta $(0,3,1)$.

Ejercicio 19

Calculen $\int_C y^2 dx + x^2 dy + xyz dz$, a lo largo de:

- el eje x , desde $(-1,0,0)$ hasta $(1,0,0)$.
- la parábola $y = x^2$; $z = 1$, desde $(0,0,1)$ hasta $(1,1,1)$.
- la parábola cúbica $z = x^3$ en el plano $y = 2$, desde $(0,2,0)$ hasta $(1,2,1)$.

Ejercicio 20

a) Calculen $\int_C (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) ds$ a lo largo de una espira de hélice:

$$\vec{r}(t) = 3 \cos t \hat{i} + 3 \sin t \hat{j} + 4t \hat{k}.$$

- ¿Cuál es el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}(x, y, z) = x \hat{i} - z \hat{j} + 2y \hat{k}$ en el desplazamiento a lo largo de la trayectoria cerrada C , formada por los segmentos C_1 : desde $(0,0,0)$ hasta $(1,1,0)$; C_2 : desde $(1,1,0)$ hasta $(1,1,1)$ y C_3 : desde $(1,1,1)$ hasta $(0,0,0)$? (Comprueben que: $w = \frac{3}{2}$)

Teorema de Green

George Green: (Sneinton, 1793- id., 1841) Matemático británico. Llevó a cabo diversos trabajos sobre dinámica de fluidos, sobre las fuerzas de atracción y, en particular, sobre la aplicación del análisis matemático al estudio del electromagnetismo.

Brevemente les comentamos que el teorema que estudiaremos relaciona una integral de línea de la componente tangencial de un campo sobre una trayectoria cerrada (circulación del campo a lo largo de la trayectoria) con una integral doble.

Teorema de Green

Si C es una curva en el plano, cerrada, simple, suave a trozos y con orientación antihoraria, R es la región del plano cuya frontera es la curva C y

$\vec{F}(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$ es un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en un dominio abierto D que contiene a C y a R

entonces

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \quad (*)$$

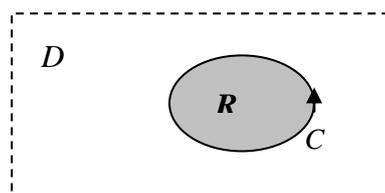
Revisemos las hipótesis del teorema:

. Recordemos que una curva del plano $C: \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}; t \in [a, b]$

es *cerrada* si sus puntos inicial y final coinciden, es decir $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, y es *simple* si no se corta a sí misma, o sea $\vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$, $\forall t_1, t_2 \in (a, b)$, $t_1 \neq t_2$.

. Además, C es *suave a trozos* si, salvo para un número finito de valores de t , $\vec{r}'(t)$ es continua y $\vec{r}'(t) \neq 0$ (excepto en un número finito de puntos, admite vector tangente y éste varía con continuidad).

. Como C está orientada en sentido antihorario, la región R limitada por C queda, al recorrer la curva, a la izquierda de la misma.



- Observemos que si las componentes M y N del campo vectorial \vec{F} tienen derivadas parciales continuas en el abierto D que contiene a R y a la curva C , M y N son continuas en D (y por lo tanto, las dos integrales de (*) tienen sentido).

Aplicaciones del Teorema de Green

1. Cálculo de la circulación de un campo por medio de una integral doble.

La igualdad de Green, en principio sirve para calcular la circulación de un campo por medio de una integral doble con la ventaja de no tener que parametrizar la trayectoria cerrada propuesta.

Ejemplo 17

Usar el teorema de Green para reescribir y evaluar $\oint_C (x^3 + y^3) dx + 3xy^2 dy$ donde

C está formada por el segmento de recta que va desde $(0,0)$ hasta $(2,0)$, seguido del segmento de recta que va desde $(2,0)$ hasta $(2,4)$, seguido por la porción de parábola $y = x^2$ que va desde $(2,4)$ hasta $(0,0)$.

Grafiquen C y observen que es una curva cerrada, simple, suave a trozos y que está orientada en sentido antihorario. Por otra parte, $M(x, y) = x^3 + y^3$ y $N(x, y) = 3xy^2$ admiten primeras derivadas parciales continuas en todo \mathbb{R}^2 .

Se verifican entonces en este caso las hipótesis del teorema de Green, y por lo tanto podemos afirmar que, siendo R la región encerrada por C , es:

$$\oint_C (x^3 + y^3) dx + 3xy^2 dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = \iint_R (3y^2 - 3y^2) dA = 0$$

Ejemplo 18

Usar el teorema de Green para reescribir y evaluar $\oint_C (3y - e^x) dx + (7x - \operatorname{sen} y^2) dy$

donde C es la circunferencia de radio 2 centrada en $(3, 5)$ orientada en sentido horario.

Observen que, si $-C$ es la misma circunferencia, pero recorrida en sentido antihorario, $-C$ y $\vec{F}(x, y) = \langle 3y - e^x, 7x - \operatorname{sen} y^2 \rangle$ están en las condiciones del teorema de Green.

En efecto, $-C$ es cerrada, simple, suave, con orientación antihoraria y las componentes de $\vec{F}(x, y)$ tienen derivadas parciales continuas en \mathcal{R}^2 . Por lo tanto, siendo R la región encerrada por $-C$, $M(x, y) = 3y - e^x$ y $N(x, y) = 7x - \operatorname{sen} y^2$, se cumple que:

$$\begin{aligned} \oint_{-C} (3y - e^x) dx + (7x - \operatorname{sen} y^2) dy &= \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = \iint_R (7 - 3) dA = 4 \iint_R dA = \\ &= 4 \operatorname{área}(R) = 4 \cdot 4\pi = 16\pi \end{aligned}$$

Así concluimos que $\oint_C (3y - e^x) dx + (7x - \operatorname{sen} y^2) dy = -16\pi$

2. Cálculo del área de una región plana por medio de una integral de línea

La igualdad de Green tiene una aplicación geométrica importante: calcular el área de una región plana por medio de una integral de línea.

Observemos que en la igualdad del teorema de Green

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = \oint_C M dx + N dy$$

la integral doble representa el área de R siempre que $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1$

¿Cuándo puede ocurrir eso? Hay múltiples posibilidades para M y N , una podría ser:

$$M(x, y) = -\frac{y}{2} \quad y \quad N(x, y) = \frac{x}{2}$$

M y N así definidas tienen derivadas parciales continuas en \mathcal{R}^2 y se verifica

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) = 1$$

Por lo tanto, si la curva C que constituye la frontera de la región R está en las condiciones del teorema de Green, se tiene:

$$\operatorname{área}(R) = \frac{1}{2} \oint_C -y dx + x dy$$

Ejemplo 19

Hallar el área de la región encerrada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Sea $C: \vec{r}(t) = \langle a \cos t, b \sin t \rangle$; $t \in [0, 2\pi]$ (representación vectorial de la elipse)

C es cerrada, simple, suave y con orientación antihoraria.

Se tiene entonces que, siendo R la región limitada por la elipse,

$$\text{área}(R) = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \langle -b \sin t, a \cos t \rangle \cdot \langle -a \sin t, b \cos t \rangle dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab$$

Demostración del teorema de Green (para el caso particular en que R puede considerarse como región del tipo I y como región del tipo II)

Suponemos que $R = \{(x, y) / a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ y que también

$R = \{(x, y) / c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$

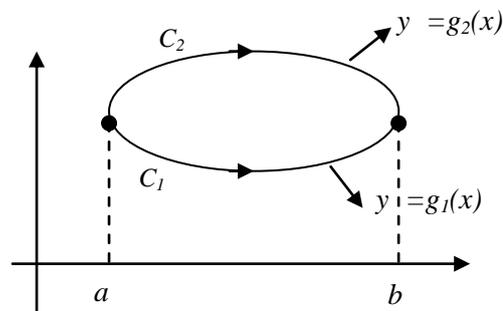
Como $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C \langle M, 0 \rangle \cdot d\vec{r} + \oint_C \langle 0, N \rangle \cdot d\vec{r} = \oint_C M dx + \oint_C N dy$, para demostrar la

igualdad (*) bastará con comprobar

$$(1) \quad \oint_C M dx = - \iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dA \quad \text{y} \quad (2) \quad \oint_C N dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dA$$

Para comprobar (1) consideremos $C = C_1 \cup (-C_2)$ donde $C_1: \begin{cases} x=t \\ y=g_1(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$

y $C_2: \begin{cases} x=t \\ y=g_2(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$



$$\oint_C M dx = \int_{C_1} M dx - \int_{C_2} M dx = \int_a^b M(t, g_1(t)) dt - \int_a^b M(t, g_2(t)) dt$$

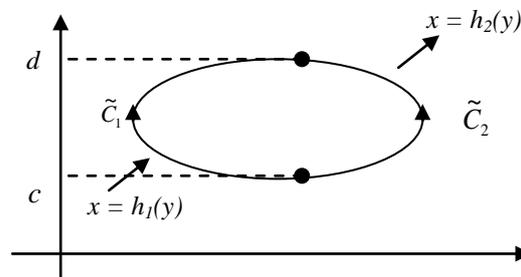
Por otro lado,

$$\iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy dx = \int_a^b [M(x, g_2(x)) - M(x, g_1(x))] dx = \int_a^b M(t, g_2(t)) dt - \int_a^b M(t, g_1(t)) dt$$

Con lo que queda demostrada la validez de (1).

La igualdad (2) se demuestra de manera similar considerando ahora $C = (-\tilde{C}_1) \cup (\tilde{C}_2)$

$$\text{donde } \tilde{C}_1 : \begin{cases} x = h_1(t) \\ y = t \end{cases} \quad t \in [c, d] \quad \text{y} \quad \tilde{C}_2 : \begin{cases} x = h_2(t) \\ y = t \end{cases} \quad t \in [a, b]$$



Notación vectorial del teorema de Green

Siendo $\vec{F}(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$ se tiene que $\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \vec{k}$

$$\therefore \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{k} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \quad (\text{componente en } \vec{k} \text{ de } \text{rot } \vec{F})$$

Entonces la igualdad del Teorema de Green puede escribirse:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{k} dA$$

Antes de comenzar a resolver los ejercicios les proponemos que lean y completen lo siguiente:

El Teorema de Green dice que, bajo determinadas condiciones, sucede que

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{k} dA \quad (*)$$

Esas condiciones son las *hipótesis* del teorema ¿Cuáles son?

1. C es una curvacon orientación
2. R es la región
3. Las componentes del campo vectorial \vec{F} son en un subconjunto D de \mathfrak{R}^2 que contiene a R y a C

Evaluar una integral del tipo $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ aplicando el Teorema de Green significa hallar su valor resolviendo la integral doble del miembro derecho de la igualdad (*).

Pero ¡atención! Para poder hacerlo habrá que mostrar que las condiciones 1. 2. y 3. se cumplen en el caso particular que estemos tratando, verificándolas una por una.

Observen que para hacer esa verificación tendrán que: 1) revisar las características de la curva C dada ; 2) indicar qué región del plano representa la letra R y 3) exhibir, si es que existe, un conjunto D de puntos del plano que contenga a R y a C y en el cual las componentes del campo vectorial \vec{F} sean derivables con continuidad.

(Les aconsejamos que comiencen siempre determinando el mayor dominio en el que las componentes del campo vectorial admiten derivadas parciales continuas y graficando la curva C)

Si alguna de las condiciones mencionadas no se cumple, no se puede asegurar que la igualdad (1) sea verdadera y, si \vec{F} es integrable a lo largo de C y queremos hallar el valor de $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, habrá que resolver la integral de línea en forma directa como ya sabemos hacerlo (parametrizar la curva C , etc, etc).

Ejercicio 21

Siempre que sea posible, evalúen aplicando el teorema de Green las siguientes integrales:

- a) $\oint_C (x^2 - y)dx + y^2 dy$; $C : x^2 + y^2 = 1$, en sentido contrario a las agujas del reloj.

b) $\oint_C (y^2 + x)dx + (3x + 2xy)dy$; $C : x^2 + y^2 = 4$, con sentido horario.

c) $\oint_C (y^2 - 2x)dx + x^2 dy$; C es el cuadrado que va de (0,0) a (1,0), a (1,1), a (0,1) y hasta (0,0).

d) $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$; $\vec{F}(x, y) = \langle y^2 + 3x^2 y, xy + x^3 \rangle$ y C formada por $y = x^2$ e $y = 2x$ con orientación antihoraria.

e) $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$; $\vec{F}(x, y) = \langle y e^{xy} + y, 2x + x e^{xy} \rangle$ C formada por $y = x^2$ e $y = 4$ con orientación antihoraria.

f) $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$; $\vec{F}(x, y) = \langle y \sec^2 x - 2, \operatorname{tg} x - 4y^2 \rangle$; C formada por $x = 1 - y^2$; $x = 0$ con orientación antihoraria.

Ejercicio 22

Veán si las hipótesis del teorema de Green se verifican siendo

$$\vec{F}(x, y) = \left\langle \frac{x}{x^2 + 1} - y, 3x - 4\operatorname{tg}(y) \right\rangle \text{ y } C \text{ el arco de } y = x^2 \text{ que va desde } (-1,1) \text{ a } (1,1)$$

seguido por el arco de $y = 2 - x^2$ que va de (1,1) a (-1,1).

Ejercicio 23

Por medio de una integral de línea, calculen el área de la región limitada por:

a) la elipse $4x^2 + y^2 = 16$ b) $y = x^2$ e $y = 4$ c) $y = x^2$ e $y = 2x$

d) la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ parametrizando con $x = \cos^3 t$; $y = \operatorname{sen}^3 t$

Ejercicio 24

Sea C la frontera de una región en la que el Teorema de Green es válido.

Usen dicho teorema para calcular

i) $\oint_C f(x)dx + g(y)dy$ ii) $\oint_C k y dx + h x dy$ con h y k constantes.

Ejercicio 25

Demuestren que el valor de $\oint_C (x y^2 dx + (x^2 y + 2x)dy)$ alrededor de cualquier cuadrado

sólo depende del área del cuadrado y no de su localización en el plano.

Ejercicio 26

Evalúen (aplicando el Teorema de Green) $\oint_C 3y \, dx + 2x \, dy$ siendo C la frontera de la región $R = \{(x, y) / 0 \leq x \leq \pi \wedge 0 \leq y \leq \sin x\}$

Ejercicio 27

Siendo $C: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$, evalúen $\oint_C (6y+x)dx + (y+2x)dy$ aplicando el Teorema de Green.

Ejercicio 28

Si f satisface la ecuación de Laplace (suponiendo todas las derivadas que sean necesarias continuas), comprueben que $\oint_C \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy = 0$ para toda curva cerrada C para la que sea válido el teorema de Green.

Ejercicio 29

Calculen el trabajo realizado por $\vec{F}(x, y) = \langle 2xy^3, 4x^2y^2 \rangle$ para mover una partícula en sentido antihorario, una vez, alrededor de la curva C frontera de la región en el primer cuadrante limitada por el eje x , la recta $x=1$ y la curva $y=x^3$.

Ejercicio 30

Calculen el trabajo realizado por $\vec{F}(x, y) = \langle 4x-2y, 2x-4y \rangle$ para mover una partícula en sentido antihorario, una vez, alrededor de la curva $C: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$

Ejercicio 31

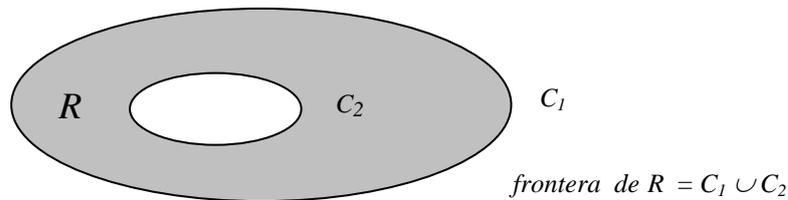
¿Puede aplicarse el Teorema de Green para calcular $\oint_C \frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy$

siendo $C: x^2 + y^2 = 1$ con orientación antihoraria? ¿y si $C: (x-2)^2 + y^2 = 1$?

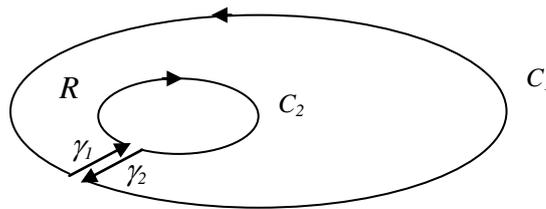
Justifiquen sus respuestas. Evalúen la integral en ambos casos.

Generalización del teorema de Green

Consideremos una región “anular” R , limitada por dos curvas cerradas C_1 y C_2 . Suponga que las componentes del campo \vec{F} tienen derivadas parciales continuas en un dominio abierto D que contiene a R , a C_1 y a C_2 .



Orientadas C_1 y C_2 como indica la figura siguiente, y considerando las curvas auxiliares γ_1 y γ_2 , la región R puede verse como la región limitada por $C = C_1 \cup \gamma_1 \cup C_2 \cup \gamma_2$.



Aplicando el Teorema de Green se tiene:

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

y de allí

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

En el caso particular de ser $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ (o sea, $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$) se tiene, como

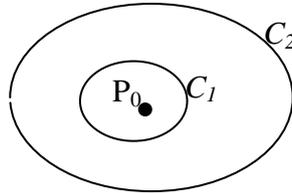
corolario de lo anterior, que: $0 = \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$\therefore \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{-C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

(observen que C_1 y $-C_2$ tienen la misma orientación)

A partir de lo anterior...

Supongan que las componentes de cierto campo \vec{F} tienen derivadas parciales continuas en $D = \mathbb{R}^2 - \{P_0\}$, siendo P_0 un punto de discontinuidad y que $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ en todo punto de D , y consideren curvas C_1 y C_2 como las de la figura siguiente:



$\oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ no puede calcularse aplicando el teorema de Green (¿por qué?).

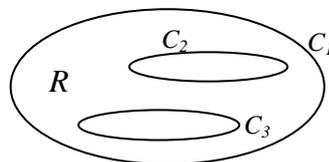
Por la misma razón, el teorema de Green no puede aplicarse para calcular $\oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Sin embargo, de acuerdo a lo que hemos visto, hay algo que podemos afirmar acerca de esas dos integrales: *ambas tienen el mismo resultado siempre que las curvas estén orientadas en el mismo sentido*. Así que, puestos a calcular, podríamos elegir hacerlo sobre la curva para la cual la integración resulte más sencilla.

Ejercicio 32

El teorema de Green también se generaliza a regiones con tres curvas frontera como la que muestra el dibujo resultando en ese caso, si $\vec{F} = \langle M, N \rangle$,

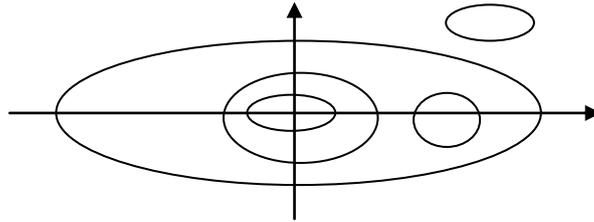
$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



¿Cuáles son las hipótesis que se requieren en este caso para que dicha igualdad se cumpla? (¿qué debe cumplir el campo vectorial \vec{F} ? ¿cómo deben estar orientadas las curvas?)

Ejercicio 33

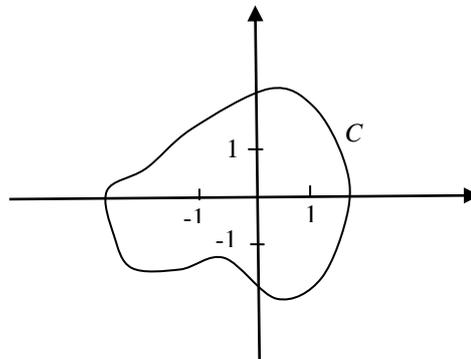
Sea $\vec{F}(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$, M y N con derivadas parciales continuas en $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ y $\text{rot } \vec{F}(x, y) = \vec{0} \quad \forall (x, y) \neq (0,0)$ ¿Qué pueden decir de $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para cada curva C que aparece en el siguiente dibujo? (Orienten las curvas adecuadamente) Justifiquen sus afirmaciones.

**Ejercicio 34**

Siendo C la curva suave que muestra la figura siguiente, evalúen:

$$\text{a) } \oint_C \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy$$

$$\text{b) } \oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

**Campos conservativos e independencia del camino**

Ya hemos comentado que el gradiente de un campo escalar f define un campo vectorial.

Si \vec{F} es un campo gradiente, esto es, si $\vec{F} = \vec{\nabla}f$ decimos que \vec{F} es un campo *conservativo* y que f es una función *potencial* de \vec{F} .

Ejemplos de campos conservativos o campos gradientes son el campo gravitatorio y el campo eléctrico.

La primera pregunta que surge es: dado un campo vectorial \vec{F} ¿existe un campo escalar f tal que se cumple $\vec{F} = \vec{\nabla}f$? La respuesta es "no siempre".

Para saber si un campo \vec{F} es un campo conservativo hemos usado un procedimiento de búsqueda y construcción de la función potencial f (¿lo recuerdan?) pero . . . ¿se puede encontrar algún criterio que permita determinar rápidamente si el campo es conservativo o no? Les adelantamos que "sí".

Siendo D un subconjunto abierto de \mathfrak{R}^2 , observemos en principio que, ...

I. Si \vec{F} es conservativo en D y $\vec{F} = \langle M(x, y), N(x, y) \rangle$ con M y N derivables con *continuidad* en D , se tiene:

$$\text{i) Existe } f, \text{ función escalar, tal que } M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}; \quad N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\text{ii) } \operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \vec{k}$$

$$\text{iii) Como } M \text{ y } N \text{ son derivables con continuidad entonces } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\therefore \operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{0} \text{ en } D$$

(lo dicho es válido también para campos vectoriales en \mathfrak{R}^3)

Se tiene así, bajo ciertas hipótesis, una *condición necesaria* para que un campo vectorial sea conservativo:

Si \vec{F} es conservativo en D y las componentes de \vec{F} tienen derivadas parciales continuas en D , entonces $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$ en D .

Actividad 11

- a) Calculen $\int_C 2x \, dx + 3y^2 \, dy$ siendo C el segmento de recta desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$
- b) Calculen la integral de línea del mismo campo vectorial a lo largo del segmento de recta desde $(0,0)$ hasta $(1,0)$, seguido del segmento de recta desde $(1,0)$ hasta $(1,1)$.
- c) Calculen la integral de línea del mismo campo vectorial a lo largo de alguna otra curva (propóngala Ud.) que vaya desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$.

. . . Habrán observado que los resultados anteriores son todos iguales. No es casualidad!

$\int_C 2x \, dx + 3y^2 \, dy$ es un ejemplo de integral cuyo resultado depende sólo de los puntos extremos de C y no de la curva C (si A y B son dos puntos de \mathbb{R}^2 y C_1 y C_2 son dos curvas que van desde A hasta B entonces $\int_{C_1} 2x \, dx + 3y^2 \, dy = \int_{C_2} 2x \, dx + 3y^2 \, dy$). Decimos que $\int_C 2x \, dx + 3y^2 \, dy$ es *independiente del camino*.

Comprueben que el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = \langle 2x, 3y^2 \rangle$ (cuya integral a lo largo de diferentes curvas calculó) es un campo gradiente ($f(x,y) = x^2 + y^3$ es una función potencial) ¿Tendrá esto algo que ver con el hecho de que $\int_C 2x \, dx + 3y^2 \, dy$ sea independiente del camino? Veamos:

II. Supongamos que $\vec{F} = \langle M(x,y), N(x,y) \rangle$ es conservativo en D . Esto significa que existe una función escalar f tal que $\vec{\nabla} f = \vec{F}$ en todo punto de D . O sea:

$M = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $N = \frac{\partial f}{\partial y}$. Supongamos también que M y N son continuas en D .

Sea C una curva suave con punto inicial $A = (x_1, y_1)$ y punto final $B = (x_2, y_2)$.

Si $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$ es una parametrización de C , $I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$

donde, por hipótesis, $\vec{\nabla} f = \vec{F}$.

$$\therefore I = \int_a^b \vec{\nabla} f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

Observemos que si $g(t) = f(\vec{r}(t))$,

$\vec{\nabla} f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$ es la expresión vectorial de la derivada de g respecto de t . O sea:

$$g'(t) = \vec{\nabla} f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t).$$

Para recordar...

Si $w = f(x, y)$ y si $x = x(t); y = y(t)$ siendo f diferenciable y $x(t), y(t)$ derivables, entonces la función compuesta

$$g(t) = f(x(t), y(t)) = f(\vec{r}(t))$$

es derivable con respecto a t y se verifica:

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) y'(t)$$

lo que puede abreviarse como producto escalar:

$$g'(t) = \vec{\nabla} f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$$

De modo que resulta:

$$I = \int_a^b g'(t) dt = g(t) \Big|_a^b = g(b) - g(a) = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)) = f(B) - f(A) = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

Por lo tanto:

Si \vec{F} (con componentes continuas) es conservativo en D entonces el resultado de la

integral $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$ depende sólo del valor de la función potencial del campo en los

puntos extremos de la curva y no de la curva misma.

Observación: El resultado anterior (que es válido también en \mathfrak{R}^3) es sumamente importante, pues da una *condición suficiente para la independencia del camino*, ya que el cálculo se reduce – prescindiendo de la curva – a evaluar la función potencial en el extremo B y restarle el valor que toma en A . Se lo conoce como “**Teorema fundamental para integrales de línea**” (¿Qué les recuerda?) Seguramente están pensando en la Regla de Barrow (la función potencial f podría interpretarse como una especie de primitiva del campo \vec{F}).

Una interpretación física: Si \vec{F} es un campo de fuerzas conservativo entonces el trabajo realizado para desplazar una partícula entre dos puntos es independiente de la trayectoria, sólo depende del punto inicial y del punto final.

En los siguientes ejemplos veremos cómo podemos hacer uso del “Teorema fundamental para integrales de línea”.

Ejemplo 20

Probar que $\int_C 2x \, dx + 3y^2 \, dy$ es independiente del camino en $D = \mathbb{R}^2$

y calcular el valor de la integral a lo largo de cualquier curva desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$.

$\vec{F} = \langle 2x, 3y^2 \rangle$ es un campo vectorial continuo en \mathbb{R}^2 . Veamos que es conservativo.

Para ello buscamos una función $f(x,y)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2$.

Para que $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ debe ser $f(x,y) = \int 2x \, dx = x^2 + h(y)$

Buscamos ahora h de manera que se verifique que $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2$. Para que eso suceda

debe ser $\frac{d(x^2 + h(y))}{dy} = h'(y) = 3y^2$ y por lo tanto $h(y) = y^3 + C$

$\therefore \vec{F} = \langle 2x, 3y^2 \rangle$ es conservativo y $f(x,y) = x^2 + y^3$ es una función potencial de dicho campo.

Si C es cualquier curva suave a trozos que va desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$, en virtud del teorema 1 es:

$$\int_C 2x \, dx + 3y^2 \, dy = f(1,1) - f(0,0) = 2 - 0 = 2$$

Ejemplo 21

Para probar que el campo $\vec{F}(x,y,z) = \langle 4xe^z, \cos y, 2x^2e^z \rangle$ es conservativo en \mathbb{R}^3 ,

busquemos $f(x,y,z)$ tal que

$$\vec{F}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \right\rangle$$

Para ello debe ser: $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x e^z$ de donde $f(x, y, z) = \int 4x e^z dx = 2x^2 e^z + g(y, z)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = \cos y \quad \text{por lo tanto} \quad g(y, z) = \int \cos y dy = \text{sen } y + h(z)$$

$\therefore f(x, y, z) = 2x^2 e^z + \text{sen } y + h(z)$ y como $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$ debe ser igual a $2x^2 e^z$,

$$\text{se tiene que} \quad 2x^2 e^z + h'(z) = 2x^2 e^z$$

Por lo tanto, $h'(z) = 0$ y entonces $h(z)$ es una constante.

$f(x, y, z) = 2x^2 e^z + \text{sen } y$ es una función potencial para \vec{F}

$\therefore \vec{F}(x, y, z) = \langle 4x e^z, \cos y, 2x^2 e^z \rangle$ es un campo conservativo.

Ejercicio 35

Demuestren que la integral de línea es independiente de la trayectoria en $D = \mathfrak{R}^2$ y evalúen la integral.

a) $\int_C 2xy dx + (x^2 - 1)dy$; C desde $(1, 0)$ a $(3, 1)$

b) $\int_C 3x^2 y^2 dx + (2x^3 y - 4)dy$; C desde $(1, 2)$ a $(-1, 1)$

c) $\int_{(1,0)}^{(0,4)} ye^{-xy} dx + (xe^{-xy} - 2y)dy$

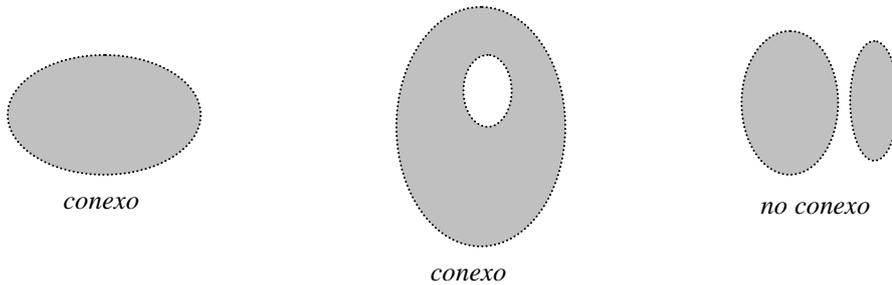
d) $\int_{(2,1,3)}^{(4,-1,0)} (z^2 + 2xy)dx + x^2 dy + 2xz dz$

e) $\int_{(3,-2,0)}^{(1,0,\pi)} (2x \cos z - x^2)dx + (z - 2y)dy + (y - x^2 \text{sen } z)dz$

III. Cabe preguntarse en este momento si sólo para un campo conservativo \vec{F} la

integral $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es independiente del camino. La respuesta es **si**.

Suponiendo que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es independiente del camino en un dominio *conexo* D , (que D sea conexo significa que, para todo par de puntos en D , existe una curva suave $C \subset D$ que una a esos puntos) y que las componentes de \vec{F} sean continuas en D , puede probarse (no lo haremos) que $f(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ con $(x, y) \in D$ es una función potencial de \vec{F} en D (o sea, $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = N$)



Se tiene entonces:

Si las componentes de \vec{F} son continuas en el conjunto conexo D ,

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es independiente del camino en D sí y sólo sí \vec{F} es conservativo en D .

Hay todavía más para decir sobre campos conservativos e independencia del camino.

IV. Supongamos ahora que \vec{F} es conservativo en D y que C es cerrada, suave a trozos y contenida en D . Si $f(x, y)$ es una función potencial de \vec{F} entonces $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A)$ donde A es el punto inicial de C y B es el punto final de C .

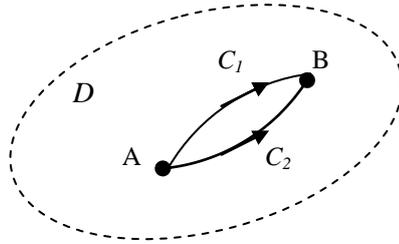
Pero siendo C cerrada es $A = B$, con lo cual se tiene que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

Recíprocamente, si $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para toda curva cerrada C , dadas dos curvas C_1 y C_2 ambas con punto inicial A y punto final B , se tiene:

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{-C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (\text{porque } C_1 \cup (-C_2) \text{ es cerrada})$$

de donde se deduce que $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ o sea que la integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

es independiente del camino.



Seguimos a esta altura sin contar con un criterio que nos permita decidir de manera rápida si un campo vectorial es conservativo. Es cierto que podemos calcular el rotor del campo y, si vemos que no es nulo, estaremos en condiciones de afirmar que el campo no es conservativo ¿y si el rotor del campo es nulo?

V. ¿Recuerdan la igualdad $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{k} \, dA$?

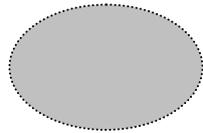
Es la igualdad del teorema de Green. (¿Qué condiciones debe cumplir \vec{F} , C y D para que podamos aplicarla?)

Bueno, suponiendo que las componentes de \vec{F} tengan primeras derivadas parciales continuas en D , que D sea un conjunto conexo y tal que toda curva cerrada $C \subset D$ encierra sólo puntos que están en D (cuando eso se cumple decimos: D es un conjunto **simplemente conexo**) y que $\text{rot} \vec{F} = \vec{0}$ en D , aplicando la igualdad de Green tenemos

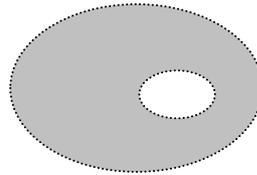
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{k} \, dA = 0$$

o sea que, para toda curva cerrada $C \subset D$ es $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ y, por lo tanto, la integral

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es independiente del camino y el campo \vec{F} es conservativo.



simplemente conexo



no simplemente conexo

Conclusión importante!!!!

Siendo \vec{F} un campo vectorial cuyas componentes tienen primeras derivadas parciales continuas en un conjunto D simplemente conexo (sin agujeros) contenido en \mathfrak{R}^2 ,

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{0} \text{ en } D \text{ si y sólo si } \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ es independiente del camino en } D$$

(Relacionando con los resultados anteriores $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A)$ donde f es una función potencial de \vec{F})

Observación: Veremos más adelante que un resultado similar es válido en \mathfrak{R}^3

Enunciamos a continuación un Teorema donde se resumen los resultados vistos:

Teorema

Sea $\vec{F} = \langle M(x, y), N(x, y) \rangle$, M y N con derivadas parciales continuas en un conjunto abierto y simplemente conexo $D \subset \mathfrak{R}^2$. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1) \vec{F} es conservativo en D

2) $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es independiente del camino que une A con B en D

siendo $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A)$ donde f es una función potencial de \vec{F}

3) $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para toda curva C cerrada y suave a trozos contenida en D .

4) $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ en D

Si \vec{F} representa un campo de fuerzas ...

- \vec{F} es conservativo si, y sólo si, el trabajo realizado para desplazar una partícula entre dos puntos es independiente de la trayectoria (sólo depende del punto inicial y del punto final)

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{si } C_1 \text{ y } C_2 \text{ tienen los mismos extremos})$$

- \vec{F} es conservativo si, y sólo si, el trabajo que realiza el campo siguiendo una trayectoria cerrada es cero

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

- \vec{F} es conservativo si, y sólo si, el rotacional de ese campo vectorial en todos los puntos es nulo

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$$

• Y más importante aún !! ; \vec{F} es conservativo si y sólo si podemos encontrar una función escalar llamada de *energía potencial*, cuyo gradiente sea \vec{F} .y tal que, el trabajo que realiza \vec{F} sobre un móvil entre dos puntos cualesquiera es igual a la variación de esa función escalar entre esos dos puntos.

$$\vec{F} = \vec{\nabla} f \quad ; \quad \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A)$$

Actividad 12

- a) Verifiquen que siendo $C: x^2 + y^2 = 1$ (con orientación antihoraria) y

$$\vec{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} i + \frac{x}{x^2 + y^2} j \quad \text{resulta} \quad \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$$

- b) ¿Es \vec{F} un campo conservativo en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$?

- c) Calculen $\text{rot } \vec{F}$ ¿qué observan? ¿se contradice esto con los resultados vistos ?

Ejercicio 36

Evalúen las integrales $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Antes de calcular traten de aplicar algún resultado teórico

válido.

a) $\vec{F}(x, y) = \langle x^2 + 1, y^3 - 3y + 2 \rangle$ donde C es una semicircunferencia que va desde $(-4, 0)$ a $(4, 0)$.

b) $\vec{F}(x, y, z) = \frac{\langle x, y, z \rangle}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ donde C es una curva que va de $(1, 3, 2)$ a $(2, 1, 5)$

c) $\vec{F}(x, y) = \left\langle \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right\rangle$ donde $C: x^2 + y^2 = 2$

d) $\vec{F}(x, y) = \left\langle \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right\rangle$ donde $C: (x-4)^2 + (y-2)^2 = 1$

e) $\vec{F}(x, y) = \left\langle \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right\rangle$ donde $C: x^2 + y^2 = 4$

f) Comparen los resultados obtenidos en c), d) y e). ¿Qué observan?

Ejercicio 37

Consideren el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = x \vec{j}$.

a) Grafíquelo

b) Encuentren tres trayectorias C_1 , C_2 y C_3 distintas de $P(2, 0)$ a $Q(-2, 0)$ tales que

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad , \quad \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} > 0 \quad \text{y} \quad \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} < 0$$

c) ¿ \vec{F} es un campo gradiente?

Ejercicio 38

Supongan que una partícula sometida a una fuerza $\vec{F}(x, y) = -y \vec{i} - x \vec{j}$ se mueve en el sentido de las agujas del reloj a lo largo de la parábola $y = x^2$ de $(1, 1)$ a $(-1, 1)$ y a lo largo de la recta $y = 1$ de $(-1, 1)$ a $(1, 1)$. Encuentren el trabajo realizado.

Ejercicio 39

Supongan que C es el triángulo con vértices en $(0, 0)$, $(4, 12)$ y $(4, 0)$

y $\vec{F}(x, y) = y \vec{i} + x \vec{j}$. ¿Cuánto vale $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$? ¿El campo es conservativo?

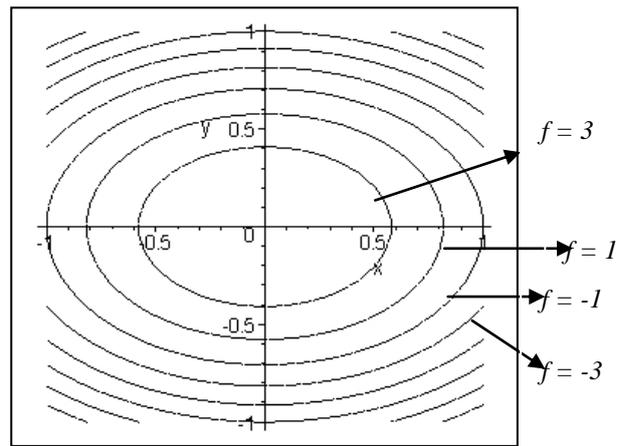
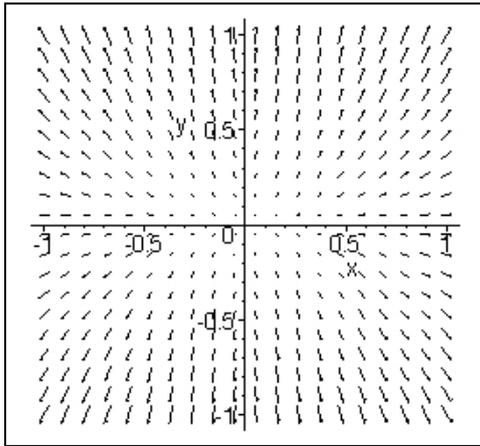
Autoevaluación (Curvas)

1. ¿Cómo describe una curva en el plano en función de un parámetro? ¿y en el espacio?
2. ¿Existe una única forma de parametrizar una curva? Justifique.
3. ¿Qué describe la función vectorial paramétrica $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$; $t \in [a, b]$?
4. ¿Cuál es el parámetro adecuado para curvas cerradas? ¿y para otro tipo de curvas?
5. Analice si las siguientes ecuaciones representan la misma curva:
 - i) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$
 - ii) $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + (3 - \cos t)\vec{k}$; $0 \leq t \leq \pi$
 - iii) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 3 - \cos t \end{cases}$ $0 \leq t \leq 3\pi$
6. Para la curva C representada por $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + 3\vec{k}$, $t \in [0, 2\pi]$ obtenga las ecuaciones paramétricas y las cartesianas.
7. ¿Cómo cambia la orientación de una curva C representada por $\vec{r}(t)$ con $t \in [a, b]$?
8. Defina el vector tangente unitario \vec{T} en un punto P de una curva C . ¿Cuál es la dirección que tiene \vec{T} ? ¿Cuándo se dice que una curva C es suave?
9. ¿Cómo calcula la longitud de una curva?
10. ¿A qué se llama *función longitud de arco*?
11. ¿Qué se entiende por *parametrización natural* de una curva? ¿Cómo se obtiene?
12. Use la función aceleración $\vec{a}(t) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v}(0) = \vec{0}$, $\vec{r}(0) = \vec{0}$ para encontrar las funciones velocidad y posición. Calcule la posición en $t = 2$.
13. Halle el vector velocidad y la velocidad instantánea con que se mueve una partícula sobre una circunferencia de radio b descrita por $\vec{r}(t) = b \cos(\omega t)\vec{i} + b \sin(\omega t)\vec{j}$ donde ω es la velocidad angular constante. Compruebe que el vector velocidad es ortogonal al vector posición. Halle el vector aceleración y verifique que apunta hacia el centro de la circunferencia. Calcule la magnitud del vector aceleración.

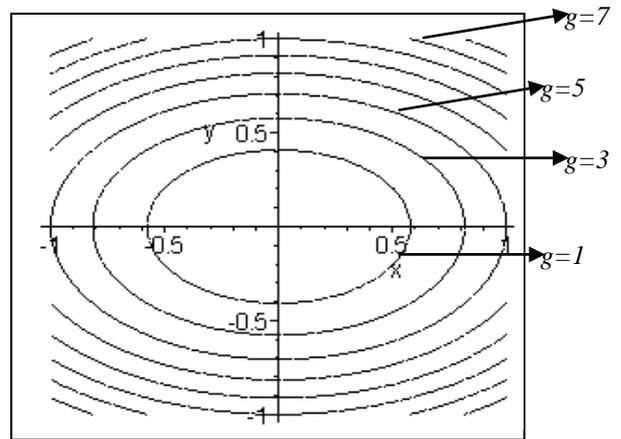
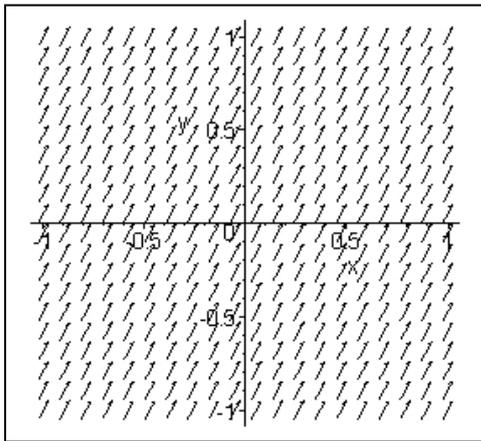
Autoevaluación (Campos vectoriales)

1. ¿Qué quiere decirse con “campo vectorial”?
2. ¿Qué quiere decirse con “campo vectorial con componentes con derivadas parciales continuas”?
3. Suponga que $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ es un vector constante y que $\vec{r}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ¿Cuáles de los siguientes son campos vectoriales y cuáles son campos escalares? Explique.
 - i) $\vec{r} + \vec{a}$ ii) $\vec{r} \cdot \vec{a}$ iii) $x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ iv) $x^2 + y^2 + z^2$
4. Si $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ encuentre las siguientes cantidades: a) $|\vec{F}|$ b) $\vec{F} \cdot \vec{r}$
 - c) Un vector unitario paralelo a \vec{F} y que apunta en la misma dirección.
5. Dibuje campos vectoriales en \mathcal{R}^2 que cumplan:
 - a) Todos los vectores son paralelos al eje x y tienen longitud constante.
 - b) Todos los vectores son de longitud unitaria y perpendiculares al vector posición en ese punto
 - c) Todos los vectores apuntan hacia el origen y tienen longitud constante.
6. En la página 297, relacione las gráficas de cada uno de los campos gradientes con las gráficas de las curvas de nivel de la función potencial correspondiente.
7. Cada campo vectorial de las figuras de la página 298 representa la fuerza sobre una partícula en diferentes puntos en el espacio como resultado de otra partícula en el origen. Relacione los campos vectoriales con las descripciones siguientes.
 - a) Una fuerza de repulsión cuya magnitud disminuye conforme aumenta la distancia entre las dos partículas.
 - b) Una fuerza de repulsión cuya magnitud aumenta conforme aumenta la distancia entre las dos partículas.
 - c) Una fuerza de atracción cuya magnitud disminuye conforme disminuye la distancia entre las dos partículas.
 - d) Una fuerza de atracción cuya magnitud aumenta conforme disminuye la distancia entre las dos partículas

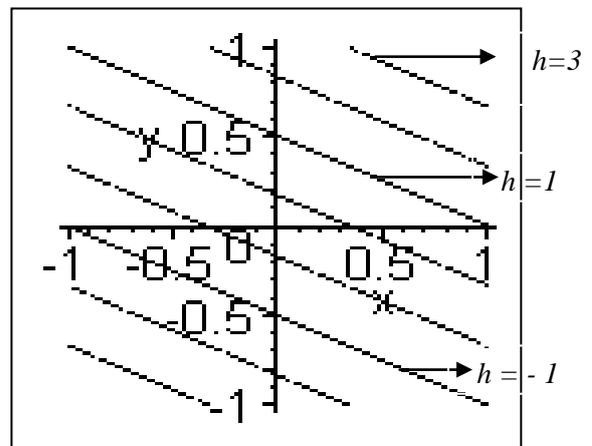
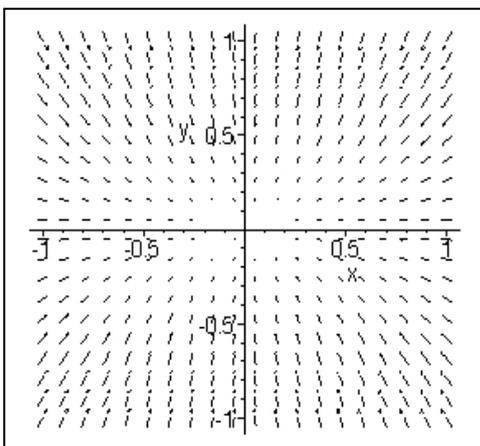
Gráficos correspondientes al ejercicio 6 de la autoevaluación sobre Campos vectoriales:



Curvas de nivel de la función $z=f(x,y)$

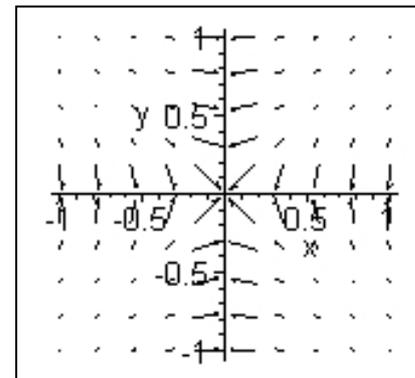
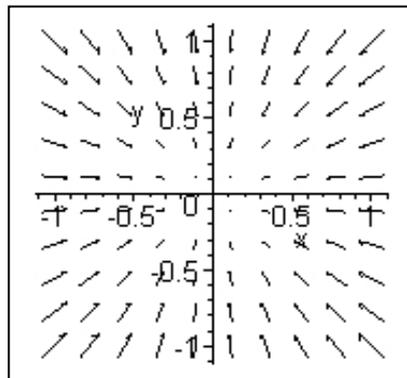
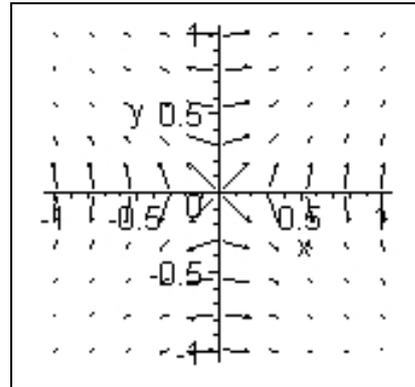
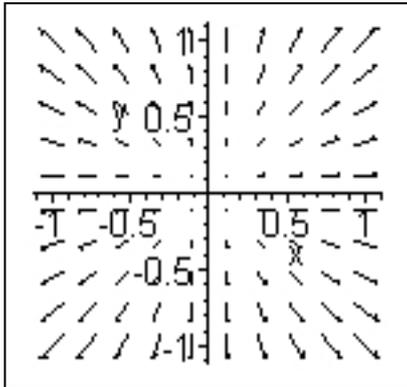


Curvas de nivel de la función $z = g(x,y)$



Curvas de nivel de la función $z = h(x, y)$

Gráficos correspondientes al ejercicio 7 de la autoevaluación sobre Campos vectoriales:



Autoevaluación (Integral de línea)

1. ¿Cómo define $\int_C f(x, y, z) ds$ donde f es una función continua sobre C y C es una curva suave ?
2. La integral del ej. 1 generaliza el concepto de (complete)
3. a) Indique como calcula la integral definida en el ejercicio 1 si C está parametrizada en función del parámetro longitud de arco.
b) Indique como calcula la integral definida en el ejercicio 1 si C está parametrizada en función de un parámetro cualquiera.
4. ¿Qué resultado le da $\int_C ds$? Justifique.
5. ¿Qué resultado le da $\int_{-C} f(x, y, z) ds$, donde $-C$ denota la curva C recorrida en sentido contrario? Justifique.

6. Si $z = f(x, y)$ es una función continua y positiva y C una curva en \mathbb{R}^2 , ¿qué Interpretación geométrica tiene $\int_C f(x, y) ds$?
7. Suponga que cuenta con un alambre de espesor despreciable ¿Cómo puede calcular la masa y el centro de masa del alambre? Describa además, los elementos que necesita para responder.
8. Enuncie propiedades de la integral del ej.1.
9. Explique cuál es el significado matemático de $\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$ donde \vec{F} es un campo vectorial definido sobre C , C curva suave orientada positivamente.
10. ¿Cómo calcula la integral del ej 9 si C está parametrizada en función de un parámetro cualquiera?
11. Explique cuál es el significado físico de $\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$ donde \vec{F} es un campo de fuerzas que mueve una partícula desde A a B en la trayectoria C .
12. ¿Qué relación hay entre $\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$ y $\int_{-C} \vec{F} \cdot \vec{T} ds$ donde $-C$ denota la curva C recorrida en sentido contrario?
13. Indique notaciones equivalentes de $\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$.
14. Si $C = C_1 \cup C_2$ donde C_1 y C_2 son curvas suaves ¿Cómo calcula $\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$?
15. ¿Cómo se llama $\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$?

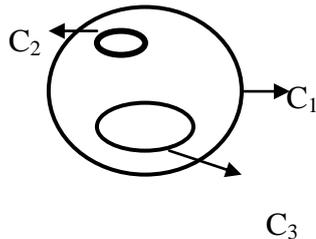
Autoevaluación (Teorema de Green - Independencia del camino)

1. Enuncie el teorema de Green describiendo los elementos involucrados.
2. Enuncie la forma vectorial del teorema de Green describiendo los elementos involucrados.
3. Use el teorema de Green para encontrar una expresión para calcular el área de una región plana usando la frontera, describiendo los elementos involucrados.
4. Justifique la extensión del Teorema de Green cuando la región R es una corona con fronteras C_1 y C_2 (curvas cerradas y suaves).

5. Utilice el ej 4 para relacionar la integral $\oint_{C_1} \vec{F}.d\vec{r}$ con $\oint_{C_2} \vec{F}.d\vec{r}$ para el caso en que \vec{F} es un campo vectorial con $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ en R . Justifique lo que afirme.

6. Calcule usando función potencial (si es posible) $\int_A^B 2xydx + x^2dy$, siendo $A(1,1)$ y $B(2,3)$.

7. Enuncie el teorema de Green y justifique su generalización cuando la región R es la de la figura con fronteras C_1, C_2 y C_3 (curvas cerradas y suaves).



8. Utilice el ej 7 para relacionar la integral $\oint_{C_1} \vec{F}.d\vec{r}$ con $\oint_{C_2} \vec{F}.d\vec{r}$ y $\oint_{C_3} \vec{F}.d\vec{r}$ siendo \vec{F} un campo vectorial con $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ en R . Justifique lo que afirme.

9. Muestre que si $\text{rot } \vec{V} = \vec{0}$ en D región simplemente conexa entonces $\int_A^B \vec{V}.\vec{T}ds$ es independiente del camino, siendo A y B dos puntos de D .

10. Muestre que si \vec{V} es conservativo en D región conexa entonces $\int_A^B \vec{V}.\vec{T}ds$ es independiente del camino, siendo A y B dos puntos de D .

11. Muestre que si \vec{F} tiene componentes con derivadas parciales continuas y $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ en D simplemente conexo entonces la integral de \vec{F} sobre cualquier curva C cerrada es cero.

12. Analice si $\vec{F}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \vec{i} - \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}$ y $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ cumplen las hipótesis del ej. 11.

13. Calcule la integral de \vec{F} del ej. 12 sobre C siendo C la circunferencia centrada en el origen y de radio 5.

14. Calcule la integral de \vec{F} del ej. 12 sobre C siendo C la circunferencia centrada en $(2, 0)$ y de radio 1.

15. Calcule la integral de \vec{F} del ej. 12 sobre C siendo C la circunferencia centrada en $(2, 7)$ y de radio 1.

16. Si $\vec{F} = \vec{\nabla} \phi(x, y, z)$ en D , justifique que la circulación de \vec{F} a lo largo de cualquier trayectoria cerrada C es "nula".

17. Si $\vec{F}(x, y) = \frac{y}{(x-1)^2 + y^2} \vec{i} - \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} \vec{j}$ ¿Puede decir cuánto vale la integral de \vec{F} sobre una curva cerrada que no encierre al punto (1,0)? ¿Y si lo encierra?

18. Analice si $\vec{F}(x, y) = (2x + y)\vec{i} + (x + 2y)\vec{j}$, está en las hipótesis del ej.16 en \mathbb{R}^2 y calcule la integral de \vec{F} siendo C la circunferencia centrada en el origen y de radio 1 .

19. Si \vec{F} es el campo vectorial del ej. 18 ¿Cuánto vale la integral a lo largo de cualquier curva cerrada?

20. ¿Por qué es importante conocer si una integral es independiente del camino?

21. ¿Por qué es importante saber si un campo vectorial es un gradiente?

22 ¿Qué condición le permite asegurar que un campo es conservativo?

23. Use Maple para graficar los siguientes campos vectoriales:

i) $[x, 0, 0]$ ii) $[y, -x, 0]$ iii) $[3x^2z, x^2, x \cos(y)]$

iv) $[2xz, 2y^2z, -2y^2z]$ v) $[2xz, 2yz, 2(x+y)]$

vi) $[y/(x^2+y^2), -x/(x^2+y^2), 0]$

¿Cuáles son conservativos?

Capítulo VI: Integrales de superficie

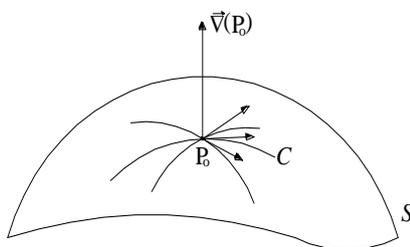
Así como la integral de línea extiende el concepto de integral definida al caso en el que el dominio de integración es una curva, la *integral de superficie* que estudiaremos en este último capítulo extiende el concepto de integral doble al caso en el que el dominio de integración es una superficie de \mathcal{R}^3 . Para poder abordar la definición, el cálculo y las propiedades de este nuevo tipo de integrales estudiaremos primeramente las superficies y su representación vectorial paramétrica.

Superficies

a) Descripción implícita:

Recordemos que toda superficie S , puede identificarse por medio de una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$. Siempre podemos suponer que S es la *superficie de nivel* $k = 0$ de la función $w = F(x, y, z)$.

Si F admite derivadas parciales continuas, no nulas a la vez, en cada punto de S , el *vector gradiente de F* , es ortogonal a cada una de las direcciones tangentes a las curvas contenidas en S pasando por ese punto.



Observación: este resultado es una consecuencia de la regla de la cadena (derivada de función compuesta), aplicada en forma vectorial.

Una “abreviada” demostración (¡por si no lo recuerdan!):

Si C es curva suave contenida en S (superficie de nivel de F) pasando por P_0 y $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in I$ su ecuación vectorial, al evaluar F en cada punto de C , se tiene la composición $g(t) = F(\vec{r}(t))$, que resulta ser función constante (¿por qué?). Al derivar $g(t)$ con respecto a t , y evaluar en t_0 , se tiene: $g'(t_0) = \vec{\nabla}F(P_0) \cdot \vec{r}'(t_0) = 0$,

Luego, $\vec{\nabla}F(P_0)$ es ortogonal a $\vec{r}'(t_0)$, cualquiera sea la curva que pasa por P_0 .

En estas condiciones, se dice que $\vec{\nabla}F(P_o)$ es el “vector normal” a S en P_o y el plano pasando por P_o con normal $\vec{N} = \vec{\nabla}F(P_o)$ es el plano tangente a S en P_o .

Al suponer que esto ocurre en cada punto de S , se dice que S es una superficie suave: \vec{N} varía con continuidad sobre S .

Ejemplo 1

En la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, el vector normal en cada punto es:

$$\vec{N} = \vec{\nabla}F = (2x, 2y, 2z).$$

Si queremos el plano tangente en $P_o(1,1,1)$, basta con reemplazar:

$$\vec{N} = \vec{\nabla}F(P_o) = (2, 2, 2)$$

Entonces el plano tangente es $\phi: 2(x-1) + 2(y-1) + 2(z-1) = 0$

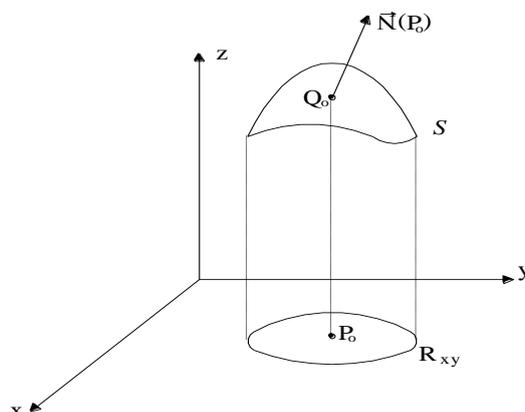
o sea: $x + y + z = 3$

b) Descripción explícita:

Si S es gráfica de una función $z = f(x, y)$ con $(x, y) \in R_{xy}$ presenta como característica que toda recta paralela al eje z , trazada por puntos de R_{xy} , corta a S en un punto exactamente. Se dice entonces que S es *superficie simple*.

La ecuación $z = f(x, y)$ describe a S en *forma explícita*. Supongamos que en el entorno de $P_o \in R_{xy}$, f admite derivadas parciales, continuas (f diferenciable en P_o), entonces, en el punto $Q_o \in S$ (correspondiente de P_o), puede hallarse el vector normal, suponiendo para S la ecuación implícita: $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$

$$\therefore \vec{N} = \vec{\nabla}F(P_o) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)_{P_o}$$



Observaciones:

1) Si la ecuación implícita se da como $f(x, y) - z = 0$, se tendría,

$$-\vec{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right)$$

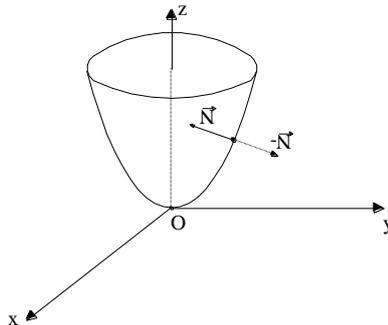
2) Si la tercera componente es 1; \vec{N} tiene dirección “normal hacia arriba” (tercer ángulo director menor que $\pi/2$). En caso de tener tercera componente -1 , se tiene el vector opuesto.

Cualquiera sea el caso, $\vec{N} \neq \vec{0}$, con componente continuas. Si esto ocurre en cada punto $Q \in S$ ($P \in \mathbb{R}_{xy}$), se dice que la superficie es *suave* y *admite plano tangente*.

Ejemplo 2

Sea $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ El vector normal en cada punto resulta:

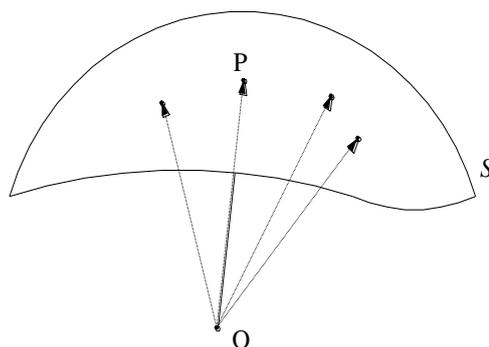
$\vec{N} = (-2x, -2y, 1)$ (o su opuesto), orientado hacia el “interior” del paraboloides (hacia “afuera”).

**Actividad 1**

Consideren ahora superficies que sean gráficas de funciones de x y z y de y y z respectivamente, y establezcan las condiciones para ser consideradas superficies suaves. Identifique los respectivos vectores normales y haga un esquema gráfico. Proponga ejemplos de tales superficies.

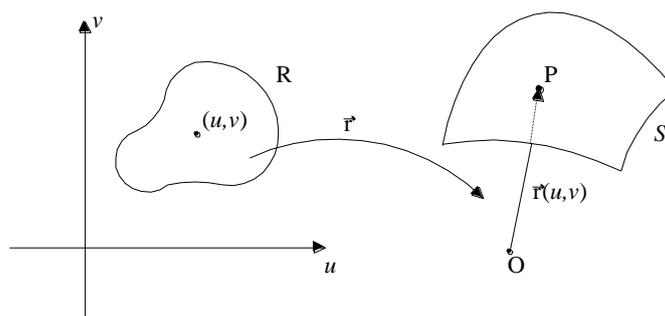
c) **Descripción vectorial:** Otra forma de individualizar puntos de una superficie es por medio del vector \vec{OP} aplicado en el origen y con extremo variable en $P \in S$.

Al variar \vec{OP} , tenemos los puntos de S .



¿Cómo varía \vec{OP} ? Teniendo presente -apelando a la intuición- que los puntos en una superficie tienen dos grados de libertad, es natural pensar que la variación de \vec{OP} va a depender de *dos variables independientes*, u y v , que llamaremos parámetros, tales que el par (u, v) represente las coordenadas de un punto de cierto dominio R , que ubicaremos en un sistema ortogonal uv . Al variar (u, v) en R , va a producir la variación de \vec{OP} y en consecuencia de la ubicación de P en S .

Podemos establecer entonces, que existe una correspondencia \vec{r} que asigna a cada punto $(u, v) \in R$, un único vector $\vec{r}(u, v) = \vec{OP}$, siendo $P \in S$. Formalmente tenemos una función vectorial de dos variables, cuyo recorrido (o imagen) es la superficie S .



La ecuación $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in R$ es llamada *ecuación vectorial paramétrica de S* . R es un dominio paramétrico, que en caso de ser *acotado y cerrado*, se dice *región paramétrica*, y en ese caso S es *acotada*.

Podemos observar -tal como ocurría con las curvas- que el vector $\vec{r}(u,v)$ queda identificado por medio de tres componentes reales, funciones de las variables u y v :

$$\vec{r}(u,v) = X(u,v)\hat{i} + Y(u,v)\hat{j} + Z(u,v)\hat{k}$$

y como $\vec{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

entonces

$$\begin{cases} x = X(u,v) \\ y = Y(u,v) \\ z = Z(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in R$$

definiendo así un *sistema de ecuaciones paramétricas* de S .

El proceso de búsqueda de una representación vectorial para una superficie, es llamado *parametrización*. Las parametrizaciones más comunes son las que se “inspiran” en los cambios del sistema de coordenadas:

Ejemplo 3 (Parametrización de un cilindro circular de radio a)

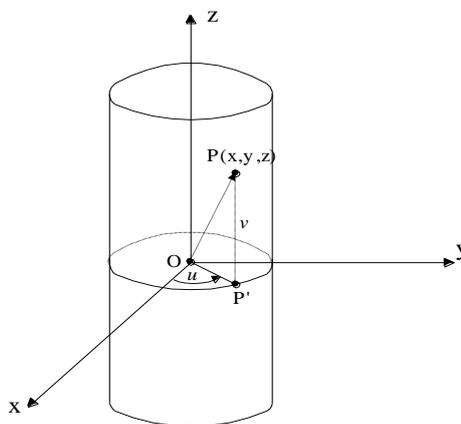
Sea $S: x^2 + y^2 = a^2$

Teniendo en cuenta las coordenadas cilíndricas de un punto del espacio, todo punto $P \in S$, queda individualizado por el ángulo de giro (en la proyección) y la cota, ya que $r = a$, para cada punto.

En consecuencia:

$$\begin{cases} x = a \cos u \\ y = a \sin u \\ z = v \end{cases}$$

designando u al ángulo de giro y v a la cota.

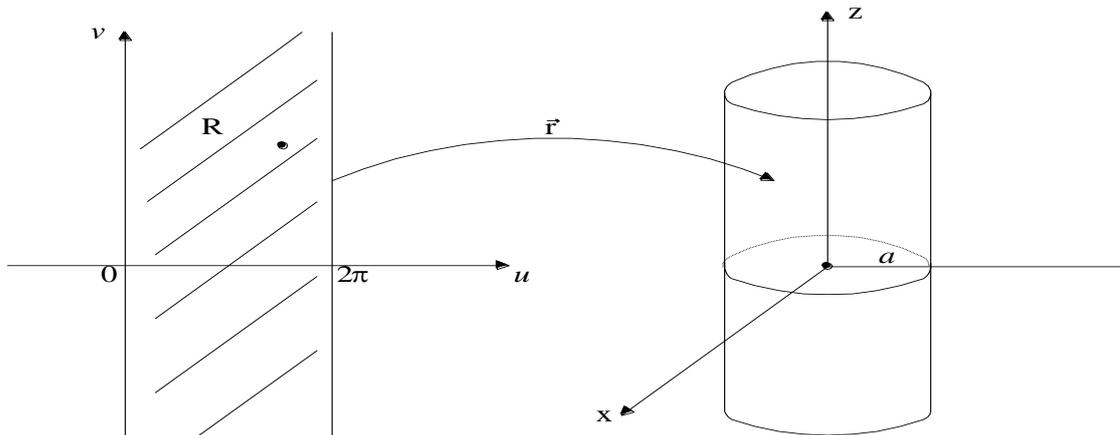


¿Cómo varían u y v ? $0 \leq u \leq 2\pi$; $v \in \mathfrak{R}$

Entonces: $S: \vec{r} = \vec{r}(u, v) = a \cos u \hat{i} + a \sen u \hat{j} + v \hat{k}$; $(u, v) \in R$

$$R = \{(u, v) / 0 \leq u \leq 2\pi; v \in \mathfrak{R}\}$$

Podemos interpretar que R se convierte en S mediante \vec{r} .



Ejercicio 1

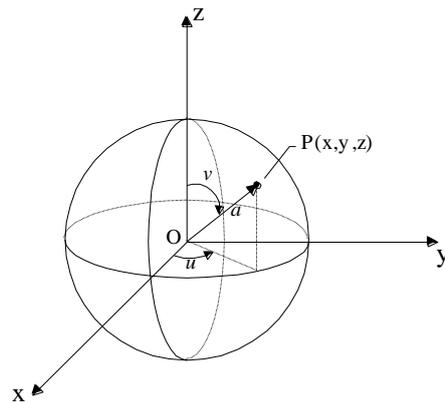
Parametricen los siguientes cilindros acotados explicitando la región paramétrica.

- $x^2 + y^2 = 4$ entre $z = 0$ y $z = 4$
- $x^2 + y^2 = 25$ entre $z = 0$ y $y + z = 6$
- $x^2 + y^2 = 4$ entre $y + z = 4$ y $y - z = 4$
- $x^2 + y^2 = 1$ entre $z = 0$ y $x + y + z = 4$
- $y^2 + z^2 = 1$ entre $x = -1$ y $x = 1$

Ejemplo 4 (Parametrización de una esfera con centro en el origen y radio a)

Tomando como referencia el sistema de coordenadas esféricas, cada punto de S tendría $\rho = a$, cualesquiera sean θ y φ . Si llamamos $u = \theta$ (ángulo de giro) y $v = \varphi$ (ángulo medido desde el eje z_+ hasta \vec{OP}), se tiene:

$$\begin{cases} x = a \cos u \sen v \\ y = a \sen u \sen v \\ z = a \cos v \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} 0 \leq u \leq 2\pi \\ 0 \leq v \leq \pi \end{cases}$$

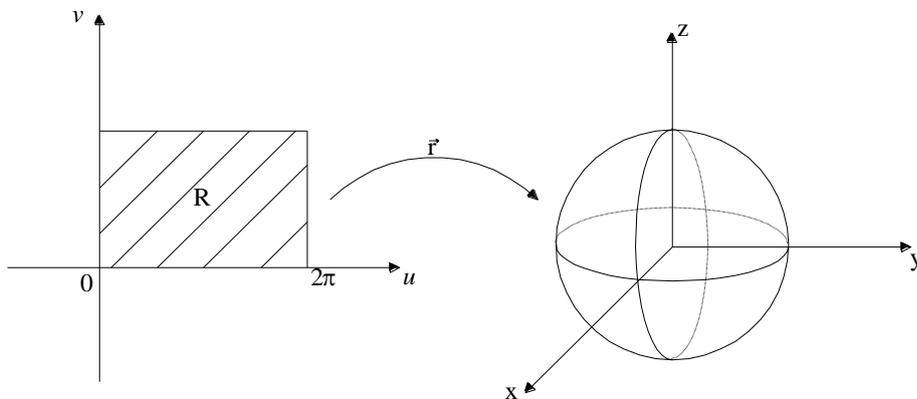


Entonces:

$$S : \vec{r} = \vec{r}(u, v) = a \cos u \operatorname{sen} v \hat{i} + a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \hat{j} + a \cos v \hat{k} \quad ; (u, v) \in R$$

$$R = \{ (u, v) \mid 0 \leq u \leq 2\pi ; 0 \leq v \leq \pi \}$$

Puede interpretarse que el rectángulo R se transforma en S mediante \vec{r} :



Pregunta: ¿En que se transforman los puntos del lado $v = \pi$?, ¿y los del lado $v = 0$?; ¿qué ocurre con los puntos donde $v = \pi/2$?

Ejemplo 5 (Parametrización trivial)

Sea $S : z = x^2 + y^2$

Haciendo $x = u$, $y = v$ se tiene:

$$S : \vec{r} = \vec{r}(u, v) = u \hat{i} + v \hat{j} + (u^2 + v^2) \hat{k} \quad \text{con } (u, v) \in \mathfrak{R}^2$$

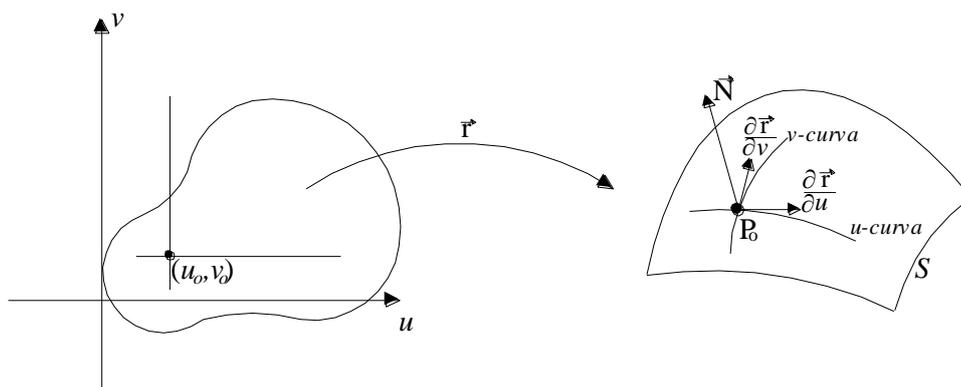
Ejercicio 2

- a) Parametricen el cono: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.
- b) Ídem porción del mismo cono, entre $z = 0$ y $z = 4$.
- c) Ídem porción de paraboloides $z = x^2 + y^2$, limitado por $x + z = 4$.
- d) ¿Cómo puede parametrizarse un plano?
- e) Parametricen la porción de cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
- f) Parametricen la porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, en el interior del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Dirección normal a una superficie dada por una representación vectorial

Sea $S: \vec{r} = \vec{r}(u, v); (u, v) \in R$. Supongamos que $P_o \in S$ proviene de $(u_o, v_o) \in R$ mediante \vec{r} . Consideremos en R la recta $v = v_o$. Su imagen en S será una curva que pasa por P_o , que identificaremos como u -curva. Análogamente, la imagen de $u = u_o$, será la curva - por P_o - que llamaremos v -curva.

La razón de estas denominaciones es porque dejando fija una variable, la *curva imagen* correspondiente se genera sólo por variación de la otra, que toma el rol de parámetro.



Se tiene así: u -curva : $\vec{r} = \vec{r}(u, v_o)$; \leftarrow parámetro u

v -curva : $\vec{r} = \vec{r}(u_o, v)$; \leftarrow parámetro v

Supongamos ahora que $\vec{r}(u, v)$ admite en un entorno de (u_o, v_o) derivadas parciales no nulas y continuas. Si además suponemos que $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_o, v_o)$ y $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_o, v_o)$ no son colineales

$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \neq \alpha \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0)\right)$, tenemos en P_0 , dos vectores que definen la dirección tangente a la u -curva y v -curva respectivamente. Siendo estos vectores, no nulos, no colineales, determinan en P_0 un plano, con normal $\vec{N} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \Big|_{(u_0, v_0)}$, llamado *plano tangente*. El vector \vec{N} , que es no nulo y con componentes continuas (¿por qué?) es llamado *vector normal* a S en P_0 .

Observaciones:

- 1) Aceptamos a \vec{N} como vector normal a S en P_0 ... ¡porque lo es!, pero en realidad debería comprobarse también, que toda curva contenida en S pasando por P_0 , tiene dirección tangente ortogonal con \vec{N} .
- 2) Siendo $\vec{N} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \Big|_{(u_0, v_0)}$ vector normal a S en P_0 , también lo es su opuesto $-\vec{N} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \Big|_{(u_0, v_0)}$

Conclusión:

Dada $S: \vec{r} = \vec{r}(u, v)$; $(u, v) \in R$, si en cada punto $(u, v) \in R$ existen $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ no nulas, no colineales, con componentes continuas, entonces, en cada punto P de S puede hallarse el vector normal $\vec{N} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$, no nulo, variando con continuidad, y el correspondiente plano tangente a S en P . Se dice, cuando esto sucede, que la superficie S es una *superficie suave*.

Ejercicio 3

a) Hallen el vector normal para cada caso e indicar si es vector interior o exterior de las siguientes superficies:

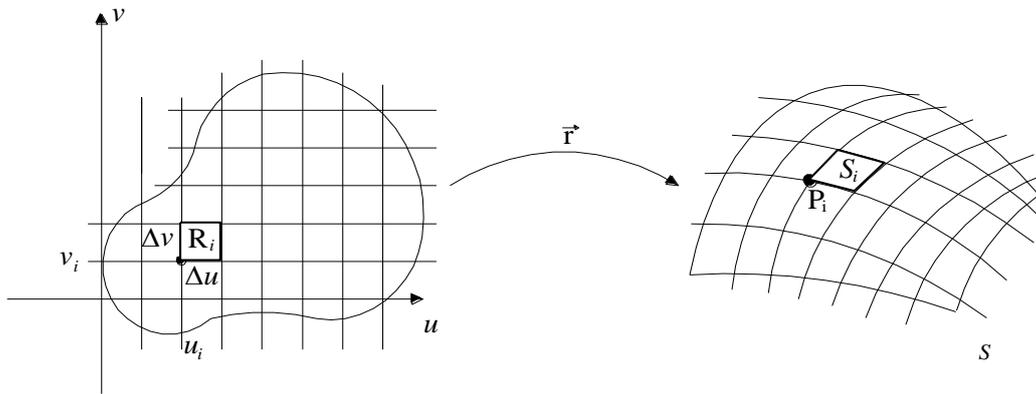
- i) cilindro recto $x^2 + y^2 = a^2$ ii) esfera centrada en O y radio a .

b) Hallen el vector normal para las superficies :

- i) $z = 4 - x^2 - y^2$ limitada por $z = 0$ (sobre el plano xy). ii) $z = x^2 + y^2$, bajo $z = 4$.

Área de una superficie

Supongamos que S es una superficie suave, acotada, dada por $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, con $(u, v) \in R$. ¿Cómo podemos calcular el área de S ? Definamos una partición en R , por medio de rectas de la forma $u = \text{cte}$ y $v = \text{cte}$. Estas rectas producirán en S un conjunto de u -curvas y v -curvas, generando una subdivisión de la superficie en porciones S_i . Trataremos de relacionar las áreas de las dichas porciones S_i con las áreas de los rectángulos R_i en que se ha dividido R .

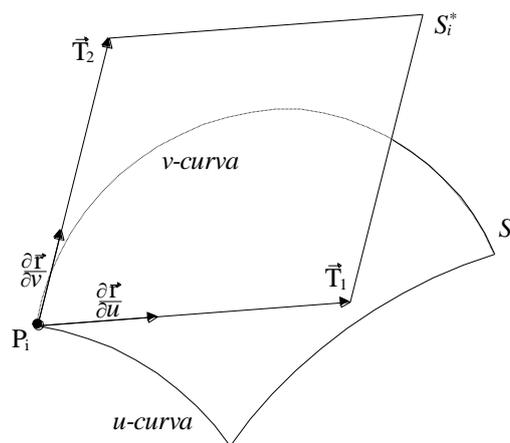


Supongamos S_i “imagen” de R_i siendo $P_i \leftrightarrow \vec{r}(u_i, v_i)$

Sean: $\Delta S_i = \text{área de } S_i$ y $\Delta R_i = \text{área de } R_i = \Delta u \cdot \Delta v$

$\Delta S_i \cong \Delta S_i^* = \text{área de un paralelogramo (porción del plano tangente a } S \text{ en } P_i) \text{ de lados}$

$$\vec{T}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_i, v_i) \Delta u \quad \text{y} \quad \vec{T}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_i, v_i) \Delta v$$



$$\Delta S_i \cong \Delta S_i^* = |\vec{T}_1 \times \vec{T}_2| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|_{(u_i, v_i)} \Delta u \Delta v = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|_{(u_i, v_i)} \Delta R_i$$

O sea:
$$\Delta S_i \cong |\vec{N}|_{P_i} \Delta R_i$$

Omitiendo las formalidades, podemos decirle que:

$$\text{área}(S) \cong \sum_{i=1}^n \Delta S_i \cong \sum_{i=1}^n |\vec{N}|_{P_i} \cdot \Delta R_i$$

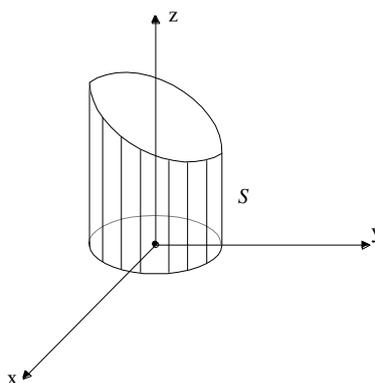
y como $|\vec{N}(u,v)| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|$ es una función continua, existe el límite de estas sumas,

resultando la integral de la función $|\vec{N}|$ y representando en consecuencia el área de S.

$$\text{área}(S) = \iint_R \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| dA_{uv}$$

Ejemplo 6

Sea S porción del cilindro $x^2 + y^2 = 4$, limitado por $z = 0$ e $y + z = 4$. Calcular el área de S.



Sabemos que: $S: \vec{r}(u,v) = 2 \cos u \hat{i} + 2 \sin u \hat{j} + v \hat{k}$ donde: $\begin{cases} 0 \leq u \leq 2\pi \\ 0 \leq v \leq 4 - 2 \sin u \end{cases}$

Hallamos el vector normal:

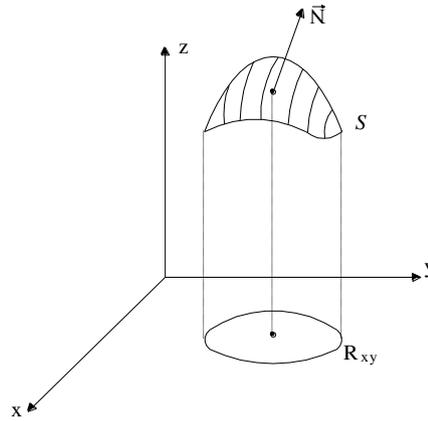
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = -2 \sin u \hat{i} + 2 \cos u \hat{j} + 0 \hat{k} \quad ; \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = 0 \hat{i} + 0 \hat{j} + 1 \hat{k}$$

$$\therefore \vec{N}(u,v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 \sin u & 2 \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cos u \hat{i} + 2 \sin u \hat{j} + 0 \hat{k}$$

Entonces: $|\vec{N}| = 2$ y $\text{área}(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^{4-2 \sin u} 2 \, dv \, du = 16\pi$ (unidades de superficie).

¿Cómo podemos proceder si la superficie es gráfica de función?

Supongamos S suave $S: z = f(x,y)$, $(x,y) \in R_{xy}$.



Dijimos que pueden considerarse a x e y como parámetros siendo R_{xy} la región paramétrica :

$$S: \vec{r}(x,y) = x\hat{i} + y\hat{j} + f(x,y)\hat{k}$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = 1\hat{i} + 0\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial x}\hat{k} \quad ; \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = 0\hat{i} + 1\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{k}$$

Entonces:

$$\vec{N} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + 1\hat{k} = \left\langle -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right\rangle$$

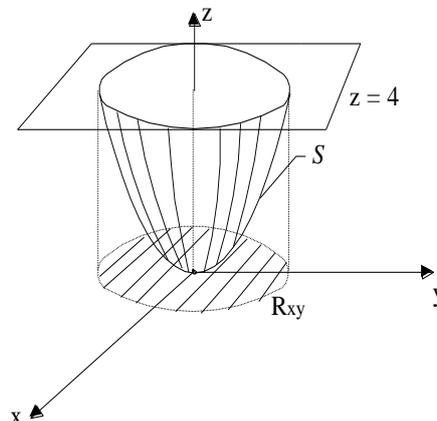
y

$$\text{área}(S) = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dA_{xy}$$

Completan las fórmulas que se tendrían, para calcular el área, cuando S es gráfica de una función $x = g(y,z)$ y cuando es gráfica de $y = h(x,z)$.

Ejemplo 7

Calcular el área del paraboloides $z = x^2 + y^2$, limitado por $z = 4$.



En este caso S es grafica de función. $S: z = f(x, y) = x^2 + y^2$ con $(x, y) \in R_{xy}$

donde $R_{xy} = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 4\}$ (círculo)

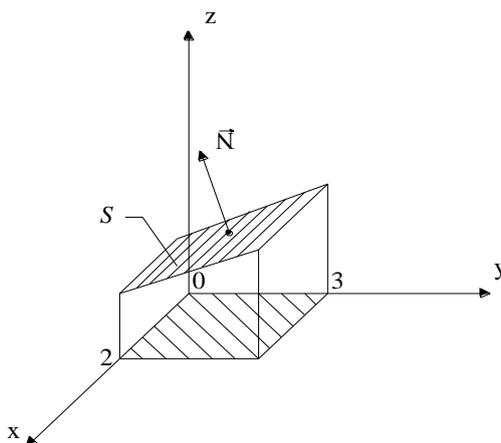
$$\vec{N} = \langle -2x, -2y, 1 \rangle \quad \therefore |\vec{N}| = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$$

$$\therefore \text{área}(S) = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dA_{xy}$$

La integral doble que tenemos que calcular es apta para ser trabajada en coordenadas

polares:
$$\text{área}(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta \quad (\text{completen!})$$

Propuesta para meditar (!importante!): Sea S la porción de plano $2x - 3y + 4z - 3 = 0$ que se proyecta en el rectángulo $R_{xy} = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 3\}$. ¿Cómo calcular el área de S ?



Por lo que vimos, debe integrarse el módulo del vector normal, en la región de proyección.

Como se trata de un plano, alguien podría -en forma apresurada- decir que su vector normal es: $\vec{N} = (2, -3, 4)$. Claro que si, es cierto, eso es sabido por geometría, pero su módulo es entonces $|\vec{N}| = \sqrt{29}$, y de esta manera el área calculada sería:

$$\iint_{R_{xy}} \sqrt{29} dA_{xy} = 6\sqrt{29}$$

Alguien -más cuidadoso- tendría en cuenta la fórmula que corresponde al cálculo del área de una superficie dada en una forma explícita $z = f(x, y)$.

En el caso propuesto, se debe despejar entonces z :

$$z = \frac{3 - 2x + 3y}{4} = f(x, y), \quad \text{en consecuencia:}$$

$$\vec{N} = \left(\frac{2}{4}, -\frac{3}{4}, 1 \right) \quad \text{y} \quad |\vec{N}| = \sqrt{\frac{4}{16} + \frac{9}{16} + 1} = \sqrt{\frac{29}{16}} = \frac{\sqrt{29}}{4}$$

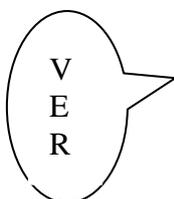
$$\therefore \text{área}(S) = \iint_{R_{xy}} \frac{\sqrt{29}}{4} dA_{xy} = \frac{6}{4} \sqrt{29} = \frac{3}{2} \sqrt{29} \quad \text{!!!!}$$

¿Qué ocurrió entonces? Si bien es cierto que lo que debe integrarse es el módulo del vector normal, éste debe ser el que relaciona las áreas de las S_i con las de los rectángulos R_i , y ese es el vector obtenido como $\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$ -ó su opuesto-.

Conclusión: no cualquier vector normal a una superficie sirve para el cálculo del área. Si bien todos definen la misma dirección, el área solo se obtiene con aquel de *módulo adecuado*.

Ejercicio 4

Calculen el área de las siguientes superficies.



- Salvo que se indique otra cosa, traten de resolver (en los casos en los que ello es posible) usando una representación explícita de la superficie, ya que por lo general resulta ser ésto lo más sencillo.

- 1) Una esfera de radio a . (parametrizando con coordenadas esféricas).
- 2) Una esfera de radio a . (Calculando el área de un hemisferio, dado en forma *explícita*).
- 3) Porción del plano $y = 3x$, interior al paraboloides $z = x^2 + y^2$, limitado por $z = 4$.
- 4) Porción del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ cortada por los planos $z = 2$ y $z = 6$.

- 5) Porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, interior a $x^2 + y^2 - ay = 0$ (con $z \geq 0$).
- 6) Porción de paraboloides $z = x^2 + y^2$, cortada por los planos $z = 2$ y $z = 6$.
- 7) Porción del plano $x + 2y + 2z = 5$, limitado por los cilindros $x = y^2$ y $x = 2 - y^2$.
- 8) Porción de cilindro $x^2 + y^2 = 4$; limitado por $z = y$, en el primer octante.
- 9) S porción de plano $y + 2z = 2$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
- 10) Casquete de paraboloides $z = 2 - x^2 - y^2$, cortado por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Uso de MAPLE:

Podemos graficar una superficie dada en forma paramétrica utilizando los siguientes comandos

> *with(plots):*

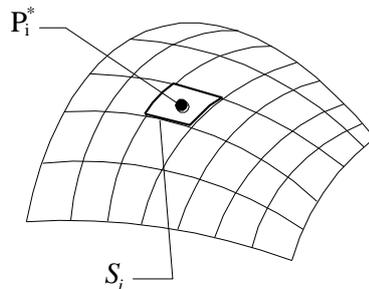
> *plot3d([cos(x),sin(x),y],x=0..2*Pi,y=0..10);*

Integral de superficie

Sean S una superficie acotada y suave y ϕ una función real, definida y acotada en los puntos de S .

¿Qué significado puede darse a ϕ ? Si $\phi(x,y,z) \geq 0$ en S , ϕ podría representar la “densidad superficial de masa” (es decir, una función que distribuye masa por unidad de superficie)

El procedimiento que conduce a la definición de la *integral de ϕ sobre S* , es el mismo que se ha presentado anteriormente: consiste en dividir, aproximar . . .



1°) En esta ocasión se divide S por medio de un número finito de pequeñas porciones S_i con áreas (ya las sabemos calcular) ΔS_i ; $i = 1, \dots, n$.

2°) Se elige $P_i^* \in S_i$ (punto arbitrario), se calcula $\phi(P_i^*)\Delta S_i$ y se suman los resultados:

$$J_n = \sum_{i=1}^n \phi(P_i^*) \Delta S_i$$

Siendo $\delta_i = \max\{d(P_i, Q_i); P_i \in S_i, Q_i \in S_i\}$ y $\delta^{(n)} = \max\{\delta_i / i = 1 \dots n\}$

3°) Si $\lim_{\delta^{(n)} \rightarrow 0} J_n = I \in \mathfrak{R}$ independientemente de las particiones definidas y de la elección de los puntos P_i^* , ϕ se dice que es integrable sobre S y la integral de superficie de ϕ sobre S , que se denota $\iint_S \phi(x, y, z) dS$, es ese número I .

Pregunta: Si ϕ representa la densidad superficial de masa en cada punto (x, y, z) ($\phi(x, y, z) \geq 0$ en S) ¿qué interpretación le da a esta integral?

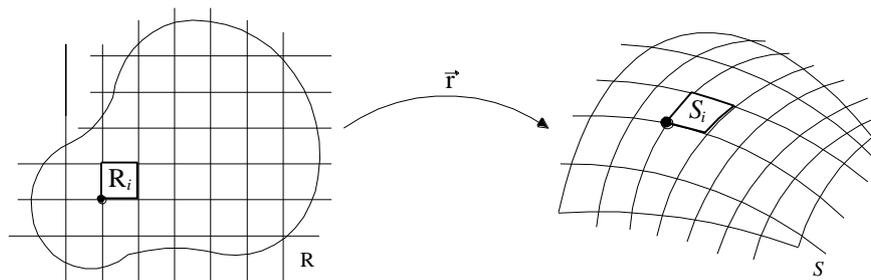
Cálculo de la integral de superficie

Si S es acotada y suave y ϕ es una función continua en los puntos de S , entonces ϕ es integrable sobre S .

Vamos a dar una idea -no demasiado rigurosa- de cómo se calcula $\iint_S \phi(x, y, z) dS$.

Supongamos $S: \vec{r} = \vec{r}(u, v)$; $(u, v) \in R$

Consideremos en R una partición, por medio de rectas paralelas a los ejes, que determinan un número finito de rectángulos R_i con áreas ΔR_i . Supongamos que n de esos rectángulos están totalmente contenidos en R .



Esa partición de R , se corresponde con una división de S , por medio de n porciones de superficie S_i con área ΔS_i .

Sabemos que $\Delta S_i \cong |\vec{N}|_i \cdot \Delta R_i \quad \forall i$, es decir: $\Delta S_i \cong \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|_i \Delta R_i$

Cada punto $P \in S$, es extremo de un vector $\vec{r}(u, v)$. Un punto arbitrario $P_i^* \in S_i$, proviene de cierto $\vec{r}(u_i^*, v_i^*)$. Entonces:

$$J_n = \sum_{i=1}^n \phi(\vec{r}(u_i^*, v_i^*)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|_i \Delta R_i$$

$\phi(\vec{r}(u_i^*, v_i^*)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|_i$ es la función $g(u, v) = \phi(\vec{r}(u, v)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|$ evaluada en (u_i^*, v_i^*)

Como g es continua (¿por qué?) el límite que nos conduce a la integral de superficie, es el mismo que nos permite calcular la integral doble de g en R :

$$\iint_S \phi(x, y, z) dS = \iint_R \phi(\vec{r}(u, v)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| dA_{uv}$$

Observaciones:

1) El integrando a resolver es la función ϕ evaluada en cada punto de S , multiplicada por el módulo del vector distintivo (*normal*) de la superficie (¿que analogía se tiene con el cálculo de la integral de línea de una función escalar?)

2) Si contamos con una representación explícita de S , o sea, si por ejemplo es

$$S: z = f(x, y) \quad , \quad (x, y) \in R_{xy} \quad , \quad \text{vimos que: } \vec{N} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$$

y por lo tanto $|\vec{N}| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$

Además: $\phi(\text{evaluado en } S) = \phi(x, y, f(x, y))$

Así que resulta:
$$I = \iint_S \phi(x, y, z) dS = \iint_{R_{xy}} \phi(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dA_{xy}$$

Planteen Ustedes los cálculos correspondientes en los casos $S: x = f(y, z), (y, z) \in R_{yz}$ y

$S: y = f(z, x), (z, x) \in R_{zx}$.

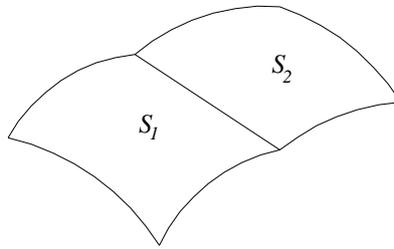
3) Debido a que $\iint_S \phi(x, y, z) dS$, se calcula por medio de una integral doble, *se verifican todas las propiedades válidas para ese tipo de integral.*

$$4) \iint_S dS = \text{área}(S)$$

5) La superficie S puede ser unión finita de superficies suaves.

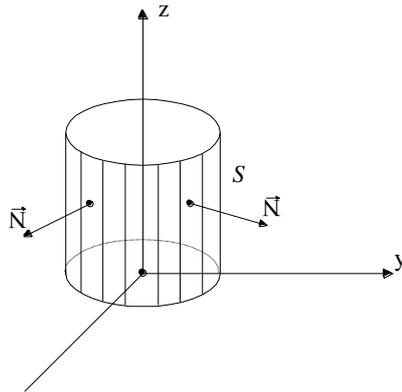
Si $S = S_1 \cup S_2$ donde S_1 y S_2 tienen en común a lo sumo una línea; donde no puede trazarse plano tangente, S se dice *suave a trozos*. Si ϕ es integrable sobre S_1 y S_2 , es

integrable sobre S y se tiene:
$$\iint_S \phi(x, y, z) ds = \iint_{S_1} \phi(x, y, z) ds + \iint_{S_2} \phi(x, y, z) ds$$



Ejemplo 8

Calcularemos $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS$, siendo S : porción de cilindro $x^2 + y^2 = 4$, limitado por $z = 0$ y $z = 4$.



Como tenemos una superficie que no es gráfica de función, usamos una parametrización adecuada:

$$\vec{r}(u, v) = 2 \cos u \hat{i} + 2 \sin u \hat{j} + v \hat{k} \quad \text{con} \quad 0 \leq u \leq 2\pi \quad \text{y} \quad 0 \leq v \leq 4$$

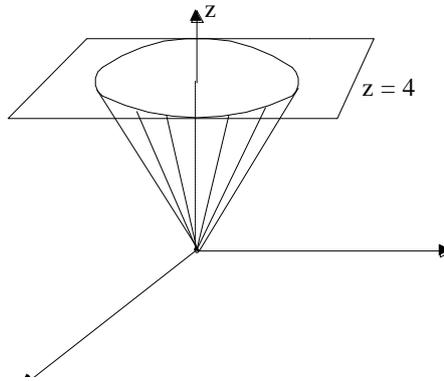
$$\phi(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \therefore \phi(\text{evaluado en } S) = \sqrt{4 \cos^2 u + 4 \sin^2 u} = 2$$

$$\vec{N} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = 2 \cos u \hat{i} + 2 \sin u \hat{j} + 0 \hat{k} \quad y \quad |\vec{N}| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| = 2$$

$$\therefore I = \int_0^{2\pi} \int_0^4 2 \cdot 2 \, dv \, du = 32 \pi$$

Ejemplo 9

Calcularemos $\iint_S z \, dS$, siendo S porción del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; limitado por $z = 4$.



En este caso:

$$S : z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in R_{xy} \quad \text{siendo } R_{xy} = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 16\}$$

y el vector normal es entonces:
$$\vec{N} = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right)$$

$$\therefore |\vec{N}| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1} = \sqrt{\frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}$$

Observemos que en el origen no está definido \vec{N} . (La superficie es suave en todos sus puntos salvo en el origen). Esto no modifica el cálculo (un punto tiene área nula). Notemos también que el vector normal varía punto a punto pero que su módulo es constante.

Completamos el cálculo de la integral:

$$\phi(x, y, z) = z \quad \therefore \phi(\text{evaluado en } S) = \phi(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\iint_S z \, dS = \iint_{R_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{2} \, dA_{xy} = \int_0^{2\pi} \int_0^4 r \sqrt{2} \, r \, dr \, d\theta = \sqrt{2} \, 2\pi \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^4 = \frac{128\sqrt{2}}{3} \pi$$

Aplicaciones de la integral de superficie: Centro de masa

Si $\phi(x, y, z) \geq 0$ en S suave, siendo ϕ la densidad superficial de masa, entonces:

$$1) \text{ Masa: } m(S) = \iint_S \phi(x, y, z) dS$$

2) Centro de masa: $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, definido por:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} \quad ; \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

$$\text{donde } M_{yz} = \iint_S x\phi(x, y, z) dS \quad ; \quad M_{xz} = \iint_S y\phi(x, y, z) dS \quad ; \quad M_{xy} = \iint_S z\phi(x, y, z) dS$$

son momentos de primer orden, con respecto a los planos coordenados.

Observación: Si $\phi(x, y, z) = k$ (cte) al centro de masa, se le dice *centroide*.

Ejercicio 5

Integren:

a) $\phi(x, y, z) = x$ sobre el cilindro $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$.

b) $\phi(x, y, z) = z$ sobre $y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, $1 \leq x \leq 4$.

c) $\phi(x, y, z) = z^2$ sobre el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$.

d) $\phi(x, y, z) = x^2 \sqrt{5 - 4z}$, sobre $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.

e) $\phi(x, y, z) = yz$, sobre la porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ por arriba del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

f) $\phi(x, y, z) = x + y + z$, sobre S : $x^2 + y^2 = 1$, $1 \leq z \leq 2$.

Ejercicio 6

Hallen el centroide de:

a) la porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que se halla sobre el primer octante.

b) la porción de cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, entre los planos $z = 1$, $z = 2$.

Flujo de un campo vectorial a través de una superficie

Para definir este concepto necesitamos que la superficie en cuestión reúna ciertos requisitos:

1) S tendrá que ser acotada y suave.

Recordemos que, si $S: \vec{r} = \vec{r}(u, v); (u, v) \in R$ esto significa que:

- R es una región cerrada y acotada del plano uv
- en cada punto $(u, v) \in R$ existen $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ no nulas, no colineales, con componentes continuas, que determinan en el correspondiente punto de S el vector normal \vec{N} ($\vec{N} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ o $\vec{N} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$) cuyo módulo interviene en el cálculo de una integral de superficie sobre S

De ahora en más \vec{n} denotará un vector normal unitario en un punto de S

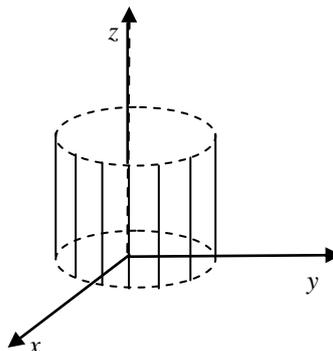
$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|} \quad \text{o} \quad \vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|}$$

2) S tendrá también que ser una superficie en la que se distingan dos caras, identificadas cada una de ellas con una de las dos elecciones posibles para \vec{n} .

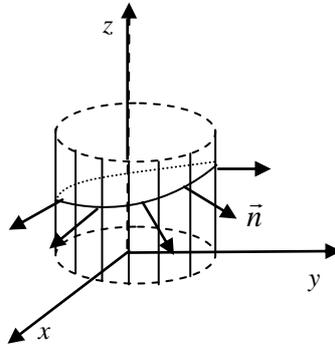
Las superficies que cumplen esa condición se llaman *orientables* y se dice que *se ha orientado a la superficie* cuando se ha elegido una de las dos posibilidades para \vec{n} .

Ejemplo 10

Consideremos la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 4$



Parados en un punto P de la superficie S tiene sentido hablar de una *dirección normal hacia el exterior*: entendemos que se está considerando \vec{n} apuntando hacia afuera y más aún, elegido ese vector \vec{n} , podríamos desplazarlo continuamente a lo largo de cualquier trayectoria sobre S y regresar a P apuntando siempre hacia afuera.



$$S: \vec{r}(u,v) = 2 \cos u \hat{i} + 2 \sin u \hat{j} + v \hat{k} \quad \text{con } 0 \leq u \leq 2\pi \text{ y } v \in \mathbb{R},$$

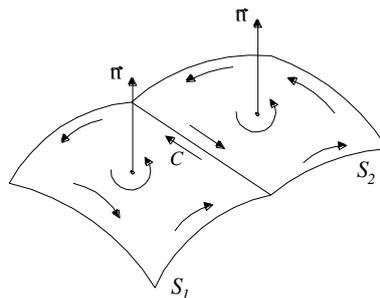
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 \sin u & 2 \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \langle 2 \cos u, 2 \sin u, 0 \rangle \quad \text{y} \quad \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| = 2$$

$\vec{n} = \langle \cos u, \sin u, 0 \rangle$ ← normal exterior (comparen las componentes con las del vector posición $\langle 2 \cos u, 2 \sin u, v \rangle$)

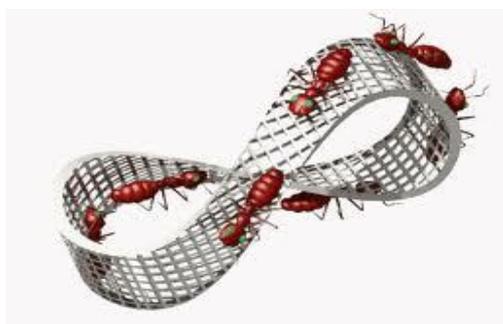
Si se eligiera la dirección normal interior consideraríamos $\vec{n} = \langle -\cos u, -\sin u, 0 \rangle$

Observaciones:

1) También son orientables las superficies *suaves a trozos* $S = S_1 \cup S_2$ (suele decirse también *seccionalmente suaves*), quedando orientada S cuando se eligen en S_1 y S_2 vectores \vec{n}_1 y \vec{n}_2 respectivamente que inducen en la curva intersección (de acuerdo a la regla de la mano derecha) orientaciones contrarias.



2) Las superficies con las que estamos trabajando son todas orientables. En realidad toda porción suficientemente pequeña de una superficie *suave* siempre es orientable. Pero . . . existen superficies que no son orientables como la llamada *cinta de Moëbius*



Observen la figura y expliquen cuántas caras tiene la cinta siguiendo el recorrido de las hormigas.

Curiosidades

La cinta de Möbius fue descubierta en 1858 por el matemático y astrónomo alemán August Ferdinand Möbius (1790-1868). Se trata de una superficie tan sencilla como sorprendente. Si tomamos una cinta de vértices ABCD y unimos A con D y C con B dándole media vuelta obtenemos una superficie que contra toda apariencia tiene una sola cara, un solo borde y no es orientable.

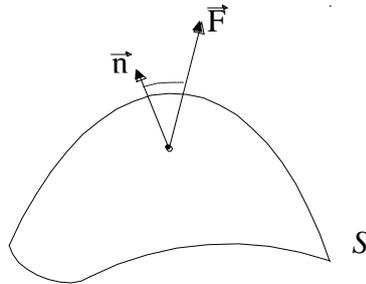
Si partimos de un punto de su superficie y comenzamos a colorearla, acabaremos pintado toda la cinta sin haber rebasado el borde. Por consiguiente, sólo tiene una cara. Si reseguimos con el dedo uno de los bordes llegamos al punto de partida habiendo recorrido los dos bordes aparentes. Y lo más sorprendente: si consideramos un vector n perpendicular al plano de la cinta en cualquier punto P , este cambiará su orientación a medida que recorremos la cinta por su línea central, llegando a convertirse en $-n$ al llegar al mismo punto.

La cinta de Möbius tiene aplicaciones prácticas: como cinta transportadora de desgaste uniforme por "ambas caras", o bien como cinta abrasiva.

Dicho todo esto . . .

Sea S orientable y \vec{F} campo vectorial con componentes continuas, definido en cada punto de S . Sea \vec{n} el normal unitario elegido en S .

Llamamos *integral de flujo* (o simplemente *flujo*) del campo vectorial \vec{F} a través de S , en la dirección de \vec{n} , a la integral de superficie, de la componente normal de \vec{F} sobre S .



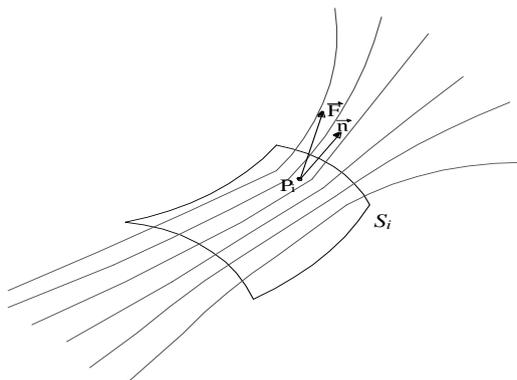
$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \text{Flujo de } \vec{F} \text{ a través de } S \text{ en la dirección de } \vec{n}$$

¿Qué significado podríamos darle a esta integral?

Consideremos un fluido en movimiento. Supongamos que *la velocidad en cada punto* (x,y,z) por donde pasa una determinada partícula no depende del tiempo (hablamos de una “corriente estacionaria”). La velocidad es entonces un campo vectorial $\vec{V}(x,y,z)$.

Supongamos que $\rho(x,y,z)$ es *la densidad de fluido en* (x,y,z) (masa por unidad de volumen). Aclaremos que ρ es un campo escalar asociado a la corriente. Puede ser constante (en ese caso el fluido se dice *incompresible*) o variar punto a punto (fluido compresible, tal como un gas). Entonces, el campo $\vec{F}(x,y,z) = \rho(x,y,z) \cdot \vec{V}(x,y,z)$ es llamado *densidad de flujo* de la corriente (vea que el vector \vec{F} tiene la misma dirección que la velocidad).

Si consideramos una pequeña superficie S_i , con normal \vec{n} en la corriente fluida.



$$\Delta S_i = \text{área de } S_i$$

Entonces $\vec{F} \cdot \vec{n}$ en P_i representa:

$$\frac{\text{masa}}{(\text{unidad de volumen})} \cdot \frac{\text{dis tan cia}}{(\text{unidad de tiempo})} = \frac{\text{masa}}{(\text{unidad de superficie}) \cdot (\text{unidad de tiempo})}$$

y $(\vec{F} \cdot \vec{n})(P_i) \Delta S_i$, representa la *masa de fluido*, que pasa a través de ΔS_i en la dirección normal, por unidad de tiempo.

Imaginen entonces, para una superficie S (que puede dividirse en pequeñas porciones S_i), el significado de $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$.

Cálculo de la integral de flujo

Supongamos $S: \vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in R$ (región)

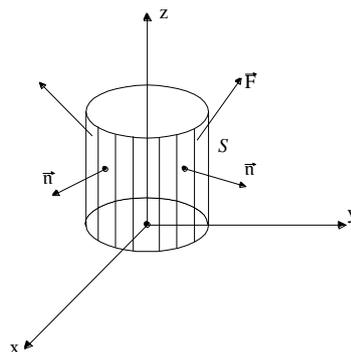
$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_R (\vec{F} \cdot \vec{n})(\vec{r}(u, v)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| dA_{uv} = \\ &= \iint_R \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \frac{(\partial \vec{r} / \partial u \times \partial \vec{r} / \partial v)}{|\partial \vec{r} / \partial u \times \partial \vec{r} / \partial v|} \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| dA_{uv} = \iint_R \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) dA_{uv} \end{aligned}$$

Este resultado es obtenido para el vector normal $\vec{N} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$. Si la dirección normal elegida es la de $-\vec{N}$ el resultado será opuesto. Si no se especifica la “cara” sobre la que se trabaja en S , se indica:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \pm \iint_R \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) dA_{uv}$$

Ejemplo 11

Sea $\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ y S : porción de cilindro $x^2 + y^2 = 4$, limitado por $z = 0$ y $z = 4$. Calcularemos el flujo de \vec{F} a través S con dirección normal exterior.



Como S no es gráfica de función se recurre a la representación paramétrica:

$$\vec{r}(u,v) = 2 \cos u \hat{i} + 2 \sin u \hat{j} + v \hat{k} \quad \text{con } R_{uv} = \{(u,v) \mid 0 \leq u \leq 2\pi ; 0 \leq v \leq 4\}$$

$$\text{Entonces: } \vec{N} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = 2 \cos u \hat{i} + 2 \sin u \hat{j} + 0 \hat{k} \quad (\vec{N} \text{ es el normal exterior})$$

$$\vec{F}(\text{evaluada en } S) = 2 \cos u \hat{i} + 2 \sin u \hat{j} + v \hat{k}$$

$$\vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) = 4 \cos^2 u + 4 \sin^2 u = 4$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{R_{uv}} 4 \, dA_{uv} = 4 \text{ área}(R_{uv})$$

$$\text{como } \text{área}(R_{uv}) = 2\pi \cdot 4 = 8\pi, \quad \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = 32\pi$$

Si se elige la “cara interior” del cilindro, el resultado es el valor opuesto. Así puede interpretarse el llamado “flujo saliente” y “flujo entrante”.

Cálculo del flujo con representación explícita de la superficie

$$\text{Si } S: z = f(x,y); \quad (x,y) \in R_{xy} \quad \text{y} \quad \vec{F}(x,y,z) = \langle P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) \rangle$$

$$\vec{F}(\text{evaluada en } S) = \vec{F}(x,y,f(x,y)) \quad \text{y} \quad \vec{N} = \pm \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$$

$$\therefore \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{R_{xy}} \vec{F}(x,y,f(x,y)) \cdot \vec{N} \, dA_{xy} =$$

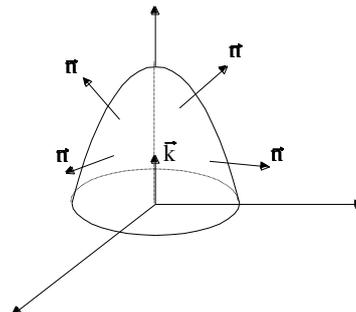
$$= \pm \iint_{R_{xy}} \left[-P(x,y,f(x,y)) \frac{\partial f}{\partial x} - Q(x,y,f(x,y)) \frac{\partial f}{\partial y} + R(x,y,f(x,y)) \right] dA_{xy}$$

Propongan las integrales para calcular el flujo de un campo, cuando S es gráfica de una función $x = g(y,z)$ o $y = h(x,z)$

Ejemplo 12

Calcular $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ siendo $\vec{F} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$ y S : porción de paraboloides $4 - z = x^2 + y^2$

limitado por $z = 0$ con dirección normal exterior.



$S: z = 4 - x^2 - y^2$; $(x, y) \in R_{xy}$ donde $R_{xy} = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 4\}$

\vec{F} (evaluada en S) = $x\hat{i} + y\hat{j} + (4 - x^2 - y^2)\hat{k}$

$\vec{N} = (2x, 2y, 1)$ (¿por qué es este el vector?)

$$\therefore \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{R_{xy}} (2x^2 + 2y^2 + 4 - x^2 - y^2) dA_{xy} = \iint_{R_{xy}} (4 + x^2 + y^2) dA_{xy}$$

Como $R_{xy} = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 4\}$ conviene para completar el cálculo de la integral pasar a

coordenadas polares:
$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 + r^2) \cdot r \, dr \, d\theta = 24\pi$$

Observación: La notación alternativa $\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, dS$ suele utilizarse

para indicar la integral de flujo $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ siendo $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$ y

$$\vec{n} = \cos \alpha \hat{i} + \cos \beta \hat{j} + \cos \gamma \hat{k}$$

Ejercicio 7

Calculen $\iint_S (xz \cos \alpha + yz \cos \beta + x^2 \cos \gamma) \, dS$, siendo $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, con normal exterior.

Ejercicio 8

Sea S porción de plano limitado por un triángulo de vértices $(1,0,0)$; $(0,1,0)$; $(0,0,1)$, con normal que tiene tercera componente no negativa. Si $\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, calculen

$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, utilizando a) la representación $\vec{r}(u, v) = (u + v)\hat{i} + (u - v)\hat{j} + (1 - 2u)\hat{k}$.

b) una representación explícita de la forma $z = f(x, y)$

Ejercicio 9

Sea $\vec{F}(x, y, z) = x\hat{i} - (2x + y)\hat{j} + z\hat{k}$ el vector densidad de flujo de un fluido. Si S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, con $z \geq 0$ y \vec{n} normal exterior a la esfera, calculen la masa de fluido que atraviesa S , en la unidad de tiempo, en la dirección \vec{n} (sólo planteo)

Ejercicio 10

Con los datos dados en el ejercicio anterior, tomamos S como superficie cerrada, incorporando la base en el plano $z=0$, con normal $-\vec{k}$. Calculen la masa de fluido a través de la superficie cerrada (sólo planteo).

Ejercicio 11

Calculen las siguientes integrales de flujo:

- a) $\vec{F} = \langle y, -x, 1 \rangle$, S porción de $z = x^2 + y^2$, bajo $z = 4$ con \vec{n} hacia abajo.
- b) $\vec{F} = \langle y, -x, z \rangle$, S porción de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, bajo $z = 3$ con \vec{n} hacia abajo.
- c) $\vec{F} = \langle 0, 1, y \rangle$, S porción de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, en el interior de $x^2 + y^2 = 4$ (\vec{n} hacia abajo).
- d) $\vec{F} = \langle xy, y^2, z \rangle$, S superficie cerrada formada por las caras del cubo: $0 \leq x \leq 1$;
 $0 \leq y \leq 1$; $0 \leq z \leq 1$ con \vec{n} hacia el exterior.
- e) $\vec{F} = \langle yx, 1, x \rangle$, S es la porción de $z = 2 - x - y$ sobre el cuadrado: $0 \leq x \leq 1$;
 $0 \leq y \leq 1$; con \vec{n} hacia arriba.
- f) $\vec{F} = \langle y, 0, 2 \rangle$, S es la frontera de la región limitada arriba por $z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$ y abajo por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, con \vec{n} hacia el exterior.

Ejercicio 12

Sea $\vec{F}(x, y, z) = -z\hat{i} + x\hat{j} + y\hat{k}$ y S la porción de plano $x + y + z = 1$ en el primer octante, con normal \vec{n} alejándose del origen.

- a) Comprueben que $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, siendo C la frontera del triángulo que forma el plano con el primer octante, con la *orientación inducida* por la normal \vec{n} elegida.
- b) Si V es el sólido, limitado por esa porción de plano y los planos coordenados, limitado entonces por una superficie cerrada S , comprueben que

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \text{div } \vec{F} \, dV$$

Teorema de Stokes

George Gabriel Stokes (1819-1903) fue un matemático y físico irlandés que realizó importantes contribuciones a la física teórica y a la teoría de series.

El teorema de Stokes permite relacionar una *integral de superficie* con una integral de línea. Es una generalización del teorema de Green que relaciona una *integral doble* con una integral de línea. En ambos casos la integral de línea es una *circulación*.

Teorema de Stokes

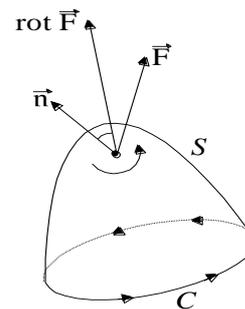
Sea S una superficie orientable, en la que se ha elegido una dirección normal \vec{n} .

C curva frontera de S , orientada de acuerdo a la orientación inducida por \vec{n} .

Si \vec{F} es un campo vectorial cuyas componentes admiten derivadas parciales continuas en un dominio abierto $D \subset \mathbb{R}^3$ que contiene a S y C ,

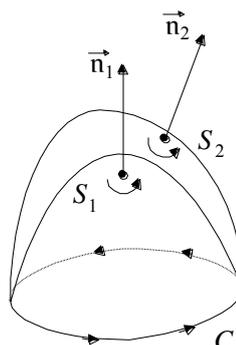
entonces:

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (*)$$



Una consecuencia inmediata del Teorema de Stokes es la siguiente:

Supongamos que S_1 y S_2 sean dos superficies orientables con la misma frontera C y que ambas superficies estén orientadas de acuerdo con la orientación elegida para C (“regla de la mano derecha”) . . .



si \vec{F} es un campo vectorial cuyas componentes admiten derivadas parciales continuas en un dominio abierto $D \subset \mathcal{R}^3$ que contiene a S_1, S_2 y C , entonces

$$\iint_{S_1} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS = \iint_{S_2} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}_2 \, dS.$$

En efecto: de acuerdo al Teorema de Stokes ambos miembros de esa igualdad son iguales a $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Podemos afirmar entonces que:

“El flujo de un campo rotor, no depende de la superficie que atraviesa, sino de su frontera”

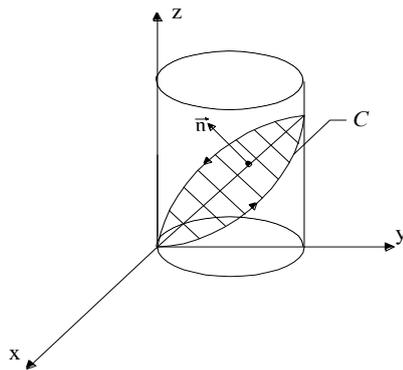
Aplicaciones del Teorema de Stokes

1. Cálculo de la circulación de un campo \vec{F} a lo largo de una curva C por medio de una integral de superficie del campo $\text{rot } \vec{F}$.

Ejemplo 13

Calcular $\oint_C (z-y)dx + (x-z)dy + (x+z)dz$ aplicando el Teorema de Stokes, siendo

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2y \\ y = z \end{cases}, \text{ con orientación "antihoraria" mirando desde arriba.}$$



Observemos que la curva es plana (contenida en el plano $y = z$). Consideremos entonces la porción de ese plano que tiene como frontera a la curva C :

$$S: z = y = f(x, y) \text{ con } (x, y) \in R_{xy} \quad \text{donde } R_{xy} = \{(x, y) / x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$$

$$\vec{N} = \langle 0, -1, 1 \rangle \quad (\text{¿por qué no } \vec{N} = \langle 0, 1, -1 \rangle?)$$

La superficie S , la curva C y el campo $\vec{F} = (z - y)\hat{i} + (x - z)\hat{j} + (x + z)\hat{k}$, están en las condiciones del Teorema de Stokes (¡verifíqueno!), por lo tanto:

$$\oint_C (z - y)dx + (x - z)dy + (x + z)dz = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z - y & x - z & x + z \end{vmatrix} = \langle 1, 0, 2 \rangle \quad (\text{vector constante})$$

$$\begin{aligned} \therefore \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iint_{R_{xy}} \text{rot } \vec{F}(x, y, f(x, y)) \cdot \vec{N} dA_{xy} = \iint_{R_{xy}} \langle 1, 0, 2 \rangle \cdot \langle 0, -1, 1 \rangle dA_{xy} = \\ &= \iint_{R_{xy}} 2 dA_{xy} = 2 \text{ \acute{a}rea de } R_{xy} = 2\pi \end{aligned}$$

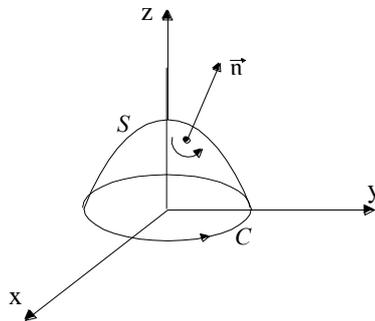
Comentario: hay otras superficies que tienen a la curva C como frontera ¿por qué hemos elegido la porción de plano S ? La respuesta es: ¡porque consideramos que era lo más simple!

2. Cálculo del flujo de un campo rotor por medio de una circulación.

Ejemplo 14

Calcular $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ por medio de una integral de línea siendo

$\vec{F} = y^2 \hat{i} + xy \hat{j} + xz \hat{k}$ y S el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, con \vec{n} normal unitaria con tercera componente no negativa.



En este caso tenemos que integrar a lo largo de la curva frontera, que es..... la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy , con orientación antihoraria de acuerdo con la orientación inducida por la normal de S .

$$C: \vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + 0 \vec{k}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\therefore \begin{cases} \vec{F}(\vec{r}(t)) = \sin^2 t \hat{i} + \cos t \sin t \hat{j} + 0 \hat{k} \\ \vec{r}'(t) = -\sin t \hat{i} + \cos t \hat{j} + 0 \hat{k} \end{cases} \Rightarrow \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = -\sin^3 t + \cos^2 t \cdot \sin t$$

$$\therefore \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-\sin^3 t + \cos^2 t \cdot \sin t) dt$$

Al resolver, vemos que su resultado es 0. El flujo es nulo.

Ejercicio 13

Aplicando el teorema de Stokes, si es posible, evalúen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ (elijan en cada caso la orientación).

a) $C: \begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ z = 0 \end{cases}$, $\vec{F} = \langle x^2 e^x - y, \sqrt{y^2 + 1}, z^3 \rangle$

b) $C: \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{cases}$, $\vec{F} = \langle x^2, y^4 - x, z^2 \cdot \sin y \rangle$

c) $C: \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 8 - y \end{cases}$, $\vec{F} = \langle 2x^2, 4y^2, e^{8z^2} \rangle$

d) $C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = x - y \end{cases}$, $\vec{F} = \langle \cos x^2, \sin y^2, \text{tg } z^2 \rangle$

e) C es el triángulo que va de $(0,1,0)$ a $(0,0,4)$ a $(2,0,0)$; $\vec{F} = \langle x^2 + 2xy^3z, 3x^2y^2z - y, x^2y^3 \rangle$

f) C es el cuadrado que va de $(0,2,2)$ a $(2,2,2)$ a $(2,2,0)$ a $(0,2,0)$ y $\vec{F} = \langle -y, z, x \rangle$

Ejercicio 14

a) Demuestren que $\oint_C (f \cdot \vec{\nabla} f) \cdot d\vec{r} = 0$, para cualquier curva cerrada C y f con derivadas segundas continuas.

b) Demuestren que $\oint_C (f \cdot \vec{\nabla} g + g \cdot \vec{\nabla} f) \cdot d\vec{r} = 0$, para cualquier curva cerrada C , f y g con derivadas segundas continuas.

Ejercicio 15

Apliquen el teorema de Stokes, para evaluar $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$.

a) S porción de $z = 4 - x^2 - y^2$ sobre el plano xy , $\vec{F} = \langle zx, 2y^2, z^3 \rangle$, \vec{n} orientado hacia arriba.

b) S porción de $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ sobre el plano xy , $\vec{F} = \langle 2x - y, yz^2, y^2 z \rangle$, \vec{n} orientado hacia arriba.

c) S es la porción de $z = 1 - x^2 - y^2$ sobre el plano xy , con \vec{n} hacia arriba, $\vec{F} = \langle zx^2, ze^{xy^2} - x, xy^2 \rangle$.

d) S porción de $y = x^2 + z^2$ con $y \leq 2$, \vec{n} hacia la izquierda, $\vec{F} = \langle xy, 4xe^{z^2}, yz + 1 \rangle$.

e) S porción de cubo unitario $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1$; $0 \leq z \leq 1$, con $z > 0$, \vec{n} hacia arriba, $\vec{F} = \langle xyz, 4x^2 y^3 - z, 8\cos xz^2 \rangle$.

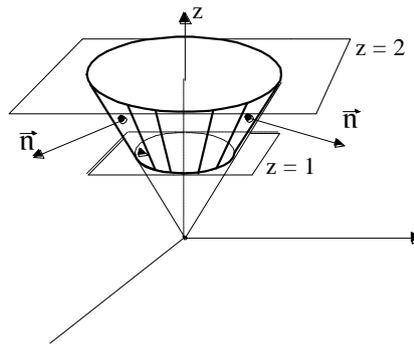
f) S porción de cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, bajo la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, \vec{n} hacia abajo, $\vec{F} = \langle zx, x^2 + y^2, z^2 - y^2 \rangle$.

Aplicación del teorema de Stokes al caso de una la superficie que tiene como frontera dos curvas cerradas.

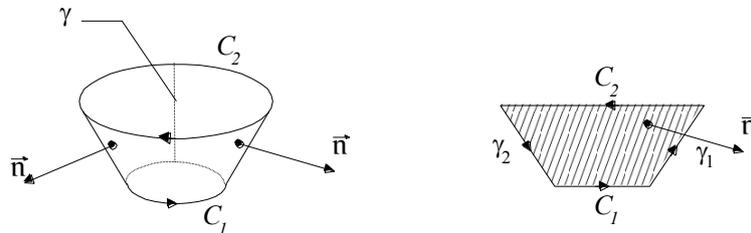
Ejemplo 15

Supongan que S es la porción de cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; entre los planos $z = 1$ y $z = 3$, con normal exterior, y $\vec{F} = \langle -z, -x, y \rangle$. ¿Podemos aplicar el teorema de Stokes para

calcular $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$?



S tiene por frontera *dos circunferencias* C_1 y C_2 . Para conseguir una única frontera se hace un “corte” en la superficie y se desarrolla.



Se recorre la frontera C : $C_1 \cup \gamma_1 \cup C_2 \cup \gamma_2$ con la orientación inducida por \vec{n} , teniendo así:

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

pero

$$\gamma_1 = -\gamma_2$$

entonces

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

resultando:

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde C_1 y C_2 tienen orientación opuesta. (En este caso C_1 antihorario y C_2 horario, mirados desde arriba). Parametricen C_1 y C_2 , calculen las circulaciones correspondientes y sumen los resultados.

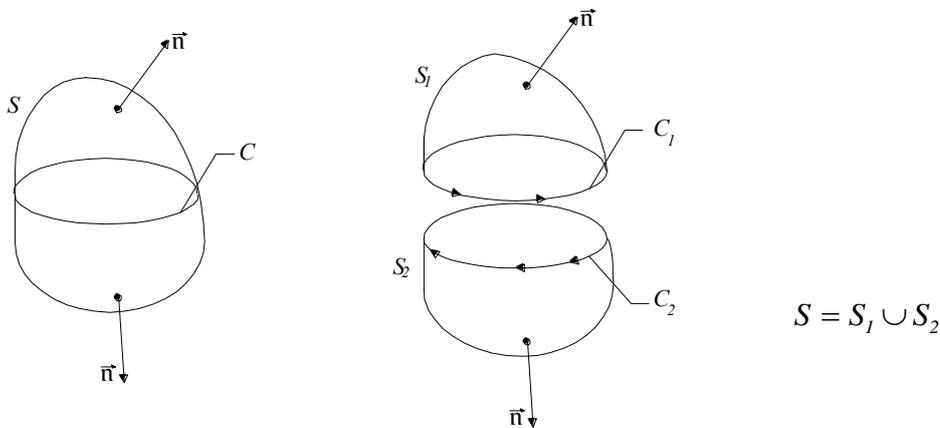
Aplicación del teorema de Stokes al caso en que la superficie es cerrada.

Supongan ahora que tiene una superficie cerrada S y tiene que calcular $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$,

con \vec{F} definido en cada punto de S y \vec{n} normal exterior (por ejemplo).

¿Pueden aplicar Stokes?. En principio no, ya que necesita una curva frontera, y la superficie es cerrada, pero.....siempre hay un recurso!:

Se divide S en dos partes S_1 y S_2 por medio de un corte a través de una curva C . . .



Sea C_1 la curva C orientada de acuerdo con la orientación inducida por la orientación de S_1 , y C_2 , la misma curva pero ahora con la orientación opuesta (de acuerdo con la orientación de S_2).

$$\therefore \iint_{S_1} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\iint_{S_2} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

pero

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Al sumar se tiene entonces:

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_1} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_2} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

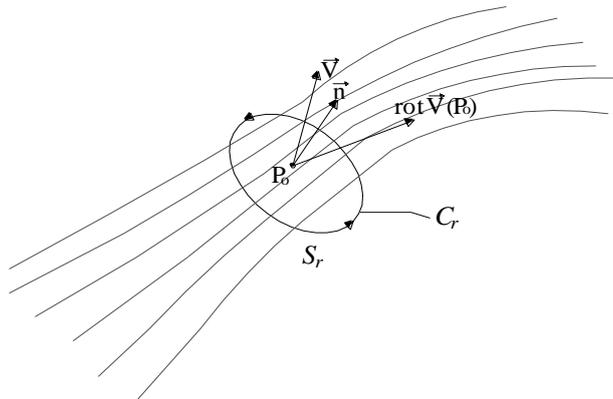
Esto puede describirse diciendo que:

“El flujo de todo campo rotor a través de una superficie cerrada, es nulo”

Comentario: Hemos visto -en las condiciones del teorema de Stokes- que si un campo \vec{G} es un campo rotor, esto es, $\vec{G} = \text{rot } \vec{F}$, el flujo de \vec{G} no depende de la superficie sino de la curva frontera, y ,además, que el flujo de \vec{G} a través de cualquier superficie cerrada es nulo. Puede entonces establecerse cierta analogía, con respecto a lo que sucedía con un *campo gradiente*, en la integral de línea. ¡Piénsenlo!.

Podemos también, en base de la igualdad de Stokes, dar **una interpretación del rotor, con respecto a su dirección y módulo.**

Supongamos $\vec{V}(x, y, z)$ campo de velocidades de un fluido (en las condiciones del teorema de Stokes) y P_o un punto, en la corriente fluida, ¿qué significado tiene $\text{rot } \vec{V}(P_o)$?



Tomando una pequeña superficie S_r rodeando al punto P_o (podemos suponer una pequeña porción de plano) con C_r como frontera.

Sin perder generalidad, consideramos que S_r es un círculo centrado en P_o , con radio r y C_r la circunferencia que lo acota.

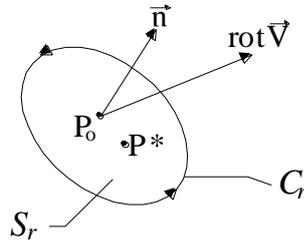
Aplicando allí la igualdad de Stokes:

$$\oint_{C_r} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_r} \text{rot } \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS$$

por teorema del valor medio -aplicado a la integral de flujo- existe $P^* \in S_r$, tal que:

$$\iint_{S_r} \text{rot } \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS = (\text{rot } \vec{V} \cdot \vec{n})(P^*) \cdot \text{área}(S_r)$$

entonces:
$$\frac{\oint_{C_r} \vec{V} \cdot d\vec{r}}{\text{área}(S_r)} = (\text{rot } \vec{V} \cdot \vec{n})(P^*)$$



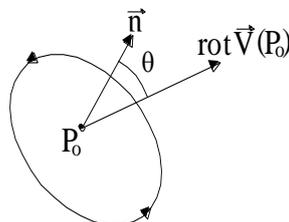
El primer miembro de ésta última igualdad, representa un *promedio*, entre circulación de campo, a lo largo de \$C_r\$, y el área de la superficie limitada por \$C_r\$. Obviamente estos promedios van cambiando al variar \$r\$. Ese promedio está relacionado con la componente normal del rotor, pero en un punto \$P^*\$.

Si ahora se analiza el comportamiento de estos promedios cuando \$r \to 0\$ (en ese caso \$P^* \to P_o\$), el valor límite es llamado *densidad de circulación*, y permite estimar la circulación por unidad de área en \$P_o\$, pero por otro lado, se tiene la componente normal

de \$\text{rot } \vec{V}\$ en \$P_o\$, entonces:
$$(\text{rot } \vec{V} \cdot \vec{n})(P_o) = \lim_{r \to 0} \frac{\oint_{C_r} \vec{V} \cdot d\vec{r}}{\text{área}(S_r)}$$

Significa entonces que: la *componente normal* de \$\text{rot } \vec{V}(P_o)\$, al medir la *densidad de circulación en \$P_o\$*, permite establecer en ese punto, que tal densidad será máxima cuando \$\vec{n}\$ y \$\text{rot } \vec{V}(P_o)\$ coincidan en dirección, y numéricamente esa máxima densidad de circulación está dada por \$|\text{rot } \vec{V}(P_o)|\$, pues:

$$(\text{rot } \vec{V} \cdot \vec{n})(P_o) = |\text{rot } \vec{V}(P_o)| \cdot |\vec{n}| \cos \theta = |\text{rot } \vec{V}(P_o)| \cos \theta$$



Podemos concluir, diciendo que: “\$\text{rot } \vec{V}(P_o)\$ indica la dirección normal al plano en que se registra la máxima densidad de circulación en \$P_o\$, y su módulo representa esa máxima densidad”

Campos conservativos y el teorema de Stokes

Recordarán que, aplicando el Teorema de Green, hemos mostrado que, si las componentes de \vec{F} tienen primeras derivadas parciales continuas en un conjunto **simplemente conexo** $D \subset \mathbb{R}^2$ y $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$ en D entonces, para toda curva cerrada $C \subset D$ es $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ (y, por lo tanto, la integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es independiente del camino y el campo \vec{F} es conservativo)

Actividad 2

a) Reflexionen sobre la generalización de este resultado para campos definidos en \mathbb{R}^3 utilizando el teorema de Stokes.

Les aclaramos que una región $D \subset \mathbb{R}^3$ es *simplemente conexa* si toda trayectoria cerrada en D puede contraerse continuamente a un punto en D sin salir de D .



Curiosidad! La superficie que aparece a continuación se le llama “toro”



¿Es el toro una superficie simplemente conexa?

b) Consideren el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j} + z \vec{k}$

i) Verifiquen que $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$.

ii) Calculen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ siendo $C = \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ ¿Es \vec{F} conservativo en \mathbb{R}^3 ?

iii) ¿Qué comentario pueden hacer acerca de lo visto en i) y ii) ?

Teorema de Gauss

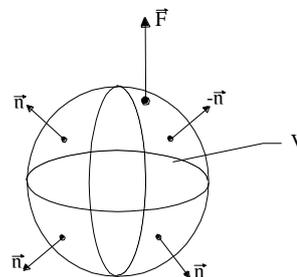
Carl Friedrich Gauss: Nació en Brunswick en 1777 y murió en Gotinga en 1855 (Alemania). Los trabajos de Gauss son muchísimos y han tenido y tienen una influencia muy grande en la totalidad de las ramas de la Física y las Matemáticas (Teoría de Números, Geometría Diferencial, Astronomía, Estadística, Magnetismo.).

Este teorema permite relacionar una integral de flujo (integral de superficie) con una integral triple. Establece que en condiciones adecuadas, el flujo en un campo a través de una superficie cerrada (con dirección normal exterior) es igual a la integral triple de la divergencia del campo en el sólido limitado por la superficie.

Teorema de Gauss

Sea S una superficie orientable cerrada, en la que se ha elegido la dirección normal exterior \vec{n} y sea V el sólido cuya frontera es S . Si \vec{F} es un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en cierto dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ que contiene a S y V , entonces:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV$$



¿Cómo se aplica este resultado?

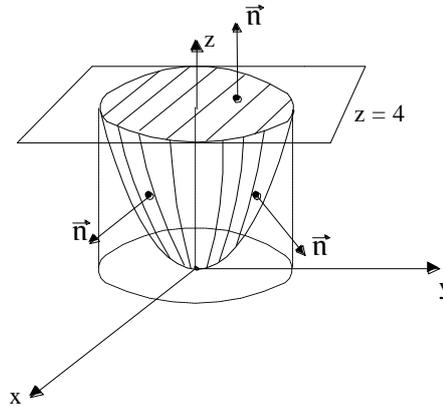
Propuesto el cálculo de un flujo a través de una superficie cerrada, se resuelve la integral triple de la divergencia en el sólido limitado por esa superficie.

Ejemplo 16

Calcular $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$, siendo $\vec{F}(x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ y S superficie cerrada, limitada

por $z = x^2 + y^2$ y $z = 4$.

Como S es una superficie en \mathfrak{R}^3 cerrada orientable y \vec{F} es un campo vectorial derivable con continuidad en $D = \mathfrak{R}^3$, podemos aplicar el Teorema de Gauss: el flujo de \vec{F} a través de S con dirección normal exterior puede evaluarse resolviendo la integral triple $\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV$



$$\operatorname{div} \vec{F} = 1 + 1 + 1 = 3$$

Descripción del sólido limitado por S :

$$V = \{(x, y, z) / (x, y) \in R_{xy}; x^2 + y^2 \leq z \leq 4\} \quad \text{siendo } R_{xy} = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V 3 dV$$

Pasando al cálculo a coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \iiint_V 3 dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2}^4 3r dz dr d\theta = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r z \Big|_{r^2}^4 dr d\theta = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r(4 - r^2) dr d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{r^3}{3} \right]_0^2 d\theta = 3 \cdot 4 \cdot 2\pi = 24\pi \quad \therefore \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 24\pi \end{aligned}$$

Advertencia!!!: Si la propuesta hubiese sido:

“Calcular $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$; con S porción de paraboloides $z = x^2 + y^2$, limitado por $z = 4$ ” no

podríamos aplicar la igualdad de Gauss. ¿Por qué? La superficie S no es en este caso una superficie cerrada. El plano $z = 4$, lo único que hace es acotarla. Luego, este flujo debe calcularse por medio de la integral de superficie.

Veamos qué resultado arroja:

$$S: z = f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{con} \quad (x, y) \in R_{xy} = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$\vec{N} = \langle 2x, 2y, -1 \rangle \quad (\text{normal hacia "afuera"})$$

$$\vec{F}(\text{evaluada en } S) = x\hat{i} + y\hat{j} + (x^2 + y^2)\hat{k}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = 2x^2 + 2y^2 - (x^2 + y^2) = x^2 + y^2$$

$$\therefore \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{R_{xy}} x^2 + y^2 \, dA_{xy}$$

Pasando a polares:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \cdot r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^2 d\theta = 8\pi$$

Pregunta: ¿Cuál es flujo calculado a través de la porción de plano $z = 4$; limitado por el paraboloides?.

Cálculo del volumen de un sólido por medio de una integral de flujo

Si el campo \vec{F} es tal que $\text{div } \vec{F} = 1 \Rightarrow \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \text{vol}(V)$, vale decir, se podría calcular

el volumen de un sólido, por medio de una integral de flujo ¿Qué campo puede ser?.

Hay múltiples campos con divergencia 1. Por ejemplo: $\vec{F} = \frac{x}{3}\hat{i} + \frac{y}{3}\hat{j} + \frac{z}{3}\hat{k}$

Tarea: Obtengan el volumen de la esfera de *radio* a , por medio de una integral de flujo.

Ejercicio 16

Aplicando el teorema de Gauss, calculen el flujo hacia el exterior de \vec{F} a través de la frontera de V . Verifiquen previamente si las condiciones requeridas se cumplen.

a) $\vec{F} = (y-x)\hat{i} + (z-y)\hat{j} + (y-x)\hat{k}$, siendo V el cubo limitado por los planos $x = \pm 1$; $y = \pm 1$ y $z = \pm 1$.

b) $\vec{F} = x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ siendo V : i) el cubo del primer octante, limitado por los planos $x = 1$; $y = 1$; $z = 1$. ii) el sólido limitado por $x^2 + y^2 \leq 4$; $z = 0$, $z = 1$.

c) $\vec{F} = x^2\hat{i} + xz\hat{j} + 3z\hat{k}$, V : esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

d) $\vec{F} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$, V : $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$.

e) $\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$; V : sólido limitado por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Ejercicio 17

Entre todos los sólidos rectangulares definidos por las desigualdades: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq 1$, encuentren aquel para el cual el flujo total de $\vec{F} = (-x^2 - 4xy)\hat{i} - 6yz\hat{j} + 12z\hat{k}$ hacia el exterior, a través de los seis lados, es máximo. ¿Qué valor tiene ese flujo máximo?

Ejercicio 18

Demuestren que el flujo hacia el exterior de un campo vectorial constante, a través de cualquier superficie cerrada a la que se aplica el teorema de Gauss, es cero.

Ejercicio 19

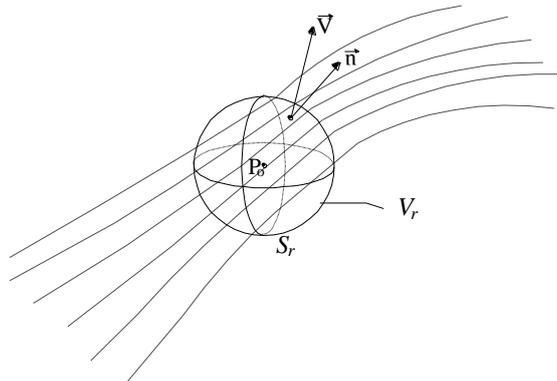
a) Sea V porción de esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ que se encuentra en el primer octante y sea $f(x, y, z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. ¿Cómo evaluarían el flujo de $\vec{\nabla}f$ a través de la frontera de V con dirección normal exterior? b) Sea S la porción de superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que se encuentra en el primer octante ¿cómo calcularían

$$\iint_S \vec{\nabla}f \cdot \vec{n} \, dS ?$$

Interpretación de la divergencia de un campo en un punto P_0 a partir del teorema de Gauss:

Recurrimos, una vez más, al campo de velocidades de un fluido $\vec{V}(x, y, z)$ y sea P_0 un punto en la corriente fluida. ¿Qué significado tiene $\text{div}\vec{V}(P_0)$?

Rodeamos a P_0 por medio de una pequeña superficie esférica S_r , que limita la esfera sólida V_r .



Suponiendo que \vec{V} cumple las condiciones del teorema de Gauss, se tiene:

$$\iint_{S_r} \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{V_r} \operatorname{div} \vec{V} \, dV \quad \text{con } \vec{n} \text{ normal exterior a } S_r.$$

Por el teorema del valor medio, aplicado a la integral triple, $\exists P^* \in V_r$ tal que:

$$\iiint_{V_r} \operatorname{div} \vec{V} \, dV = \operatorname{div} \vec{V}(P^*) \operatorname{vol}(V_r)$$

Entonces:

$$\operatorname{div} \vec{V}(P^*) = \frac{\iint_{S_r} \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS}{\operatorname{vol}(V_r)}$$

El segundo miembro representa el promedio entre el flujo a través de S_r en la dirección normal exterior y el volumen del sólido limitado por S_r , es decir V_r .

Recordemos que el flujo es la cantidad de fluido que se crea o consume por unidad de tiempo en el interior de S_r . Luego, al analizar el comportamiento de estos promedios cuando $r \rightarrow 0$ (cuando $P^* \rightarrow P_o$), se tiene:

$$\operatorname{div} \vec{V}(P_o) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\iint_{S_r} \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS}{\operatorname{vol}(V_r)}$$

resultando así que...

“La divergencia de \vec{V} en P_o , representa el promedio límite entre la cantidad de fluido que se crea o consume, por unidad de tiempo y por unidad de volumen”

Si $\operatorname{div} \vec{V}(P_o) > 0$, se dice que en P_o hay una *fuerza* (se crea fluido).

Si $\operatorname{div} \vec{V}(P_o) < 0$, se dice que en P_o hay una *desagüe* (se consume fluido).

Observación: El flujo -cantidad de fluido que pasa a través de S por unidad de tiempo-, se denomina *caudal*.

Cálculo del flujo del campo $\operatorname{rot} \vec{F}$ a través de una superficie cerrada

Tarea: Comprueben -aplicando la igualdad de Gauss- que $\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = 0$, a través de

toda superficie cerrada S . (Recuerden que ya habíamos probado este resultado aplicando la igualdad de Stokes).

Autoevaluación (Superficies alabeadas)

1. Complete:

- a) $F(x, y, z) = 0$ es la ecuación de una superficie en \mathfrak{R}^3 dada en forma
- b) $z = f(x, y)$ es la ecuación de una superficie en \mathfrak{R}^3 dada en forma . . .
- c) $y = g(x, z)$ es la ecuación de una superficie en \mathfrak{R}^3 dada en forma . . .
- d) $x = h(y, z)$ es la ecuación de una superficie en \mathfrak{R}^3 dada en forma . . .

2. ¿Cuándo se dice que una superficie es suave ? ¿Cómo expresa en general la ecuación de una superficie para que su campo de vectores normales tenga en la tercera componente el valor 1? , ¿y en la segunda componente 1? ¿y en la primera? Dé ejemplos de superficies suaves cuyo campo de vectores normales cumplen las condiciones citadas antes.

3. ¿Cómo calcula el área de una porción de superficie alabeada? Justifique.

4. Analice para cada una de las superficies siguientes si le conviene usar la ecuación de la superficie en forma vectorial paramétrica o en cartesianas para calcular el área de las mismas. Aclare por qué.

- a) S : es la porción de $z = x^2$ limitada por los planos $y = 0$, $y = 5$, $z = 4$
- b) S : es la porción de $z = x^2 + y^2$ limitada por el plano $z = 4$.
- c) S : es la porción de $x + y + z = 1$ en el primer octante.
- d) S : es la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 25$
- e) S : es la porción de $x^2 + y^2 = 1$ limitada por los planos $z = 0$; $z = 4$.

5. Calcule el área de las superficies del ejercicio 4.

6. De algún ejemplo de una superficie que no sea suave en todo punto.

7. Complete teniendo en cuenta la expresión $\text{área}(S) = \iint_R |N| dA$

- a) Si $z = f(x, y)$, R es la proyección de S sobre el plano
- b) Si , R es la proyección de S sobre el plano yz
- c) Si $y = g(x, z)$, R de S sobre el plano

Autoevaluación (Integral de superficie)

1. ¿Cómo define $\iint_S f(x, y, z) ds$ donde f es una función continua sobre una superficie suave S ?
2. a) Indique como calcula la integral definida en el ejercicio 1 si S está dada en forma vectorial paramétrica en función de u y v con u y $v \in R_{uv}$.
b) Indique como calcula la integral definida en el ejercicio 1 si S está dada como una función de x y z .
3. ¿Qué se calcula con $\iint_S ds$? Justifique.
4. Complete: Unageneraliza la integral doble de manera similar a la forma en que una integral curvilínea generaliza la integral.....
5. Complete:
 - a) Si S está dada por $z = f(x, y)$ donde $(x, y) \in R_{xy}$ entonces $\iint_S \phi(x, y, z) ds = \dots\dots\dots$
 - b) Si S está dada por $x = h(y, z)$ donde $(y, z) \in R_{yz}$ entonces $\iint_S \phi(x, y, z) ds = \dots\dots\dots$
 - c) Si S está dada por $y = g(x, z)$ donde $(x, z) \in R_{xz}$ entonces $\iint_S \phi(x, y, z) ds = \dots\dots\dots$
 - d) Si S está dada por $\vec{r}(u, v)$ donde $(u, v) \in R_{uv}$ entonces $\iint_S \phi(x, y, z) ds = \dots\dots\dots$
6. ¿Qué representa $\iint_S f(x, y, z) ds$ si f es la densidad en cada punto de una superficie delgada S ? Justifique.
7. ¿Cuáles son las fórmulas que le permiten calcular el centro de masa de una superficie suave S ? ¿Qué debe conocer?
8. Si $S = S_1 \cup S_2$, S_1 y S_2 son superficies suaves ¿Cómo resuelve $\iint_S f(x, y, z) ds$?

Autoevaluación (Flujo a través de una superficie)

1. Imagine el agua que fluye a través de una red de pesca que se tiende en un arroyo. Suponga que se desea medir la cantidad de agua que pasa por la red, es decir, el volumen de fluido que cruza la superficie por unidad de tiempo. ¿Qué nombre recibe esta cantidad de agua?

2. ¿Qué significa que una superficie sea orientable?

3. ¿Qué interpretación tiene $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$? Describa los elementos involucrados.

4. a) Indique cómo calcula la integral definida en el ejercicio 1 si S está dada en forma vectorial paramétrica en función de u y v con u y $v \in \mathbb{R}_{uv}$.

b) Indique cómo calcula la integral definida en el ejercicio 1 si S está dada como una función de y y z .

5. ¿En qué caso el flujo que atraviesa una superficie es negativo?, positivo?

6. Si $\vec{F}(x, y, z) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ con a, b, c constantes, \vec{F} campo de velocidades de un fluido y sea S la cara superior del cubo $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$. Calcule el flujo que atraviesa la superficie. Interprete el resultado obtenido.

7. ¿Cómo calcula $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$ si S es el cubo del ej. 6 orientado hacia el exterior?

8. Una carga eléctrica q se coloca en el origen. El campo eléctrico resultante $\vec{E}(\vec{r})$ en el punto con vector posición \vec{r} está dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = q \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}, \quad \vec{r} \neq 0. \quad (\text{ley de Coulomb})$$

Encuentre el flujo de \vec{E} hacia el exterior de la esfera de radio R con centro en el origen.

Autoevaluación (Teoremas de Stokes y Gauss)

1. El teorema de Green relaciona una integral doble sobre R con una
En lenguaje coloquial la fórmula de Green dice.....
2. El teorema de Stokes relaciona una integral de superficie sobre S con una
En lenguaje coloquial la fórmula de Stokes dice.....
3. El teorema de Gauss relaciona una integral de superficie sobre S con una
En lenguaje coloquial la fórmula de Gauss dice.....
4. ¿Qué propiedades debe cumplir la superficie S para poder aplicar el Teorema de Stokes? ¿y el campo \vec{F} ? ¿y la curva C ?
5. ¿Qué propiedades debe cumplir la superficie S para poder aplicar el Teorema de Gauss? ¿y el campo \vec{F} ?
6. Suponga que se cumplen las hipótesis del teorema de Gauss para los siguientes casos:
 - a) Si $\text{div}\vec{F}$ es constante entonces el volumen del sólido V encerrado por la superficie S se puede calcular mediante (Escriba la expresión)
 - b) Si \vec{F} es un campo vectorial constante entonces $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \dots\dots\dots$
7. Muestre que si $\text{rot}\vec{V} = \vec{0}$ en D (región simplemente conexa) entonces $\int_A^B \vec{V} \cdot \vec{T} \, ds$ es independiente del camino, siendo A y B dos puntos de D .
8. Muestre que si $\text{rot}\vec{F} = \vec{0}$ en D simplemente conexa entonces la integral de \vec{F} sobre cualquier C cerrada es cero.

9. Interprete

- a) $\text{rot}\vec{F} \cdot \vec{n}(P_0)$ usando teorema de Stokes
 b) $\text{div}\vec{F}(P_0)$ usando teorema de Gauss

10. Si una pequeña rueda con paletas se coloca inmersa en un fluido centrada en un punto P , girará más rápido en torno de P si su eje tiene la dirección del La dirección de giro será determinada por la regla de

11. Si S es una esfera orientada con normal exterior entonces muestre que

$$\iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, ds = 0 \quad \text{usando :}$$

- a) Teorema de Stokes b) Teorema de Gauss

12. Muestre que si S es una esfera orientada con normal exterior y \vec{F} es un campo vectorial constante entonces $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = 0$

13. Muestre que los valores del flujo del $\text{rot}\vec{F}$ a través de dos superficies orientadas de la misma forma y con la misma frontera coinciden.

BIBLIOGRAFÍA

Larson R.E., Hostetler R P. y Edwards B. H. , Cálculo , Vol I y II, McGraw Hill, 1999.

Stewart J. Cálculo Trascendentes Tempranas, Thomson, México , 2000

Purcell E.J., Varberg D. y Rigdon S. E. Cálculo, Pearson, 2000.

Smith R. , Minton R., Cálculo, Vol I y II , McGraw Hill, 2000.

Thomas y Finney, Cálculo, vol I y II, Pearson ,1998

Edwards-Penney, Ecuaciones diferenciales. 4a.ed., Pearson, 2001

Zill, Ecuaciones diferenciales. con aplicaciones de modelado -Thomson 8va ed., 2006

LOS AUTORES

MARÍA CRISTINA VACCHINO

Es Licenciada en Matemática, Facultad Ciencias Exactas, UNLP; Profesora en Filosofía y Pedagogía, Instituto del Profesorado San Nicolás y Especialista en Tecnología Informática Aplicada a la Educación, Facultad de Ciencias Informáticas, UNLP.

En relación a la estructura y temática del libro, es coautora, entre otros, de los siguientes trabajos: *“Innovación en la enseñanza de la Matemática en las carreras de Ingeniería de la UNLP: evaluación y perspectivas”*, 2007; *“Apertura del Ciclo Básico de las Carreras de Ingeniería”*, 2008 y *“La visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral”*, 2011.

Ha sido integrante de proyectos de investigación en Optimización No-Lineal y de la UID GIGIE (Grupo de trabajo interdisciplinario para el desarrollo de innovaciones educativas) y Prof. Titular Ordinario de Matemática B hasta diciembre de 2011 en la Facultad de Ingeniería de la UNLP.

PABLO ACOSTA

Es Licenciado en Matemática, Facultad Ciencias Exactas, UNLP. A lo largo de su carrera docente se desempeñó como profesor en distintas materias del área básica de matemática para alumnos de ingeniería, en particular, fue Profesor Titular Ordinario de Geometría Analítica y de Matemática B hasta el año 2007. Su vasta experiencia docente fue volcada en la elaboración del material inicial del presente libro.

VIVIANA EDITH GÓMEZ

Es Licenciada en Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, UNLP. En su carrera docente se ha desempeñado en diferentes materias del área básica de matemática. En la Facultad de Ciencias Exactas ha sido profesor Adjunto Ordinario de Análisis Matemático I y, en la Facultad de Ingeniería ha sido Profesor Adjunto de Matemática B desde el año 2007 y actualmente es Profesor Titular Ordinario de la materia.